EVCLIDIS ELEMENTORVM LIB. XV

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV̄ Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati:

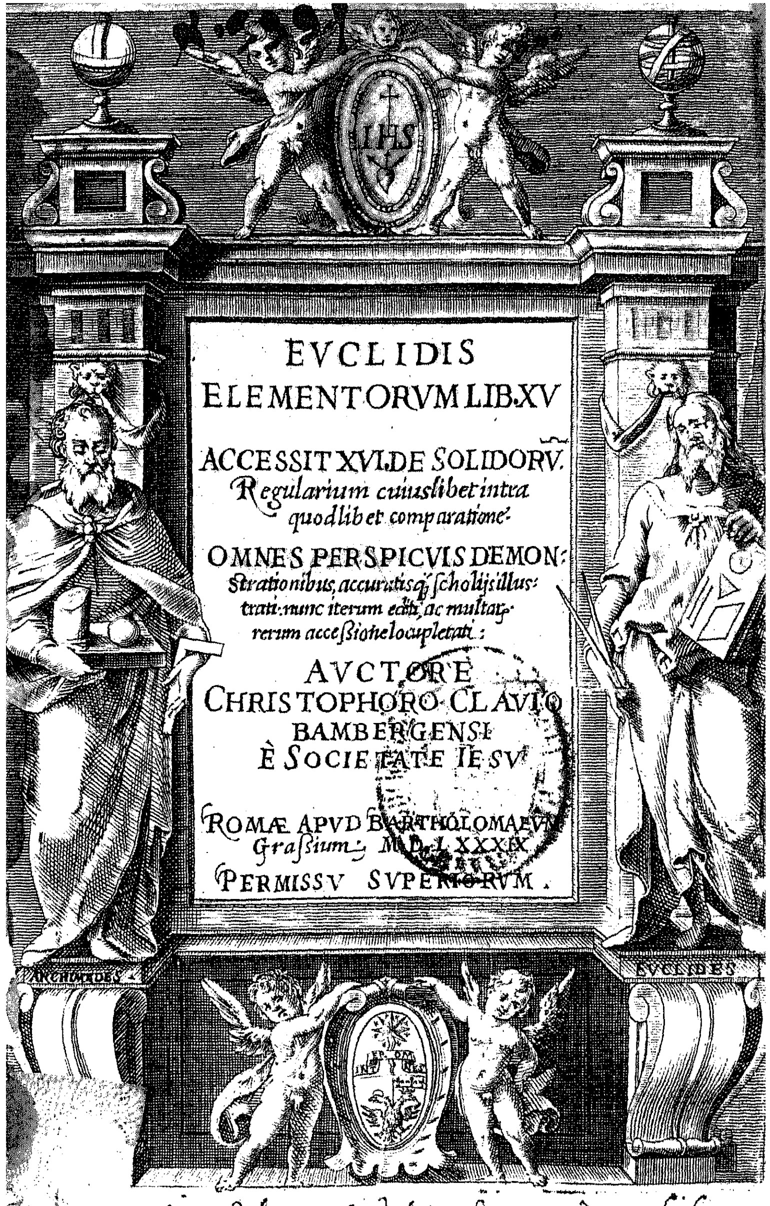
AVCTORE CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI È SOCIETATE IESV

ROMAE APVD BARTHOLOMAEVM Grassium. M.D.LXXXIX

PERMISSV SVPERIORVM.

ARCHIMEDES

EVCLIDES



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIB. XV

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV̄. Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONstrationibus, accuratisq́; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multarũ rerum accessione locupletati:

AVCTORE CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI È SOCIETATE IESV.

ROMÆ APVD BARTHOLOMAEVM Grassium. M.D.LXXXIX

PERMISSV SVPERIORVM.

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

Christophorus Clauius e Societate Iesu S.P.D.

SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathemati-*

carum, commentarios: quorum omnibus iam diſtractis exemplaribus, cum alia eſſent recudēda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio ſucceßit. Sic enim ſe res habet, quod te non fugit; Dux Sereniſsime, quemadmodum nihil eſt ſimul inuentum, & perfectum, ſic nemo eſt, qui a principio in qualibet re ſcribenda, aut exponenda poßit omnia peruidere: multa apparēt iterum ac ſæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante ſugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, ſapientiores ſolent eſſe poſteriores cogitationes. cum quo congruit, & co-

hæret vulgatū illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Diſcipulus eſt prioris poſterior dies. Itaque, cum priorem editionem ſumerem poſtea in manus, multa eſſe animaduerti, quæ ſi adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari poſſe: ſi videlicet e pronuntiatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipſum etſi tunc etiam præſtiti, multo tamen nunc feci copioſius: interiiciens ea ſcilicet, quæ vel vtilia, vel neceſſaria fore cenſui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt ſpecimen dem aliquod rerum, quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo, mutila esse atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquisite rectilinea figura qualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immo (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc

 meum

meum, qualiſcumque eſt, cum ite rum eſſem daturus in vulgus, nemini arbitratus ſum rectius, quã tibi, Dux Sereniſsime, dedicari poſſe. Primum quidem quod cum ſuperiorem illam editionem ſub Emmanuelis Philiberti clariſsimi Ducis patris tui nomine appa rere uoluerim, ſtulte feciſſem, ſi po ſteriorem hãc alij, q̃ tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, et pietatis hæres, eiusque imago cor poris, atque animi, conſecraſſem: Deinde vero quod in hoc ſequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera ſua iudicabat inſcri benda, niſi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuiſſet. Quod cum ita ſit, quid ni hoc tibi potiſsimum deberetur donum, (ſi tamen donum dicendum eſt id, quod qui dat videtur accepiſſe) quem Ioannes Baptiſta Benedictus ſcientiſsimus rerũ Mathematicarum ita teſtatur excel lere in his artibus, illa præcipue in parte, quæ principes viros, atque excellentes Imperatores decet, vt ea, quæ pertinent ad inſtruendos exercitus, oppidaque munienda, per te ipſe implere poßis. Neque vero hæc poſtrema fuit cauſa, etſi poſtremo in loco ponitur: vt tibi, aliisque, quorum in manus hæc ſcripta peruenerint, hac ſaltem ratione oſtenderem ita tibi obligatam eſſe Societatem noſtram vniuerſam, vt iure tibi omnia mea opera

opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurũ, quin vbi tuam istam attigerit dexteram fortitudine fideque præstantem, plurimum sit accepturum vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. LXXXIX.

AD

AD LECTOREM.

ETSI summam diligentiam adhibuimus, vt hi commentarij quam castigatissimi in lucem prodirent: fieri tamen non potuit, (vt est humani ingenij imbecillitas) quin errata aliquot irrepserint; quæ, ne cursum in demonstrando impediant, monitum te paucis uolo, ut ea, antequam ad demonstrationes te conferas, ad normam, quam hic descripsimus, prius corrigere ne grauere. Vale.

ERRA-

ERRATORVM PRIORVM ſex lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata	Correcta.
31.	21.	in ſe diſtent	inter ſe diſtent
38.	13.	recta CD,	rectæ CD,
65.	1.	lineam AE,	lineam AB,
69.	3.	in E.	in G.
95.	13.	limitem E,	limitem F,
97.	16.	anguli AED, EDA,	anguli EAD, EDA,
102.	2.	fuit 3.	fuit ;
107.	17.	angulos ad E,	angulos ad D,
122.	4. a fine.	ſupra ED,	ſupra BD,
123.	25.	angulum ABC,	angulum BAC,
136.	5.	8. primi.	4. primi.
140.	4. a fine.	ad AC.	ad BC,
170.	14. a fine.	angulo ABC,	angulo BAC,
188.	27.	Et quia latus BA, latere AC, ponitur non minus; erit	Et latus BA, latere AC, ponatur maius ; eritq;
188.	31.	non maior	minor
195.		Deeſt litera A, in fig.	in extremo lineæ FE.
212.	1.	æqualium	parallelarũ æqualiũ
256.	10.	ipſi AB:	ipſi AC:
256.	11.	ipſi AC, vel BI;	ipſi AB, vel CI;
300.	5.	ex AB, BD,	ex AB, BC,
314.	2.	AC, EG	AC, BC,
315.	10. a fine.	3. ſecundi	5. ſecundi
317.	1.	ad DH,	ad DE,
336.	12. a fine.	maximæ vel minimæ propinquiores,	maximæ propinquiores,
338.	7. a fine.	7. primi.	4. primi.
402.	16.	BCD, BDA,	BCA, BDA,
417.	9.	18. primi.	18. tertij.
423.	8. a fine.	in eaſdem partes	non in eaſdem partes
424.	27.	æqualia	æqualia duobus lateribus GE, GF,
432.	24.	in ADB,	in A, & B.
486.	17.	& minus CH.	& minus PH.
580.	20.	a ſeſquialtera	a ſeſquitertia
643.	12.	vel vna excedant,	vel vna deficiant, vel vna æqualia ſint, vel vna excedant.
654.	1.	vt nunquam	vt nonnunquam
665.	5. a fine.	$\frac{1}{16}$.	$\frac{1}{64}$.
687.	16.	erit in	erit ea
696.	17.	ad C, quartam.	ad D, quartam.
706.	1.	ita DH, ad HE.	ita DH, ad HF.
706.	5.	erit quoque HE,	erit quoque HF,
723.	10.	Ergo componendo	Ergo permutando
788.		In rectangulo AC, deeſt litera B.	
795.	9. a fine.	AE, primam	AB, primam
798.	1.	Ducta per D,	Ducta per A,
799.	9.	Erit igitur, vt GB, ad BA,	Erit igitur vt GC, ad CA,
799.	13.	vt GB, ad BA,	vt GL, ad AK,
818.	vltima.	22. quinti.	12. quinti.
911.	17. a fine.	ita SR, ad KR,	ita SK, ad KR.
913.	16.	cuius diameter	cuius ſemidiameter.

432.

Alia errata minoris momenti facile quiuis corriget. Errata vero poſteriorum librorum, ad finem totius Euclidis reperies.

QVÆ

QVAE PRAECIPVE
Prioribus Commentarÿs posteriore hac editione addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quã Proclus affert.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. ꝓp. lib. 1. absque ope proportionũ sexti lib.

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima ad finem lib. 4. de figuris æquilateris, atque ęquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoq; æquilatera.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum ęquemultiplicia definierit.

VIII.

DESCRIPTIO inflexę cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes ęquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta ęqualis exhibetur, & contra: Et denique alia

alia ſcitu iucundiſsima perficiuntur.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non.

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorũ fractorum demonſtrationes clariſsimæ.

XI.

DE Proportionum cõpoſitione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regulariũ in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierũ conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe.

Cætera quæ paſsim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.

IN EV-

IN EVCLIDIS

ELEMENTA PROLEGOMENA.

PRAEFATIO.

SIQVIS forte miratur, cur poſt tot præclariſsimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis ſcriptoribus editos, nouas adhuc ipſi commentationes conſcripſerimus, is facile ſibi perſuadebit, non temere id a nobis eſſe factum, ſi conſilij noſtri rationem cognouerit. Cum enim lõga, diuturnaq; experientia nobis eſſet perſpectum, atque exploratum, eam eſſe vtilitatem, atque adeo neceſsitatem horum elementorum, vt fruſtra quiſquam ſe ſperet ſine ipſorum præſidio, acutiſsimas, ſubtiliſsimaſque Archimedis, Apollonij, Theodoſij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illuſtrium Mathematicorum demonſtrationes poſſe percipere; vehementer dolebamus, tam inſignem, & illuſtrem auctorem a pleriſq; omnino negligi, a perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc noſtro ſeculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant, ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile consequendam horum elementorum doctrinā: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinē, ac methodum peruerterunt, verbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus, germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maxime in decimo libro perspicitur: Alter (Theonē intelligo) pene innumeris mendis, vitijsque incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas grecas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas, ac male expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore, ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt, vel si qui in vniuersum Euclidem commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demōstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas con-

finxerunt, quæ plerunq; non tam firme sunt, neque rem ipsam simpliciter, & absolute conficiunt; præsertim quod modo e propositionibus voces quasdam perperam detrahūt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero, proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commādinum Vrbinatē Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras, ac vigilias studiosis harum rerum nōnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem vtilitatē, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque vnquam deponi ab his, qui fructū aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere volunt, in eoque progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdū factum videamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi nostri commentarij in vniuersum Euclidem cōscripti commodiore nunc for-

 ma,

ma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisque asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatē licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erāt scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo poeta dictum est. *Breuis esse laboro, obscurus fio*: Interdum etiam, cum breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrunq; vitantes, eas, velut ἐπιτρεχόντως, atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupiētes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque a scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Cāpano, alijsq; auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisq; meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tāquam in scopulos quosdam, incidentes, a recto cursu deflexerūt, & in errores varios, atque absurdos, prorsumq; ab instituto disciplinæ abhorrētes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excrescerent, quam vt vnius libri spatijs, hac præsertim forma, commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera sex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vna cum decimosexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Francisco Flussate Candalla adijcere voluimus, complectitur.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarũ disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi, benigne Lector, alteram editionem priore una multò locupletiorẽ: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationẽ vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquã, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentã, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquã enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam, quia tamen

men eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neq; enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclid. de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam, & ratio ad circulũ quadrandum (res tot seculis à doctißimis viris exagitata) conficitur: quod alibi docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales, & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium, atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, operæpretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenã Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primùm ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia, atq; vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

MATHEMATICAE DISCIPLINAE CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quâ anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo cõprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respõderit, vt puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quod solæ modum, rationemq; scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs

principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles testatur; neque vnquam aliquid non probatum assumũt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinásue non semper obseruare videmus, cum plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratáue, adducant. 1. Poster.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cũ enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines cõprehenduntur, & vtraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eãdem quãtitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine siue quantitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique eãdem magnitudinem, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, & Geometria puræ, Musica vero, atque Astronomia mixtæ dicuntur, oẽs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cætera huiusmodi, vel facile, vt ad capita, a quibus dependent, reduci possunt.

ALIA

ALIA ratione a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor est Proclus in commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ disciplinæ diuidũtur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseq; docet, ad quanam sese extendãt Mathematicæ disciplinæ, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subijcere statui. Volunt itaq; prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam vero in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq; scientias, Arithmeticam, & Geometriam: In posteriori vero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuã, Geodæsiam, Canonicam siue Musicam, Supputatricem, atq; Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonum, exercetur: Metheoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumq; reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumq; stellarum distantias huiuscemodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt a Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, se se nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs, & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam Specularium, quæ circa varias, multiplicesq; versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq; videantur. Geodæsiam appellant eam scientiã, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tãquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem

non

non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes cõcentuum considerat rationes, sensusq; vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæq; coniunctarũ consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητική *vocatur, eorum, inquam, quæ gerẽdis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra marique obsidentibus resistentia; Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ* θαυματοποιητική *dicitur, quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio cõstruit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisq; animatas cõuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ* σφαιροποιία *appellatur, ad cælestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouẽdi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasque pertinet acies, quam Græci* τακτικὴν *vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eã volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neq; medendi artẽ Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam medici Mathematicis*

vtantur

vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero quamplurimas res in arte sua huiuscemodi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quę in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamē ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinē, castra, suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quę nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARUM disciplinarum.

OMNES disciplinas Mathematicas a varijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoria quoque proditum est. Arithmetices.n. inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusque successores, nec nō Aegyptij, Greci denique atque Arabes amplificarunt, varijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus vero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretque, vt nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cęlestia dimetienda conuertit, tradiditque principia vniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quę ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimis, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theętetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemęus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentā esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomię cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illū suis humeris cęlum sustinere; Alij putant, Chaldęos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientię faciunt inuentores. Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hæc autem in scientia, vt est prestantissima, ita quoque maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum pręcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quonis modo agentes, facile ex ipsis, tamquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductę.

NOBI-

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinę Mathematicę de rebus agunt, quę absque vlla materia sensibili considerãtur, quamuis re ipsa materiæ sint immersę; perspicuum est, eas medium inter Methaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earũ consideremus, vt recte a Proclo probatur. Methaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur; liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque pręstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematicę disciplinę inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq;, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationẽ tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sępenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hęreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectę, (vt alios interim philosophos silentio inuoluam) quę ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortę, adeo & inter se, & nõnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Gręcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij deniq; Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriãtur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demõstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorũ, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis synceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentq;, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMATICARUM disciplinarum.

NON solum vtiles, verumetiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Methaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasq;, quas contemplatur Methaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res methaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. August. lib. 2. de Doctrina Christiana Cap. 16. *demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longe post pluribus verbis repetit eodem lib. Hoc* Cap. 37. *idem*

idem docet D. Hieron. tomo 1. Epiſt. 5. aſſerens, magnam in-
eſſe numeris vim ad multa myſteria in ſcripturis intelligẽda:
Quo item loco, Geometriam magnam aſſerre Theologis vti-
Cap. 16. litatem, perhibet. Rurſum B. Auguſt. loco, quem paulo ante
retuli, teſtatur, Muſicam pernecеſſariam eſſe doctori Chri-
Cap. 19. ſtiano, ſubiungens paulo poſt, Theologos debere etiam Geogra-
phia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans D. Grego-
rius Nazianzenus, ſummis laudibus D. Baſilium pręcepto-
rem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numero-
rum cognitione, cæteriſque ſcientijs Mathematicis, fuerit nõ
mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes
ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad
reliquas id genus doctrinas, arteſque perfectè acquirendas,
vt perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumi-
na antiquorum philoſophorum, maxime Ariſtotelis, & Pla-
tonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene recteque phi-
loſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretũ
cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis
ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, vt ea, quæ alioquin
multis obſtructa difficultatibus videbantur eſſe, per exempla
huiuſmodi clariora, magiſque perſpicua fierent; quæ procul
dubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathemati-
carum omnino eſt expers. Quid? quod olim nemo auſus eſſet
celeberrimum Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui
prius optime Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus?
Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe,
ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in
Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe nõ du
bitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Rep. præcipit: Mathe-
maticas diſciplinas primo omniũ eſſe addiſcendas, propter va-
rias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copioſe ſcribit) non
ſolum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad
remp. bene adminiſtrandam: Cuius ego rei multa exempla
cum præteriti temporis, tum noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret,
in medium poſſem adducere. Ibidem clariſſimis verbis affir-
mat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos
eſſe, idoneoſque, adeo, vt etiãſi nullam aliam nobis hæ ſcien-
tiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum
alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni
ſtudio

ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium, menteq; ad reliquas
artes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorẽ: Quod
quidẽ experientia ipſa magiſtra facile comprobatur. Videmus
enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hiſce di-
ſciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs ſcientijs
percipere: Contra vero, eos qui ad haſce facultates idonei mi-
nime reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure
optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atque ite-
rum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atq; com
mendat; præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſo-
pho, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnis eruditio-
nis ingenuæ viam appellat, & pleriſque alijs in locis, quibus
nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſuperſedeo.
Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque
voluptas, qua cuiuſque animus his artibus colendis, exercen-
diſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem artibus
liberalibus, in quibus non ſolum ingenui adoleſcentes, verum
etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad hone-
ſtiſſimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quã
ſumma etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multũ-
que verſari ſolebant: Quorum exemplum multos adhuc no-
ſtra hac ætate imitari conſpicimus. Teſtatur, magnam ani-
mi voluptatẽ ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de
Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum ani-
mæ, qui ab alijs ſtudijs excæcatur, defoditurq;, a Mathema-
ticis tantum diſciplinis recreari, excitarique rurſus ad eius,
quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia
Platonis, aliorumq; grauiſſimorum Philoſophorum, quibus ha
rum diſciplinarum vtilitas cum neceſſitate, & delectatione
coniuncta, atque præſtantia abunde poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elemẽtorum
inſtitutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem no
bis interpretandum propoſuimus, deq; Geometria
vniuerſa, in medium proferamus) & quo tem-
pore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim,

vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondẽdoque (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad lib. 2. vbi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiã discipulus fuit, cõductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natũ anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumẽto, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissime enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquã morituram famã sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo philosopho lõge alius est, qui, cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes,

tes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptũ, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime vero hoc volumen elementorum Geometricorum nunquam omnium consensione satis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione cõtexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea dũtaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque vtilia, ad cõmunem omnium vtilitatem, argumentis, & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Cæterum, quanta sit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geometriæ, præstantia, ac vtilitas, partim ex ijs, quæ ante scripsimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eã ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarũ, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere varie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ *totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis deniq; totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur, atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cæli vniuersi, siderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque varij tam expedite cognoscuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, antequam fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mētis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq; fidem superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testātur historię. Cum enim Hieron. Syracusarum rex nauem, quā Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, vt eā omnes vna Syracusij a loco dimouere minime valerent, Archimedes Geometra peritissimus vnius Geometriæ viribus fretus regi promisit, se effecturum, vt ipsam solus rex absque vllo labore subduceret: Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendū est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pōdera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime ostendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quā incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoriæ proditum est. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit,*

vt

vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quē diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis saluti publicò edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum, & voluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem viuo habere nō potuit. Cuius sepulchrum Cicero a se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad præstantiam, vtilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoq; eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidē ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorū, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioq; arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse, Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæque (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tū ob eā etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit vtilis, vt aliæ artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in cælum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cœlestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque vero mirum alicui videri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis: Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimũ circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam constituũt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus vero quinq; de solidis acutissime disputat, eorumq; proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam vero cum res oẽs Geometricæ, tum præsertim solida illa quinq; regularia, quę corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absq; linearum cõmensurabilium, atq; incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines sub mensurã cadere nulla ratione absq; earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea cõmuni, & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis cõplecteretur oĩa documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimẽsionemq; requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librũ, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commensurabilium, & incommensurabiliũ sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorũ passionibus, easq; copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totũ hoc volumen elementorũ Geometricorum quindecim libris cõprehensum (quorum quidẽ priores tredecim sine vlla cõtrouersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores vero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes cõplectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; disputet; Quarta deniq; reliquis quinq; libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum cõplectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto deniq; proportiones figurarum planarum discutiũtur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocãt eam demonstrationẽ, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterũ constitui, appellabitur huiusmodi demonstratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraq; pars contradictionis (vt ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiã quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent cõstruere, & cuius contrarium effici etiã potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineã

rectam

rectam finitam triangulum æquilaterũ posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, vel scalenũ, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineũ secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tñ discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nã in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantũ probabiliter, ita vt intellectus cuiusq; ambigat, vtranã illius pars vera sit: In Mathematico uero, quamcunq; quis partẽ elegerit, eam firma demonstratione, ita vt nihil omnino dubij sit reliquum, cõprobabit. Si.n. Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet vtiq; hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodẽ modo dicendũ est, si ex eodem puncto velit educere lineã non perpendicularem. Theorema aũt appellant eam demonstrationẽ, quæ solũ passionem aliquam, proprietatemue vnius, vel pluriũ simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triãgulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabũt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulũ, aut quippiam aliud construere, sed contẽplatur tantũmodo trianguli cuiuslibet constituti passionẽ hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis vtraq; pars vera vt sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadẽ ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaq; vt vno verbo dicã, quæsitum illud Mathematicũ construere aliquid docens, cuius etiam oppositũ potest effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam oẽs anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstrabitur lib. 3. propositione 31. Quamobrẽ theorema hoc, & non problema dicendũ erit. Cæterum tam problema, quã theorema dici cõsueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod vtrũ-

que

que aliquid nobis proponat, vt in exemplis adductis constat. Hæc ideo dixerim, vt studiosus lector non miretur quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionũ alias dici problemata, alias theoremata. Elementa.n. Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorũ interim volumina taceã,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt his fere verbis: Quod faciendũ erat: Theorematũ vero hisce: Quod ostendendũ vel demonstrandum erat; habita nimirũ ratione finis vtriusq;. In quolibet aũt problemate, ac theoremate plures demõstrationes continentur et non vna tantũ, quamuis vltimus syllogismus demõstratiuus solum cõcludat id, quod in initio demonstrandũ proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM vero ad demonstrationes problematũ, atq; theorematũ sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipue agiĩ, vt breuius demõstrari possint. Vocant autem illa Lẽmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de alijs. Itaq; Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis assumiĩ, vt demõstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq; disciplina ex præexistente gignatur cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt vtiq; & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autem tria tãtummodo genera apud Mathematicos reperiuñ. In prima reponuntur oẽs definitiones, quas nonnulli cum Arist. suppositio-

nes,

nes, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicant, ne in tractatione ipsa, nominũ ambiguitate, aut obscuritate circũuenti in paralogismos incidamus. Secundũ genus complectit̃ petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeãt confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, seu cõmunes animi notiones, quæ non solũ in scientia proposita, sed etiam in oĩbus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atq; his principijs recte mihi videt̃ accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles A ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igit̃ hoc in volumine Geometricorum elementorũ præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum oĩa hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidẽ facile a quouis intelligunt̃, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquã assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarent̃. Vñde hoc etiã nomine summis laudibus efferenda est Geometria, oĩbusq; seculis prædicanda, quod ex tã exiguis initijs cuilibet quantũuis rudi et ignaro notissimis, et quidem perfacilibus progrediat̃ ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tñ omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq; certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquat̃. Porro in huiuscemodi principijs tradẽdis hic ordo ab Euclide seruat̃, vt in ipso quidẽ introitu scientiȩ proponat principia toti Geometriæ cõmunia, in alijs autẽ deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadã ratione, ad materiam illorum subiectam videtur spectare. Neq; vero oĩa principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tñ ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verũ ne in hac quoq; parte defuisse videamur rerũ Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietatesque triangulorum tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdũ, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquãdo ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem, atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas cõstitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarũ maximè primæ, ac præcipuæ, *cipue, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositã exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate cõtinua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemùe alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solum est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris pũctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.*

punctum

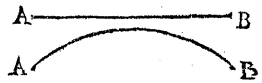
II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT *hic lineam, primam speciem magnitudi-*

nis,

nis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, nõ autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari atque diuidi.



III.

LINEAE autem termini, sunt puncta.

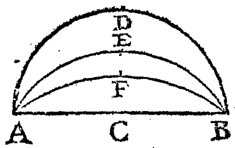
DOCET, *quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineã terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.*

RE-

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraq; . Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectẽdo subsultat; in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcise spatiũ, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Lineæ uero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineã perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectũ, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis*



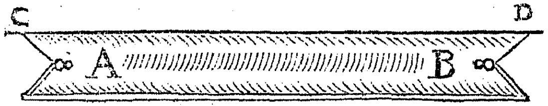
non

non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, sed æquabilẽ quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaque si duo puncta moueãtur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformiũ rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoidees, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquẽ conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem

infinitus

infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum. (Lib. 1. tex. 5.)

SED *quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur.*

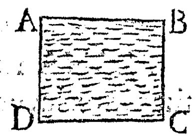


Deinde regula inuertatur, vt superior superficies fiat inferior, & inferior euadat superior, dextraque pars transeat in sinistram, & contra, hoc est, partes regulæ prope B, statuantur iuxta punctum C, rectæ descriptæ, & partes prope A, iuxta punctum D; & secundum idem latus regulæ C D, à puncto C, ad D, recta ducatur. Nam si posterior hæc priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST *lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate.*



ditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, consideratáq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

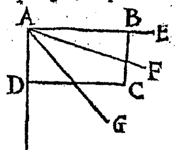
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON *dissimilis est hęc definitio superiori, quæ termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineę A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.*

VII.

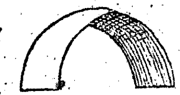
PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumùe subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorùe, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies



ABCD, tum demum plana dici debet, quando linea recta AE, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ AB, nunc eadem, quæ AF, nunc eadem, quæ AG, & nunc eadem, quæ AH, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum AB, & AF, & deniq; secundum omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur superficies perfecte

plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæùe rotũdæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ.

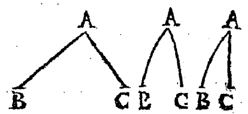


Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

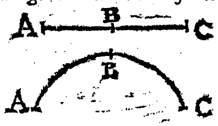
VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & nõ iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existẽtem superficie,



in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ *lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum cõtactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangãt iacentes in directum, ita vt alterutra producta cõgruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnã integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta cõuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundũ suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere.*



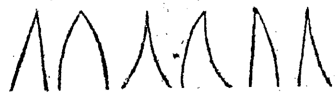
Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productę se mutuo secent: Curuę autem lineę, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotę cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

CVM

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineę, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS *omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum cõuexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur:*



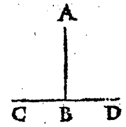
Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdũ; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; ęqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS *frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-*

ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis recta A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

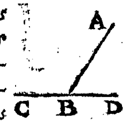


OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.

QVANDO recta A B, rectæ C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

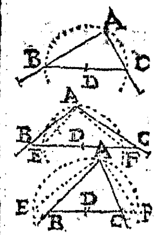


XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

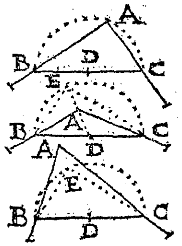
VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiūt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum vero, per angulum A B D; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

IAM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id *hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat,* [a] *erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo BAC, existat: si vero idē semicirculus rectā BC, secet in E, F, erit angulus BAC, obtusus; propterea quòd, ductis rectis E A, F A,* [b] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C: Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea quòd ductis rectis E A, F A;* [c] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.*



[a] *31. tertij.*
[b] *31. tertij.*
[c] *31. tertij.*

ALITER *idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A,* [d] *datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si uero idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C;* [e] *eritque angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus* [f] *maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C;* [g] *eritq; angulus B E C, rectus in semicirculo: qui cum* [h] *maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse uidetur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non uideatur, inquam, mirum; quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ*

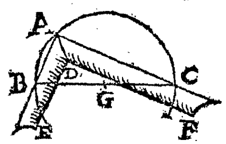


[d] *31. tertij.*
[e] *31. tertij.*
[f] *21. primi.*
[g] *31. tertij.*
[h] *21. primi.*

quisitæ

quisitæ sint demonstratæ. Satis est, ut praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim proprijs in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, ubi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariæ sint propositiones posterius demonstratæ.

FACILIVS *idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumētum A B C, constans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nā si latus A B, huius normæ rectæ A B, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & normæ latus A C, rectæ A C, congruat; erit angulus A rectus: si uero citra rectā A C, cadat normæ latus A C, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ A C, ultra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, ut perspicuum est.*



ITA *autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo B A C, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, ut in A, latusq; unum normæ, ut A B, per B, punctum extremum diametri trāseat. Nam si alterum tunc latus A C, per alterum pūctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma A B C;* [a] *quòd tunc angulus B A C, in semicirculo B A C, rectus sit: si uero latus A C, non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c.*

[a] *31. tertij.*

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES *sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum*

enim

enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quę sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON *omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed eæ solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, ut solida finita, Figuræ nomine appellabũtur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur, Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, uel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura uocari nulla ratione potest. Figuræ unico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & aliæ huiusmodi: Pluribus uero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos uariarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum uero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse uidetur.*

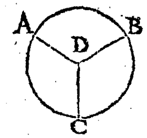
XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quę peripheria

appel-

appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineę inter se sunt æquales.

DEFINIT *hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea* A B C, *habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a* D, *omnes rectæ lineæ cadẽtes ad terminũ* ABC, *quales sunt* DA, DB, DC, *inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione* 1. *tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est* A B C, *appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cæperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta* AD, *circa punctum* D, *quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cæpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum* A, *delineabit peripheriam* A B C: *Erit quoque punctum quiescens* D, *illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta* AD, *circumducta, omnes lineas, quæ ex* D, *possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.*



HOC

XVI.

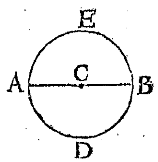
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, *punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum* D. *Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectę ad peripheriam circuli cadentes sunt ęquales, vt ait Theodosius in sphęricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphęrę, non autem in superficie circuli; quę tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cęterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineę cadentes in peripheriam sint ęquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes alię ab eodem puncto emissę inter se sint æquales.*

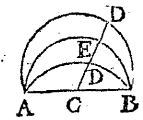
XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quę circulum bifariam secat.

SI *in circulo ducatur recta linea* A B, *per centrum* C, *ita vt extrema eius* A, & B, *terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quę per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrũ duntaxat.*



Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque æquales circunferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, *accommodari, & coaptari portioni reliquæ* A E B, *ita vt diameter* A B, *communis sit vtrique portioni: Si igitur circunferentia* A D B, *congruat penitus circunferentiæ* A E B, *manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si uero circunferentia* A D B, *non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam* A E B, *sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro* C, *secante circunferentiam* A D B, *in* D, & *circunferentiam* A E B, *in* E, *erunt duæ rectæ* C D, C E, *ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamẽ vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, uel intra, uel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoque æquales erunt. quod demonstrandum proponebatur.*



EX *hac demonstratione constat, diametrum non solum circunferentiã, uerumetiã totam areã circuli secare bifariam. Cũ enim semicircunferentiæ sibi mutuo congruant, ut ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & utramque circunferentiam comprehensæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.*

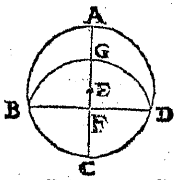
XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quę continetur sub diametro, & sub ea linea, quę de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI *gratia, in superiori circulo figura* A D B, *contenta sub diametro* A B, & *peripheria* A D B, *dicitur semicir-*

micirculus, quia, ut in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

QVOD si recta linea B D, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas poriones



inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quam alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones B A D, BCD, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, ut super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui oēs inter se æquales sunt ex defin. 10. cū sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem est, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipsius F A. Cum ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque F C, maior quam E C, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, ut recta F G, eadem tunc existens, quæ F C, minor possit esse quam E A, uel E C. Si namque diceretur cadere extra, ut si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadem tunc existens, quæ F C, maior quam EG, hoc est, quam E C, atque ita pars F C, maior rursum foret toto E C. quod absurdum est. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cum hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quę sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumenumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes a quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

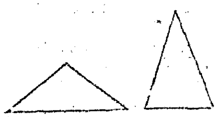
DESCENDIT *iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia.*

Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX *hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri.*

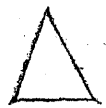


Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.

XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC *deniq; ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triãgulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur.*

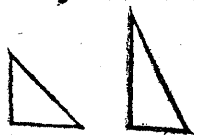


Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isosceli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte cõstruenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus,) fit vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea,



quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17, & 32. huius libri,

XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtusum angulum habet.

TRIANGVLVM Amblygonium, siue obtusangulum esse quoq; potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur, nō autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtusus, omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

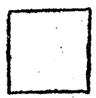
OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Isosceles Oxygonium rursum duplex, Isosceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atq; Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor vero Isoscelis, & tres Scaleni: atq; in vniuersum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Isosceles Oxygonium habens latus tertium vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorū laterum æqualium utrumuis tertio sit minus, vt rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur,

minantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in base trianguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

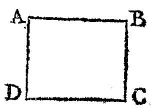
QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

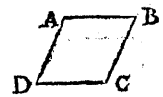


SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter

inter se quoque æqualia sunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

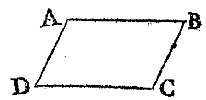
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo ABCD, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum ABCD, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

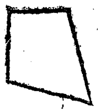


EST hæc figura, quæ Rhomboides uocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, CD, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existũt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilaterę figurę, trapezia appellentur.

RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese equales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

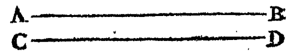


XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata,

modata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis AB, CD, si superficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, rectè ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum cōuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodē existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

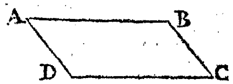


HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus defini-

tionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

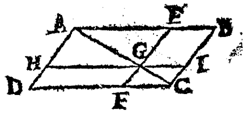


VT figura quadrilatera A B C D, si quidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solũ parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo nõ rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammũ rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterũ, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorũ quoq; aliud quidẽ habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter

meter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrũ in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



SIT parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC; et linea E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

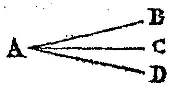
PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM *hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo*

adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod

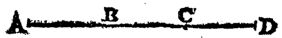


prima hac petitione postulat Euclides, *quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctū* B; *ab eodemq́ aliam ad punctum* C; *Item aliam ad punctum* D; *& sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.*

I I.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

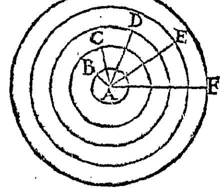
QVOD *si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam.*



Sic linea recta AB, *producta est primo in continuum ad punctum* C, *Deinde ad punctum* D, *&c.*

I I I.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM *vero, si terminatam rectam lineā cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatā esse secundum alterum extremum ad quoduis punctū, ipsamq́ circa hoc punctū fixum circūduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectūq́, quod tertia petitio iubet. Exemplū habes in his quinq; lineis* AB, AC, AD, AE, AF, *quæ singulæ circa centrum* A, *circumuolutæ singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.*

PRAETER *hæc tria postulata quibus* Euclides *contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius* Geometriæ. *Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.*

I I I I.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quātitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quę & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine

dine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI *nulla ratione potest, vt duę quantitates inęquales, ęquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositę quantitati ęqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositę quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quę eidem quantitati ęquales fuerint, inter se ęquales quoque esse. Reliquę quoque partes Axiomatis à nobis adiectę, quod frequentem vsum habeant, clarissimę sunt.*

I I.

ET si ęqualibus ęqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI *enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.*

I I I.

ET si ab ęqualibus ęqualia ablata sint, quę relinquuntur, sunt ęqualia.

NAM *si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.*

I I I I.

ET si inęqualibus ęqualia adiecta sint, tota sunt inęqualia. Et, si inęqualibus

bus inęqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN *& , si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.*

V.

ET si ab inęqualibus ęqualia ablata sint, reliqua sunt inęqualia. Et si ab inęqualibus inęqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC *etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuũ maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferãtur ab inæqualibus. Cæterũ Euclides non docet, quidnã simpliciter, & absolutè gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quãtitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia.*

lia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3 & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO *in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.*

VI.

ET quę eiusdem duplicia sunt, inter se sũt ęqualia. Et quod vnius ęqualiũ duplũ est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, *quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c, alicuius quantitatis, deficeret vtique minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertia illa addatur, erunt composita duplices illius tertiæ,* [a] *sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* [b] *& æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.

b 2. pron.

ET

VII.

ET quę eiusdem sunt dimidia, inter se ęqualia sunt. Et contra, Quę ęqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PARI *ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.*

IN *his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertiæ, vel quartæ, &c. & inter se æqualia necessario existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus; propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vsurpatur.*

VIII.

ET quę sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt ęqualia.

HOC *est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.*

ECONTRARIO, *Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.*

ET

IX.

ET totum sua parte maius est.

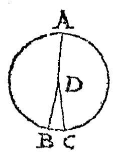
CVM *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.*

IN sequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inserenda esse censuimus valde necessaria, cùm ex iis Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

X.

DVAE lineæ rectę non habent vnum & idem segmentum commune.

NON *est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA,* [a] *describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C;* [b] *Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.*



[a] 3. petit.
[b] 17. defi.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC, commune habẽt segmentũ CD; quia ambæ vnam rectam constituũt lineam

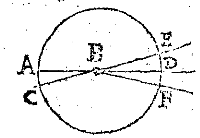
lineam AB. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.

XI.

o.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB; in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentũ commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, producta cadat in F, sitq́; vna recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus ACFD, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF, vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.



DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

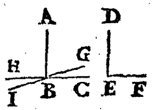
XII.

x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

E HOC

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. de-
finitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod incli-
natio linearum angulum rectum constituentium augeri, mi-
nuiue nequeat, sed prorsus sit immutabilis. Efficitur enim re-
ctus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ
rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neq;
magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit,
omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit ea-
dem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Co-
natur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac
ratione. Sint duo anguli recti ABC,



DEF. quos dico esse inter se æquales. Si
enim fieri potest, sint inæquales, sitque
ABC, maior. Si igitur mente concipia-
mus punctum E, applicari puncto B, &
rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB,
BC, qualis est BG, propterea quod angulus DEF, minor
a 2. petit. ponitur angulo ABC. a Producatur CB, in rectum & conti-
b 10. def. nuum vsque ad H; Cum igitur angulus ABC sit rectus, b
erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoque:
c 2. petit. quare maior etiam angulo ABG. c Producta autem GB, in
rectum & continuum vsq; ad I, cadet portio producta BI,
infra CB, productam, vt in præcedenti Axiomate est de-
d 10. def. monstratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, d
fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angu-
lus ABH, maior quoque erit angulo ABI, pars toto, quod
est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti pro-
positi, sed æquales. Quod est propositum: eademque est ratio
in cæteris.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud
non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqua-
lis rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt
in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum
non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis
angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti in-
ter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XI.

XIII.

ET si in duas rectas lineas altera re-
cta

cta incidens, internos ad easdemq; par-
tes angulos duobus rectis minores fa-
ciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum
productæ sibi mutuo incident ad eas
partes, vbi sunt anguli duobus rectis mi-
nores.

VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem cõuenturas esse ad aliquod punctum vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat.

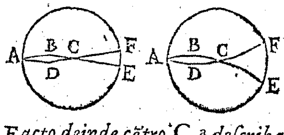
Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum uideri solet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum, & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis: Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

XII.

XIIII.

DVAE rectæ lineę spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principiũ, Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, ADC, superficiē ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A, & C.



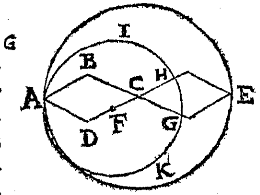
[a] 3. pet. [b] 2. pet.

Facto deinde cētro C, [a] describatur circulus interuallo C A, [b] & producantur rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vsque ad circunferentiam, nempe ad puncta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, transeunt per centrum C, [c] erunt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcirco circunferentia quoque A E, circunferentiæ A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.

[c] 17. def.

SED quia fortasis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atque adeo non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta A D C, quocunque, erit A F, minor, quam F E, cum minor sit, quàm A F C, hoc est, quam C H E, quæ ipsi AFC, æqualis est, atque adeo multo minor, quàm F E. Circulus igitur

igitur



igitur ex F, ad interuallum F A, descriptus secabit rectam F E, in H, atque adeo C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG, minor quam AIH, ~~pars~~ totum quam ~~totum~~ pars, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quàm totũ, vt supra demōstrauimus.

CONSTAT hoc etiam Axioma ex defin. lineæ rectæ. Cũ enim recta linea sit breuissima extēsio ab uno pũcto ad aliud, duci poterit vnica tantũ linea ab vno puncto ad aliud. Quare si A B C, recta est, non erit A D C, recta. Quod etiam patet ex defin. Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ ADC, non obumbrant extrema, cum visus per rectam ABC, feratur. Non ergo recta est A D C.

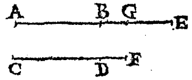
HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

X V. O.

SI ęqualibus inęqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui ęqualis.

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus A B, C D, addantur

 inæqua-



inæquales B E, D F, *sitq;* B E, *maior quam* D F. *Et ex* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt sit* G E, *excessus, quo quantitas addita* B E, *superat quantitatem additam* D F. *Quoniam igitur æqualibus* A B, C D, *addita sunt æqualia* B G, D F, [a] *erũt tota* A G, C F, *æqualia. Quare constat, totam quantitatem* A E, *superare totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo magnitudo* D F, *adiuncta a magnitudine adiuncta* B E, *superatur. Quod est propositum.*

[a] 2. *pron.*

o.

XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quę a principio erant, ęqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, *addantur æquales* A B, C D. *Et ex maiore* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt* G E, *sit excessus, quo quantitas* B E, *quantitatem* D F, *superat. Quoniam igitur æqualibus* B G, D F, *addita sunt æqualia* A B, C D, [b] *erunt tota* A G, C F, *æqualia. Quamobrem tota quantitas* A E, *superabit totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo maior quantitas proposita* B E, *minorem* D F, *superat. Quod est propositum.*

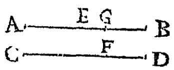
[b] 2. *pron.*

o.

XVII.

SI ab ęqualibus inęqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum ęqualis.

A B *æqualibus* AB, CD, *auferantur inæqualia* BE, DF. *Sitq;* EG, *excessus, quo quantitas* BE, *superat quantitatem* DF; *ita vt* B G, *æqualis sit ipsi* D F. *Quia igitur ab æqualibus* A B, C D, *ablata sunt æqualia* B G, D F, [c] *remanebunt*



[c] 3. *pron.*

manebunt A G, C F, *æqualia. Perspicuum ergo est, residuũ* A E, *superari a residuo* C F, *eodem excessu* E G, *quo magnitudo ablata* B E, *ablatam magnitudinem* D F, *superat. Quod est propositum.*

o.

XVIII.

SI ab inęqualibus ęqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum ęqualis.

A B *inæqualibus* A B, C D, *auferantur æqualia* A E, C F. *Sitq;* B G, *excessus, quo tota quantitas* A B, *superat totam quantitatem* C D, *ita vt* A G, *æqualis sit ipsi* C D. *Quoniam igitur ab æqualibus* A G, C D, *ablata sunt æqualia* A E, C F, [a] *remanebunt* E G, F D, *æqualia. Quare residuum* E B, *superabit residuũ* F D, *eodem excessu* B G, *quo tota quantitas* A B, *superat totam quantitatem* C D. *Quod est propositum.*

[a] 3. *pron.*

IN his quoque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas. 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

o.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM *omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.*

o.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI *potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem Postulatum a problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idē iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq́.*

CON-

CONSTAT *quoque, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronūciatis. Nā octauū, decimū, vndecimū, duodecimū, tertiūdecimū, & quartūdecimū soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HÆC *dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq́; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq́; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie atq; ordine propositionū, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quādo numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur,*

cita-

citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum quælibet citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligendæ ſunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Poſtulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propoſitio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. tertijd.	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. ſextid.	*Nona ſextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi. &c.*

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PRO-

PROBLEMA I.

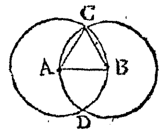
PROPOSITIO I.

1.

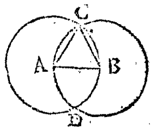
SVPER data recta linea terminata triangulũ AEquilaterum conſtituere.

IN omni problemate duo potiſsimum ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod proponitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem recte eſſe inſtitutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet conſtituere triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta propoſita ſit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta linea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet conſtruere ex principijs conceſsis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ratione conſtructum, eſſe æquilaterum, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in alijs problematibus perſpici poteſt. Hæc etiã duo reperiũtur ferè in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruẽdũ eſt, atq; efficiendum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca verò admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata A B, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] deſcribatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiuſdem rectæ B A, alius circulus deſcribatur C A D, ſecans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; [c] Eritque ſuper rectam A B, conſtitutum triangulum



a 3. pet.
b 1. pet.
c 20. def.



lum A B C, hoc eſt, figura rectilinea cõtenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum neceſſario eſſe æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad
[a] 15.def. circunferentiam circuli C B D, [a] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rurſus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur
[b] 1.pron. A C, quam B C, æqualis eſt rectæ A B. [b] Quare & A C, B C, inter ſe æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

S C H O L I V M.

VT autem videas, plures demonſtrationes in vna propoſitione contineri, placuit primam hanc propoſitionem reſoluere in prima ſua principia, initio facto ab vltimo ſyllogiſmo demonſtratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo prædicta, eſſe æquilaterum, vtetur hoc ſyllogiſmo demonſtrante.

[c] 23.def. *Omne triangulum habens tria latera æqualia, [c] eſt æquilaterum.*

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, eſt æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio ſyllogiſmo.

[d] 1.pron. *Quæ eidem æqualia ſunt, [d] inter ſe quoque ſunt æqualia.*

Duo latera A C, B C, æqualia ſunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter ſe æqualia ſunt. Ac propterea omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia exiſtunt.

Minorem verò huius ſyllogiſmi hac ratione colliget.

[e] 15.def. *Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, [e] inter ſe ſunt æquales.*

Lineæ A B, A C, ſunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter ſe.

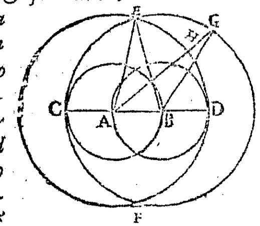
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis ſyllogiſmi tota confirmata erit.

Non aliter reſolui poterunt omnes aliæ propoſitiones non ſolum

lum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

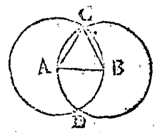
Negligunt tamen Mathematici reſolutionem iſtam in ſuis demonſtrationibus, eo quod breuius, ac facilius ſine ea demonſtrent id, quod proponitur, vt perſpicuum eſſe poteſt ex ſuperiori demonſtratione.

SI QVIS autem ſuper data recta deſideret conſtituere triangulum quoque Iſoſceles, & ſcalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, deſcribantur duo circuli, vti prius. [a] *Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circũferentias vſq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D,* [b] *deſcribatur circulus E D F. Itẽ centro B, interuallo uero B C, circulus E C F, ſecans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E,* [c] *ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit ſuper recta A B,* [d] *triangulum A B E; quod dico eſſe Iſoſceles, nimirum duo latera A E, B E, eſſe & æqualia inter ſe, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circumferentiam E D F,* [e] *erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circumferentiam E C F,* [f] *erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter ſe, (vtraque enim A C, & B D, æqualis eſt rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediantur.* [g] *Quare A C, B D, æquales inter ſe erunt. Addito igitur communi recta A B* [h] *erit tota A D, toti B C, æqualis.)* [i] *Igitur A E, B E æquales quoque inter ſe erunt. Quod vero vtraque A E, B E, maior ſit quam A B, perſpicuum eſt, cum A D, æqualis oſtenſa ipſi A E,* [k] *maior ſit, quam A B; Item B C, æqualis demonſtrata ipſi B E,* [l] *maior quoque ſit, quam A B. Conſtitutum igitur eſt ſuper recta A B, Iſóſceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter ſe, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atque hæc eſt demonſtratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.*



[a] 2 petit.
[b] 3.pet.
[c] 1.pet.
[d] 20. def.
[e] 15. def.
[f] 15.def.
[g] 1.pron.
[h] 2.pron.
[i] 1.pron.
[k] 9. pron
[l] 9.pron.

BRE-



lum A B C, hoc est, figura rectilinea cõtenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [a] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis est rectæ A B. [b] Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

a 15.def.
b 1.pron.

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

c 23.def.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [c] est æquilaterum.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

d 1.pron.

Quæ eidem æqualia sunt, [d] inter se quoque sunt æqualia.

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

e 15.def.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, [e] inter se sunt æquales.

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

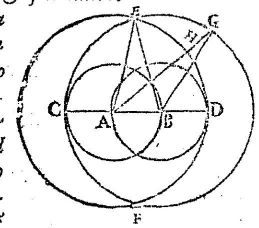
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum

lum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI QVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. [a] Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circũferentias vsq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D, [b] describatur circulus E D F. Itẽ

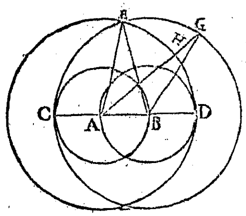


a 2 petit.
b 3.pet.

centro B, interuallo uero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, [c] ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit super recta A B, [d] triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circumferentiam E D F, [e] erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circumferentiam E C F, [f] erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediatur. [g] Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi recta A B [h] erit tota A D, toti B C, æqualis.) [i] Igitur A E, B E æquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque A E, B E, maior sit quam A B, perspicuum est, cum A D, æqualis ostensa ipsi A E, [k] maior sit, quam A B; Item B C, æqualis demonstrata ipsi B E, [l] maior quoque sit, quam A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.

c 1.pet.
d 20. def.
e 15. def.
f 15.def.
g 1.pron.
h 2.pron.
i 1.pron.
K 9. pron.
l 9.pron.

BRE-

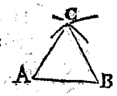


BREVIVS tamen videtur
mihi posse demonstrari, triãgu
lum A B E, esse Isosceles, hac
a 15, def. ratione. a Quoniã AE, æqualis
est rectæ AD, & recta AD, est
dupla rectæ A B, ꝓpterea quod
BA, BD, æquales inter se sunt;
erit & A E, dupla rectæ A B.
b 15. def. Rursus b qa BE, æqualis est re
c 15. def. ctæ BC, & BC, dupla est ipsius AB, ꝓpea q̃ c AB, AC, æqua
les sunt inter se, erit & BE, dupla ipsius AB. Cũ igitur vtraq;
d 6, pron. AE, BE, dupla sit eiusdẽ AB, d erũt AE, BE, inter se æquales,
maioresq́ ꝓpterea recta AB. Isosceles ergo est triãgulũ ABE.
IAM vero, si ex puncto A, e ducatur linea recta A G, ad
e 1. pet. circumferentiam E G F, quæ non sit eadem quæ A E, vel
A D, secans circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G,
ad B f ducatur alia recta GB; g constitutum erit triangulum
f 1. pet. A B G, super recta A B, quod dico esse scalenum. h Quoniam
g 20, def. A G, maior est quam A H: i Sunt autem A H, A E, ex cen-
h 9. pron. tro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E,
i 15, def. hoc est, quàm B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur &
maior erit A G, quam B G, k cum B G, sit æqualis ipsi B E.
k 15. def. Est autem & B G, maior, quam A B, propterea quod tota
B C, æqualis ipsi B G, l maior sit quam A B, pars. Omnia
l 9. pron. ergo tria latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq́ sca
lenum est ex definitione; quod erat faciendum.
BREVIVS quoque ostendemus, triangulum A G B,
esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam m A H, AD, ex cen
m 15, def. tro A, ductæ, sunt æquales, quam B G, B C, ex centro B, du
ctæ: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, duplæ, quod A B,
vtrique B D, AC, æqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius
A B, duplæ, ac propterea maiores, quã A B. Cum ergo n AG,
n 9. pron. maior sit, quam A H, siue quam B G, scalenum erit triangu-
lum A G B, habens latus A G, maximum; B G, medium, &
A B, minimum.

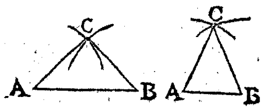
PRAXIS.

CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere;

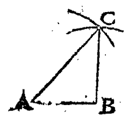
construere; Idq́ in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.



ITAQVE triangulum æquilaterum ita facile construetur super data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ A B, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumq́ erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirẽt enim necessario per puncta A, & B.



ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructumq́ erit Isosceles: quoniam A C. B C, æquales erũt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.



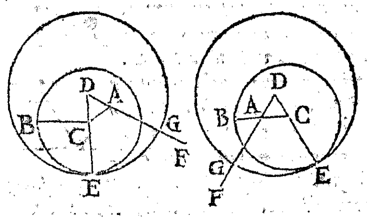
SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutumq́ erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

CÆTERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualẽ ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] construatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiam in E; D A, vero opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, ęqualibus lateribus triãguli æquilateri A C D, [g] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, [h] æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadãt ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidẽ vtraque æqualis est ostensa rectæ C E, inter se [i] æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

a 3. pet. · b 1. pet. · c 1. primi. · d 2. pet. · e 3. pet. · f 15. def. · g 3. pron. · h 15. def. · i 1. pron.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, [k] describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta [l] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, [m] æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

k 3. pet. · l 1 pet. · m 15. def.

SCHO-

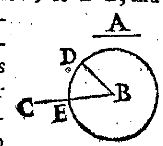
SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq; iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat; vel non e directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ [illegible]uales A, minor, & B C, maior, oporteatq; [illegible] B C, detrahere lineam ęqua[illegible]ori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, [a] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus [b] describatur secans BC, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, [c] æqualis est rectæ B D, & eidem BD, æqualis est recta A, per constructionem; [d] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



a 2. primi. · b 3. pet. · c 15. def. · d 1. pron.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusq; B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

F SCHO-

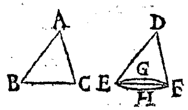
SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4.

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo ęqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqu[illegible]nguli reliquis angulis æquales [illegible]erque vtrique, sub quibus æqu[illegible]era subtenduntur.



SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, cōtentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoq; esse ęquales. Quoniam enim recta AB, rectę DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri supponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsę sibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectę AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem, [c] quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectę DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta EGF, vel EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negarę enim nemo poterit, tam EGF, quàm EHF, rectā esse, cum vtraq; ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectę superficiem [e] claudere non possunt. Quocirca [f] basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. pron.

b 10. pron.

c 14. pron.

d 8. pron.

e 14. pron.

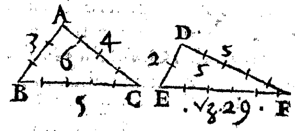
f 8. pron.

SCHOLIVM.

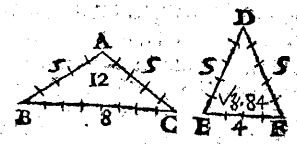
RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus ęqualis sit angulo alterius contento lateribus, quę istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore

 dun-

duntaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, *anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera* A B, A C, *æqualia lateribus* D E, D F, *non quidem vtrumque vtrique, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitq́; AB, 3. AC, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At vero* D E, *ſit 2. &* D F, *5. vt ambo quoque ſimul 7. conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis B C, 5, & baſis* E F, *radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem eſt quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli* A B C, *erit 6. area vero trianguli* D E F, *5. Anguli denique ſuper baſim* B C, *inæquales erunt angulis ſuper baſim E F. Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea quod non vtrumque latus vtrique lateri æquale exiſtit in dictis triangulis* A B C, D E F.



RVRSVS triangulorum A B C, D E F, *latera* A B, A C, *æqualia ſint lateribus* D E, D F, *vtrumque vtrique, ſitq́; vnumquodque 5; anguli vero* A, & D, *contenti dictis lateribus inæquales, ſitq́;* A, *maior, quã* D. *Quibus conceſſis, erit baſis* B C, *maior baſe* E F, *vt propoſ. 24. huius libri oſtendetur. Quod ſi baſim* B C. *ponamus eſſe 8. baſim autem* E F, *4. erit area trianguli* A B C, *12. area vero trianguli* D E F, *radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem eſt quam 9. minor vero, quam 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumque latus vnius æquale ſit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, vt optime dixit Euclides.*



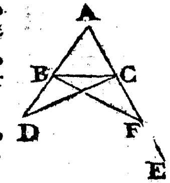
THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

5.

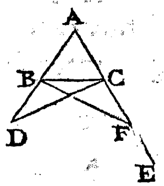
ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis ęqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe ęquales erunt.

SIT triangulum Iſoſceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra baſim eandem B C, eſſe ęquales. Ex linea enim A E, producta infinite[a] abſcindatur A F, ęqualis ipſi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, ęqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B ipſi A C, ex hypotheſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; anguluſq́; A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A, communis eſt vtrique triangulo: [c] Erit baſis B F, æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & poſteriores opponantur ęqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam vero rectę A D, A F, ęquales ſunt per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex ipſis ęquales A B, A C, [d] & reliquę B D, & C F, ſint ęquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, ęqualia ſunt duobus lateribus C F, F B. trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi FB, vt probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis



[a] *3. primi.*
[b] *1. petit.*
[c] *4. primi.*
[d] *3. pron.*

lateribus ęqualibus ęquales, vt ostensum etiam fuit. Igitur [a] erit angulus D B C, angulo F C B, ęqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam posteriores, ęqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim B C, vtriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos ęquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli ęquales CBF, B C D, (quos itidem in posterioribus triãgulis modo probauimus esse ęquales) [b] remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, ęquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse ęquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt ęquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

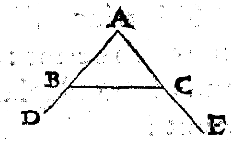


[a] 4. primi.
[b] 3. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualibus, siue reliquum latus* B C, *ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione tradita. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum quibus nondum sunt assueti. Veruntamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem*

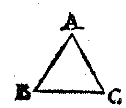
quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.



VERITAS porrò huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoq; demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo A B C, *duo latera æqualia* AB, A C, *quæ producantur quantumlibet vsque ad* D, *&* E. *Dico tam angulos* A B C, A C B, *supra basim* B C, *inter se æquales esse, quam angulos* D B C, E C B, *infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum* ABC, *triangulo* A C B, *(ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta* A B. *recta* A C, *superponatur, cadet punctum* B, *in* C, *ob æqualitatem laterum* A B, A C. *Quo posito, cadet recta* A C, *super rectam* A B, *ob æqualitatem, siue identitatem anguli* A; *atque punctum* C, *in punctum* B, *incidet, propter æqualitatem laterum* AC, AB. *Quapropter angulus* ABC, *angulo* ACB, *& angulus* DBC, *angulo* E C B, *congruet,* [a] *ac proinde tam illi, quàm hi, inter se æquales erunt.*

[a] 8. pron.

COROLLARIVM.



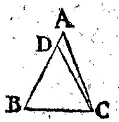
EX hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, [b] *erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.*

[b] 5. primi.

6.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub ęqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, ęquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque ęqualia. Si enim non credantur ęqualia, existentibus nihilominus angulis dictis ęqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, [a] abscindatur in D, recta B D, ęqualis rectę A C, (quę minor dicitur esse quam A B,) ducaturque recta C D. Considerentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli A C B, aequalia sint duobus lateribus DB, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, aequalem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus aequales, per hypothesin: [b] Erunt triangula A C B, D B C, aequalia, totum, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera AB, A C, inaequalia, si anguli B, & C, super latus B C, aequales sunt, ne totum parti aequale esse concedamus: sed aequalia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 3. primi.

[b] 4. primi.

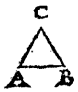
SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem pracedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se ęqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque ęquales: Hic vero, si anguli ad basim sint ęquales, latera quoque

que angulis illis opposita esse ęqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligãt per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessarijs, quales sunt propositiones Geometricę, potest interdum prędicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hęc propositio; (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocãtur. Non enim sequitur, si figurę cuiusuis rectilinę vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemque modo multę alię propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quę conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quę aliquam uidebuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æqua-

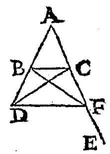


æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, vt liquet. Sint enim triãguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, [a] *erunt latera A B, A C, æqualia.* (a 6. primi.) *Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oſtendendum erat.*

EX PROCLO.

LICEBIT *nobis etiam conuertere ſecundam partem quintę propoſitionis, hoc modo.*

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.



Trianguli enim A B C, *productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra baſim* B C, *ęquales. Dico latera* A B, *A* C, *eſſe quoque inter ſe ęqualia.* Ex C E, *quantumlibet producta* [b] *abſcindatur* C F, *æqualis ipſi* B *D, & ducantur rectę* B F, F D, D C. (b 3. primi.) Conſiderentur *deinde triangula* D B C, F C B. *In quibus cum latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C,* C B, *vtrumque vtrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, &* B C, *ipſi* C B, *quod ſit vnum & idem: ſint autem & anguli D* B C, *F* C B, *dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſim:* [c] *erunt & baſes* C D, B F, *æquales, & anguli* B C D, C B F, *ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus* B D, C F, *æquales.* (c 4. primi.) *Ablatis igitur hiſce angulis æqualibus* B C D, C B F, *ex angulis F* C B, *D* B C, *per hypotheſin æqualibus,* [d] *remanebunt anguli* F C D, D B F, *æquales.* (d 3. pron.) Conſiderentur *rurſus triangula* D B F, *F* C D. *In quibus quoniam latera D* B, B F, *æqualia ſunt lateribus F* C, C *D, vtrumque vtrique, nempe D* B, *ipſi F* C, *per conſtructionem, &* B F, *ipſi* C *D, vt modo oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D* B F, F C D, *æquales, vt etiam fuit nuper demonſtratum:* [a] Erit *angulus* B D F, *ſuper baſim* D F, *trianguli* D B F, *æqualis angulo* C F D, *ſuper eandem baſim* F D, *trianguli* F C D. (a 4. primi.) *Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, *ſint æquales, vt nunc oſtendimus,* [b] *erunt latera* A D, A F, *æqualia. A quibus ſi rectæ* BD, C F, *per conſtructionem, æquales demantur,* [c] *remanebunt* A B, *A* C, *latera trianguli* A B C, *æqualia. Quod erat oſtendendum.* (b 6. primi. c 3. pron.)

THEOR. 4. PROPOS. 7.

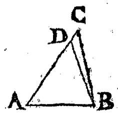
7.

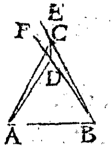
SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis alię duæ rectę lineę æquales, vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

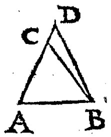
SVPER recta A B, conſtituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico ſuper eandem rectam A B, verſus partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, vt ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipſi A D, quę eundẽ habent terminũ A; & B C, ipſi B D, quæ eundem etiam terminum poſſident B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ A C, A D, inter ſe, & rectæ B C, B D, inter ſe etiam æquales. Aut igitur pũctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipſam rectam A C, vel B D, in ipſam B C, cadat; aut intra

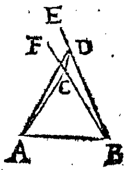
tra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia [a] erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; [b] Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alterã cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duę lineę ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idẽ absurdum incidemus, nempe angulũ D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem ęqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, vt ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, [d] erunt anguli A C D, A D C, supra

[a] 5. primi.
[b] 9. pron.
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.



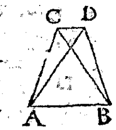






supra basim C D, ęquales: Ac proinde [a] cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [b] erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, ęquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo ęquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandũ.

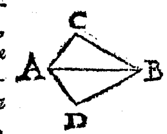
[a] 9. pron.
[b] 5. primi.



SCHOLIVM.

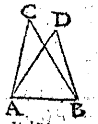
FIERI potest, vt duę lineæ A D, B D, *æquales sint duabus* A C, B C, *vtraque vtrique, vt* A D, *ipsi* B C, *&* B D, *ipsi* A C. *vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, vt constat.* Solæ *enim* A C, A D, *eundem limitem possident* A; *Item* B C, B D, *eundem* B; *optimeq́ demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt* A C, A D, *inter se sint æquales, ita vt* B C, B D, *quoque inter se æquales existant.* Recte *igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq́ terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ* A D, B D, *æquales duabus lineis* A C, B C, *simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse.* Dixit *enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.*

Eadem ratione possunt ex A, *&* B, *infra* A B, *basim trianguli* A B C, *hoc est, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ* A D, B D, *conuenientes ad aliquod punctum, ita vt* A D, *exiens e puncto* A, *æqualis sit ipsi* A C; *&* B D, *egrediens ex* B, *æqualis ipsi* B C, *vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes.* Deniq; *esse*



poterunt

poterunt duæ lineæ A C, A D, *æquales inter se, eundem terminum* A, *possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ* B C, B D, *terminum habentes eundem* B, *inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum. Apposite igitur dictum est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.*

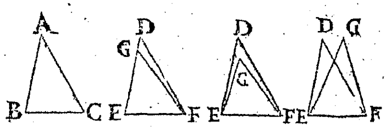


8. ## THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, [a] neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulũ ABC, cogitetur cadere super triangulum D E F, cadet punctũ A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum

[a] 8. pron.



ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadẽ est, quæ B A,) æqualis ipsi E D; & F G, (quae eadem est, quae C A) aequalis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli aequalia ponantur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [b] demõstratum est, cum tam rectae E G, E D, terminum eundem E, quàm rectae F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, aequalis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 8. pron.

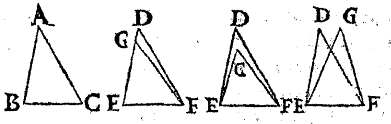
[b] 7. primi.

SCHOLIVM.

VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartae propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrunque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

SIT enim basis B C, *aequalis basi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq;* C, *angulo* D F E. *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C, *lateri* D F, *aequale esse, angulumq;*



gulumq́; A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, [a] congruẽt sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea q́; omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, alter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.

[a] 8. pron.

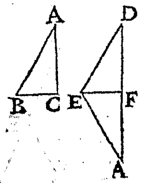
COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

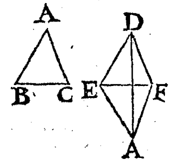
PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulum A EF. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, constituunt vnam lineam

lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant unam lineam rectam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo A ED, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem, quæ A B, quæ per hypothesin rectæ D E, æqualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra.



[a] 5. primi.

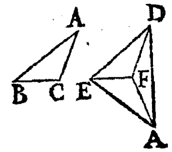
Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniã igitur in triangulo AED, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli A ED, E D A, æquales ad basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, DF, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [c] fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum.



[b] 5. primi.

[c] 2. pron.

Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli EAD, EDA, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.



[d] 5. primi.

[e] 3. pron.

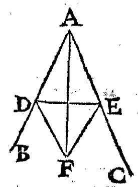
PROBL. 4. PROPOS. 9.

9

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, [a] secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum equilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumque vtrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum sit æquilaterum: [c] Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.

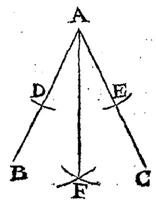


SCHOLIVM.

QVOD si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

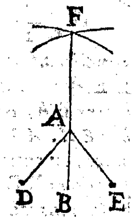
PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posses tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum DAF, æqualem esse angulo EAF. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda praxis



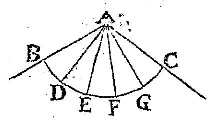
praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confusionem.

QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, educta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.

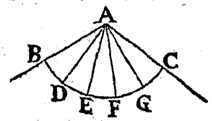


SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidatur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdam lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quemcunque propositum in quotuis partes æquales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus BAC, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunq; interuallū, secans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in quot



quot angulus propositus est diuidendus, vt in exẽplo proposito in quinq; punctis scilicet in D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos.



Cum enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, [a] æqualia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E, vt dictum fuit, æqualis est: [b] Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quolibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

a 15. defin.
b 8. primi.

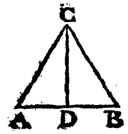
PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

10

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

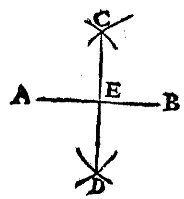
SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.



a 1. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.

PRAXIS.

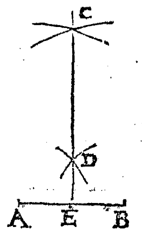
EX centro A, ad quouis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus superne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta igitur ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis A D, basi B D, [d] erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus



d 8. primi.

[a] 4. primi.

B C, C E, *vtrumque vtrique, & angulus* A C E, *angulo* B C E, *vt ostensum fuit*. [a] *erit basis* A E, *basi* B E, *æqualis*.



IAM vero si linea bifariam diuidenda, posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, *describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in* D, *siue hoc fiat infra punctum* C, *vt in apposita figura, siue supra* C. *Nam recta per* C, D, *educta secabit rectam* A B, *bifariam*.

SCHOLIVM.

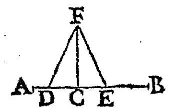
PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam A B, *in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longè facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque vero vnquã diuisione lineæ in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum usque indigebimus.*

11.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

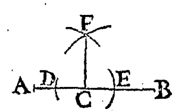
RECTA linea data sit A B; & in ea punctum C, a quo



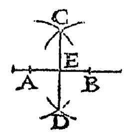
a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, [a] cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea dato &c. Quod faciendum erat.

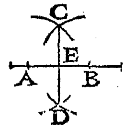
[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.
[d] 10. def.

PRAXIS.



EX puncto C, abscindantur vtrinque lineæ æquales C D, C E. *Et ex* D, *&* E, *describantur duo arcus secantes sese in* F. *Recta namque ducta* F C, *erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ* D F, E F, *quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex* D, *&* E, *descriptos, qui se intersecant in puncto* F. *Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit* A C, *& punctum datum* C, *extremum; protrahenda erit* A C, *in* B, *& sumendæ æquales* C D, C E, *&c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis* A, *&* B, *quibuscunque lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in* C, *&* D. *Nam*

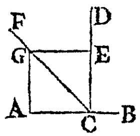




recta ducta C D, *erit perpendicularis ad* A B, *hoc est, faciet duos angulos ad* E, *rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad* E, *æquales, quippe qui super æquales bases* A E, B E, *consistant, opponanturque æqualibus lateribus* A C, B C, *quæ ex* C, *ad puncta* A, & B, *ducerentur.*

EX PROCLO.

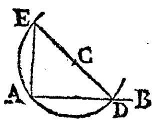
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & *punctum* A. *Ex* C, *puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis* C D, *vt docuit Euclides;* & [a] *abscindatur* C E, *æqualis ipsi* A C: *Deinde* [b] *diuidatur angulus* C, *bifariam, ducta recta* C F: *Et ex* E, *rursus, vt docuit* Euclides, *educatur* E G, *perpendicularis ad* C D, *secans rectam* C F, *in* G. *Ducta igitur recta* G A, *perpendicularis erit ad* A B. *Quoniam cum latera* A C, C G, *trianguli* A C G, *æqualia sint lateribus* E C, C G, *trianguli* E C G, *vtrumque vtrique,* & *anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem:* [c] *Erunt anguli* A, & E, *oppositi communi lateri* C G, *æquales; Sed* E, *est rectus per constructionem; igitur* & A, *rectus erit,* [d] *ideoque* A G, *ad* A B, *perpendicularis.*



[a] 3. primi.
[b] 9. primi.
[c] 4. primi.
[d] 10. defi.

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, *punctumque in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo recta* A B, *producta cum ipso non conueniat) interuallo vero accepto vsque ad* A, *describatur arcus circuli secans* A B, *in* D. *Et ex* D, *per* C, *recta ducatur secans arcum in* E. *Recta igitur ducta* E A, *erit perpendicularis ad* A B. *Nam angulus* A, *est rectus, cum sit in semicirculo* D A E, *vt ostendemus propositione 31. lib. 3.*

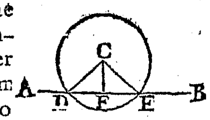


ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineæ, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam A B; alias eam non secaret.) [a] Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, aequalia duobus lateribus E F, F C, trianguli, E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, aequalis, cum hac sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare [b] erit angulus D F C, angulo E F C, aequalis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

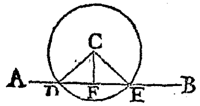


[a] 10. primi.
[b] 8. primi.

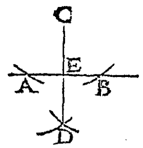
SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam: infinitam. *Si*

Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, *& punctũ* C, *non posset ex* C, *describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E. *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fit hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *descriptus secet totam* B A, *productam in* D, *&* E, *&c.*

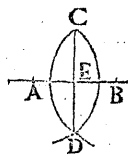


PRAXIS.

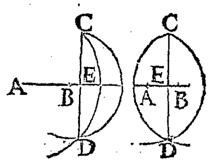


CENTRO *facto* C, *& interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodemq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in* D. *Nam ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis* 10. *Nam anguli ad* E, *erunt recti,*[a] *nempe inter se æquales.*

[a] 4. primi.

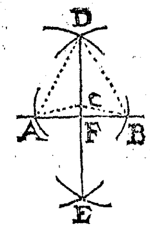


IDEM *efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto* A, *in linea data, & interuallo quolibet vsque ad* C, *assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *interualloq; vsque ad idem* C, *alius arcus describatur priorem secans in* C, *&* D; *Eritq; ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B. *Demonstratio eadem est, quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum* BC, *æquale sit interuallo* AC, *vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idẽ semper interuallum accipiatur.*



QVOD

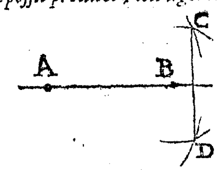
QVOD *si punctum* C, *fuerit nimis vicinum rectæ* AB, *ita agendũ erit. Cẽtro* C, *ad quoduis interuallũ secetur recta* A B, *in duobus punctis* A, B, *ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam* A C, *vel* B C, *bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in* D, E. *Nam ducta recta* DCF, *quæ producta necessario ꝑ punctũ* E, *transibit, perpendicularis erit ad rectam* A B, *in* F. *Quod ita demonstrabimus, ductis rectis* A D, B D, A C, B C. *Quoniam duo latera* D A, D C, *trianguli* A C D, *duobus lateribus* D B, D C, *trianguli* B C D, *æqualia sunt, nec non & bases* A C, B C, *æquales sunt,* [a] *erunt anguli ad* D, *æquales. Quare cum duo latera* D A, D F, *trianguli* A D F, *duobus lateribus* D B, D F, *trianguli* B D F, *æqualia sint, contineantque angulos ad* D, *æquales, vt ostendimus;* [b] *erunt anguli ad* F, *æquales, ac proinde recti, &c.*



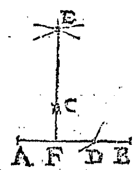
[a] 8. primi.

[b] 4. primi.

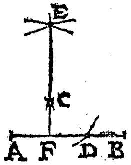
IAM *vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis* B, *quod è regione dati puncti* C, *videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ* AB, *describantur duo arcus supra, & infra lineam* A B, *ad interuallum* B C. *Deinde ex puncto* A, *aliquantum remoto à puncto accepto* B, *(Quò autem magis distabunt inter se puncta* A *&* B, *eò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum* A C, *describantur, secantes priores in* C, *&* D. *Nam recta* CD, *perpendicularis erit ad datam rectam* A B.



SI *autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum* C, *sit propinquum lineæ* AB, *siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum* A C, *vbicumque punctum* A, *sumatur, descri-*



scri



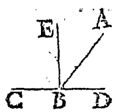
scribatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, sese intersecantes in E. Recta namque ex D, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad AB, vt supra demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam A B.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

13

THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea AB, consistens super rectã C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad
[a] 10. defin. C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnũ quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico
[b] 11. primi. igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero angulus rectus E B D,
[c] 19. pron. [c] æqualis est duobus angulis D B A, A B E; [d] erunt, appo-
[d] 2. pron. sito cõmuni angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia
[e] 19. pron. [e] angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis
[f] 2. pron. est; [f] erunt, apposito communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiã esse

esse duos rectos E B D, EBC; quæ autem eidem æqualia,
[a] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. [a] 1. pron.
Cum ergo recta linea super rectam cõsistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

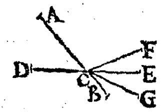
SCHOLIVM.

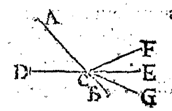
VIDETVR hac propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

THEOR. 7. PROPOS. 14. 14

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectae A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectae C D, C E, facientes cum *A B*, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis aequales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse cõstitutas in directũ, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cum A C, consistat super rectam
DCF, [b] fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis aequales; [b] 13. primi.





[a] 12. pron. aequales; Ponuntur autem & duo anguli A C D, A C E, aequales duobus rectis; [a] & omnes recti sunt inter se aequales. Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt aequales. Ablato igitur communi angulo A C D, [b] remanebunt anguli A C F, A C E, inter se aequales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, aequales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quae C E; proptereaque, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 3. pron.

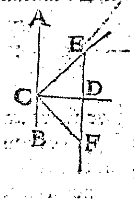
SCHOLIVM.

EST haec propositio praecedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, *sit recta, angulos* A C D, A C E, *duobus esse rectis aequales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis aequales, rectas* D C, E C, *esse vnam lineam rectam.*

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac, & non ad easdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri potest; vt ad punctum aliquod lineae datae ad easdem partes duae lineae ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis aequales, quae tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductae partes. Sit enim punctum C, *in linea* A B, *datum. Ducatur* C D, [c] *perpendicularis ad* A B, [d] *diuidaturque rectus angulus* A C D, *bifariam per rectam* C E. *Deinde ex* D, *quolibet puncto rectae* C D, [e] *ducatur* D E, *perpendicularis ad* C D, *secans rectam* C E, *in* E. *Producta autem* E D, *ad partes* D, [f] *sumatur* D F, *aequalis rectae* D E, *& ducatur recta* F C. *Quoniam igitur latera* E D, D C, *trianguli* E D C, *aequalia*

[c] 11. primi. [d] 9. primi. [e] 11. primi. [f] 3. primi.



aequalia sunt lateribus F D, D C, *trianguli* F D C, *vtrumque vtrique, & anguli* D, *ipsis contenti aequales, nempe recti;* [a] *erit basis* E C, *basi* C F, *aequalis, & angulus* E C D, *angulo* F C D. *Sed angulus* E C D, *dimidium est recti (Est enim rectus* A C D, *diuisus bifariam.)* Igitur *&* F C D, *dimidium erit recti. Quare* C F, *cum* A C, *facit angulum* A C F, *constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem* C E, *cum eadem* A C, *angulum* A C E, *dimidium etiam recti;* Duo igi*tur anguli* A C F, A C E, *quos ad easdem partes faciunt rectae* C F, C E, *cum* A B; *aequales sunt duobus rectis: Et tamen* C F, C E, *non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductae ad diuersas partes, sed ad easdem.*

[a] 4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duae rectae A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse aequales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, [b] erunt duo anguli A E D, D E B, aequales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis aequales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint aequales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, aequales. Dempto igitur communi angulo D E B, [d] remanebit angulus A E D, angulo B E C, aequalis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se aequales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, qui duobus sunt rectis aequales, aequales erunt duobus quoque angulis D E B, B E C, [e] qui duobus rectis sunt aequales. Ablato igitur angulo communi B E C, [f] remanebunt anguli A E C, B E D, aequales inter se. Si igitur

[b] 13. primi. [c] 12. pron. [d] 3. pron. [e] 13. primi. [f] 3. pron.

igitur duae rectae lineae se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exẽplaria hoc corollarium nõ habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

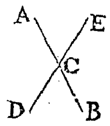
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes,[a] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circũstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

[a] 19. pron.

EX

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

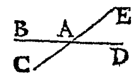


EX puncto C, rectæ AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, *facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE,[a] erunt duo anguli* ACE, ECB, *duobus angulis* DCB, BCE, *æquales: Sed [b] anguli* ACE, ECB, *sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo* DCB, BCE, *duobus erunt rectis æquales. Quamobrem* CD, CE, *[c] erunt lineæ vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.*

[a] 2. pron.
[b] 13. primi.
[c] 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: Item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur anguli BAC, DAE,[d] erunt duo anguli BAE, BAC, *æquales duobus angulis* CAD, DAE. *Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor*

[d] 2. pron.

H

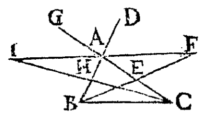
[a] 14.primi. *tuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli B A E,* BAC, *æquales sunt duobus rectis;* [a] *atque adeo* CA, *A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis* DAC, CAB, *Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducēte ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.*

16.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur [b] enim A C, bifariam in E; [b] 10.primi.
& ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt E F, [c] abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturque recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt [c] 3. primi.



autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, [d] inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: [d] 15.primi.
Erit [e] basis C B, æqualis basi AF, & angulus E C B, angulo EAF; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC; [e] 4. primi.

Est

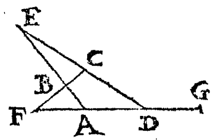
Est autem [a] angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cum lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 15.primi.

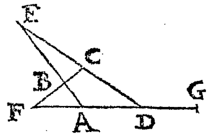
SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo BAC, *interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet* ACB, ABC, *internorum, sibique oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quā angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.*

I D vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.

S I T figura quadrilatera A B C D, *cuius angulus* B A D, *obtusus, &* ABC, *rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ* A B, DC, *productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ* DA, CB, *ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum A D E, obtusangulum, & producta D A, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad A E, perpendicularis F B, secans latus D E, in C. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse quolibet trium internorum* BAD, ABC, BCD, *sibi oppositorum.*



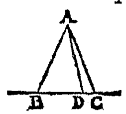


[a] 16. primi. — *rum. Cum enim* ADE, *triangulum sit*, [a] *erit angulus externus* EDG, *maior interno opposito* DAE. *Rursus cum* DAB, *obtusus maior sit recto* ABC, *maior quoque multo erit* EDG, *ipso* ABC. *Postremo, quia & in triangulo* CDF, [b] *angulus externus* CDG, *maior est interno, & opposito* FCD; *manifestum est, in quadrilatero* ABCD, *externum angulum* CDG, *maiorem esse internis, & oppositis* BAD, ABC, BCD. *Quam ob rem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.*

[b] 16. primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR *ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex* A, *ad lineam* BC, *tres lineæ rectæ æquales* AB, AC, AD. *Quoniam igitur latera* AB, AC, *sunt æqualia*, [c] *erunt anguli* ACB, & ABC, *æquales super basim* BC. *Rursus quia latera* AB, AD, *sunt æqualia*, [d] *erunt anguli* ADB, & ABC, *super basim* BD, *æquales. Quare cum vterq; angulus* ACD, & ADB, *æqualis sit angulo* ABC, [e] *erit angulus* ADB, *æqualis angulo* ACD, *externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex* A, *ad* BC, *possunt duci. Quod est propositum.*



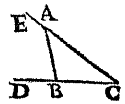
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.
[e] 1. pron.

17.

PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

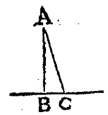
SIT triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quæuis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [a] angulus ABD externus maior est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis angulus ABC, [b] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: [c] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [d] maior sit angulo CAB, interno & opposito; [e] erunt, apposito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, [g] maior sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [h] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 16. primi.
[b] 4. pron.
[c] 13. primi.
[d] 16. primi.
[e] 4. pron.
[f] 13. primi.
[g] 16. primi.
[h] 4. pron.
[i] 13. primi.

EX PROCLO.

HINC *perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex* A, *ad rectam* BC, *duæ perpendiculares* AB, AC. *Erunt igitur in triangulo* ABC, *duo anguli interni* B, & C, *duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum.* [k] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex* A, *ad* BC, *deduci possunt. Quod est propositum.*



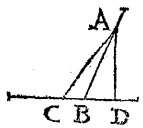
[k] 17. primi

COROLLARIVM. I.

CONSTAT etiam ex his, *In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.*

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR *etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta A B, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD.*



Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat, si fieri potest, perpendicularis AC, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus, & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis: [a] 17.primi. *a sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.*

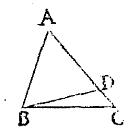
COROLLARIVM. III.

PARI *ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes*

omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam a cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & [a] 5.primi.
duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; b sintque simul tam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores. [b] 17.primi.

THEOREMA 11. PROPOS. 18. 19.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nam ex A C, c auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. [c] 3.primi. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, d erunt anguli ABD, ADB, æquales: [d] 5.primi. Est autem e angulus ADB, maior angulo ACB. [e] 16.primi. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cum f angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; [f] 9.pron. erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

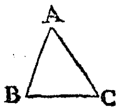
COROLLARIVM.

E X *hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius*

lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.

18. ## THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



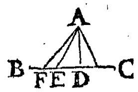
IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus *A* C, maius non est latere *AB*, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur *A* C, æquale esse ipsi *A* B, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero *AC*, minus esse dicatur latere *A*B, erit angulus B, subtensus a minori latere *A* C, minor angulo C, subtenso a maiore latere *AB*; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cum igitur *A* C, latus neque æquale sit lateri *AB*, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus *A* C, maius esse latere *B* C, si angulus *B*, maior esse concedatur angulo *A*. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

a 5. primi.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducatur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarũ AD, sola sit perpendicularis ad BC, et nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [a] sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [b] maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.



a 17. primi.

b 19. primi.

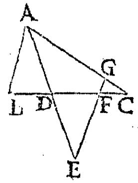
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit; minus vero, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, *angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin B C, in partes inæquales, maiusq; segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse*

[a] 3. primi. *esse latere* A B. *Producatur enim* A D, *ad* E, [a] *vt sit* D E, *æqualis ipsi* A D. *Deinde ex maiori segmento* D C, *auferatur recta* D F, *æqualis minori segmento* D B, *& per* F, *ex* E, *extendatur recta* E F G. *Quoniam igitur latera* A D, D B,

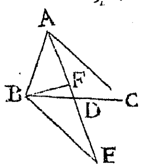


trianguli A D B, *æqualia sunt lateribus* E D, D F, *trianguli* E D F, *vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem &* [b] *anguli* A D B, E D F, *dictis lateribus contenti æquales;* [c] *Erunt bases* A B, *&* E F, *æquales, & angulo* B A D, *angulus* F E D, *æqualis: Est vero & angulus* C A D, *angulo* B A D, *æqualis, per hypothesin; Igitur* [d] *anguli* G A D, G E A, *trianguli* A G E, *æquales erunt,* [e] *ideoque latera* A G, E G, *æqualia erunt. Est autem recta* A C, *maior quam* A G; *quare &* A C, *maior erit, quam* E G. *Et quia* E G, *maior est, quam* E F, *erit &* A C; *multo maior, quam* E F. *Cum igitur demonstratum sit rectam* E F, *æqualem esse rectæ* A B, *erit* A C, *latus maius latere* A B, *quod erat ostendendum.*

b 15 primi.
c 4. primi.
d 1. pron.
e 6. primi.

HOC *ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo* A B C, *angulus* A B C, *maior sit angulo* C. *Dico latus* A C, *maius esse latere* A B. *Diuisa enim recta* B C, (*super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,*) *bifariam in* D; *ex* A, *per* D, *extendatur recta* A D E, [f] *vt sit* D E, *æqualis ipsi* A D; *ducaturque recta* B E.

f 3. primi.



Quoniam igitur latera A D, D C, *trianguli* A D C, *æqualia sunt lateribus* E D, D B, *trianguli* E D B, *vtrumque vtrique, per constructionem,* [g] *sunt autem & anguli* A D C, E D B, *dictis comprehensi lateribus æquales:* [h] *Erũt bases* A C, *&* B E, *æquales, angulusq;* A C D, *angulo* E B D, *æqualis: Et quia angulus* A C D, *ponitur esse minor angulo* A B C, *erit & angulus* E B D, *minor eodem angulo* A B C; *Ideoque angulus* A B E, *per rectam* B D, *diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectã* B F, *cadet* B F, *supra* B D, *eo quod angulus* A B D, *maior sit angulo* E B D. *Quia vero* E F, [i] *maior est, quam* E D, *&* E D, *posita est æqualis ipsi* A D, *erit* E F, *maior, quã* A D [k]; *Sed adhuc* A D, *maior est, quam* A F; *Multo igitur maior*

g 15. primi.
h 4. primi.
i 9. pron.
k 9. pron.

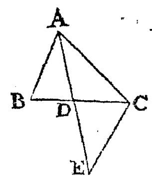
maior erit E F, *quam* A F. *Itaque quia recta* B F, *diuidens angulum* A B E, *bifariam, secat basin* A E, *inæqualiter in* F, *estque maius segmentum* E F, *minus autem* A F; *erit per theorema a Proclo proxime demonstratum, latus* B E, *maius latere* A B. *Ostensum est autem* B E, *æquale esse lateri* A C. *Igitur &* A C, *latus latere* A B, *maius erit. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides *propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.*

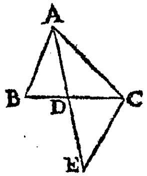
POTERIMVS quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO latera A B, A C, *trianguli* A B C, *sint inæqualia;* A C, *maius, &* A B, *minus. Recta autem* A D, *diuidens angulum* B A C, *bifariam, secet basin* B C, *in* D. *Dico segmentum* D C, *maius esse segmento* D B. *Si.n. non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur* A D, *ad* E, [a] *vt* D E, *æqualis sit ipsi* D A, *ducaturq; recta* E C. *Quoniam igitur latera* A D, D B, *æqualia sunt lateribus* E D, D C, *vtrumque vtrique;* A D, *videlicet ipsi* E D, *per constructionem, &* D B, *ipsi* D C, *per hypothesin aduersarij, Sunt autem &* [b] *anguli ad* D, *dictis lateribus contenti æquales:* [c] *Erit basis* A B, *basi* E C, *æqualis*

a 3. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.



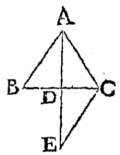
æqualis & angulo BAD, *angulus* CED. *Positus aũt est & angulo* B A D, *angulus* C A D, *equalis; Igitur & anguli* C E D, C A D, *æquales erunt;* [a] *Ideoq;* *latus* A C, *lateri* E C, *æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri* E C, *æquale esse quoq; latus* A B [b], *erunt latera* A C, AB, *æqualia; quod est absurdum, quia* A C, *maius ponebatur, quam* A B. *Non erit igitur segmentum* D C, *segmento* D B, *æquale. Quod si* D C, *dicatur esse minus, &* D B, *maius; erit, per theorema Procli, latus* A B, *maius latere* A C; *Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit* D C, *quam* D B. *Quare erit necessario maius.*

[a] 6.primi.

[b] 1.pron.

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.



PRIMVM recta A D, *secans angulũ* B A C, *bifariam diuidat quoque basin* B C, *in* D, *bifariam. Dico latera* A B, A C, *inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in precedenti theoremate ostensum fuit, latus* A C, *æquale esse lateri* A B, *si* D C. *segmentum segmento* D B, *equale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera* A D, D B, *æqualia sint lateribus* E D, D C; [c] *& anguli ad* D, *dictis lateribus contenti equales;* [d] *erunt bases* A B, E C, *equales, & angulus* C E D, *angulo* B A D, *hoc est, angulo* C A D, *equalis. Quare* [e] A C, *equale erit ipsi* E C, *hoc est, ipsi* A B.

[c] 15.primi.
[d] 4.prim
[e] 6.prim

DEINDE sint latera A B, A C, *æqualia, & recta* A D. *secans basin* B C, *in* D, *diuidat angulum* B A C, *bifariam;*

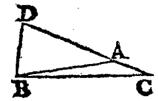
riam. Dico segmentum D C, *equale esse segmento* D B. *Cum enim latera* A D, A B, *æqualia sint lateribus;* A D, A C, *vtrumque vtrique, & anguli quoque ad* A, *contenti dictis lateribus aequales per hypothesin,* [a] *erunt bases* B D, D C, *aequales.*

[a] 4.primi.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.



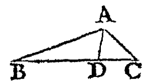
SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnũ ex illis, vt C A, vsque ad D, [b] sitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, AD, æqualia inter se sunt, per hypothesin, [c] erunt anguli A B D, AD B, æquales inter se: Est autem angulo ABD, [d] maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C B D, [e] maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, [f] fiet tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, AC, & linea composita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 3.primi.
[c] 5.primi.
[d] 9.pron.
[e] 19.primi.
[f] 2.pron.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphy-

Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C. trianguli A B C, maiora esse latere B C. Diuidatur angulus BAC, illis lateribus contentus [a 9. primi.] *a bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B,* [b 16. primi.] *b erit angulus externus B D A, maior interno & opposito C A D; Igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo* [c 19. primi.] *A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppositum c maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus A C, maius esse, quam C D, quia* [d 16. primi.] *angulus C D A, d maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutę fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

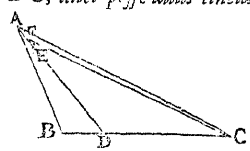
IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At vero angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur [e 20 primi,] in triāgulo B A E, duo latera B A, A E, e maiora sunt latere [f 4. pron.] B E, si addatur commune E C, f erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, a maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, b erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. [a 20. primi. b 4. pron.] Ostensum vero iam fuit, A B, C A, maiora esse, quam B E, E C. Multo igitur maiora erunt B A, C A, quam B D, C D, quod primo proponebantur. Præterea, quoniam angulus B D C, c maior est angulo D E C, externus interno; [c 16. primi.] & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est, eandem ob causam; Erit angulus B D C, maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

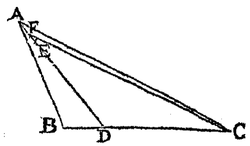
SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtusum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci posse duas lineas intra triangulū ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, [d 16. primi.] *d minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus;*



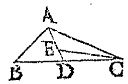


[a] 19 primi.
[b] 3. primi.
[c] 10 primi.

sus; erit ADB, *minor recto, ideoque minor angulo* ABD. *Quare latus* AD, [a] *maius erit latere* AB. Ex DA, [b] *abscindatur recta* DE, *æqualis rectæ* AB; *Et reliqua linea* AE, [c] *bifariam diuidatur in* F. *Si igitur ab extremo* C, *ad* F, *recta ducatur* CF, *erunt duæ lineæ rectæ constitutæ* CF, DF, *intra triangulum maiores duobus lateribus* BA, AC. *Quoniam enim in triangulo* AFC, *duo latera* AF, FC, [d] *maiora sunt latere* AC; *Est autem recta* AF, *ipsi* FE, *æqualis, per constructionem; erunt* CF, FE, *maiores quoque latere* CA. *Si igitur æqualia addantur* ED, *&* AB, *fient rectæ* CF, FD, [e] *maiores lateribus* CA, AB. *Quod est propositum. Quod si ad* F, *ex* B, *extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ* CF, BF, *minores duobus lateribus* CA, AB, *vt Euclides demonstrauit.*

[d] 20. primi.
[e] 4 pron.
[f] 3. primi.

RVRSVS sit triangulum scalenum ABC, *cuius latus maximum* BC, *minimum* AB. Ex BC, [f] *auferatur* BD, *æqualis rectæ* AB, *& ducatur* AD, *recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad* E, *ab extremo* C, *recta ducatur* CE. *Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ* CE, DE, *quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera* AB, AC. *Cum enim duo latera* BA, BD, *æqualia sint,* [g] *erunt duo anguli* BAD, BDA, *æquales: Sed* BDA, *angulus* [h] *maior est angulo* CED. *Maior igitur erit & angulus* BAD, *angulo* CED. *Quare multo maior erit totus angulus* BAC, *angulo* CED; *Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*



[g] 5. primi.
[h] 16. primi.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

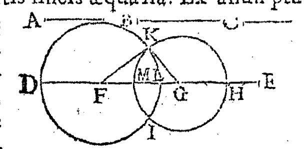
PROBL.

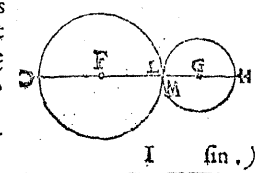
PROBL. 8. PROPOS. 22. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

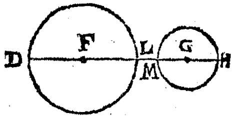
TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex propos. 20. in qua ostensum fuit, duo quęuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis DE, infinitę magnitudinis [a] abscindatur recta DF, æqualis rectæ A; Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus describatur DIK: Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus describatur HIK, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; si ex FE, sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, essent GL, FL, hoc est, GH, & FD, æquales rectæ FG; Si vero M, caderet inter G, & L, essent eędem duę FL, GM, hoc est, DF, GH, minores recta FG; quorum vtrumq; est contra hypothesin.)

[a] 3. primi.





fin.)Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorũ quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico



æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, [a] æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æ- a 15.def.
qualis; [b] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat. b 1.pron.

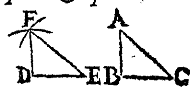
P R A X I S.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ

A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum interuallum C; DE, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

S C H O L I V M.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq́ꝫ, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namq́ꝫ triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas



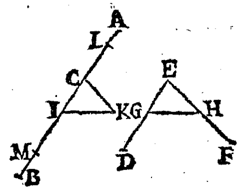
rectas

rectas datas AB, BC, CA, quarum qualib et duæ [a] maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem vni lateri, nempe BC; & ex D, interuallo lateris AB, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c. a 20.primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23. 23.

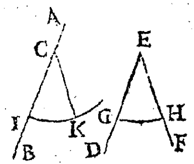
AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde [b] constituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI, sumatur æqualis ipsi EG; & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulũ C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumque vtrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; [c] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. b 22.primi. c 8.primi.



P R A X I S.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in *præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus*



dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; beneficio circini arcus IK, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ IK, GH, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera IC, CK, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla,
[a] 8. primi. *quibus arcus sunt descripti; [a] erunt anguli* ICK, GEH, *æquales.*

CÆTERVM *qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.*

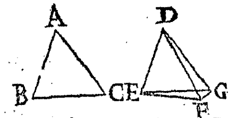
24.

THEOR. 15. PROPOS. 24.

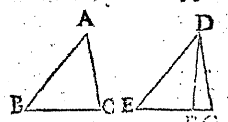
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus vero A, maior sit angulo E DF. Dico basin BC, maiorem esse base E F.
[b] 23. primi. Ad lineam enim DE, ad eiusq; punctum D, [b] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus EDF, minor ponatur

ponatur angulo A) [a] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra [a] 3. primi.

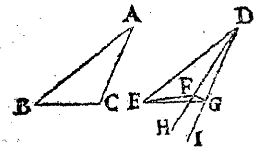


E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; [b] Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; [c] erunt anguli D F G, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, [d] maior angulo EGF. Igitur & angulus D F G, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur E F G, [e] maius erit latus E G, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum. [b] 4. primi. [c] 5. primi. [d] 9. primi. [e] 19. primi.



CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis E G, [f] æqualis est basi BC: Et E G, [g] maior quam E F; erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum. [f] 4. primi. [g] 9. pron.

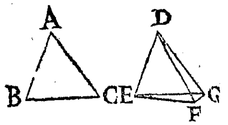
CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, [h] basis E G, basi B C, æqualis. [h] 4. primi.
Deinda quia duo latera D F, DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, [i] erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus F G I, [k] maior angulo F G E. Igitur & angulus GFH, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodē angulo FGE. In triangulo ergo E F G, [l] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo triangula [i] 5. primi. [k] 9. pron. [l] 19. primi.



gula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

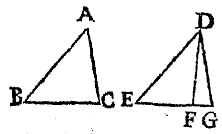
SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, *minor est semper angulo* DEF; *cum angulus* DEG, (*qui æqualis est per 4. propos. angulo* ABC,) [a] *minor sit eodem angulo* DEF, *pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus* ABC, *angulo* DEF, *æqualis, per 4. propos. At vero angulus* ACB, *minor est angulo* DFE, *cum angulus* DFE, [b] *maior sit angulo* DGF. *externus interno, & opposito; & angulus* DGF, *æqualis sit angulo* ACB. *In tertia denique figura angulus* ABC,

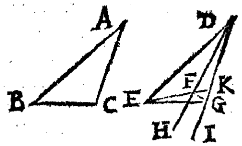


[a] 9. pron.

[b] 16. primi.

ABC, *maior quidem est angulo* DEF, *propterea quod angulus* DEG, (*æqualis existens per 4. propos. angulo* ABC,) [a] *maior sit eodem angulo* DEF, *totum parte: Sed angulus* ACB, *minor est angulo* DFE. *Nam si recta* EF, *producatur secans rectam* DG, *in* K, *fiet angulus* DFE, [b] *maior angulo* DKE, *externus interno; Est autem & angulus* DKE, *maior adhuc angulo* DGE, *externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus* DFE, *angulo* DGE, *qui per 4. propos. æqualis est angulo* ACB. *Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.*





[a] 9. pron.

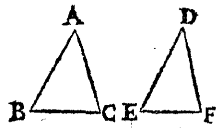
[b] 16. primi.

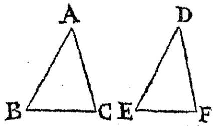
THEOR. 16. PROPOS. 25.

25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli A BC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit base EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit



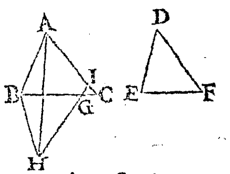


vel æqualis, vel minor. Si di-
catur esse æqualis, cum etiam
duo latera circa A, æqualia sint
duobus circa D, vtrumque vtri-
a 4. primi. que, per hypothesin; [a] erit &
basis B C, æqualis basi E F;
quod est absurdũ; Ponitur enim
basis B C, base E F, maior: Si vero angulus A, dicatur es-
se minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum
b 24. primi. circa istos angulos, basis E F, [b] maior basi B C; quod ma-
gis est absurdum, cum E F, ponatur esse minor quam
B C. Quare cum angulus A, neque possit æqualis esse an
gulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula
duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c.
Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi responden tem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostẽsum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hęc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quę explicata sunt in propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq́ triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius ęqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq́ discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

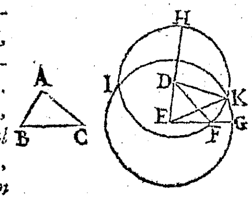
MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione.



Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C,
c 3. primi. [c] *abscindatur recta* B G, *ęqualis basi minori* E F. *Fiat quoque an-*
d 23. primi. *gulus* G B H, [d] *ęqualis angulo*
e 3. primi. *DEF*, [e] *& sit* BH, *ęqualis ipsi* BA,
atq; adeo ipsi D E. *Ducta aũt recta linea* A H, *ducatur quo que recta per G, ex H, secans A* C, *in I. Quoniam igitur duo latera*

latera B *A*, B *H*, *aequalia sunt*, [a] *erunt anguli* B *A H*, a 5. primi.
B *H A*, *aequales. Rursus quia latera* B G, B *H*, *aequalia*
sunt lateribus E F, E D, *vtrumque vtrique*, *& angulus*
G B H, *aequalis angulo* D E F, *per constructionem*; [b] *erit* b 4. primi.
basis H G, *basi* D F, *atque adeo ipsi A* C, *aequalis, angu-*
lusque G H B, *angulo* E D F. *Et quoniam recta H I*,
[c] *maior est quam H* G, *quae est ostensa aequalis ipsi A* C, c 9. pron.
erit quoque maior H I, *quam A* C; *Sed A* C, [d] *maior est* d 9. pron.
adbuc, quam A I. Multo *ergo maior erit H I*, *quam A I*.
Quare angulus I A H, [e] *maior erit angulo I H A*. *Additis* e 18. primi.
igitur duobus angulis B A H, *B H A*, *qui ostensi sunt aequa-*
les, fiet [f] *totus angulus B A* C, *toto angulo B H* G, *maior: Sed* f 4. pron.
angulus B *H* G, *demonstratus fuit aequalis angulo* D. *Maior*
igitur etiam erit angulus B A C, *angulo* D, *quod est propo-*
situm.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor
E F, *ad* G, *vt sit* E G, [g] *aequalis basi maiori* BC. *Deinde cen* g 3. primi.
tro D, *interuallo autem* D F, *describatur circulus, producaturq́* E D, *ad* H, *in circunferentiam. Quoniam igitur* D H,



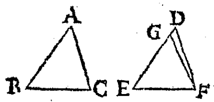
[h] *est aequalis ipsi D* F, *erit quoque* D H, *aequalis ipsi* A C. h 15. def.
Additis igitur aequalibus DE,
A B, [i] *fient* A C, A B, *simul* i 2. pron.
aequales toti H E: *Sed* A C,
AB, [k] *simul maiores sunt, quam* k 20. primi.
B C, *atque adeo quam* E G. *Igitur &* H E, *maior erit, quam*
E G. *Quare circulus descriptus ex centro* E, *& interuallo* E G,
intersecabit rectam E H, *atque adeo circunferentiam prioris*
circuli in I, *&* K, *punctis; ad* K, *autem ducantur rectae*
D K, E K. Et *quoniam duo latera A B*, A C, *aequalia sunt*
duobus lateribus D E, *D* K, *vtrumque vtrique*, (*est enim*
D K, *aequale ipsi D* F, *per definitionem circuli*; D F, *au-*
tem positum est aequale lateri A C) *& basis* B C, *basi* E K,
aequalis: (*cum* E K *aequalis sit ipsi* E G, *per definitionem cir*
culi; E G, *vero recta per constructionem facta sit aequalis*
basi B C.) [l] Erit *angulus* B A C, *angulo* E D K, *aequa-* l 8. primi.
lis: Sed angulus E D K, *maior est* [m] *angulo* E D F. *Quare* m 9. pron.
& an-

& *angulus* A, *angulo* E D F, *maior existet. Quod est propositum.*

26. THEOR. 17. PROPOS. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtriq; & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

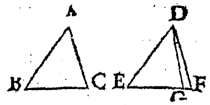
SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri
a 3.primi. D E, sit D E, maius, a quo [a] abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B,



b 4.primi. B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; [b] Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale

æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum. a 4.primi.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; [b] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturq; recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtriq; & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 3.primi. c 4.primi. d 16.primi.



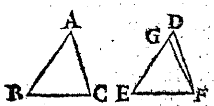
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter se. e 4.primi.

SCHOLIVM.

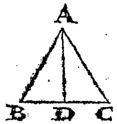
PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulo-

angulorum ipsis contentorum, collecta fuit aequalitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex aequalitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus aequalia esse, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.



HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpẽdicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si vero basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, duo latera aequalia A B, A C, diuidatq; primum recta A D, angulum A, bifariam. Dico rectam A D, esse ad A C perpendicularem, secareq; basin B C, bifariam. Cum enim duo latera A B, A D, duobus lateribus A C, A D, sint aequalia, angulosq; aequales contineant, ex hypothesi, [a] erunt & bases B D, C D, aequales, & anguli ad D, atque adeo recti. [a] 4.primi.

DIVIDAT deinde recta A D, basin B C, bifariam. Dico rectam A D, ad B C, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, aequalia sint, & basis A B, basi A C, ex hypothesi, [b] erunt quoque anguli ad D, aequales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, aequales erunt. [b] 8.primi.

SED iam recta A D, sit ad B C, perpendicularis. Dico & basim B C, & angulum A, secari bifariam. [a] Erunt enim anguli B, C, supra basin B C, aequales. Itaque quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, aequales sunt, vterq; vtrique, latusq; A D, aequalibus oppositum angulis B, C, commune; [b] erunt & reliqua latera B D, C D, aequalia & reliqui anguli ad A, aequales. Quod erat demonstrandum. [a] 5.primi. [b] 26.primi.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo A B C, sit A D, ad B C, perpendicularis, diuidatque primum basim B C, bifariam. Dico & latera A B, A C, esse aequalia & angulos ad A, aequales. Quoniam enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, aequalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales, nempe rectos; [c] erunt quoque & bases A B, A C, & anguli ad A, aequales. quod est primum. [c] 4.primi.

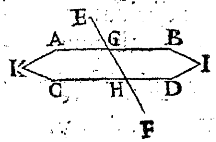
SECET deinde perpendicularis A D, angulum A, bifariam. Dico & latera A B, A C, aequalia esse, & rectas B D, C D. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli A B D, duobus angulis D, A, trianguli A C D, aequales sunt, latusq; A D, illis adiacens, commune; [d] erunt quoque & latera A B, A C, & latera B D, C D, aequalia. Quod est secundum. [d] 26.primi.

THEO-

27.
THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineę.

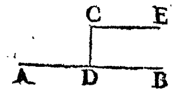
IN duas rectas A B, C, D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, vsque ad punctum I,) angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 16. primi.

SCHOLIVM.

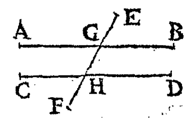
NECESSE est, vt lineæ, quæ dicuntur parallelae, in eodem existant plano, vt ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos aequales inter se esse, vt duae lineae probentur esse parallelae, nisi ponatur, eas in vno, eodemq; existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos aequales. Sit enim C D, *perpendicularis ad* A B, *rectam, quae in subiecto plano existit; & ex* C, *in alio plano, ad* C D, *ducatur alia perpendicularis* C E, *ita vt punctum* E, *intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam* C D, *incidentem in rectas* C E, A B, *facere duos angulos* E C D, A D C, *alternos aequales, cum sint recti; & tamen* C E, A B, *non sunt parallelae, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem* Euclides *in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In vndecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.*

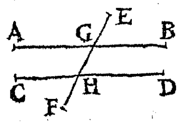


PROBL. 19. PROPOS. 28. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidēs linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, ęqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis ęquales: Parallelæ erūt inter se ipsæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidēs E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas Quoniam enim angu





a 15 primi. b 1. pron. c 27. primi.

lo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis est angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

DEINDE faciat recta EF, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, [d] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

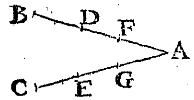
d 13. primi.

SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demõstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

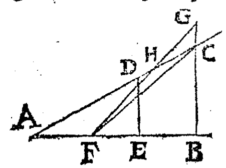
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur; ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

EXEANT



EXEANT a puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniã igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinite iam esse producta. Quare si dictæ lineæ A B, A C, producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ A B, AC, *quò longius protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit, puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare quàm F, & G, Item B, & C, plus, quàm* D, & E, *&c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ distantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum sint minimæ omnium rectarum ex* C, D, *ad* A B, *ductarum vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico* C B, *maiorem esse, quàm* D E, *ac proinde plus distare rectam* AC, *à recta* A B, *in puncto* C, *remotiore, quàm in puncto propinquiore* D. *Si enim* C B, *non est maior, quàm* D E, *erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & rectæ A* E, *abscindatur æqualis* B F, *ita vt punctum F, cadat vel inter* A, *& E, vel in* E, *vel denique inter* E, *& B; ducaturque recta F C. Quoniam igitur duo latera* AE, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BC, *trianguli* FBC, *æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vtpote rectos:* [a] *erunt & bases* A D, F C, *& anguli* D A E, C F B, *inter se æquales. Igitur cum externus angulus* C F B, *interno* D A E, *æqualis sit* [b] *parallelæ erunt AC, FC, quod est absurdum, cum concurrant in* C.



a 4. primi. b 27. primi.

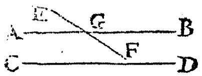
K SIT

SIT deinde CB, minor quàm DE, ſi fieri poteſt, & producta BC, fiat BG, ipſi DE, æqualis, iungaturq́; recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, anguloſque continent æquales, puta rectos; [a] erunt & baſes AD, FG, & anguli EAD, BFG, inter ſe æquales. Igitur cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis ſit [b] erunt AC, FG, inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca BC, ipſa ED, maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.

[a] 4. primi.
[b] 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

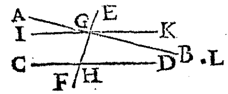
SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.



SINT duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, ſecet ipſam AB, in G. Dico rectam EF, ſi producatur, ſecturam eſſe quoq; ipſam CD. Quoniam duæ rectæ GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinite, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallela AB, à parallela CD, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia GB, à GF, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam GF, productam ſecuiſſe rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas parallelas, minori diſtantia a GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt conſtat. His igitur ita expoſitis, facile demonſtrabitur hoc theorema, quod eſt apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

IN



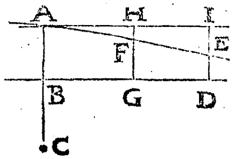
IN rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores. Dico rectas AB, CD, coire ad eaſdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli BGH, DHG, minores ponuntur eſſe duobus rectis; Sunt autem duo anguli DHG, DHF, [a] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus DHF, [b] maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G, [c] conſtituatur angulus KGH, æqualis angulo DHF, cadet GK, ſupra GB, [d] ſecabitq́; producta rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta incidens EF, facit angulum externum DHF, æqualem interno, & oppoſito KGH; [e] Erunt rectæ IK, CD, parallelæ. Secat autem recta AB, ipſam IK, in G; Producta igitur ſecabit quoque ipſam CD, vt demonſtratum eſt. Quare AB, cum CD, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod eſt propoſitum.

[a] 13. primi.
[b] 5. pron.
[c] 23. primi.
[d] 11. pron.
[b] 28 primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonſtrare: Sed quoniam principium, quod primo loco præmiſit, æquè dubium, & obſcurum eſſe videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonſtrationem magis accuratam, ſi prius doceamus, in quo difficultas, ſiue obſcuritas principij illius à Proclo aſſumpti conſiſtat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum ſententia ſine demonſtratione concedendum non eſt, duas rectas, quæ ſemper ſibi mutuò fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet ſit veriſſimum, cuiuſmodi ſunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus ſit, & alter acutus: Hæ enim ſibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores exiſtunt, vt mox demonſtrabimus; Quemadmodum, inquam, concedendum hoc ſine probatione non eſt, propterea quòd dari poſſunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, ſibi ſemper mutuò magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambæ producantur, quorum illud ab Apollonio Pergæo,

K 2 hoc

hoc vero à Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta una, & altera inflexa, quæ cõchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq; sit recta A B. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam æqualem esse rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ.

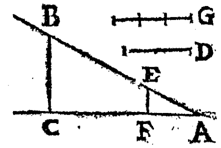


Producta enim recta A B, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem A B, describatur linea conchoideos A E, inflexa nimirum linea, quæ rectæ B D, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, [a] quæ ipsi B D, parallela erit. Postremo ex duobus punctis H, I, vtcunque in recta A I, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares H G, I D, [b] quæ parallelæ, [c] atque adeo æquales inter se erunt, angulosque [d] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib, vbi primum vsus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaque quoniam F G, maior est, quàm E D, vt Nicomedes demonstrauit, erit F H, reliqua minor, quam reliqua E I. Magis ergo inter se distant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit

a 28. primi.
b 28. primi.
c 34. primi.
d 29. primi.

erit, quàm recta A B, hoc est, quàm perpendicularis ex recta A I, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea A E, ad rectam B D, nunquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum A B, A C, in infinitum productarum excedere magnitudinẽ D. Nam ex quouis puncto E, in recta A B, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ



si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si vero non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem A B, ipsius A E, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim [a] est, vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; (quòd ex coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ [b] parallelæ sunt.) Et permutando, vt A B, ad A E; ita B C, ad E F: erit ita multiplex B C, ipsius E F, vt multiplex est A B, ipsius A E, hoc est, vt multiplex est G, ipsius E F. Cum ergo B C, & G, æque multiplices sint ipsius E F, erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod est propositum.

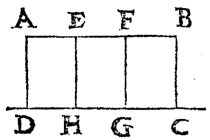
a 4. sexti.
b 13. primi.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solum, quæ ante propos. 29. primi lib. demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationẽ illam

illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

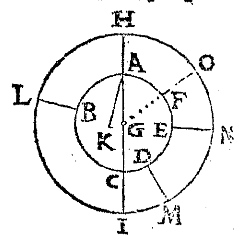
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ AB, *à recta* DC, *æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam* DC, *ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ* AB, *æqualiter distant à recta* DC, *ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta* DC. *Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta* DC, *distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quæ vsque ad propos. 29. huius lib.*

lib. ostensa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sanæ mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nã etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, proptereaque recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quę æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, *cuius centrum* G. *Dico rectam GC, ex cẽtro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales. Producta enim* IG, *vsque ad* A, *si semicirculus* ABC, *circa diametrum* AC, *intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo* AEC, *cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Anguli igitur ad* C, *tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta* HAK, *æquales angulos ad* A. *Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro* G, *ad* A, *recta* GA, *quæ ex proximè demonstratis angulos* GAB, GAF, *constituet æquales. Non ergo æquales sunt* KAB, KAF *Quod est contra hypothesin.*



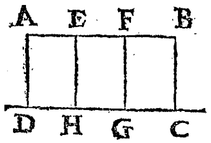
HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, *circularem lineam* ABCDEF, *omniaq; eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem* a 8. tertij.

lineam cadentes, efficientesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant a erũt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantias à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cum enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum G, transeãt, si æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, æquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt & rectis H G, O G, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet.

II.

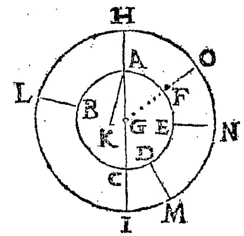
SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus, propterea quod omnia puncta lineæ A B, descriptæ æqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aequaliter inter ipsa iaceant, quippe cum



cum nullum eorum magis aut minus a recta C D, abscedat sursum, aut deorsum vergẽdo, quam aliud. Patet hoc etiã ex iis, quae ad definitionem lineæ rectae scripsimus. Cum enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed pũcta D, A, aeque velociter incedant, aequaliterque semper inter se distent.) describent vtique lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam D C, describat, erit quoque linea A B, quam punctum A, describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, aequabilemq; motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc aequè clarum, & euidens, atque antecedens.

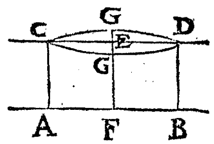
CONTINGIT autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularem in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari aequales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo hucatque illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineę subiectae, à qua aequaliter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta A D, super rectam D C, in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeo vt linea descripta A B, naturam induat rectae lineae subiectae D C, à qua aequaliter semper recedit. Rectam autem, quæ super lineam circularem in trãsuersum fluit aequabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta H A, in transuersum



uersum super peripheriam ABCDEF, aequabiliter, faciens semper in extremo A, cum ea angulos aequales. Dico lineam HLIMNO, ab altero extremo H, descriptam esse quoque circularem. Cum enim recta HA, in omni situ motus illius imaginarij faciat aequales angulos cum peripheria ALCDEF, fit ut ea producta in centrum G, cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis aequalibus HA, OF, ad rectas aequales AG, FG, fient totae rectae HG, OG, & omnes aliae, inter se aequales: ac propterea ex defin. circuli HLIMNO, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculare rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



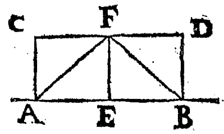
SINT ad rectam AB, erectae duae perpendiculares AC, BD, inter se aequales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtrique AC, BD, esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali FG, si intelligatur recta AC, moueri in transuersum per rectam AB, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineam rectam per G, transeuntem, vt supra ostensum est, qualis est CGD. Duae ergo rectae CED, CGD, superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est EF, vtrique AC, BD. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

SI

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erectae duae perpendiculares AC, BD, aequales inter se, ducaturq; recta CD. Dico vtrumq; angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iunganturq; rectae AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, aequalia sunt, vtrumq; vtrique, angulosq; continent aequales, puta rectos,



[a] erunt quoque & bases AF, BF, et tã anguli FAE, FBE, & AFE, BFE, inter se aequales. Ablatis igitur aequalibus angulis FAE, FBE, ex rectis aequalibus CAE, DBE, reliqui erunt aequales anguli CAF, DBF. Itaque cum duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, aequalia sint, angulosq; complectantur aequales, vt ostendimus, [b] erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quam CFA, DFB, inter se aequales. Si ergo aequalibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi aequales, fient toti anguli CFE, DFE, aequales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis EF, vtriq; AC, BD, aequalis est, vt proxime theoremate ostendimus, erunt duae rectae AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se aequales. Quare, vt de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, aequales inter se erũt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, aequalis.

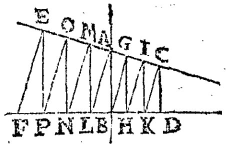
a 4. primi.

b 4. primi.

CÆTERVM angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate praemisso.

SI

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



RECTA linea A B, *in rectas* A C, BD, *incidens faciat angulũ* A B D, *rectum*, & B A C, *acutum*. Dico rectas A C, B D, *minus semper inter se distare versus* C, D, *productas, magis vero, si versus* E, F, *producantur*. a Ducatur
[a 12.primi.]
enim ex B, *ad* A C, *perpendicularis* B G, *quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli* B A C, *cadet. ac propterea angulus* G B D, *pars recti anguli* A B D, *acutus erit*. Demissa *ergo ex* G, *ad* B D, *perpendicularis* G H, *cadet quoque ad partes anguli acuti* G B D, *ex eodem coroll. angulusq; propterea* H G C, *pars recti anguli* B G C, *acutus erit*. Rursus *ergo ducta perpendicularis* H I, *ad* A C, *per idem coroll. ad partes acuti anguli* H G C, *cadet, ideoq; angulus* I H D, *pars recti anguli* G H D, *acutus erit*. Atque *ita deinceps in infinitum, si ex* I, *ad* B D, *perpendicularis* I K, *ducatur*, & *ex* K, *perpendicularis* K C, *ad* A C, & *ex* C, *ad* B D, *perpendicularis* C D, &c. *cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo* A B G, *angulus* B A G, *acutus est*, & A G B, *rectus*, b *erit recta* A B,
[b 19.primi.]
maior quam B G; & *in triangulo* B G H, *recta* B G, *angulo recto* G H B, *opposita, maior quam* G H; & *in triangulo* G H I, *recta* G H, *maior quam* H I: Atque *ita deinceps erunt semper rectae, quæ ipsi* A B, *propiores sunt, maiores ijs, quæ remotiores sunt*, & *nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cum nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium. Quapropter recta* A C, *in* G, *minus distabit à recta* B D, *quam in* A, & *in* I, *minus, quam in* G, & *in* C, *minus, quam in* I, &c. *quandoquidem perpendiculares* A B, G H, I K, C D, &c. *quae ordinatim decrescunt, vt ostendimus, minimae sunt omnium à punctis* A, G, I, C, *in rectam* B D, *cadentium, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum distantias ab eadem recta* B D, *metiuntur*. Constat *ergo, rectas* A C, B D, *ad partes* C, D, *productas continenter fieri minus inter se distantes. quod est primum.*

[a 11.primi.]
DVCATVR rursus a *ex* A, *ad* A C, *perpendicularis* A L, *quæ angulum obtusum* B A E, *partietur in rectum* E A L, & *acutum* L A B, *hoc est, cadet inter* A B, & A E;
[b 17.primi.]
eritq; angulus A L B, *acutus, cum ambo* A B L, A L B, b *sint duobus rectis minores, atque* A B L, *rectus sit; ac proinde angulus* A L F, *obtusus erit. Eadem ratione perpendicularis* L M, *ex* L, *ad* B F, *ducta cadet inter* L A, L F, *facietq; angulum* L M A, *acutum*, & L M E, *obtusum*: Item *perpendicularis* M N, *ex* M, *ad* A E, *erecta cadet inter* M L, M E, *angulumq;* M N B, *acutum*, & M N F, *obtusum constituet*. Atque *ita deinceps in infinitum, si ex* N, *ad* B F, *perpendicularis erigatur* N O, & *ex* O, *ad* A E, *perpendicularis* O P, & *ex* P, *ad* B F, *perpendicularis* P E, & *ex* E, *ad* A E, *perpendicularis* E F, &c. *diuident omnes sigillatim angulos obtusos, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo* A B L, *angulus* A B L,
[c 19.primi.]
rectus est, & A L B, *acutus*, c *erit* A L, *recta maior, quam* A B, & *in triãgulo* A L M, *recta* L M, *angulo recto* L A M, *opposita, maior quam* A L; *atque in triangulo* L M N, *recta* M N, *recto angulo* M L N, *opposita, maior quam* M L: Atq; *ita deinceps erunt semper rectae, quae ab* A B, *longius absunt, maiores ijs, quæ propinquiores sunt, in infinitum. Quamobrem recta* A E, *in* M, *magis à recta* B F, *distabit, quam in* A, & *in* O, *magis, quam in* M, & *in* E, *magis, quã in* O, &c. *quandoquidem perpendiculares* A B, M L, O N, E P, &c. *quae ordinatim augeri ostensae fuere, minimae sunt omnium ex punctis* A, M, O, E, *in rectam* B F, *cadentium*, &c. *Liquido ergo constat, rectas* A C, B D, *ad partes* E F, *productas continẽter fieri magis inter se distãtes, quod est secundum. Quòd si proteruus quispiam vellet contendere, rectam* A L, *quae ad* A C, *perpendicularis est, non concurrere cum* D B, *producta; constabit multò magis id, quod demonstrandum proponitur. Nam linea* D B, *vltra punctum* B, *multò magis à recta* C A, *distabit, quam in puncto* B; *quandoquidem* A L, *ad* A C,

A C, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum D B, cum tamen G B, ad eandem A C, perpendicularis cum D B, concurrat in B, &c.

H Æ C *cum ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, eſſe rectos. Nam ſi angulus C, verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta C A, in rectas A B, C D, incidens efficit angulum C A B, rectum, & C, acutum, minus ſemper inter ſe diſtabunt rectae C D, A B, ad partes D, B, productae, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſae ordinatim minores fient, quàm C A, vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis D B, quam C A, quod eſt abſurdum, cum ponatur aequalis. Non igitur acutus eſt angulus C. Eademque ratione neque angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtuſus. Quia igitur recta C A, in rectas C D, A B, incidens facit angulum C A B, rectum, & C, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectae C D, A B, ad partes D, B, productae, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſae continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis D B, quam C A, quod eſt abſurdum, cum aequalis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, obtuſus erit. Sed neque acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterque eſt, quod erat oſtendendum.*

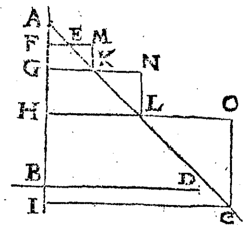
E X *his demonſtratis, facile iam Axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.*

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duę illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

H O C *eſt Axioma 13. apud Euclidem in noſtris commentarijs; apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſce-*

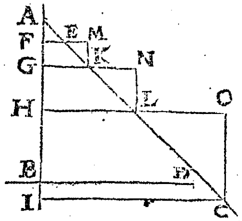
ſcepimus. Incidens ergo recta A B, in rectas A C, B D, faciat internos, ad eaſdemq; partes angulos A B D, B A C, duobus rectis minores. Dico rectas A C, B D, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe A B D, rectus, & alter B A C, acutus. Sumpto in recta A C, puncto quolibet E, [a] ducatur ex eo ad rectam A B, perpendicularis E F, & rectae A F, [a] 12. primi.



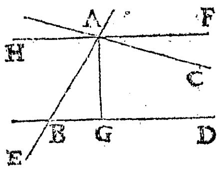
aequalis accipiatur F G, & G H, aequalis ipſi A G, & H I, ipſi A H, ita vt A G, ipſius A F, & A H, ipſius A G, & A I, ipſius A H, dupla ſit. Et quoniã ſi rectae A F, abſcindatur continuè aequales rectae ex A B, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta A B, per continuam ablationem unius eiuſdemq; quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea A F, ita multiplicari poteſt, (quod ſit, ſumendo ipſi in A B, continenter partes aequales) vt tandem aliquando finitã lineam A B, ſuperet: Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & alijs ſequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaequalibus proportionem inter ſe habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multò magis, ſi ipſi A F, aequalis abſcindatur F G, & toti deinde A G, non autem ſoli A F, aequalis auferatur G H: Item toti A H, non autem ſoli A F, vel A G, aequalis dematur H I, & ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, exiſtere vltra punctũ B. Accipiatur quoq; in recta A C, recta E K, ipſi A E, & K L, ipſi A K, & L C, ipſi A L, aequalis, ita vt tot ſint partes in recta A C, quot in recta A I; ducanturq; rectae K G, L H, C I, producanturq; vnà cum E F, vt E M, K N, L O, ipſis E F, K G, L H, fiant aequales, ac tandem rectae iungantur M K, N L, O C. Itaque quoniam duo latera K E, E M, trianguli K E M, duobus lateribus A E, E F, trianguli A E F, per conſtructionẽ aequalia ſunt, vtrumque vtrique, [b] anguloſq; ad verticem E, continẽt aequales, [c] erit & baſis M K, baſi A F, & angulus M, angulo F, [b] 15 primi. [c] 4. primi.

a 1. pron. — b 15. primi. — c 4. primi. — d 1. pron. — e 28. primi. — f 13. primi. — g 23. primi. — h 28. primi.

lo, F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [a] æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo. quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli A K G, æqualia sunt, ex constructione, [b] angulosq; comprehendunt æquales ad K, verticem, [c] erit & basis N L, basi A G, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & G H, ex constructione, eidem A G, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se [d] erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiã angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ IC, BD, [e] parallelæ sunt; ac propterea B D, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum.



SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; [f] sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus D B E, reliquo BAC. [g] Constituatur in A, ad rectam AB, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadetq; recta A F, supra rectã AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, cõstituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus DBE, interno B A F, ex eadem parte opposito æqualis est, [h] erunt rectæ A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad



a 12. primi.

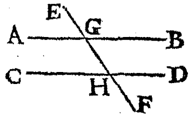
B D, [a] perpendicularis AG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tãdem: Quod est absurdum. Ostensæ enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum.

QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis equales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat E F. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo



D H G, si addatur communis angulus BGH, a 4. pron. a erũt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, BGH: At b 13. primi. duo AGH, BGH, b æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, BGH, minores sunt duobus rectis. c 13. pron. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, c coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.

DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG. Quoniã enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, d 15. primi. vt ostensum est; & eidem B G H, d æqualis est angulus e 1. pron. A G E; Erunt anguli A G E, C H G, e inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo D H G.

DICO tertio, angulos internos ad easdem partes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse f 2. pron. angulo CHG, interno; si addatur cõmunis AGH, f erũt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo g 13. primi. AGE, AGH, g æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

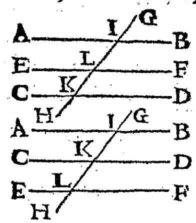
CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelę, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ A B, C D, eidem rectæ E F, parallelæ. Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; C D, in K; & EF, in L. Quia igitur A B, poni- a 29. primi. tur parallela ipsi E F, a erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rursus quia CD, ponitur b 29. primi. etiam parallela ipsi EF, b erit angulus D K I, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli c 1. pron. AIL, DKI, c æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, d 27. primi. d erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

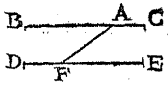


SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem A I, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemque lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto

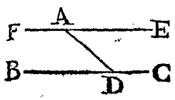


enim A, ducatur recta AF, secans DE, in F, vtcunque. Quoniam igitur AB,
a 9. primi. DE, sunt parallelæ, a erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo
b 2.pron. communi angulo CAF, b erunt duo anguli ad A, æquales
c 29. primi. duobus angulis CAF, AFE, Sed hi duo c æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac
d 14. primi. propterea d in rectum erunt constitutæ ipsæ AB, AC. Quod est propositum.

31 PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens an-
e 23. primi. gulum quemcunque ADB; Cui ad A, e æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint,



f 27. primi. per constructionem, f Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

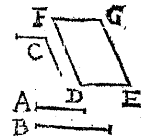
SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo nō conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam nō plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex

ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quam vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodē, quod est absurdum. a cum a 30. primi.
sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio cōstituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendētia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia.

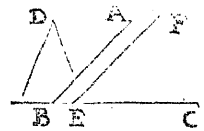


Sumpta recta DE, quæ rectæ A, sit æqualis, b fiat angulus EDF, angulo C, c & recta DF, rectæ B, æqualis. Deinde per E, d agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; e parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.

b 23. primi. c 3. primi. d 31. primi. e 35. def.

PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectā, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. polliciti sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC, f con-



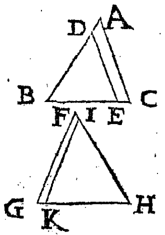
stituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod f 23. primi.
iubetur. Si vero non transeat per A, g ducatur per A, recta g 31. primi.
AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem esse. Cū enim parallelæ sint AB, EF, h erit h 29. primi.
L 3 angulus

angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte opposito æqualis: Cum ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis, a 1.pron. a æquales inter se erunt anguli ABC, & D: quod est propositum.

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. ut demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & unius lateris, præcepisse, latus illud uel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, sintq́ latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, b ducaturq́ DE, ipsi AC, parallela: c eritq́ angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, uterque utrique, latusq́ BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus, quàm BC, atque adeo neque lateri AC, neq; lateri AB, æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quòd latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.

b 31.primi.
c 29.primi.



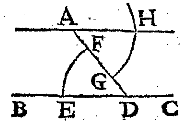
SIT rursus triangulum FGH, sintq́ iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius, quàm FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, d ducaturq́ IK, ipsi FG, parallela: e eritq́ angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, vterque vtrique, latusq́ FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim HK, minus, quàm HG, atque adeo neq; lateri HG, neque lateri FH, æquale esse potest; quòd latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei est, quòd latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis, f qui maior est

d 31.primi.
e 29.primi.
f 18.primi.

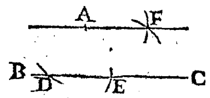
ior est angulo H, propterea quòd latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

PRAXIS.

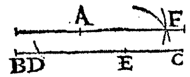
SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C: Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, a erit hæc parallela ipsi BC. Nam anguli EDF, HAG, sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c. a 27.primi.



ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum lineæ parallela lineæ datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC: Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secātes sese in F. Nam ducta recta AF, erit parallela rectæ BC. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum recta AF, æqualis est rectæ DE; & rectæ A, D, rectæ EF, si ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

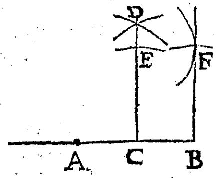


QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta namq; ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis est



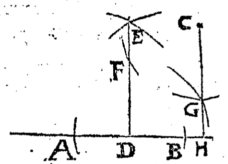
est recta D E, *ob idem interuallum; & recta A D, recta EF, si hæ rectæ ductæ essent, &c.*

EX *his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto* B, *educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis* C, *abscindatur recta* C B, *æqualis* C*A, & ex A, &* B, *ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* D, *ducaturq; recta* DC, *quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus.* D*einde per* B, *ducatur ipsi* CD, *parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propos. proximè explicatam.*



Ex C D, *abscissa recta quantacunque* CE, *describatur ex* B, *ad interuallum* CE, *arcus, quem in* F, *secet alius arcus ex* E, *ad interuallum* CB, *descriptus, ducaturq; recta* B F. *Hæc namque ipsi* C D, *parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet.* [a 29. primi.] *Igitur cum angulus* A C D, [a] *æqualis sit interno* C B F; *sit autem A*CD, *rectus, erit &* CBF, *rectus, ac proinde* B F, *ad A* B, *perpendicularis erit.*

SIMILITER si data sit recta AB, & punctum extra ipsam C, *in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex* C, *ad A* B, *perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto* D, *vtcunq; in linea AB,*



abscindantur vtrinque inter se æquales DA, DB, *& ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* E, *ducaturque recta* ED, *quæ ex praxi propos. 11. ad AB, perpendicularis erit.* D*einde per* C, *ducatur ipsi* DE, *parallela, hoc modo, secūdū praxim huius propos. 31. Ex dato puncto* C, *ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam* DE, *in* F *: eodemq; interuallo ex* D, *versus* C, *alius arcus describatur, quem in* G, *intersecet alius arcus*

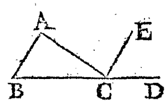
arcus

arcus ex C, *ad interuallum* D F, *delineatus. Recta namq; ducta ex* C, *per* G, *secans A B, in H, parallela erit rectæ* D E, *ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proximè scripsimus,* C *H, ad AB, perpendicularis erit, sicuti &* E D, *ad eandem perpendicularis est.*

THEOR. 22. PROPOS. 32. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. [a] Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, [b] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, [c] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [d] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.



[a 31. primi.] [b 29. primi.] [c 29. primi.] [d 2. pron.]

DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, [e] erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, [f] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

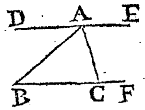
[e 2. pron.] [f 13. primi.]

SCHO-

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos, 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorũ, & oppositorũ superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triãgulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt angulo A C B. &c.

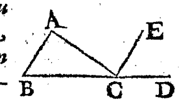
OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per
[a] 31. primi. punctum A, [a] ducatur rectæ B C, parallela DE. Quoniam igi-
[b] 29. primi. tur [b] anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addãtur æquales EAC, & A C B, (sunt enim & hi alterni) [c] erunt duo anguli D A B,



[c] 2. pron. E A C, duobus A B C, A C B, æquales.
[d] 2. primi. Addito ergo communi angulo A B C, [d] erũt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam. n. anguli ABC, B A C, A C B,
[e] 13. primi. aequales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit. [e] Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis aequales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales.
[f] 3. pron. Dempto igitur communi angulo A C B, [f] remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.

FA-

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitq́ angulus ACD, æqualis duobus angulis AB C, BAC. Dico, rectas B C, C D, in directum iacere. Cum enim angulus A C D, æqualis sit angulis A B C, B A C; si addatur



communis angulus A C B, [a] erunt anguli A C D, A C B, æquales angulis A B C, B A C, A C B: Sed A B C, B A C, A C B, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis æquales. Quare B C, C D, vnam lineam rectam constituunt.

[a] 2. pron.
[b] 32. primi.

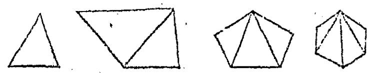
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineae, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundæ figurae rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineae aequales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis; Et sic de reliquis. Eũ autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figurae constitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse

esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur unum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cũ sit decimaoctaua, habebit 20. angulos aequiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figurę 10. lateribus contentae, aequiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autẽ hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraũe, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineae rectę, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulũ in quatuor, &c.



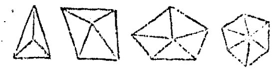
Cum igitur anguli horum triangulorum constituãt omnes angulos rectilineæ figurae propositae, & omnes anguli cuiuslibet trianguli aequales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figurae cuiusuis rectilineae aequales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.

SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, dẽptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

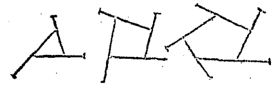
HOC est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera aequiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demon-

Demonstratio autem huius rei talis est Si à quouis puncto intra figuram assumpto



ad omnes angulos rectae lineae ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosúe figura ipsa continet. Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli [a] aequales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figurae rectilineae propositae, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figurę propositę, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes aequales 4. rectis tãtummodo, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusque figuræ bis tot rectis sunt aequales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum. — [a] 32. primi.

EX hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nã quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] æquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosúe figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni et externi simul æquales sunt sex rectis. Cum igitur interni [c] duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, — [b] 13. primi.



[c] 32. primi.

gulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.

IN pentagono ABCDE, *latera in vtrãque partem producta coeant in punctis* F, G, H, I, K. *Dico quinque angulos* F, G, H, I, K, *æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim* BHK, *cum latus* HB, *sit protractũ ad* F, [a] *erit externus angulus* FBK, *duobus internis, & oppositis* H, K, *æqualis.* (a 32. primi.) *Eadem ratione in triangulo* AIG, *erit externus angulus* FAG, *æqualis duobus internis, & oppositis* I, G. *Quare duo anguli* FBA, FAB, *æquales sunt quatuor angulis* G, H, I, K. *Addito igitur communi angulo* F, [b] *erũt* (b 2. pron.) *tres anguli* A, B, F, *trianguli* ABF, *æquales quinque angulis* F, G, H, I, K. *Sed anguli* A, B, F, *trianguli* ABF, [c] *æquales sunt duobus rectis.* (c 32. primi.) *Igitur & quinque anguli* F, G, H, I, K, *duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.*

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, [d] *æquales sunt duobus angulis rectis.* (d 32 primi.) *Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipsa triangula.*

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [a] *cum omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus.* (a 32. primi.) *Quare* [b] *cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus.* (b 5 primi.) *At verò si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.*

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum triãguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [c] *quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.* (c 32. primi.)

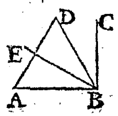
COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reli-

reliquum denique tertiam partem unius recti.

SCHOLIVM.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos aequales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. *Super rectam* A B, [a] *constituatur triangulum aequilaterum* A B D. *Et quia per corollarium 3. angulus* A B D, *facit duas tertias partes anguli recti* A B C; *erit angulus* C B D, *pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo* A B D, [b] *bifariam, per rectam* B E, *erit vterque angulus* A B E, E B D, *tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus* A B C, *diuisus est in tres angulos aequales. Quod est propositum.*



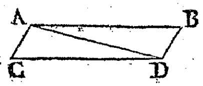
a 1. primi.

b 9. primi.

33.

PROBL. 23. PROPOS. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [c] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [d] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [e] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ

c 29. primi.

d 4. primi.

e 27. primi.

Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

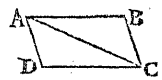
DIXIT Euclides, lineas aequales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsae coniungentes sint & aequales & parallelae. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, *&* D. *Item ad* B, *&* C, *neque coniungentes lineae essent parallelae vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent aequales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.*

THEOR. 24. PROPOS. 34.

34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos D A B, & D C B: Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim A B, D C, sint parallelæ, [a] erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rursus quia A D, B C, sunt parallelæ, [b] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique; & latus A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [c] erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B C, oppositæ rectæ A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales



a 29. primi.

b 29. primi.

c 26. primi.

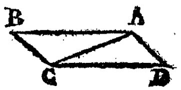
[a] 2. pron. les anguli DAC,BCA,toti quoque anguli BAD,BCD, [a] fiunt æquales; constat secundum,angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB,BC, trianguli ABC,æqualia sunt duobus lateribus CD,DA, trianguli CDA,vtrumq; vtriq;,& angulus B,angulo D,
[b] 4. primi. æqualis, vt iã ostendimus; [b] erunt triãgula ABC,CDA, ęqualia,ideoq; parallelogrammum ABCD,diuisum erit bifariã a diametro AC,quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum ęqualia sunt inter se,quæ ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam,non autem & angulos. In Quadrato enim,& Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemq; lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC,



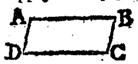
trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & basis AC, communis. Igi-
[c] 8. primi. *tur [c] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, vtrumque*
[d] 4. primi. *vtrique, & anguli B, D, ostensi æquales; [d] erit angulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA,*
[e] 27. primi. *alterno angulo DAC. Quare [e] erunt AB, & DC, parallelæ; Item AD, & BC, quod est propositum.*

HINC

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorũ latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

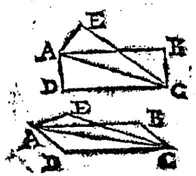
Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.



SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppositi A, & C, ęquales; Item oppositi anguli B, & D. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemq; lineas AD, BC. Nam si ęqualibus angulis A, & C, addantur æquales angulis B, & D; [a] erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, et B, dimidiũ facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, [b] parallelæ sunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiã manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus. [a] 2. primi. [b] 28. primi.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostẽsum est; in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerso

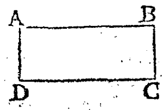


 ordine,

ordine, ita vt latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, vt in scholio propos. 22. docuimus; fiatque trapezium A E C D. Quoniam verò triãgulum A B C, triangulo A D C,
a 34. primi. *æquale est, [a] quòd diameter A C, bifariam secet parallelogrammum D B: Erit & triangulum A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.*

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogramum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest. Tertium Theorema huiusmodi est.

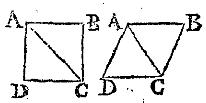
OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.



SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque A D, B C. Quoniam enim duo anguli A, & B,
b 28 primi. *æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti; [b] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod est propositum.*

HINC rursum constat, Quadratum, & Altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

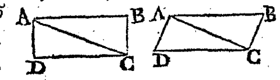
HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos vero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus



A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, vtrumque vtrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim
c 8. primi. *hæ figuræ æquilateræ) [c] erunt anguli B A C, D A C, æquales.*

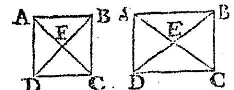
Quare

Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.



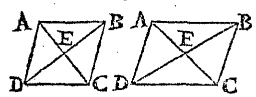
SIT rursus Altera parte lõgius, vel Rhõboides A B C D, in quo diameter A C, sitque, maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C,
[a] erit angulus B C A, maior angulo B A C. Est autem an- a 18. primi.
gulus B C A, [b] æqualis angulo D A C, alterno; quod B C, b 29. primi.
A D, parallelæ sint. (Est enim A B C D, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem vero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico esse æquales. Cum enim duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus A B, A D, trianguli B A D; vtrumque vtrique, & angulus A B C, an-



gulo B A D, quia vterque rectus; [c] erit basis A C, basi B D, c 4. primi.
æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D; sitq; angulus B A D, maior; A B C, minor. Non enim æquales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum ambo [d] æquales sint duobus re- d 29. primi.
ctis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam enim duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus



B A D,

a 24. primi.

BAD, angulo ABC, maior existit; a erit basis BD, maior base AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.

b 29. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

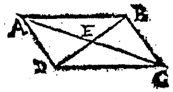
IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, b æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; & c latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; d Erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

e 15. primi.
f 4. primi.
g 27. primi.

IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidãt in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, e æquales quoque; f erunt & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. g Quare rectæ AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.



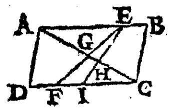
HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunq;, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta li-

nea diuidẽs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

a 29. primi.
b 15. primi.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 2. pron.
f 34. primi.

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariã secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus EAG, a æqualis est angulo alterno FCG, & b angulus EGA, angulo FGC: Est autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis AEG, CFG, opponũtur; c erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti æquales; d erũt triangula AGE, CGF, æqualia. Addita igitur communi quãtitate BCGE, e erit triangulum ABC, trapezio BCFE, æquale: Sed triangulum ABC, f dimidiũ est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidiũ erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta EF, parallelogrammum bifariam secat.



g 10. primi.

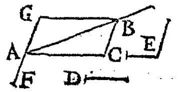
SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam diuiditur in G, g diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo æquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusq; punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de aliis punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quę cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem esse duobus rectis.

DVÆ rectæ infinitæ A B, A C, *contineant angulũ* B A C, *sitq́ data recta finita quæcunque* D, *& angulus datus* E, *hac lege, vt duo anguli* E, *&* B A C, *minores sint duobus rectis.*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, *collocare rectam æqualem quidem rectæ* D, *cum alterutra vero illarum, nimirũ cum* A C, *facientem angulum æqualẽ angulo dato* E. [a] *Fiat angulus* C A F, *æqualis angulo* E, *& producta* F A, *ad* G, [b] *sit* A G, *æqualis rectæ* D; *& per* G, [c] *ducatur* G B, *parallela ipsi* A C, *secans* A B, *in* B: *Deinde per* B, *ducatur* B C, *parallela ipsi* A G, *secans* A C, *in* C. *Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem esse rectæ* D, *angulumq́* B C A, *angulo* E. *Cum enim parallelogrammum sit, per constructionem,* A C B G, [d] *erit recta* B C, *rectæ* G A, *æqualis: At* G A, *æqualis est, per constructionem, rectæ* D. *Igitur &* B C, *rectæ* D, *æqualis erit. Rursus quia* [e] *angulus* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis est; & eidem angulo* C A F, *æqualis est, per constructionem, angulus* E; *erunt anguli* E, *&* B C A, *æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum* A B C, *si anguli* B A C, *&* B C A *æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.*

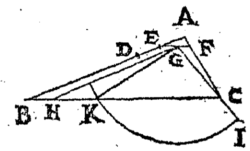
[a] 23. primi.
[b] 3. primi.
[c] 36. primi.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.

S CHO-

SCHOLIVM. II.

NON alienum erit à nostro instituto, adijcere quędam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quę à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non sit ęquilaterum, vel Isosceles habens basim latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duae rectae intra triangulum, quae simul sumptae maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam aequales.

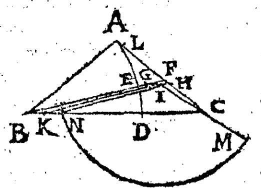
SIT enim primum triangulum A B C, *habens latus* A B, *latere* A C, *maius, sitq́* B D, *dimidium vtriusque lateris* A B, A C, *simul: Sumpto autem inter* A D, *puncto* E, *vtcunque, agatur* E F, *ipsi* B C, *parallela; & ex quouis puncto* G, *lateri* A B, *parallela ducatur* G H, *rectaq́ iungatur* G C, *Et quoniam* E A, A F, [a] *maiores sunt, quam* E F: *Itẽ* C F, F G, *maiores, quàm* G C; *erunt* E A, A C, F G, *simul maiores, quam* E F, G C, *simul: ablataq́ communi* F G,



erunt E A, A C, *simul maiores, quam* E G, G C, *simul; ac proindè multò maiores, quam* G C, *sola. Producatur ergo* G C, *fiatq́* G I, *ipsis* E A, A C, *simul aequalis. Quia vero* B E, *maior est, quam vtraque* E A, A C, *simul, quod* B E, *superet* B D, *dimidium vtriusque* B A, A C, *simul, at* E A, A C, *simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque* D A, A C, *simul; erit quoque* B E, *maior, quam* G I, *quę ipsis* E A, A C, *simul est ęqualis. Cum igitur* [b] *ipsi* B E, *aequalis sit* G H, *in parallelogrammo* B E G H; *erit quoque* G H, *maior, quam* G I. *Si igitur centro* G, *& interuallo* G I, *circulus describatur, secabit is rectam* G H, *ac propterea & ipsam* C H, *prius secabit in* K. *Connectatur* G K. *Dico vtramque* G H, G K, *simul aequalem esse vtriq;* A B, A C, *simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam* G H, *ipsi* B E, *aequalis est, &* G I, *hoc est,* G K, *ipsis* E A, A C, *simul.*

[a] 20. primi.
[b] 34. primi.

mul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, *remotius à* D, *sumptum fuerit, & punctum* G, *à puncto* E; *hoc est, prout tam* A D, *quam* E F, *infinitis in punctis secari potest.*



SIT deinde Isosceles ABC, *habens basim* B C, *vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro* B, *per* A, *arcu* A D, *secante rectam* B C, *in* D, *ducatur vtcunque recta* B F, *secans arcum in* E, *& latus* A C, *in* F; *& in* E F, *per quoduis punctum* G, *ipsi* B C, *parallela agatur* G H, *& per quodcunque eius punctum* I, *ipsi* B F, *parallela ducatur* I K; *rectaq; iungatur* I C; *atque ipsi* E G, *æqualis abscindatur* A L. *Erit igitur* B G, *ipsis* A B, A L, *simul æqualis, at* L C, *minor quam* BE, *siue* A B, *& ob id multò minor, quam* B G. *Et quia ipsi* BG, [a] *æqualis est* I K, *in parallelogrammo* B G I K; *erit quoque* I K, *ipsis* A B, A L, *simul æqualis, maior autem, quam* L C. *Itaque* [b] *quia* G F, F H, *maiores sunt, quam* G H; *&* H C, H I, *maiores, quam* I C: *erunt* G F, F C, H I, *simul maiores, quam* G H, I C; *& ablata communi* H I, *erunt reliquæ* G F, F C, *simul maiores, quam* G I, I C, *simul; ac proinde apposita communi* B G, *fient* B F, F C, *simul maiores, quam* B G, G I, I C, *simul. Sed ipsis* B F, F C, [c] *maiores sunt* B A, A C, *simul. Ergo multò maiores erunt* BA, A C, *simul, quam* B G, G I, I C, *simul. Cum ergo* B G, *ipsis* B A, A L, *simul æqualis sit, erit reliqua* L C, *maior, quam reliquæ* G I, I C, *simul; ac proinde multò maior, quam* I C, *sola. Ponatur* I M, *(producta* I C*) ipsi* L C, *æqualis. Et quia* I K, *ostensa est maior, quam* L C, *hoc est, quam* I M; *si ex centro* I, *per* M, *arcus circuli describatur, secabit is rectam* I K, *ac proinde prius ipsam* C K, *secabit in* N. *Connectatur* I N. *Dico vtramque* I K, I N, *simul æqualem esse vtrique* A B, A C, *simul. Id quod ex constructione patet. Est namque* I K, *ipsis* A B, A L, *simul æqualis, &* I N, *hoc est,* I M, *ipsi* L C, *æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri potest; cum* B F, *infinitis modis duci possit; & tam* E F, *quam* G H, *infinitis modis secari.*

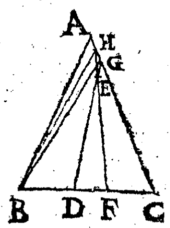
[a] 34. primi.
[b] 20. primi.
[c] 20. primi.

CON-

CONSTAT autem, si intra idem triangulum A B C, *ducantur duæ rectæ, quæ rectas* H G, G K, *in priori triangulo, vel rectas* K I, I N, *in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus* A B, A C, *simul sumptis: quippe quæ* [a] *maiores forent rectis* H G, GK, *in priori triangulo, vel rectis* K I, I N, *in posteriori.*

[a] 21. primi.

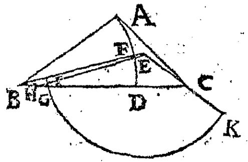
AT verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim A B C, *cuius duo latera* A B, AC, *æqualia, & basis* B C, *nō maior;* [b] *sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus* A, *maior non sit, quam angulus* B, *vel* C, *sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ* D E, E F, *vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus* A B, A C, *simul sumptis. Producatur enim* D E, *secans latus* A C, *in* G, *iungaturq; recta* G B. *Quoniam igitur* [c] *duo anguli* A B C, *&* C, *æquales sunt, estq;* A B C, *maior angulo* G B C, *erit quoque* C, *maior angulo* G B C. *Est autem* [d] *& angulus* G D B, *angulo* C, *maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus* G D B, *angulo* GBC; [e] *ac proinde latus* G B, *latere* G D, *maius erit. Quia vero* [f] *angulus* B G A, *maior est angulo* C, *externus interno; angulusq;* C, *vel æqualis est angulo* A, *vel maior, vt ostendimus: erit quoq; angulus* BGA, *angulo* A, *maior. Quare* [g] *latus* A B, *latere* GB, *maius erit: Sed recta* G B, *ostensa est maior, quā* G D; *ac proinde multò maior, quam* D E. *Igitur latus* A B, *multò etiam maius erit, quam* D E. *Eadem ratione, si* F E, *producatur secans* A C, *in* H, *iungaturq; recta* H B, *ostendemus latus* A B, *ac proinde &* A C, *maius esse, quam* F E. *Quocirca latera* A B, AC, *simul maiora sunt duabus rectis* D E, E F, *simul sumptis. Quòd si* F E, *producta secaret latus* A B, *demonstraremus eodem modo, latus* A C, *maius esse recta* E F.



[b] 5. vel 18. primi.
[c] 5. primi.
[d] 16. primi.
[e] 19. primi.
[f] 16. primi.
[g] 19. primi.

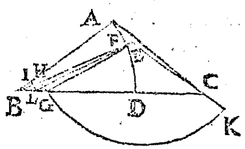
IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interio-

interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primum constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo A B C, *cuius latus* A B, *minus non sit latere* A C, *at latus* B C, *vtrouis latere* A B, A C, *maius. Descripto ex centro* B, *arcu circuli* A D, *sumatur quoduis punctum* E, *inter arcum* A D, *& latus* A C, *ducaturque recta* B E, *secans arcum in* F; *ita vt* B E, *maior sit, quam* B F, *hoc est, quam* B A, *iungaturque* E C.



a 21. primi. *Quia vero* a B E, E C, *simul minores sunt, quam* A B, A C, *simul, estque* B E, *maior, quam* A B, *erit* E C, *multò minor, quam* A C. *Producta igitur* E C, *fiat* E K, *ipsi* A C, *æqualis, ac propterea minor, quam* E B; *describaturque ex* E, *per* K, *arcus circuli, qui rectam* E B, *secabit, ac proinde & ipsam* C B, *prius secabit in* G. *Sumpto denique inter* B, *&* G, *quouis puncto* H, *iungatur recta* E H, *secans arcum in* I: *factumque erit, quod proponitur. Nam* B E, *maior est, quam* B A, *&* E H, *maior, quam* E I, *hoc est, quam* E K, *vel* A C.

a. maius, *DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: fiatque eadem constructio, dempta linea* E H, *sed arcus* K G, *secet rectam* E B, *in* H. *Et ~~quia~~ latus* B A, *latere* A C, *ponitur ~~non~~ minor, erit* B E, *recta maior, quam* A B, *cum maior sit, quam* B F, *hoc est, quam* A B. *Sumpta igitur* E I, *æquali ipsi* A B, *cadet punctum* I, *inter* B, *&* H; *quandoquidem* E B, *maior est, quam* A B, *&* E H, *~~non minor~~ maior, quam* A B. *Ex* E, *per* I, *describatur arcus circuli secans* B C, *in* L, *iunganturque rectæ* E L, E G: *factumque erit, quod proponitur. Nam* E L, *ipsi* E I, *hoc est, ipsi* A B, *æqualis est, &* E G, *ipsi* E K, *hoc est, ipsi* A C.



PRÆTER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ

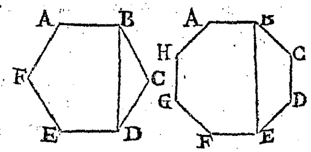
diximus,

diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionẽ datam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habẽte numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero; vt in hexagono A B C D E F, *latera opposita erunt* A B, E D; *quoniam tam ad partes* A, *&* E, *duo sunt latera, quam ad partes* B, *&* D. *In octogono vero* A B C D E F G H, *latera opposita erunt* A B, F E, *quia tam ad partes* A, *&* F, *tria sunt latera, quam ad partes* B, *&* E. *Et sic in alijs figuris æquilateris pariũ laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera,*

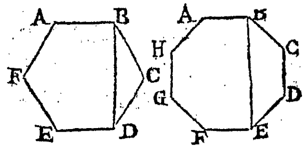


quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur quælibet latera opposita esse parallela; A B, *nimirum ipsi* E D, *in hexagono; &* A B, *ipsi* F E, *in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdẽ partes linea recta, qualis est in hexagono* B D, *& in octogono* B E. *Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli* B, C, D, *eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli* B C D, C B D, C D B, *trianguli* B C D, a *duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli* A B D, E D B, *duobus rectis* a 32. primi.

rectis

a 28. primi. *b 28. primi.*

ctis æquales erunt. Quare [a] parallelæ erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, [b] atq; adeo AB, F E, parallelæ erũt. Eodẽ modo demonstrabitur, in omnibus alijs figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorũ laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiãgula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.



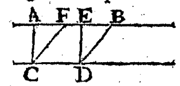
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus. Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

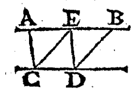
INTER duas parallelas A B, C D. super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quãdo duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in

vt in exemplo proposito cernitur. Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta A E, [a] æqualis est rectæ C D, oppositæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrãmo C D B F, opposita; Erunt A E, F B, [b] inter se æquales. Dempta igitur communi F E, [c] remanebit A F, ipsi E B, æqualis: [d] Est autem & A C, ipsi ED, opposite æqualis in parallelogrammo C D E A; [e] & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. [f] Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F, [g] fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod est propositum.



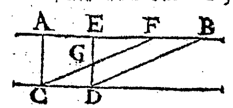
a 34. primi. *b 1. pron.* *c 3. pron.* *d 34. primi.* *e 29. primi.* *f 4. primi.* *g 2. pron.*

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli B E D, E A C; atq; adeo [h] triãgula EAC, BED, æqualia. Addito igitur cõmuni triangulo C D E, [i] fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.



h 4. primi. *i 2. pron.*

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F; [k] erit tota A F, toti E B, æqualis, nec nõ & anguli B E D, F A C, æquales erunt; atque adeo [l] triãgulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo communi triangulo E G F, [m] remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.



k 2. pron. *l 4. primi.* *m 3. pron.*

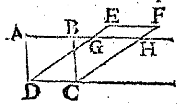
SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propositionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

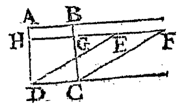
SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, *super eandem basin* CD, *& ad easdem partes.* Dico *rectam* AB, *productam in directum iacere ipsi* EF, *& propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias n.* AB, *producta vel cadet infra* EF, *vel supra. Cadat primo infra, qualis est* AH.



[a] 35. primi.

Erit igitur parallelogrammum CDGH, [a] *æquale parallelogrammo* ABCD: *Ponitur autem eidem parallelogrammo* ABCD, *æquale parallelogrammum* CDEF. *Quare parallelogramma* CDEF, CDGH, [b] *æqualia erunt, totum, & pars, quod est absurdum.* Non ergo cadet AB, *infra* EF.

CADAT secundo AB, *producta supra* EF. *Cadet igitur* FE, *protracta infra* AB. *Quare, vt prius, erunt parallelogramma* ABCD, CDHG, *æqualia: totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si* CF, DE, *producerentur vsque ad* AB, *protractam. Eademq; demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, siue punctum* E, *sit vltra* B, *siue non, vt perspicuum est.* Non *ergo cadet* AB, *supra* EF; *sed nec infra, vt demonstratum est: ergo producta in directum iacet ipsi* EF; *ac proinde parallelogramma* ABCD, CDEF, *in eisdem sunt parallelis.*



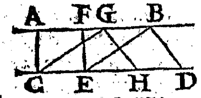
THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super

per

per æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales bases CE, HD, inter easdem parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, [a] æqualis est GB, in parallelogrammo GHDB, opposita; erunt CE, GB, [b] æquales inter se: Sunt autem & parallelæ, per hypothesin. Quare & CG, EB, ipsas coniungentes, [c] parallelæ erunt, & æquales, ideoq; CEBG, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma ACEF, GCEB, sint inter easdem parallelas, & super eandem basin CE, [d] erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rursus quia parallelogramma GCEB, GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basin GB, [e] erit quoq; parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, [f] inter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallalelis constituta, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.
[d] 35. primi.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

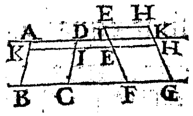
SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex est, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

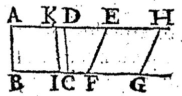
N SINT

SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, super bases æquales BC, FG, & ad easdem partes constituta. Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse æqualia; quemadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales data in eadem linea recta BG.



SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, [a] abscindatur BI, æqualis rectæ FG, & [b] ducatur IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] æquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC, FG, æquales sunt.

a 3. primi.
b 31. primi.
c 36. primi.



SEQVENS quoq; theorema facile hinc demonstrabitur.

SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitq; basis BC, maior base FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius esse. [d] Auferatur enim recta BI, ipsi FG, æqualis, [e] ducaturq; IK, ipsi AB, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma BK, FH, supra æquales bases BI, FG, æqualia. Cum igitur BD, [g] maius sit, quàm BK, erit idem BD, maius, quàm FH.

SINT rursum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse base FG. Nam si foret

d 3. primi.
e 31. primi.
f 36. primi.
g 9. pron.

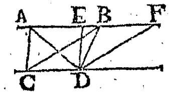
foret æqualis, [a] essent parallelogrãma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum FH, maius, quam BD, vt proximè ostendimus. quod multò magis est absurdum, cùm BD, maius ponatur, quàm FH. Basis ergo BC, cum neq; æqualis sit ipsi FG, neque minor, erit maior, quàm FG, quod est propositum.

a 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

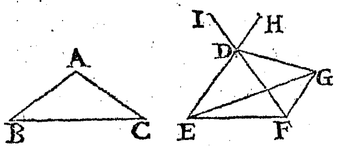
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula ACD, BCD. Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quãdo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. [c] Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin CD, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula ACD, BCD; [d] quod AD, BD, diametri bifariam secent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



b 31. primi.
c 35. primi.
d 34. primi.
e 7. pron.

SCHOLIVM.

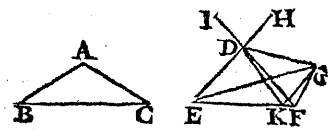
CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula ABC,



DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintq; primum hi duo anguli duobus rectis æquales.
Dico triangula esse æqualia Producatur enim ED, ad H, &
a 23.primi. FD, ad I; [a] fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, [b] & re-
b 3.primi. cta DG, rectæ DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam
igitur duo anguli A, & EDF, ponũtur æquales duobus rectis,
& angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & an-
c 13.primi. guli EDG, GDH, [c] duobus rectis æquales. Igitur anguli
EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare
d 3.pron. ablato communi angulo EDG, [d] remanebit angulo EDF,
æqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF,
e 15.primi. [e] æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI,
æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt æqua-
f 5. primi. lia in triangulo DFG; [f] erunt anguli DFG, DGF, æqua-
g 32.primi. les; qui cum [g] æquales sint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eius-
h 7.pron. dem anguli GDI. [h] Quare anguli GDH, DGF, æquales
i 27.primi. erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG, [i] erunt EH, FG,
k 37.primi. parallelæ. Quamobrem [k] triangula DEG, DEF, æqualia erunt, cũ habeant eandẽ basin DE, sintq; inter easdẽ paralle-
l 4. primi. las DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, [l] æquale est triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est propositum.

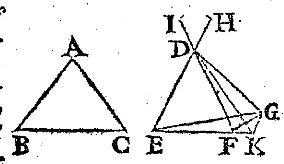
SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulũ, minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, &
m 23.primi FD, ad I; [m] fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, [n] &
n 3. primi. recta DG, rectæ DF, seu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiore

iores duobus rectis, erũt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sũt aũt anguli EDG, GDH, [a] æquales duobus rectis. Igitur an-



a 13.primi.
guli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero [b] angulus EDF, angulo HDI,
æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; atq; adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia b 15.primi.
latera DG, DF, æqualia sunt: [c] erunt anguli DFG, DGF,
æquales: qui cum sint [d] æquales externo GDI, erit vteruis c 5.primi.
eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum d 32.primi.
est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, [e] æqualis angulo alter-
no GDH. Erit ergo GK, [f] parallela ipsi DE, secabitq; GK, e 23.primi.
rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, f 27.primi.
recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [g] æquale triangu-
lo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, [h] æquale est g 37.primi.
triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqua- h 4.primi.
lia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [i] minus sit triangulo DEF; erit quo-
que ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est i 9.pron.
propositum.

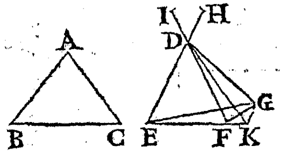
SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [k] fiatque



angulus EDG, æqualis angulo A, [l] & recta DG, rectæ k 23.primi.
DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF, Quoniam igitur l 3.primi.
anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores: Sunt
[m] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igi- m 13.primi.

 tur

tur E D G, E D F, *minores sunt, quàm* E D G, G D H; *demptoq; communi* E D G, *remanebit* E D F, *minor, quã* GDH. *Est autẽ* EDF,



[a] 15. primi. [a] *æqualis ipsi HDI. Quare & H D I, minor erit, quàm G D H; atque adeo GDH, maior est dimidio anguli G D I. Quoniam autem* DGF, *dimidium est eiusdem anguli* GDI, *vt iam supra ostensum fuit; erit GDH, maior, quam DGF. Fiat igitur angulus DGK,*

[b] 23. primi. [b] *æqualis angulo GDH; ducta recta G* K, *quæ secabit rectam E F, protractam in* K; *& ducatur recta* D K. *Erit ergo, vt prius,* G K,

[c] 27. primi. [c] *parallela ipsi* D E;

[d] 37. primi. [d] *triangulumq;* DEG, *triangulo* DEK, *æquale: Est autem iterum* D E G,

[e] 4. primi. [e] *æquale ipsi* A B C. *Igitur &* ABC, *æquale est ipsi* DEK. *Quocirca cum* DEK,

[f] 9. pron. [f] *maius sit, quàm* D E F; *erit &* A B C, *maius, quàm* D E F. *Quod demonstrandum erat.*

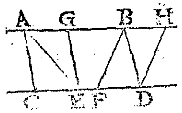
EX his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

38.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia.



[g] 31. primi. [g] Ducatur enim E G, parallela ipsi A C, & D H, ipsi B F:

[h] 36. primi. Eruntq; [h] parallelográma A C E G, B F D H, æqualia. Cum igitur horum

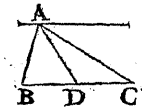
[i] 34. primi. [i] dimidia sint triangula A C E,

[k] 7. pron. B F D; [k] erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40. COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triãgulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, *ex angulo A, recta* A D, *diuidens bifariam latus* B C, *in* D. *Dico triangulum* ABC, *bifariam quoque secari. Si enim per* A, *ducatur parallela ipsi* B C, *erunt duo triangula* ABD, A D C, *inter easdem parallelas; & super æquales bases.*

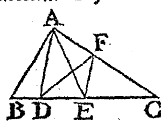


[a] *Quare æqualia erunt.* [a] 38. primi.

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. *Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt est ostensum: Si vero D, non diuidit B C,*



bifariam, [b] *secetur B C, bifariam in E.* [b] 10. primi.

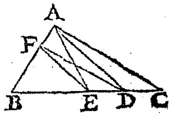
Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per E, [c] *parallela E F, ipsi D A,* [c] 31. primi.

secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam à linea D F. Nam ducta recta E A,

[d] *erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum sint super* [d] 38. primi.

eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, [e] *erunt tota triangula AEC,* [e] 2. pron.

C D F, æqualia: Est autem A E C, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C, quod erat probandum.



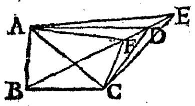
QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, *eodem modo problema conficiemus : sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes* C, *vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in* C, *& C, in* B. *Hoc tamen problema multo nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.*

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC.



Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum E B C, æquale : Est autem per hypothesin, triangulum quoq; DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 31. primi.
[b] 37. primi.
[c] 1. pron.

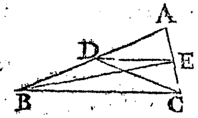
SCHO-

SCHOLIVM.

EX his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, *latera* A B, AC, *trianguli* A B C, *bifariam in* D, *& E. Dico D E, parallelam esse lateri* B C. *Cum enim triangula* A D E, B *DE, sint super æquales bases* A D, D B, *& inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi* A B,) [a] *erit triangulum* B D E, *triangulo* ADE, *æquale : Eadem ratione erit triangulum* C E D, *eidem triangulo* A D E, *æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propos. Recta enim* E D, *secabit triangulum* A E B, *bifariam, & recta eadem D E, triangulum* A D C, *bifariam etiam, quòd bases* A B, AC, *sectæ sint bifariam à recta* D E, *ex hypothesi. Igitur triangula* D B E, C E D, [b] *æqualia erunt:* Ha*bent autem eandem basin* D E, *& sunt ad easdem partes constituta. Quare* [c] *inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E,* B C, *parallelæ erunt. Quod est propositum.*

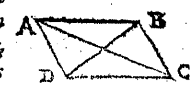


[a] 38. primi.
[b] 1. pron.
[c] 39. primi.

ID *autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.*

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, *diuidatur bifariam ab vtraque diametro* A C, B D. *Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula* A D C, B D C, *dimidia sint eiusdem quadrilateri* A B C D, [d] *ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin* D C, *ad easdemq; partes sint,* [e] *ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco recta* A B, D C,



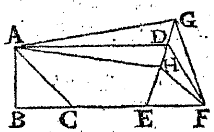
[d] 7. pron.
[e] 39. primi.

parallelæ

parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. *Parallelogrammum igitur est* A B C D. *Quod est propositum.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

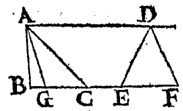


SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primum supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igi-
a 38.primi. tur parallelæ sunt A G, B F, [a] erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale. Ponitur autem & triangulum
b 1.pron. D E F, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur [b] triangula DEF, *GEF*, æqualia erũt, pars & totũ. Quod est absurdũ. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triãgula HEF, DEF, ęqualia, pars & totũ, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio conuertit vno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.



SINT triangula æqualia A B C, D E F, *inter parallelas* A D, B F, *& super bases* BC, EF, *quas dico esse ęquales. Si enim non sunt æquales, sit* B C, *maior.* [a] *Abscissa ergo recta* C G, *æquali ipsi* E F, *& ducta recta* G A; [b] *erit triangulum A G C, triangulo* D E F, *æquale: Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale. Igitur triangula* A G C, *A B C*, [c] *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases* B C, E F, *sed æquales. Quod est propositum.*
a 3.primi.
b 38.primi.
c 1.pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, *triangula* A B C, D E F, *sitq; basis* B C, *base* E F, *maior. Dico triangulum* ABC, *maius esse triangulo* DEF. *Ablata enim recta* CG, [d] *æquali ipsi* EF, *ductaq; recta* AG; [e] *erũt triangula* A G C, D E F, *supra æquales bases* G C, E F, *æqualia. Cum ergo* [f] *triangulum* A B C, *triangulo* A G C, *maius sit; erit idem triangulum* A B C, *maius, quam* DEF.
d 3.primi.
e 38.primi.
f 9.pron.

SINT rursus triangula A B C, D E F, *inæqualia, &* A B C, *maius. Dico basin* B C, *base* E F, *maiorem esse. Si enim dicatur æqualis,* [g] *erit triangulum* A B C, *triangulo* D E F, *æquale. quod est absurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum* DEF, *maius triangulo* A B C, *vt proximè ostendimus, quòd multò magis est absurdum, cum* A B C, *ponatur maius, quam* D E F. *Recta igitur* B C, *maior erit, quam* E F, *cum neque æqualis sit ostensa, neque*
g 38.primi.

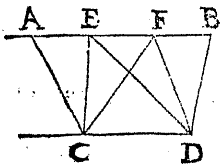
ſa, neque minor. Quod eſt propoſitum.

QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, parteſq́; ſunt earundem parallelarum.



INTER parallelas igitur A B, C D, *ſuper eadem baſi* C D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C D E, F C D B, *quorum baſes oppoſitæ* A E, F B, *æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis* E C, F D, [a] *erunt tũ triangula* E C D, F C D, *ſuper eadem baſi* C D, *& in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia,* [b] *quam triangula* A C E, F D B, *ſuper æqualibus baſibus* A E, F B, *& in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus* E C D, F C D, *addantur æqualia* A C E, F D B, [c] *erunt tota trapezia* A C D E, F C D B, *inter ſe æqualia.*

[a] 37. primi.
[b] 38. primi.
[c] 2. pron.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, *æqualia. Dico baſes oppoſitas* A E, F B, *æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus* [d] *triangula* E C D, F C D, *æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula* A C E, F D B. *Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* A E, F B, *æquales erunt.*

[d] 37. primi
[e] 3. pron.

TRA-

II.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſq́; eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorq́ue eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis A E, *dicatur eſſe maior baſe* F B; *Dico trapezium* A C D E, *maius eſſe trapezio* F C D B. [a] *Erunt enim rurſus triangula* E C D, F C D, *æqualia: At triangulum* A C E, *triangulo* F D B, *maius, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus.* [b] *Totum ergo trapezium* A C D E, *toto trapezio* F C D B, *maius erit.*

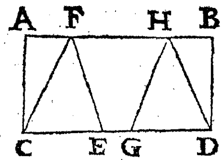
[a] 37. primi.
[b] 4. pron.

RVRSVS ſi trapezium A C D E, *dicatur eſſe maius trapezio* F C D B; *Dico baſin* A E, *baſe* F B, *maiorem eſſe.* [c] *Erũt.n. rurſus triãgula* E C D, F C D, *æqualia. Quare reliquum triangulum* A C E, *reliquo triangulo* F D B, [d] *maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis* A E, *maior erit baſe* F B. *Quod oſtendendum erat.*

[c] 37. primi.
[d] 5. pron.

III.

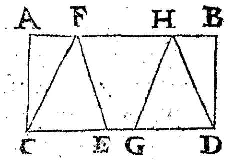
TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.



INTER parallelas A B, C D, *ſuper æquales baſes* C E, G D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C E F, H G D B, *quorum baſes oppoſitæ* A F, H B, *æquales quoque ſint. Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis* F C,

H D,

[a] 38. primi. [b] 2. pron.



HD,[a] *erunt tam triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *quam* ACF, BDH, *ſuper baſes æquales* AF, BH, *inter ſe æqualia*. [b] *Tota ergo trapezia æqualia erunt.*

[c] 38. primi. [d] 3. pron.

SINT *iam trapezia* ACEF, HGDB, *æqualia ſuper baſes æquales* CE, GD. *Dico baſes oppoſitas* AF, BH, *æquales quoque eſſe.* [c] *Erunt namque rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula* ACF, BDH, [d] *æqualia erunt; ac proinde, vt paulo antè in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* AF, BH, *æquales erunt.*

IIII.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq; eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorq; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

[e] 38. primi. [f] 4. pron.

VT *in eadem figura, ſi baſis* AF, *dicatur eſſe maior baſe* HB, *erit trapezium* ACEF, *trapezio* HGDB, *maius.* [e] *Erunt enim rurſum triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: At triangulum* ACF, *maius triangulo* BDH, *vt ſupra oſtenſum eſt, quod baſis* AF, *maior ponatur baſe* BH. [f] *Totum ergo trapezium* ACEF, *toto trapezio* HGDB, *maius erit.*

[g] 38. primi. [h] 5. pron.

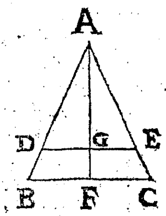
RVRSVS *ſi trapezium* ACEF, *maius ponatur trapezio* HGDB, *erit baſis* AF, *baſe* BH, *maior.* [g] *Erunt enim rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum* ACF, *reliquo triangulo* BDH, [h] *maius erit;*

erit; ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum fuit, baſis AF, *baſe* BH, *maior erit. Quod erat oſtendendum.*

PORRO *non videtur hic omittendum theorema ſequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in ſcholio propoſ. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem confici poſſit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. oſtendemus, iucundum tamen eſt intelligere, nullo labore idem abſolui poſſe per propoſitiones hactenus demonſtratas, ſine proportionum adiumento.* Theorema *ergo eſt huiuſmodi.*

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam.

IN triangulo ABC, *æquidiſtet* DE, *ipſi* BC, *& recta* AF, *ſecet alterutram* BC, DE, *bifariam in* F, *vel* G. *Dico alteram quoque bifariam ſecari. Sint enim primum anguli ad* F, *recti. Quo poſito,*[a] *& anguli ad* G, *recti erunt. Si igitur* BC, *diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus* A, *per ea, quæ in ſcholio propoſ. 26. huius lib. demonſtrauimus; ac proinde recta* AG, *ad baſim* DE, *trianguli* ADE, *perpendicularis, diuidensq; angulum* A, *bifariam, diuidet bifariam quoque baſim* DE, *vt ibidem oſtendimus, quod eſt propoſitum.* [a] 29. primi.

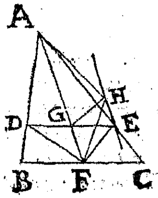


SI *vero* DE, *ponatur diuidi bifariã, diuidetur, per idem ſcholium propoſ. 26. huius lib. angulus quoque* A, *bifariam; ac proinde recta* AF, *ad baſim* BC, *perpendicularis; diuidensq; angulum* A, *bifariam, baſim quoque* BC, *bifariam ſecabit, quod eſt propoſitum.*

SINT *deinde anguli ad* F, *non recti, ſed* AFC, *obtuſus, &* AFB, *acutus. Quo poſito, erit &* AGE, *obtuſus, &* AGD, *acutus,* [b] *cum his illi ſint æquales, externi internis.* [b] 29. primi.

Si

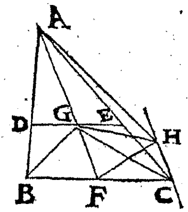
Si igitur B C, diuiditur bifariam, [a] constituatur acuto angulo A G D, æqualis angulus A G H, & recta G H, rectæ G D, æqualis, ducanturque rectæ A H, H F, F D, F E. Quia igitur tam triangula tota A B F, A C F, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [c] quam triangula ablata D B F, E C F, ob æquales bases B F, C F: [d] erunt quoque reliqua triangula A D F, A E F, æqualia. Rursus quoniam duo latera A G, G D, trianguli A G D, duobus lateribus A G, G H, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales A G D, A G H, ex constructione, [e] erunt quoque triangula A G D, A G H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera D G, G F, duobus lateribus H G, G F, æqualia sunt, ex constructione, angulosque continent æquales D G F, H G F, (cum enim per constructionem anguli A G D, A G H, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, æquales. [f] sunt enim tam A G D, D G F, quam A G H, H G F, duobus rectis æquales.) [g] erunt quoque triangula D G F, H G F, æqualia: [h] ac proinde & tota triangula A D F, A H F, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo A D F, æquale ostensum triangulum A E F. Igitur & inter se [i] æqualia erunt triangula A H F, A E F; [k] ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, erit basi A F, communi parallela. Igitur [l] & triangula H G F, E G F, inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum H G F, triãgulo D G F, ostensum æquale. Igitur triangula quoque D G F, E G F, æqualia inter se erunt; propterea que basis quoque D G, basi G E, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.



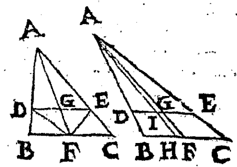
SI vero D E, ponatur bifariam diuidi, [m] constituatur angulo acuto A F B, æqualis angulus A F H, [n] & recta F H, rectæ F B, ducanturque rectæ A H, H G, G B, G C. Quoniam igitur tam triangula A G D, A G E, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [o] quam triangula D G B, E G C, ob æquales bases D G, E G; [p] erũt tota etiam triangula A G B, A G C, æqualia. Rursus quia duo latera A F, F B, duobus lateribus

[a] 23. primi.
[b] 3. primi.
[c] 38. primi.
[d] 3. pron.
[e] 4. primi.
[f] 13. primi.
[g] 4. primi.
[h] 3. pron.
[i] 1. pron.
[k] 39. primi.
[l] 37. primi.
[m] 23. primi.
[n] 3. primi.
[o] 34. primi.
[p] 2. pron.

lateribus A F, F H, æqualia sunt, continentque angulos æquales A F B, A F H, ex constructione; [a] erunt triangula quoque A F B, A F H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera G F, F B, duobus lateribus G F, F H, æqualia sunt, æqualesque continent angulos G F B, G F H, ex constructione; [b] erunt quoq; æqualia triangula G F B, G F H: quibus demptis ex æqualibus A F B, A F H, [c] æqualia erunt reliqua triangula A G B, A G H: Est autem eidem triangulo A G B, ostensum æquale triangulum A G C. [d] Igitur & triangula A G C, A G H, inter se erunt æqualia. [e] Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta C H, ipsi A F, parallela erit; ac proinde [f] æqualia inter se erunt triangula G H F, G F C. Fuit autem ostensum triangulum G H F, triangulo G B F, æquale. [g] Igitur & æqualia inter se erunt triangula G F C, G F B; ideoque, vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases F C, F B, æquales erunt. Quod est propositum.



ALITER. Diuisa sit primum B C, bifariam in F. Dico & D E, bifariam esse diuisam in G. Si enim D G, G E, non sunt æquales, sit maior D G, ducanturque rectæ F D, F E. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum A D G, triangulo A E G, quàm triangulum F D G, triangulo F E G, maius. [h] Totum ergo triangulum A D F, toto triangulo A E F, maius erit: quibus si addantur triangula D B F, E C F, [i] quæ propter bases æquales B F, C F, æqualia sunt, [k] fiet totum triangulum A B F, toto triangulo A C F, maius; ac proinde, vt in hoc scholio monstrauimus, basis B F, base F C, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est D E, in G. Quod est propositum.



SIT iam D E, secta bifariam in G. Dico & B C, diuidi bifariam in F. Sin minus, [l] diuidatur B C, in H, bifariam, ducaturque recta A H, secans D E, in I. Quoniam igitur A H, secat B C, bifariam in H, secabit eadem ipsam D E,

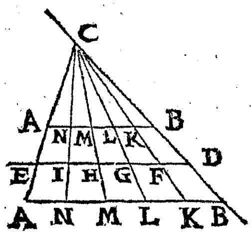
O quoque

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 3. pron.
[d] 1. pron.
[e] 39. primi.
[f] 37. primi.
[g] 1. pron.
[h] 4. pron.
[i] 38. primi.
[k] 4. pron.
[l] 10. primi.

quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. *Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si D I, aequalis est ipsi I E, cum I E, maior sit, quàm* G E, *erit quoque D I, maior, quam* G E, *hoc est, quàm D G, quae ipsi* G E, *aequalis ponitur. Diuiditur ergo B C, bifariam* F. *Quod erat demonstrandum.*

H O C ostenso theoremate, ad diuisionem lineae rectae in quotuis aequales partes iam veniamus.

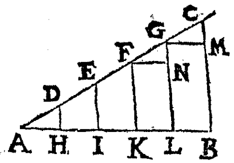
DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes aequales secare.



S I T data recta A B, secanda in quinque partes aequales. Per extremum punctum B, *ducta recta* B C, *vtcunque, & assumpto in* BC, *puncto quocunque* D, *siue infra* B, *siue supra,* [a] *ducatur per* D, *ipsi A B, parallela* D E, *in qua* [b] *abscindantur quinque partes inter se aequales* D F, F G, G H, H I, I E, *hac tamen lege, vt existente puncto* D, *infra* B, *recta* DE, *ex quinque partibus aequalibus composita maior sit, quàm data A B, minor vero, existente puncto* D, *supra* B, *vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per* E, *ducta cum* B D, *concurrere possit in puncto aliquo, vt in C: A quo si per puncta* F, G, H, I, *rectae ducantur, secta erit data recta A* B, *in quinque partes aequales* B K, *KL, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo* C *B L, recta* D G', *ipsi B L, est parallela, vel in triangulo* C D G, *recta B L, ipsi* D G; *sectaque est* D G, *bifariam in* F, *secta quoque erit bifariam B L, in* K, *vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eademque ratione recta* K *M, in L, secta erit bifariam, quemadmodum &* F H, *in* G, *bifariam secta est. Sunt ergo tres partes* B K, *K L, L M, inter se aequales, sicuti tres* D F, F G, G H; *atque ita de caeteris.*

a 31.primi.
b 3.primi.

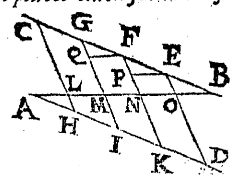
A L I T E R. Ad extremum A, lineae A B, secandae in quinque



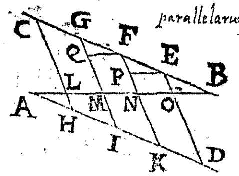
quinque partes aequales, constituatur angulus rectilineus quicunque A, & in recta A C, [a] *abscindantur quinque partes quantaecunque inter se aequales A D,* D E, E F, F G, G C: *ductaque recta* C B, [b] *agantur ei parallelae* G L, F K, E I, D H. *Dico rectam A B, sectam esse in quinque partes aequales.* [c] *Ductis enim per* G, F, *ipsi A B, parallelis* G *M,* F N; [d] *quae inter se etiam parallelae erunt,* [e] *& ipsis* B L, L K, *aequales in parallelogrammis* G B, *F L;* [f] *erunt tam anguli* F G N, G C M, *externus & internus in parallelis* G L, C B, *quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, aequales inter se. Quoniam igitur duo anguli* C, G, *trianguli CGM, duobus angulis* G, F, *trianguli GFN, aequales sunt, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia* C G, G F, *aequalia per constructionem;* [g] *erunt quoque latera* G M, F N, *aequalia: quae cum ostensa sint aequalia rectis* BL, LK, *erunt quoque* B L, L K, *inter se aequales. Eademque ratione ostendemus* K L, K I, *aequales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta A B, in quinque aequales partes diuisa erit. Quod est propositum.*

a 3. primi.
b 31.primi.
c 31.primi.
d 30.primi.
e 34.primi.
f 29.primi.
g 26.primi.

A L I T E R. Ad extrema puncta A, B, lineae A B, in quinque partes aequales diuidendae constituantur duo aequales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque linea BC, *AD,* [h] *quae ob alternos angulos aequales* A, B, *parallelae inter se sunt,* [i] *sumantur quatuor partes inter se omnino aequales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt* B E, E F, F G, G C, A H, H I, I K, K D, *junganturque rectae* CH, G I, FK, E D, [k] *quae inter se erunt parallelae, cum coniungant extrema parallelarum aequalium. Dico rectam* A B, *in quinque partes aequales sectam esse.* [l] *Ductis enim per* E, F, *ipsi* AB, *parallelis* E P, F Q, [m] *quae inter se quoque parallelae erunt,* [n] *& ipsis* NO, MN, *aequales in parallelogrammis* EN, FM: *(Sunt enim & G I, F K, inter se parallelae, cum coniungant extrema*



h 27.primi.
i 3.primi.
k 33.primi.
l 31.primi.
m 30.primi.
n 34.primi.

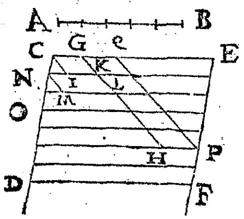


[a] 29. primi. parallelarum æqualium F G, K I,) [a] erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli G F Q, FEP, externus, & internus in parallelis QF, P E, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli F G Q, duobus angulis F, E, trianguli E F P, æquales sunt, vterque vtrique, lateraq; illis adiacentia F G, E F, æqualia, per constructionem, [b] erunt quoque latera F Q, E P, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eademq; ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea; recta A B, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

[b] 26. primi.

[c] 33. primi. PRAXIS hæc breuius ita demonstrabitur. [c] Quoniam rectæ ED, FK, GI, CH, parallelæ sunt, quod coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta B L, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes A L, L M, M N, N O, O B, æquales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus C D, E F, [d] sumantur in vtraq; partes omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis iungantur, [e] quæ parallelæ inter se erũt, cum coniungant extrema parallelarũ æqualium.



[d] 3. primi.

[e] 33. primi.

Si igitur beneficio circini recta A B, in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctum H, ita vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta G H, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data A B, [f] sumantur partes æquales, diuisa quoque erit A B, in quinq; æquales

[f] 3. primi.

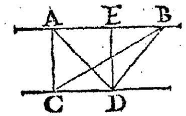
æquales partes. Sectam autem esse G H, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis C I, N M, [a] quæ inter se quoque parallelæ erunt; [b] & ipsis G K, K L, æquales in parallelogrammis G I, KM; [c] erunt tam anguli C N I, N O M, externus & internus in parallelis N K, OL, quàm anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cũ duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli N O M, æquales sint, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia C N, N O, æqualia, ex constructione, [d] erunt quoque latera C I, N M, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis G K, K L, erunt quoque G K, K L, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ G H, ostendentur æquales; ac proinde recta G H, in quinque partes æquales erit diuisa.

[a] 30. primi.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 26. primi.

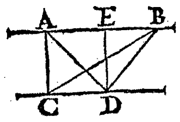
PRAXIS etiam hæc breuius demonstrabitur hoc modo. Sumptis quinque interuallis rectæ E F, ab E, vsque ad P, transferatur recta A B, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ C E, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta P Q, diuisa à parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ P Q, quæ datæ rectæ A B, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, diuisa quoque erit A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.



INTER parallelas AB, CD, & super basin C D, constituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli B C D.



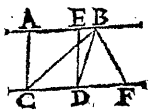
[a] 37.primi.
[b] 34.primi.
[c] 6.pron.

Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo,[a] erũt triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; [b] quòd triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

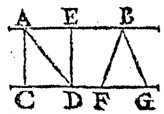
[d] 38.primi.
[e] 41.primi.
[f] 6.pron.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, *producatur ad* F, *vt sit* DF, *æqualis ipsi* CD, *ducaturque recta* FB, *erit triangulum* BCF, *duplum trianguli* BCD, [d] *quòd triangula* BCD, BDF, *æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE,* [e] *duplum eiusdem trianguli BCD.* [f] *Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum* ACDE.



[g] 38.primi.
[h] 34.primi.
[i] 6.pron.
[k] 38.primi.

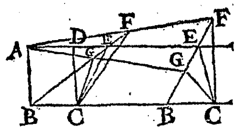
IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, *& triangulo* BFG, *quorum bases* CD, FG, *æquales sunt. Ducta enim diametro* AD, *in parallelogrammo,* [g] *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD;* [h] *quòd diameter* AD, *secet parallelogrammum* ACDE, *bifariam;* [i] *erit quoque idem trianguli* BFG, *duplum. Eadem ratione si basis* FG, *duplicaretur, & recta ad* B, *duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc* [k] *esset duplum etiam trianguli* BFG, *&c.*



CON-

CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



[a] 41.primi.
[b] 6.pron.

SIT parallelogrammum ABCD, *duplum triãguli* EBC, *siue eandem habeant basin, siue æquales. Dico rectam ductam* AE, *parallelam esse rectæ* BC. *Nam alias ducta parallela ex* A, *cadet aut supra* AE, *aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat.* [a] *Nam erit quoque parallelogrammum* ABCD, *trianguli* BFC, *vel* BGC, *duplum.* [b] *Quare triangula* EBC, FBC, *vel triangula* EBC, GBC, *æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.*

[c] 31.primi.

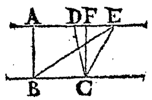
SIT deinde parallelogrammum ABCD, *duplum trianguli* EFG, *in eisdemque parallelis. Dico bases* BC, FG, *esse æquales. Nam si altera, nempe* BC, *sit maior, abscissa æquali* CH, *&* [c] *ducta* HI, *parallela ipsi* AB, *demonstrabimus parallelogramma* ABCD, IHCD, *esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli* EFG; *illud quidem per hypothesin, hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis* FG, *maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi* BC, *æqualis* FH, *ducaturque recta* HE, *erunt triangula* EFH, EFG, *æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimi-*

O 4 dium

dium est parallelogrammi A B C D; Illud quidem per propos.41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.

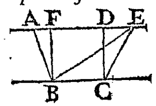
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas A E, B C, sint constituta trapezium A B C D; & triangulum E B C, super basim B C, eandem, quæ sit tamen maior, quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam BC, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, [a] *quæ erit parallela ipsi A B; atque adeo parallelogrammum erit* A B C F, [b] *quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium* A B C D, *cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

[a] 33. primi.
[b] 41. primi.



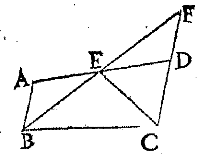
SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis B C, *sit minor, quam reliqua linea parallela* A D, *in trapezio dato. Dico trapezium* A B C D, *maius esse duplo trianguli* E B C. *Cum enim A D, maior sit, quam* B C, *abscindatur* D F, *æqualis ipsi* B C, *& ducatur recta* B F, [c] *quæ erit parallela ipsi* C D; *atq; adeo parallelogrammum erit* B C D F: [d] *quod duplum est trianguli* EBC. *Quare totum trapezium* ABCD, *quod superat parallelogrammum* B C D F, *maius erit duplo eiusdem trianguli* E B C. *quod est propositum.*

[c] 33. primi.
[d] 41. primi.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamẽ vt nũc quidẽ basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRA-

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



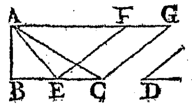
SIT trapezium A B C D, *cuius duo latera opposita* A B, *D C, sint parallela; & super basin* B C, *constituatur triangulum* E B C, *verticem E, habẽs in medio puncto* E, *lateris* A D. *Dico trapezium A B C D, duplum esse trianguli* E B C. *Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe* B E, *donec coeat cum* C D, *protracto in* F. *Et quia parallelæ sunt* A B, C F, [a] *erunt anguli alterni, B A E, F D E, æquales:* [b] *Sunt autem & anguli* A E B, D E F, *æquales, quippe qui ad verticem* E; *& latus* A E, *trianguli* A B E, *lateri D E, trianguli* D E F, *æquale, per hypotesin.* [c] *Igitur & reliqua latera* A B, B E, *reliquis lateribus,* D F, F E, *æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli* A B E, D F E, *æquales: atque idcirco triangula* A B E, D F E, *ex coroll. propos. 26. huius lib. æqualia erũt. Quare addito communi triangulo* C D E, [d] *erunt triangulo* C E F, *æqualia triangula simul* A B E, C D E. [e] *Est autem & triangulum* B C E, *eidem triangulo* C E F, *æquale, quòd bases* B E, E F, *ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, duceretur parallela ipsi* B F. [f] *Igitur triangulum* C B E, *æquale erit triangulis* A B E; C D E; *& propterea* C B E, *triangulum dimidium erit trapezij* A B C D, *quod est propositum.*

[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 2. pron.
[e] 38. primi.
[f] 1. pron.

PROBL. 11. PROPOS. 42. 42.

DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DATVM



DATVM triangulum sit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur cõstruere parallelogrammũ æquale triãgulo ABC, habens angulum æqualem angulo D, Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifa-
[a] 10.primi. [b] 23.primi. riam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Du-
[c] 31.primi. catur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim re-
[d] 41.primi. cta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplũ est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eius-
[e] 38.primi. dem trianguli A E C, [e] quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt parallelogrammum C E F G, & triangu-
[f] 6.pron. lum A B C, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

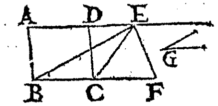
PRAXIS huius problematis facillima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datũ parallelogrãmum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, seceto; recta BE, rectã AD, productã in E: Extendatur quoque BC, ad F, sitque CF, æqualis rectæ BC, & iũgatur EF. Dico triangulum BEF, habens

habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta CE, [a] erit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli BCE: Item triangulũ BEF, eiusdem trianguli BCE, duplum; [b] quòd æqualia sint triangula EBC, ECF. Quare [c] æqualia inter se erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF. Quod est propositum.



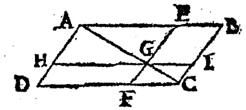
[a] 41.primi. [b] 38.primi. [c] 6.pron.

PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43. 43.

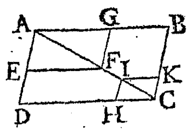
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrãmo ABCD, sint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim [d] triangu- [d] 34.primi
la A B C, C D A, æqualia sint; Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, [e] remanebunt [e] 3.pron.
trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & [f] 34.primi.
triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F- [g] 3.pron.
G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

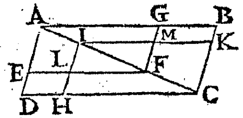


SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam



etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniungantur in puncto G, *sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo* A B C D, *circa diametrum* A C, *consistant parallelogramma A E F G*, C H I K. *Dico complementa* D E F I H, *B K I F G, esse æqualia.* [a] 34.primi, *Cum enim*[a] *triangula* A B C, *C D A, æqualia inter se sint; Item triangula* A E F, C H I, *æqualia triangulis* A G F, [b] 3.pron. C K I; [b] *erunt reliqua complementa* D E F I H, B K I F G, *æqualia. Quod est propositum.*

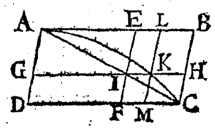


SECENT se iam mutuo parallelogramma A E F G, C H I K, *circa diametrum consistentia, ita vt communem partem habeant I L F M. Dico adhuc complementa* D E L H, *BGMK, esse æqualia.* [c] 32.primi. *Cum enim* [c] *æqualia sint triangula* A B C, C D A; *Item triangula* A F G, *A F E*; [d] 3.pron. [d] *erunt reliqua quadrilatera B C F G*, D C F E, *æqualia:* [e] 34.primi. *Sunt* [e] *autem rursus æqualia triangula I F M, I F L. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris,* [f] 2.pron. [f] *erunt figuræ B C I M G*, D C I L E, *æquales. Cum igitur &* [g] 34.primi. [g] *æqualia sint triangula* C I K, *C I H*; [h] 3.pron. [h] *erunt reliqua complementa B G M K*, D E L H, *etiam æqualia. Quod est propositum.*

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis E F, G H, *quæ sint parallelæ rectis B C*, C D, *seque secent in I, diuisum sit parallelogrammum* A B C D, *in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo*

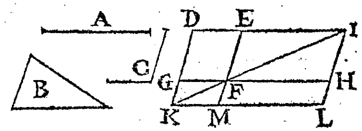


sa duo B E I H, D F I G, *sint æqualia. Dico reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim nõ transit, secet diameter C K A, rectam G H, in K, si fieri potest, & per K,* [a] 31.primi. [a] *ducatur L M, parallela ipsi B C.* [b] 43.primi. [b] *Erunt igitur complementa B H K L, D G K M, æqualia:* [c] 9.pron. *Est* [c] *autem D G K M, maius quam* D G I F. *Quare & maius erit B H K L, quam D G I F. Cum ergo* D G I F, *æquale ponatur ipsi* B E I H; [d] 1.pron. [d] *erit etiam* BHKL, *maius quam* BEIH, *pars quàm totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*

THEOR. 12. PROPOS. 44. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habẽs æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [e] 42.primi. [e] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque *G F* ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, & per



H, [f] 31.primi. [f] ducatur H I, parallela ipsi *F* E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; & [g] 31.primi. [g] per K, ducatur K L, parallela ipsi *G* H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum

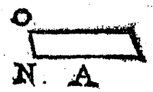
L M-

L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, [a] cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, [b] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

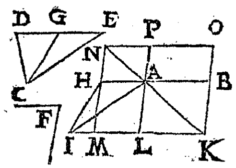
[a] 15. primi.
[b] 43. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triangulo CDE, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaq; recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, vbi parallelogrammum construendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq; A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [c] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, sursum verò, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æquali ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales; [a] erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Post hæc, [b] ducta per I, ipsi H B, parallela I K, [c] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, secetq; A L, rectam I K, in L. [d] Ducta quoque per H, ipsi A L, parallela H M, secante I K, in M; [e] erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Est autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quod æqualia ostensa sint triangula E G C, D G C. Igitur cum æqualia sint demonstrata triangula A H I, E G C, [f] erunt æqualia parallelogrammum A H M L, & triangulum C D E. Iam vero, sumpta recta L K, datæ rectæ A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq;, donec cum M H, producta coëat in N, & per N, agatur ipsi H B, parallela N O, donec in O, coëat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur vsque ad P, in recta N O. Dico parallelogrammum A B O P, esse id, quod quæritur. Est enim constitutum super datam rectam A B, habetq; angulum B A P, dato angulo F, æqualem, [g] cum æqualis sit angulo H A L, qui angulo F, factus est æqualis. Denique æquale est dato triangulo C D E, [h] cum æquale sit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, ostensum fuit æquale.



[c] 23. primi.

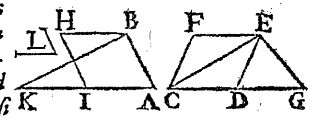
[a] 4. primi.
[b] 31. primi.
[c] 23. primi.
[d] 31. primi.
[e] 41. primi.
[f] 7. pron.
[g] 15. primi.
[h] 43. primi.

PRAXIS vero huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Hæ enim propter demonstrationem tantum ductæ sunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B; datum parallelogrãmum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis sit ipsi C D, & iungatur G E, recta: Eritq; triangulum C E G, parallelo-



a 44. primi. *rallelogrammo C D E F, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. a Fiat iam super data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc est, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt sit I K, æqualis ipsi A I, iungaturq; recta B K. Dico triangulum A B K, constitutum super datam rectam A B, habensq; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo C D E F. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo A B H I, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo C D E, F constat propositum.*

PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt; difficilisq; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, super data recta A B, in dato angulo A, construatur.

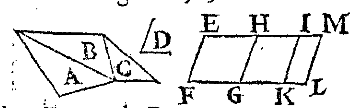
O.

THEOR. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat, tamē quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vnà cū data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineū in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, b equale parallelogrammū constituatur E F G H, super rectā E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam G H, paralle-

b 44. primi.



parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, a inter se sunt æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. a 1. pron. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, b qui duobus rectis æquiualent, c æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. d Quare F G, G K, vnam rectam lineam efficient. b 29. primi. c 2. pron. d 14. primi. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sunt, (e cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) e 34. primi. f & duo anguli H I K, I H G, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint parallelæ; g Itemque E F, I K, quod vtraque parallela sit rectæ H G; f 29. primi. g 30. primi. Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

SCHOLIVM.

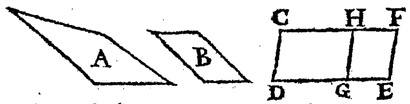
PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B, resol-

resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, IK, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum EFLM, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



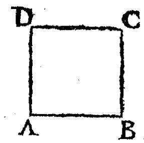
SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet
a45.primi. *rectilineum B. a Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D, parallelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo E F H G; superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod est propositum.*

45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

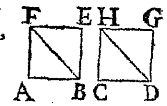
SIT data recta A B, super quam oporteat quadra-
b11.primi. tum describere. Ex A, & B, b educantur A D, B C, perpendiculares ad AB, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim

anguli A, & B, sint recti, a erũt A D, B C, paralle læ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur b & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, c æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat. a28.primi. b33.primi. c34.primi.

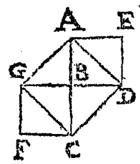


EX PROCLO.

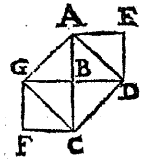
LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.



SINT primum rectæ A B, CD, æquales. Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera BA, AF, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ A F, C H, æquales sint rectis A B, C D: Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti. d Igitur triangula BAF, D C H, æqualia erunt. Quæ e cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum. d4.primi. e34.primi.



SINT deinde quadrata ABDE, BCFG, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, BC, in directum constituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti, f erunt & rectæ G B, B D, in directum constitutæ. Ducantur diametri AD, CG, iunganturque rectæ AG, CD. Quoniam f14.primi.



niam igitur quadrata ABDE, BCFG, *æqualia sunt, erunt & triangula* ABD, BCG, *eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo* BCD, *fiet totũ triangulum* ACD, *toti triangulo* GDC, *æquale. Quare triangula* ACD, GDC, *cum eandẽ habeant basin* CD, *ad easdemq́; sint partes,* [a] *in eisdẽ sunt parallelis: ideoque parallelæ sunt* AG, CD. *Et quoniã, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli* DAC, GCA, *alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem,* [b] *& parallelæ sunt* AD, CG. *Igitur parallelogrammũ est* ADCG; *ac propterea* [c] *rectæ* AD, CG, *æquales. Quoniam ergo in triangulis* ABD, BCG, *latera* AD, CG, *æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostensum fuit;* [d] *erunt reliqua latera æqualia, nempe* AB, *ipsi* BC, *&c. Quod est propositum.*

[a] 39. primi.
[b] 27. primi.
[c] 34. primi.
[d] 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoq́; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

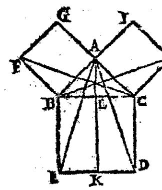
PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, *in altero extremorum, vt in* A, *erigatur perpendicularis* AD, *ipsi datæ rectæ* AB, *æqualis, & ex* B, *&* D, *ad interuallum eiusdem* AB, *duo arcus describantur sese in* C, *intersecantes, iunganturque rectæ* BC, DC, *constructũ erit quadratũ. Nã* ABCD, *cũ ex cõstructione sit figura æqualia laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initiũ scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo* A, *recto,* [e] *erunt &* B, D, *recti, necnon* [f] *& oppositus angulus* C, *&c.*

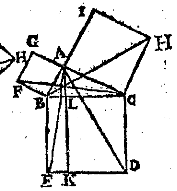
[e] 29. primi.
[f] 34. primi.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

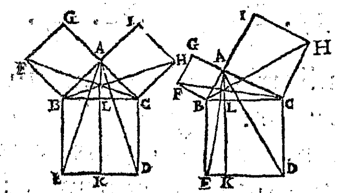
IN rectangulis triangulis, quadratũ, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.





IN triãgulo ABC, angulus BAC, sit rectus, [a] describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erũt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti; si addatur communis angulus ABC, [d] fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 14. primi.
[d] 2. pron.
[e] 4. primi.
[f] 41. primi.



ABE, quòd ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare [a] æqualia erunt quadratũ A B F G, & parallelogrãmum B E K L. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. [b] Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum A C H I, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale eſt duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonſtrandum erat.

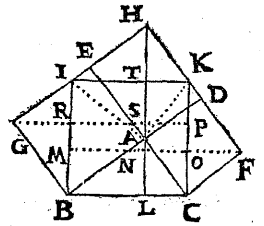
[a] 6. pron.
[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manẽtibus iiſdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eũ ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius ſit, & quanto hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

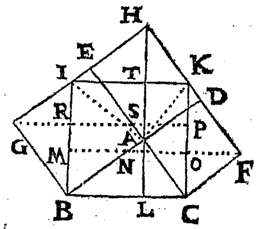
QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum eſt, vtilitatesq; habet inſignes, operæ pretiũ iudicaui tentare, nũ illud

illud alijs vijs demonſtrari poſſit, variata aliquantulũ constructione; quod Peletarius ſine proportionibus fieri poſſe negauit.



Sit ergo rurſus triãgulũ ABC, cuius angulus BAC, rectus ſit, productisq; lateribus B A, C A, ad partes anguli recti, fiãt AD, AE, ipſis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipſis A B, A C, parallelæ agãtur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, [a] tam latera DF, FC, oppoſitis lateribus A C, A D, quàm latera EG, GB, lateribus oppoſitis AB, AE, æqualia ſunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti ſunt. [b] Nam F, G, oppoſitis rectis D A C, EAB, æquales ſunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti ſunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB, [c] æqualis ſit duobus rectis. Quadrata ergo ſunt CD, BE, laterum A C, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, ſecantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, ſi à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales ſunt; ſunt aũt & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum B E. [d] Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Nõ aliter in triãgulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales ſunt, (cum A, F, recti ſint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorũ, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum C D. Quare rectæ BI, CK, [e] inter ſe etiã æquales erũt. [f] Cum ergo ſint quoq; parallelæ, [g] erũt etiam BC, IK, æquales & parallelæ. Quadratum igitur eſt BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti, [h] quòd anguli I, K, oppoſitis rectis C, B, æquales ſint. Dico

[a] 34. primi.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 26. primi.
[e] 1. pron.
[f] 28. primi.
[g] 33. primi.



ergo, quadratum C I, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia [a] GE, ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quæ ipsi AC, siue AD, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, æqualis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelæ, [b] erunt quoque BI, AH, parallelæ & æquales. Eodemq; modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [c] tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, æquale est [d] erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiam quia tam [e] quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, æquale est, [f] erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 35. primi.
[d] 1. pron.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

ALITER. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo [g] tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quàm parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est. [h] erit quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia [i] tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, [k] erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat ostendendum.

[g] 41. primi.
[h] 6. pron.
[i] 41. primi.
[k] 6. pron.

ALI-

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelæ FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, æqualis. Quoniam enim [a] anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, æquales, quòd vterque angulo ABC, supra ostensus sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quòd vtrumque supra sit ostensum ipsi BC, æquale. [b] Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam [c] tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, æqualia sunt, estque parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, composito æqualia. [d] Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat.

[a] 29. primi.
[b] 26. primi.
[c] 35. primi.
[d] 35. primi.

ATQVE in hunc modum aliæ demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, varijs demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porrò admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetq; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales,

les, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idq; in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebāt vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, vt ibidem ostendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorū, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicūque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum,

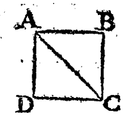
vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24 & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

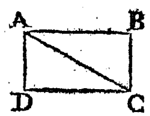
IN quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum AC, duplum esse quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, a erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quòd lineæ AB, BC, sint æquales; erit quadratum lineæ AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum. a 47. primi.



II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC; & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, b erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC. Quod est propositum. b 47. primi.



SI

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

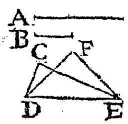
TRIANGVLORVM ABC, DEF, *anguli* A, *&* D, *sint recti, lateraq; opposita* BC, EF, *æqualia. Dico duo quadrata laterum* AB, AC, *simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum* DE, DF, *simul sumptis.* Nam *quadrata linearum* BC, EF, *æqualia inter se sunt, cum & ipsæ inter se ponantur æquales: Quadrato autem lineæ* BC, [a] *æqualia sunt quadrata linearum* AB, AC; E*t quadrato lineæ* EF, *æqualia sunt quadrata linearum* DE, DF. [b] *Quadrata ergo rectarum* AB, AC, *quadratis rectarum* DE, DF, *æqualia sunt. Quod est propositum.*

[a] 47. primi.
[b] 1. pron.

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, *&* B, *latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus* DCE, *sitq;* DC, *recta æqualis rectæ* B, *& recta* CE, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* DE, *coniungente duo puncta* D, E, *constituantur super ipsam duo anguli semirecti* DEF, EDF, [c] *coeantq; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniam igitur in triangulo* FDE, *anguli* FDE, FED, *æquales sunt;* [d] *erunt & latera* DF, EF, *æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum*



[c] 13. pron.
[d] 6. primi.

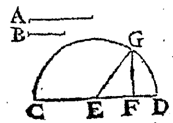
nearum DF, EF, *æqualia esse quadratis linearum* A, *&* B, *hoc est, quadratis linearum* CE, *&* CD. *Nam cum in triangulo* DEF, *anguli* FDE, FED, *faciant vnũ rectũ;* [a] *erit reliquus angulus* F, *rectus.* [b] *Quamobrẽ erunt quadrata linearũ* DF, EF, *æqualia quadrato lineæ* DE: [c] Sed *eidem quadrato lineæ* DE, *æqualia sunt quoque quadrata* CD, CE. *Igitur quadrata linearum* DF, EF, [d] *æqualia sunt quadratis linearum* DC, EC. *Quod est propositum.*

[a] 32. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 1. pron.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quàm minor.

POTENTIA lineæ rectę dicitur eius quadratum. T*antum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duę lineę inæquales* A, *&* B, *oporteatq; cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ* A, *quam minoris* B. *Ex quauis linea recta* CD, *sumatur* CE, *æqualis rectæ A, &* EF, *æqualis rectæ* B. *Deinde centro* E, *& interuallo* EC, *semicirculus describatur* CGD; *& ex* F, *ducatur* FG, *perpendicularis ad* CD. *Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ* CE, *sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ* B, *hoc est, rectæ* EF, *sibi æqualis, quadrato rectæ* FG. *Ducta enim recta* EG, [e] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum* EF, FG, *hoc est, quadratum rectæ* EC, *illi æquale, superabit quadratum rectae* EF, *quadrato rectae* FG. *Quod est propositum.*



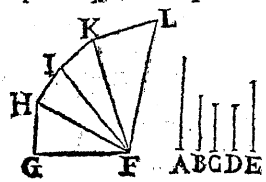
[e] 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire quadratū æquale omnibus illis quinque.



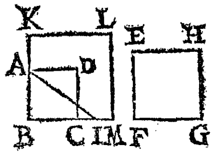
Fiat angulus rectus FGH, sitq; recta FG, aequalis rectæ A, & recta GH, rectae B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq; HI, aequalis rectae C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, aequalis rectae D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitque KL, æqualis rectae E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, aequale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectae FH,[a] aequale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectae FI,[b] aequale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectae FK,[c] aequale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectae FL,[d] aequale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.

[a] 47. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 47. primi.

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumq; sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c.



Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctum, æqualem esse quadrato

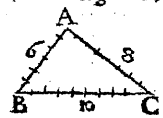
quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc est, quadratum BKLM,[a] æquale est quadratis rectarum AB, BI, hoc est, quadratis ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD,[b] remanebit figura ADCMLK, æqualis quadrato EFGH. Quod est propositum.

[a] 47. primi.
[b] 3. pron.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo ABC, sintq; primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64.[c] æqualia sunt quadrato rectæ BC; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorū palmorū 100. Latus ergo BC, cōtinebit 10. palmos. Tātū enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos.



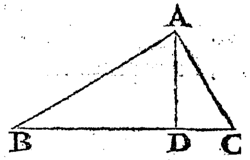
Sint deinde cognita latera AB, BC, sitque AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC,[d] æqualia sunt quadrato rectæ BC; si quadratum rectæ AB, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ BC, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ AC, 64. palmorum. Latus ergo AC, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod est propositum. Cæterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam uocant: Sed de his alias.

[c] 47. primi.
[d] 47. primi.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur

bitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusq; illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.



CADAT primum in triãgulo A B C, cuius latus A B, maius sit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demissa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterq; angulus B, C, acutus est, vt ex coroll. 2. propos. 17. constat. Dico segmentum B D, esse maius segmento C D. Quoniam enim [a] *tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale est: Est autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quod latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quam recta C D. quod est primum.*

[a] 47. primi.

FACIAT deinde perpendicularis A D, segmentum B D, maius segmento C D. Dico latus A B, maius esse latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius: Additoq; quadrato communi ex A D; duo quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erũt. Cum ergo [b] *tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale sit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius; proptereaq; & latus A B, latere A C, maius erit. Quod est propositum.*

[b] 47. primi.

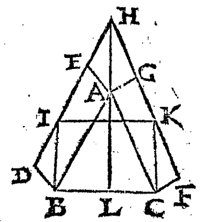
ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni trian-

gulo

gulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quęcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.



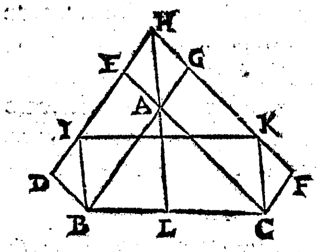
SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera A B, A C, parallelogramma quæcunque ABDE, A C F G, quorum latera DE, F G, quæ lateribus A B, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturque recta A H. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus B C, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ A H. Producta enim H A, secet B C, in L, & per B, C, agantur B I, C K, parallelæ ipsi A H, iungaturque recta I K. Quoniam igitur parallelogramma sunt B I H A, C K H A; [a] *erit vtraque B I, C K, ipsi A H, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt B I, C K;* [b] *quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem A H, parallelæ sint;* [c] *erunt quoque B C, I K, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus B I, rectæ A H, æquale, & parallelũ:*

[a] 34. primi.
[b] 30. primi.
[c] 33. primi.

Q Cui

Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma A D, A F. [a] *Quia ergo æqualia sunt parallelogramma A D, A B I H, quòd eandem habeant basin A B, in eisdemque sint parallelis AB, HD;* [b] *Est autem A B I H, parallelogrammo I L, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin B I, in eisdemq; sit parallelis B I, L H: Erit quoque A D, eidem I L, æquale. Non aliter ostendemus, A F, ipsi K L, esse æquale. Quare parallelogramma A D, A F, parallelogrammo B K, æqualia sunt. Quod est propositum.*

[a] 35. primi. [b] 35. primi.



P A P P V S construit figuram aliter. Nam sumit rectas A C, A E; & A B, A G, in directum positas, ita vt parallelogrāma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF, angulo B A C, [c] *internos externo æquales, ceu hęc eius figura in dicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.*

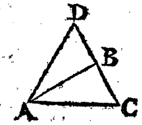
[c] 29. primi.

47.

THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quę a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitque quadratum lateris A C, æquale quadratis reliquorum laterum B A, B C. Dico angulum A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturque recta A D. Quoniam igitur in triangulo A B D, angulus ABD, rectus est; [a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, BD; Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; [b] erunt quadrata rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A BC; & basis AD, ostensa est æqualis basi A C; [c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 47. primi. [b] 1. pron. [c] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo ęqualem, [d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi æqualis, [e] intulit æqualitatem angulorum

[d] 4. primi. [e] 8. primi.

lorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos conclusimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, [a] ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem base minori angulo opposita.

[a] 24. primi.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtriq; , at bases inæquales, [b] demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito.

[b] 25. primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [c] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia.

[c] 26. primi.

SEXTO [d] demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia.

[d] 37. primi.

SEPTIMO [e] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse.

[e] 38. primi.

OCTAVO [f] docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas.

[f] 39. primi.

NONO

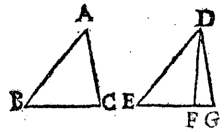
NONO denique [a] probauit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemq; partem constituta, esse inter easdem parallelas.

[a] 40. primi.

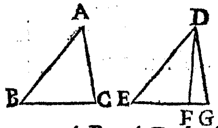
ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. exclusimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; sed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes exclusimus, quòd ex ijs non sequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in scholio propos. 31. demonstrauimus: Ita quoque à propos. 4. excludendæ sunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri potest basium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, bases æquales esse nequeunt; nisi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppositus, vel est minor recto, vel non minor recto.

SIT enim Isosceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta base GF, vsque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG,



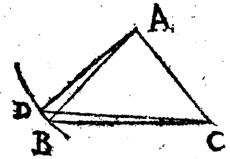
 æquale



æquale triangulum construatur ABC, cuius latera AB,
AC, lateribus DE, DG,
æqualia sint, & basis BC,
basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, E, æqualibus
lateribus AC, DF, oppositi æquales: & tamen
basis BC, maior est base EF; quòd BC, ipsi EG,
æqualis sit. Ratio est, quòd angulus C, acutus est,
a 5. primi. at DFE, obtusus. Nam cum a anguli DFG, &
b 17. primi. G, æquales sint; b & simul sumpti minores duobus
rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE,
c 13. primi. recto maior: quandoquidem c duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB,
AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G,
vel minor recto, vel non minor; tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si
basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi
DE, superponeretur, congrueret quidem BG, ipsi
EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed
punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur
latera DF, DG, æqualia sunt, quòd DF, idem
d 5. primi. sit, quod AC, ipsi DG, æquale; d erunt anguli
DFG, & G, æquales, ac propterea vterque mi-
e 17. primi. nor recto; e quòd ambo minores sint duobus rectis.
f 13. primi. Cum igitur, f duo anguli ad F, sint duobus rectis
æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non
differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C,
& G, minor est, aut maior recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior base
EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis
DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque
angulo

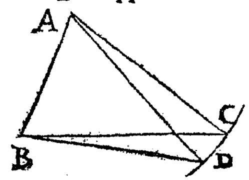
angulo C, & F, vel minore recto, vel maiore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus. quod est contra hypothesin.

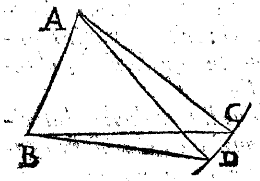
DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum,
& alter alteri opponatur, nihil etiam colligi potest.
Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius
sit latere AC. Erit a ergo a 18. primi.
angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus
ACD, angulo ABC, æqualis; cadetque CD, supra
CB. Describatur quoque
ex A, per B, arcus circuli



secans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD,
AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC,
lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri
AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, æquales
non sunt. Si enim æquales essent, essent tam duæ rectæ AB, AD, quàm duæ CB, CD, æquales,
b quod est absurdum. b 7. primi.

POSTREMO, quando duo latera duobus
lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus,
æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni
illorum laterũ, nihil etiam
potest inferri. Sit namque
triangulum ABC, cuius
vtrumque latus AC, CB,
maius sit latere AB; &
BC, maius, quàm AC.
Erit c ergo angulus BAC, c 18. primi.





maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC, æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD; erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia, vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias tam rectæ AC, AD, quàm BC, BD, æquales essent. a quod est absurdum.

a 7. primi.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM SECVNDVM

DEFINITIONES.

I.

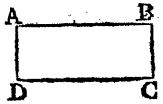
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est,

Paralle-

Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnius angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint



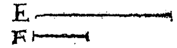
a 29. primi. *A D, B C,*[a] *erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus*

b 34. primi. *erit. Quoniam vero*[b] *quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

DICIT *itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, D C; vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera vero, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quòd ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.*

ITAQVE *parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis*

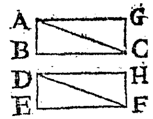
lis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentũ,



erit idẽ, quod parallelogrãmũ ABCD: quoniã latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

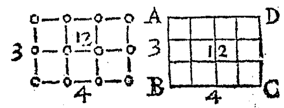
PERSPICVVM *autẽ est ex dictis, parallelogrammũ rectangulum contentũ sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarũ linearum æqualium æqualis sit lineæ opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectãguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.*

ITEM *manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum sub A B, B C, æquale esse parallelogrammo rectangulo D E F H, contento sub D E, E F. Ductis etenim diametris A C, D F, cum latera A B, B C, trianguli A B C,*



æqualia sint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli a 4. primi.
B, & E, æquales, nempe recti;[a] *erunt triangula A B C, D E F, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula A G C, D H F. Quare tota parallelogramma A B C G, D E F H, æqualia erunt.*

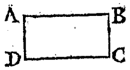
HABET *autem comprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammũ A B C D,*



comprehensum sub duabus rectis A B, B C, quarum illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem

quidem ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineam B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq; a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem est) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur; vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

OBITER quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum.



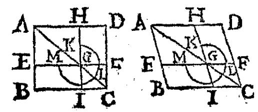
Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrãmum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammũ appellant A C, vel B D.

II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi,

grammi,



grãmi, ita vt parallelogrãmum diuisum sit in quatuor parallelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur esse circa diametrum; alia vero duo BG, GD, cõplemẽta, vt manifestũ est ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.

SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex alijs deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neque per Diuinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, &

quantitas

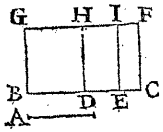
quantitas cuiusuis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò vltima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates vero contineat propè infinitas.

I.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento cóprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duę perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur [c] erunt quoq; GF, BC, parallelæ & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contentum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F.

[a] 28. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.

C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, [a] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eędem, cum ex cóstructione parallelogramma sint *B* H, B I, [b] æquales erũt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B *D*. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E. Item rectangulum E F, sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, *D* I, *E* F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. primi.
[b] 34. primi.

SCHOLIVM.

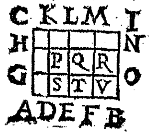
QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq; vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duę rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius contimentur rectangulis.

SINT

SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur.

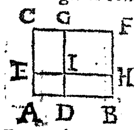


Compleatur rectangulum A I, ducanturq́ D K, E L, F M, parallelæ ipsi A C, vel B I: Item H N, G O, parallelæ ipsi A B, vel C I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H;
a 34. primi. *& H K, sub A D, H C; (a quòd rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub*
b 34. primi. *D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quòd D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H; F B, H C; perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.*

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C; vna cum rectangulo comprehenso

prehenso sub partibus A D, E C, æquale esse rectangulis contentis sub A B, E C; A C, A D; vna cum rectangulo sub D B, A E, comprehenso. Compleatur. n. rectangulũ A F, agaturq; per D, recta D G, ipsi A C, vel B F, parallela; nec non per E, recta E H, secans D G, in I,



parallela ipsi A B, vel C F. Quoniam igitur rectangulum A F, æquale est rectangulis E F, D H, A I; si addatur commune E G, erunt rectangula A F, E G, nempe sub totis A B, A C, & partibus A D, E C, comprehensa, æqualia rectangulis E F, A G, D H, sub A B, E C; A C, A D; D B, A E, comprehensis æqualia. Quod est propositum.

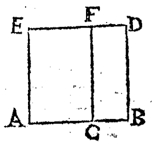
IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq́ simul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, si ijdem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

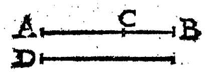
RECTA linea A B, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B, simul sumpta, æqualia esse quadrato



quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ A E, vel B D, quæ [a] æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B, cui æqualis est recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Similiter erit rectangulũ CD, cõprehẽsum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 34. primi.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB.

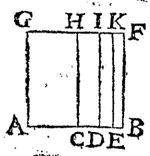


Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est, quadratum rectæ AB, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehẽduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.

[b] 1. secũdi.

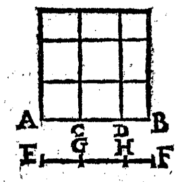
SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunq; segmenta: Quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

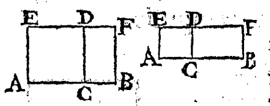


SIT recta AB, diuisa in partes quotcunq; AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD, CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, cõprehensis. Supra enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2, 3, 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

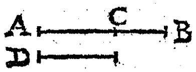
THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI recta linea secta sit vtcunq;: Rectangulum sub tota, & vno segmentorũ comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.



LINEA recta AB, diuisa sit vtcunq; in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehēso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, cōprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus; quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Qm̄ igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, [a] æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.



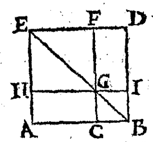
[a] 1. secūdi.

SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

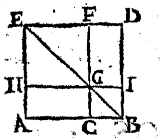
THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea secta sit vtcunq;: Quadratum, quod a tota describitur, æquale est & illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuisa sit vtcūq; in C. Dico quadratū totius rectę AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur .n. super AB, quadratū AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G. puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB; Eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; [a] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui [b] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales; & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nā, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [c] æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, [d] cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 32. primi.
[d] 29. primi.

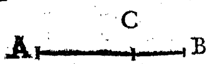


[a] 6. primi. [b] 34. primi.

Quare [a] æqualia erunt latera E F, F G: quæ cum sint [b] æqualia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammum F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existente vno angulo recto, nempe F E H, vel F, in parallelogrammo F H, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quòd latus H G, [c] æquale sit rectæ A C. Rectangula quoque A G, D G, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quòd CG, GI, ęquales sunt rectę CB, ob quadratum C I; & F G, æqualis rectæ G H, ob quadratum F H, hoc est, [d] rectæ AC. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratum A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

[c] 34. primi. [d] 34. primi.

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, [e] erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub A B, A C, comprehensum, [f] æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti C B. Igitur quadratum rectę AB, ęquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.



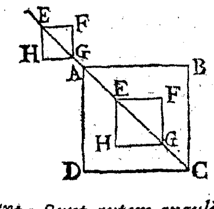
[e] 2. secūdi. [f] 3. secūdi.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CON-

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrum B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilominus verū est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, cōsistat parallelogrāmum FH, siue intra quadratum, siue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico FH, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint AB, EF, [a] erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt: [b] proptereaque latera E F, F G, illis opposita, æqualia; [c] & angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera [d] æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum est, ex ijs, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus; propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.



[a] 29. primi.

[b] 6. primi. [c] 32. primi. [d] 34. primi.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.

SCHOLIVM.

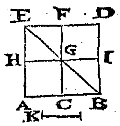
IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit

R 4 numerus

numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partiũ 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectę, quadratum ex illa descriptũ, quadruplũ est quadrati ex hac descripti. Et si quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.



SIT enim primũ linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariã in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare cũ quadratũ AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratũ lineæ AB, quadruplũ quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi AC. Est. n. vtraq; dimidiũ lineæ AB.

a 4. secũdi. BREVIVS. a Quadratũ rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, CB, & rect angulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Constat quadratũ rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, æquale est.

SIT deinde quadratũ rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplũ esse lateris K. Nam diuisa recta AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC; erit, vt iam demonstratũ est, quadratũ rectæ AB, quadruplũ quadrati rectæ AC: Ponitur autem & quadruplũ quadrati rectę K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & AC, & ipsæ propterea rectæ K, & AC, æquales: Est aũt AB, ex cõstructione, ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiã erit ipsius K. Hæc tamen

tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

CÆTERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quæritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc est. Quoniam quadratum AD, rectæ AB, a æquale est duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub AC, CB; si gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, constituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem CI, statuamus 1. atque adeo latus quoque eius CB, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde segmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, quæ est 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hæc ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidiũ statuamus latus quadrati FH, quæsiti. a 4. secũdi.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.

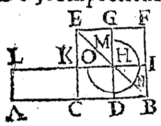
VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidiũ 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuo est vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius

huius regulæ facilis est ex eadem figura huius propos 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus: Quadratum vero C I, statuamus 1. atque adeo & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A C, 7. vt supra dictum est, & tota linea A B, 8. &c.

5.
THEOR. 5 PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato



[a] 34. primi.

drato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo [a] complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: [b] Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 43. primi.
[b] 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11. exclusiuè faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, [c] æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub D B, C D; *Rectangulo autem sub D B, C D, vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, [d] æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, [e] æquale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D; vna cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.*

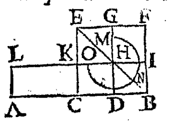
[c] 4. secundi.
[d] 3. secundi.
[e] 1. secundi.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato in-

termedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à reliqui numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H,

[a] 5. secūdi. *cum quadrato K G, [a] æquale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt nimirum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea AB. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati KG.*



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

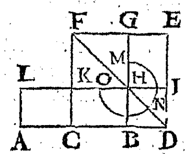
E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerū 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7 perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadē figura huius propos 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatum relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeo & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. &c.

THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quę ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela A L, secans IK, productam in L.

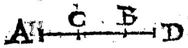


Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoque recta D I, rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. *[a] 34. primi.* Quare rectangulum A I, comprehēdetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammū A K, [b] æquale est parallelogrammo C H, quod bases *[b] 36. primi.* A C, C B, æquales sint: [c] Est autem & parallelogrammum *[c] 43. primi.* H E, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale.

Quocir-

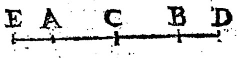
Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G,
quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna
cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æqua-
le. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quę
dam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demon-
strandum.

SCHOLIVM.



ALITER. Quia quadra-
tum ex C D; [a] æquale est quadra-
[a] 4. secũdi. *tis ex C B, B D, vna cum rectan-*
gulo bis sub D B, C B: hoc est, quadratis ex C B, B D, vna
cum rectangulis sub B D, C B, & sub D B, A C: (sumpta
A C, semel pro C B, quæ illi æqualis ponitur.) Est autem re-
ctangulis sub D B, A C; D B, C B; & sub D B, D B, (quod
[b] 1. secũdi. *est quadratum ex D B,) [b] æquale rectangulum sub D B, &*
tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo qua-
drato ex C B, vna cum rectangulo sub D B, A D. Hoc est, re-
ctangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æqua-
le est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus,
comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentẽ 5. facilli-
mè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni
doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius
Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum discipli-
narum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit
enim recta A B, secta in C, bifariam, & ei addita recta quã-
tacunque B D. Dico rectangu-



lum cõprehensum sub tota A D,
composita, & adiecta B D, vna
cũ quadrato dimidiæ C B, æqua-
le esse quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta composi-
tæ. Addita namque rectæ A D, ex altera parte recta A E,
quæ adiectæ B D, æqualis sit, erit tota E D, secta in C, æqua-
liter, & in B, inæqualiter, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æqua-
les sint. Recta quoq; E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A,
[c] 5. secũdi. *ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. [c] Rectangu-*
lum igitur sub partibus inæqualibus E B, B D, vnà cum
quadrato

quadrato intermediæ sectionis C B, hoc est, rectangulum sub
A D, B D, vnà cum quadrato dimidiæ C B, æquale erit qua-
drato dimidiæ C D, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia C B,
datæ rectæ A B, & ex adiecta B D, compositæ. Quod est pro-
positum.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc
theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei
numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto
numero cõposito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato di-
midij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7.
qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis
Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper
excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, supe-
ret C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet
B D, eadẽ magnitudine C B: habebunt tres lineæ A D, C D,
B D, proportionalitatẽ Arithmeticam; quandoquidẽ prima
A D, superat secundam C D, eodem excessu A C, siue C B,
quo secunda C D, tertiam B D, superat. Quare cum ostensum
sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadra-
to excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; per-
spicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium
linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum
quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper
enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniũ-
gi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quę
nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam) cui ter-
tia, siue minor addita sit in rectum, mediaque composita sit ex
dimidio excessu inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt
patet, si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namque ex pri-
ma A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac
D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam
et tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cum
enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D,
qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam,
ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D;
erit necessariò A B, secta in C, bifariam. Eademq; ratio est
in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent
excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. ha-
bentibus,

bentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam ſi ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariã ſecetur, erit quadratus huius dimidij is, qui quæritur. Vt ſi datus numerus ſit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæſitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerũ 64. cuius latus 8. vna vnitate maius eſt latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifeſta eſt ex hac 6. propos.
[a]6. ſecũdi. *Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K, [a] æquale ſit quadrato C E; ſi rectangulum A I, ſtatuatur 15. at quadratũ B I, 1. ideoq; & latus B D. 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D. 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæſiti.*

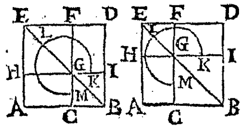
NECESSE autem etiam hic eſt, datum numerum eſſe imparẽ, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam poſſit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur rurſus 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus ſit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Nam ſi ex eius quadrato 64. ſubducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper vna vnitate minus eſt latere inuento 8. Ratio eſt, quia ſi rectangulum A I, quod ex quadrato C E, ſubtractum relinquit quadratum K G, ſtatuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod eſt 7. ſi rurſus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.

THEOR

THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

SI recta linea ſecetur vtcũque; Quod a tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento compreheditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum ſegmẽti ſiue maioris, ſiue minoris AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, vna cum quadrato reliqui ſegmenti C B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum A D; & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectę AB. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. C I, H F, quadrata: & quia recta G H, [a] æqualis eſt rectæ A C, erit H F, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia A E, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento A C. Eadem ratione rectangulum HD, cõprehenſum erit ſub eiſdem rectis A B, A C, quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata A D, FH. Quoniam igitur rectangulis A F, FI, vna cum quadrato C I, hoc eſt, gnomoni K L M, vna cum quadrato CI, æquale eſt quadratum A D; ſi apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui ſegmenti CB. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a]34. primi.

S SCHO-

SCHOLIVM.

[a] 4. secũdi.

ALITER. Quia quadratum ex AB, [a] æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur cõmune quadratũ ex AC, erũt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cũ rectãgulo bis sub AC, CB. Sed rectãgulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, [b] æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.

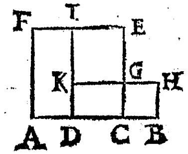
[b] 3. secũdi.

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur. n. quadrata AE, CH, & agatur DI,



DI, ipsi CE, parallela, producaturque HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE, toti DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quòd quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, [a] cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoq; IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.

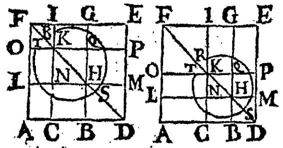
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea secetur vtcunq;: Rectãgulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmẽto, tanquã ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta AB, in C, diuisa vtcunque. Dico rectan-



gulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CB, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur enim AB, versus dictũ segmentum C B, ad D, sitque B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos.4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa

[a] 34. primi. diametrum DF, quadrata. Et quia O K, [a] æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C. Rursus

[b] 34. primi. [b] quia N H, æqualis est rectæ CB, erit N Q, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato B M, æquale, cum rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; atque adeo duo rectangula A H,

[c] 34. primi. L Q, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, [c] cũ L H, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E, comprehensa sub A B, & C B, cum

[d] 34. primi. N H, H M, rectæ [d] æquales sint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc est, rectæ L H, hoc est, rectę A B. Et quia quadrata N Q. B M, æqualia sunt; si addatur commune K G, erunt B M, KG, simul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta A B, & segmento C B: Cum igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia sint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta A B, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale quadrato lineæ A D, compositæ ex AB, & dicto segmento C B. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, [a] *æquale est quadratis ex A B, B D, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis,* [a] 4. secũdi.
hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC:

At quadrata ex A B, BC, [b] *æqualia sunt rectãgulo bis sub AB, BC,* [b] 7. secũdi.
vna cum quadrato ex A C; Erit quadratum ex A D, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex A C. Quod demonstrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM recta A B, secta est in C, vtcunque, eique addita B D, segmento C B, æqualis, demonstratumque est; quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea A B, & adiecta B D, siue dicto segmento C B, vnà cum quadrato alterius segmenti A C.

Item sic.

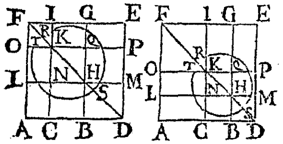
SI linea recta secetur bifariam, eique in re-

 ctum

ctum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta D C, *secta est bifariam in B, eique addita* C A, *probatumque fuit, quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex* BC, *dimidia, & adiecta* AC, *& sub dimidia* CB, *vna cum quadrato adiectæ* A C.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus alia ratione, numerũ quadratũ, cũ quo datus quilibet numerus conficiat numerũ similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratũ 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratũ 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater



sumptum, cum quadrato O I, [a] *æquale est quadrato A E; si rectangulum A H, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum* CH, *adeoque, &* C B, *eius latus, 1. erit linea A B, 8. vt ducta in* C B, *1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit* A C, *latus quadrati O I, 7. quod quæritur.*

[a] *8. secũdi.*

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerũ diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

C*ONTRA, inueniemus quoque numerũ quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerũ etiã quadratum. Si namque ad quartã partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartã eius partem 8. adijciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32.*

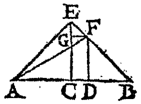
remanebit

remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semp est vna vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoque & latus eius BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, *est 7. quandoquidem A B, erat 8. &* C B, *hoc est, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus* A C, *perpetuo vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

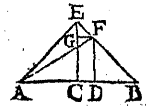
SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel CB, ducanturque rectæ E A, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans EB, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus:



[a] *5. primi.*

a 32.primi. Reliqui igitur [a] anguli alium rectum conficient, ideoque A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. *b 29.primi.* Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [b] æqualis est *c 32.primi.* recto E C B, externus interno; [c] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, propterea que anguli E F G,

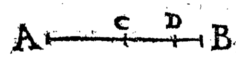


d 6. primi. F E G, æquales erunt, [d] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. *e 47.primi.* Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [e] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. *f 47.primi.* Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, [f] erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob equalitatem linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplũ erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ C D. *g 34.primi.* Est enim C D, [g] recta rectæ FG, æqualis; cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, *h 47.primi.* [h] æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum AD, D F. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectę D F, æquale est quadrato rectæ D B. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inęqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidię lineę, & intermedię sectionum. Si ergo recta linea secetur in equalia; & non equalia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum, æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, vna cũ parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; *a 4.secũdi* *si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub*



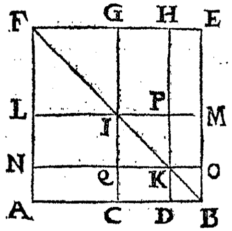
B C, C D; Atqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo bis sub B C, C D, *b 7.secũdi.* *[b] æqualia sunt quadrata ex B C, seu AC, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, DB, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex AC, C D. Quod ostendendum erat.*

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum AC, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vna cũ quadrato rectæ DB, dupla sunt quadratorũ ex AC, CD: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D, bis [c] est æquale quadratum rectæ A D. *c 4.secũdi.* *Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, CD.*

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. et 9. partiũ inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq; diametro B F, ducuntur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, secantes diametrũ B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B,

FE,



FE, parallelæ agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH,
[a] 34. primi. *[a] estq́; LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, æqualis; erunt NH, DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC, & intermediæ sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superãt quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, æqualia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula DO, NI, IH, æqualia sint quadratis LG, QP,*
[b] 36. primi. *ita ostendetur. Rectangulum NI, [b] æquale est rectangulo*
[c] 34. primi. *QM, quod rectæ NQ, QO, [c] æquales sint æqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP, & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, æqualia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, æqualia duobus quadratis LG. Esse autem KM, DO, IH, æqualia quadrato LG, sic*
[d] 36. primi. *demonstrabimus: [d] Rectangula KM, DO, simul æqualia sunt ipsi PE; quod rectæ BM, ME, æquales sint, cum BM,*
[e] 34. primi. *æqualis sit ipsi CB; ob quadratum CM, [e] & ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est [f] ipsi AC. Addito*
[f] 34. primi. *ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, æqualia ipsi IE,*
[g] 36. primi. *hoc est, quadrato LG; [g] quod IE, LG, æqualia sint; ob rectas*
[h] 34. primi. *LI, IM, [h] quæ æqualibus AC, CB, æquales sunt. Quod est propositum.*

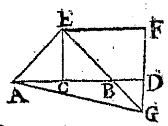
THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta

linea:

linea: Quod a tota cum adiũctã, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

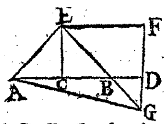
SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & iungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, iungaturque recta AG. Ostendetur iam, angulum AEB, esse rectum, vt in præcedenti propos. & CEB, semirectum;



[a] ideoque eius alternum EGF, semirectum quoque: [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare [d] rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est; erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, [g] cum CD, recta æqualis sit rectę EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est

[a] 29. primi.
[b] 34. primi.
[c] 32. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 34. primi.

[a] 47. primi.



le est [a] quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

[b] 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex A D, [b] æquale est quadratis ex A C, C D, vna cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; si commune addatur quadratum ex B D,*

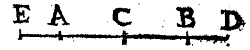
erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, vna cum rectangulo bis sub B C, C D. [c] 7. secũdi. *[c] Sed quadrato ex B D, vna cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonstrandum.*

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta BD; superabit quoque C D, ipsam A C, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D, [d] 4. secũdi. *bis, [d] æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati

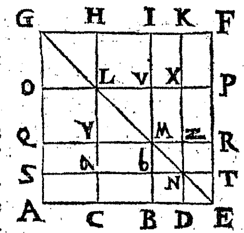
Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

SED & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum A C, C D, simul.



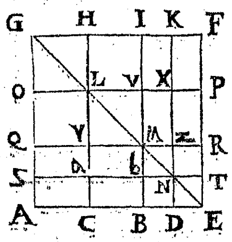
Addita namque rectæ A D, ad partes A, recta A E, quæ adiectæ B D, æqualis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. [a] 9. secũdi. *[a] Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D, dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C quod est propositum.*

QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, sit adiectæ lineæ B D, æqualis, descriptoq; quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, secantes ductam diametrũ E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agãtur O P, Q R, S T, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius



lib. omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt, [b] 34. primi. *[b] estq; S N, ipsi A D, æqualis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, siue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorũ O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superant quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia*

æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata S K, D T, quadratorũ O H, a X, dupla esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum Q L, [a] *æquale est quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales sunt;* [b] *propterea quod Q O, ipsi Y L, æqualis est, & Y L, ipsi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item* [c] *S Y, ipsi a M, & L I, ipsi Y V, & V K, ipsi V Z, & D T, ipsi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S Y, L I, V K, D T, hoc est, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia sunt quinque rectangulis O H, a M, Y V, V Z, b Z, hoc est, duobus quadratis O H, a X. Quod est propositum.*



a 36. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.

II.

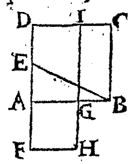
PROBL. 1. PROPOS. 11.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota A B, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex A B, quadratum A C, & diuiso latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F, & ipsi A F, abscindatur ex recta AB, data æqualis A G. Est.n. A B, maior quam AF. Nã cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; sint [d] autem latera AE, AB, maiora

d 20. primi.

latere E B; erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quam reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeo vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cum [a] F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib. ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; quòd A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum AF; [b] erit rectangulum sub DF, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) vnà cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, [c] æquale quadratis rectarum AE, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectę A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



a 34. primi.
b 6. secũdi.
c 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9.

Vbi

Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

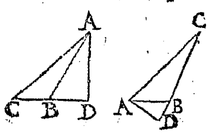
PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debeat maius segmentum lineæ datæ A B, excitata perpendiculari A D, ipsi datæ lineæ A B, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, æqualis, vt demonstratum est.

12.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, vna cum rectangulo sub C B, BD, bis compreheñso. Cũ enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunq;, erit



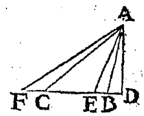
[a] erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D: Est autem quadratis rectarum C D, DA, [b] æquale quadratum rectæ A C. Quare & quadratum rectæ A C, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale sit quadrarum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 4. secũdi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

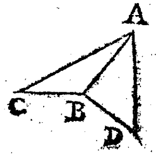
IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quanto maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero assumpsit Euclides, perpendicularẽ ductã ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtusi protractũ, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triãgulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



SED & hoc theorema verum est.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum; Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.



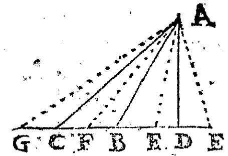
IN triangulo A B C, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC, Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, lineæ B C, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex
[a] 47. primi. *A D, [a] æquale est quadratis ex A B, B D, hoc est, ex AB, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quam recta A C. Itaque quia latera A B, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumque vtrique, & basis A C,*
[b] 25. primi. *maior est base A D; [b] Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sitque quadratum lateris

lateris AC, maius quam quadrata laterũ A B, BC, rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Dico AD, ad C D, esse perpendicularem, & angulum A B C, obtusum. Si enim A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad C B, perpendicularis, quam dico cadere necessario in C B, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt A B, sit ad C B, perpendicularis. Erit igitur [a] quadratum ex A C, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in C B, demissa, in punctum B. [a] 47. primi.



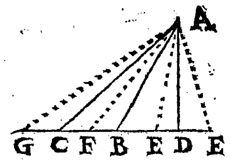
CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus B C, qualis est A F. Erit igitur [b] quadratum ex A C, æquale quadratis ex A F, F C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C. Igitur & quadrata ex A F, F C, maiora erunt quadratis ex A B, B C, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex A B, BC, maiora quadratis ex A F, F C, quòd recta AB, recto angulo A F B, opposita [c] maior sit quam A F, & B C, tota maior parte F C. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in C B. [b] 47. primi. [c] 19. primi.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus B C, demissa, in C, ita vt A C, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex A B, [d] æquale quadratis ex A C, C B, ac proinde quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, & propterea multo minus quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad B C, demissa non cadit in C. [d] 47. primi.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in B C, protractam ad partes C, qualis est A G. Quoniam igitur duo anguli, A G C, A C G, [e] minores sunt duobus rectis, estque AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde A C B, obtusus. Recta ergo A B, [f] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B; ac proinde multo minus quadratis, ex A B, B C: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad C B, non cadat in B, neque inter C, B, neque [e] 17. primi. [f] 19. primi.

in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est A D, vt demonstrabitur. Quare angulus ABE, [a] acutus erit, & ABC, obtusus. quod secundo loco proponitur demonstrandum.

[a] 17. primi.



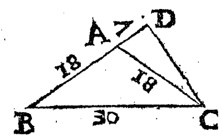
QVOD autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, [b] erit quadratum rectæ A C, maius quàm quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: sed & quadratum eiusdem rectæ A C, maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.

IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quòd posito vno latere triãguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumque partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factũ est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesque eorum a lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atque adeo veritas vtriusque theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper [a] maius est, quòd obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

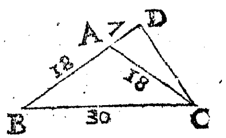
[a] 19. primi.

REGVLA I.

AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. uel 28. &c. Deinde vtrũuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximũ autem obtusò angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo ABC, angulus A, sit obtusus, ductaque sit CD, ad BA, latus productum perpendicularis. Si igitur AD, constituatur partium 7, erit vtrumis laterum AB, AC,



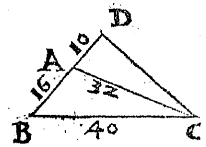
 partium



partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addiderisque $\frac{4}{7}$. ipsius. Latus vero BC, *erit partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxerisque $\frac{2}{7}$. ipsius. In hoc triangulo quadratū lateris* BC, *est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum* AB, AC, *nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenso sub* AB, AD, *hoc est, cum 126. 126.* H*æc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta* CD, *ad* BD, *perpendicularis, & angulus* BAC, *obtusus. Quòd si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies* AD, *14. & tam* AB, *quàm* AC, *36. at* BC, *60. Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius* AD, *quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere uis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti* AD, *quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.*

REGVLA II.

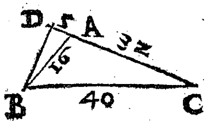
VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$. habebis minimum latus. Si vero easdem partes dicti segmenti triplices, addasque $\frac{1}{5}$. vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in apposito triangulo segmentum AD, *constituatur 10. erit* AB. *16.* AC,



AC, *32. &* BC, *40. Vbi etiam vides, quadrato lateris* BC, *quod est 1600. æqualia esse quadrata laterum* AB, AC, *nimirum 256. 1024, vnà cum rectangulo bis sub* AB, AD, *comprehenso, id est, cum 160. 160. Ex quo fit,* CD, *esse ad* BD, *perpendicularem, & angulum* BAC, *obtusum, vt supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum; gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD, statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96, BC, 120. & sic deinceps.*

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addasque $\frac{1}{5}$. produces minimum latus: Si vero easdem multiplices per 6. adiungasque $\frac{2}{5}$. habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, *fiat partium 5. erit* AB, *16.* AC, *32. &* BC, *40. Atque ita quadrato lateris* BC, *nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterum* AB, AC, *nempe 256. 1024. vnà cum rectangulo bis comprehenso sub* AC, AD, *hoc est, cum 160. 160. Ac proinde* BD, *ad* CD, *erit perpendicularis; angulusque* BAC, *obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus.*



Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius A D, partium 20. latus A B, 64. A C, 128. & B C, 160. Si vero eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius A D, 50. latus A B, 160. A C, 320. & B C, 400. Atque ita in infinitum.

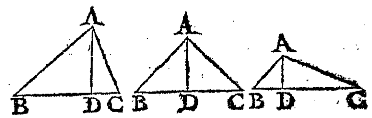
CAVE *antem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vnà cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.*

13.
THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duobus quadratis laterum A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum B C, CD, [a] æqualia rectãgulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, [b] æquale est quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, [c] æquale sit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, CD, & quadrato rectæ A B. quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.



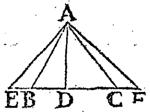
[a] 7. secundi
[b] 47. primi
[c] 47. primi

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. I. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius,

maius, minusuè, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; Idē tamen verū etiā est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs verò à quolibet.



Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B; acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus.[a] maior interno & opposito recto A E B; quod est absurdum. Si vero caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

a 16. primi.

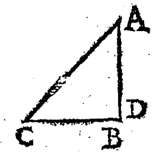
IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A B, vt in rectāgulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpēdicularis ducatur A D, quæ eadem erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B; rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis

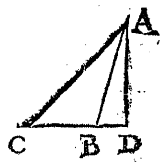
cularis

cularis cadit, & sub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex A B, C B,[a] æqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.

a 47. primi.



RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D,[b] æqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erūt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D,[c] æquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vna cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D,[d] æqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo sub C B, B D,[e] æquale est rectangulum sub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quā quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D.



b 47. primi.

c 4. secūdi.

d 47. primi.

e 3. secūdi.

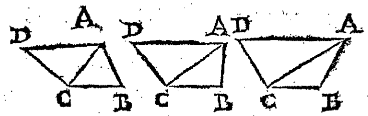
C D. *Quod est propositum.*

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex A C,
a 12. secũdi. [a] *maius est, quam quadrata ex* A B, B C, *rectangulo bis sub* C B, B D, *comprehenso, hoc est, quadratum ex* A C, *æquale est quadratis ex* A B, B D; *vnà cum rectangulo sub* C B, B D, *bis comprehenso; erit quadratum ex* A B, *minus, quam quadratum ex* A C, *quadrato ex* B C, *& rectãgulo sub* C B, B D, *bis: Ac proinde si quadrato ex* A C, *addatur quadratum ex* B C, *erit quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, B C, *quadrato ex* B C, *bis sumpto, & rectangulo bis sub* C B, B D, *comprehenso. Cum ergo quadrato ex* B C,
b 3. secũdi. *vna cum rectangulo sub* C B, B D, *contento,* [b] *æquale sit rectangulum sub* C B, C D, *contentum; erit quoque quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, C B, *rectangulo comprehenso bis sub* C B, C D. *Quod est propositum.*

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio præcedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorũ: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo A B C, *quadratum lateris* A B, *minus sit, quam quadrata laterum* A C, C B. *Dico angulum* C, *quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex* C, *ad* A C, *perpendicularis* C D, *lineæ* C B, *æqualis; iũgaturque recta* A D.



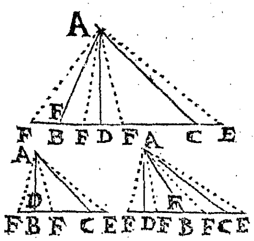
c 47. primi. *Quoniã igitur quadratum ex* A D, [c] *æquale est quadratis ex* A C, C D, *hoc est, ex* A C, C B: *Ponitur autem quadratum ex* A B, *minus quadratis ex* A C, C B; *Erit quadratum ex* A D, *maius quadrato ex* A B; *& ideo recta* A D, *maior quam recta* A B. *Itaque quia duo latera* A C, C D, *trianguli* A C D,
d 25. primi. *æqualia sunt duobus lateribus* A C, C B, *trianguli* A C B, *vtrumque vtrique; & basis* A D, *maior base* A B; [d] *Erit angulus* A C D, *maior angulo* A C B: *Sed* A C D, *rectus est, ex constructione. Ergo* A C B, *recto minor, & acutus erit.*

SED

SED & cõuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirũ.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

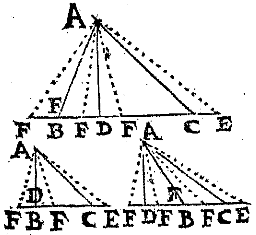
IN triangulo A B C, *ad latus* B C, *demittatur ex angulo opposito* A, *recta* A D; *sitq́; quadratum lateris* A B, *minus quam quadrata laterum* A C, C B, *rectangulo sub* B C, C D, *bis comprehenso. Dico* A D, *esse perpendicularem ad* B C, *& angulum* A C B, *acutum. Si namque* A D, *perpendicularis non est, ducatur ex* A, *ad* B C, *perpendicularis, quam dico necessario cadere citra pũctum* C, *versus* B, *hoc est, vel in latus* B C, *vel in punctum* B, *vel in latus* B C, *versus* B, *productum. Cadat enim, si fieri potest, in* C, *ita vt* A C, *sit ad* B C, *perpendicularis. Erit igitur* [a] *quadratum ex* A B, *æquale quadratis ex* A C, C B. *quod est absurdum, cum minus ponatur. Nõ cadit ergo perpẽdicularis ex* A, *deducta ad* B C, *in pũctũ* C. a 47. primi.



CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, *demissa vltra* C, *in* E, *qualis est* A E. *Erit igitur* [b] *quadratum ex* A B, *æquale quadratis ex* A E, E B: *Ponitur autem quadratum ex* A B, *minus quadratis ex* A C, C B. *Igitur & quadrata ex* A E, E B, *minora erunt quadratis ex* A C, C B. *Cum ergo quadratum ex* A C, [c] *æquale sit quadratis ex* A E, E C; *erunt quoque quadrata ex* A E, E B, *minora quadratis ex* A E, E C, C B: *Et ablato communi quadrato rectæ* A E, *erit reliquum quadratum ex* E B; *minus quoque quadra-* b 47. primi. c 47. primi.

quadratis ex E C, C B. quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, [a] æquale sit quadratis ex E C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est A D, vt demonstrabitur, ac propterea [b] angulus A C B, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum.

[a] 4. secũdi.



[b] 17. primi.

QVOD autem A D, sit ad B C, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B, siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpẽdicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ A D. quod ille negat) Quia ergo angulus A C B, ostensus fuit acutus, [c] erit quadratũ ex AB, minus, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub B C, C F, hoc est, quadratum ex A B, vnà cum rectangulo comprehenso bis sub B C, C F, æquale est quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub BC, C D, hoc est, quadratum idem ex A B, vnà cum rectangulo bis contento sub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub BC, C D, æquale erit quadrato eidem ex AB, vnà cum rectangulo comprehenso bis sub BC, C F: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum sub B C, C D, bis cõprehensum æquale erit rectangulo bis sub B C, C F, comprehenso; ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, C F, ideoq; & rectæ C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

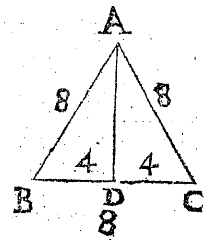
[c] 12. secũdi.

QVEMADMODVM autem in scholio superioris propo-

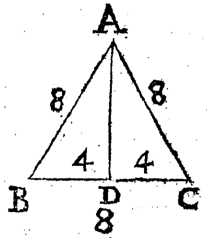
propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis æqualiũ. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum æqualium laterum cadit: Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit: Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus: Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur: Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est. vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia, Vt in triangulo æquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppositum latus B C, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demon-



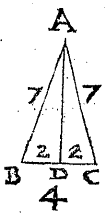
strauimus

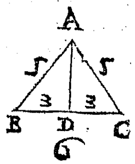


strauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta BD, CD, 4.4. Vbi vides quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. vnà cum rectangulo bis contento sub BC, CD, id est, cum 32.32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.

REGVLA II.

SI vtrumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroque simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquã latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt si in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB, AC, statuatur 7. & BC, 4. In posteriori autem vtrumlibet AB, AC, 5. & BC, 6. Cum ergo perpendicularis AD, diuidat basim BC, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta BD, CD, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (vterque enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse quadratis simul laterum AC, CB. &c.

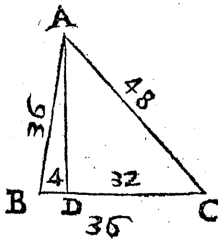




REGV-

REGVLA III.

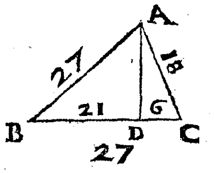
IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statues quotuis partium, easque per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmenta simul addita conflabunt vtrumq; laterũ æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus BD, ponatur 4. erit maius CD, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cũ 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in BD, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.



REGVLA IIII.

IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmẽtũ si statuas quotuis partiũ numero pariũ, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earũ medie-

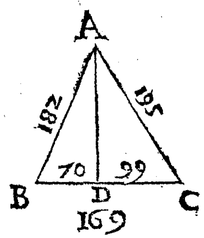
V



medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si vero easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nimirum 729. vnà cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

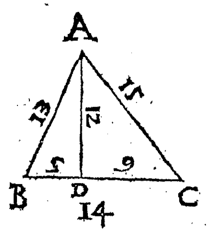
IN Scaleno triangulo, in quo perpẽdicularis in minimũ latus demittitur, erit segmentũ basis iuxta mediũ latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratũ est. Quod segmentũ si constituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partiũ 70. vel 140. vel 210. &c. eisq; addantur earum $\frac{29}{70}$. confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimũ latus. Si vero partes minoris segmenti duplicentur, & producto adijciantur $\frac{42}{70}$. hoc est, $\frac{3}{5}$. earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiusdem minoris segmenti duplicentur, productoq; $\frac{55}{70}$. id est, $\frac{11}{14}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum



cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus simul quadratis 38025. 28561. laterum AC, CB, &c.

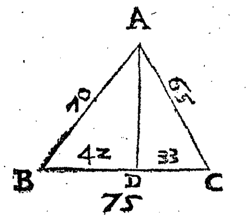
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, q̃ ad propos. 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentũ minimo lateri adiacens. Quod segmẽtũ si statuatur tot æqualiũ partium, vt à 5. numerẽtur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisque addantur $\frac{4}{5}$. confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectæ component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat 5. erit segmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.



REGVLA VII.

IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq; addantur $\frac{9}{33}$. hoc est, $\frac{3}{11}$. fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus efferent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adijciantur $\frac{4}{33}$, producetur medium latus. Si deniq; eidem numero lateris maximi apponantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur mi-

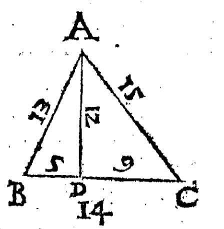


nimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumque latus maximum BC, 75. & medium AB. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium, si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

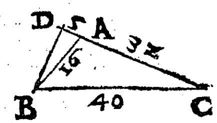
HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque vero hoc regulæ illæ docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodentur.

IAM vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regulæ 6. si in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. vna cum eo, quod fit ex BD, in BD, bis, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vna cum eo, quod fit ex AD, in AD, bis, id est,



id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum AB, AD, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo ACD, minimum latus CD, ponas 9. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus, AD, 40. & AC, 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quòd si minimum latus CD, facias 7. comperies AD, 24. & AC, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. vna cum numero, qui producitur ex AD, in AD, hoc est, cum 576. 576. facere 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD, hoc est, 625. 576.

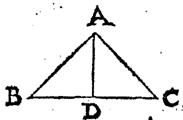
AT si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentũ namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, inter angulum acutum C, & perpendicularem BD, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est quadratum lateris AB, angulo C, acuto oppositi, hoc est, 256. vnà cum rectangulo sub AC, CD, comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

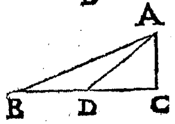


NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.

IN triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C; dupla esse quadratorum ex A D, BD. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primũ recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum sit, vel Isosceles, vut ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. [a] Quoniam igitur tam quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A D, DB, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex A D, bis sumpto, vnà cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex AB, AC, dupla sunt duorum quadratorum ex A D, D B. quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur. [b] Quoniam quadratum ex AB, duobus quadratis ex AD, D B, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearũ AB, AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex A D, DB. Quod demonstrandum erat.





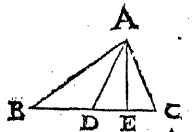
[a] 47. primi.
[b] 47. primi.

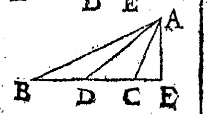
CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratum ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo

duo quadrata ex A C, C D, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quòd [a] quadrata ex A C, C D, semel sumpta æqualia sint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vnà cum quadratis ex A C, C D, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cum ergo & quadratum ex C D, bis sumptum, duplum sit quadrati ex C D; [b] erit reliquum quadratum ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Sunt autem [c] quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia sunt quadrato ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto) dupla quoque sunt quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum.

[a] 47. primi.
[b] 20. pron.
[c] 47. primi.

TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [d] quadrata ex B E, E C, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quòd [e] quadrata ex A E, E D, semel sumpta quadrato ex A D, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis ex A E, D E, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cum ergo & quadratum ex D E, bis sumptum, duplum sit quadrati ex D E; [f] erunt reliqua quadrata ex B E, E C, vna cum quadrato ex A E, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Quare cum quadratis ex B E, A E, [g] æquale sit quadratum ex A B; & quadratis ex E C, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum.





[d] 9. secũdi.
[e] 47. primi.
[f] 20 pron.
[g] 47. primi.

POSTREMO cadat perpendicularis A E, in latus B C, productum. Quoniam igitur [h] quadrata ex B E, C E, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex A D; quòd [i] quadrata ex A E, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex A D; erunt quadrata ex B E, C E, vna

[h] 10. secundi.
[i] 47. primi.

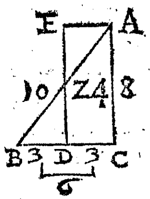
 cum

cum quadratis ex A E, DE, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. *Cum ergo & quadratum ex* DE, *bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex* DE; [a] *erunt reliqua quadrata ex* BE, CE, *unà cum quadrato ex A E, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex* BD, AD. *Quare cum quadratis ex* BE, AE, [b] *æquale ſit quadratum ex* AB; *& quadratis ex* CE, AE, *quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex* AB, *A C, dupla quadratorum ex A D,* DB. *Quod erat oſtendendum.*

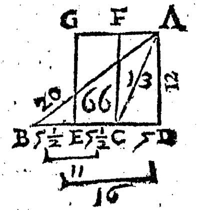
[a] 20. pron.
[b] 47. primi.

NON *te moueat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, vt in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita vt circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.*

EX *his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac ferè ratione. Sit primo triangulum rectangulum* ABC, *cuius latera nota ſint, nempe* AB, 10. *palmorum;* AC, 8. BC, 6. *Diuiſo latere* BC, *bifariam in* D, *vt ſint* CD, BD, 3. *palmorum, perficiatur rectangulum* ACDE, *quod æquale eſt triangulo* ABC, *vt in ſcholio propoſ.* 41. *lib.* 1. *oſtendimus. Quia vero ex ductu* CD, *trium palmorum in* CA, 8. *palmorum producitur area rectanguli* CE, 24. *palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum* ABC, *rectangulo* CE, *æquale. Quod eſt propoſitum.*



SIT



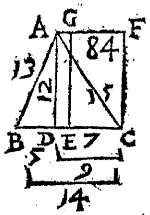
SIT deinde triãgulum obtuſangulum A BC, *cuius latera ſint cognita;* AB, 20. *palmorũ;* AC; 13. BC, 11. *Primũ igitur inuenienda eſt quantitas perpendicularis lineæ AD, ex A, in latus* BC, *protractum demiſſæ, hoc modo. Quoniã quadratum lateris* AB, [a] *maius eſt, quã quadrata laterũ AC,* BC, *rectãgulo bis cõprehenſo ſub* BC, CD; *ſi quadrata laterũ* AC, BC, *nempe* 169. 121. *quæ efficiunt* 290. *detrahantur ex* 400. *quadrato lateris* AB, *remanebunt* 110. *pro rectangulo bis cõprehenſo ſub* BC, CD, *cuius numeri dimidiũ* 55. *dabit rectangulum ſub* BC, CD. *Si igitur* 55. *rectangulum ſub* BC, CD, *diuidatur per* 11. *latus notum* BC, *exibit reliquum latus* CD, 5. *palmorũ, vt Ioan. Regiom. demonſtrat propoſ.* 17. *lib.* 1. *de triangulis, & à nobis demonſtratũ eſt in libro de menſurationibus omnium quãtitatum. Quia vero quadrata laterum A D, C D,* [b] *æqualia ſunt quadrato lateris A C; ſi quadratum* 25. *palmorum, nempe lateris C D,* 5. *palmorum nuper inuenti, auferatur ex* 169. *quadrato lateris AC, remanebunt* 144. *palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit* 12. *palmorum, cum radix quadrata huius numeri* 144. *ſit* 12. *Iam vero diuiſo latere* BC, *bifariã in* E, *educantur ex* C, E, *ad* BD, *perpendiculares* CF, EG, *occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipſi* BD, *parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, ſi* EC, *palmorum quinque cum dimidio, ducatur in* CF, 12. *palmorum, (Eſt* [c] *enim* CF, *ipſi* AD, *æqualis,) exurget area rectanguli* CG, 66. *palmorum: quod cum æquale ſit triangulo* ABC, *ex ſcholio propoſ.* 41. *lib.* 1. *(ſunt enim rectangulum* CG, *& triangulum* ABC, *in eiſdem parallelis &c.) Erit quoque area trianguli* ABC, *palmorum quadratorum* 66. *quod eſt propoſitum.*

[a] 12. ſecũdi.
[b] 47. primi.
[c] 34. primi.

SIT poſtremo triangulum acutangulum ABC, *latera habens nota;* AB, 13. *palmorum;* AC, 15. BC, 14. *Primum igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis* AD, *ex A, ad* BC, *demiſſæ, hac ratione. Quoniam quadratum lateris* AB, [d] *minus eſt, quam quadrata laterum* AC, BC, *rectangulo comprehenſo bis ſub* BC, CD; *ſi quadratum*

[d] 13. ſecũdi.

tum lateris A B*, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum* A C, B C, *hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub* B C, C D, *cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub* B C, C D. *Si igitur 126. rectangulum sub* B C, C D, *diuidatur per* B C, *latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum 9. vt constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum.*



Quoniam autem quadrata ex A D, C D, [a] *æqualia sunt quadrato ex* A C; *si quadratum 81. palmorum, nempe lateris* C D, *9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris* A C; *remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus* A D, *12. palmorum. Iam vero diuiso latere* B C, *bifariam in E, educantur ex C, E, ad* B C, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A F, *quæ per A, ipsi* B C, *parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si* C E, *7. palmorum ducatur in* E G, *12. palmorum; (est enim* E G, *recta ipsi* A D, *æqualis) exurget area rectanguli* E F, *palmorum 84. Quod cum triangulo* A B C, *sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum* E F, *& triangulum* A B C, *in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli* A B C, *84. palmorum. Quod est propositum.*

[a] *47. primi.*

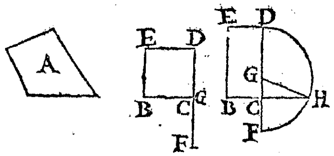
ITAQVE in vniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta equalis rectę B C. Diuidatur quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.



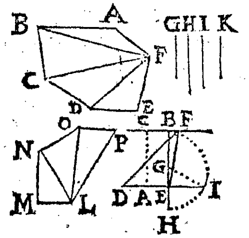
[a] *45. primi.*
[b] *34. primi.*
[c] *5. secundi.*
[d] *47. primi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in triãgula A B F, F B C, C F D, D E F; inueniemusque latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusque rectam P L. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc est, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.

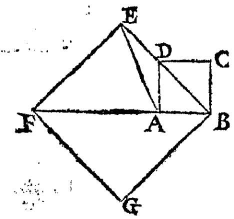


PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo D E F, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in A, producaturque quãtum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad D E, perpendicularis H E B, secans F B, in B, sitque E H, ipsi A E, dimidio lateris D E, æqualis. Postremo, diuisa tota linea B H, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum G H, vel G B, arcus secans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, æquale esse triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & semicirculus B H, ducaturque recta G I, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex E I, rectangulo A B, æquale esse. Cum ergo rectangulum A B, triangulo D E F, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quod basis D E, sit dupla basis A E, constat propositum.

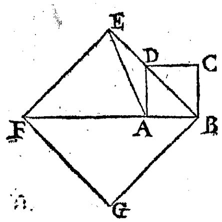
QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, recta rectæ A D, æqualis. Dico rectam E B, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicularis ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. huius lib.[a] erit & B F E, semirectus.[b] Quare rectæ B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum rectæ B E. Quod si ducatur recta



[a] 32. primi.
[b] 6. primi.



[a] 5.primi. *cta A E, erunt anguli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales;* [b] 6.primi. [b] *ideoq; recta E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B, quod est propositum.*

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLI-

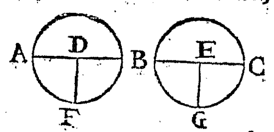
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM

DEFINITIONES.

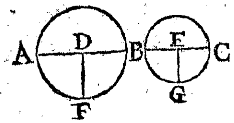
I.

AEQVALES circuli sunt; quorũ diametri sunt æquales; vel quorum, quę ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

Q*VONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demõstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorũ totæ diametri æquales sũt. Vt si diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æqua-*



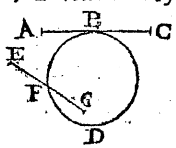
les



les erunt circuli A F B, & B G C. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosuè inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

II.

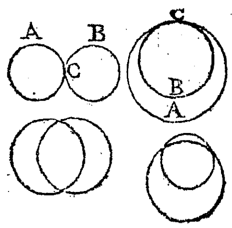
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.



VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI sese mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



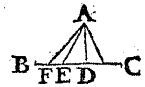
EODEM modo duo circuli A C, B C, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius sese circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum consti-

stituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

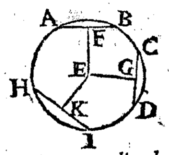
IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recta distantia illius puncti a linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est breuior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum A E, A F, maiores sunt, quam A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, [a] maior, quã A E, cum angulus A E F, sit obtusus, & A F E, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quod enim A F E, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, [b] minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum A D F, rectus sit, angulum A F D, recto esse minorem. Eadem ratione angulus A E D; ostendetur acutus, propterea quòd in triangulo A D E, [c] duo anguli A D E, AED, minores sunt duobus rectis, (& A D E, rectus est.) ac proinde, cum ambo A E D, A E F, [d] æquales sint duobus rectis, erit A E F, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales.



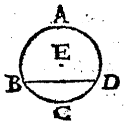
[a] 19. primi.
[b] 17. primi.
[c] 13. primi.
[d] 17. primi.



inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur diſtare à centro E, ſi perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abeſſe dicetur à centro E, quam linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.

V.

SEGMENTVM circuli eſt figura, quę ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



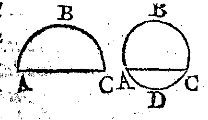
VT ſi ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quam figura B C D, comprehenſa recta B D, & circumferentia B C D, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta B D, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum B A D; Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſque Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur. Primo loco angulum ſegmenti, di-

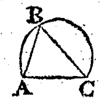
cens,



cens, angulum mixtum B A C, vel B C A, contentum ſub recta linea A C, & circumferentia A B C, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi: Si vero ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

VII.

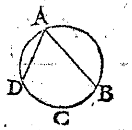
IN ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.



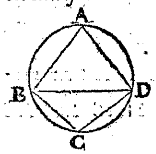
SIT ſegmentum circuli quodcunq; ABC, cuius baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

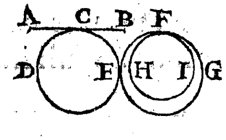


EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, insistere dicitur circumferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam; quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmētū aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, insistens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam B C D.



PRÆTER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel B C E, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus C E D,

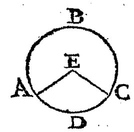
C E D,



C E D, tangat circulum E F G, exterius in E; Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tã angulus curuilineus C E F, quam E F H, vel G F I, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.

IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

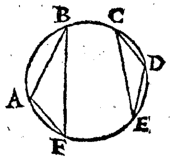


SI in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circumferentia A D C, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quã rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

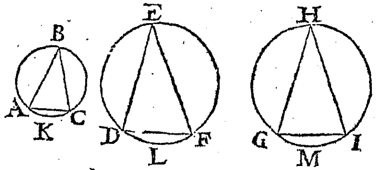
SIMILIA circuli segmenta sunt,

quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



SEGMENTA, seu circumferentiæ ABDF, DCAE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.



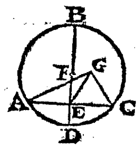
Consistit aũt hæc segmentorum, circumferentiarũue similitudo in eo, quòd qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta; seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, uel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes,

similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI, quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, [a] quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim ducuntur) [b] erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

[a] *10. primi.*

[b] *8. primi.*

COROLLARIVM.

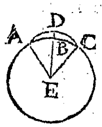
HINC manifestum est, si in circulo recta ali-

qua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

2.

THEOR. 1. PROPOS. 2.

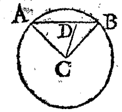
SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC,
[a] 1. tertij. recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetque E D, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur)
[b] 5. primi. [b] erunt anguli EAD, ECD, æquales:
[c] 16. primi. Est autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, opposita, hoc est, recta E B, sibi
[d] 19. primi. æqualis. [d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, opposita, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur,

tur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quæ circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectę lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.



IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli A B, cuius centrum C. Dico rectam A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera
[a] 5. primi. *C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, [a] erunt anguli*
[b] 16. primi. *C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A, [b] angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A,*
[c] 19. primi. *[c] latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.*

COROLLARIVM.

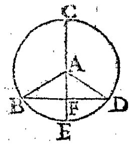
HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tãtum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum
[d] 2. tertij. *tangeret, [d] caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.*

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

3. SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

PER centrum A, circuli B C D, recta C E, extenſa diuidat rectam B D, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam A F, eſſe ad angulos rectos ipſi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & baſes A B, A D, æquales. [a] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc eſt, recti. Quod erat primo propoſitum.



[a] 8. primi.

SIT iam A F, ad angulos rectos ipſi B D. Dico rectam B D, bifariam ſecari in F, à recta C E. Ductis enim iterum rectis A B, A D; cum latera A B, A D, trianguli A B D, ſint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales ſunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 5. primi.
[c] 26. primi.

FACILE quoque demonſtrari poterat ſecunda hæc pars, quæ quidem conuerſa eſt primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis eſt ad B D, erit tam quadratum rectæ A B, [d] æquale quadratis rectarum A F, F B, quam quadratum rectæ A D, quadratis rectarum A F, F D. Cum igitur quadratum rectæ A B, æquale ſit quadrato rectæ A D, erunt & quadrata rectarum A F, F B, æqualia quadratis rectarum A F, F D. Quare dempto communi quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque idcirco & rectæ F B, F D, æquales erunt.

[d] 47. primi.

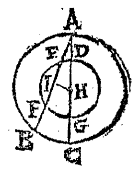
COROLLARIVM.

EX hac demonſtratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, ſiue æquilaterum illud ſit, ſiue Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim: Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia ſunt, ex eo, quod recta A F, ſecat baſim B D, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim B D, à recta A F, bifariam ſecari. Sed hoc etiam demonſtrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuerſalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonſtrandum eſſe hoc loco ſequens theorema, ad ea, quæ ſequuntur, non inutile; videlicet.

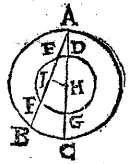
DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam ſecans: erunt eius ſegmenta inter vtramq; circunferentiam poſita, inter ſe æqualia.



DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta A C, ſecans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales eſſe. Nam ſi ex H A, H C, quæ [a] æquales ſunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales ſunt, [b] erunt recta

[a] 15. def.
[b] 3. pron.

recta A D, C G, æquales.



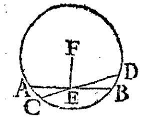
DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, non per centrum, secans interiorem circunferentiam in E, F. Dico rursus, rectas A E, B F, esse æquales. [a] 12. primi. *[a] Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendiculari H I,* [b] 3. tertij. *[b] secabit hæc tam rectã A B, in circulo ABC, quã rectã EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus* [c] 3. pron. *I A, I B, [c] remanebunt A E, B F, æquales. quod est propositum.*

4.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquã bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. [d] 1. tertij. [d] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, [e] 3. tertij. [e] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

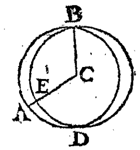


THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. 5.

SI duo circuli sese mutuo secent; nõ erit illorum idem centrum.

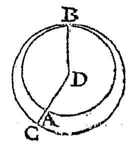
DVO circuli A B D, E B D, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idem cẽtrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter se erunt, pars, [a] 1. pron. & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.



THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli A B, B C, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ BD, ęqualis. Quare rectę AD, & CD, [b] inter se erũt æquales, pars & totũ, quod est absurdũ. [b] 1. pron. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangãt, &c. Quod demonstrandũ erat.



SCHO-

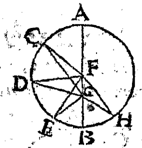
SCHOLIVM.

EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis se se interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius se se tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

7. ## THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est cētrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus distat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E; atq; ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineę GB, vel maximæ GA, duci posse tantūmodo duas lineas inter se æquales. Ducantur



cantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniam igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, [a] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est, toti rectæ G A; erit & G A, maior quam G C. Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

[a] 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo E F G, latus EF, [b] minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem E F, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc G B, minor, quam G E. Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

[b] 20. primi.

RVRSVS, quia duo latera G F, F C, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli GFD; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; [c] erit basis G C, maior base G D. Eadem ratione maior erit G C, quam G E. Item maior erit G D, quam G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

[c] 24. primi.

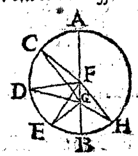
FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æqualis; [d] erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, vel maximæ G A, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quę cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam G H: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ G A, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVAMQVAM autem Euclides solum demonstrauerit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri A B, existant: idem tamen verum etiã est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam G D, propinquiorem esse rectæ G A, quam rectam G H; dico G D, maiorem esse, quam G H. Si namque ipsi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum est, nempe si fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, distent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur magis distare, quam G H, ac proinde magis, quam G E. Cum [a] ergo G D, maior sit, quam G E, maior quoque erit eadem G D, quam G H.



a 7. tertij.

HANC porrò propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ, ~~vel minimæ~~ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.

IN circulo A B C, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C; ipsarum vero D E, D F, maior sit D E; denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ maior ponitur quam D F, propinquiorem esse maximæ D A, quam D F.

D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abesse. Primum enim si D A, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea; [a] erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum. a 7. tertij.

DEINDE si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D, in directum, [b] erit alia recta quam D C, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri. b 7. tertij.

RVRSVS si D E, non est vicinior maximæ D A, quam D F; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à D A, dicantur distare, [c] ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim D E, maior. Si uero æqualiter ex eadem parte à D A, distare dicantur, erunt D E, D F, vna eademq; linea; atque adeo D E, maior non erit, quàm D F, quod est contra hypothesim. Quod si D F, dicatur esse propinquior maximæ D A, [d] ipsa erit maior, quam D E. Quod magis est absurdum. c 7. tertij. d 7. tertij.

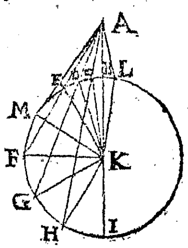
POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à D A, vel D C, [e] erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B. e 7. tertij.

THEOR. 7. PROPOS. 8. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore

tiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimę, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione A G, maiorem quam A F.



E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe; Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ A I, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D,E,F,G,H, rectæ KC,KD,KE,KF,KG,KH. Quoniam
[a] 20. primi. igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, [a] maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I; erit & A I, maior

ior, quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quam A F. Quare AI, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli AKH, æqualia ſunt lateribus AK,KG, trianguli AKG; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; [a] erit [a] 24. primi.
baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F: Item A G, maior, quam A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore.

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, [b] mi- [b] 20. primi.
nor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt.

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duę rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; [c] erunt [c] 21. primi.
A C, C K, minores, quam A D, D K. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E: Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor eſt, quam remotior ab eadem.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia ſunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; [d] erunt rectæ AC, AL, [d] 4. primi.
ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima, maior quam A L. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor quam A L, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturque recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: [a] erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

[a] 4. primi.

HÆC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus vero A K F, angulo A K M, maior. Igitur [b] basis A F, base A M, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta A M.

[b] 24. primi.

PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum duo latera A E, E K, [c] minora sint duobus lateribus A M, M K; si auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quam reliqua A M. Eademque ratio est de cæteris.

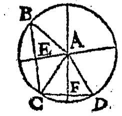
[c] 21. primi.

QVAMQVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR. 8. PROPOS. 9. 9.

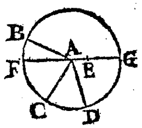
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [a] erũt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 8. primi.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, [b] sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; [c] erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quam recta A C, remotior ab A G. quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



[b] 1. tertij.

[c] 7. tertij.

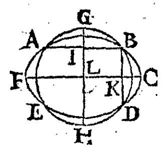
QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; [a] erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quàm AB, & AC. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

[a] 7. tertij.

10.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

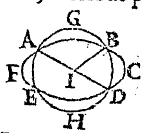
CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.



SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus [b] bifariam diuisis in I, & K, [c] educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, [d] quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

[b] 10. primi. [c] 11. primi. [d] 5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. [e] Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quę per defin. circuli ęquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, a quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, [f] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem



[e] 1. tertij. [f] 9. tertij.

autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. [a] Quod est absurdum.

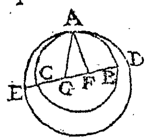
[a] 5. tertij.

11.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum cenrra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [b] non possint idem centrũ habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [c] maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, posita fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quàm totum, quod est absurdum.



[b] 6. tertij. [c] 20. primi.

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, [d] maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectę FE, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponatur esse centrum circuli ABC,) erit

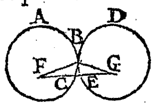
[d] 20. primi.

quoque G C maior, quam G E, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 12.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli vero D B E, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, [a] maiora sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ F C, GE, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



a 20. primi.

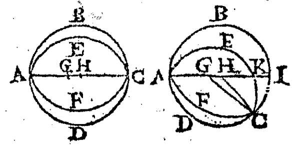
12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TAN-

TANGANT sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt; per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrũ, & recta AGHC, diameter, diuidet A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidiũ totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.

a 6. tertij.
b 11. tertij.



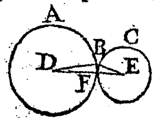
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera GH, HC, [c] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quòd HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars quàm totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [d] maiores sunt recta HC; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta

c 20. primi.
d 20. primi.

communi

communi HG, erit GC, maior, quam G A. quod eſt abſurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis, quam vno.

TANGANT ſe iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, [a] quæ per contactum F, neceſſario tranſibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, ſe tangunt, tangant ſeſe in B. Ductis igitur rectis D B, EB, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc eſt ipſi DE: [b] Sunt autem & maiores. quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.



[a] 12. tertij.
[b] 20. primi.

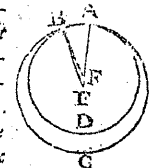
ALITER. Si circuli A B, C B, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipſa intra vnum circulorum, per 2. propoſ. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum a circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potiſſimum concludere, circulum non poſſe tangi a circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo internallo a ſe diſſideant; non autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam vno; oſtendemus breuiter, in vno eodemq; contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum ABD, prope A; & per eorum centra E, & F, [c] quæ diuerſa ſunt, recta ducatur E F, [d] quæ ad contactum perueniet neceſſario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si n. ſe tangant in alio etiã puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F, [e] erunt rectæ E F,

[c] 6. tertij.
[d] 11. tertij.
[e] 20. primi.

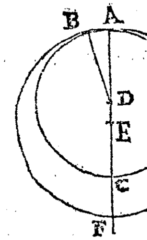
E F, F B, maiores recta EB. Eſt autem recta EB, æqualis rectæ E A, cum vtraque ſit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FB, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA. quod eſt abſurdum, cum FB, FA, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales exiſtant. In ſolo ergo puncto A, ſe mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

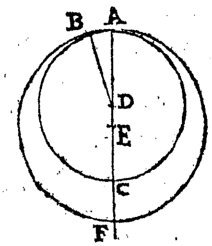


NON videtur etiam omittendum hoc loco ſequens theorema, videlicet.

SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusque extra eundem cadet.

SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in ſemidiametro A D, producta ſumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus deſcribatur A F, quem dico circulum A B C, in ſolo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, eſt intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior eſt, quàm A D, hoc eſt, quàm DC, hoc eſt, à fortiori, quàm EC; erit quoque EF, quæ ipſi A E, æqualis eſt, maior quàm E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, exiſtet, circulusq; AF, extra eundem circulum A B C, prope punctum F, exiſtet. Multò magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, ſi E, extra eundem circulum A B C, exiſtet. Si igitur circulus A F, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat; ſecet, vel tangat circulus A F, circulum ABC, in alio puncto B, ſi fieri poteſt, duca-





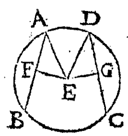
ducaturq; recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, sumptum est punctum D, præter centrum E, [a] erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo D A, quàm D B. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli ABC. Non ergo circulus A F; circulum A B C, secat aut tangit in alio puncto, quàm in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

a 7. tertij.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt si in semidiametro A E, circuli AF, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus describatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proximè sit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuò in solo puncto A, contingant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, ED. [b] Secabunt rectæ

b 3. tertij.

rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, recta videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, [a] æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoq; & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

a 47. primi.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [b] diuidentque rectas A B, C D, bifariam. Ductis igitur rectis E A, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ E A, [c] æquale quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

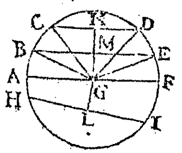
b 3. tertij.

c 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrum G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & HI, maiorem, quam

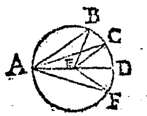


quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD a centro, quam H I, erit G K, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad G K, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, G L, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ B E, HI,
[a] 14. tertij. a centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales
[b] 20. primi. erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, [b] maiores quidem sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E. Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, GD, trianguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo
[c] 24. primi. C G D; [c] erit recta B E, maior quam C D; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemq; circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarũ AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC,



[d] 20. primi. *ra AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quam A C. Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.*

DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C; æqualia sunt duobus lateribus A E, E B, trianguli A E B; & angulus A E C, totus maior est angulo A E B; erit

[a] 24. primi. *[a] erit basis A C, maior base A B. Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.*

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad utrasque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F; iunganturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F,
[b] 4. primi. *æquales; [b] erunt bases A C, A F, æquales. Neque vero ulla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra A C, ea maior erit, ut iam demonstratum est.*

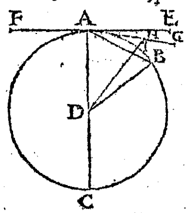
QVOD si A B, AF, ad diuersas partes diametri AD, ductæ sint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm A B, demonstrabitur, ut in scholio propos. 7. huius lib. A F, maiorem esse, quàm A B. Si namque, ut proximè ostensum fuit, ducatur ipsi A F, æqualis A C, ex altera parte, nempe si fiat angulo A E F, æqualis angulus A E C, &c. cadet punctum
[c] 14. tertij. *C, inter B, & D; quòd AF, AC, [c] æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos A E F, A E C. Hinc enim fit, cum A F, ponatur propinquior centro, quàm A B, ut & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam A B, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm A B, ut in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quàm A B.*

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriã comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, pūcto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB ducta DB, [a] erunt duo anguli DAB, DBA, æquales; sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo [b] minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpẽdicularis intra circulum; neq; eadem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iã ex A, inter AE, rectã, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I. quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Qm igitur in triangulo DAH, [c] duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, [d] maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cũ AC, angulũ rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cũ AE, angulum rectilineũ acutũ maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quòd ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quę ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 5. primi.

[b] 17. primi.

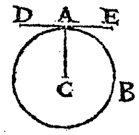
[c] 17. primi.

[d] 19. primi.

COROLLARIVM.

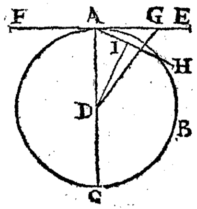
HINC manifestum est, rectam a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.



EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo



A D G, duo anguli D A G, D G A, [a] *minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare* [b] *maior erit recta D G, quam D A; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur cõmuni angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoque minores duobus rectis: Quare* [c] *coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I,* [d] *æquales sunt duobus rectis, & duo anguli D A I, A D I, ostensi sunt æquales recto D A E; erit reliquus A I D, rectus, atque adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta D A,* [e] *maior est, quam D I. Non igitur D I, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.*

[a] 17. primi.

[b] 19. primi.

[c] 13 pron.

[d] 32. primi.

[e] 19. primi.

SCHOLIVM.

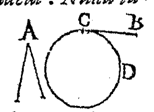
EXISTIMAT *Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:*

C V M *huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.*

P R I M V M *enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cœpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.*

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

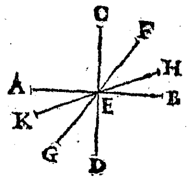
V E R B I *causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, B C D, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus a reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuò ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non*



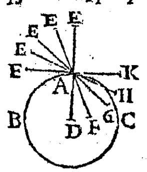
videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstrãda, alijsq;

alijsque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.

NOS *igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo AEC, fiet obtusus A E F: Inde ex recto BEC, fiet acutus BEF.*



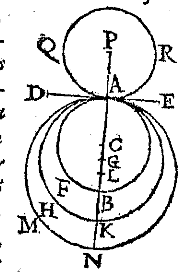
Cumque facta fuerit H K, hinc quidẽ angulus obtusior fiet HEA, inde vero acutior BEH; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tũ enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam AB, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo ABCA, cuius centrum D, linea DE, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circunducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea E D, facta sit E K, & tangat circulum, A c tum linea DE, non tam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq́; spatium C A K. Nam id sola AC, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A, peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque

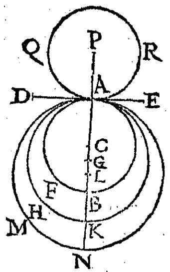


vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora; Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT *enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ, lineam DE, cõtingere ipsum AFBA, circulum: ac propterea DAF, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partẽ huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro AB, centrum G, & spatio GA, describatur alter maior circulus AHKA. Dico FAH, nõ esse quantitatem. Constat quippe circulum AHKA, transire inter rectam DA, & curuam A F, cum sit semidiameter GA, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum AHKA, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea DAH, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium LA, circulus AMNA; Et erit ex eodem consectario, DAM, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum,*





quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque ut MAF, contactus interior circulorum neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium,

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad

punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF, sit quantitas, per secundam earundẽ; neq; DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

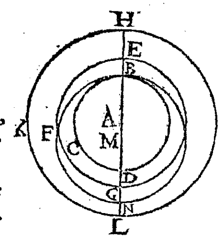
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

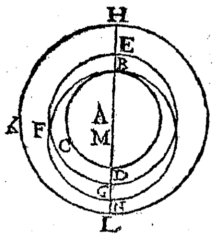
VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.



SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG, & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neq; enim cõtra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento,



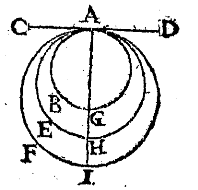
angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonſtrandi ratione vllus eſt paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Eiuſmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeſte maiores, & minores fiunt.

HIS ad hunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, poſito, deſcribatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto eſt circulus E F G E; poſita ſcilicet M B, ſemidiametro æquali ipſi A E; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum F B D, æqualem eſſe angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipſe F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipſum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

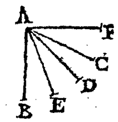
HÆC igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum ſemicirculi recto

recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt à nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

PRIMVM igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem: Immo vero aſſeueramus, quemuis angulum contactus, etſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optime; ſed per lineã circularem. Vt propoſito angulo contactus C A B, ſi per A, deſcribatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus.



Reperitur igitur inæqualitas inter angulos cõtactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi poſſit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor eſt recto B A F; & tamen ſi ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D. Quod ſi alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G, deſcribantur, tangentes rectã C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus

acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec unquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtũ, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

E O D E M modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec unquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

Q V O D autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur;

Ea

Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

S O L V M igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

C O N S T A T ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

D E I N D E non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto

recti-

rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, ut centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent; vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, ut dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem; ut videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, ut vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedimus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secãtibus. Sufficit enim, ut angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, ut non in directum iaceant; ut constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, ut antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem nõ esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, ut diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (ut ex rebus quoque naturalibus exemplum

afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, ut aperte constabit ex propositione 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita ut contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asserit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoq; Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, ut aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, ut in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, homineq; Geometra prorsus indignas.

HÆC porrò mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, ut læsam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem

editionem, hoc est, anno 1579. pro sui defensione Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neq; ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusq; Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoque mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quàm quòd me Peletarius non syncere, sed animose, atque adeo inuidiose fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ sane vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeq; educato alienissima. Verum ea quàm longe absint tum à nostræ Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His vero, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fidẽ faciet, syncere omnia dici, nihil inuidiose, nihil animose: planè vt veritatem quæsitam, non cuiusq; auctoritatem contemptam esse appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendam;

dam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nã in scholio hoc de angulo contactus iurare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quàm vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quòd Peletario ipso non modo inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, næ ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quæ tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nã alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebã: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quòd cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum.

vsurum. Quòd si sophisma contumeliosius verbum est, quam paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atque in propos. 24. lib. 3, quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse a Geometriæ dignitate putat esse alienum, hac solum inductus ratione, quòd superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atque in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falso criminatur; maxime in eo, quòd eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demostrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometræ superpositionem illam vsurpent. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatemve, quæ, vt nota, ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnam vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum

sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per superpositionem, siue translationem linearum, figurarumue posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non solum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusque commentatorem grauissimum, eumque doctissimum Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifestam videre non poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurimæ, eæque præcipuæ propositiones in Geometria demonstrentur ex propos. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, quam per illam figurarum superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometria alienã, quam est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori specie ęqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum ęqualitate.) Idemq; quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur. (Quis enim negauerit, duas superficies esse ęquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt ęqualia? Hæc Peletarius, vt dictæ propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentatus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principijs:

quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurium laterum æqualium cerni potest; quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nitũtur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim noua propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod a posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Prætereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quòd plerunq; secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequentes

tes in sua Apologia adhibuit, a me depellere. Quæ cũ ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidẽ sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) a calumnijs ipsius defendam, omnesque insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius a me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisque percipere. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi a me moderatio adhibebitur, vt modestiæ, quæ hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo,

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quòd in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id a me parum syncere, atq; adeo inuidiose factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factum quispiam iudicaret. Quòd vero propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco *odijs potius, quam ingenijs inter ſe certare videantur. Qui ſit aliorum ſenſus ignoro, equidem, vt ſupra dixi, ita ſum animo, vt ſi quis me alicuius erroris in demonſtrando commiſſi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vt liberius id facerent, enixe rogaui non paucos, & nunc iterum eoſdem, atque etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quam facile poſſit in ſuis quiſque inuentis hallucinari; video (quod ipſe quoque Peletarius in Apologia ſapienter aſſeruit) omnibus hominibus commune eſſe, vt peccent. Deinde quòd in additionibus ad propoſ. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non eſt, quod ægre ferat, cum illæ propoſitiones non ſint ab ipſo inuentæ. Quædam enim multo tempore ante ipſum demonſtratæ ſunt vel a Campano, vel a Proclo, aut Theone, quaſdã vero demonſtraui egomet, antequam ipſius demonſtrationes vidiſſem; quòd adeo manifeſtæ ſint, & faciles, vt nulla probatione egeant, ſed ſint inſtar corollariorum propoſ. 47. Vt nulla prorſus laus, aut gloria illi acceſſura videretur, ſi maxime eas ab ipſo inuentas eſſe (quod tamen verum non eſt) prædicaſſem; cum eas quilibet, modo primoribus labris ſtudia Mathematica deguſtarit, nullo negotio ex illa propoſ. 47. colligere poſſit: Vt non videam, cur tandem eas propoſitiones tanti ponderis eſſe dicat, cum ſint omnium iudicio leuiſſimæ; adeo vt in plerisque earum nec ipſe Peletarius demonſtrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, ſed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non eſt, quod tantopere mihi ſuccenſeat idcirco, quod conſtructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea conſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & ille in ſua mirifice (vt alia peccata taceam) abutitur propoſitione 9. lib. 3. cum ex ea probet, punctum quoddam eſſe centrum circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſanè dixiſſet, punctum illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi oſtenſæ ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarũ duarum linearum æqualium. Nam propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propoſitum ex ipſa conſtructione poſſit concludi, & ex demonſtratis, vt proxime dixi, etiamſi propo-*

ſitio illa vera non eſſet, aut nuſquam demonſtrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propoſitionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus deſcribendus eſt. Quòd ſi ideo ſum reprehendendus, quòd propoſitionem vnam, multo aliter a me, & breuius demonſtratam, ei non aſcripſerim, non video, quo pacto in idem ipſe vitium non incurrat, cum problema hoc (Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris ſupra minorem cognoſcere.) *multis ſeculis ante ipſum a Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolum de cauſa, vt arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema,* (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) *quod in Apologia ſuũ proprium appellat, idemq́ue hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cum tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi rectæ lineæ datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illico conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neque opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idem ſit, quod meæ. Et quod magis mirandum eſt, fatetur Peletarius, ſe meã demonſtrationem vidiſſe, & eam nihilominus ſibi audet, tanquam propriam, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonſtrationes parum honeſte, vt mihi vendicem, ſibi ſubducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaque multo verius, ac iuſtius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare poſſum; cum nunquam propoſitionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolum eius nomen, ob rationes a me expoſitas, reticuerim.*

DEINDE *angulum contactus, & acutum rectilineũ eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, a ſcopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumque angulum planum eſſe; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex* angulo contactus, & alio angulo mixto : quod neque ego, neque vllus vnquam Geometra negauit : Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui hac solum de causa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis; cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis, nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimasse videatur: quamquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longe abest; quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate; aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat; cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur: Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nũquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alterum superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse; sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemque linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquido affirmarit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictũ sit) verũ vsquequaq; non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quãnam linea recta æqualis possit esse circũferẽtiæ cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostẽderimus. Non igit. negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quãtitates a pro-

portionis

portionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodẽ magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilinea; necnon linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq; in defin. 3. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem quintæ defin. lib. 5. recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim verò, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Eucl. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tũ in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt a me est exposita: quinetiam ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quẽ testem produxerat pro se

Aa 4 Peletarius,

Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atque ex hisce duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam sine ratione, quanto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atque iterum odiose percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeo omnes philosophos, quorum est illa vox, nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur a me sciscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum propos. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua a me ipso, confutatur? Quæ si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometriæ scientissimus, idemque Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) *declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometricæ enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quò æquiore animo ferat, eas a me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.*

TERTIO, *quòd existimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in prædicamento Quantitatis, quod neque est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditũ apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res nõ potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlcisceretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cũ impune pugnaret: At quam palæstrice pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur.* (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum iugulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quę vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum ipse

ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum vt hominem faneum, atque adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum; vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret; angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum, idque ita vlciscatur; vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem esse; aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius; eundemque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus; vt quàm suo iure Dialecticæ ignaros alios vocet; appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudique reddendus: Etenim cũ versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) quæ est, Nihil, de minori extremitate, quæ est, angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus*

ctus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio recte sequitur ex præmissis, quarũ prior Peletarij est, nõ mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Cõclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est; nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraque præmissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionẽ factã esse anguli in minore extremitate, vbi dictũ est, angulũ cõtactus angulo cõtactus maiorẽ esse. Nã angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod vt planum fiat, vtemur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissæ veræ sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ recte ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialecticæ, si ab Aristotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque scire, quid aliud sit, angulum cõtactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere.

Nempe

Nempe ea ratione me illud potuiſſe dicere, qua dicimus, angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quàm angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſſime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt, & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quàm ad Geometras. Quòd etiã, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo a me conſilio factum eſt, vt omnes plane viderent, ſyncere me, ac fideliter eius opinionem retuliſſe, nullumq; omnino verbum immutaſſe. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipſe facere in animum induxiſſet. Multo enim minus ſpiſſam Apologiam ſuam facere potuiſſet. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis ſpiſſum efficere? Qui enim parum ſpiſſum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius ſuum librum, qui ſex priorum duntaxat librorum demonſtrationes complectitur, ſatis ſpiſſum ſit arbitratus? Sed eo ſum æquior Peletario, quòd ex ſe alios iudicat. Nam in Apologia ſua, ne inanis rerum videretur, tres demonſtrationes nihil penitus ad eam pertinentes inſerſit: quarum priorem immeritò ſuam propriam facit, vt ſupra dixi: poſteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longè breuius, & dilucidius (niſi meorum me amor fallat) iam pridem demonſtraui, vt mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimenſionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario ſuæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pediſſequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque in primis Petrum Nonium laudatorem ſuum, qui idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontij; aut ſine cauſa id ſe mihi uitio dediſſe fateatur. Quòd ſi, poſtquam tam fideliter eius verba propoſui, Peletarius criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facile ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

*QVARTO vt leniora hæc omittat, illud putat palmare, quòd me laborare oſtendit, vt probem, angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: propterea quòd ſcripſi, æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta octauum pronunciatũ. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus oſtenſus ſit a me æqualis curuilineo, atque adeo eiuſdem generis cum illo, licet non ſit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde quod putem angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quòd ſibi mutuo non congruant. Equidem ſi quid in eo a me peccatum eſſe intelligerem, & peccatum (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum, tota re etiam atq; etiam conſiderata, nihil omnino vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occaſionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiuſdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales ſunt anguli contactus, & ſemicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non item, niſi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos eſſe inæquales inter ſe, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, ſi dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, neceſſe eſt, lineas vnius lineis alterius congruere, ſi alter alteri ſuperponatur. Quòd ſi Peletarius hanc doctrinam oppugnat, ſciat, ſe iam bellum mouere non mihi, ſed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propoſ. 4. idem prorſus docet, quod ego. Ait enim (*Angulorum autem æqualitatem ſumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæteriſque omnibus, qui eiuſdem ſunt ſpeciei, vt in Lunaribus, in Syſtroidibus, atque in in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt; sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorũ recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atque adeo æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib 5. dixi, non rectè à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidẽ ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen, si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque vero hoc vnquam negaui, cum alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra

membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cum hæc membra diuidentia latius pateant, quam Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd non desint, qui primum partiantur Proportionem *in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione* Proportionis *exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, næ scriptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia nõ deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquàm ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialecticæ peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq; hanc; Anguli semicirculorum, quò a maioribus circulis fiunt,* ſiunt, eò ſunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanum ſcribit, nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ. 16. a me ſunt confutatæ, adductis contra ipſas euidentiſſimis inſtantijs. Deinde quòd me perſtringit, quaſi parum intellexerim, quæ ſit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Conſtat enim, eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe; cum has proportiones vbiq; ex ſententia grauiſſimorum ſcriptorum definierim: neq; vero ipſe, vllum peccatum a me ea in re eſſe commiſſum, poterit oſtendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Deniq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in def. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neq; enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.

EX his, quæ diximus, ſatis (vt opinior) apparet, doctiſſimos illos viros, de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarij inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amice putaui. Exiſtimet ille, angulum contactus quantitatem non eſſe, atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certe contrariam ſententiam tuebor, donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces ſunt, nihilque continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ. 16. oſtendi, vbi omnes diſſolui: neque meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ ſupra ex lib. 10. adduxi) reſpondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint, cum non veritatis ſtudio eam Apologiam

ſcripſiſſe,

ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceſſiſſe videretur. Nec vero quiſquam putet, me vnum exiſtimare, angulum contactus vere eſſe angulum, & angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eoſque grauiſſimos laudare poſſum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiuſque commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præſtantiſſimos, atque eruditiſſimos viros non paucos, è quorum numero in primis eſt Franciſcus Candalla ex illuſtriſſima Fluſſatum familia oriundus, qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apertiſſime docet, angulos contingentiæ verè eſſe angulos, ex definitione anguli plani, alioſq; alijs eſſe maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcripſit) abſurde multa ex falſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium profeſſor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarij cōmento prorſus contrariam. Primum itaque ita ſcribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem lib. ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet. (Cornicularis namq; angulus omni recto eſt minor; quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) Quid clarius, quam Proclum hic aſſerere, angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib. 3. ad propoſ. 4. lib. 1. Euclidis ita

ſcribit,

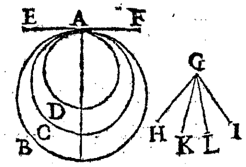
scribit. (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquàm æqualis; Et semicircularis similiter, transitusq; à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumq; propterea fieri a maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse posit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sanè maior absurditas apparet, quo ad sensũ, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, et in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticẽ illius Ellipsis, & Hyperbolæ cõstituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur a circumferentia Ellipsis,

Ellipsis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



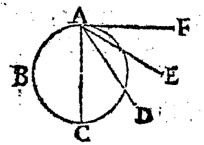
PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

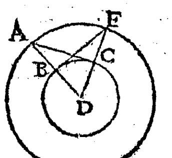
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in



A. Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

16. PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulũ A E, in E. Ducta deniq; recta E D, secante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt [a] & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaq; CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedẽtis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

[a] 7. primi.

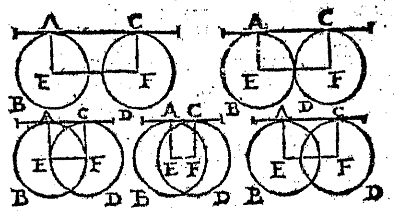
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facilè elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

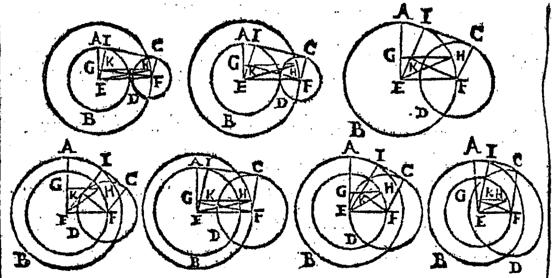


SINT primum duo propositi circuli æquales A B, C D, quorum centra E, & F, recta iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cum enim E A, F C, semidiametri circulorum æqualium sint æquales; [a] & parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint; [b] Erunt quoque E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoque [c] & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.

[a] 28. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. primi.

SINT deinde duo circuli propositi inæquales A B, C D; quorum rursus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea portio A G, semidiametro minoris circuli C D, æqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsque ad circumferentiam circuli F H, proxime descripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atque per F,

 agatur



agatur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abſcindatur enim ex I E, recta I K, ipſi A G, vel ſemidiametro FC, minoris circuli, æqualis, vt ſint reliquæ E G, E K, æquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia ſunt lateribus FE, EK, & anguli ipſis contenti æquales, ex conſtructione: [a] Erunt anguli H G E, F K E, æquales; Ac proinde, cum H G E, rectus ſit, ex conſtructione, erit & F K E, rectus. Rurſus quia C F, I K, æquales ſunt, & parallelæ, ex conſtructione, [b] erunt quoque I C, K F, æquales & parallelæ; Atque propterea angulus EIC, [c] cum æqualis ſit externo F K E, rectus erit; [d] Ideoque & I C F, rectus exiſtet. Quocirca, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta IC, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorum. Quod erat propoſitum.

[a] 4. primi.

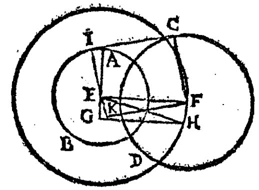
[b] 33. primi.

[c] [d] 29. primi.

[e] 29. primi.

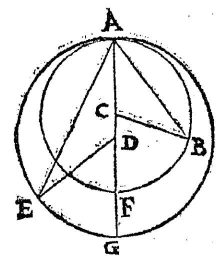
SATIS autem conſtat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinque modis poſſe fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut ſe mutuo contingunt, aut ſe inuicem per centra ſecant, aut non, ita tamen, vt vel centra conſiſtant in communi eorum ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli propoſiti fuerint inæquales, id contingere poſſe ſeptem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipſum tangit, aut ipſum ſecat, ita vt vel centrum eius ſit in circumferentia maioris, vel intra ipſum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris tranſeat, vel centrum minoris ſit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.

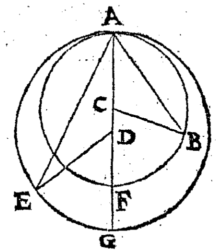


QVONIAM vero, circulis inæqualibus exiſtentibus, initium conſtructionis ſumpſimus ſemper a maiori, ſi quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem conſtructione, demonſtrationeque, niſi quod rectæ AE, IE, protrahendæ ſunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales ſint ſemidiametro FC, maioris circuli; Addito inſuper, angulos H E G, F E K, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales eſſe, quod HEA, FEI, reliqui duorũ rectorum, æquales ſint ex conſtructione. Denique angulum EIC, eſſe rectum, ex 29. propoſ. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus ſit oſtenſus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum exiſtens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, ducere poſſumus; per punctum quidem in circuli circumferentia poſitum, ex coroll. propoſ. 16. per punctum vero extra circulum, ex hac propoſ. 17. Item oſtenſum eſt hoc ſcholio, rectam duci poſſe, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonſtrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, ſiue interius, ſiue exterius, deſcribendus ſit.



SIT ergo primum in circulo A B, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod deſcribendus ſit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, ſumatur in ea quoduis pũctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus deſcribatur AE, qui circulum



AB, in A, tanget; Et si quidem punctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra vero si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetq; circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritq; angulus EAC, acutus cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt, [a] erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq; circulum AB, in A, ex ijs, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

[a] 6. primi.

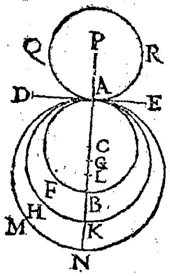
TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA, eaq; secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum AE, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibitq; recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis minores.

minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, [a] erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetq; circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.

[a] 6. primi.

QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetq; circulū QAR, in A, propterea quòd vterq; circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius lib.



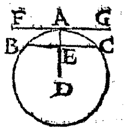
EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctū A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro L, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tāgentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens describendus sit, ad finem huius lib. tr ademus.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam

neam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

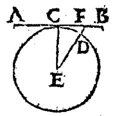


CIRCVLVM enim A B C, cuius centrũ D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. [a] *Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.*

[a] *28. primi.*

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, [b] duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare [c] maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum; quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] *17. primi.*
[c] *19. primi.*

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD,

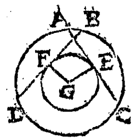
ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto.

[a] *16. tertij.*

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.



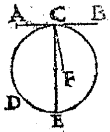
SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamque secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, [b] *quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur* [c] *rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur* [d] *autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.*

[b] *18. tertij.*
[c] *14. tertij.*
[d] *3. tertij.*

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex



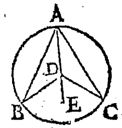
ex C. ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, [a] quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra C E, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 18. tertij.

19. THEOR. 18. PROPOS. 20.

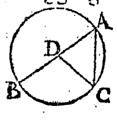
IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus B D C, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam.



Dico angulum B D C, duplum esse anguli B A C. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales sunt, [b] erunt anguli D A B, D B A, æquales: Est autem externus angulus B D E, [c] æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare B D E, duplus erit alterius eorum, vt anguli D A B. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli D A C. Quapropter totus B D C, duplus erit totius B A C. Quãdo.n duæ magnitudines duarum sunt duplæ singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

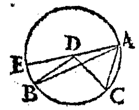
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.



DEINDE non includant rectæ A B, A C, rectas D B, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus B D C, [d] æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo [e] inter se sunt

[d] 32. primi.
[e] 5. primi.

sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



TERTIO recta A B, secet rectam D C, & per centrum D, extendatur recta A E. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin E C, & recta A E, extenditur per centrum; erit angulus E D C, duplus anguli E A C, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli E A B; habent enim hi anguli eandem basin E B. Reliquus igitur angulus B D C, duplus erit reliqui anguli B A C. [a] Qm̃ enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

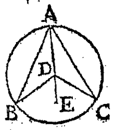
[a] 20. pron.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *in tertia vero partis demonstratione hoc aliud principium adhibitum est:* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5 propos. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari potest ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neque vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut alijs propositionibus, quæ ex hac 20 pendent.*

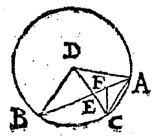
VERVM.

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam [a] tam anguli DAB, DBA, inter se aequales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis aequalis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, aequalis est ijsdem tribus angulis BAC, B, & C; (Nam [b] cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, aequalis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, aequalis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.



ALITER. Quoniam [c] sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt aequales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis aequales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex aequales: ablatisque communibus ADB, ADC, [d] reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, aequalis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.

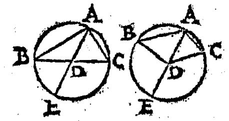
REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, [e] duo anguli DAC, DCA, aequales sunt, estque angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, aequalis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F. [f] angulusque EFC, aequalis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero [g] anguli DAC, DCA, aequales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, aequales. Cum [h] ergo DAB, ipsi DBA, aequalis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, aequalis: Sunt autem, [i] & anguli DEB, FEC, ad verticē E, aequales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, aequales erūt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cū ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositū.



QVOD

a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 3. pron.
e 5. primi.
f 32. primi.
g 5. primi.
h 3. primi.
i 15. primi.

QVOD si rectae BD, CD, in centro angulum non constituāt ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

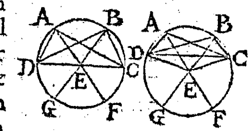


THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

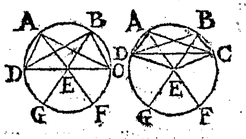
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se aequales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse aequales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectae DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriā, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatae partes anguli E. [b] Quare inter se aequales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse aequales.

SIT deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrū E, rectae AF, BG, & in segmento minori connectantur rectae DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus est anguli DAF,



a 20. tertij.
b 7. pron.
c 20. tertij.



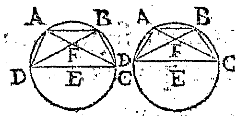
DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF; erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC, [a] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

[a] 7. pron.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: [b] Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

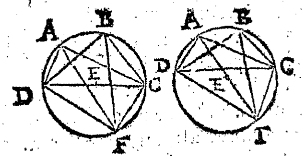
[b] 7. pron.

ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi [c] æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, [d] qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.



[c] 32. primi.
[d] 15. primi.

ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

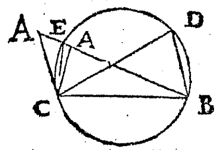


SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, [a] erũt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum, [b] Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod est propositum.

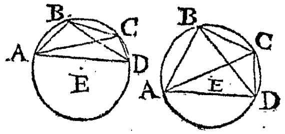
[a] 21. tertij.
[b] 16. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 21.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis.

Cc Ductis



Ductis. n. diametris duabus quadrilateri AC, BD, [a] erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmẽto ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus A B C, æqualis est duobus angulis A C D, C A D. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. [b] Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus [c] duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. [d] Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

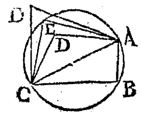
[a] 21. tertij.
[b] 32. primi.
[c] 21. tertij.
[d] 32. primi.

S C H O L I V M.

C O N V E R S V M quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

I N quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur;



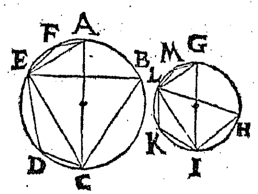
(Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostẽdetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel ultra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita ut non secent rectas CD, AD. Quo facto, [a] erũt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, [b] erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

[a] 22. tertij.
[b] 21. primi.

S A T I S autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, ut theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, ut ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

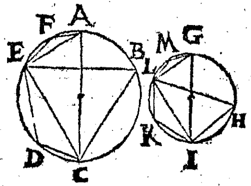
E X hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter usurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

S I ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



S I N T primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus E F A B C, L M G H I, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis utcumque D, B, K, H, iungantur rectæ D C, D E, B C, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex defin. segmẽtorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus

 angulis



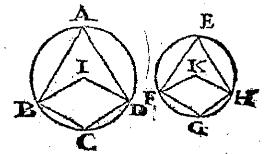
angulis IKL, IHL, sint æquales; [a] 22. tertij. quod tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis: [b] 3. pron. [b] erũt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.

DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus an-
[c] 22. tertij. gulis IKL, LGI, æquales sint; [c] quòd tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmẽtorum similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus an-
[d] 22. tertij. gulis GIL, LMG, æquales sint; [d] quòd tam illi, quàm hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K,



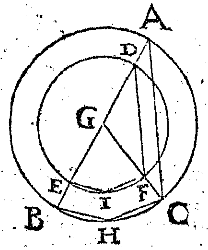
primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituãtur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. [a] Sunt autem [a] 22. tertij.
tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum [b] cum dupli sint anguli I, K, [c] erunt hi [b] 20. tertij.
quoque æquales. Quod est propositum. [c] 6. pron.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint [d] au- [d] 22. tertij.
tem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero
anguli I, K, ad centra sint æquales, [e] erunt quoque eorum di- [e] 7. pron.
midia æqualia hoc est, anguli A, E. Quare vt prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens [f] du- [f] 20. tertij.
plus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; [g] erunt an- [g] 7. pron.
guli EDF, BAC, æquales: Sunt autem duo anguli EDF,

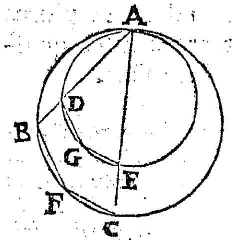


[a] 22.tert. *EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quòd [a] tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC,* [b] 3.pron. *[b] reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

[c] 7.pron. [d] 20.tertij. *BREVIVS sic. Quoniam [c] anguli A, D, æquales sunt, quòd vtriusque [d] duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.*

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuò interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tā arcus DE, BC, quàm AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, [e] 21.tertij. *DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt; quòd [e] tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi an-* [f] 3.pron. *gulo BAC, [f] erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde*

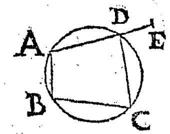
proinde arcus DE, BC, similes erunt, ex defin. segmentorum similium.

BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proximè antecedens theorema, arcus DE, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC, [a] hæc in contactum A, cadit, suntq; eodem pacto [a] 11.tertij. *arcus DE, BC, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.*

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

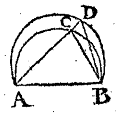


IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulū EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, [b] æquales sint duobus rectis: Item [c] duo B, & D, in quadrilatero, erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC, reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum. [b] 13.primi. [c] 22.tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

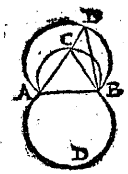
SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad



ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; [a] Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: [b] quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. tertij.
[b] 16. primi.

SCHOLIVM.

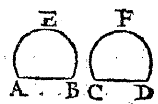


EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23.

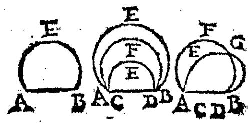
THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB,

segmento



segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cōstituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia; quod est absurdum. [a] Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabūt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [b] Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. tertij.
[b] 10. tertij.

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quam duobus. quod est absurdum. [c] Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.

[c] 10. tertij.

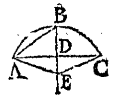
PROBL.

24.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

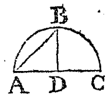
CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur D B, connectaturque AB. Angulus igitur D B A, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit



D A, maior, quam D B, cum DB, perficiens diametrum, [a] sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus D B A, [b] maior erit angulo D A B.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta A E, rectam B D, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum A B C. Ducta enim recta E C, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. [c] Quare bases EA, EC, æquales erunt; [d] Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA; æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erũt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli A B C. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

[a] 7. tertij. [b] 18. primi. [c] 4. primi. [d] 6. primi. [e] 9. tertij.

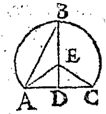


SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis; (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ D A, D B, æquales; quare [f] & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) [g] Erunt igitur rectæ D A, DB, æquales: Erat autem & D C, æqualis ipsi DA, quòd recta A C, secta sit bifariam. Quapropter cum tres

[f] 5. primi. [g] 6. primi.

tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiam [a], erit D, centrum.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eueniet, si segmentum A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; [b] erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadũt, maxima; maior igitur erit quam D A, [c] ideoq; angulus DAB, maior angulo DBA.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam B D, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.



[a] 9. tertij. [b] 7. tertij. [c] 18. primi.

SCHOLIVM.

SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta AC, bifariam in D, erectaq; perpendiculari D B, & ducta AB; aut DB, minor est, quàm DA, aut æqualis, aut maior. Si minor, [d] erit angulus DBA, maior angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi A B D; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

SI vero DB, æqualis est ipsi DA; erunt omnes tres DA, DB, DC, æquales; [e] ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.

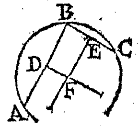
SI denique DB, maior est, quàm DA; [f] erit angulus DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit infra AC, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit supra

[d] 18. primi. [e] 9. tertij. [f] 18. primi.

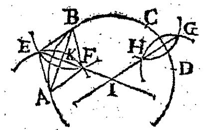
supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si deniq; recta efficiens cũ AB, in A, angulũ æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti



tria puncta vtcunq; A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quã EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, ut in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D,

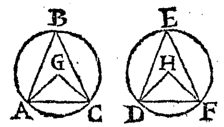


alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF,
a 8. primi. *BF, æquales: [a] Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensi quo-*
b 4. primi. *que æquales; [b] erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales, ideoq; recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per*

per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quòd si quando contingat, rectas EF, GH, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

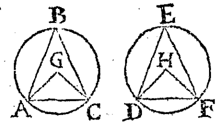


IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur [a] anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ea definitione, segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypothesi; [b] erunt bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, DF, [c] erunt ipsa inter se æqualia. Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter

a 20. tertij.
b 4. primi.
c 24. tertij.

inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, [a] quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erũt, vt prius, rectæ AC, DF, æquales) [b] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

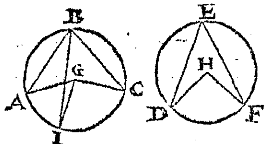


[a] 20. tertij.
[b] 24. tertij.

SCHOLIVM.

HÆC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, [c] dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheria AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheria CI, DF, æquales; Ac propterea AC, maior, quam DF.



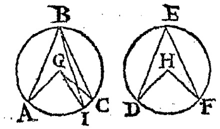
PORRO propositio hæc cum tribus proximè sequentibus intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquido cõstat. Eadem.n. semper demonstratio, quæ duobus, pluribusue circulis accommodatur, locum habet in vno eodemq; circulo.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. [a] Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.



[a] 26. tertij.

INSISTANT deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, [b] eruntque peripheriæ AI, DF, æquales, Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 26. tertij.

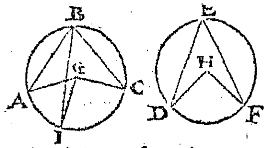
SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniam [c] anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

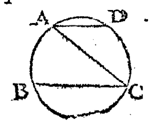
[c] 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maioran-

ior angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quã minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheria D F, ducanturq; rectæ I G, I B, erunt, vt ostensum est, tam anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ducta namq; recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, [a] erunt anguli A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, [b] erunt A D, B C, parallelæ.



[a] 27. tertij.
[b] 27. primi.

SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, esse æquales. Cum enim sint parallelæ A D, B C, ducta recta A C; [c] erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales; Ac proinde [d] arcus A B, D C, quibus insistunt, æquales erunt.

[c] 29. primi.
[d] 26. tertij.

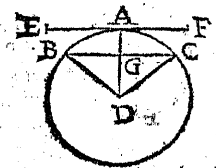
VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo A B C, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam esse rectæ B C, arcum B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante rectam B C, in G, connexisq; rectis D B, D C; [e] erunt anguli A D B, A D C, circumferentijs æqualibus

[e] 27. tertij.

libus A B, A C, insistentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, vtrumque vtrique. [a] Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti, [b] quod D A, perpendicularis sit ad E F. Ergo E F, B C, parallelæ sunt. Quod est propositum.

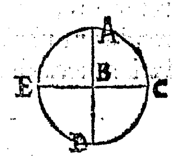


[a] 4. primi.
tertij
[b] 18. primi.

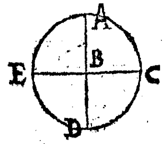
EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.

RECTVS angulus A B C, insistat centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoque anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus D B E, rectus, [c] cũ æqualis sit recto angulo A B C, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea [d] arcus A C, C D, D E, E A, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum A B, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta vero cum eadem A B, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum C D; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.



[c] 15. primi.
[d] 26. tertij.

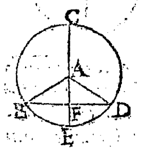


SED insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quàm ACD, & AED, semicirculus est, estq; AC, quadrans; erit tam AE, quàm CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, [a] ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum.

[a] 27. tertij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq; aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumq; vtriq; basisq; BF, basi DF, æqualis ponitur; [b] erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur [c] arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

[b] 8. primi.
[c] 26. tertij.

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoq; BD, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum

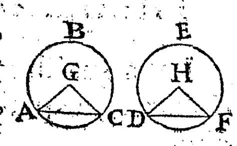
rursum rectis AB, AD; quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; [a] erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vt ostendimus; [b] erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

[a] 27. tertij.
[b] 4. primi.

THEOR. 25. PROPOS. 28.

27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

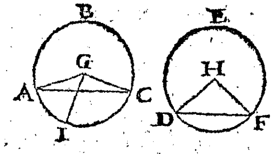


IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, DF, æquales. Igitur [c] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus insistunt, [d] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 8. primi.
[d] 26. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim



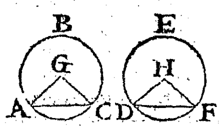
enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Ponitur autem basis AC, maior base DF. Igitur [a] angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHE, æqualis; eritque propterea [b] peripheria CI, peripheria DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, maior, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.

[a] 25. primi.
[b] 26. tertij.

28.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



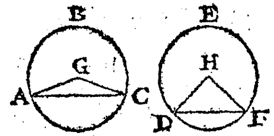
IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, [c] æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur [d] bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 27. tertij.
[d] 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē maior

maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC. DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF, sitq; AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor quā DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [a] erit basis AC, maior base DF, &c.



[a] 4. primi.

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eædem enim locum habent in vno eodemque circulo.

ITAQVE eædem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

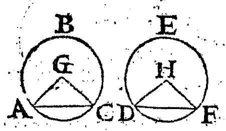
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequētes propositiones demōstrare, nō fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nã si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, [a] *ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia.* [b] *Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.*

[a] *24. tertij.*

[b] *24. tertij.*

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cũ hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales: quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, [a] *erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales; quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales.*

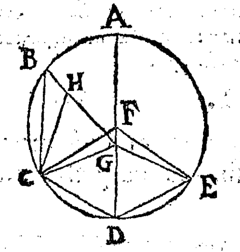
[a] *28. tertij.*

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ in easdẽ partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, cõstituent rectæ illæ ad diametrũ angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, sumatur in diametro A D, punctum G, præter centrum, constituanturque primum duo anguli æquales CGD, E G D. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim

[a] 13. primi. [a] tã duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad cẽtrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, anguliq; FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FC D, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori F C G, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis G C, basi G E, æqualis, & angulus



[b] 26. tertij. C F G, angulo E F G; [b] ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.

DEINDE sint lineæ G C, G E. æquales. Dico & angulos C G D, E G D, æquales esse, & arcus C D, E D. Si enim lineæ G C, G E, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia*: Est autem & basis F C, basi F E, æqualis.

* duobus lateribus ge. gf.

[c] 8. primi. [c] Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui C G D, E G D, erunt æquales. Rursus quia duo latera F C, F G, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, basesq; æquales ponuntur G C, G E; [d] erunt & anguli C F D, E F D, æquales, [e] atque idcirco & arcus C D, E D, æquales erunt. Quod est propositum.

[d] 8. primi.
[e] 26. tertij.

TERTIO sint arcus C D, E D, æquales. Dico & lineas G C, G E, & angulos C G D, E G D, esse æquales. Si enim arcus C D, E D, æquales sunt, [f] erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera F C, F G, duobus lateribus F E, F G, sint æqualia, angulosq; æquales contineant; [g] erunt & bases G C, G E, æquales, & anguli FGC, FGE,

[f] 27. tertij.
[g] 4. primi.

FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

VI.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

IN eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductis enim rectis BC, CD, [a] quoniam recta G B, maior est, quam recta G D, abscindatur GH, ipsi G D; æqualis, iungaturq; recta C H. Quia igitur duo latera G H, G C, duobus lateribus GD, GC, æqualia sunt, angulosq; continent æquales; [b] erunt & bases CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele F C D, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtusus erit. Cum ergo, [c] duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, erit C B H, acutus. Quare [d] latus B C, latere CH, maius erit. Est autem C H, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta B C, maior quoque erit, quàm C D; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus B C, arcu C D, maior erit. Quod erat ostendendum.

[a] 7. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

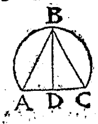
PROBL. 4. PROPOS. 30.

29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, quæ diuisa bifariam in D, erigatur per-

perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erũt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus C D, D B, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur a & bases AB, CB, æquales erunt; Ac propterea b peripheriæ A B, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendũ.



a 4. primi.
b 28. tertij.

PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda semper est recta linea eum subtendens A C, etiamsi ducta non sit; atque ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuò intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta A C, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.

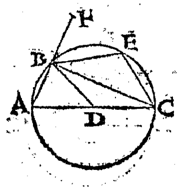
30.

THEOR. 27. PROPOS. 31.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui verò in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturq; in semicirculo angulus ABC; existetque angulus B A C, in maiori segmento C A B; Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus B E C.

B E C. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero B A C, in maiore segmento, minorem recto: & angulum B E C, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehẽsum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehensum recta B C, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectę DA, DB, æquales sunt, a erit angulus D B A, angulo DAB, æqualis. Eadẽ ratione erit angul' DBC, angulo DCB, æqualis, ideoq; tot' angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. b Est autem & angulus F B C, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.



a 5. primi.
b 32. primi.

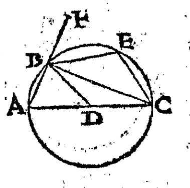
QVONIAM vero in triangulo A B C, c duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus A B C, ostensus rectus: Erit angulus B A C, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

c 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulum descripto, d duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, ostensus est recto minor: Erit B E C, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

d 22. tertij.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum A BC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim e omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuũ est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si deniq; in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcumq; angulum in segmento minore

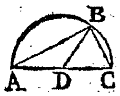


maiore B A C, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non continetur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunq; alius ostendetur esse etiã recto minor, quia [a] aqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide. [a] 21. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, [b] erunt anguli D B A, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus B D C, externus [c] æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cum igitur [d] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorũ dimidiũ, rectus: quod est primũ.

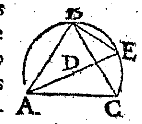


[b] 5. primi. [c] 32. primi. [d] 13. primi.

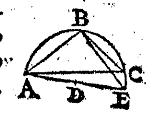
VEL sic. Quoniam [e] angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C; ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca [f] cum tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.

[e] 5. primi. [f] 32. primi.

SIT

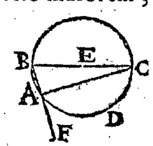


SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus A B E, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hęc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.

IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C, rectus quoq;. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli C A B, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus C A D, segmenti minoris, contentus videlicet sub rectã C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.



[a] 2. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli,

guli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit
a 32. primi. trium angulorum trianguli, a qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

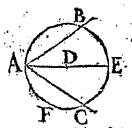
EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter
b 31. tertij. *AE, ducatur recta AB. b Erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur versus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE,*



c 16. tertij. *perueniat, c vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem.*
d 13. tertij. *Quod si vlterius moueatur ad AC, d faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.*

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis; hoc est.

SEG-

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

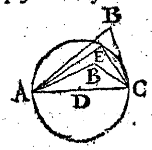
NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Præterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, uel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit, semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior erit. quod hypothesi aduersatur.

QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

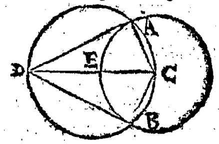
ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum

positum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA, vel DC, circulus describatur AEC, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit [a] angulus AEC, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, [b] vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.



[a] 31. tertij.
[b] 21 primi.

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



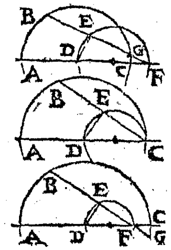
SIT enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iunganturq; rectæ DA, DB. Dico vtramque circulum tangere in ADB. Ductis enim rectis AC, BC, [c] erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quàm hæc ad extremitatem semidiametri CB.

[c] 31. tertij.

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum;

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto vero, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

SIT



SIT circulus ABC, per cuius centrũ D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, intersecat, ducatur recta FB, secans circumferentias in B E G. Dico BE, GE, esse æquales. Ducta enim recta DE, [a] erit angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Igitur [b] recta DE, rectam BG, secat bifariam.

[a] 31. tertij.
[b] 3. tertij.

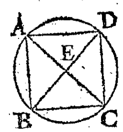
QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit [c] rursum angulus DEC, in semicirculo DEC, rectus; ac [d] propterea BC, in E, secabitur bifariã.

SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [e] angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Quare [f] recta DE, rectam BG, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

[c] 31. tertij.
[d] 3. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 3. tertij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.



IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum ABCD, cuius duo opposita latera AD, BC, parallela sint, & æqualia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectæ AD, BC, parallelæ sint, & æquales, [g] erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est ABCD. Quia vero [h] & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,

[g] 33. primi.
[h] 28. tertij.

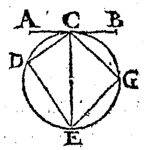
Ee semi-

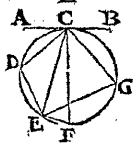
[a] 31. tertij. *semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare[a] anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.*

31. ## THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta C E, per centrum. [b] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [c] Sunt autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti. Igitur angulus A C E, angulo CGE; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est.





[b] 18. tertij.
[c] 31. tertij.

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F: [d] eritque CF, perpendicularis ad A B, [e] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: [f] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus C G E, cum vterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis

[d] 18. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 21. tertij.

æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, [a] duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: [b] Sunt autem & duo anguli ACE, B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. tertij.
[b] 13. primi.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam[c] angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam vero C E, non transeat per centrum, construaturq; figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore, [d] & hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus A C F, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quod[e] angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF,[f] æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget.

[c] 31. tertij.
[d] 21. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 32. primi.

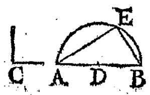
EODEM modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo C D E, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cum enim [g] anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales: [h] Item duo anguli C D E, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt

[g] 13. primi.
[h] 22. tertij.

bunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta A B, circulum tanget.

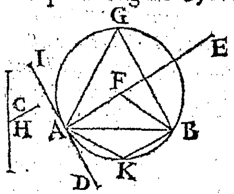
32. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data sit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nã [a] angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

[a] 31. tertij.



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualẽ angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.

[b] 6. primi.
[c] 32. tertij.

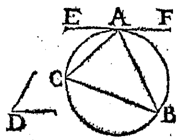
SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo

angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, descriptumque erit super AB, segmentum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus IAB, hoc est, angulus datus H, [a] æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

[a] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



DATVS circulus sit ABC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [b] Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim [c] angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendũ.

[b] 17. tertij.
[c] 32. tertij.

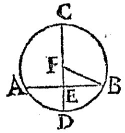
THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

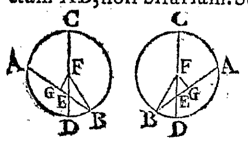
IN circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis A E, E B, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis CE, ED.

Aut enim vtraque linea tranſit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Tranſeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus vnius lineæ æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. ſcripſimus.

TRANSEAT deinde C D, ſola per centrum F, *a 3. tertij.* diuidatque primum rectam A B, bifariam; a ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniã igitur C D, diuiſa eſt per æqualia in F, & *b 5. ſecũdi.* per inæqualia in E; b erit rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ F D, ideoque quadrato rectæ F B, cum rectæ FD, FB, ſint æquales: *c 47. primi.* Eſt autem quadratum rectæ F B, c æquale quadratis rectarum F E, E B. Igitur rectangulum ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quoque erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum ſub CE, ED, æquale quadrato rectæ E B, hoc eſt, rectangulo ſub A E, E B; cum A E, E B, rectæ ſint æquales: ac proinde rectangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. ſcripſimus.

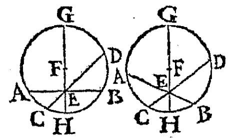


DIVIDAT iam C D, tranſiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ F G, F B; *d 3. tertij.* d eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam vero rectangulum ſub C E, E D, vna cum *e 5. ſecũdi.* quadrato rectæ F E, e æquale eſt quadrato rectę FD, hoc eſt, quadrato rectæ F B: Eſt autem quadratum rectæ F E, *f 47. primi.* f æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum



rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ F G, remanebit rectangulum ſub C E, E D, vna cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulum ſub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ G E, a æquale eſt *a 5. ſecũdi.* eidem quadrato rectæ GB. Igitur rectangulum ſub C E, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt rectangulo ſub AE, EB, vnà cum quadrato eiuſdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale rectangulo ſub A E, E B. quod eſt propoſitum.

TERTIO neutra per centrum tranſeat, ſiue vna illarum bifariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum ſectionis E, recta G H. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE, EH, ſiue A B, diuidatur bifariam, ſiue non: Item rectangulum ſub C E, E D, æquale eſſe quoque eidem rectangulo ſub GE, EH, ſiue C D, ſecta ſit bifariam, ſiue non; Erit rectangulum ſub A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D. quod eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

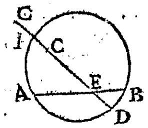
CONVERTI poterit theorema iſtud hoc modo.

SI duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub vnius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, cir-

culus

culus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

SECENT se mutuo rectæ A B, C D, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiã C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D, [a] æquale est rectangulo sub A E, E B; & rectangulum sub C E, E D, *ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B; Erunt rectangula sub* C E, E D, *& sub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum* C. *quod erat propositum.*



[a] *35. tertij.*

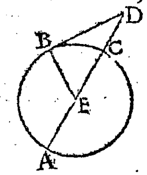
35.

THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

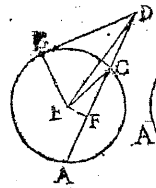
EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo

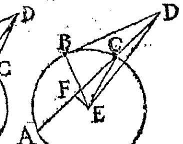
quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ D E, [d] æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum.



[a] *17. tertij.*
[b] *18. tertij.*
[c] *6. secũdi.*
[d] *47. primi.*

NON transeat iam D A, secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [e] eritque E B, ad B D, perpendicularis; [f] & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, [g] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, [h] æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et [i] quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadratum rectæ DE, [k] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum DB, B E. Ablato ergo communi

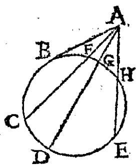




[e] *18. tertij.*
[f] *3. tertij.*
[g] *6. secũdi.*
[h] *47. primi.*
[i] *47. primi.*
[k] *47. primi.*

muni quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale : quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

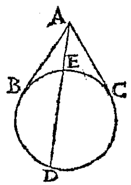
COROLLARIVM. I.



HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, a erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

a 36. tertij.

COROLLARIVM. II.

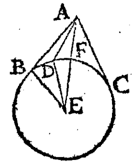


CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, b æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.

b 36. tertij.

COROL-

COROLLARIVM. III.



PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, a erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A E, b erit angulus A D E, maior angulo A B E.

a 18. tertij.

b 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrum E, quæ circulum secet in F, c erit A D, cum sit propinquior minimæ A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Vel sic. Si A B, A D, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque A B, B E, ipsis A D, D E, æquales. quod est absurdum. d Sunt enim maiores A B, B E, quàm A D, D E. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

c 8. tertij.

d 21. primi.

COROLLARIVM. IIII.

ILLVD deniq; constat etiam si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt.

possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntq; ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum. a Duæ enim tantum duci possunt.

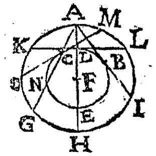
[a] 8. tertij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. b Igitur anguli B, F, æquales erunt: c Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit: atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

[b] 8. primi.
[c] 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans AE, quæ primum per centrum F, transeat, secetque circumferentiam in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namque ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub KD, DL, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; KD, DL. Itaque quoniam rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD, d æquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat propositum.



[d] 35. tertij.

SED

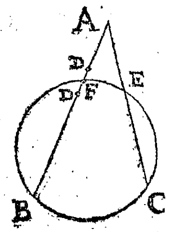
SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, seceté circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, secabunturq; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (quæ ipsi GC, ostensa est æqualis) AC, a æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur.

[a] 35. tertij.

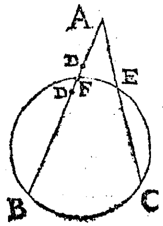
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo fermè conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.

EX puncto enim A, egrediatur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta



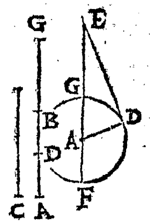
B, C, E.



B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui si dicatur non transire per quartũ punctũ D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub A B, A F, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub A C, A E; & rectangulum sub A B, A D, eidem rectangulo sub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula sub A B, A F, & sub A B, A D, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehẽsum, quadrato alterius sit æquale.



SINT datæ duæ rectæ A B, & C, sitq; ipsi A B, maiori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, minoris. Diuisa recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallũ A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, æqualis, ac deniq; ex E, per A, centrum recta extendatur E F, secans circumferentiam in G. Dico si rectæ A B, adijciatur B G, ipsi E G, æqualis, rectangulum sub tota A G, & G B, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub F E, E G. [a] æquale est quadrato rectæ E D; (quòd E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub F E, E G, æquale rectangulo sua A G, G B, (quòd rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales sint. Sumpta enim

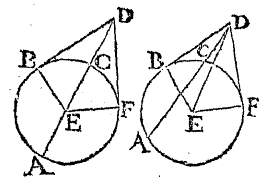
[a] 36. tertij.

est G B, ipsi E G, æqualis, & A B, ipsi F G, æqualis posita est,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum E D, & C, ex constructione.) æquale. Igitur & rectangulum sub A G, G B, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.

NON secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, minori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ A B, maioris æquale sit.

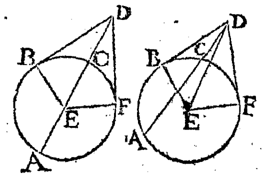
THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.



EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB: Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si D A,

[a] 17. tertij.



si D A, secans non transeat per cẽtrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, DC, [a] æquale est quadratũ rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, DC, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis: [b] erunt anguli D F E, D B E, æquales: [c] Atqui angulus D F E, rectus est, quòd D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib, D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 36. tertij.
[b] 8. primi.
[c] 18. tertij.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.

IN priori figura huius propos. duæ rectæ DB, DF, circulum

A B C F,

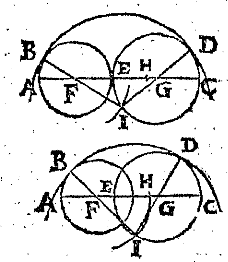
A B C F, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quæcunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, sectum esse bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera BD, DE, duobus lateribus F D, D E, æqualia sint, basisq; E B, basi E F, æqualis; [a] erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.

[a] 8. primi.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturq; recta E D, vt in posteriori figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum sint dimidiatæ partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

SED & sequens problema cum Ioan. Bapt. Benedicto absoluemus, quod ad propos. 17. huius lib. promisimus, debueramusque ibidem demonstrare, nisi memoria excidisset. Est autem eiusmodi.

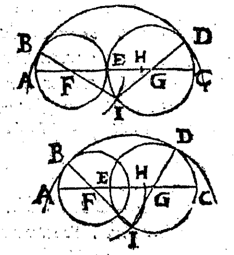
DATIS duobus circulis, quorum vnus non sit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, describere.



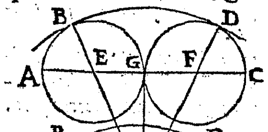
SINT primum duo circuli se mutuò tangentes, aut secãtes inæquales, A B, minor, & CDE, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentijs in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, [b] per contactum E, transibit. Abscissa recta E H, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, cẽtro minoris ad interuallũ rectæ

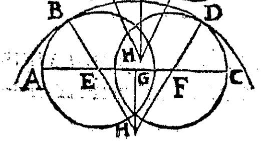
[b] 12. tertij.

 HC,



HC, quæ maior est, q̃ semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in B, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem; erunt totæ CE, IB, æquales. Cũ ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit, erit quoque IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.



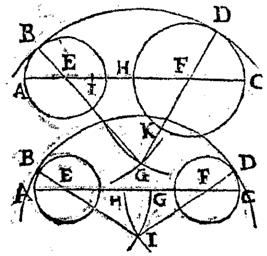


SINT deinde duo circuli se mutuò tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariã in G, (Quãdo circuli se mutuò tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulósque comprehendunt æquales, nimirum rectos;[a] erunt & bases HE, HF, æquales: Et additis semidiametris æqualibus EB, FD, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq́ extra vtrumque circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

[a] 4. primi.

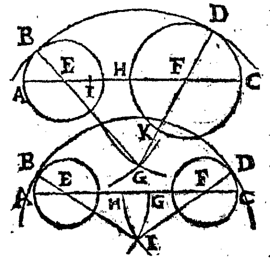
TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sunt inæquales, descri-

describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris CH, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ FI, composita ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est: ablatis æqualibus FK, FH, reliquæ æquales erunt KG, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G per B, descriptus transibit per D, cadetq́ extra vtrumq́ circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib, ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.



VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorũ distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, sumãtur rectæ æquales AG, CH, ita vt quælibet semissem ipsius AC, superet: & ex cẽtro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex cẽtro F, per H, descriptus: ac deniq́ ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, positæ sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq́ extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq́ tanget in B, D. Quod est propositum.

IAM vero eadem arte describemus circulum datæ magnitu-



gnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum usque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindam⁹ AG, CH, reliqua perficiemus, ut proximè dictum est.

PORRO *manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum usque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere utrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex coroll. propos. 13 huius lib.*

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS

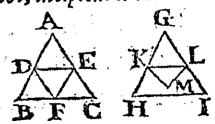
ELEMENTVM QVARTVM

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS *Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non*



 tangit

tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.

II.

SIMILITER & figura circum figurã describi dicitur, cum singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

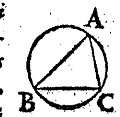
E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM propriè figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib.6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

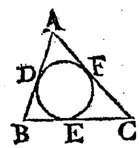
VT



VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulũ in circulo esse inscriptũ. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.



AT vero, si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

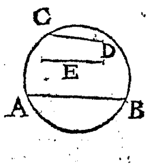
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis

tionis 4. inſcriptus eſſe in triangulo A B C : At vero circulus A B C, in figura definitionis 3. deſcriptus eſſe circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

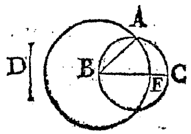


VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

I.

PROBL. I. PROPOS. I.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.



IN circulo A B C, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non ſit diametro circuli dati. Cum enim diameter [a] ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta diametro maior foret, non poſſet in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit

[a] *15. tertij.*

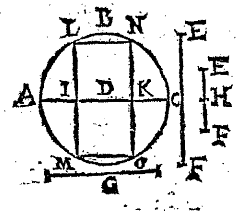
erit B C, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, [a] abſcindatur B E, æqualis ipſi D; & centro B, interuallo autem B E, circulus deſcribatur E A, ſecans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [b] Eſt enim B A, æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidem B E, per conſtructionem. Quare AB, & D, inter ſe æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectâ lineâ accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] *3. primi.*
[b] *15. defin. primi.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela. [c] Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod ſi recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero E F, diametro minor fuerit, ſecta ea bifariam in H, abſcindatur DI, ipſi H E, & D K, ipſi H F, æqualis, ut tota I K, toti EF, ſit æqualis. [d] Et per I, K, ad angulos rectos ipſi A C, ducantur L M, N O; iungaturq; LN. Dico LN, accommodatam eſſe æqualem ipſi EF; & ipſi G, parallelam. Cum enim LM, N O, æqualiter a centro diſtent, [e] ipſæ æquales inter ſe erunt: [f] quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur a recta A C, per centrum D, tranſeunte; erũt & earum ſemiſſes LI, NK, æquales. [g] Quia vero LI, NK, parallelæ etiam ſunt; [h] erunt quoque L N, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis ſit ipſi E F, & parallela ipſi G; Erit etiam L N, æqualis ipſi EF, [i] & ipſi G, parallela.



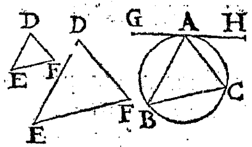
[c] *31. primi.*
[d] *11. primi.*
[e] *14. tertij.*
[f] *3. tertij.*
[g] *28. primi.*
[h] *33. primi.*
[i] *30. primi.*

lela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



SIT in circulo ABC, dato describendum triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E, atq; extendantur rectæ A B, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta A C, in rectam AB, vel inter rectas A B, A G: propterea quòd anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b] Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB, & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, [e] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

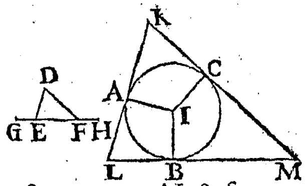
[a] 17. primi.
[b] 13. primi.
[c] 32. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

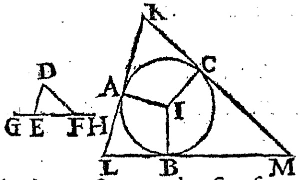
3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulũ æquiangulũ dato triãgulo D E F. Producto latere E F, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus A I B, æqualis angulo DEG; & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli KAC, K CA, duobus rectis minores; ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas AI, CI, quòd hę angulũ constituant in I. Cum enim spatium circa I, equale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F; sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed [a] hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectã lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra IC. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I; atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad

[a] 17. primi.

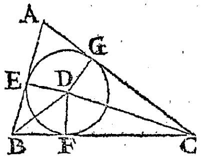


ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit; & anguli IAL, IBL; sunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales.
[a] 13. primi. Cum igitur [a] & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis ęquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo
[b] 32. primi. DFE. [b] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

4.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere.



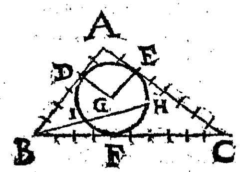
SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus anguli DBF, DFB, trianguli DBF,
[c] 26. primi. vterque vtrique; & latus BD, commune; [c] erunt quoq; latera DE, DF, æqualia. Eademq; ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

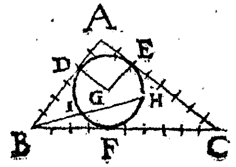
VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; [a] in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate. [a] 20 primi.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum ABC, [b] cui circulus inscribatur DEF, tãgens latera triãguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmẽti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et [c] quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius [b] 4. quarti. [c] 36. tertij.

qua-



quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub BH, BI. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera A B, A C, ſuperare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt; verum etiam exceſſum illum eſſe diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta cõtactuum D, E, rectis GD, GE; [a] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, [b] erunt tam rectæ AE, DG, quàm AD, EG, parallelæ inter ſe: atque idcirco A G, parallelogrammum erit. [c] Quare tam recta A D, ſemidiametro EG, quàm recta AE, ſemidiametro DG, æqualis erit: hoc eſt, duæ rectæ AD, AE, ſimul toti diametro circuli erunt æquales: Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis A D, A E, vt oſtenſum eſt. Nam EC, ipſi F C, & DB, ipſi FB, æqualis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, AC, ſuperant latus B C, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum.

[a] 18. tertij.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.

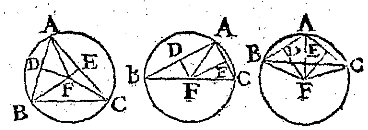
ITAQVE quæuis duo latera ſuperant reliquum duabus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circulũ interijciuntur. Oſtenſum enim eſt, latera AB, AC, ſuperare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

IAM vero his ita demonſtratis, ſi tria latera trianguli cognita ſint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, ſuperare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales ſunt: ſi dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semiſſis ergo huius exceſſus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde ſegmentum E C, dabit ſegmentum C F, vſque ad punctum tertiũ F: Vel reliquũ ſegmentũ DB, dabit ſegmentum BF, ad idem punctũ F. Si igitur ex duobus pũctis D, E, erigantur

erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorũ. Dempto latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus A B, AC, hoc eſt, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4. palmos, totidemque ſegmentum B F, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

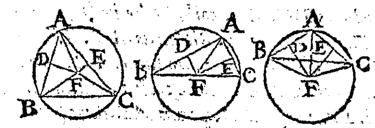
PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.



SIT circulus deſcribendus circa datum triãgulum ABC. Diuidantur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia ſunt lateribus

BD,



[a] 4.primi. BD, DF, trianguli BDF, & angu. ad D, recti: [a] erūt bases F A, F B, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

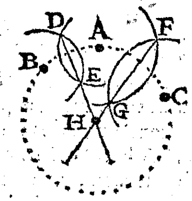
HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat,
[b] 31.tertij. *gulum cadat, [b] omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi vero ſit in*
[c] 31.tertij. *latere B C, [c] angulum B A C, eſſe rectum, quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangu-*
[d] 31.tertij. *lum, [d] angulum B A C, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.*

CONTRA vero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti: ſi vero extra, eſſet angulus oppoſitus, obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus: ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHO-

SCHOLIVM.

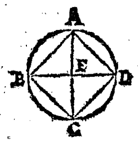
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia tranſeat.



Nam ſi data puncta tribus rectis iungantur, vt conſtituatur triangulum, facile circa ipſum circulus deſcribetur, vt hac propoſ. traditum eſt. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propoſ. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus deſcribantur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, ſi placet, priori illo, alij duo arcus delineentur ſecãtes ſeſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, ſecans rectam DH, in H. Dico H, eſſe centrum circuli tranſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonſtratum eſt in praxi illa propoſitionis 25, lib, 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides oſtendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, deſcripti. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum deſcribere.



SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſeſe ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico A B C D, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum

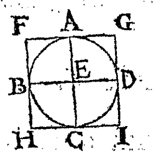
 omnia

[a] 4.primi. omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; [a] erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD; Item rectæ CD, DA; Et rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; [b] erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales; [c] ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autem & [d] anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD; propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

[b] 26.tertij. [c] 29.tertij. [d] 31.tertij.

7\. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.



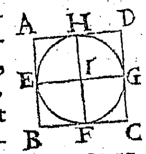
SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineę perpẽdiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, [e] erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. [f] Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, [g] erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur & AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera

[e] 28.primi. [f] 30.primi. [g] 34.primi.

latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

IN dato quadrato circulum describere.



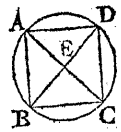
SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. [a] Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID; ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hę inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16, lib. 3. [b] quòd anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus, Quod efficiendum erat.

[a] 33.primi. [b] 29.primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD.

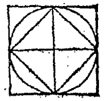


Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sunt; a erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus B A D, rectus. b Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; c erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 5. primi. [b] 32. primi. [c] 6. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



10.

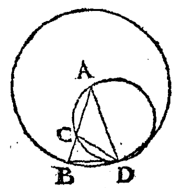
PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quæ d diuidatur in C, ita vt rectangulum sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo vero A B, circulus

[d] 11. secundi.

circulus describatur, in quo a accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, b describatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: c tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, d æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eisdem e æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, f cum A B D, A D B, æquales sint: ac propterea g rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autem B D, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit; h ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis ostensus est duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.



[a] 1. quarti. [b] 5. quarti. [c] 37. tertij. [d] 32. tertij. [e] 32. primi. [f] 5. primi. [g] 6. primi. [h] 5. primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli A B D, i æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres k æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

[i] 32. primi. [k] 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quòd se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam, BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

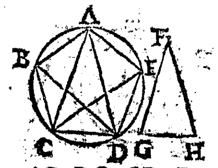
QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquũ habeat quãcunque proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, tradem{us} cùm Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus desiderata est.

11. PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Construatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribatur triãgulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, [c] bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.



Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptũ, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. [a] Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco, [b] & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. [c] Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.

[a] 26. tertij.
[b] 29. tertij.
[c] 27. tertij.

COROLLARIVM.

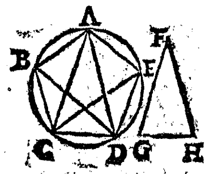
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. [d] Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant; sit autem CAD, per coroll. præcedentis propos. quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.

[d] 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata CD, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [e] Fiat triangulum Isosceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde consti-

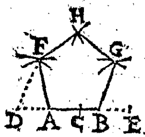
[e] 10. quarti.



constituantur anguli ACD, ADC, æquales angulis G, H, coeantq́; rectæ CA, DA, in A, [a] quæ efficient angulum C A D, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triãgulũ ACD, circulus [b] describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulũ ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

a 32. primi.
b 5. quarti.

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramq́; partem, sintq́; AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniunganturq́; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atque æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quòd autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis AD, æqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorũ rectorũ, nimirum, BAF, reliquas tres quintas duorum rectorũ continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorũ rectorum; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademq́; ratione erit ABG, angulus



penta-

pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessariò in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent. quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

a 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

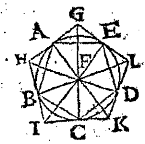
12.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL; erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarũ FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam

b 11. quarti.
c 13. pron.
d 47. primi.

constat



constat ex coroll.2.propos.36.lib.3.cum AH,BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A,& B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; [a] erunt anguli A F H, BFH, æquales. Igitur [b] & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH;& angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI,& angulum BIC, anguli B I F. Cum igitur [c] anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, [d] quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB,BC, erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis B F I, IBF, trianguli IFB,& latus illis adiacens commune BF; [e] erunt & latera BH, BI, æqualia,& anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus G H. rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

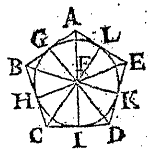
[a] 8. primi.
[b] 4. primi.
[c] 27. tertij.
[d] 28. tertij.
[e] 26. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq; conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

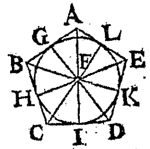
PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.



SIT inscribendus circulus in dato pentagono A BCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, proximi bifariam rectis AF,BF, quę coeant in F. Cum enim anguli B A F, A B F, sint minores duobus rectis; (Nam quia angulus BAE, duobus rectis minor est, erit eius semissis, nimirum angulus BAF, recto minor. Eodemque modo ABF, minor erit recto,) [b] coibũt necessario rectæ AF, BF; atque adeo intra pentagonum. Nam si ducerentur rectæ AC, AD, (quas tamen ducendas non censuimus, ne multitudo linearum confusionem pareret. Quilibet si vult, poterit eas ducere, vel saltem punctis notare.) [c] essent ipsæ inter se æquales, angulique BAC, E A D, æquales etiam, propterea quòd latera BA, BC, lateribus EA, ED, æqualia sunt, æqualesque continent angulos B, E. Hisce ergo angulis ablatis ex angulis æqualibus BAF, EAF, reliqui essent æquales anguli CAF, DAF. Quare recta AF, diuidens in Isoscele ACD, angulum CAD, bifariam, secabit producta basin CD, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. Non aliter demonstrabitur, rectam BF, productam secare

[a] 9. primi.
[b] 13. pron.
[c] 4. primi.



secare bifariam rectam D E. Quocirca necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli C B F: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF,
[a] 4. primi. CBF; [a] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli F A L; estque latus AF,
[b] 26. primi. subtensum vni æqualium angulorum, commune; [b] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3 eo quòd angulos rectos faciant cũ semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

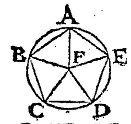
SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 14. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describẽdus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; [a] erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

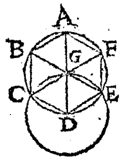
SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrũ G, inſcribendum hexagonũ æquilaterũ, & æquiangulũ. Ducta diametro AD, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui ſecet circulũ datum in pũctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F; quod dico eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter ſe erunt: qui cum [b] æquales ſint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe æquales; quibus cum etiam [d] æquales ſint ad verticẽ anguli FGA, AGB, BGC; erunt ſex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circumferentiæ, quibus inſiſtunt, [f] ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus quia circumferentia B C, æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC, [g] æquales erunt. Similiterque oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, D E F, E F A, æquales eſſe cuilibet iſtorum, quia nimirum quilibet inſiſtit arcui compoſito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inſcripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus inſiſtere. Quare æquiangulum quoque eſt hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 5.primi.
[b] 32.primi.
[c] 13.primi.
[d] 15.primi.
[e] 26.tertij.
[f] 29.tertij.
[g] 27.tertij.

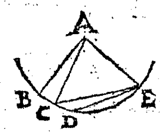
CO-

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, Hexagoni latus æquale eſſe ſemidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale eſt ſemidiametro D G, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta ſunt de pentagono, propoſ. 12.13. & 14. deſcribemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus, & deniq; circa idem hexagonum deſcribemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumſcribatur, inſcribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propoſ. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum deſcribendus ſit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariã. Reliqua deinde perficienda, vt propoſ. 12.13.14. traditur.



PORRO ex his quoque facile demonſtrabimus, dari poſſe triangulum Iſoſceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius ſit; ſiue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus ſit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo ſexta pars ſit DE, & quarta BE. [a] Erit ergo ſubtenſa D E, ſemidiametro æqualis. Et ſi ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quàm D E, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. hoc eſt, maior, quàm ſemidiameter. Quare iunctis duabus ſemidiametris A C, A E, erit triangulum ACE, Iſoſceles, cuius tertium latus C E, vtrouis æqualium AC, AE, maius eſt. Dico idem eſſe oxygonium. Quoniam enim [b] anguli ACE, AEC, æquales ſunt, [c] & ſimul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta A B, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro inſiſtens rectus, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ac proinde C A E, acutus erit. Oxygonium ergo eſt Iſoſceles triangulum A C E, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius. Quod eſt propoſitum.

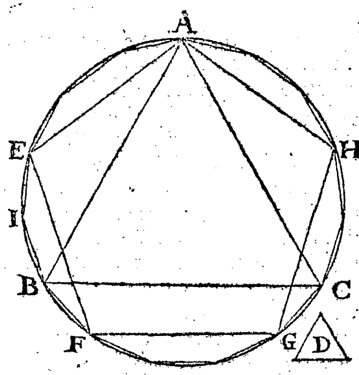
[a] 15.quarti.
[b] 5.primi.
[c] 17.primi.

PROBL.

16.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulũ; [a] inscribatur ei equiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. lib. 1. [b] eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, qui tertia pars est totius circumferentiæ. [c] Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A; [d] eruntque quinque arcus A E, E F, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. [e] Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus

[a] 2. quarti.
[b] 26. vel 28. tertij.
[c] 11. quarti.
[d] 28. tertij.
[e] 30. tertij.

arcus B I, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, [a] æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod [b] & æquiangulum est, cum eius auguli subtendant arcus æquales; compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

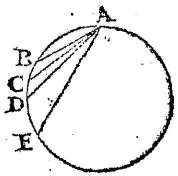
[a] 1. quarti.
[b] 27. tertij.

SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinitæ propemodum figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quòd ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quòd ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumq; æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

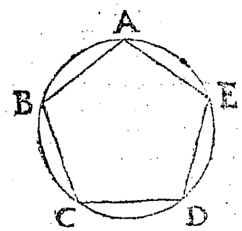
ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimnm, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, [a] erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca [b] anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales erunt: Eodemque modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.

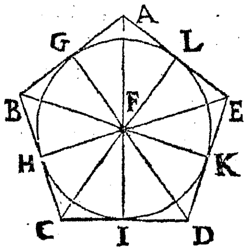


[a] 28. tertij.

[b] 27. tertij.

SIT rursus figura æquilatera ABCDE, quotlibet

 angu-



angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, [a] erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & bases FG, FL, ex centro sint æquales; [b] erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulique illis contenti, ostensi æquales; [c] erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt; cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium lo um occupantibus, vt quarto, sexto, octano, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ

[a] 18. tertij.

[b] 8. primi.

[c] 4. primi.

figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

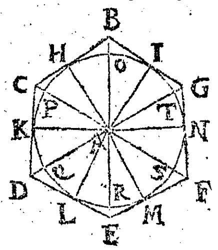
HÆC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulũ æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquàm autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorũ dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupãtibus, secundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est.) cum primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erũt æquales.

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorũ numerus sit par, circulo circumscriptam, esse

 quoque

quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo ut nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, ut Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus CH. Arcui quoque OH, æquales sumātur OI, QK, QL, SM, SN, ita ut sex arcus æquales ad utrasque partes trium semidiametrorum non proximorum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntque ad utrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario rectæ HB, AB, propterea quòd duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, [a] angulosq; continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes; [b] erunt quoque bases BH, BI, & anguli HI, æquales. Cum ergo BHA, rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conuenietque cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores; Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio



[a] 27. tertij.
[b] 4. primi.

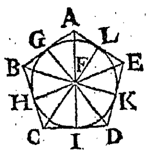
scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, [a] & GAI, CAH, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus TI, PH.) lateraq; AI, AH, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipsi BH, ostensa sit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro AF, producta in F, eritq; ipsi GB, æqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum semidiametro AR, producta conueniet in E, ipsiq; FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & semidiametro AQ, protractæ occurret in D, ipsiq; EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro AP, producta concurret in C, fietq; ipsi DE, æqualis. Quòd autem DK, in eodem puncto C, occurrat semidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta CK, circulum tangeret in K, ut demonstratū est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentē interciperetur ad punctum contactus una linea recta: quod fieri non posse, [c] Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulò ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, ut C, E, G, inter se æquales; omnesq; secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH; [d] tribus angulis trianguli ACH, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Est autem BAH, maior quàm CAH, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior sit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit: qui cum semisses sint totorum angulorum B, C, ut ostensum est; erit totus quoque CBG, toto BCD, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat ostendendum.

[a] 27. tertij.
[b] 26. primi.
[c] 16. tertij.
[d] 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangẽtibus in figuræ inscriptæ angulis, &c. vt factũ est in pentagono propos. 12. tũ necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdẽ propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parẽ quemcunq; vt quartũ, (si enim secundũ occuparet, esset primo proximũ, quod est cõtra hypothesim.) sextum, octauũ, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.



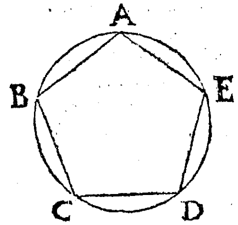
SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, [a] quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales. [b] Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus com-

[a] 18. tertij.

[b] 8. primi.

comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse: ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autem latus FG, vni æqualium angulorum oppositum, commune. [a] Igitur latera quoque AG, BG, æqualia erunt; atque ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidia æquales sunt, erunt quoque tota lineæ AB, AE, æquales. Eademq; ratione AB, BC; & BC, CD; & CD, DE; & DE, EA, æquales erunt. Quamobrem figura ABCDE, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterũ numero impariũ circulo inscripta. Dico eã necessariò esse quoq; æquilaterã. Quoniã enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [b] erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex cõi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dẽpto ergo cõi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqualis erit; ac proinde [c] & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quodq; latus ei, à quo tertiũ est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (cõstitui autẽ quoduis latus potest primũ) æquale erit tertio, tertiũ quinto, quintũ septimo, septimũ nono, &c. atq; in hunc modũ omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt; cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum



[a] 26. primi.

[b] 26. tertij.

[c] 29. tertij.

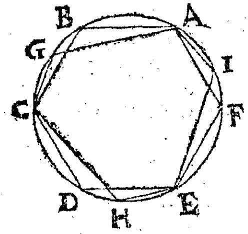
vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

HÆC etiam demonstratio in figuras æquiangulas pariũ laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eò quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locũ parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur; licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cum primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferri non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDEF, in circulo descriptũ; sumaturque in arcu BC, quoduis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH; Itẽ in quinto ab eo arcus æqualis FI; iunganturq; rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum esse, at non æquilaterum.



Quòd enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione [a] 21. tertij. æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, æquales erunt; [b] ac proinde anguli [b] 27. tertij. BCD, GCH, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex angulis hexagoni ABCDEF; æquales sunt, singuli singulis: ideoq; cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoque illud æquiangulum. Quòd autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper vno in medio,

æqualia

æqualia ſint, vt ſupra oſtendimus.

IDEM prorſus eodem modo demonſtrabitur fieri poſſe in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi in circulo inſcribantur prius octogonum, decagonum, & alia figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ.

QVOD ſi figura inſcribatur circulo per doctrinam propoſ. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propoſitionum demonſtrationibus perſpicuum eſt.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inſcribere, talem etiam ſciemus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoque inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propoſ. 12. 13. & 14.

RVRSVS inſcripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtendunt, bifariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inſcribi poſſunt beneficio Iſoſcelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figuræ inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulũ æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, veluti propoſ. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens

habens vtrumque angulorum ad baſin triplum eius, qui ad verticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad verticem, ſi vterque diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

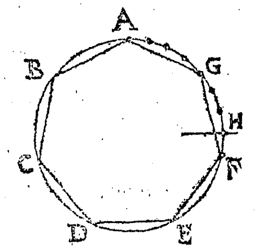
DIVISIO autem hæc angulorum ad baſin in partes æquales perfacilis eſt. Nam ſi angulo ad verticem conſtituantur ad baſin tot anguli æquales ordine quot vnitates ſunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuiſus erit angulus in partes æquales. Verum deſcripto huiuſmodi triangulo Iſoſcele in circulo, deſcribetur figura in circulo ſine diuiſione angulorum ad baſin, ſi baſi accommodentur rectæ æquales in circulo. Baſis enim ſemper eſt vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inſcribentur, beneficio Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratum conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorũ ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem inſiſtit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet ſemel cum contineat, & dimidiatam inſuper eius partem; ſubtendent ipſi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, inſiſtit ſextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli ſimul compoſiti cõtineant ipſum quinquies; propterea quòd quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius inſuper partem. Ita quoque Octogonum, id eſt, tertia figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis habentis vtrumque angulorum ad baſin triplum ſeſquialterum anguli ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Iſoſcelia triangula conſtruantur habentia angulos ad baſin multiplices eorum, qui ad ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribētur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato; de absoluta figurarū rectilinearum omnium descriptione intra circulū, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verū etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

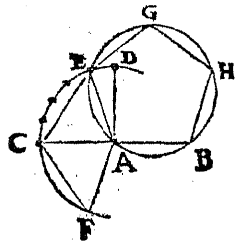
SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H., in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantē A H, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demon-



straturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum distantiam partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniā enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia quælibet pars cum alijs tribus, quarum singulæ in singulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcui A G, quatuor partium abscindantur arcus continuè æquales, eisdemque arcubus rectæ subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, vt ex demonstratis liquet.

IAM vero si supra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad

C, vt



C, vt AC, ipsi AB, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaq; AD, perpendiculari ad AC, vt quadrans sit CD, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrãs CD, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4. sint CE, iungaturque recta AE, quæ ipsi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, æqualia sunt, & bases

[a] 8. primi. item æquales AE, AF; [a] erunt anguli ECA, FCA, æquales.

[b] 5. primi. Cum ergo, [b] & anguli ACE, AEC, sint æquales; erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Est

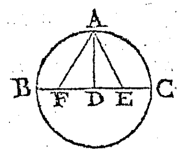
[c] 32. primi. autem [c] externus BAE, eisdem internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus descri-

[d] 1. quarti. batur, & rectis AB, AE, [d] rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt. Si enim aliæ rectæ maiores quàm AB, AE, vel minores subtenderent quintas partes, continerent eæ angulum quoque pentagoni, quod est absurdum: cum minor foret, vel maior angulo pentagoni BAE.

Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt antè diximus.

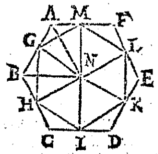
QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, quæ vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



NON erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiãgula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: ita ut idem sit centrum circuli, & figuræ.



SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, M G. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subtendant angulos æquales comprehensos æqualibus
[a] 4. primi. rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, [a] æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam
[b] 13. primi. tres F L M, M L K, K L E, [b] duobus sunt rectis æquales:
[c] 8. primi. Sunt autem A M G, L M F; FLM, KLE, [c] inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli GML, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturque rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri
[d] 8. primi. circuli circa figuram descripti, æquales: [d] Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, NI, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum A B,
[e] 14. tertij. B C, &c. æqualium à centro N; [e] æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.

NEQVE vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum,

dratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, ut inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, ut ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim unus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. unius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. unius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. unius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia unus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. unius recti, quòd omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. unius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. unius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales sunt $\frac{18}{5}$. unius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor æquales sunt $\frac{24}{5}$. unius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinq; æquiualent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. unius recti, atque idcirco unus continet $\frac{6}{5}$. unius recti. &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis unius recti, ut dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales sunt $\frac{30}{7}$. unius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, complectuntur $\frac{70}{7}$. unius recti; fit, ut unus contineat $\frac{10}{7}$. unius recti, hoc est, unum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. unius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. unius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori *neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.*

CAETERVM, benigne Lector, ad finem lib. 6. reperies propositionem ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectantem, quæ omnino necessaria est, vt intra quamlibet figuram, & circa circulus describatur ex doctrina propos. 13. & 14. huius libri. Reiecta autem est ea propos. in lib. 6. quia per incuriam ante propos. 13. huius libri non apposita fuit.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM

DEFINITIONES.

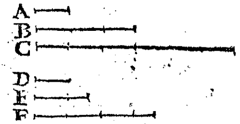
I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ

 maiorem



maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter ſumpta, metitur magnitudinem B; ſexies autem ſumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit à magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem eſt pars apud Mathematicos: Quædam metitur ſuum totum, ita vt aliquoties repetita totum ſuum conſtituat; qualis eſt numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta ipſum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collatus cũ 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici ſolet aliquota, poſterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc ſolum metitur ſuum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri ſuum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. conſtabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars huius numeri 6. ſed duæ partes tertiæ, quales ſunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonſtrationibus huius quinti libri pars ſumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum ſane eſt, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos eſt etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonſtrationibus etiam ipſi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex eſt magnitudinis A; quoniam hæc vtramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex eſt dicenda magni[illegible]; propterea quod hæc neutram illarum metitur. [illegible] ad multiplex refertur, & multiplex ad partem [illegible]minor quantitas menſurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero menſurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perſpicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam eſſe eam, quæ perfecte metitur ſuum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, eſſet iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipſius 6. quod eſt abſurdum.

CÆTERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc eſt, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, ſi plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam, ſecundum quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiuſdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna maior eſt, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua, Ratio, ſeu (vt alijs placet) Proportio. Itaque ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neque linea, & ſuperficies; neque numerus, & linea ſint eiuſdem generis quantitates. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna eſt alba, & altera nigra; aut quod vna eſt calida, & altera frigida, &c.

quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

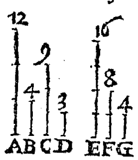
QVANQVAM autem in solis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur



appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi.

intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulò vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quàm in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quãtitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur,

centur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen

tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt a nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio recte posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdiuisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales, siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quãtitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est antem hæc diuisio inanis & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartiẽtem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularẽ, & submultiplicem superpartiẽtem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hæc genera

genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium horum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. Qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTE-

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atque ita si iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero millesima reperienda sit, multiplicandi erunt iidem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiusdem numeri, pri-

mum

mum ad ſeipſum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, ſeptuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones ſeptuplæ.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuplæ.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE Superparticulari.

PROPORTIO ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & inſuper vnitatem, quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3. pedũ, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedũ, &c.

HAEC

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; Si eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c.

VNDE ex ipſomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quas proportio ſuperparticularis quæcunque reperitur hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperparticularem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI cauſa. Si quærantur omnes proportiones ſeſquiſeptimæ; quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atque inter 8. & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centeſima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq; oẽs cuiuſq; proportionis ſuperparticularis cõperientur, si constituantur duo ordines numerorũ, quorũ inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, superior vero à numero proximè maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialteræ.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportiones sesquiseptimæ.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	&c.

Proportiones sesquidecimæ.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	&c.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, nõ est pars vna aliquota numeri

numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quamquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiens vndecimas. Quòd ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, vocabitur proportio ſuperdecupartiens decimastertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones ſuperpartientes vel inter ſe confundantur, vel cum proportionibus ſuperparticularibus, quod à pleriſque factum eſſe deprehendimus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunque proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter vero, quotæ partes eæ ſint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque ſyllaba illa [tri] quando dicitur, ſupertripartiens: poſterior autem per vocem [octauas] expreſſus oſtendit, illas tres partes aliquotas, eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi.

primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter ſe, vt ex lib. 7. conſtabit. Tales ſunt duo illi numeri 3. & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreſſi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſuperſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarum quælibet decimaſexta pars eſt minoris: Non, inquam, recte ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreſſi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſe ipſum, & bis repetitus, ſenarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cum maior quantitas contineat ſemel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio ſuperbipartiens tertias,

 cum

cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$ æquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientiũ cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt supra dictum est. VERBI gratia, si inquirendæ sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque denique ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.

Proportiones superseptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.

DE PROPORTIONE multiplici superparticulari.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando

maior

maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt rectè proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & preterea dimidiatã eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis

partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios; vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ; ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione: Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorẽ proportionis multiplicis expressæ: Vterq; ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones duplæ sesquialteræ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	&c.

Proportiones triplæ sesquiseptimæ.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decuplæ sesquitertiæ.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE

DE PROPORTIONE multiplici superpartiente.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

DISTRIBVITVR autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.

DEINDE quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c.

POSTREMO quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OM-

OMNES proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcumque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato 44. adiiciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij, 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem, primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum. &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	&c.

Pro-

Proportiones duplæ ſuperquintupartientes ſextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	&c.

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	&c
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	&c.

DE PROPORTIONIBVS. *rationalibus minoris inæqualitatis.*

OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inęqualitatis, pręmiſſa tamen ſemper prępoſitione (ſub,) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. *ad* 1. *eſt centupla, ita proportio* 1. *ad* 100. *eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio* 11. *ad* 3. *eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio* 3. *ad* 11. *eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.*

NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica,

(Eſt

(Eſt autem conſtructio facillima, cum numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi poſſint; qualibet autem linea in tranſuerſum procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſum, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum: ita vt hæ lineæ in tranſuerſum nil aliud ſint, quàm progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ ſint primi numeri earundem linearum.) primùm omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. *ſupremæ lineæ ad* 1. *in ſiniſtro latere; ſecunda inter* 18. *ſub* 9. *ad* 2. *ſub* 1; *tertia inter* 27. *eiuſdem lineæ à* 9. *deſcendentis; &* 3. *in ſiniſtro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum eſt.*

DEINDE omnes numeri cuiuſuis proportionis ſuperparticularis ſic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere ſupremo acceptum habet proximè inſequens numerus primam proportionẽ datam: Et ſi per lineam rectam ab hiſce duobus numeris deſcendamus, reperiemus omnes alios numeros eiuſdem proportionis, vt de multiplicibus dictum eſt. Verbi gratia, prima proportio ſeſquioctaua erit 9. *ad* 8. *aliæ vero ordine erunt inter numeros ſub illis poſitos, vt ſecunda inter* 18. *&* 16. *tertia inter* 27. *&* 24. *&c.*

TERTIO ſic reperies omnes proportiones ſuperpartientes cuiuslibet ſpeciei. Poſt denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in ſupremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem ſuperpartientem propoſitam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros ſub illis duobus collocatos. Exempli cauſa, ſi quis omnes numeros proportionis ſuperocto-

partientis

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

partientis undecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem undecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam, 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3, & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proximè insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerum multiplicem

cem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de alijs diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui est 5. Inueniet autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partiũ quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20, inuentum numeret in supremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiusdem speciei continentur sub duobus illis numeris, vt in alijs traditum est.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE vero silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensq; per ipsammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates sunt in primo termino constitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter secundos vero, qui primorum dupli sunt, tot, quot in secundo termino eiusdem progressionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiusdem progressionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri sunt 2. & 1. constituetur progressio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensq; per cõtinuam additionem

vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt, 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmeticæ.

2.	1.									
4.	3.	2.								
6.	5.	4.	3.							
8.	7.	6.	5.	4.						
10.	9.	8.	7.	6.	5.					
12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.				
14.	13.	12.	11.	10	9.	8.	7.			
16.	15.	14	13.	12.	11.	10.	9	8.		
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	
20.	19	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.

QVOD si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quē locũ duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportionũ duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

										10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

9.	8.						
18.	17.	16.					
27.	26.	25.	24.				
36.	35.	34.	33.	32.			
45.	44.	43.	42.	41.	40.		
54.	53.	52.	51.	50.	49.	48.	
63.	62.	61.	60.	59.	58.	57.	56.

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vna cum serie naturali ei superimposita.

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

11. 10. 9. 8. 7.
22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.
33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.
44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30 29. 28.

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progressio à 6. habebitq; differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vnà cum serie naturali numerorum.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisexta cadent 6. medij numeri; inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.
26 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.
39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25 24. 23. 22 21. 20. 19. 18

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarũ super bip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis dupla superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.
16. 15 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.
24. 23. 22. 21 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.
32. 31 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20 19. 18. 17 16. 15. 14. 13. 12

MANI-

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex ijs, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus.

QVONIAM vero non exiguus est vsus Denominatorum proportionũ rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominẽtur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer tot cõtinens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$: subcentuplæ, $\frac{1}{100}$: submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuò est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea quæ dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$; sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentiũ, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est $\frac{2}{3}$; subsesquioctauæ, $\frac{8}{9}$; subsesquimillesimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressa, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator pro-

 portionis

portionis subsesquidecimæ, est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorẽ correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator verò, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportio-
nis

nis superpartientis est vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas, est $1\frac{3}{7}$; supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quòd prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex superioribus exemplis liquidò constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partiũ aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis
ad

ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus, cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortassis, si reperiatur primi vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem; vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota; quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distinctè exprimat & denominatorem

multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturque vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdẽ fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq; ductus sit in 4. denominatorem proportionis quaaruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextæ est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroq; producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis,

nis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atque ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionẽ multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus; quod apertè, & distinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quàm partes aliquotæ; vt perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ super-

superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$; subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoque numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, quæ propositæ respondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiusdem fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartientis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denominanominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiēs decimas: quoniā minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & sic de cæteris.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil prætereà. quod quidem vnitas significat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, siue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distinctè, aperteque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id est, nouem trigesimæprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, minorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc est, nouem partes trigesimæprimæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{20}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones proprijs nominibus appellari possunt, (quis enim proportionē, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometræ plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ aliàs diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio

prio nomine diceret subsupertripartiēs decimas, & sic de aliis.

QVANQVAM autem proportio quælibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: pernecessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quanam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerū continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facilè possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosuis duos numeros, siue minimi sint, siuè non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{19}{24}$. atq; ita de reliquis: qm̄ videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinē vnius numeri ad aliū, vt dictū est.

DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 3. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorē diuiditur, Quotiēs semper est

fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{20}{100}$. id est, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique deneminator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quòd diuisis 48. per 10 Quotiens fit $4\frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris, $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$.) appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoq; reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{9}{10}$. si reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoq; numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erūt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133.

Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7, & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quòd si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quàm duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quàm secundus in tertium, maiorem esse primum, quàm vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eundem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, siue ij primi sint, siue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoq; datam proportionem quintuplam. Ita quoque si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatã à $2\frac{1}{3}$. Item si numerũ 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$.

habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed ut fractiones uitentur, ſi quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in propprtione ſit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis ſit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis eſt 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. ſit numerus 145. qui ad aſſumptũ numerũ 45. proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3, numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si vero per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numeruſque ſumendus à numeratore numeratus. Vt ſi quæratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$. ſit Quotiens 14. ad quẽ acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartientem ſeptimas. Cæterum ſi duo numeri proponantur, cupiatq; quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datã, vel ad quem is datam habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem

minatorem proportionis diuidas. Quòd ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quiſpiam numerus; ſi quidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam proximus datus ad ſecundũ: ſi quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certe, ſiue denominator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum datæ proportionis, productuſque numerus per primum, ſiue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæſitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: ſi quidem denominator notus eſt, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem eſſe maiorem, cuius denominator maior eſt, ſit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium eſt minimus, maximus autem dari non poteſt, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones ſuperparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denominatã à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum

natorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex ijs, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1, (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera; minima vero, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima vero, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquialtera, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt quælibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis, quælibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior est vnitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm vnitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur, vt ex ijs, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem maioris

maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, at minor, vsque ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisq; proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumq; exemplo etiam discatur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositũ, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorẽ diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarum vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quàm proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tam proportio subsuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus pro-

bari poſſunt. Verum vtrumque demonſtrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor eſt maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum maiorem proportionem, quàm idem maior ad medium; & quàm medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem; quàm idem minor ad medium; & quàm medius ad maiorem; vt manifeſtum eſt vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicabimus; vel ex propoſ. 8. huius lib. 5. vbi demonſtrat Euclides, propoſitis duabus quantitatibus inæqualibus, maioris ad tertiam aliquam eſſe maiorem proportionem, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo ſequitur id, quod diximus: nimirum poſitis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Itē maiorem eſſe proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem eſſe proportionē eiuſdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Itē maiorem eſſe proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio eſt. His poſitis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuiſa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 3. diuiſa hic, 8. 7. 6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem eſt, quæ 3. ad 2. hic, 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 7. diuiſa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri poteſt in infinitum. E contrario vero proportio ſubſeſquialtera 4. ad 6. diuiſa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 5. diuiſa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 9. diuiſa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem eſt, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem eſt, quæ 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem eſt, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis.

Idemq;

Idemq; experiri licebit in quibuſuis alijs proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas minores. Et proportio ſubſuperſeptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuiſa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS *ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica ſiue Harmonica.*

ARITHMETICA *proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri per eandē differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla fit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interruptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.*

GEOMETRICA *proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, ſiue Analogia:*

gia:

gia: aliæ vero improprie, cum non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantum 2.3.& 12.18.& 20.30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimũ, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicam: Ipsi verò neque eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri

30.ad

30.ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6.& 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4.& 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quę Diapason consonantiam, siuè Octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6.ad 4. est sesquialtera; & 4.ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6.ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra vero in

Harmonica

Harmonicæ inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

I I.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones vero eorundem æquales.

HARMONICA deniq; neq; differentias, neq; proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

I I I.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus; quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorē 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoq; vnitatibus, quæ cōstituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturque à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic. 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$ ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat,

superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturque à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

I I I I.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorū, quàm summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differētiam minorum, 6. superat. Itē in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometrica, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differẽtiam maiorum. Vt hic, 42. 12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 4.6.9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorũ in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3.4.6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

QVA-

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6.9.8.12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cum eundem habeant excessum 3. vides 6.8.12. Harmonicè proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6.8.9.12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6.8.12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6.9.12. Arithmeticè esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4.6.8.12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4.12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4.12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi

cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, eptimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Prætereà primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
3		11		19		27		35		43		51		59
	7		15		23		31		39		47		55	
3			15			27			39			51		
	7			19			31			43			55	
3				19				35				51		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	540*	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920
5		20		80		320		1280		5120		20480		81920
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5			4*			320			2560			20480		
	10			80			640			5120			40960	
5				80				1280				20480		

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

QVOT

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proportionalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica prop.			Geometrica prop.			Harmonica prop.		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			Producti			Producti		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes			Quotientes			Quotientes		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differētia, n, inter 20, & 28. est 8. at inter 80, & 112. est 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosque diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquadruplas.

Nn DE

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroque dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quòd si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroque minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica vsque ad 2. quæ vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus vtroque minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides.

27. 20. 13. 6.

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus,

siue

siue semissis summæ extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio terminis æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summæ extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summæ extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademque in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quæ semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atque hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summæ extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum cõtinetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 39. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summã omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cũ $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo.

Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur; hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiritur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla; cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponuntur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica. 0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI duo extremi termini noti sint, vnà cum numero terminorum; reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore; diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioque proposita totum habeat in numeris integris; necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur; differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint; eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum datã à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorũ summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si vero extremorum proportio maior sit quàm dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si deniq; minor sit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirũ maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionẽ habent supertripartientem quartas, quæ minor est quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quàm triplam.

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summa accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorũ est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

INTER

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eã differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituẽdorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primo quemq; ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremum vsque ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maior subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certè inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoq; vitantur, etiãsi eos numerus numero mediorũ proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius cõtinua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines insti-

tuantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremũ ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hæc differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuẽdus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemq; 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. semissem terminorum: Quotientem vero 2. in duas partes inæquales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c.

to, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationē, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$$\frac{9}{18}.\ \frac{11}{18}.\ \frac{13}{18}.\ \frac{15}{18}.\ \frac{17}{18}.\ 1\frac{1}{18}.\ 1\frac{3}{18}.\ 1\frac{5}{18}.\ 1\frac{7}{18}.\ 1\frac{9}{18}.$$

Certum autem est, hac ratione varijs modis datum numerū diuidi posse in propositum numerum partium proportionaliū, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summā omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic

Hic etiam manifestum est, varijs modis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED longè facilius (quamquā operatio aliquanto longior sit) idē hoc absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmeticè quomodocumque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eædem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Liquidò

quidò autem hic quoque constare puto, datum numerum varijs modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atque alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC *via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptæ eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.*

ITAQVE, *si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoque proportionem, atque ideò prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes coaceruentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesq́; primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem* $9\frac{6}{11}$ *quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.*

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE *Geometrica.*

I.

DATIS *quibusuis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quòd diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.*

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. *quòd diuisis 8. per 16. Quotiens fiat* $\frac{1}{2}$. *denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quòd diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas* $\frac{1}{2}$. *in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemque cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.*

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR *quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, &*

pro-

productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumq; per proximè præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atque ita in infinitum, vt hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumq; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem si rursum in se duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$. siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM vero si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partē, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatē extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2 sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias,

incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partiū quintarū, qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continuè proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continua.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à sesquialtera diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusque ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri siue continuè, siue non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuò multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri siue continuè, siue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusue est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se æquales.

I I I.

S I, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122, fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiose tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

I I I I.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuò æqualiter

superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi, eodem ordine sumpti; superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum ijsdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidē alij Arithmeticè quoque proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem; secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam. &c.

V.

DVOBVS quibusuis numeris datis, si eorum altero in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primam, secunda ad secundam, &c. vnam eandemque prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiant,

2. 5. 10. 40. & earum qualibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentque easdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmetice quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

VI.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem proportione proportionales. Vt in apposito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

Differentiæ.		32.		48.		72.		108.		162.		243.	
	64.		96.		144.		216.		324.		486.		729.

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem superat ipsomet numero proximè antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differẽtiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continue proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et si Quotientum summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorsus Quotientes ordine conuerso: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sanè incredibile videri possit. Exempli causa. Si

Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hasce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa vero summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes. 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$ in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreatur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summæ quotcumq; terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continuè dupli, siue magni, siuè parui, erunt perpetuò hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{3}{16}$. $8\frac{19}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

EX hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus medijs quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero

terminorū impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimū gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa, æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterū procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{139}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus mediū Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterū productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix

erit

erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9, hoc modo, quæ quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quàm 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

I X.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum: secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres nu. assump.	Primus. 8.		quintup. pri. 40.		Septup. pri. 56.
Quadr. Arit p.	64		1600		3136
Medij Geomet.		320		2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuò superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri borum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuenti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272
Medij Geometr.		640		4480	

Si vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8		200		392
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter se habent.

Quòd

Quòd si hos 8, 200, 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundū ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum triū numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunq; medios continuè proportionales, iucunda sanè, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque ita in seipsam ducta producit tertium terminū, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq; quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus,

agimus, notandæ sunt tres infrascriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. proport.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorū, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum, Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex ex 32. in 2. ſexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. ſeptimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non ſolum verum eſt in propoſita proportione continua dupla, ſed in omnibus alijs, quicunque numerus ſecundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE ſi conſtituere vis quotlibet medios inter duos propoſitos numeros, cape numerum mediorum conſtituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda eſt radix, quæ toties ordine poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero ſecundi ordinis, qui infra numerum mediorum conſtituendorum in ſupremo ordine acceptum ſcriptus eſt. Radices inuentas ſub datis numeris colloca, quamque ſub ſuo, & ab eiſdem aſcende per continuam vtriuſque multiplicationem (ducendo primum quamque radicem inuentam in ſe, deinde in numerum productum, & ſic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſtituas à radicibus incipientes, & ab eiſdem denominatas, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Poſt hæc ſingulos terminos vnius ordinis duc in ſingulos terminos alterius ordinis aduerſos, & oppoſitos, hoc eſt, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde ſub illo in proximum ſupra hunc, &c. Ita vt in vno ordine ſemper deſcendas à ſupremo ad infimum vſque, in altero vero ab infimo vſque ad ſupremum aſcendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli cauſa, ſi inter 9. & 144. inueniendus ſit vnus terminus medio loco proportionalis, ſumemus in primo ordine 1. & ſub hoc termino in ſecundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam eſſe radicem quadratam, quæ videlicet bis poſita, per eius multiplicationẽ vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ ſunt 3 & 12. Et quia vnus tantum medius terminus deſideratur, non ſunt inſtituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſæ radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides. 9. 36. 144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniã hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorem hoc modo, R.q.18. poſteriorem autem ſic. R.q. 288. Hæ autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib. 10. petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R.q.18. & R.q. 288. docebimus in Algebra.

RVRSVS ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij conſtituendi ſint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine ſecundo ſubſcribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda eſt radix, quæ quater poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt 2. & 5. Conſtitues ergo hos ordines triũ terminorum ſub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. ſupremo primi ordinis in 5. infimum ſecundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio ſecundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita eſſe 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarũ,

 multi-

multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotientem multiplicetur: atque ita deinceps, conſtituentur inter duos extremos datos medij termini ijdem, etiamſi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et ſi rurſus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. ſecundum medium: Et denique ſi 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertiũ medium.

PERSPICVVM autem eſt, inter datos quoslibet numeros non ſemper conſtitui poſſe numerum terminorum propoſitum, qui ſint rationales, ſed plerunque inuentos terminos eſſe irrationales: propterea quòd dati numeri non habent ſemper illas radices, quæ extrahendæ ſunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices poſſunt extrahi, quod etiam ſatis eſſet. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc eſt, quæ quater poſitæ eos ſuis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales ſunt, licet non habeant ſimiles radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet.

48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM ſi quis deſideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi ſunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum enim vterque ſi toties ponatur, quot termini medij quærendi ſunt, & adhuc ſemel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini conſtituentur eo modo, quem expoſuimus; hoc eſt, vel inſtituendo ſub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas aſſumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ eſt inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, ſi quis velit duos numeros, inter quos conſtitui poſſint quatuor termini medij rationales in proportione ſuperbipartiente tertias, cuius denominator eſt $1\frac{2}{3}$. ſumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem ſuperbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10 10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriuſque exiſtent hi numeri 7776. & 100000. inter quos conſtitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

X I.

NVMERVM quemcunque datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione ſiue minimos, ſiue non minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namque per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. ſecandus ſit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur 6. termini continuè dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum ſumma eſt 189. & per hanc ſummam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per ſingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficienteſque ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$ qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario sit numerus integer.

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcumque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt in $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in ijsdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeo & differentiæ, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac denique ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42.48.56. quorum extremi, atque adeo & differentiæ, proportionem sesquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertiũ 6. Item secundũ 3. in tertiũ 6. produces 6.12.18. siue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremos 6.18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadẽ omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, siue septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonicè proportionalibus, si posteriores duo, 3.6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9.18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2.3.6.9.18. Harmonicè proportionales: Et si posteriores duo 9.18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2.3.6.9.18.27.54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18.9.6. si minores duo, 9.6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18.6. fient 3.2. atque ita erunt iam quinque termini, 18.9.6.3.2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3.2. diuidãtur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18.9.6.3.2.1.$\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps ꝓgredi licebit in infinitũ.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siuè ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3.4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. quàm tres 4.6.12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3.6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorũ 4.12. triplam. Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis. 10.12.15.20.30. quia & in tribus, 10.12.15. & in tribus, 12.15.20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramq; partem hoc modo continuanda sit, quãdo continuari potest, (neq; enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quoſuis datos duos numeros conſtitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem ſummam, Quotientemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quaeris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem ſummam. Si enim Quotientem ex maiore dato ſubtrahas, reliquus fiet medius terminus quaeſitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſario integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quàm differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorũ datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuiſione differentiae datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum

numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quaeritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5, fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo. 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodius, (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non ſunt impares, vel pares, ſed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſumma eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quaere ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quòd ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad aliud; hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20 Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus

inuentus 238. ad secũdum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quòd si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12.16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12.16.24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16.24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12.16.24.48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24.48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd si quis proponat hos duos numeros, 10.12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos vero duos, 10.11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90.99. tertius 110. At vero ad 3.6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multò magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis propor-

proportionalis Harmonicè, quia differentia amborũ tunc semper maior est minore termino, atque idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3.7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem deniq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12.16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis; necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem; nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros. Nam cum primùm ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus. Constat autẽ numero per vnitatẽ diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri. 6.11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6.11.66. Idem cernitur in hisce numeris. 2.3.6. & 10.19.190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorũ sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt

Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per mediũ factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$, collocandus in medio; & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum

mirum semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens erit is, qui quæritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertiũ 4. minorem vtroq; illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 6. 12. Hanc extẽdemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6. minorẽ tertium adiungamus 3. hoc modo. 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{5}$. Atque in hunc modum decrescet proportionalitas quælibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in

vtramque

vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati præcipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6.8.12.24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deindè 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales, 1.2.3.4.5.6. Numerus, quẽ metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuiso, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque

Atque hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentiæ		2		4	
Propor Har.	6		8		12

Differentiæ.

Differentiæ.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secũdum, producantque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9.3.1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia

quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis. 1.3.9. subtriplis hos qnq; 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4.6.9. Geometricam: 6.9.18. Harmonicã; & 2.6.18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2	3.	$4\frac{1}{2}$	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducãtur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factũ est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60.	48.	40.

quæſiti, vt in quinto ordine apparet.

SI minores numeri cum maioribus comparandi ſint, inuenientur in proportione data ſubſeſquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris eſt ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

POTES quoque, ſi placet, in primo ordine omnes quinque numeros conſtituere, & fractiones, ſi quæ ſint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam ſi numeratores pro illis ſubſtituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæſitos. Vt ſi ſubquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis ſimul 1.4. erit ſummæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et ſi diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducētur ad minimam denominationem, vt in ſecundo ordine. Et fractionibus ſingulis ad vnicam fractionem reuocatis, conſtituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, conſtituentur quinq; minimi numeri quæſiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam ſeruantes, in quibus permiſtæ ſunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipſi ſint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis ſeruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri conſtituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipſis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem conſtituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita conſtitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam ſumma eorum eſt impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè conſtituatur 7. hoc modo 12.7.2. Quòd ſi eorum ſumma fuiſſet par, accepiſſem ſtatim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84.24.14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84.14. qui ſemper ita inuenti pares erunt, ſtatuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæſiti numeri, 84.49.24.14. Nã extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipſos enim quatuor exiſtit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem ſit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquido conſtat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84.49.14. Arithmetica. Ac denique inter 84.24.14. Harmonica ex conſtructione, vt hic vides.

Tres propor-	84.	49.	24.	14.	tionalitates ſimul.				
Geometricè pp.	84.	49.	24.	14	Vel	84.	24.	49.	14.
Arithmet. pp.	84.		49.			14.			
Harmonicè p.	84.		24.			14.			

Rurſus ſit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum ſumma eſt impar, ſint eorũ dupli 6.4. inter quos ſtatuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6.5.4.

Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30.24.20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30.25.24.20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

<table>
<tr><td>Geometricè proport.</td><td>30</td><td>25</td><td>24</td><td>20</td><td>Vel</td><td>30</td><td>24</td><td>25</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Arithmet. proport.</td><td colspan="3">30.</td><td colspan="3">25.</td><td colspan="3">20.</td></tr>
<tr><td>Harmon. proport.</td><td colspan="3">30.</td><td colspan="3">24.</td><td colspan="3">20.</td></tr>
</table>

EOSDEM 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt supra diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admistæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12.9.6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius, Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12.9.8.6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20.15.$13\frac{1}{3}$.10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides. 60. 45. 40. 30.

MINO-

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas mediũ in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16.24.26.36. quorum tres 16.24.36. Geometricè, & tres 16.26.36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$, Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24.36. qui reducentur ad hos integros. 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20.10.8.5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumãtur hi tres 6.8.12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6.7.8.12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6.8.10.12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8.10.12. ex constructione: at soli tres accepti 6.8.12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales,

 quot

quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunq; numeros Arithmeticè proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres summæ binorum minimorũ 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3.6.9.12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	315		630		945		1260
Medij Harm.		420		756		1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datæ proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos, Mediũ Harmonicũ inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datæ proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri 4.12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4.6.9. & duos minimos in eadem, 2.3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum mediũ est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90
Medij Harmo.		48			72		
Medij Arithm.			50			75	

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmeticam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3.4. eorumq; summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42.56.ij, quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	42			56		84			112
Medij Harmo.		48			Vel		96		
Medij Arithm.			49					98	

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic. 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares; vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quàm hi, sint Quotiẽtes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quòd si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positum esse vides.

Tres

Tres Har. pp. inuẽti.	1225			49			25
Medij Arithm.		637			37		
Medij Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS si quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturq; duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summæ. 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri, 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit, vt quemadmodum inter binos horum singuli cadant medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summæ minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimũ numerũ 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus pduxit 1924. 48100, 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arit. pp. inu.	1924			48100			94276
Medij Har.		3700			63700		
Medij Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros propor-

proportionales siue Arithmeticè, siuè Geometricè, siuè Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmeticè, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arithm. proport.	1924				48100				94276
Medij Harmon.		3720				63700			
Medij Geometr.			9620				67340		
Medij Arithmet.				25012				71188	

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quã medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; aliàs non essent duplicandi) nimirum 416. 936, 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. ductorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geome-

Geo. prop.	416				936				2106
Med. Ha.		576				1296			
Med. Geo.			624				1404		
Med. Ar.				676				1521	

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuẽtis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorũ minimi duo numeri 49. 25. quorum summæ 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450. 47138. 24050. Nã inter binos cadẽt bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodũ inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

ar. prop.	1178450				47138				24050
Med. Arit.		612794				35594			
Med. Geo.			235690				33670		
Med. Har.				90650				31850	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1 eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1.

vel

vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuēti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq; propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erūt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales; si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eædem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntque Harmonicè proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.

QVO

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine. DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie. SESQVIALTERI inuersi exhibent superbipartientes: Sesquitertij inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: Tripli sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoq; pariunt

pariunt duplos ſupertripartientes; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes: TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos ſuperquadrupartientes: DVPLI ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes: TRIPLI ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes: atque ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, iſque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex, ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, vbi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus conſtituitur, ſi dati termini ita ſumantur.	Semel	Bis.	Semel
Secundus conſtituitur, ſi termini dati ita ſumantur.		Semel	Semel
Tertius conſtituitur, ſi ita ſumantur dati termini.			Semel

SEQVN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari ſemper minimos terminos cuiuſque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Aequalitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerſo ordine.	1	2	4	2	4	8
Seſquialt. ex duplis inuerſis.	9	6	4	18	12	8
Tripli ordine conuerſo.	1	3	9	2	6	18
Seſqter. ex triplis inuerſis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine cõuerſo.	1	4	16	2	8	32
Seſq̃quar. ex quad. cõuerſis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Seſquialteri inuerſi.	4	6	9	8	12	18
Supb. ex ſeſquial. inuerſis.	25	15	9	50	30	18
Seſquiter. ordine inuerſo.	9	12	16	18	24	32
Super. ex ſeſquit. inuerſis.	49	28	16	98	56	32
Seſq̃quar. cõuerſo ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadrup[illegible] ex [illegible]quiquart[illegible] conuerſis	81	45	25	162	90	50

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM
Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	o	6	4	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. sesqal ex tripl. sesqal	81	18	4	162	36	8

Sesquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli sesqt. ex dup. sesqt.	100	30	9	200	60	18
Quadr. sesqt. ex trip. sesqt.	169	39	9	338	78	18

Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli sesqqua. ex sesqqua.	81	36	16	162	72	32
Trip. sesqq. ex dup sesqq	169	52	16	338	104	32
Quad. sesqq. ex trip. sesqq	289	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM
Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli superbip. ex supbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli supbi ex dup. supbi.	121	33	9	242	66	18
Quadr. supb. ex trip supb.	196	42	9	392	84	18

Suptripart. directo ordine	49	28	16	98	56	32
Dupli suptrip. ex suptrip.	121	44	16	242	88	32
Trip suptrip. ex dup. suptr.	225	60	16	450	120	32
Quad. suptr. ex trip. suptr.	361	76	16	722	152	32

Supquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli supquad ex supqua.	196	70	25	392	140	50
Trip supqua ex dup supq.	301	95	25	722	190	50
Quad. supqua. ex trip. supq	576	120	25	1152	240	50

HIC enim perspicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos esse ex præscripto triplicis præcepti superioris. Vt verbi gratia postremi hi tres. 576. 120. 25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus. 361. 95. 25. Primus 576. coacervatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex 25. semel. Secundus autem 120. conflatus est ex secundo 95. semel, & ex tertio 25. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, vt hæc apposita formula demonstrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, initio facto à terminis æqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO PACTO VICISSIM
Omnis proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus cõstituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualiũ reuocabitur ad aliam proportionem, conferẽdo semper maiores numeros cum minoribus; & hæc rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Aequalitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150.30.6. sextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, proptereaque æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi enim siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25.5.1. Secundi, 50.10.2. Tertij, 75.15.3. Quarti, 100.20.4. Quinti 125.25.5. Sexti autem, 150.30.6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris vsque ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE vero silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricæ, siuè ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim triũ terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur; pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tertio deniq; ipse tertius semel, perspicuè constat ex ijs, quæ paulò ante scripsimus de ortu omniũ proportionũ inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Proportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus fit ex datis terminis ita coacervatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero sic.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porrò interest, utrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, ut ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ
Proportionalitatis ex Geometrica.

Geometr. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arithm. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur: Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1, 1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.

ITAQVE

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla unius termini æqualis: ut perspicuũ est in prioribus duobus exẽplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectã ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, utrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex terminis datis sic in vnũ collectis.	Bis	Ter	Semel
Secundus vero sic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

 HOC

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA

Harmon. proport.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Aequalitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas

litas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT si detur Arithmetica proportionalitas, 3.9.15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererũt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hãc 3.3.3. ex quã oritur secundum superius præceptum.

[illegible]	9	15
3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34.19.4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eoq; subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6.4. ex quã rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

34	19	4
9	6	4

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue adsciscantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua ortum duxit, si termini æquales cum differentia proposita conceruentur; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. sit vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erũt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, ut efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. cõstabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40, ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu periucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

RATIO-

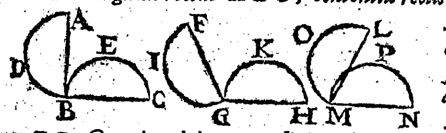
V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnã requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, [a] erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. [a] 20. primi. *Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodẽ modo multa curuilinea cũ rectilineis proportionẽ habebũt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cũ & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur*

maius

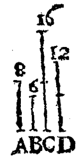
maius eâ lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectã esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualẽ. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus



AB, BC, circa quas semicirculi describãtur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorũ ABD, CBE, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; necnon curuilineum O M P, acuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorũ LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionẽ angulus cõtactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelli-

intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodẽ quantitatis genere videãtur cõprehendi, quales sunt linea finita, & infinita; angulus rectilineus, & angulus cõtactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionũ, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alterã excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasq́; cum non sub eodẽ contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoq; qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulũ rectilineũ, & angulũ contactus, cũ in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant: quorũ vtrumque falsum esse, liquidò ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam ineptè, & quàm falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionẽ duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarũ sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quã multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines



tudines eandem habere proportionem, quàm earũ æque multiplicia C, & D. Non ergò ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus; vt liquido constat ex verbis Euclidis.

VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æqua multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt

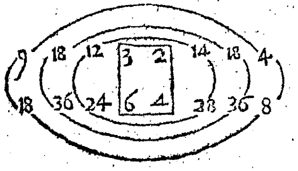
multi-

multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuò, ea ita inter se se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiã F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H: (quod est vtrumque ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo sese ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G, non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut

excessus

excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonã pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionẽ habentibus: quædã æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibusdam æque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, vtrumque ab vtroq; vna deficiant; alia vero vna æqualia sint; alia denique vna excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondẽt; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3.2.6.4. sumanturq; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28, multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumãtur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices, vt noncupli 18, & 36.



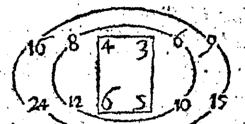
Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij; superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidẽ velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cũ primæ, & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vna æqualia sunt, vel vna excedũt proportionaliter, si ea sumãtur, quæ inter se respondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æque

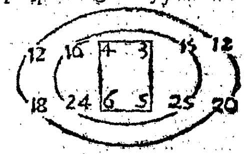
æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secũdæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplica eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt proprijs locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem vero tertiæ nõ deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut deniq; multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplice quartæ non maiorem. Propositis inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocunque intelligeretur, essent ait, quatuor hi numeri

4.3.6.



4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. ſumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item ſecundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, vt dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem ſecundi, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24 ſecundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia accepta vna excedant ſeſe quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter ſe mutuo ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cum proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio vero 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſe ſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati ſe ſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque neceſſario multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus



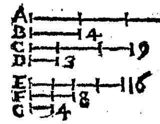
tiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.

CÆTERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.



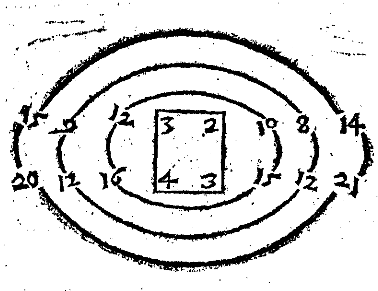
VIII.

CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicē ſecundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem qnartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: vt perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F; secundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primi maius quidem est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D. quartam.

NON est autem necesse, vt quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quã tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, vt secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam; non autem eandem, vt perspicuum est in apposito exemplo.

ITAQVE vt quatuor magnitudines dicãtur proportionales, necesse est, vt æquemultiplicia earũ, iuxta quasuis multiplicationes accepta, vel vnà excedant, vt in 6. defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vnà excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.



QVOD si quando è contrario multiplex primæ deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vnà deficiant ab æque multiplicibus secũdæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcunq; multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac ac quartæ iuxta quamcunq; etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex primæ maius est quàm multiplex secundæ, multiplex quoque tertiæ maius sit quàm multiplex quartæ; quotiescunque vero multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex primæ minus est quàm multiplex secundæ, multiplex etiã tertiæ minus sit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ, at multiplex tertiæ maius non sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniã, inquàm, mirũ alicui uideri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multipliciũ eo ordine sumptorũ nõ statim appareat similitudo proportionũ, dissimilitudoue: aperiendũ videtur hoc loco, quare ita magnitudines tũ proportionales, tũ nõ proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur; sed satis esse, vt nunquam res defin[...]a asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquàm ei concedẽdum sit, angulũ quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarũ æquemultiplicia

tiplicia eam conditionẽ habent. quam explicauit, ita vt nunquàm ei credẽdum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionẽ, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus cõuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione nõ videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò acuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales; & non proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, verè eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandũ ad memoriã est, duplicem esse proportionẽ; Rationalẽ, quæ inter quantitates cõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalẽ, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus dũtaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum. Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ, æquemultiplex est, uel eadẽ pars, vel eædem partes; Vel certè (vt nos ad eam defi. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nõ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines non proportionales sunt, hoc est, prima ad secundã habet maiorem proportionẽ, quàm tertia ad quartã, cũ prima secundæ magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes, quàm tertia quartæ: Vel certè cũ prima secundam sæpius cõtinet, q̃ tertia quartã, siue eadẽ pars, aut partes vtrobiq; supersint, siue non: Vel cũ prima secũdã toties continet, quoties tertia quartã, sed prima maiorẽ insuper partẽ, maioresve partes secundæ includit, quã tertia quartæ. Potuisset, inquã, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac nõ proportionales, si de solis rationalibus ꝓportionibus ageret: quia omnes ꝓportiones magnitudinũ exhiberi possent in numeris, ac ꝓinde definiri, vt numerorum proportiones eædem, vel diuersæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, alijsque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quòd illius est multiplex, vel pars, partesue: Vel certè secundum quòd illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quàm minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est sese conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cum omnis proportio rationalis, siuè magnitudinum commensurabilium, sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris, siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles eãdem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certũ sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magnitudi-

gnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodũ quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eædem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eædem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eædem partes circulorũ, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eædem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existãt. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentiũ æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabiliũ colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubiam reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo nõ tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoq; esse necessario multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem:

Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationẽ, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit, quàm multiplex quarti; Et si illo existente æquali, hic quoq; æqualis sit, & si illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse proportionales: Rursus quia, propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quàm tertius ad quartum, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia, quatuor propositis numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquàm inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommẽsurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex primæ maior est multiplice secundæ; multiplicem vero tertiæ æqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis est multiplici secundæ; multiplicem denique tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quòd multiplex primæ minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quãdoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumq; aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales: præsertim cum magnitudines incommensurabiles, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, vt in 6. defi. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquãdo absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, verissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissimè ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeo hic assumi, vt iam demonstratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationẽ, item secũdi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secũdi, erit quoq; multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit

erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualẽ quoq; esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoq; esse F, quàm H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] *erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:*

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

a 13. septimi.

[b] *Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H;* [c] *Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quàm G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si vero F, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.*

b 17. septimi.

c 13. septimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio pri-mi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur

K, 56.	H 7.		O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O, 60.	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80.		B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 30.

ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium; [a] *erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

a 19. septimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B; eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G; fietq; idcirco

idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per FG, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, [a] erit ut B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et convertendo, ut A, ad B, ita FG, ad E. Quoniam ergo est, ut FG, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse ut C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicuè consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

[a] 19. septimi.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, ut H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D. Eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, ut est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquemultiplices L, MN, ea lege, ut L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quàm I; hoc est, tales æquè multiplices, ut subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, ut in secundo exemplo, vel minor, ut in primo exẽplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, ut E, ad F; & ita est C, ad I, ut F, ad K, ex constructione, quòd I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; [b] erit quoque ex æquo, ut D, ad I, ita E, ad K.

[b] 14. septimi.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, ut E, ad F; erit permutãdo quoque D, ad E, ut C, ad F. Ut autem D, ad E, ita est L, ad MN; quòd idem numerus ipsos

K, 56.	H 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	G, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

D, E, multiplicans fecerit L, M, N, quippe cum L, MN, sumpti sint ipsorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de causa, ut C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, ut L, ad MN, ita I, ad K, & permutando, ut L, ad I, ita MN, ad K.

QVIA ergo est, ut totus L, ad I, ita totus MN, ad K: Et ut D, ex L, ablatus ad eundẽ I, ita E, ex MN, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propos. 22. lib. 7. ut reliquus ex L, ad I, ut reliquus ex MN, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, ut in priori exemplo, vel æqualis, ut in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proximè maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quàm K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, ut in priori exemplo, vel æqualis, ut in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, ut KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C; Item P, ita multiplici ipsius B, ut MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniã ostensum est, ita esse FG, ad E, ut A, ad B, sumptiq; sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, æquemultiplices KH, & O, itẽ ipsorum E, & B, secundi ac quarti, æquemultiplices MN, & P, sequitur ex antecedente propos. si KH, maior est quã MN, ipsum quoque O, maiorem esse quàm P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quàm MN, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cũ O, I, sint æquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumq; sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, ut existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisq; æquemultiplicibus, ut dictum est, multiplex primi nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturq; æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoq; potest, *vt nunquàm multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, multiplex vero tertij non ſit multiplice quarti minor.*

IN eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonſtratumq́; eſt, I, multiplicem primi C, minorem eſſe, quàm L, multiplicem ſecundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem eſſe quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiã multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quàm multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit neceſſario, quàm multiplex quarti: & ſi illo exiſtente æquali, hic quoque ſemper ſit æqualis; illo denique exiſtente minore, hic quoque perpetuo minor ſit: Erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.

E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.

E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, ſumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices qualeſcunq; E, F; Item ſecundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiſcunque etiam hæc ſit multiplicatio. Dico, ſi E, F, multiplices primi ac tertij ſemper ſint vel maiores, quàm G, H, multiplices ſecundi & quarti, vel æquales, vel minores; ita eſſe A, primũ ad B, ſecundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D; fieri poſſet, veluti in antecedente propoſ. demonſtratum eſt, vt E, multiplex primi eſſet aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex ſecundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod eſt contra hypotheſin. Eſt ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat oſtendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertij æquemultiplicibus, item ſecudi & quarti æquemultiplicibus; ſi quando cõtingat, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, ſumptiſque ipſorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipſorum B, & D, ſecundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, ſit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex ſecũdi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem eſſe proportionem primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior eſt E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cum illa ſit proportio maioris inæqualitatis, hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H.[a] Eſt autem, vt E, ad F, ita A, ad C; quòd idem numerus ipſos A, C, multiplicans procreauerit E, & F, quippe cum E, F, æquemultiplices ſint ipſorum A, C; Eademque de cauſa eſt, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod oſtendendum erat.

[a] 17. ſeptimi.

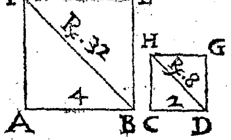
QVOD

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secũdi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus incommensurabilibus, quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis uerum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, rectæ C D, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata A B E F, C D G H; cum diametris BF, D H. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quàm quadratũ diametri DH, quadrati lateris C D, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus A B, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa D H, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior



sit quàm 2. minor autem, quàm 3. &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameterque propterea BF, lateri AB, & diameter D H, lateri C D, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri BF, D H, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH; CHD, semirecti, ideoque inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C; sint æquales, æquiangula erunt triangula ABF, CDH. Quare [a] erit, vt A B, ad BF, ita C D, ad D H; Et permutando, vt AB, ad C D, ita B F, ad DH. Est autem posita recta AB, rectæ CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eò deducti simus, vt credamus diametrum B F, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6: ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt C D, ad D H, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri D H, verè duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris AB, ad diametrum BF, quàm lateris C D, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus A B, lateris C D, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati AE, quàm quadratum diametri DH, quadrati C G, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud huius quadruplum

[a] 4. sexti.

erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubiũ non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præscribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionẽ ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; siue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, verè esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuò consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebræ præceptis versati sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. nõ metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur

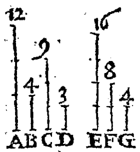
plicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusque ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quàm denominator 7. in se ducatur.) gignaturque fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus, [a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atque eadem ratione demonstrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{100}{25}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

[a] 16. octaui.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines; At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

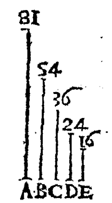


X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam ratione habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI

VELVTI si sint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiã, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponũtur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirũ proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionẽ A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.



QVOD si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eò quòd Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplã proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quãtitatem, ac tertiam reperitur

 quodam-

quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cũ inter primã quantitatẽ, ac tertiã interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non autem intellexit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potiũs eam quis dixerit esse quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur; eò quod bis sit posita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cũ illa minor sit, hæc autem maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatẽ 25. propterea quòd 25. maior est, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare etsi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertium dupla sit proportionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis posita est continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defi. requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem

portionẽ reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdẽ lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendũ sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentiũ librorũ percipiãtur, rebusq; possint materialibus accommodari. Nõ autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, uel tripla, uel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. cõstat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorũ, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorũ triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cum hæc sit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse duplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius vigecuplam decuplæ esse duplam?

CÆTERVM proposita quacunque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proporrionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex

ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud est, quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatã à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: qa denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quò minus proportio 3, ad 192. à $\frac{1}{16}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicats, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	
Num. proport.	3	12	48	192

ne subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ tripla; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferãtur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c, ita vt proportio decupla sit dupla quintuplæ, & sextupla sit tripla duplæ, &c. ostendemus ad propos. 5. lib. 8. tractatumq; est hoc argumẽtum copiose à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mẽte captus erit, qui nõ statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorẽ habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplũ proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiã si è contrario, Agẽs aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. cõflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profecto proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non autẽ illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt,

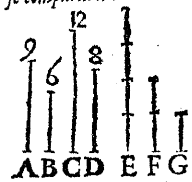
volunt, cum hæc longè minor sit, quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionẽ duarum quantitatum, quibus nullum interponitur mediũ, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicũ medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodũ & quadratũ ex duabus lineis æqualibus cõficitur. Deniq; proportionẽ, cuius quãtitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturã solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, nõ solum in proportionalitate quasuis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quænam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quænam consequẽtia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, simili ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtriq; cõsequenti, vel eodẽ modo maiorẽ, aut minorẽ:



Alias

Alias non haberet vtraq; antecedẽs ad vtramq; consequentem proportionem eãdem. Exemplũ habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tã E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

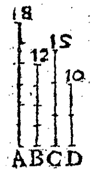
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad

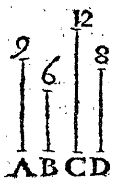
ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius, Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad

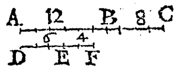


D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum cõsequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequẽs, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; ; Ergo vt AC, ex antecedente & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionẽ rationis cõuersam.

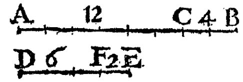
ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totã AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

DIVI-

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB, ea est totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, concludimusq; per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autẽ hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita DF, antecedens ad FE, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius lib.

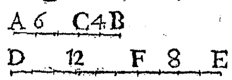
PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

CON-

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.



LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

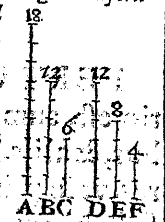
XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad

A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad E, primæ magnitudinis ad vltimam in secũdis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis medijs, colliguntur habere vnam, eandemque inter se se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

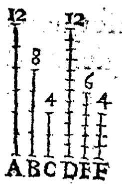
ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eã argumentationẽ esse bonã.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

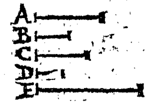
SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nuncupabitur huiuscemodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiã alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

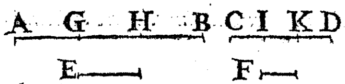
VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictione non implicet, vt Philosophi, loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.



THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinũ E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinũ E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æqua-



E, æquales, & CD, quoq; in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus, constat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales CI, & F, [a] erunt AG, CI, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Necnon HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur; Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. pron.

SCHOLIVM.

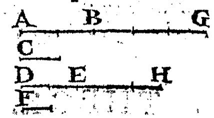
2 *HOC idem demonstrabitur vniuerse propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare; quia ex eo aliæ proportiones demonstrandæ sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT

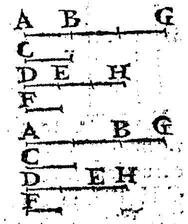
SIT magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, DE, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH; [a] erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH; Ideoque tam multiplex est AB, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 2. pron.

SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota AG, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi DH, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tã prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primam



 & quin-

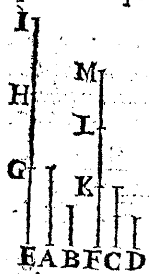
& quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis vniuerse propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundę ęquemultiplex, atq; tertia quartę; sumantur autem ęque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.



SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, ęquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, ęque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL; Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex est KL, sexta eiusdem quartæ D, [a] Erit & EH, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL, tertia quartæ D, vt proximè demonstratum est; sit autem & HI, quinta, tam multiplex secundæ B, quam est LM, sexta multiplex quartæ D; [b] Erit & EI, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quinti.

b 2. quinti.

SCHOLIVM.

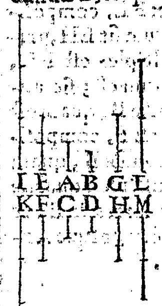
OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumptæ eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem; sed necessarium fuit, ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari possit.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita multiplices sint ipsarũ A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus; sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicẽ primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia; & H, quarta: sumanturq; ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, á multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta, vt diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F; primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ostensæque sunt I, K, æque multi-



[a] 3. quinti.

multiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ, B, D; [a] fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis; & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [b] æquemultiplicia quoq; erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaq; cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoq; esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [c] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem; &c. Quod erat demonstrandum.

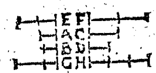
[a] 6. definit. quinti.

[b] 3. quinti.

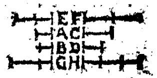
[c] 6. definit. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse cõuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarũ A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [d] necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem



[d] 6. definit. quinti.



minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perſpicuum eſt, ſi è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, ſecundum quamcunque multiplicationẽ ſint ſumpta hæc æque multiplicia. Nam ſi vtraque E, F, minor eſt, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior, quam vtraque E, F: & ſi vtraque E, F, æqualis eſt vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique ſi vtraque E, F, maior eſt, quàm vtraque G, H, erit vice verſa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt æquemultiplicia G, H; Item ſecundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F, oſtenſumq́; eſt, G, H, vel vna excedere E, F, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà deficere, ſecundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur; [a] erit vt B, prima ad A, ſecundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio cum ſuo corollario vera eſt, ſiue duæ magnitudines A, B, ſint eiuſdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, ſiue non, vt ex demonſtratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema ſic conatur demonſtrare. Poſtquam ex 3. propoſ. huius lib. oſtendit I, K, eſſe æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, eſſe æque multiplices magnitudinum B, D, infert ſtatim per conuerſum 6. definitionis, iuxta ſuam expoſitionem, ita eſſe I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonſtratio admodum eſt vitioſa; tum quia ſecundum hunc ſenſum demonſtratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipſe explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod eſt abſurdum: tum etiam, quia eodem modo ſtatim à principio licuiſſet illi inferre, ſic eſſe, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, ſine acceptione nouarũ magnitudinũ æque multiplicium. Non enim eſt maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda eſt ergo huiuſcemodi demonſtratio, vna cum expoſitione 6. definitionis, vt ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiuſdem definitionis conſtat ſolum, ſi I, minor eſt, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem conſtat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuſcunque alijs, ſi ſumantur, pro vt inter ſe reſpondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita eſſe E, primam ad G, ſecundam, vt eſt F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

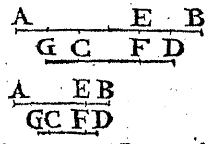
THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex ſit tota AB, totius CD, vt eſt multiplex AE, ablata ablatæ CF, ſiue AE, CF, ablatæ ſint totis AB, CD, commenſurabiles, vt in prima figura, ſiue incommenſurabiles, vt in ſecunda figura. Item ſiue AE, CF, compoſitæ ſint ex eiſdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figuræ, ſiue non ex eiſdem, vt in poſteriori figura.

Dico

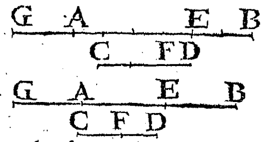
Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ F D, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius G C, vt est AE, multiplex ipsius C F, vel tota A B, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; [a] erit tota A B, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipsius CD, quam est multiplex A E, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; [b] atque idcirco æquales sunt GF, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD; quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt A E, ipsius CF, hoc est, vt tota A B, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.



[a] 1. quinti.

[b] 6. pron.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim G A, ita multiplici ipsius F D, vt est A E, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam A E, G A, æque multiplices sunt ipsarum C F, F D; [c] erit tota G E, sic multiplex totius CD, vt AE, ipsius C F: Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, vt A E, ipsius CF, ex hypothesi. Aeque multiplices sunt igitur G E, A B, ipsius CD; [d] atque adeo inter se æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD: Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius FD, vt AB, ipsius C D. Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, vt AB, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.



[c] 1. quinti.

[d] 6. pron.

SCHO-

SCHOLIVM.

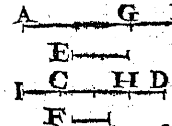
VNIVERSE idipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic est factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

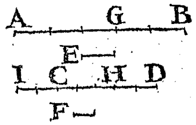
SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ A G, C H, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas G B, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cũ enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoq; AG, eiusdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipsi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima A G, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secũdæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; [a] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt H I, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Aeque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. [b] Ideoq; æquales inter se. Quare, dempta CH, communi, remanebũt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoq; H D, eidem F, æqualis. Quod est propositum.



[a] 2. quinti.

[b] 6. pron.

SIT



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicẽ HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [a] erit, vt prius, AB, ita multiplex ipsius E, vt HI, multiplex est ipsius F. [b] Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quinti.
[b] 6. pron.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

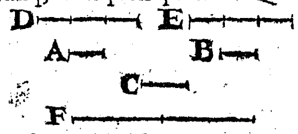
BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD, sunt ipsarum E, F, æquemultiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æquemultiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoque HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

7.
THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; [a] eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunq; multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit vt vtraq; vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; [b] erit in proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna æqualis sit, vel maior; [c] Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

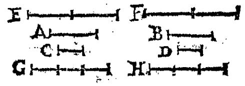
[a] 6. pron.
[b] 6. definit. quinti.
[c] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonstrationem constat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cum illæ sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM

EODEM fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam



C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ, & quartæ; [a] *erunt tam E, & F, inter ſe æquales; quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex primæ deficit à G, multiplice ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit.* [b] *Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod eſt propoſitum.*

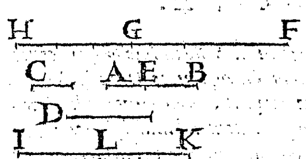
[a] 6. pron.

[b] 6. definit. quinti.

8

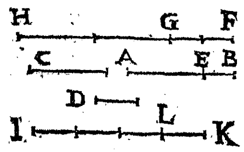
THEOR. 8. PROPOS. 8.

INAEQVALIVM magnitudinũ maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales; A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportioné A B, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At e conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quã D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori

minori C, vt ſit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipſius E B, maior quidem ſit, quam D; At H G, multiplex ipſius A E, non ſit minor eadem D, ſed vel maior, vel æqualis. In priori figura neceſſe fuit ſumere GF, HG, triplas ipſarum EB, AE; quia dupla ipſius AE, eſſet minor, quàm D. Loco triplarum potuiſſent accipi quæcunq; aliæ æquemultiplices maiores. In poſteriori autem figura ſatis

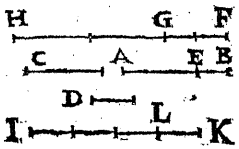


eſt, ſumere ipſarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior eſt, quàm D. Poſſent tamen pro duplis ſumi quæcunq; aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices ſunt duarum BE, EA; [a] erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipſius A E, hoc eſt, ipſius C, cum æquales ſint poſitæ C, & A E. Capiatur quoque ipſius D, multiplex I K, quæ proximè maior ſit, quam H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod ſi dupla maior non fuerit quam H G, ſumatur tripla, vel quadrupla, &c. In poſteriori figura accepta eſt I K, ipſius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor eſt, quám HG, at quadrupla iam maior eſt. Abſciſſa ergo L K, quæ æqualis ſit ipſi D, nõ erit I L, maior, quam H G, (aliàs I K, non eſſet multiplex ipſius D, proximè maior quam H G; ſed & I L, maior quoque eſſet quam H G. Quòd ſi IK, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt, IL, non eſſe maiorem, quàm HG, cum HG, poſita ſit non minor quàm D, hoc eſt, quàm I L,) & idcirco H G, erit vel æqualis ipſi I L, vel maior. Et quia F G, maior eſt poſita quam D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K. Cum ergo H G, non minor ſit quam I L, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota F H, maior quam I K. Itaque cum F H, H G, ſint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque I K, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, maior quam I K, multiplex ſecundæ; At H G, multiplex

[a] 1. quinti.

a 8. definit. quinti.

tertiæ non sit maior, quam I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi; (sumpta enim est I K, multiplex ipsius D, maior quam HG,) [a] erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.



QVONIAM vero è cõtrario I K, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quã H G, multiplex secundę C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non est, quã FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior sit, quam I K, vt ostensum est; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

b 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 8. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionẽ ad quemuis alium angulum, quam angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam FG, multiplex excessus EB, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiusdem naturæ est cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, si ad lineam vnius palmi addi posset vnum punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa composita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ; Item

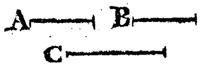
Item quemadmodum si ad figuram planam quamcunq; apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus propriè ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersæ naturæ, vt dictum est. Itaque non solum eæ magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque eæ proprie dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix recte intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsq; diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor. [a] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [b] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 8. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

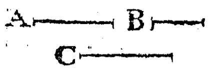
CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [c] haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor esset, quam B, [d] haberet B, maior ad C, maiorẽ proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est cõtra hypothesin. Non est igitur A, æqua-



[c] 7. quinti.
[d] 8. quinti.

A, æqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; [a] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, maior erit quam A; [b] aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quã A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 7. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

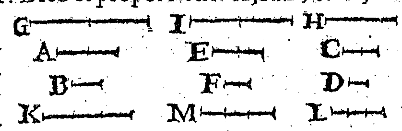
HÆC quoque propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

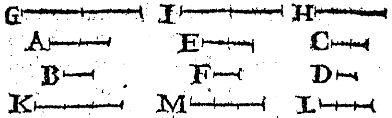
11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se secundum definitionem 6. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C; Item æquemultiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [c] fit, vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secun-



[c] 6. definit. quinti.



secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: [a] Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quam L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundã, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multiplicibus. [a] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

[a] *6. definit. quinti.*

[b] *6. definit. quinti.*

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D; sit autem E, ad F, vt A, ad B, &

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4.
E, 9. F, 6: G, 12. H, 8.

G, ad H, vt C, ad D: erit quoq; E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eædem sunt proportioni A, ad B; [c] erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D. [d] erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

[c] *11. quinti.*

[d] *11. quinti.*

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eædem inter se; sit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eædem inter se.

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6.
G, 12. H, 8: I, 18. K, 12: L, 30. M, 20.

Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad

I, ad K, ita L, ad M. Quare cum proportiones G, ad H, & L, ad M, eædem sint proportioni I, ad K; [a] erunt & ipsæ eadem inter se; ac proinde omnes inter se eædem erunt. Eadem ratio est de pluribus proportionibus.

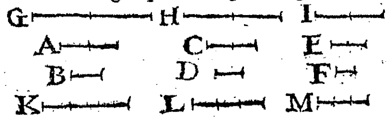
[a] *11. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, pportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F.



Dico vt est vna antecedentium ad vnam cõsequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, [b] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirũ vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [c] fit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et si G, ęqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Quare si G, minor est, vel æqualis, vel maior quã K, erũt & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores, vel ęquales, vel maiores. [d] Quocirca vt est

[b] *1. quinti.*

[c] *6. definit. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

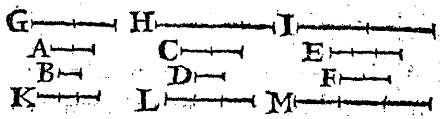
 A, prima

A, prima ad B, secundã ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

13.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad C, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, E: Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, cõtingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, [b] non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor, quod maior ponatur proportio C, primæ ad D,

a 6. definit. quinti.

b 8. definit. quinti.

secundam, quam E, tertiæ ad F, quartem. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. [a] Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [b] fit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. [c] Sed si H, deficit ab L, vel ei æqualis est, etiam G, deficiet a K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K; [d] atque idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F; Quod est propositum.

b 8. definit. quinti.

c 6. definit. quinti.

d 8. definit. quinti.

EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

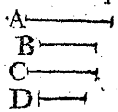
QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secũdam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam;

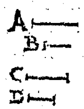
tam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quam C, fore quoq; B, maiorem quam D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D. Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſi D. Sit primum A, maior quam C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniã igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior eſt, vt oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam: [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam. [c] Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod eſt propoſitum.



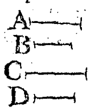
[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipſi C; [d] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.



[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam; [i] Ideoque B, minor erit, quam D. quod eſt propoſitum. Si prima igitur



[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

tur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cum enim B, maior ſit quàm D; [a] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam; [b] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam: [c] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi C, eſſe æqualem. Cum enim B, ipſi D, ſit æqualis; [d] erit C, ad B, vt C, ad D: Eſt autem quoque A, ad B, vt C, ad D. [e] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; [f] propterea A, ipſi C, æqualis erit. quod eſt propoſitum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

TERTIO ſit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quàm C. Cum enim B, minor ſit quàm D; [g] erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam, [h] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam. [i] Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

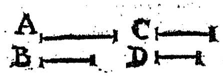
[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

NON demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis vel minor, quam ſecunda, tertiã quoq; maiorẽ eſſe, vel ęqualẽ, vel minorẽ, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq; Geometrarũ tũ veterum, tum recentiorũ vtuntur) quia id perſpicuũ eſt ob ſimilitudinẽ proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraq; eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentẽ magnitudinem, id eſt, primã ac tertiã, maiorẽ eſſe vtraq; magnitudine conſequẽte, hoc eſt, ſecũda ac quarta: Si vero vtraq; proportio eſt æqualitatis, vtrãq; magnitudinẽ antecedentem vtriq; conſequenti æqualem eſſe.

Si

Si denique vtraq; proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est quã B, secunda erit & C, tertia maior quã D, quarta: Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor.



Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.

15.
THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B; [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK; & HD, ad KF, vt A, ad B; [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quo circa vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul. quod est propositum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

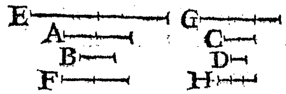
[a] *7. quinti.* [b] *11. quinti.* [c] *12. quinti.*

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices E, F; Item ipsarum C, D, tertiæ & quartę, ęque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; [b] erũt & ipsæ inter se eædem.



Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipsæ eædem inter se: hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunq; multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

[a] *15. quinti.* [b] *11. quinti.* [c] *11. quinti.* [d] *14. quinti.* [e] *6. definit. quinti.*

SCHOLIVM.

PORRO demonstratio huius propos. locũ solũ habet, quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ

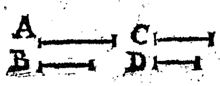
A, B.

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum exsistunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cũ Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



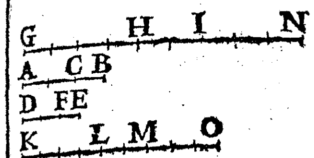
a 16. quinti. *[a] Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.*
b 14. quinti. *[b] Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

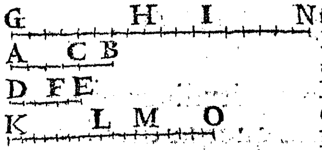
THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; [a] eritque GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius a 1. quinti.
AC, hoc est, vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, [b] ita quoque multiplex est KM, ipsius b 1. quinti.
DE. Aeque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; [c] erit & HN, sic mul- c 2. quinti.
tiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ, AB, DE; Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, [d] fit, d 6. definit. quinti.
vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundę CB, etiam KM, multiplex tertię DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit,

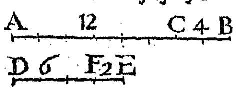


excedit, excedat. Quod si deficiat tam G I, ab H N, quã K M, ab L O; ablatis cõmunibus H I, L M, deficiet quoque G H, ab I N, & K L, ab M O. Et si G I, æqualis fuerit ipsi H N, & K M, ipsi L O; ablatis communibus H I, L M, erit & G H, æqualis ipsi I N, & K L, ipsi M O. Et si denique G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O; ablatis communibus HI, LM, excedet quoque G H, ipsam I N, & K L, ipsam M O. Quam ob rem cum G H, K L, sumptæ sint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æque multiplices secundæ C B, & quartæ F E; ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel vna æquales esse, vel vna excedere; [a] Erit A C, prima ad C B, secundam, vt D F, tertia ad F E, quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] *6. definit. quinti.*

S C H O L I V M.

E X his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; esse quoque vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. quod ita patet. Quoniam est vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; [b] erit diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur conuertendo erit quoque, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod est propositum.



[b] *17. quinti.*

N V L L O etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quã ad eandẽ defi. 15. Diuisionẽ rationis cõtrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus.

strauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. [a] Ergo diuidendo; vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.

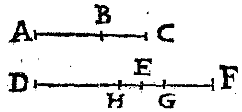
[a] *17. quinti.*

THEOR. 18. PROPOS. 18.

18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. Si enim non est, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquã magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F; Sed vt A B, ad B C, ita posita quoque est D E, ad E F. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad G F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D G, prima maior sit, quàm D E, tertia, [d] erit quoque G F, secunda maior quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.



[b] *17. quinti.*
[c] *11. quinti.*
[d] *14. quinti.*

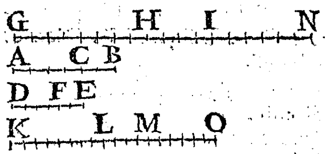
HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F;

[a] 17. quinti. [b] 11. quinti. [c] 14. quinti.

HF;[a] erit diuidẽdo quoq; vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita poſita etiã eſt DE, ad E F. [b] Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartã. Cum ergo DH, prima minor ſit quàm D E, tertia, [c] erit quoque H E, ſecunda minor quàm E F, quarta, totum quàm pars, quod eſt abſurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipſa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipſam E F, erit, vt A C, ad B C. quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem demonſtrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propoſitionem Euclides demonſtrauit, hoc videlicet modo. Sint diuiſæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc eſt, AC, ad C B, vt D F, ad F E. Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, vt AB, quidẽ ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, vt in antecedente propoſitione, ipſarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM; Item ipſarum CB, FE, aliæ æque multiplices IN, MO; [d] *eruntque rurſus G I, K M, ipſarum A B, D E, æque multiplices.* [e] *Item H N, L O, ipſarum C B, F E, vt in præcedenti Theoremate oſtenſum eſt. Quoniam vero ponitur eſſe A C, prima ad C B, ſecundam, vt D F, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ A C, D F; Item ſecundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices IN, MO,* [f] *fit vt ſi GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice ſecundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam G H, ab I N, quàm KL, ab MO; additis cõmunibus HI, LM, deficiet quoq; GI, ab HN, & KM, ab LO. Et ſi G H, æqualis fuerit ipſi I N, & K L,*



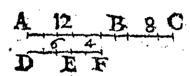
[d] 1. quinti. [e] 2. quinti. [f] 6. definit. quinti.

& K L, ipſi M O; additis communibus H I, L M, erit & GI, ipſi H N, æqualis, & K M, ipſi L O. Et denique ſi GH, exceſſerit ipſam IN, & K L, ipſam M O; additis communibus H I, L M, excedet quoque G I, ipſam H N, & K M, ipſam L O. Quoniam ergo ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice ſecundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit; [a] *erit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.*

[a] 6. definit. quinti.

VERVM hæc demonſtratio non recte colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non ſunt ita multiplices ipſarum CB, F E, vt multiplices acceptæ ſunt IN, MO; earundem C B, F E. Vnde merito dubitare quis poſſet, an ſecundum quamcunque multiplicationem æque multiplices ſeruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit; quandoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarum C B, FE, quaſcunq; æquemultiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obijci non poteſt: quippe cum IN, MO, ſumptæ ſint ipſarum CB, FE, æquemultiplices qualeſcunq;, ipſæq; eædem remanent æquemultiplices earundem CB, FE, in diuiſa proportionalitate. Quam ob rem præferenda eſt Euclidis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, ut bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim ut AB, ad BC, ita DE, ad FF. Dico per compoſitionem rationis cõuerſam, eſſe quoq; vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad E F; erit conuertendo; vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [b] *Igitur & componẽdo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. quod eſt propoſitũ.*



[b] 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [a] Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

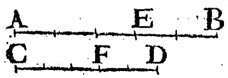
[a] 18. quinti.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. [b] erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. [c] Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. [d] Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD; cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.



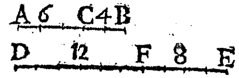
[b] 16. quinti.
[c] 17. quinti.
[d] 16. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: [b] ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.



[a] 17. quinti.
[b] 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. [d] Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF: Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

[c] 16. quinti.
[d] 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

20.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

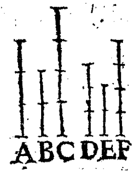
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorẽ F, sexta. Cum enim
a 8. quinti. A, maior sit quam C,[a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt
b 13. quinti. A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit
c 10. quinti. D, ad E, quam F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit
d 7. quinti. ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B.
e 11. quinti. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad
f 9. quinti. E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

SIT

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [a] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. a 8. quinti.
Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoq; proportio est D, ad E, quã C, ad B. Est autẽ conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, [c] propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum. b 13. quinti. c 10. quinti.



SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

 SINT

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. [b] Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: [c] Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

Cum enim A, sit æqualis ipsi C, [d] erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. [e] Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem, ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; [f] atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F.

[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

Cũ enim A, sit minor quam C, [g] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. [h] Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; [i] ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CÆTERVM propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D. non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, vt ex propos. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

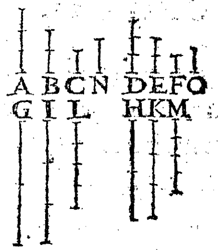
IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicẽ quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secũdam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F.

[a] 4. quinti.
[b] 4. quinti.
[c] 20. quinti.

Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vnà ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnà

vnà æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [a] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

[a] 6. defin. quinti.

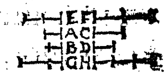


DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiã C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquàm à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æque multiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æque multiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione; cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quòd vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) [b] erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.

[a] 22. quinti.
[b] 22. quinti.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt, A ad E, ita C, ad F, quòd ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quòd ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; [d] erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.

[c] 22. quinti.
[d] 22. quinti.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij: Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B; ita quoque erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

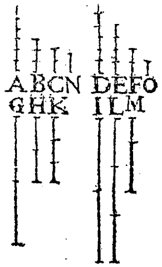
THEOR.

23.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M; [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F. [b] Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binę in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cũ ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] fit vt si G, prima superat tertiã K, superet quoq; quarta I, sextã M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cũ G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna



[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 15. quinti.
[d] 11. quinti.
[e] 4. quinti.
[f] 21. quinti.

vna æquales sint, vel vna excedant; [a] erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt E, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. quæ causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Quod est propositum.

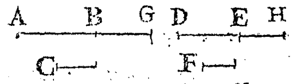
THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam.



Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; [a] erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. [b] Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & BG, ad C, vt EH, ad F; [c] erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 22. quinti.
[b] 18. quinti.
[c] 22. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionē; ita

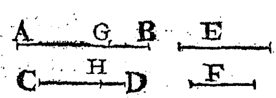
ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F; & C, ad AB, vt F, ad DE; [a] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. [b] Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F; [c] erit ex æquali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.

[a] 22. quinti.
[b] 17. quinti.
[c] 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq; AB, omniū maxima; & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH; [d] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quā E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 19. quinti.

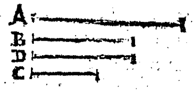
SCHO-

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem ſequitur ſi antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, conſequentem alterius eſſe omnium minimam; vt in propoſito exemplo cernere licet. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, prima maior quam tertia E; [a] erit quoque C D, ſecunda maior quam F, quarta. Item quia maior eſt A B, quam C D, erit quoque E, maior quam F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in ſcholio propoſ. 14. oſtendimus. Quod ſi e contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit conſequens alterius omnium maxima, vt conſtat, ſi dicatur eſſe F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, alias non poſſet vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum diſſimile, videlicet.

[a] 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, ſitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, ſimul maiores eſſe dupla ipſius B. Sumpta enim D, ipſi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul, [b] vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quam dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.

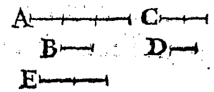
[b] 25. quinti.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpe numero grauiſſimi ſcriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, breuitate demonſtrare, necnon in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre.

referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

THEOR. 26. PROPOS. 26. 26.

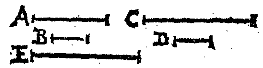
SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.



EODEM fere modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionem ſecundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.

SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea A, minor

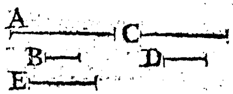
[c] 10. quinti.

[a] 8.quinti. *A, minor erit, quã E. [a] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.*

[b] 26.quinti. *ALITER. Quoniã minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [b] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod est propositum.*

27. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportioné A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam quã E, ad B: [c] Ideoque A, maior erit quam E. [d] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [e] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.

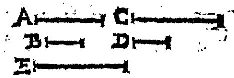
[c] 10.quinti. [d] 8.quinti. [e] 16.quinti.

SCHOLIVM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorẽ habuerit proportionẽ, quam tertia ad quartã, vicissim primã ad tertiam minorẽ esse proportionẽ, quam secundã ad quartã.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam

C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoq; quam E, ad B; [a] Ac propterea A, minor erit, quam E. [b] Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositũ.



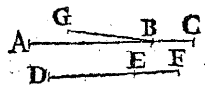
[a] 10.quinti. [b] 8.quinti. [c] 16.quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quã C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo componendo, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum.

[d] 27.quinti. [e] 26.quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 28. 28.

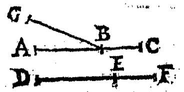
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quã tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secũdam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.



SIT maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [f] Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [g] maiorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [h] vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

[f] 10.quinti. [g] 8.quinti. [h] 18.quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secundam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; [a] *ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC;* [b] *minorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.*

[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] *Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod est propositum.*

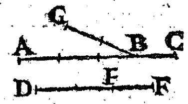
[c] 28. quinti.

29. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam

BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam GB: [b] Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

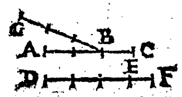


[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.
[c] 17. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartã; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritque proportio AC, ad BC, minor quoque, quam GC, ad BC: [d] *ideoque minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB:* [e] *Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC:* [f] *Sed diuidendo est, vt GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod est propositum.*



[d] 10. quinti.
[e] 8. quinti.
[f] 17. quinti.

ALITER. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. [g] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC: atque idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.*

[g] 29. quinti.

30. THEOR. 30. PROPOS. 30.

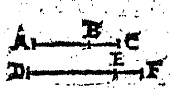
SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quã DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

[a] 29. quinti. [b] 26. quinti. [c] 28. quinti.

S C H O L I V M.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.



SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE: [b] Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

[d] 29. quinti.

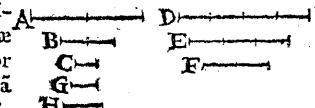
[a] 26. quinti. [b] 28. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. [c] Ergo diuidendo quoque, maior erit proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [d] Igitur conuertendo, minor erit proportio EF, ad DE, quàm BC, ad AB. [e] Componendo ergo minor quoque erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

[c] 29. quinti. [d] 26. quinti. [e] 28. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

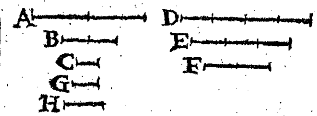
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quã secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quã D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritq; ꝓpterea proportio B, ad C, maior quã G, ad C; [f] Ideoq; B, maior erit quã G. Quare [g] maior erit ꝓportio A, ad G, minorẽ, quã A, ad B, maiorẽ: Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quã D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quã D, ad E.

[f] 10. quinti. [g] 8. quinti.

Intelli-

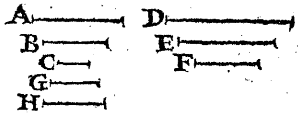


Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G;

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 22. quinti.

[a] Ideoque A, maior erit, quam H. [b] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: [c] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F.

[d] 10. quinti. [e] 8. quinti.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C: [d] Ideoque B, maior erit, quàm G. [e] Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [f] Ideoque A, maior erit, quàm H. [g] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C. [h] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

[f] 10. quinti. [g] 8. quinti. [h] 22. quinti.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [i] ideoque B, ipsi G, æqualis erit. [a] Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [b] Ideoque A, maior erit, quã H. [c] Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C: [d] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

[i] 9. quinti.

[a] 7. quinti. [b] 10. quinti. [c] 8. quinti. [d] 22. quinti.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, uel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinũ; siue vna tantum maior, quàm vna, vel duæ, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: Item vsurpando hoc scholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H: [e] erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; [f] erit quoque ex æquo, maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

[e] 31. quinti. [f] 31. quinti.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, propor-

[a] 22. quinti.

proportionales ſint, ſed maior ſit proportio C, ad D, quàm G, ad H;[a] erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc ſcholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.

SI vero maior proportio ſit A, ad B, quàm E, ad F; ſed tres B, C, D, proportionales ſint tribus F, G, H; erit ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad G, quàm E, ad G: Et rurſus maior A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

SI autẽ maior ſit proportio A, ad B, quàm E, ad F: ſed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; ſed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit ſemper ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac pro inde rurſus maior A, ad D, quã E, ad H. &c.

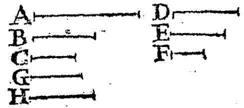
IDEM concludes, ſi omnes proportiones vnius ordinis ſint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel duæ. Item ſi ſint plures magnitudines, vt propoſitione 22. diximus.

32.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecũdæ priorum ad tertiam maior, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

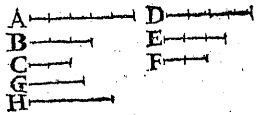
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico eſſe quoq; maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio



portio B, ad C, maior, quam G, ad C:[a] Ideoq; maior erit B, quã G.[b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorẽ, quam eiuſdem A, ad B, maiorem: Eſt autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G;[c] ideoq; maior erit A, quam H.[d] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C:[e] At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita eſt G, ad C; & vt E, ad F, ita eſt H, ad G.) Maior ergo etiam eſt proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 10. quinti. [d] 8. quinti. [e] 23. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F; At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; oſtendemus, ex æqualitate maiorem eſſe proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in propoſita figura perſpicitur.

HAVD ſecus oſtendemus, ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremarum proportionem eſſe minorem, &c.

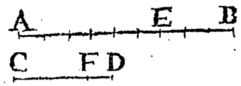
QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoq; vel minorem eſſe proportionem primæ priorũ ad vltimã, quam primæ poſteriorũ ad vltimã, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi diligẽter demonſtrationes ſcholij præcedẽtis propoſ. conſiderẽtur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT

SIT maior proportio totius A B, ad totam CD, quā ablatæ A E, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius



AB, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B,
[a] 27. quinti. ad CD, quam A E, ad C F; [a] erit quoque permutando,
[b] 30. quinti. maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; [b] ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio
[c] 27. quinti. AB, ad EB, quam C D, ad F D. [c] Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. Quod est propositum.

S C H O L I V M.

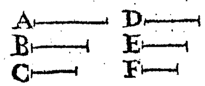
QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

34. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps. Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores,

steriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E; Itē maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionē ipsarum A, B, C,



simul, ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; [a] erit permutando maior A, ad B, quam D, [a] 27. quinti.
ad E. [b] Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E. [b] 28. quinti.
[c] Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, [c] 27. quinti.
simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; [d] habebit quoque reliqua A, ad [d] 33. quinti.
reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F.
[e] Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, [e] 27. quinti.
quam D, ad E, F; [f] & componendo ergo maior est pro- [f] 28. quinti.
portio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. [g] Et rursus permutando, maior proportio omnium [g] 27. quinti.
A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul, quam B, C, ad E, F. quod est primum.

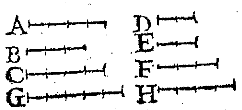
ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quā ablatæ B, C, ad ablatam E, F; [h] erit [h] 33. quinti.
& maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F. quod est secundum.

QVO-

a 27. quinti.
b 28. quinti.
c 27. quinti.

QVONIAM vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; [a] erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; [b] & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E,F, ad F; [c] & rursus permutando, maior B C, ad E,F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A,B,C, ad D,E,F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D,E,F, quam vltimæ C, ad vltimam F; quod est tertium.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H.



d 27. quinti.
e 28. quinti.
f 27. quinti.

[d] Permutando ergo, maior erit A, ad B,C,G, quam D, ad E,F,H; [e] & componendo maior A,B,C,G, ad B,C,G, quam D,E,F,H, ad E,F,H; [f] & permutando A,B,C,G, ad D,E,F,H, maior quam B,C,G, ad E,F,H. quod est primum.

g 33. quinti.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A,B,C,G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C,G, ad ablatam E,F,H; [g] erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A,B,C,G, ad totam D,E,F,H; quod est secundum.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B,C,G, ad E,F,H, quam G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quā B, C, G, ad E,F,H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A,B,C,G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinq; magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

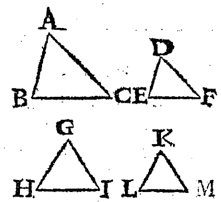
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

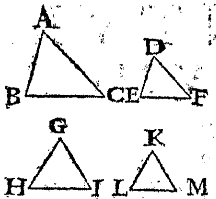
VT triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera



vnius

vnius lateribus alterius proportionalia non sunt; quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionē æqualitatis; latera uero figuræ altera parte longioris circa quemuis angulū rectū, proportionem inæqualitatis.

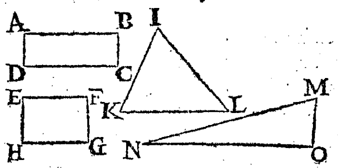


Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras; quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM; Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM; Item GH, ad HI, vt KL, ad LM; & GI, ad IH, vt KM, ad ML, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

I I.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobique sit & antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC; seu eadē AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD; quemadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, ante-

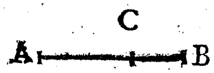


antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO; reciproca, si fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

I I I.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quæuis AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodum tota AB, ad maius segmentum AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem



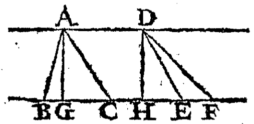
diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamque sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque vtilitates lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.

I I I I.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta.

SI a vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis

cularis ducatur A G; dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita ut tantam dicatur habere altitudinem



triangulum, quanta est perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli A G H, D H G, interni ex eadem parte sint duobus rectis

a 28. primi. æquales, immo duo recti; a erunt rectæ A G, D H, parallelæ; Sunt autem & A D, GH, parallelæ, eò quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogram

b 34. primi. mum erit ADHG; b ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero A B, & D E; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin DE, protractam æqualis nō est perpendiculari ex C, ad basin A B, deductæ, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, ut manifestum est.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinatæq; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæque. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

RATIO

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedētem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; ut idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionē, seu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ, gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio dupla componetur ex sesquiseptima, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$, $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem dupla

 pro-

proportio componi dicetur ex subsesquiquarta, & dupla sesquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulò post patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secũdam, & secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt quinto libro defi. 10. exposuimus: ita vt si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur cõponi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimã duplicata proportionis primæ ad secũdã; si tres, triplicata, etc. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit preportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis, Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ perspectiuæ, comprobabimus.

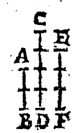
THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere.

Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constat ex AB, ad CD; & ex CD, ad EF; vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitatem, efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, maior; & CD, quam EF: & sit quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD,

CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est propriè compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, diuidatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Idpropterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitẽ, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla; At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est; Ipsius autem CD, tripla est AB; erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est; & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SED iam rursus sit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, maior; & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor; qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quæuis vna compositarum auferatur, vno simplicium eiecto, reliqua compositarum assumetur.



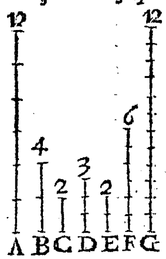
Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

 A, ad

A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4 ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, æqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B; si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.



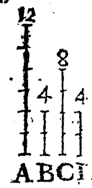
A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

a 18. septimi.

b 17. septimi.

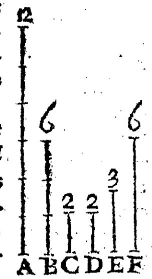
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad secũdam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad

ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiuscemodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) [a] erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

a 19. septimi.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F,

 componeomponetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nã ut ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F:

A.	B.	C.	D.	E.	F.
12.	6.	3.	2.	1.	4.

Hęc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc tãdem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

EX his liquidò constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur; (propter duas æquales proportiones inter primã quantitatem, & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur; triplicata vero, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vsurpetur. Nam quemadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quàm prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundã habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continuè proportionalibus, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quòd illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib. 5. explicata est, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quęnam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur

dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorẽ decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decupla est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in secũdum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minoris inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundã, tertius ad

ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio unius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quàm si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secũdus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum

tionum, extremorum proportionē; quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarum proportionū inter se, ac proindè omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammū eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad propos. 5. lib. 8.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem; statuēdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem cōpositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hę enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem

portionum

portionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplā; & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{16}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{16}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplā; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{16}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiā postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunq;, minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonstratum est, hoc est, numerum datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignātur 100. statuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo, 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæsiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quòd si quis postulet vnum numerum, qui vnà cū quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datū quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2, 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denomi-

nomi-

nominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. 1. $\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{32}$. Nam quinque hi numeri, 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6.12.36.54.288.9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{32}$. vt prius. Sic etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. sunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

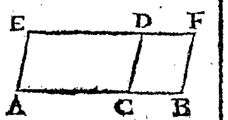
FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri verbi gratia. 4.5.6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. quo produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4.5.6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs inter mediorum numerorum. Vt hic. 3.7.12.20.30.100.713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ, 4.5.8.10.70.613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27.28.29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est einsmodi:

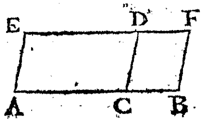
VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quã applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.



SIT data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totũ parallelogrammũ ABFE. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt D B, appelletur defectus.

RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus A B, maius

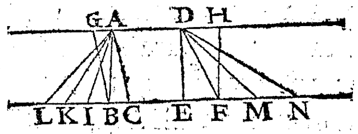


maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt D B, vocetur excessus.

HIC autem defectus D B, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.



SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases B C, E F. Item duo parallelogramma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammũ C G, ad parallelogrammũ E H, vt est basis B C, ad basin E F. Hoc est, si basis B C, statuatur prima magnitudo, & basis E F, secunda: At triangulum A B C, vel parallelogrammum C G, tertia, & triangulum D E F, vel parallelogrammum E H, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartę vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quã parallelogrãma inter easdem parallelas G H, L N, (Nã vt in defin. 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares

diculares a verticibus ad bases demissæ æquales erũt,) & ex BL, sumantur quotcunq; rectæ BI, IK, K L, ipsi B C, æquales; Item ex FN, abscindãtur quotcunq; rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducãtur rectæ AI, AK, A L; DM, DN.[a] Erũt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas cõstituta, inter se æqualia. Eadẽ ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoq; multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, D E N, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N. Quoniam vero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, [b] necessario triangulum A C L, æquale est triangulo D E N, ac proinde si C L, maior fuerit quã E N, necessario A C L, maius est quã D E N, & si minor, minus; deficient propterea vnà C L, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, æquemultiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F, vel vnà æqualia erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. [c] Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundã E F, basis ab basin, ea est tertiæ A B C, ad quartã DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

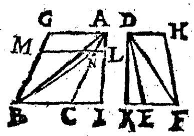
QVONIAM autem [d] vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est parallelogrammũ C G ([e] quod duplum est trianguli A B C.) ad parallelogrammũ EH; ([f] quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, [g] ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento cõfirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi F H, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum.

[a] *38. primi.*
[b] *38. primi.*
[c] *6. defint. quinti.*
[d] *15. quinti.*
[e] *34. primi.*
[f] *34. primi.*
[g] *11. quinti.*

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaq; LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaq; recta BN; [a] erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. [b] Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; [c] Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

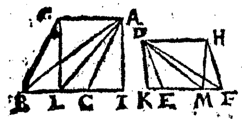
[a] 1. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF.

Dico



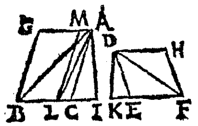
Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; [a] erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. [b] Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM: [c] Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.

QVONIAM vero est, [d] vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, [e] quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH, [f] quod trianguli DEF, est duplum: [g] Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

[a] 38. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. sexti.
[d] 15. quinti.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 11. quinti.

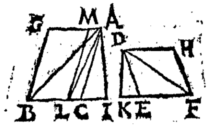
HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur BL, ipsi EF, æquali, ductaq; recta LA; erit, vt proxime demonstrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed

 vt



vt AI, ad DK, ita ponitur esse ABC, ad DEF. [a] *Igitur ABL, ABC, ad DEF, eandem habent proportionem;* [b] *Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod* [c] *est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Eademq; est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta LM, ipsi GB, parallela, ostendemus, parallelogramma MGBL, AGBC, æqualia esse, si bases BC, EF, dicantur inæquales, & BL, EF, æquales.*

[a] *11. quinti.*
[b] *9. quinti.*

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

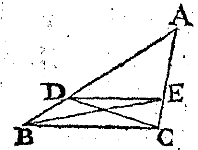
2\.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primùm recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE [c] erūt triangula DEB, DEC, super eandē basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. [d] Quare vt triāgulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: [a] Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulū DEC, ita est basis AE, ad basin EC. [b] Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod est propositum.

[c] *37. primi.*
[d] *7. quinti.*



[a] *1. sex, i.*
[b] *11. quinti.*

SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, [c] erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autē vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. [d] Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rursus [e] vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. [f] Igitur vt triangulnm ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. [g] Aequalia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cum eandem habeant basin DE, [h] inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

[c] *1. sexti.*
[d] *11. quinti.*
[e] *1. sexti.*
[f] *11. quinti.*
[g] *9. quinti.*
[h] *39. primi.*

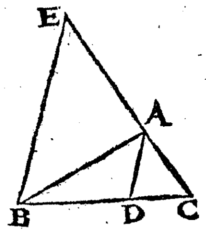
THEOR. 3. PROPOS. 3.

3\.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem

 habebunt

habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triãgulo A B C, recta AD, secet primò angulum B A C, bifariam. Dico esse vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem omninò B E, C A, propterea quod anguli C, & CBE, minores sũt duobus rectis. Cum enim C, & CDA,
a 17. primi. [a] minores duobus rectis sint; [b] sit autem angulus CDA,
b 29. primi. angulo C B E, externus interno, æqualis: eruntquoq;
c 29. primi. C, & C B E, duobus rectis minores.) [c] eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales;
d 6. primi. [d] Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. [e] Vt
e 7. quinti. igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C: [f] Atqui vt
f 2. sexti. E A, ad A C, ita est B D, ad D C; cũ in triangulo BCE,
g 11. quinti. recta AD, sit parallela lateri B E. [g] Igitur vt BA ad AC, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

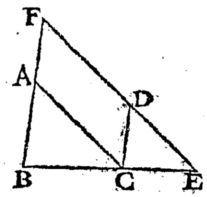
SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad C D. Dico rectam A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B A, ad
h 2. sexti. A C, ita ponitur B D, ad D C. [h] Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta
i 11. quinti. A D, sit lateri B E, parallela.) [i] Erit vt B A, ad A C,
k 9. quinti. ita E A, ad eandem A C. [k] Aequales igitur sunt B A, & E A,

E A, inter se; [a] ac propterea anguli ABE, & E, æquales a 5. primi.
quoque erunt. [b] Cum igitur angulus A B E, æqualis sit b 29. primi.
alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

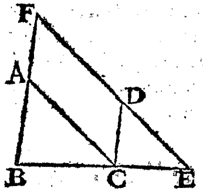
THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli ABC, DCE; & A C B, D E C; & B A C, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt D C, ad C E; & BC, ad C A, vt C E, ad E D; & A B, denique ad A C, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita vt angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, [c] minores sunt duobus rectis: c 17. primi.
est autem angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. [d] Quare rectæ d 13. pron.
B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C;



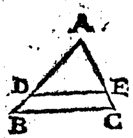
[a] 28. primi.



[a] parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione, parallelæ erũt CA, & EF; quòd angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF; [b] proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, [c] erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando [d] igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, [e] erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando [f] igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE; & BC, ad CA, vt CE, ad ED: [g] erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 34. primi. [c] 2. sexti. [d] 16. quinti. [e] 2. sexti. [f] 16. quinti. [g] 22. quinti.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Aequiangula namque sunt, [h] *cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est,* [i] *habet latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.*

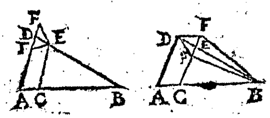
[h] 29. primi. [i] 4. sexti.

SCHOLIVM.

NON *alienum a nostro instituto esse puto, si hic demonstremus*

stremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F, pũcto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; [a] *erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando,* [b] *vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE.* [c] *Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE:* [d] *Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.*

[a] 4. sexti. [b] 16. quinti. [c] 11. quinti. [d] 9. quinti.

RVRSVS si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD, BCF, similia sunt; [e] *erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF;* [f] *& permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB,*

[e] 4. sexti. [f] 16. quinti.

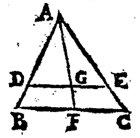
ad

a 11. quinti. *ad BC, ita quoque erat A D, ad C E.* a *Igitur erit, vt A D, ad CF, ita A D, ad C E:* b *Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.*

b 9. quinti.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.



IN triangulo A B C, ducta sit D E, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt BF, ad F C, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; c *erit vt A F, ad B F, ita AG, ad DG;* d *& permutando, vt AF, ad AG, ita B F, ad D G. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad A G, ita FC, ad GE.* e *Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E; &* *permutando, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.*

c 4. sexti.
d 16. quinti.
e 11. quinti.

ALITER. Quoniam triangula A BF, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per coroll. huius propos. f *erit, vt B F, ad F A, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE.* g *Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.*

f 4. sexti.
g 22. quinti.

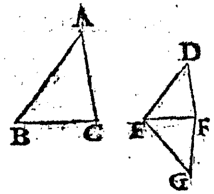
5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT

HABEANT triangula ABC, D E F, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad E F; & B C, ad C A, vt EF, ad F D; & A B, denique ad AC, vt DE, ad D F. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C; conueniantque rectæ EG, FG, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula A B C, GEF. Quare b vt A B, ad BC, ita est G E, ad E F: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur D E, ad E F. c Igitur vt G E, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: d proptereaque æquales erunt G E, D E. Rursus, e quoniam vt B C, ad C A, ita est E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur EF, ad F D; f erit vt E F, ad F G, ita eadem E F, ad F D; g ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac propterea & reliqui anguli G E F, G F E, reliquis anguli D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendū erat.



a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. sexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4. primi.

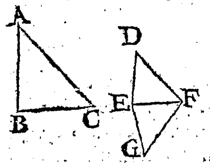
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq́;

habe-

habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF.



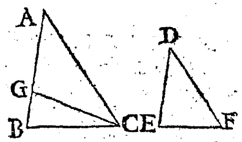
Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [a] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [b] Igitur vt DE, ad E F, ita est GE, ad eandem E F; [c] atque idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, E F, æqualia sint lateribus GE, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus D E F; proptereaque æquales ad inuicem erunt anguli DEF, G E F,) [d] erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales angulis D, EFD; & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.
[d] 4. primi.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum ACB, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF. æquiangula erunt. Quare [b] vt AC, ad C G, ita erit D F, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. [c] Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; [d] ac propterea æquales erunt C G, C B; [e] & anguli C B G, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; [f] cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CG B, æqualis; ideoq; & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis.

quod

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.
11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.
[f] 13. primi.

[a] 17. primi. quod est absurdum. [a] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, [b] atque idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 32. primi.

SCHOLIVM.

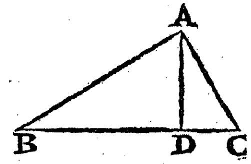
ADDIDIT Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit CG, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim [c] erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, priusquam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum C B, vt patet ex propos. 10. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, [d] vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum ABC, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C, vero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, [e] & ideo anguli C B G, C G B, æquales; [f] erit vterque eorum recto minor, [g] ac propterea A G C, recto maior.

[c] 19. primi.
[d] 7. quinti.
[e] 5. primi.
[f] 17. vel 32. primi.
[g] 13. primi.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



IN triangulo A B C, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triágula ADB, ADC, similia esse & toti triágulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, DBA, anguli B A C, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; [a] erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo ABC; [b] ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita B D, ad D A; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis; [c] ac propterea reliqui anguli A B C, & CAD, æquales. Quare [d] vt BC, ad CA, ita est C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita C D, ad D A, & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. Sic enim opponuntur quoq; homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cum anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli BAD, ACD; Atque idcirco sit [e] vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt AB, ad BD, ita CA, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.
[c] 32. primi.
[d] 4. sexti.
[e] 4. sexti.

COR-

COROLLARIVM.

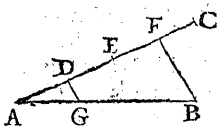
EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

9.

PROBL. 1. PROPOS. 9.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



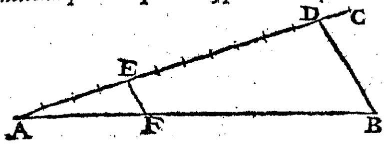
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunq; faciens angulũ CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur

[a] 2. sexti.
[b] 18. quinti.

Igitur & BA, ipsis AG, erit tripla, ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

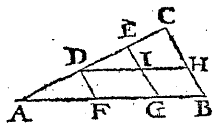
QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius AB, sumendæ erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctũ, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF: Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.

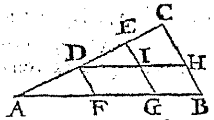


PROBL. 2. PROPOS. 10. 12.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungãtur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & connectatur



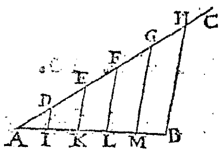


nectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta A C, in D, & E. Nam [a] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, vt DE, ad E C, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quòd FG, ipsi DI, & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus D E, E C. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.
[b] 2. sexti.
[c] 34. primi.

SCHOLIVM.

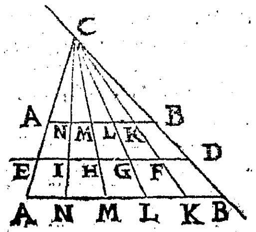
EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinque partes æquales.



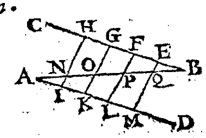
Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunq; angulum CAB, sumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta A H, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit A B, similiter diuisa, vt AH, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.

HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt aliæ non iniucundæ. vt propos. 10. lib. 1. sumus polliciti, atq; ad propos. 40. lib. 1. demõstrauimus.

Sit



Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta BC, vtcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur DE, parallela ipsi A B, ex qua abscindantur quinque æquales partes D F, F G, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt, si D, est supra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus constans, minor sit, quàm A B, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur A C, occurrens ipsi B C, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL, CM, CN, quas dico diuidere rectam A B, in quinque partes æquales. Cum enim DE, sit parallela ipsi A B, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo E H, secta sit bifariam in I, secta quoque erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo C N L; & recta M K, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo C L B, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; & LK, ipsi KB, æqualis; ac proinde A B, secta erit in quinque partes æquales. Quod est propositum.



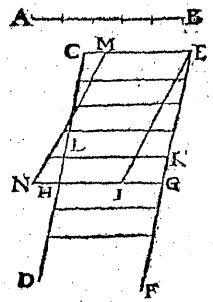
ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter se parallelæ; hoc est, constituentes angulos A, B, æquales: Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales BE, EF, FG, GH, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI, secantibus rectã AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes æquales. Cum enim æquales sint, & parallelæ GH, I K, [a] erunt & HI, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit

[a] 33. primi.

 &

& B N, in quatuor partes æquales, eò quòd BH, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam AN, quam BQ, æqualis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se æquales. Quod est propositum.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se



parallelis vtcunque C D, E F; ex vtraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ C E, vt ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ transuersæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exẽplo est recta G H; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cum enim G K, H L, æquales sint, &
a 33.primi. parallelæ; a erunt quoque G H, K L, parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas C D, E F, inter se parallelæ ostendentur. Quare, vt ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum E G, diuisa est in quinq; partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit E I. Nam si punctum E, sumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda est IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propos. probatum est, erunt rectæ E I, E G, similiter diuisæ. Quòd si forte I E, nec cum F E, nec cum D C, concurrat,
b 34.primi. sed vtrique sit parallela, b erunt singulæ partes rectæ EI, singulis partibus rectæ E G, æquales, ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectæ E G, sint æquales; erunt quoque omnes partes rectæ E I, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M, vsque ad N, punctum lineæ G H, protracta, erit quoque MN, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, vsque ad rectam GH: Vel si N M, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt vnam partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferaturque in sex spatia, dabunt duo spatia vnam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnam partem, propterea quòd quinque spatia conficiunt tertiam partem quindecim spatiorum. Sic si linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouẽ spatia vnam partem; quippe cum nouem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.

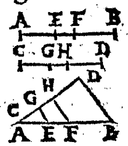
DATAM rectam secare in duas partes, quę habeant proportionem quamcunq; datam.

SIT secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H, Dico A B, sectam esse in H, secundum

proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, a cum sit, a 2.sexti.
vt AF, ad F G, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad H B.

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddã ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.



SECENTVR rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, vt CH, ad HD. Dico sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cum duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim sit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD; erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD; erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD; & conuertendo, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaq; cum sit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB,
a 22. quinti. *ita CD, ad GD; a Erit ex æquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD; Et per conuersionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH; Et diuidendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est primum.*

RVRSVS, quia est, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD; Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt ostensum est; Erit ex æquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

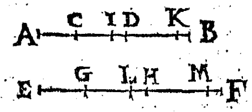
BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniãt duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, vel BAD; iunganturq; rectæ DB, HF, GE. Quia igitur ponitur,
b 2. sexti. *vt AE, ad EB, ita CG, ad GD; b Parallela erit GE, ipsi DB. Rursus, cum ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD;*
c 2. sexti. *c Parallela erit quoque HF, ipsi DB. d Quare & GE, HF,*
d 30. primi. *inter se parallelæ erunt: Ac propterea e erit, vt AE, ad EF,*
e 2. sexti. *ita CG, ad GH. Quod est secundum.*

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH; & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

SED

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

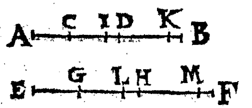
SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.



RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum.
a Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim CI, ipsi AC; & DK, ipsi CD, æqualis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipsi EG; & HM, ipsi GH, æqualis: vt LH, excessus sit inter GH, EG; & MF, excessus inter HF, & GH. Probandum est, excessus LH, MF, æquales esse. Quoniã igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH; erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF; erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes; habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, a 10. sexti.
vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL; b erit b 19. sexti.
quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc
est, ita DK, ad HM; c erit quoque reliqua KB, ad reliquam c 19. sexti.
MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID,
ad LH, vt CD, ad GH. d Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, d 11. quinti.
ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis. e Igitur & LH, ipsi e 14. quinti.
MF, æqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè pro-

Ccc 4 pro-

proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ sectæ sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere easdē proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM: Deinde ipsi GM, post M, sumatur portio ipsi GM, æqualis, eique adijciatur idem excessus LM; fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea EF, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: [a] *quippe cum minor sit proportio EG, ad GM, quàm EG, ad GH; hoc est, quàm AC, ad CD.*

[a] *8. quinti.*

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH, vt CD, ad GH. Itaque si AC, CD, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [b] *secetur similiter in G, H, vt AB, in C, D, secta est; erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.*

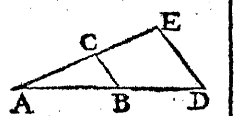
[b] *10. sexti.*

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibuscunque alijs magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datū numerū, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam.



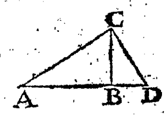
Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequēs esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cū enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE, quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

[a] *4. sexti.*
[b] *7. quinti.*

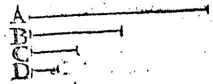
SCHO-

SCHOLIVM.

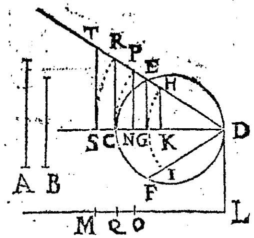
ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, constituantur ad angulum rectum ABC, & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, perpẽdicularis CD, occurrens ipsi AB, productæ in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basim AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositũ.



INVENTA autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitũ.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFC, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt.) secabit eadem & rectam ductam EF, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus.[a] Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta EC,[b] angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex



a 3. tertij.
b 31. tertij.

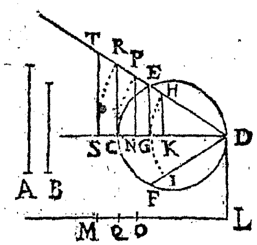
coroll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis GD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui[a] ob æquales arcus EC, FC, æquales sunt)[b] arcus HG, IG, æquales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K;[c] ideoq; & ad angulos rectos.[d] Parallelæ ergo sunt EG, HK.[e] Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 27. tertij.
b 26. tertij.
c 3. tertij.
d 28. primi.
e 2. vel 4. sexti.

DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales; applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta NP.[f] quæ ad DC, perpendicularis erit,[g] cum sit parallela ipsi DL. Sumpta deinde recta DC, æquali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturq; ex D, per P, recta DPT, eritq; DP, ipsi DC, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, æquali, applicataque ad puncta Q, C, regula, ducatur recta CR, quæ eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela.[h] Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsi B, A, accepta sint æquales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continuè proportionales; ideoq; DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM; applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nã eadem ratione erit ST, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpẽdicularis.[i] Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineæ ND, DP, DR, DT, continuè proportionales. Quòd si ex D, per T, alius arcus describatur secãs rectã DC, protractã, inuenietur eadẽ arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitũ.

f 29. primi.
g 33. primi.
h 2. vel 4. sexti.
i 2. vel 4. sexti.

EX



EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperimus duas medias proportionales, nō quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atque iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Po- inter CD, DK, inueniendæ sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propos. 8. huius lib.[a] Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quòd si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

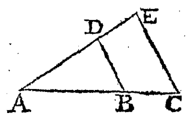
[a] 2. vel 4. sexti.

10.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico



DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD;[a] erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.

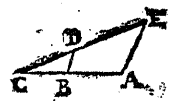
SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatq; inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est AB, prima ad BC, secundam.[b] Hoc autem manifestum est, cum AC, EC, proportionaliter secentur in B. & D, punctis.



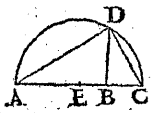
[b] 2. sexti.

ALI-

[a] 12. sexti. *ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, [a] atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.*

9. PROBL. 5. PROPOS. 13.

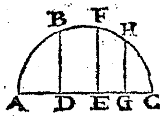
DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; [b] erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cũ igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

[b] 31. tertij.

SCHOLIVM.

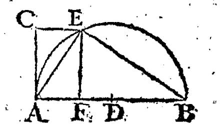


PERSPICVVM hinc fit, lineã rectam; quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam inter AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; [a] fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, & GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.

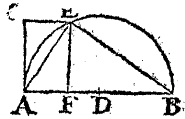
[a] 31. tertij.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit quam dupla ipsius AC; sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem



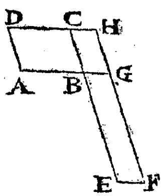
lem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit, vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. E F, media proportionalis inter A F, & F B. [a] *Cum igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eò quod parallelogrammum sit A C E F, (Est enim C E, ipsi A F, parallela per constructionem,* [b] *& A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.*

[a] 34. primi.
[b] 28. primi.

13.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habetium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habētium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt A B, & B G, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & E B, B C, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: [c] erit vt D B, ad B H, ita B F, ad idem B H: Sed vt DB, ad BH, [d] ita est AB, basis ad basin B G, quòd parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad B H, ita est basis E B, ad basin BC. Igitur vt A B, ad B G, ita est E B, ad B C. Quod est propositum.

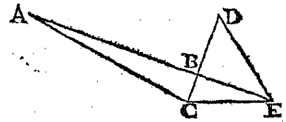
[c] 7. quinti.
[d] 1. sexti.

E CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, vt AB, ad B G, ita E B, ad B C: [a] Vt autem AB, ad B G, ita D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem BH; erit quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idem BH; [b] Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

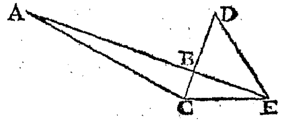
[a] 1. sexti.
[b] 9. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 15. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habētium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentiũ reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo triangula æqualia A B C, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, sint æquales; erunt & DB, BC, vna recta linea, ut demonstratum est ad propos. 15. lib. 1.



lib. 1. ex Proclo. Ducatur recta C E; quoniam æqualia ſunt triangula A B C, D B E;
[a] 7. quinti.
[a] erit vt A B C, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum BCE,
[b] 1. ſexti.
[b] ita eſt baſis AB, ad baſin BE, quòd hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter vt DBE, ad BCE, ita eſt baſis DB, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita eſt DB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

IAM vero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, vt A B, ad BE, ita DB, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cum ſit vt A B, ad B E, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE,
[c] 1. ſexti.
[c] ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & vt D B, ad B C, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE: Erit vt ABC, ad BCE, ita D B E, ad idem BCE;
[d] 9. quinti.
[d] proptereaque æqualia erunt triangula A B C, D B E. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

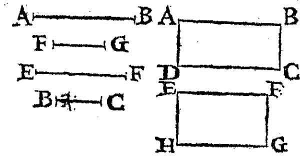
15.

THEOR. 11. PROPOS. 16.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, B C; it

BC, vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis AB, BC; rectangulum vero E F G H, comprehenſum ſub medijs EF, FG. Dico rectangula AC, EG, eſſe æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca.

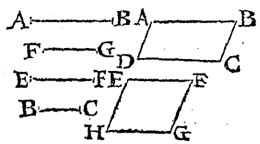


[a] Quare parallelogramma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum. [a] 14. ſexti.

CONTRA vero, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; [b] erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem AB, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. [b] 14. ſexti.

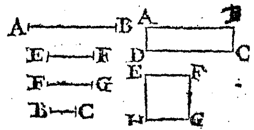
SCHOLIVM.

IDEM verum eſt, etiamſi parallelogramma AC, EG, non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



THEOR. 12. PROPOS. 17. 16.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod a media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitq; rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC; & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æquale esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. [a] Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso: Quod est propositum.

[a] 16. sexti.

SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; [b] erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

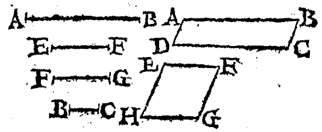
[b] 16. sexti.
[c] 7. quinti.

COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale

æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

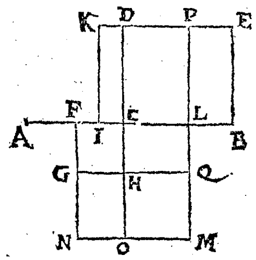
SCHOLIVM.



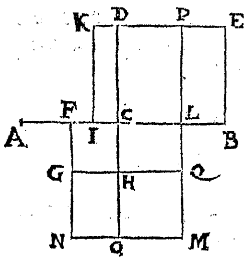
EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG, sit Rhõbus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



SIT recta AB, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F; & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primæ partis AC: & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, prima parte, & recta IB, composita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB; [a] erit [a] 6. secundi.



rectangulum ſub A B, BC, unà cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F: Eſt autem rectangulum I E, minus rectangulo ſub A B, B C, unà cum quadrato ex C F. (Ducta enim CD, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum ſub A C, C B, minus rectangulo ſub AB, BC: At rectangulum C K, quadrato ex
a 1. ſexti. CF, æquale, cum utrumque quarta pars ſit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK, [a] quia ſic eſt rectangulum CK, ad quadratum ex AC, hoc eſt, ad rectangulum ſub A C, C D, ut CI, ad C A; ac proinde cum C I, ſit quarta pars rectæ AC, erit & C K, quarta pars quadrati ex A C; At uero quadratum ex CF, quarta pars eſt eiuſdem quadrati ex AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato
b 14. ſecũdi. ex BF. Si igitur [b] fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus recta FB. Sit ergo illud F L. Dico partem CB, ita ſectam eſſe in L, ut tres partes AC, CL, LB, ſint continuè proportionales. Deſcribatur enim ex F L, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus M L, ad P: ſumptiſq; duabus F G, LQ, ipſi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, ſecans CO, in H. Eritq; CG, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum CF, F G. Et quia ablatis æqualibus FC, F G, ex æqualibus FL, FN, reliquæ C L, GN, æquales
c 34. primi. ſunt; [c] & eſt CL, ipſi HQ, & GN, ipſi HO, æqualis; æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; H M, quadratum erit rectæ C L. Rurſus quia tam rectangulum C Q, comprehenditur ſub CL, & CH, ſiue CF, ſemiſſe ipſius A C, quàm rectangulum GO, ſub GN, ſiue CL, & GH, ſiue CF, ſemiſſe eiuſdem
d 1. ſecũdi. AC, ſiue CD; [d] erunt duo rectangula C Q, GO, ſimul æqualia rectangulo CP, comprehenſo ſub eadem CL, & CD, quæ ipſis CH, GH, ſimul æqualis eſt. Itaq; cũ rectangulũ IE, quadrato F M, æquale ſit; & rectangulum C K, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, ſimul: erit reliquum rectangulum L E, comprehenſum ſub B E, ſiue AC, & BL, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca, cum datis

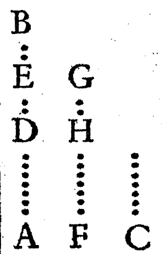
tis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, ſub extremis comprehenſum æquale ſit quadrato HM, mediæ CL; [a] erunt ipſæ tres lineæ AC, CL, LB, continuè proportionales. Quod eſt propoſitum. a 17. ſexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Poſteriori parti numeri propoſiti adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam ſi ex radice inuenta dematur ſemiſſis prioris partis, reliqua fiet ſecunda pars proportionalis, quam ſi ex poſteriori parte dati numeri ſubtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti ſi linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adijciemus C I, hoc eſt, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id eſt, ad 40. poſteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam ſcilicet IB, in priorem partem 36. ſiue in lineam A C, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc eſt, ex rectangulo I E, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua ſi detrahemus CF, ſemiſſem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hæc ablata ex tota poſteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, LB, numeri AB, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo conſtat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non poſſe in numeris. Atq; hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem ſcripſimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus diſputauimus, non alienum erit a noſtro inſtituto, de eiſdem quoque cum Pappo Alexandrino diſſerere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuſcunq; Medietatis, ſiue Arithmeticæ, ſiue Geometricæ, ſiue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum eſt. Hoc autem exequemur ſequentibus propoſitionibus, quarum prima hæc ſit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum dispositas hic repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB, abscindatur alia æqualis AD: Diuiso autē segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalē inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquidò constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. [a] 1. quinti. *[a] Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.*

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH, ponatur æqualis C.

Dico

Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eiq; addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, æqualis. Dico AB, esse tertiā proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cū ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30.23.16. Vel medius terminus habebitur, si summæ extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

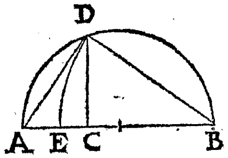
SI verò ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30.16.2.

SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT



SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secans AB. in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis AD, BD; [a] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

[a] 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.

[b] 31. tertij.

VI.

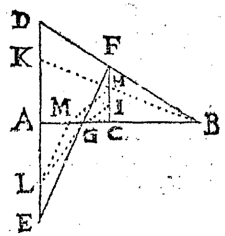
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ CB, BE, eundem termi-

terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A. Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BD, hoc est, BE, ipsi æqualis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

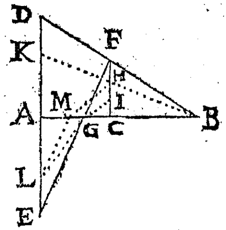


SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, possidētes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantæcunq; Excitetur quoque ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse mediam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: Hoc est, esse AE, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primā AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quoniam enim [a] CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinē triangulorum AEG, CFG, [b] erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem vt

[a] 28. primi.

[b] 4. sexti.

ut AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB, ad BC, prima linea ad tertiam, ut AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.



NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE: quia utcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadē media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, ut per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse ut AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triāgula æquiāgula ALM, MHC, si recta est HML. Est autē ut AB, ad BC, ita AG, ad GC, ut ostensum est. Igitur erit quoq; AM, ad MC, ut AG, ad AC. quod est absurdum. Nam[a] minor est proportio AM, ad GC, quàm AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quàm ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quàm AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MC, ut AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, æquales.

[a] 8. quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico BC,

BC, ipsis AB, BG, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse AB, primam ad BG, secundam, ut AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, ut in præcedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE: quia utcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LG; quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, ut in I; ostendemus eodem modo, esse ut AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc est, ita AL, ad CH. Ut autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoq; ut AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia, si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG,[a] est ut AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, ut AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo ostensum sit, esse ut AG, ad GC, ita AL, ad CH; erit AL, ad CH, ut ad CI.[b] Æquales sunt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, ubi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quàm AG, excessus inter primam AB, & mediam BG;[c] erit quoque BC, tertia maior quàm GC, excessus inter mediam BG, & minimam BC.

[a] 4. sexti.

[b] 9. quinti.

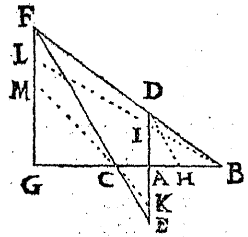
[c] 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT datæ rectæ AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inueniēda sit maior tertia Harmonicè proportionalis.

Ducta



Ducta per D, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales A D, A E, quantæcunque, ducaturque recta B D, quam productam secet EC, producta in F, puncto, (quòd autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis F G. Dico G B, ipsis CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse G B, primam ad B A, tertiam, vt G C, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad C A, excessum inter mediam CB, & tertiam BA.

a 28. primi.

a Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt G B, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, ut GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC;

b 4. sexti.

b erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt G B, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam G B, & mediam BC, ad C A, excessum inter mediam B C, & tertiam B A. Quod est propositum.

QVOD autem BD, E C, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA, tertia, quàm CA, excessus, quo media BC, minimam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quàm AC, non posset reperiri tertia maior. Cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia A B, maior excessu A C, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturq; recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad verticem A;

c 4. primi.
d 27. primi.
e 29. primi.
f 16. primi.
g 13. pron.

c erunt & anguli ACE, AHD, æquales: quicum alterni sint; d erunt rectæ EC, HD, parallelæ; e ac proinde anguli interni DHC, HCF, duobus rectis æquales erũt. Cum ergo f angulus DHC, maior sit interno angulo B; erunt duo anguli B C F, C B F, duobus rectis minores. g Quocirca B D,

B D, E C, coibunt. Quod est propositum.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur K C, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M; ostendemus eodem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad A K. Vt autem GB, ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, vt G B, ad BA, ita GL, ad A K. Et quia, si recta linea est KCM, ob similitudinem triangulorum GMC, AKC, a est vt G M, ad GC, ita KA, ad AC: erit permutando, vt GM, ad KA, ita GC, ad CA. Cum ergo ostensum sit, esse vt G B, ad B A, ita GC, ad CA; erit quoque GM, ad AK, vt GL, ad A K. b Æquales sunt igitur GM, GL, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet KC, infra L: eademque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis L G, ad G B, cadet in G, exhibebitque eandem tertiam GB, maiorem, Harmonicè proportionalem.

a 4. sexti.
b 9. quinti.

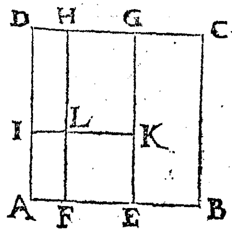
EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim ostendimus, B A, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quo media BC, minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius BC; ac proinde B C, ad A B, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si BC, ad A B, esset dupla, vel maior quàm dupla, esset AB, vel æqualis ipsi AC, vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate.

SED demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione iidem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

EX

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



EX qualibet recta A B, deſcribatur quadratũ ABCD. Sumptiſque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipſis AD, BC, parallelæ. Item ſumpta recta AI, æquali ipſi BE, vel EF, agatur IK, ipſis AB, DC, parallela ſecans FH, in L. Erit rectangulum AG, contentum ſub AB, (id eſt, ſub ſumma rectarum AE, EB: [a] cum EG, ſit ipſi BC, ideoque ipſi AB, æqualis) & AE, (maiore ſcilicet parte ſummæ AB.) Rectangulum vero EC, continebitur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quàm GL, ſub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quòd AI, ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL, LK; ipſis AE, EB, æquales. [b] Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi AB; & FL, ipſi AI, hoc eſt, ipſi EB, ſit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis: [c] At KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB, æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, ſimul continere duplum eius, quod ſub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & ſummã duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, conſtituere proportionalitatem Harmonicã: hoc eſt, vt eſt AG, primum, ad EC, tertium, ita eſſe IH, exceſſum inter primum AG, & ſecundum HLIAEG, ad AL, exceſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC, ſiue FG, [d] quod ipſi EC, æquale eſt. Nam cum HL, ipſi AE; & LF, ipſi EB, æqualis ſit, vt oſtendimus; [e] erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, [f] ita eſt AG, ad EC.

[a] 34. primi.
[b] 34. primi.
[c] 34. primi.
[d] 36. primi.
[e] 7. quinti.
[f] 1. ſexti.

Et vt HL, ad LF, ita eſt HI, ad AL. Igitur erit quoq; AG, primum ad EC, tertium, vt HI, exceſſus inter primum ac medium, ad AL, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE ſi AE, ponatur 6. & EB, 4. erit ſumma AB, 10. quam ſi ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE. in EB, hoc eſt, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10, ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrũq; 6. 4. pduxerit extremos 60. 40. [a] erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. [b] Eſt enim AG, id eſt, 60. ad EC, id eſt, ad 40. vt AE, id eſt, 6. ad EB, id eſt, ad 4.

[a] 17. ſeptimi.
[b] 1. ſexti.

HAC arte, ſi ſumma quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; ſeorſum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter ſe.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. ſtatuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos ſtatuatur medius 24. quẽ extremi inter ſe multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex ſumma 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli ſunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti ſint ex ſemiſſe ſummæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. ſemel, vt perſpicuum eſt: erit quoq; tã exceſſus inter 60. & 48. duplus exceſſus inter 30. & 24. quàm exceſſus inter 48. & 40. ipſius exceſſus inter 24. & 20. vt ad propoſ. 10. oſtendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. ſint Harmonicè

60. 48. 40.
30. 24. 20.

a 15. quinti.

proportionales, vt in præcedenti problemate demonstrauimus; erunt quoque eorum semisses, 30. 24. 20. [a] easdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60.48.40. quippe cum excessus numerorũ 30.24.20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, *15. &* BC, *10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis* Harmonicè. *Dematur ex maiore* AB, *15. numerus* BD, *minori* BC, *10. æqualis; &*

A . . . E . . D . . . . B C

reliquus numerus A D, *5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem* B C, *10. productusq́; numerus 50. diuisus per* A C, *25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem* DE, *2. qui additus minori* BD, *10. faciat* BE, *12. Dico* BE, *esse medium propootionalem* Harmonicè *inter* AB, BC, *hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex* AD, *in* BC, *fit, diuiso per* A C, *Quotiens est* DE; *producetur idem numerus diuisus ex* D E, *Quotiente in diuisorem* AC, *vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex* AC, *primo, in* DE, *quartum, qui ex* B C, *vel* BD, *secundo, in* AD, *tertium;* [b] *erit* AC, *primus ad* BC, *secundum, vt* AD, *tertius ad* D E, *quartum: Et diuidendo,* AB, *ad* BC, *primus datus ad tertium datum, vt* AE, *excessus inter primũ* AB, *& mediũ inuentũ,* BE, *ad* DE, *excessum inter medium* BE, *&* BD, *siue tertium* B C. *Sunt ergo* AB, BE, BC, *nimirum 15, 12. 10.* Harmonicè *proportionales. Quod est propositum.*

b 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorũ ducatur in minorem, numerusq́; productus diuidatur per datorum numerorum

rorum summam, ac denique Quotiens minori adijciatur, constabitur medius terminus Harmonicæ *proportionalitatis.*

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, *15. &* AC, *12. quibus inueniendus est minor* Harmonicè *proportionalis. Addatur* BD,

A . . . . E . . C . . . B . . . D

æqualis ipsi BC, *excessui inter datos numeros. Per hanc summam* AD, *18, collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato* AC, *in* BC, *differentiam datorum numerorum; & Quotiens* C E, *ex minore dato* AC, *detrahatur. Dico reliquum* AE, *10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BC, *fit, diuiso per* AD, *Quotiens est* CE; *producetur idem numerus diuisus ex* C E, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex* A D, *primo, in* C E, *quartum, qui ex*

A . . . . E . . C . . . B . . . D

B C, *secundo in* A C, *tertium;* [a] *erit* A D, *primus ad* B C, *secundum, hoc est, ad* B D, *vt* AC, *tertius ad* CE, *quartum. Et diuidendo,* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC, *vt* AE, *ad* CE: *Et permutando,* AB, *primus datus ad* AE, *tertium inuentum, vt* BC, *excessus inter primum* AB, *& medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, *& tertium* A E. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *id est, 15. 12. 10.* Harmonicè *proportionales. Quod est propositum.*

a 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collecta diuidatur numerus

 ex

ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus sit minor in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur BD, æqualis differentiæ BC, 3. datorum

A . . . . E . . C . . . B . . . D

numerorum: Et per summam AD, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitq; Quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremum esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diuiso per AD, Quotiens fit AE; producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex AD, primo in AE, quartum, qui ex AB, secundo in AC, tertium; [a] erit AD, primus ad AB, secundum, vt AC, tertius ad AE, quartum; ac proinde cum AD, maior sit, quàm AB, erit quoque AC, maior quàm AE. Quare erit & diuidendo BD, id est, BC, ad AB, vt CE, ad AE: Et conuertendo AB, ad BC, vt AE, ad CE: Et permutando AB, primus ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc est, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

[a] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

SINT dati duo numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inueniendus sit tertius in Medietate Harmonica. Ex minore

A . . . . D . . B . . C . . . E

AB, detrahatur BD, æqualis differentiæ BC, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero AC, 12. adijciatur. Dico summam AE, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BD, fit, diuiso per AD, Quotiens fit CE; producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, secundo in AD, tertium; [a] erit AC, primus ad CE, secundum, vt AD, tertius ad BD, quartum: Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC: Et permutando AE, primus ad AB, tertium, vt CE, excessus inter primum AE, & medium AC, ad excessum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

[a] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adijciatur, cõstabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, dematur BD, æqualis excessui BC, datorum numerorum: Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus, Quotiensque sit AE, 15. Dico AE, esse terminum maiorem in proportionalitate Harmonica.

A . . . . D . . B . . . C . . . E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, diuiso per AD, Quotiens est AE; producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idē numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, secundo in AE, tertium; [a] erit AB, primus ad AD, secundum, vt AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, maior sit quàm AD, erit & AE, maior quàm AC. Et cū sit, vt AE, ad AC, ita AB, ad AD; erit per conuersionē rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC. Et permutādo AE, primus inuentus ad AB, tertium, vt CE, excessus inter primum AE, & medium AC, ad BC, excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15. AC, 12. AB, 10. Harmonicè proportionales sunt. Quod est propositum.

[a] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionū ex æqualitatis proportione omnes ꝓportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem; ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quàm inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

SINT

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitque D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 9.	F, 3.

F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, vt BC, simul ad C. [a] Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, æqualis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum.

[a] 12. quinti.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint æquales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F; quòd E, ipsis BC; & F, ipsi C, sit æqualis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini æquales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.

A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

SI vero A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B,

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

erit

A.	B.	C.
1.	3.	9.
D.	E.	F.
16.	12.	9.

erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac denique tertius semel; sunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E,

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 5.	E, 3.	F, 1.	D, 39.	E, 21.	F, 3.

summa conflata ex A, B, C, semel: Ac deniq; F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmeticè proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto: Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui

qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.

A.	E.	C.
3.	20.	1.
D.	E.	F.
47.	24.	1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: ut in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacervata, Harmonicè proportionales sunt.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, consti-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 15.	F, 9.

tuere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, ut A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. ut A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, ut A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C. [a] Igitur ut omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita unum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum termi- [a] 12. quinti.

terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis pro-

A, 9. B, 6. C, 4.	*A, 1. B, 4. C, 16.*	*A, 9. B, 12. C, 16.*
D, 40. E, 16. F, 10.	*D, 30. E, 24. F, 20.*	*D, 70. E, 40. F, 28.*

portionis sesquialteræ, & in secundo ex minimis terminis subquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.

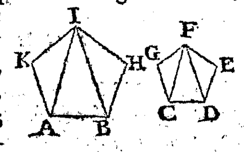
A, 4. B, 6. C, 9.	*A, 16. B, 4. C, 1.*	*A, 16. B, 12. C, 9.*
D, 35. E, 21. F, 15.	*D, 45. E, 9. F, 5.*	*D, 77. E, 33. F, 21.*

19.
PROBL. 6. PROPOS. 18.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in

in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cũ æquales sint duobus angulis FCD, FDC, [a] qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rurfus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH: Et [c] quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: [d] Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoq; AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eadémque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt cõstat ex constructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineũ ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam verò [e] ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF; & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; [f] erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, [g] quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI,

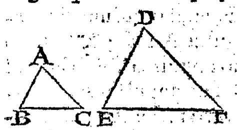


[a] 17. primi.
[b] 32. primi.
[c] 17. primi.
[d] 17. primi.
[e] 4. sexti.
[f] 22. quinti.
[g] 4. sexti.

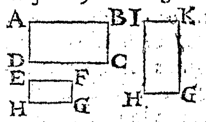
a 4. sexti. BHI, DEF. a Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD; & ita IB, ad IA, vt FD, ad FG; & ita IA, ad IK, vt FG, ad FG.
b 22. quinti. b Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG; & ideo latera quoque circa angulos HIK, EFG, proportionalia erunt; & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint.) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E.



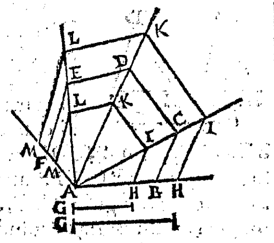
Similiter rectangula AC, IG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam ut AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula ACrIG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.



CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super quálibet earum latera.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus

conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet.

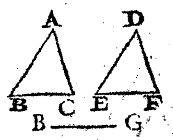


Deinde ex AB, abscindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF; factumque erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterque posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis; & anguli ABC, AFE, a æquales sint anguli AHI, AML; Item a 29. primi.
angulis ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemque modo angulis CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Aequiãgula erũt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, b vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, vt BC, b 4. sexti.
ad CA, ita HI, ad IA; Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: Ac proinde, ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 19. 17.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorũ.

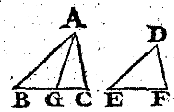
SINT



SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos aequales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triãgula inter se rationẽ habere duplicatã eius, quã habent latera homologa BC, & EF; vel AB, & DE; vel AC, & DF: Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG; ita esse triangulũ ABC, ad triangulũ DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorũ laterum homologorum duplicatam; quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorũ laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continuè proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, [a] quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualiá sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis; (Positis enim tribus magni-

[a] 26. primi.

magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam;) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod est propositum.



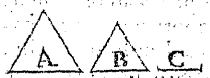
SIT deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, [a] abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG; ducaturque recta AG. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, [b] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [c] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, [d] ita erit triangulum ABC, ad triangulum ABG: Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, [e] ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint cõtinuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiã BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secũdam. Igitur & triangulũ ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 11. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 15. sexti.
[d] 7. quinti.
[e] 1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

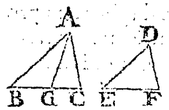
SINT



SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. [a] *Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* [a] 19. sexti.

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. [b] *Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* [b] 19. sexti.

SCHOLIVM.

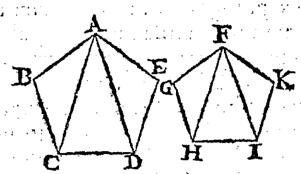


ITAQVE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quã proportionem habeat triangulũ ABC, ad triangulũ DEF. Si enim proportio 6. ad 5. cõtinuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulũ ad triãgulũ, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionẽ, cuius denominator est $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulũ, vt 36. ad 25. Eandem proportionẽ triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id est, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

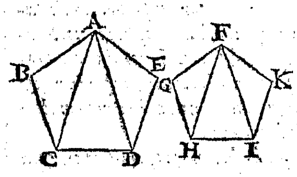
SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quã 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quàm 100. ad 1. cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.

THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia [a] 6. sexti.



angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G, lateribus homologis oppositos; Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt: Eadẽ ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde [b] quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad H G, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum: [c] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato F H G; erit & reliquus ACD, reliquo F H I, æqualis. [d] Quare triangula ACD, FHI, æquiangula erunt, ideoq; similia. Eademq; ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint.

a 4. sexti.
b 4. sexti.
c 22. quinti.
d 6. sexti.

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH; [e] erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum F H I, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triãgula. Sunt igitur proportionalia triãgula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius cõsequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, [f] ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia.

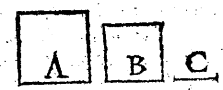
e 19. sexti.
f 22. quinti.

quentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

DICO postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K, vt est prima linea AB, ad tertiã inuentã: ac proinde, cum proportio AB, ad illã tertiã, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG; dici quoq; proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum A B, F G. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, [a] habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiã inuentã; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quã habet AB, ad illã tertiã inuentam. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 19. sexti.

COROLLARIVM.



HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.

HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quã ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione æquales ostendentur anguli ADC, FIH: ac propterea, [a] & reliqui CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cum æquiangula sint triangula ACD, FHI, [b] habebunt latera circa angulos æquales proportionalia; ac proinde similia erunt.

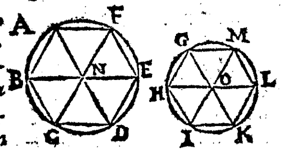
[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoq; cum anguli ACD, FHI, sint æquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cum omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob similitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FIH, æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. [c] Quare triangula ADE, FIK, similia erunt. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula.

[c] 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula,

diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumscribantur a circulis circa centra N; O, ex quibus recta ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis.



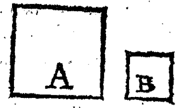
Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales sunt; (quòd æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, [a] ipsi inter se æquales erũt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobique sit proportio æqualitatis; [b] Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, vt patet; [c] habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem.

[a] 27. tertij.
[b] 6. sexti.
[c] 15. quinti.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla recta B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum inter se proportionem



tionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in exemplo adducto superius apparet.

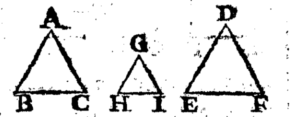
ITAQVE si proportio lateris AB, ad latus FG, nota sit in numeris, nimirum ut 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, ut 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. *Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratumque est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, ut 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum* $1\frac{1}{4}$. *in se multiplicetur. Productus enim numerus* $\frac{25}{16}$. *id est,* $1\frac{9}{16}$. *erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cum hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.*

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam; cum hæc illius sit duplicata, ut hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR.

THEOR. 15. PROPOS. 21. 20.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

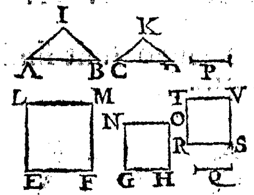


SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinẽ, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei GHI; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. [a] 1. pron. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. [b] 11. quinti. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. 21.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

 SINT



SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt q̃dẽ AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem
[a] 11. sexti. ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia
[b] 22. quinti. proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad
[c] 11. quinti. Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK ita erit EM, ad GO. Quod est propositũ.

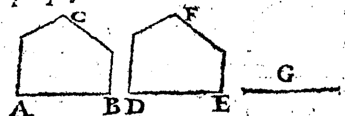
DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF,
[d] 12. sexti. ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; posi-
[e] 21. sexti. tum; [e] & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad
[f] 11. quinti. CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt
[g] 9. quinti. EM, ad RV, ita EM, ad GO, [g] Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, cõsistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas
[h] 7. quinti. RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad
[i] 11. quinti. GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. [i] Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam RS; [a] erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum. [a] 14. quinti.

ALITER.

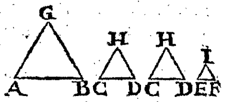


Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G; erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta, quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC,

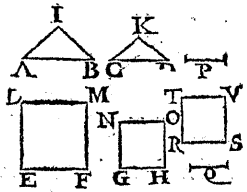
minus

minus ostenderetur rectilineo DEF: quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.



EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, immo idem; manifestum est, quod proponitur.



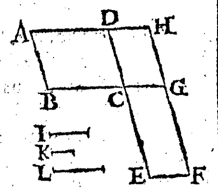
BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque vt ABI, ad a 19. vel 20. sexti. *CDK, ita EM, ad GO.*[a] *Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH; erunt proportiones ABI, ad CDK; & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD; & EF, ad GH. Quod est primum.*

PONATVR deinde esse, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad b 19. vel 20. sexti. *GH.*[b] *Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD; & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK; & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.*

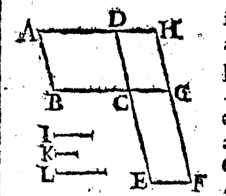
THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 23. 24.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositã ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedẽtia proportionum sint in vno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE: Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG; & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG, sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producã tur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaq; vt diximus, recta I, quacunq;, a inueniatur tribus BC, CG, a 12. sexti.
& I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta



quarta proportionalis L. Quoniã igitur est, [a] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K; [b] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [c] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. [d] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammũ CF. Eademq; ratione ostendemus proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 1. sexti.
[d] 22. quinti.

SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [e] Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG: & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH, & CH, ad CF; componetur quoque eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

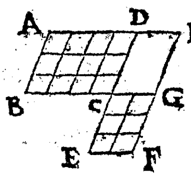
[e] 1. sexti.

HANC porrò propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE,

CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones conti-nuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammũ CF; [a] quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{22}{55}$ Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certè hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quòd si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.

[a] 23. sexti.



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF, solum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

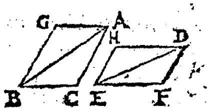
PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator

minator ſit 1 $\frac{22}{55}$. In poſteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, eſt dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam conſtare poſſit, hanc proportionum compoſitionem non eſſe additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis poſſe componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione; quod iidem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris DC, ad CE, eſt minoris inæqualitatis, in poſteriori vero, æqualitatis. Sed hac de re plura ſcribemus in propoſ. 5. lib. 8.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compoſitionem proportionum pertinent, vel ex ea demonſtrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.



SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; a atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. a 23. ſexti. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipſis, b quorum ſunt dimidia, c eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF. b 34. primi. c 15. quinti.

PRO-

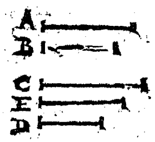
II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonſtratione huius propoſ. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipſis vnam proportionem componere. a Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compoſitam eſſe ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea compoſita ſit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. compoſita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quòd his illæ ſumptæ ſint æquales. a 12. ſexti.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



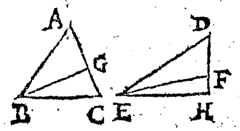
SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. b Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; ſtatuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam eſſe proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque eſſe proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc eſt A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D. b 12. ſexti.

VERVM hæc compoſitio, & detractio proportionum non eſt additio, & ſubtractio proprie, quia alias tum totum eſſet æquale parti, & minus, & maior proportio poſſet detrahi ex minore, vt ad propoſ. 5. lib. 8. oſtendemus.

TRIAN-

IIII.

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendētibus continentur.



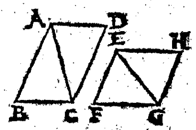
SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt conſtat ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, ſint æquales. a Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA, b ita eſt rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC. (Nam ſi baſes ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita eſt rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF. c Rectangulum igitur ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC, eſt, vt rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF; & permutando, rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Sed vt rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, d ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, e quod hæc triangula ſint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eaſdem cum illis baſes AC, DF, altitudineſque eaſdem BG, EH; ac proinde inter eaſdem cum illis parallelas ſunt conſtituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Quod eſt propoſitum.

a 4. ſexti.
b 1. ſexti.
c 11. quinti.
d 15. quinti.

PARAL-

V.

PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.



SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter ſe, quorum anguli B, & F, ſint æquales. Dico eſſe, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, ſubtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonſtrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. a Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG; b quòd hæc ipſorum ſint dimidia; c Erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub EF, FG. Quod eſt propoſitum.

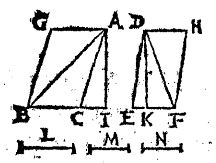
a 15. quinti.
b 34. primi.
c 11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter ſe proportionem habēt compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

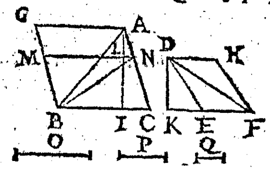
SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compoſitam eſſe ex proportione baſis BC, ad baſin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, baſes vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M;

 Vt



Vt autem A I, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quòd & AI, ipsi D K, æqualis ponatur; a Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt B C, ad EF. b At vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. c Igitur quoque erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum D E F, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum E H: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin E F, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

[a] 7.quinti. [b] 1.sexti. [c] 11.quinti.



SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior; bases vero BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, æquali ipsi DK; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem I L, vel ad DK, ipsi IL, æqualem, hoc est, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, d ita est, basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q: e erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis B C, ad basin

[d] 1.sexti. [e] 22.quinti.

EF:

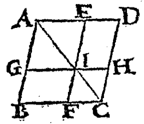
EF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.

EODEM pacto ostendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor est, ad triangulum A B C, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum C G, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; a erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum NBC; ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammũ CG, vt LI, seu DK, ad AI, hoc est, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus. b Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem propootionibus. Quod est propositum.

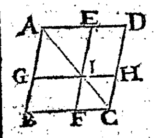
[a] 1.sexti. [b] 22.quinti.

PROBL. 18. PROPOS. 24. 22.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.



ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quòd enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui

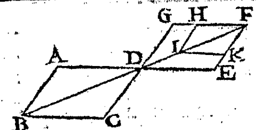


a 29. primi. angulus B A D; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus A G I, externus interno ABC; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est E G, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC; & triangulum A E I, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam
b 4. sexti. ex coroll. propos. 4. huius lib. b erit vt A B, ad B C, ita A G, ad GI; atque ita latera circa æquales angulos B, &
c 4. sexti. G proportionalia sunt. Rursus c erit vt BC, ad C A, ita
d 22. quinti. GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad I E; ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo B D;
e 21. sexti. e atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, iisdem fere mediis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogram-



lelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrāmi AC. Dico parallelogrammum GE, simile esse parallelogrammo A C. Quòd enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur. a Nam quia angulus A, a 29. primi.
æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G.
Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. c Rursus b 34. primi.
quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt æquales, d erunt c 15. primi.
his quoque oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula d 34. primi.
sunt G E, A C, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulum sit triangulo DGF; & triangulum BCD, triangulo DEF, vt constat
ex propos. 29. lib. 1. e Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad G F. e 4. sexti.
Rursus vt A D, ad DB, ita GF, ad FD; & vt DB, ad D C, f 22. quinti.
ita FD, ad FE, f ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis æquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.

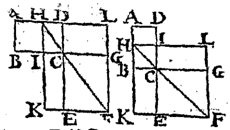
QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis F K, FH, productis in E, & g 24. sexti.
G; erit HK, simile ipsi GE, g vt Euclides demonstrauit: Atqui h 21. sexti.
eidem GE, simile est quoque A C, vt nunc ostendimus. h Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

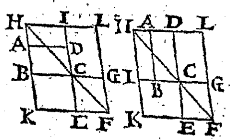
DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint

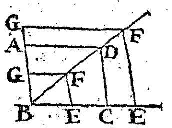
ABCD,



ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt sit vna linea recta BCG, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratum est, ECD, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum HC, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, vt fiat ipsi CEFG, simile. Coniungantur vti prius, & diameter FC, extendatur, donec in H, secet vel latus B A, protractum, vel latus DA, protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel latus C D, protractũ, vel CB, protractũ in I. Dico parallelogrammũ auctum HC, simile esse parallelogrãmo CF. Nam si cõpleatur totum parallelogrammũ KL, consistent HC, CF, circa diametrũ; [a] Quare similia inter se erũt. a 24. sexti.



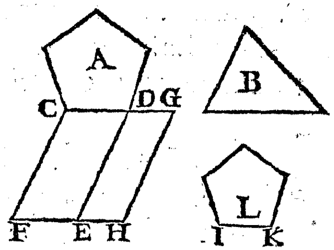


PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans

secans diametrum BD, productam in F; & per F, ducenda FG, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. [a] Erit enim parallelogrãmum GE, simile similiterque positũ a 24. sexti.
ipsi AC, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.

PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

DATO rectilineo simile, similiterq; positum; & alteri dato æquale idem constituere.



SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineũ, q̃d simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [b] cõstituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B; eritq; tam CDG, quàm FEH; linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. [c] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis I K; [d] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll propos. 19. vel 20. huius lib. vt C D, prima ad D G, tertiam, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterq; descriptum: [e] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammũ CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis.

b 44. vel 45. primi.
c 13. sexti.
d 18. sexti.
e 1. sexti.

 Igitur,

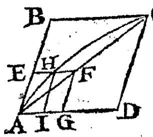
a 11. quinti. b 7. quinti. c 11. quinti. d 9. quinti.

a Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. b Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. c Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; d proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

23.

THEOR. 19. PROPOS. 26.

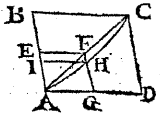
SI a parallelogrammo parallelogrãmum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrũ AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; e ipsa erunt similia, similiterque posita. f Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG; quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. g Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG. h Ac propterea æquales erunt

e 24. sexti. f 1. definit. sexti. g 11. quinti. h 9. quinti.

erunt rectæ AI, AG; pars, & totum: quod est absurdum.

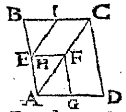
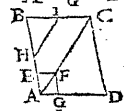
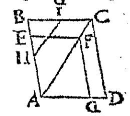


QVOD si dicatur recta AHC, secare alterũ latus FG; Tunc ducta HI, parallela ipsi EF; a erunt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterq; posita. b Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. c Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE; d ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaq; si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 24. sexti. b 1. definit. sexti. c 11. quinti. d 9. quinti.

SCHOLIVM.

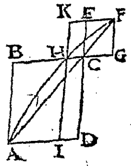
ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiuè, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autẽ tota AB, ad totam BC; e ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; f Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (g qui æquales sunt, internus, & externus.) latera proportionalia, h erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. i Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, k parallela quoque est rectæ HI; propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem fiat, quæ AF, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum vna linea

e 15. quinti. f 11. quinti. g 29. primi. h 6. sexti. i 28. primi. k 2. sexti.

nea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Consistunt ergo BD, EG; parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

QVOD si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur, ut lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE, unam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineã conficere. Si enim AC, FC, non faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K.

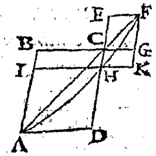


Quoniam igitur parallelogramma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. a Habet autem CB, maior ad BA, maiorem proportionem, quam HB, minor ad eandem BA; & est ut CB, ad BA, ita FE, ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH, maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH; b erit EF, maior quam FK; pars quã totum: Quod est absurdum.

a 8. quinti.
b 10. quinti.

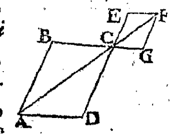
QVOD si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD. Tunc per H, ducta rectæ BC, parallela HI, quæ occurrat re-

ctæ FG, protractæ in K; erunt rursus similia similiterq; posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut HD, ad DA, ita FK, ad KH. a Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est ut CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq; posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; b ideoque FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.



a 8. quinti.
b 10. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; c atq; idcirco æquiangula erunt, habebuntq; angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: d Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales; e Ac propterea AC, FC, unam component rectam lineam. Quod est propositum.



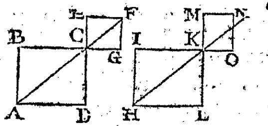
c 6. sexti.
d 29. primi.
e 14. primi.

RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a tota ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, ut ostendatur circa eandem cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, f erit EG, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo IL, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & MN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, æquale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL;

f 24. sexti.

to I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.

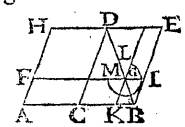
IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit æquale ipsi EG. Nam KM, æqualis est ipsi EF, & MN, ipsi F C, &c.



26. ## THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrãmis similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur; maximũ id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D, Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens



existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: [c] Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales AC, CB. Igitur & C F, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, [d] æquale existens ipsi C E, propter bases æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

a 24. sexti.

b 43. primi.

c 36. primi.

d 36. primi.

ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. [e] Parallelogramma F D, DI, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, ([f] quod ipsi G E, æquale est,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atque idcirco addito communi CF, maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

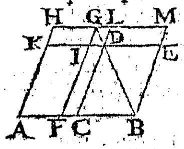
e 36. primi.

f 43. primi.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta H M, quæ sit parallela ipsi A B, occurratq; rectis AK, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela

rallela ipsi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum secundum rectam A B, deficiens parallelogrammo F M, a quod ipsi C E, est simile similiterq; positū, cum sit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius esse A D, ipso A G. Protracta enim C D, ad L, b erunt æquales rectæ H L, L M, c ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. d Cum igitur D M, sit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipsi D F. Est autem H D, maius quam H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L; Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo I L. Iisdem argumentis concludes A D, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam A B, vt punctum G, sit vltra D, in diametro B D, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse A C, habetque maiorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similis existat parallelogrãmo C E. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandē rectā lineam applicatorū, &c. Quod erat demonstrandū.

a 4. sexti.
b 34. primi.
c 36. primi.
d 43. primi.



SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata A C; qualis est A K, in priori figura; vel minorem; cuiusmodi est A F, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro B D; vel in ea producta ad partes D.

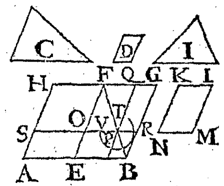
27.

PROBL. 8 PROPOS. 28.

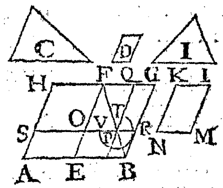
AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiēs figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datū rectilineū, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cū similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiā applicatur, & ei⁹, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum equale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B, a describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C; cum sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, equale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) b & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem similiterq; positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale vero excessui inuēto I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, vel minus, vt constat. Quare abscisis rectis F O, F Q, quæ

a 18. sexti.
b 25. sexti.



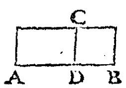
quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi E G: a atque adeo circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, b quod simile est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. c Nam cum P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, d quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C, (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.



a 26. sexti.
b 24. sexti.
c 43. primi.
d 36. primi.

SCHOLIVM.

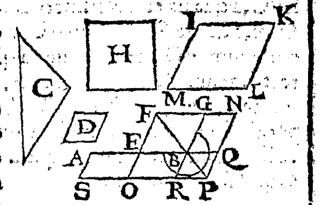
MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Qua de re, si placet, consule eorum commentarios.



PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis.

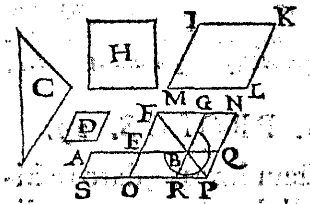
PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; a super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterq; positum. b Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G, constituatur quadratum H, æquale; c cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile vero ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cũ parallelogrammo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinem M K, E G, sit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cum sit æquale ipsi M K, & simile. d Quare O N, E G, circa eandem diame-

a 18. sexti.
b 14. secũdi.
c 25. sexti.
d 26. sexti.



diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam AB, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo QR, [a] quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. [b]Nam cum A O, E R, sint æqualia, [c] & E R, æquale complemento BN; erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, vna cum E G; si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon E P G, & rectilineum C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

[a] 24. sexti.
[b] 36. primi.
[c] 43. primi.

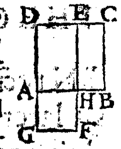
29.

PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; [d] ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta E F, rectam AB, in H. Dico A B, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & A C; si dematur commune

[d] 29. sexti.



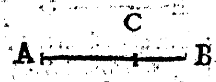
mune AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cum habeant angulos æquales A H F, BHE, vtpote rectos; [a] erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad H F, hoc est, ad AH, ipsi HF, equalem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, vt segmentum AH, ad segmentum HB; secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

[a] 14. sexti.

ALITER quoque ostendemus A B, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum H C, comprehensum sub prima A B, & tertia H B, æquale quadrato mediæ AH; [b] erunt ipsæ proportionales: vt A B, quidem prima ad A H, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est A B, in H, extrema ac media ratione.

[b] 17. sexti.

ALITER totum problema conficiemus. [c] Diuidatur A B, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento C B, æquale sit quadrato alterius segmenti A C. Dico A B, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [d] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ A B, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.



[c] 11. secũdi.
[d] 17. sexti.

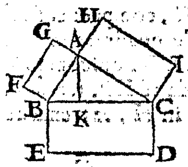
SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituendæ est; vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulũ BAC, rectum; describaturque super BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE; a cui similes similiterq; positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per corollarium propos. 8 huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primã, ad figuram CH, super secundam, similem similiterq; positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Nõ secus ostendetur, esse quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundã, ita BG, sexta ad BD, quartam; b erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cum sexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

ALITER. c Cum triangulo ABC, simile sit triangulum KAC, sintq; homologa latera ipsorum BC, CA;

(Nam

a 18. sexti.
b 24. quinti.
c 8. sexti.

(Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) a habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. b Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. c Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulũ ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secũdam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; d erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ita composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD. Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; e cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. f Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: g Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

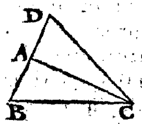
VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus.

a 19. sexti.
b 19. vel 20. sexti.
c 11. quinti.
d 24. quinti.
e 19. vel 20. sexti.
f 24. quinti.
g 47. primi.

Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisq; similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

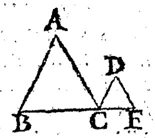


DETVR triangulum ABC, sitque figura quæuis super latus BC, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, [a] erit figura super CD, (quæ similis sit ei, quæ super BC, similiterque posita) descripta æqualis figuris super AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque posita: Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque æqualis basi BC; [b] erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cum DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.

[a] *31. sexti.*
[b] *8. primi.*

THEOR. 22. PROPOS. 32. 30.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secũdum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

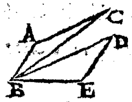


HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE; inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, [a] erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa [b] erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: [c] Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *29. primi.*
[b] *6. sexti.*
[c] *32. primi.*
[d] *14. primi.*

SCHOLIVM.

DEBENT *autem prædicta duo triangula ita secundũ* *vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quæ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A; quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.*



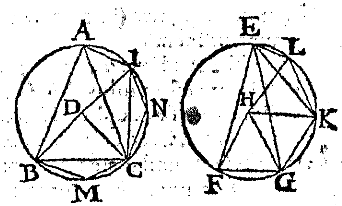
QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sunt ad angulum CBD, ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

32. THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandẽ habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC,

BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcũ FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG; & angulum



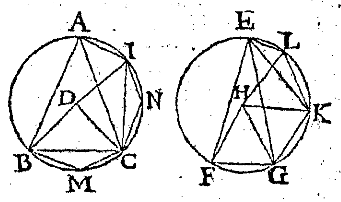
BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehẽdunt rectæ FH, HG, & arcus FG. *a 1. quarti.*
Ductis enim rectis BC, FG, [a] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC; At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, [b] erunt quoque æquales arcus BC, CI; [c] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. *b 28. tertij.* *c 27. tertij.*
Eadem ratione ęquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, [d] necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; *d 27. tertij.*
Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [e] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli *e 6. defin. quinti.*
BDC,

BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

QVONIAM vero, vt angulus BDC, ad angulum FHG, [a] ita est angulus BAC, ad angulum FEG; [b] cum illi horum sint dupli; perspicuum est, [c] ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG: Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

[a] 11. quinti. [b] 20. tertij. [c] 11. quinti.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, [d] qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, [e] atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, [f] quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [g] Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.



[d] 27. tertij. [e] 24. tertij. [f] 4. primi. [g] 6. definit. quinti.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. [a] Quare & inter se eadem erunt.

[a] 11. quinti.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

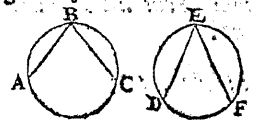
NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, [b] ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiã, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. [c] Cum sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

[b] 33. sexti. [c] 33. sexti.

SCHO-

SCHOLIVM.

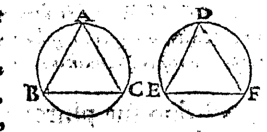
CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate.



Sint .n. circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam cõstituti sint B, E; maior quidem B; minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF: tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

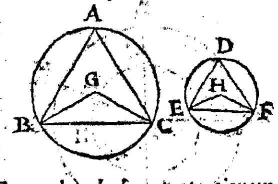
NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similiũ, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoq; sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ: veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primũ duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, segmẽta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias

habere



habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferẽtias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, [a] arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales, efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, [b] eandem proportionem habebunt: Atq; idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.

[a] 26. tertij.
[b] 7. quinti.



SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales; [c] cum hi illorum dupli existant. [d] Quare quatuor recti ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui vt quatuor recti ad angulum G, ita est tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BC: Et vt quatuor recti ad angulum H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. [e] Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quoq; vt tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcũ EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC, ad totã circũferẽtiã ABCA, ita arcus EDF, ad totã circumferentiã DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod est propositum.

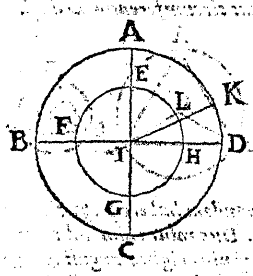
[c] 20. tertij.
[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACI

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in Sphaeram, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duae aut plures rectae lineae ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur e centro I, duae rectae IB, ID, efficientes unam lineam rectam BD; manifestum est, arcus BAD, FEH, similes esse, cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duae rectae IA, ID, constituentes angulum rectum AID, perspicuum quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

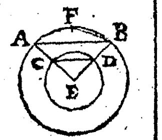
EMITTANTVR iam ex I, duae rectae ID, IK, facientes quemcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, ut est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim ut angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. 2. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [a] erit ut arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH: ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum. [a] 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, insistunt in centro I, anguli aequales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, ut paulo ante ostensum est.

SED

SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectae lineae ex circulis inaequalibus auferunt arcus inaequales, maiorque est arcus minoris circuli, quam ut similis sit arcui circuli maioris.



SINT circuli inaequales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, duae rectae utcunque EA, EB, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntque arcus AB, CD, similes, ut proxime demonstravimus. Et quoniam rectae EA, EB, sectae sunt in C, D, proportionaliter, quod tam EA, EB, quam EC, ED, inter se aequales sint; [a] erunt ductae rectae AB, CD, parallelae; atque ideo triangula EAB, ECD, ex Coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [b] Erit igitur ut EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quam EC. [c] Igitur & AB, maior erit quam CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, aequalis BF; eritque ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quam ut similis sit ipsi FB. Aequales igitur rectae CD, BF, ex circulis inaequalibus AB, CD, arcus inaequales auferunt, maiorque est arcus CD, circuli minoris, quam ut similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.

[a] 2. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 14. quinti.

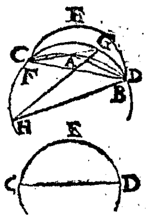
HINC perspicuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam ut similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, aequalis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quam ut similis sit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam ut similis sit arcui FB; cum illa maiorem arcum abscindat, quam CD, ut in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HAEC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt

BF,

BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcum semicirculo minori circuli maioris, multò maiorem esse arcum semicirculo maiorẽ circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quòd si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

HINC *etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, & absolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm vt similis sit.*



Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatq́; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet necessario arcus CED, extra arcũ FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se contineat, sintq́; ambo arcus in eandem partem caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferẽtia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeo æquales erunt circuli, quod est absurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcũ FGB, cuiusmodi est arcus CAD; quoniam vt paulò ante ostẽdimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectæ AF, AB, productaq́; recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaque quoniam arcus CAD,

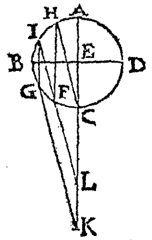
CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales.[a] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB. quod est absurdum. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum est. Quod est propositum.* [a] *16. primi.*

EX *quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.*

NEQVE *verò omittenda videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat, & quam lib. 3. demonstrare debueramus, nisi memoria excidisset. Ea est eiusmodi.*

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio propos. 27. lib. 3. ipsi AC, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur



recta B G, occurrens A C, producta in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum A K, conueniant; [a] *quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, insistẽtes, sunt æquales;* [b] *erunt rectæ HC, IL, parallelæ: Est autẽ & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammum ergo est CHFL;* [c] *ac proinde recta C L, rectæ F H, æqualis erit. Eadem ratione erit KL, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.*

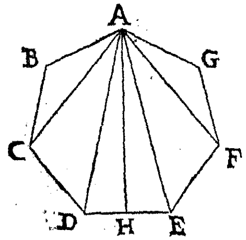
a 27. tertij.
b 27. primi.
c 34. primi.

HVC quoque referenda est propositio sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quæ per incuriam in lib. 4. demonstrata non est, vt ad finem eiusdem lib. 4. diximus. Nimirum.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam; Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes

omnes



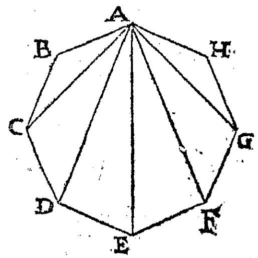
omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, angulosq; continẽt æquales, ex hypothesi; [a] *erũt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quã BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentq; angulos æquales, vt ostensum est;* [b] *erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosque æquales contineant,* [c] *erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam: Quod est propositum.*

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cum vna medietas maior esset quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

SIT deinde figura æquilatera & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare angulum BAH, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, vt in antecedente

 figura,



figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, *totidem angulis* HAG, GAF, FAE, *esse æquales, singulos singulis; ideoque totum angulum* BAE, *toti angulo* HAE, *æqualem esse, nec non & angulum* DEA, FEA, *esse æqualem. Vterque igitur angulus* BAH, DEF, *secatur bifariam. Quod est propositum.*

SED *recta iam* AE, *secet angulum* BAH, *bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum* E, *eumq; diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in* E, *si ex* A, *ad* E, *ducatur alia recta, secabit ea angulum* BAH, *bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum* BAH, *bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo* AE, *secans angulum* BAH, *bifariam, cadit in* E, *secatque propterea, vt demonstratum est proximè, angulum* DEF, *bifariam quoque. Quod est propositum.*

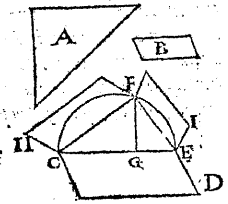
HOC *demonstrato, perspicuum est, rectas lineas, quæ duos angulos proximos figuræ æquilateræ & æquiangulæ secent bifariam, se mutuò secare intra figuram, antequam ad opposita latera, vel angulos oppositos perueniant: ac proinde rectè demonstrari posse, punctum illud sectionis esse centrum circuli intra, vel circa figuram describendi, vt factum est propos. 13. & 14. lib. 4.*

QVONIAM *vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur. Hinc autem exordium capiemus.*

A DATO

I.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.

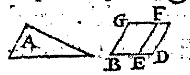


SIT *ex rectilineo* A, *auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo* B, *relinquatq; rectilineum eidem* B, *simile, & similiter positum.* [a] *Constituatur rectilineum* CD, *æquale quidem ipsi* A, *simile vero, & similiter positum ipsi* B; *superq; vnum eius latus* CE, *semicirculus describatur* CFE. [b] *Deinde ablata parte tertia* GE, *imperata videlicet, ex* CE, *agatur* GF, *ad* CE, *perpendicularis, connectanturq; rectæ* CF, EF, [c] *super quas construantur rectilinea* FH, FI, *similia similiterque posita ipsi* CD. *Dico igitur factum esse, quod iubetur.* [d] *Cum enim angulus* CFE, *rectus sit, quippe qui in semicirculo existat;* [e] *erit rectilineum* CD, *æquale rectilineis* HF, FI, *atque adeo, si auferatur rectilineum* FI, *simile similiterq; positum ipsi* B, *ex rectilineo* CD, *hoc est, ex æquali* A, *relinquetur rectilineum* HF, *simile quoque ipsi* B, *similiterq; positum. Quod autem rectilineum ablatum* FI, *sit tertia pars rectilinei* CD, *ita ostendetur.* [f] *Quoniam est vt recta* CG, *ad* GF, *ita recta* CF, *ad* FE; [g] *quòd triangula* CGF, CFE, *sint similia: Habet autem* CG, *ad* GE, *proportionem duplicatam proportionis* CG, *ad* GF, *propterea quod proportionales sunt tres rectæ* CG, GF, GE, *ex coroll. propos. 8. huius lib.* [h] *Itē rectilineum* HF, *ad rectilineum* FI, *proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum* CF, FE; *Erit vt recta* CG, *ad* GE, *ita rectilineum* HF, *ad rectilineū* FI; *quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt* CE, *ad* GE, *ita duo rectilinea* HF, FI, *simul, hoc est, rectilineum* CD, *quod est illis æquale, ad rectilineum* FI: *Est autem* CE,

[a] 25. sexti.
[b] 9. sexti.
[c] 18. sexti.
[d] 31. tertij.
[e] 31. sexti.
[f] 4. sexti.
[g] 8. sexti.
[h] 19. vel 20. sexti.

 ipsius

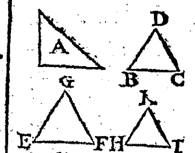
ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.



QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte.
a 45. primi. *a Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partem ipsius DG, hoc est rectilinei dati A. Cum*
b 1. sexti. *enim sit b vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per constructionē DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.*

II.

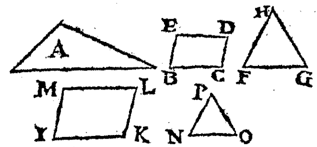
DVOBVS datis rectilineis, tertiam proportionalem inuenire.



SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum sit tertium proportionale.
c 25. sexti. *c Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC,*
d 11. sexti. *d inueniatur tertia linea proportionalis HI;*
e 18. sexti. *e super quam constituatur rectilineum HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ EF, BC, HI;*
f 22. sexti. *f erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.*

III.

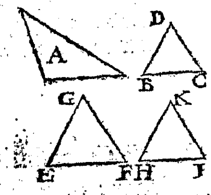
TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.



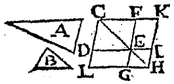
TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale.
a 25. sexti. *a Construatur rectilineū IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG,*
b 12. sexti. *b inuenta quarta proportionali NO;*
c 18. sexti. *c constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales;*
d 22. sexti. *d erunt & rectilinea similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.*

IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.



SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniēdum est proportionale.
e 25. sexti. *e Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC,*
f 13. sexti. *f inuenta media proportionali HI;*
g 18. sexti. *g construatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, mediū esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC;*
h 22. sexti. *h erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod est propositum.*



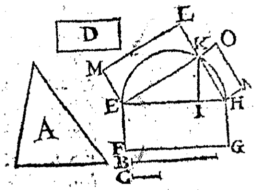
ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale.
a 45. primi. a Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammũ quodcunq; CDEF;
b 25. sexti. b Ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoque linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammũ KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita EI, ad EG;
c 34. primi. c quòd rectæ EI, EG, rectis GH, HI, æquales sint. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG:
d 1. sexti. d Vt autẽ DE, ad EI, ita est DF, ad EK; & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DF, GI, similia sint, similiterque posita,
e 26. sexti. e consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI,
f 1. sexti. f quòd vtraque proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio rectæ B, ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam B, & C; ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D.
g 25. sexti. g Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi

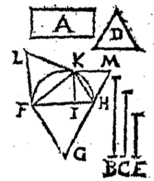


ipsi D. Diuiso deinde latere eius EH, in I, secundum proportionẽ B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus: describatur circa EH, semicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ EK, HK.
a 18. sexti. a Describantur iam super EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipsi EG, vel ipsi D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG, seu ipsi A, habereq; proportionem datam B, ad C.
b 31. tertij. b Cum enim angulus EKH, in semicirculo existens rectus sit;
c 31. sexti. c erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum sint similia inter se, similiterq; descripta.
d 4. sexti. d Quoniam vero est, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, similia sint; Est autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK; quòd tres EI, IK, IH, sint, ex corollario propos. 8. huius lib. proportionales;
e 19. vel 20. sexti. e Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH; hoc est, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia EL, HO, quæ similia sunt, similiterq; posita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C.
f 11. sexti. f Inuenta ipsis B, C, tertia proportionali E;
g 25. sexti. g fiat rectilineum FGH, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisoque latere FH,

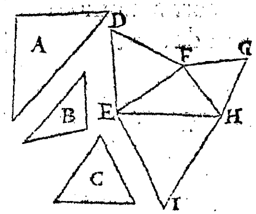


FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK. [a] Describantur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM; ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterq; posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumq; latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. [b] Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit; [c] erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, æqualia. [d] Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.

[a] 18. sexti.
[b] 31. tertij.
[c] 31. sexti.
[d] 4. sexti.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B; quibus æquale sit construendum, simile similiterque positum ipsi C. [c] Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positum ipsi C. Item ipsi B, æquale cõstituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH,

[c] 25. sexti.

GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta EH, [a] super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. [b] Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.

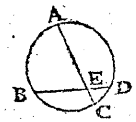
[a] 18. sexti.
[b] 31. sexti.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. [c] Si enim huic parallelogrammo cõstruxerimus æquale rectilineum EHI, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.

[c] 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.



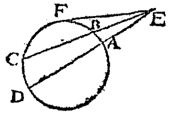
IN circulo ABCD, se mutuo secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [d] Cum enim rectangulum sub AE, EC, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, ED, contento; [e] erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

[d] 35. tertij.
[e] 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

EXTRA

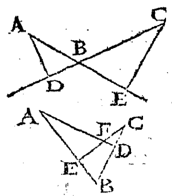


EXTRA circulum ABCD, ſumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, ſecantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. eſſe reciprocas rectis E D, E A: Hoc eſt, eſſe, vt EC, ad ED, ita E A, ad E B: Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F; [a] erit rectangulum ſub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum ſub ED, EA, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula ſub EC, EB, & ſub ED, EA, æqualia erunt: [b] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale eſt tam rectangulũ ſub E C, EB, quàm rectangulum ſub ED, EA; [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo E F, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum ſecet, & ſegmentum eius exterius. Quod eſt propoſitum.

a 36. tertij.
b 14. ſexti.
c 36. tertij.
d 17. ſexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & ſectionem, altera vero inter ſectionem, & prioris lineę aſſumptę perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, ſe mutuo ſecẽt in B, & ex terminis A, C, ad ipſas demittantur perpendiculares; A D, quidem ad CB, at vero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, ſi angulus ABC, fuerit obtuſus; in ipſas vero introrſum, ſi idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & ſectionem B; poſterior vero inter ſectionem B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipſam AB, aſſumptam ducitur) reciprocas eſſe duabus CB, BD, (quæ inter ſimiles terminos includuntur) hoc eſt, eſſe vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cũ enim anguli ABD, ADB, trianguli A B D, æquales ſint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti ſunt; [a] & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in poſteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula AB D, CBE, æquiangula. [b] Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt A B, ad B C, ita BD, ad BE. Quod eſt propoſitum.

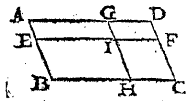
a 15. primi.
b 4. ſexti.

PORRO eadem ratione ſegmenta perpendicularium AD, CE, in poſteriori figura ſe mutuo ſecantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, ſint æquiangula; [c] erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod eſt propoſitum.

c 4. ſexti.

X I.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



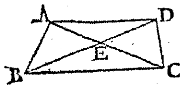
IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ ſe mutuo ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, eſſe proportionalia. [d] Cum enim ſit, vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad I F, ita BI, ad IC; [e] Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod eſt propoſitum.

d 1. ſexti.
e 11. quinti.

X I I.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVI-



DIVIDANT diametri AC, BD, *se mutuo secantes in* E, *quadrilaterum* ABCD. *Dico quatuor triangula* AED, CED, AEB, CEB, *esse*

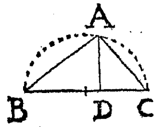
a 1. sexti. *proportionalia*. a *Erit enim vt* AE, *ad* EC, *ita triangulum* AED. *ad triangulum* CED; *& triangulum* AEB, *ad trian-*

b 11. quinti. *gulum* CEB. b *Quare vt triangulum* AED, *ad triangulum* CED, *ita triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. *Eademque ratione ostendes esse, vt* BEA, *ad* DEA, *ita* BEC, *ad*

c 1. sexti. DEC; c *cum vtraque proportio eadem sit proportioni* BE, *ad* ED. *Constat ergo propositum*.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



IN rectangulo triangulo ABC, *ex angulo recto* A, *demissa perpendicularis* AD, *secet basim* BC, *in* D, *extrema ac media ratione, sitque maius segmentum* BD; *ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus* AB, *latere* AC, *maius*. *Dico tria latera* BC, BA, AC, *esse continuè proportionalia*. *Quoniam enim*

d 17. sexti. *per hypothesin est vt* BC, *ad* BD, *ita* BD, *ad* DC; d *erit quadratum ex* BD, *rectangulo sub* BC, CD, *æquale*. *Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib.* AC, *media proportionalis est inter*

e 17. sexti. BC, CD; e *erit quoque quadratum ex* AC, *eidem rectangulo sub* BC, CD, *æquale*. *Quare quadrata ex* BD, AC, *æqualia inter se erunt, ac proinde & rectæ ipsæ æquales erunt*. *Est autem, ex coroll. propos. 8. huius lib.* AB, *inter* BC, BD, *media propor-*

proportionalis. Igitur eadem AB, *media proportionalis erit inter* BC, AC: *hoc est, erit vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC. *Quod est propositum*.

SINT deinde tria latera BC, AB, AC, *in triangulo rectangulo* ABC, *continuè proportionalia, hoc est, sit* BC, *ad* AB, *vt* AB, *ad* AC, *demittaturque perpendicularis* AD, *ad basim* BC. *Dico* BC, *sectam esse in* D, *extrema ac media ratione*. *Quoniam enim est, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC: *Est autem vt* BC, *ad* AB, *ita quoque* AB, *ad* BD; *quòd* AB, *media proportionalis sit inter* BC, BD, *ex coroll. propos. 8. huius*

lib. a *erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AB, *ad* BD: b *ac proinde æqua-* a 11. quinti.

les erunt AC, *&* BD. c *Vt igitur* AC, *ad* CD, *ita erit* BD, b 9. quinti.

ad CD. *Sed vt* AC, *ad* CD, *ita est* BC, *ad* AC, *quod ex* c 7. quinti.

coroll. propos. 8. huius lib. AC, *sit media proportionalis inter*

BC, *&* CD. d *Igitur erit quoque* BC, *ad* AC, *hoc est, ad* BD, d 11. quinti.

vt AC, *hoc est, vt* BD, *ad* CD: *ac propterea* BC, *in* C, *secta erit extrema ac media ratione*. *Quod est propositum*.

ITAQVE si super datam rectam BC, *construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta* BC, *extrema ac media ratione in* D. *Descripto deinde semicirculo* BAC, *circa eandem datam* BC, *erigenda erit ad* BC, *perpendicularis* DA, *iungendæque rectæ* BA, CA. *Triangulum enim* ABC,

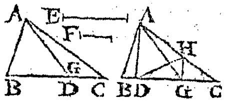
rectangulum erit, e *cum angulus* BAC, *in semicirculo rectus* e 31. tertij.

sit; ac proinde cum perpendicularis AD, *secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est*.

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineā rectam ducere, quę triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, *oporteatque a dato puncto* D, *in eius latere* BC, *lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam* E, *ad* F. *Diuidatur* BC, *in* G, *secundum proportionem* E, *ad* F, *cadatque primò*



primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturque recta DA. [a] *Quoniam igitur est vt* BD, *ad* DC, *ita triangulum* BDA, *ad triangulum* CDA, *secabit recta* DA, *triangulum datum secundum proportionem datam* BG, *ad* GC, *hoc est*, E, *ad* F. *Quod erat faciendum.*

a 1. *sexti.*

CADAT *deinde punctum* G, *inter* C, & D, *vt in secunda figura. Ducatur ergo recta* DA, *cui per* G, *parallela agatur* GH, *coniungaturq; recta* DH. *Dico rectam* DH, *secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* E, *ad* F, *seu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim recta* GA; [b] *erũt triãgula* HGA, GHD, *æqualia, cum sint super eandem basin* GH, & *inter easdem parallelas* GH, DA. *Addito igitur communi triangulo* CGH, *fient æqualia triãgula* CGA, CDH. [c] *Ac proinde triangulum* ABC, *eandem habebit proportionẽ ad* CGA, & *ad* CDH. [d] *Diuidendo igitur, erit vt triangulum* BGA, *ad triangulum* CGA, *ita trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH. [e] *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur erit & trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* BG, *ad* GE, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositũ.*

b 37. *primi.*
c 7. *quinti.*
d 17. *quinti.*
e 1. *sexti.*

CADAT *tertiò punctum* G, *inter* B, & D, *ducaturq; recta* DA, *cui rursus per* G, *agatur parallela* GH. *Dico igitur rursus, rectam ductam* DH, *secare triangulum* ABC, *secundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc est, esse triangulum* BDH, *ad trapezium* CDHA, *vt* E, *ad* F. *Ducta enim recta* GA; [f] *erunt, vt prius, triangula HGA*, GHD, *æqualia; additoque communi* BGH, *æqualia fient* BGA, BDH. [g] *Quare erit* ABC, *ad* BGA, *vt ad* BDH. [h] *Diuidendo ergo erit* CGA, *ad* BGA, *ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH; & *conuertendo, vt BGA, ad* CGA, *ita* BDH, *ad trapezium* CDHA. [i] *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur &* BDH, *ad trapezium* CDHA, *erit vt* BG, *ad* GC, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositum.*

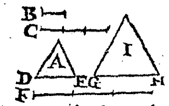
f 37. *primi.*
g 7. *quinti.*
h 17. *quinti.*
i 1. *sexti.*

HINC *perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto*

puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

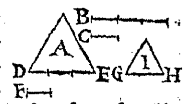
XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



SIT *rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque)* [a] *inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F,* [b] *inueniatur media proportionalis GH;* [c] *super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineũ A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterq; positum. Quod erat faciendum.*

a 12. *sexti.*
b 13. *sexti.*
c 18. *sexti.*

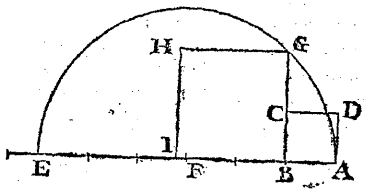


NON *secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterq; positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.*

FACILE *igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus,*

bimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

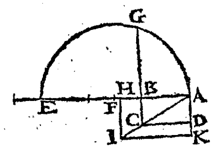
NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à praecedenti differt, vt mox ostendemus.



SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandũ. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB, aequales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplũ esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiã, ita BH, quadratum secundae, ad AC, quadratum tertiae, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectae BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.



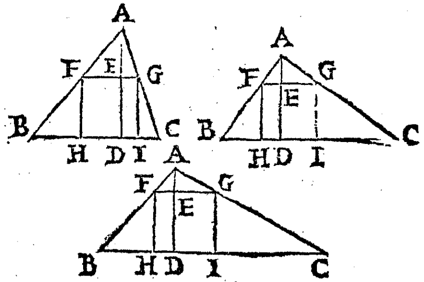
SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quaesiti. Quare si abscindatur AH, aequalis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractae in I, perficiaturque parallelogrammum HK; [a] erit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectae EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundae aequalis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod est propositum. [a] 24. sexti.

EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod haec simul tradit inuentionem lineae mediae proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quae proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

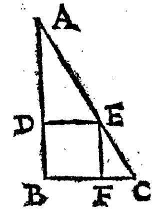
IN dato triangulo quocunque quadratum describere.



SIT datū triangulum ABC, acutāgulū. Ex angulo quocunq; A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 1. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, ut eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum, esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit ut BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. &
[a] 4. sexti. *componendo, ut BC, ad DC, ita FG, ad EG. [a] Sed ut DC, ad AD, ita est EG, ad AE; quòd per coroll. propos. 4. huius*
[b] 22. quinti. *lib. triangula ADC, AEG, sint similia. [b] Igitur erit ex æquo, ut BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per constructio-*
[c] 22. quinti. *nem est, ut AD, ad BC, ita AE, ad ED; [c] erit rursus ex æquo, ut BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem. Aequalis igitur est & FG, ipsi*
[d] 34. primi. *ED. [d] Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis FH, GI, æqualis existat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia*
[e] 29. primi. *inter se. [e] Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in paralle-*

parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, ut in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.



QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita ut eadem sit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelā ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. [a] Quoniam igitur est, ut [a] 4. sexti.
BC, ad AB, ita DE, ad AD; quòd triāgula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib.
Est autem per constructionem, ut AB, ad BC, ita AD, ad [b] 22. quinti.
DB, [b] erit ex æquo, ut BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare ut prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.

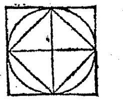
VERVM hoc problemate Commandini multò ingeniosius est id, quod sequitur.

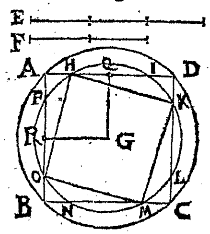
XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea sit, dummodo maior non sit, quàm dupla. Nã si latera quadrati secentur

secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem eum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est; erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum A B C D, describi nequeat, quàm illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquidò constat, quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Eritque eius semidiameter maior, quàm semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplũ est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, MO, OH, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, esse quadratũ in circulo HIKLMNOP, descriptũ, atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionẽ E, ad F. Descripto n. circulo circa datũ quadratũ ABCD, ex cẽtro G, ductisq́; ex G, ad latera AD, AB, perpẽdicularibus GQ, GR, [a] sectæ erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales sunt, [b] æqualiter distabunt à cẽtro G, proptereaq́; & HI, OP, æqualiter ab eodem centro distabunt. [c] Quare æquales erunt HI, OP, ideoq́; & earum semisses QH, QI, RO, RP, inter se erunt æquales.





[a] 3. tertij.
[b] 14. tertij.
[c] 14. tertij.

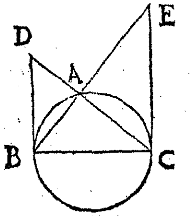
æquales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, DI, PA, OB. Eademq́; ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendẽtur æquales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, DI, PA, OB. Item quia æquales sunt HI, OP, si addantur æquales ID, PA, fient totæ æquales HD, AO: Atq; eadem de causa æquales erunt BM, KC, & inter se, & illis duabus HD, AO. Itaq; quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia sunt, angulosq́; continent æquales, nimirum rectos; [a] erunt & bases HK, HO, æquales. Eodemq; modo demonstrabũtur KM, MO, æquales & inter se, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo est figura HKMO. Dico & rectangulam esse. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia sint, [b] erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt OHK, HKM, KMO, MOH, [c] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum est, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumque circumscribat. Circulus enim HKMO, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.

[a] 4. primi.
[b] 28. tertij.
[c] 31. tertij.

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmẽto interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut &, quæ sequitur. Vtramq; autẽ demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC,

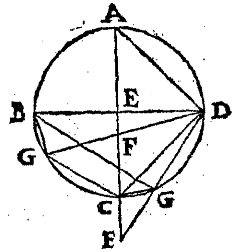


ad quam in B, C, excitetur duæ perpendiculares BD, CE, ac per assumptum quoduis punctū A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, educta rectæ BA, CA, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub EB, BA, quàm sub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angulo recto C, demissa est CA, ad basin BE, perpendicularis; [a] *quòd angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB,* a 31. tertij.
BA. Quare [b] *rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.* b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circūferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturq; ex puncto D, recta vtcunque DF, secans diametrum AC, in F, & circumferentiam



cumferentiam in G. Dico rectangulum sub FD, DG, quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter se. Nam angulus CDF, cōmunis est, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis; [a] *ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quòd autem anguli DCF, DGC, æquales sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum;* [b] *erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, est extra circulum, ducta recta AD,* [c] *erunt anguli DAC, DCA, insistentes quadrantibus æquales:* [d] *Sed tam DAC, DGC,* [e] *quàm DCA, DCF, æquales sunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula sint;* [f] *erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc est, tres lineæ DF, DC, DG, continuè proportionales erunt.* [g] *Igitur rectangulum sub extremis DF, DG, æquale est quadrato mediæ DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.*

a 32. primi.
b 27. tertij.
c 27. tertij.
d 22. tertij.
e 13. primi.
f 4. sexti.
g 17. sexti.

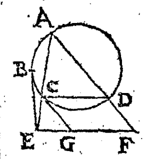
ALITER. Ducta recta BG; [h] *erit angulus BGD, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem,* [i] *æquiangula erunt.* [k] *Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG.* [l] *Rectangulum ergo sub DF, DG, æquale erit rectangulo sub DB, DE.* [m] *Sed rectangulo sub DB, DE, æquale est quadratum rectæ AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quòd ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB.* [n] *Fiet enim triangulum rectangulū BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE. Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod est propositum.*

h 31. tertij.
i 32. primi.
k 4. sexti.
l 16. sexti.
m 17. sexti.
n 31. tertij.

DATO

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.

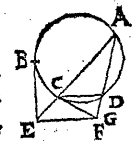


HOC problema non minus acutum quàm curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multò clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quàm EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturq; recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt,

[a] 17. sexti. *[a] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:*
[b] 36. tertij. *[b] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub EA, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus de-*
[c] 22. tertij. *scribi poterit. [c] Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æqua-*
[d] 13. primi. *les sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, [d] qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur*
[e] 32. tertij. *communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis: [e] Est autẽ & angulus DCG, angulo A, in alterno segmẽto æqualis.*

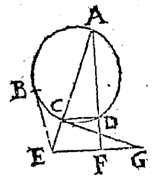
Igitur

Igitur anguli DCG, CGE, inter se æquales erunt, atque ideo, cum sint alterni, [a] rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod est propositum. [a] 27. primi.



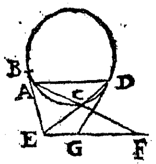
CADAT deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando EF, ipsi EB, æqualis est. Ducta igitur rursus recta GC, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq; recta AF, secans circumferentiam in D.

[b] 36. tertij. *Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF; [b] estque rectangu-*
[c] 5. quarti. *lum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF, æquale. Quare [c] si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum se-*
[d] 37. tertij. *cet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur, [d] tanget*
[e] 32. tertij. *recta EF, eum circulum. [e] Angulus ergo EFC, angulo A,*
[f] 32. tertij. *in alterno segmento illius circuli æqualis erit: [f] Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli*
[g] 27. primi. *ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni, [g] erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.*



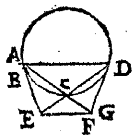
CADAT tertio punctum G, vltra F. quod contingit, quando EF, minor est quàm EB. Facta igitur eadem constru-
[h] 17. sexti. *ctione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt, [h] erit rectan-*
[i] 36. tertij. *gulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [i] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36.*
[k] 21. tertij. *lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. [k] Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius cir-*
[l] 32. tertij. *culi, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se æquales erũt: [l] Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD,*
[m] 27. primi. *angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, [m] parallelæ erunt CD, EF. Quod est propositum.*

SI vero ex eisdem punctis datis E, F,
ducendæ sint duæ rectæ ad aliquod pun-
ctum conuexæ circumferentiæ, quæ pro-
ductæ secent concauam peripheriam in
duobus punctis, ita ut recta per ea tran-
siens sit parallela rectæ puncta E, F, con-
nectenti, hoc modo procedemus. Ducta
recta EB, circulum tangente in B, inue-



niatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, cadat-
que primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta
GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tan-
gentem E B, ducatur ED, secans circumferentiam in C, pun-
cto, per quod recta eijciatur ex F, secans circumferentiam in
A. Dico rectam AD, ductam esse rectæ EF, parallelam. Quo-
niam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè sunt proportiona-
[a] 17. sexti. les, [a] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æqua-
[b] 36. tertij. le: [b] Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem quadra-
to ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula
sub EF, EG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propos. 36.
lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest.
[c] 21. tertij. [c] Duo ergo anguli CDG, & F, in eodem segmento C D F G,
illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CG, inter se erunt
[d] 32. tertij. æquales. [d] Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno
segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F,
[e] 27. primi. angulo A, alterno æqualis erit, [e] ideoque parallelæ erunt AD,
E F. Quod est propositum.

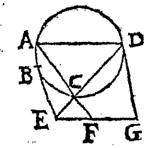
CADAT deinde punctum G, in F. Du-
cta igitur rursus recta G D, tangente circu-
lum in D, non tamen versus priorem tangen-
tem EB, ducatur recta ED, secans circumfe-
rentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex
F, secet circumferentiam in A. Dico ductam
rectã AD, rectæ EF, parallelã esse. Cũ enim



æquales sint EB, EF, (quòd sit EF, ad EB, ut EB, ad EF.) erũt
earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub ED,
EC, quadrato ex E B, æquale. Igitur & quadrato ex E F.
[f] 5. quarti. Quia ergo, [f] si circa triangulum CDF, circulus describatur,
[g] 37. tertij. recta ED, eum secat, & EF, applicata est, [g] tanget EF, eum
[h] 32. tertij. circulum. [h] Angulus ergo E F C, angulo F D E, in alterno
segmento

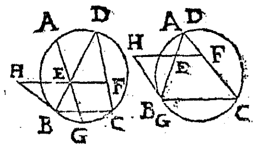
segmento eius circuli æqualis erit: [a] Est autem angulus FDE, [a] 32. tertij.
angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igi-
tur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit.
[b] Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum. [b] 27. primi.

CADAT tertio punctum G, ultra F.
Facta ergo eadem cõstructione, cum tres re-
ctæ EF, E B, EG, sint continuè proportiona-
les, [c] erit rectangulum sub EF, EG, siue sub [c] 17. sexti.
EG, EF, æquale quadrato ex EB: [d] Est au- [d] 36. tertij.
tem eidem quadrato æquale rectangulũ sub
ED, EC. Igitur rectãgulum sub EG, EF,



rectangulo sub E D, EC, æquale erit; proptereaꝗ ex scholio
propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus po-
test describi. [e] Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in qua- [e] 22. tertij.
drilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erũt
duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, [f] qui [f] 13. primi.
etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi
CFG, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: [g] Est au- [g] 32. tertij.
tem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circu-
li ABCD, æqualis. Igitur & angulus C F E, eidem angulo
CAD, alterno æqualis erit: [h] atque idcirco parallelæ erunt [h] 27. primi.
AD, EF. Quod est propositum.

SED sint iam data puncta
E, F, intra circulum A B C D.
Ducta recta AG, per E, utcun-
que, inueniatur tribus rectis EF,
EA, EG, quarta proportionalis,
cui æqualis sit EH, ducaturque
H B, circulum tangens in B.
Ducta enim recta ex B, per E,



secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante
circumferentiam in C; dico ductam rectam B C, parallelam
esse rectæ EF. Quia enim ita est EF, ad EA, ut EG, ad E H;
[i] erit rectangulum sub EF, EH, æquale rectangulo sub E A, [i] 16. sexti.
E G: [k] Est autem rectangulum sub EA, EG, æquale rectan- [k] 37. tertij.
gulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem
rectangulo sub ED, E B, æquale erit: ac propterea ex scholio
propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus po-
terit describi. [l] Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem [l] 21. tertij.
segmen-

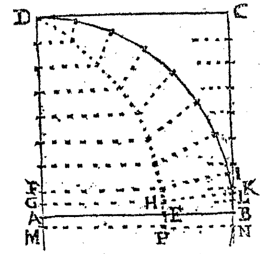
a 32. tertij. segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt. a Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus
b 28. primi. interno. b Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositũ.

QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, ut perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATVRA lineæ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, ubi lineam quandam inflexam explicat, quam, ut ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nõnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquàm autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, ut propterea à Pappo reijciatur, tanquàm inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse cẽsuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc usque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus. Etsi autem ibidem Quadraturam circuli diximus à nobis differri in librum de mensurationibus magnitudinũ, visum tamen est, eam breuiter hic attingere, reijciendo pleniorem eiusdem Quadraturæ tractationem in eum, quem diximus, librum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.

IN

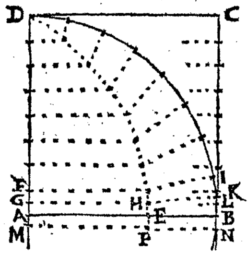


IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, ut volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa cẽtrum A, quàm latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoq;, ita ut quo tempore punctum D, circumferẽtiam DB, uniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, uniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, ut perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus uniformes, quorum unus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus DB, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus utrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & utrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde utraque semissis iterum bifariam, & singulæ rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex cẽtro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendãtur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primã, secunda secundã, &c.

per

per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum AB, in E.



SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariã continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, factæ sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus DB, qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusq; rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi GH, æqualem MP. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint æquales, licet Geometricè loquendo, recta AE, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque GL, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

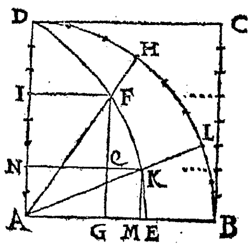
RECTAM porrò AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam

& rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrũ A, per arcum DB, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tũc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent vniformes, aut nõ eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quàm latus DC, perueniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac deniq; eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, quæ Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittãtur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittãturq; ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta DI, cõtinet, propterea quòd rectæ AH, IF, se interseccãt in puncto F, Quadratricis:

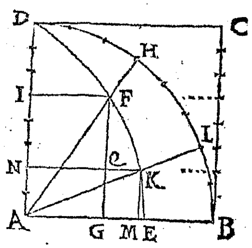
Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quàm recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor quàm DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdũ, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quàm conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. [a] 34. primi.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo, vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG. [b] 34. primi.

RVRSVS quia est, vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

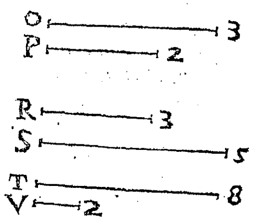
DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



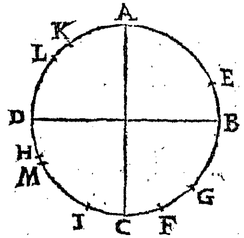
SIT primùm arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AF, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P; ductaque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniã enim vt propos. 1. ostendimus, vt HL, ad LB, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione, vt O, ad P; [a] erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P.

[a] 11. quinti.

DEINDE *totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadraticẽ in F. Ducta igitur recta AFH; erit ex propos. 1. DH, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.*



TERTIO *sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnũ eorũ habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autẽ NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.*



QVARTO *semicirculus ABC, diuidendus sit in datam proportionem, uidelicet in triplã. Secetur vterq; Quadrans AB, BC, secũdum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, æqualis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demantur, nimirũ duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG; reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC; [a] erunt AE, BF, simul ad EB, FC, simul, hoc est, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB: Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.*

[a] 12. quinti.

QVINTO *in eandem proportionem secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur æqualia, nimirum tres arcus AE, BF, CH, simul, & arcus ABI; reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul, & arcus ID. Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; [b] habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam.*

[b] 12. quinti.

POSTREMO *sit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuisis rursus tribus quadrantibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L, sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM; reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD, LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent; [c] habebunt omnes*

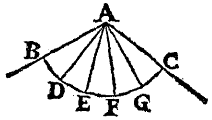
[c] 12. quinti.

quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

[a] 33. sexti. *DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: [a] cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.*

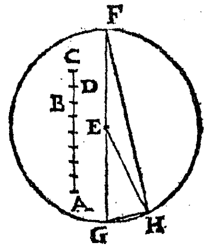


QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna unitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Nam GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque



FGH, ductaq; in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB, ad rectam BD: iunganturq; rectæ HE, HG. Dico Isoscelis trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datã AB, ad BC. Cum enim sit, vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG: [a] ita angulus FGH, ad angulum GEH; [b] erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, eius duplam, ita est angulus GFH, ad angulum GEH; [c] qui illius duplus est. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum. [a] 33. sexti. [b] 11. quinti. [c] 20. tertij.

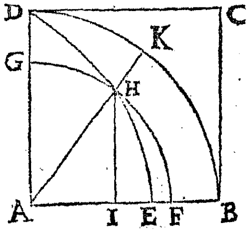
COROLLARIVM.

ITAQVE si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilateræ parium laterum, per posteriora vero laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosuè figura inscribenda habere debet, &c.

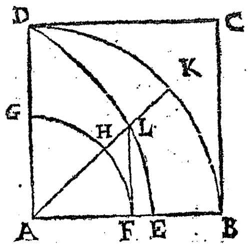
IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erũt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales; hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Sin minus, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, mi noremve, sitque primum AF, maior quàm AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturq; perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF: estq; vt AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli
a 15. quinti.
ad circumferentiam circuli; a erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad
b 15. quinti.
eandem circumferentiam; b ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est,
c 11. quinti.
vt arcus BD, ad arcum FG.) c Erit quoque arcus BD, ad re
d 9. quinti.
ctam DA, vt idem arcus BD, ad arcum FG: d ac propterea æquales erunt recta DA, & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcũ FH, quòd arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, vt su
e 11. quinti.
pra in hoc scholio ostensum est: e Erit quoque recta DA, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta
f 14. quinti.
DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; f erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis ar-
g 3. tertij.
cum duplum arcus FH: (Nam recta AF, g secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcũ; ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam maiorem base AE, Quadratricis.

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto



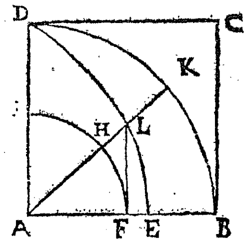
Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam
diuideretur, a ac proinde & angulus in centro A, si ad alte- a 4. vel 8. primi.
rum punctum contactus recta adiungeretur; b ideoque & ar- b 26. tertij.
cus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem base AE, Quadratricis: Sed neque vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, ut DA, ad AE; erit conuertendo quoq; AE, ad DA, vt DA, ad arcũ Quadrãtis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia propor-

[a] 11. quinti. [b] 9. quinti.



proportionalis; [a] erit A D, ad eam tertiam, vt ad arcum B D, cum vtraque proportio sit eadē, quæ A E, ad A D. [b] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui B K, qui minor est Quadrãte, inueniẽda sit recta æqualis; fiat vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaque erit quarta hæc recta æqualis arcui B K. Nam cum sit, ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad arcum B K; [c] erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus D B, ad arcum B K: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis D B. [d] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui B K. Si verò arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

[c] 11. quinti. [d] 14. quinti.

COROLLARIVM. II.

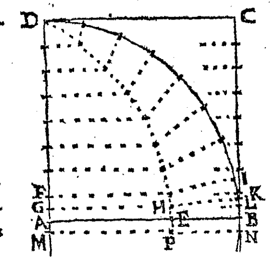
SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis A E, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus A D, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt D A, ad A E, hoc est, vt tertia illa

illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem semidiametri A E: sit autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti B D, vt ostensum est: [a] erit & recta D A, Quadranti semidiametri A E, æqualis. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter A E; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis. [a] 14. quinti.

EADEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quàm D A, A E, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, [b] cum sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem D B, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus D B, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus D A, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi A E, [b] 11. quinti.



ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis A E, cum in ea figura parallela quoque G H, auferens A G, particulam sextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$. multò maior est quàm $\frac{1}{5400}$. vix à base A E, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia vero vltima illa particula lateris D A, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur A G, vltima particula, & arcus B K, vltimum Minutum, ducaturque recta A H. Nam G H, erit sinus anguli G A H, grad. 89. Min. 59. ac proinde A G, sinus anguli A H G, Min 1. posito sinu toto A H, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus A H, statuatur 10000000.

(Ita

(Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quàm si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus D A, earundem partium erit 15708600. vt constat, si 5400. particulæ lateris D A, ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris D A, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris D A, æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter A E; erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum A E, eadem ferè, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{1417203}{9999999}$. hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{157467}{1111111}$. quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

V.

DATO circulo quadratũ æquale cõstituere.

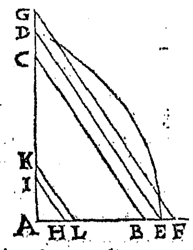
QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro [a] construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.

[a] 14. secũdi.

INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, [b] si fiat vt basis Quadratricis descriptæ ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.

[b] 12. sexti.

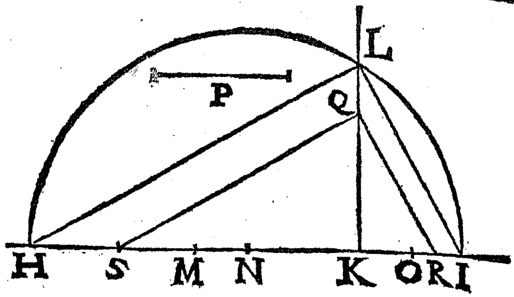
VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construendæ erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus D A E, sitque AD, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur D E, cuius latus AD, & basis A E. Ducta autem recta DE, constructum erit unum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quàm A E, abscindemus ei æqualem AB, parallelamque ipsi DE, agemus B C. Si denique semidiameter sit maior, quàm A E, abscindemus ei æqualem A F, ex A E, producta, & per F, ipsi DE, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrãtis, cuius semidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semidiameter AF: [a] propterea quòd est, vt A E, ad A D, ita tam AB, ad A C, quàm A F, ad A G.



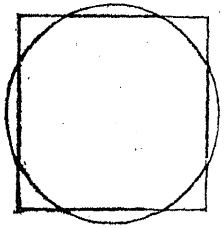
[a] 2. vel 4. sexti.

DEINDE ducta recta HL, cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eã perpendicularis quantacunq; KL; paratũq; erit alterũ instrumentũ quadrandis circulis accommodatũ.

PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta A B, & per B, ipsi D E, parallela agatur BC. In posteriori vero instrumento sumantur duæ KM, M H, ipsi AC, æquales, & recta K I, semidiametro A B, æqualis. Diuisa autem tota recta HI, bifariam in N, describatur ex N, ad inter-



interuallum NH, vel NI, semicirculus secans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius semidiameter AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim KL, media proportionalis est inter KH, KI, ex scholio propos. 13. huius lib. [a] *erit quadratum ex KL, rectangulo sub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initium huius propos. diximus, quòd KH, sit æqualis semicircumferentiæ, & KI, semidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius semidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, describatur, & ex eius centro ad interuallum AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo,*



vt in apposita figura apparet.

[a] 17. sexti.

CÆTERVM diuisio rectæ HI, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Diuisa semidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm HI, facile bifariam secabitur.) accipiatur recta KO, æqualis MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales sint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipsi MO, æqualis: Est autem MO, ipsi HN, æqualis. (quia enim æquales sunt HM, MK; additis æqualibus NN, KO, totæ æquales

æquales fient HN, MO.) Igitur & NI, ipsi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari KL, abscindatur æqualis KQ. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter KI, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus KL. Deinde ducta recta LI, agatur ei parallela QR. Dico circulum, cuius semidiameter KR, æqualem esse quadrato dato, cuius latus KQ, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta KH, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, sit æqualis, ductaque recta LH, agatur ei parallela QS. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt HK, ad KL, ita SK, ad KQ; & vt KL, ad KI, ita KQ, ad KR: erit ex æquo, vt HK, ad KI, ita SR, ad KR. Cum ergo HK, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. SK, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KR. Quia vero KQ, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter SK, KR; quòd angulus RQS, rectus sit, [a] *quippe cum eius partes RQK, SQK, partibus ILK, HLK, recti anguli HLI, æquales sint: (Nam* [b] *angulus HLI, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua KL, media proportionalis inter HK, KI, reperitur.)* [c] *erit quadratum ex KQ, æquale rectangulo sub SK, KR, hoc est, circulo, cuius semidiameter KR: hoc est, circulus semidiametri KR, æqualis est quadrato lateris KQ, vel P. Quod est propositum.*

[a] 29. primi.
[b] 31. tertij.
[c] 17. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ [a] describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

[a] 14. secũdi.

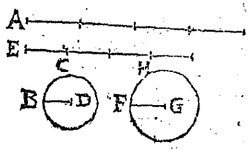
RVRSVS si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [b] constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

[b] 25. sexti.

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nunc autem, vt viciſſim rectæ datæ lineæ circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur AH, æqualis semidiametro BD, descripti circuli, & per H, agatur ipsi DE, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde tribus



tribus rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad interuallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circumferentiam datæ rectæ A, æqualem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad FG; hoc est, [a] ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonstrauit; [b] erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta sit æqualis circumferentiæ B C; [c] erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc est, circumferentia circuli F H, inuenta est datæ rectæ A, æqualis. Quod est propositum.

[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 14. quinti.

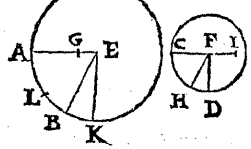
ALITER, & facilius. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius diameter A L, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circumferentiæ quadrans æqualis est rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri AE, CF; sitq; AB, maior, & CD, minor. Datus autem primum sit in minori circulo arcus CD, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior est, erit & semidiameter AE; semidiametro CF, maior. Abscindatur ergo AG, ipsi CF, æqualis, seceturq; arcus CD, ita in H, ex propos. 2. ut eadem sit proportio arcus CH, ad arcum H D, quæ recta A G, ad rectam GE: arcuiq; C H, similis auferatur arcus A B. quod facile fiet, si ducta recta F H, angulo CFH, æqualis fiat angulus

 AEB.



AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, ut AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et cõuertendo, ut EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, ut arcus CD, ad arcum CH: Est autem, ut AE, semidiameter ad semidiametrum CF, [a] hoc est, ut tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, ut Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. [b] Igitur erit quoq; ut arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcũ CH; ac proinde arcus CD, AB, [c] æquales inter se erunt. Quod est propositum.

[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quàm circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, ut CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, ut eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuiq; BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD. quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem esse. Quoniam enim est, ut CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, ut CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, ut CI, ad CF, hoc est, ut AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, ut semidiameter AE, ad semidiametrum CF, [d] hoc est, ut tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. [e] Igitur erit etiam, ut arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, proptereaq; arcus AB, CD, [f] æquales erunt inter sese. Quod est propositum.

[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est; cuiuis data recta abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quàm recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. data cuilibet circumferentiæ inueniri posse rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulò ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita ut quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum sit, ut inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, [a] erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis.

[a] 14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quàm recta linea data; sumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quã data linea recta, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facile fiet, si data recta ex dupla illa linea recta abscindatur

tur æqualis, & semicircumferentia secetur, per propos. 2. vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim sit, dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit autem recta illa dupla æqualis semicircumferentiæ;
[a] 14. quinti *[a] erit quoque data recta illi arcui æqualis.*

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facile etiam fiet, si data recta ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estq́; tripla illa recta circumferentiæ trium
[b] 14. quinti. *quadrantum æqualis; [b] erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.*

DENIQVE si tripla illa linea recta fuerit minor, quā data recta linea, addatur ei rursus prior linea

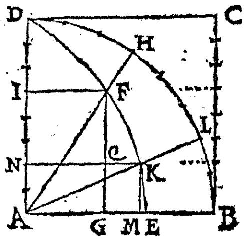
linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta composita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quàm circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnū eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; [a] erit quoque [a] 14. quinti.
data recta linea arcui abscisso æqualis.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, [b] erit quoque data recta arcui [b] 14. quinti.
abscisso æqualis. Quod est propositum.

COROLLARIVM II.

EX ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus H A B. Dico tam arcum H B, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quàm angulum H A B, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice D E, quæ rectam H A, secet in F, ducatur per F, basi A E, parallela F I. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta I A, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt I N, ad N A, eandem proportionem habeat, quã duæ rectæ inuentæ; atque adeo & I N, N A, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta N K, ipsi A E, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico tam arcus H L, L B, quàm angulos H A L, L A B, inter se esse incommensurabiles. Quoniam . n. per propos. 1. est, vt I N, ad N A, ita arcus H L, ad arcum L B: sunt autem I N, N A, incommensurabiles; erunt & arcus H L, L B, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, [a] vt arcus H L, ad arcum L B, ita angulus H A L, ad angulum L A B; erunt etiam anguli H A L, L A B, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.



a 33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

REGESTVM

* A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iij Kkk Lll Mmm.

Omnia sunt folia integra, præter M m m, semifolium.

ROMAE, Apud Sanctium, & Soc.

M. D. LXXXIX.