Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 03 de noviembre de 2021
Actualización: 03/11/2021, hora: 14:10:15

Ejercicio resuelto 1. Hallar el área determinada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2 - 2$.

Solución. Hallamos los puntos de corte:

$$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x = -1, x = 2$$

Determinamos en el intervalo $[-1, 2]$ qué gráfica de las dos está por encima de la otra. Tomando

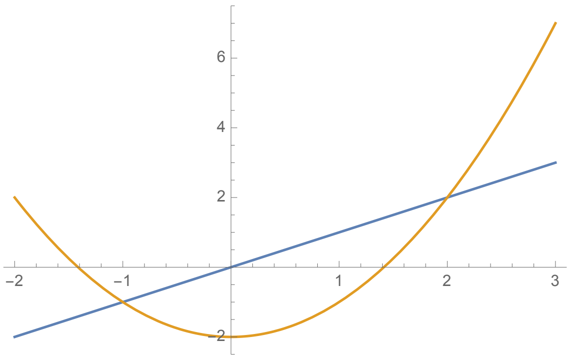

Figura 1: En azúl la recta $y = x$ y en naranja la parábola $y = x^2 - 2$

un valor intermedio, por ejemplo $x = 0$, vemos que la recta es $y = 0$ y la parábola es $y = -2$. Por tanto, la recta está por encima. Así

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} x - (x^2 - 2)\, dx.$$

Hacemos la integral indefinida

$$\int (x - x^2 + 2)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Por tanto,

$$\text{área} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_{x=-1}^{x=2} = (2 - \frac{8}{3} + 4) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2) = \frac{9}{2}.$$

□

Ejercicio resuelto 2. Calcula $a > 0$ para el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea $1/9$.

Solución. Hallamos el punto de corte de la gráfica de $f(x)$ con el eje de abscisas:

$$xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Por tanto, y ya que $a > 0$, nos preguntan por la integral definida

$$\int_0^a x\, e^{3x}\, dx.$$

Esta integral es conocida y se hace por partes:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{3x} \Rightarrow v = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

$$\int xe^{3x}\, dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x}(x - \frac{1}{3}).$$

Por tanto

$$\int_0^a x\, e^{3x}\, dx = \left(\frac{1}{3}e^{3x}(x - \frac{1}{3})\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3}(e^{3a}(a - \frac{1}{3})) + \frac{1}{9}.$$

Como se quiere que sea $1/9$,

$$\frac{1}{3}(e^{3a}(a - \frac{1}{3})) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{3}(e^{3a}(a - \frac{1}{3})) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

$\square$