Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 12 de noviembre de 2021
Actualización: 22/11/2021, hora: 21:58:31

Hoy calculamos determinantes. Estos determinantes los vamos a hacer todos desarrollando por filas o columnas, según convenga, y haciendo, si es necesario transformaciones elementales, que recordamos ahora:

1. F_{ij} es la matriz que resulta de la matriz identidad I al intercambiar la fila i por la j. El determinante cambia de signo
2. $F_i(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando multiplicamos la fila i por el escalar λ. El determinante se multiplica por λ.
3. $F_{ij}(\lambda)$ es la matriz que resulta de I cuando se suma a la i-fila la fila j multiplicada por λ. El determinante no cambia.

En los de orden 3 nunca vamos a usar la regla de Sarrus.

Ejercicio resuelto 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución. 1. Como hay un cero en la tercera fila, desarrollamos por ella:

$$= -1\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 41 + 8 = 49.$$

2. Hacemos ceros en la primera columna debajo del pivote $(1,1)$ con operaciones $F_{ij}(\lambda)$, luego el determinante no cambia:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_{21}(-1),F_{31}(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera columna, obteniendo

$$= 1\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 49.$$

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Solución. Al ser un determinante de orden 4 sin "ceros" es largo. Luego hacemos ceros por el método de Gauss. Hacemos ceros debajo del pivote del lugar $(1,1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{F_{41}(-4)}{\overset{F_{21}(-2),F_{31}(-3)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

porque la cuarta fila es la suma de la segunda y tercera.

Ejercicio resuelto 3. Hallar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución. De nuevo vamos a hacer transformaciones elementales. En vez de hacer ceros en la primera columna, por cambiar, vamos a hacerlos en la cuarta, donde hay un 1 en el lugar $(2,4)$, que lo usaremos como "pivote". Haremos transformaciones de tipo $F_{i2}(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_{42}(-2)}{\overset{F_{12}(-4),F_{32}(-5)}{=}} \begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -18 & -12 & -6 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 \\ -18 & -12 & -6 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_1(-5)}{\overset{F_2(-6)}{=}} \begin{vmatrix} -15 & -10 & -5 \\ -18 & -12 & -6 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

porque hay dos filas iguales

Ejercicio resuelto 4. Hallar x para que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución. En vez de desarrollar desde el principio por alguna fila o columna, hacemos primeros ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & x & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & x \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_{41}(-5)}{\overset{F_{21}(-4),F_{31}(-2)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x-8 & -10 & -15 \\ 0 & -1 & x-6 & x-8 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-8 & -10 & -15 \\ -1 & x-6 & x-8 \\ -6 & -12 & -18 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{F_{32}(-6)}{=} \begin{vmatrix} x-8 & -10 & -15 \\ -1 & x-6 & x-8 \\ 0 & 24-6x & 30-6x \end{vmatrix} = -(24-6x) \begin{vmatrix} x-8 & -15 \\ -1 & x-8 \end{vmatrix} + (30-6x) \begin{vmatrix} x-8 & -10 \\ -1 & x-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (24-6x)\left((x-8)^2-15\right) - (30-6x)((x-8)(x-6)-10) =$$

$$(24-6x)(x^2-16x+55)-(30-6x)(x^2-14x+38) = 6x^2-30x+36.$$

Por tanto

$$6x^2-30x+36=0 \Rightarrow x=2, x=3.$$