Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 13 de octubre de 2021
Actualización: 13/10/2021, hora: 17:07:18

Las siguientes integrales son casi "inmediatas".

Ejercicio resuelto 1. Hallar:

1. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$.
2. $\int \frac{1}{x^2}\, dx$.
3. $\int x(x^2+3)\, dx$.
4. $\int \frac{1}{(2x)^3}\, dx$.
5. $\int (\sqrt[4]{x^3}+1)\, dx$.

Solución. 1. Lo mejor es poner el integrando en forma de potencia: $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. En tal caso, la integral es inmediata:

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}\, dx = \frac{x^{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4}\cdot x^{4/3} + c.$$

2. La integral es inmediata:

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

3. Dos maneras de hacer la integral: quitando paréntesis y queda un polinomio, luego es inmediato: $\int (x^3+3x)\, dx$, o, como lo vamos a hacer, observando que la derivada del paréntesis es $2x$ que es "casi" el x que está multiplicando. Quedaría una integral del tipo

$$\int y' y^3\, dx = \frac{y^4}{4}.$$

Por tanto multiplicamos y dividimos por 2:

$$\int x(x^2+3)\, dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)\, dx = \frac{1}{4}(x^2+3)^2 + c.$$

4. Sacamos el 2 fuera del integrando, quedando una inmediata:

$$\int \frac{1}{(2x)^3}\, dx = \frac{1}{2^3}\int \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{8}\int x^{-3}\, dx = \frac{1}{8}\frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{16}\frac{1}{x^2} + c.$$

5. Como es una suma de funciones, se separa en dos integrales, y cada una de ellas es inmediata:

$$\int (\sqrt[4]{x^3}+1)\,dx = \int \sqrt[4]{x^3}\,dx + \int 1\,dx = \int x^{-3/4}\,dx + x = \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + x + c = 4x^{1/4} + x + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2. Hallar:

1. $\int 2x(x^2+1)^2\,dx$.
2. $\int 5\sqrt{5x+1}\,dx$.
3. $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.
4. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución. 1. Dos manera de hacer: se eleva al cuadrado y se multiplica por $2x$, obteniendo un polinomio, quedando integrales inmediatas, o (mejor, porque en el otro caso, nos queda 3 sumandos), vemos que la derivada del paréntesis es $2x$, que está fuera. Por tanto es una integral inmediata del tipo

$$\int y'y^2\,dx = \frac{y^3}{3}.$$

$$\int 2x(x^2-1)^2\,dx = \frac{(x^2+1)^3}{3} + c.$$

2. La derivada de lo de dentro de la raíz es 5, luego esta integral es del tipo

$$\int y'\sqrt{y}\,dx = \frac{y^{3/2}}{3/2}.$$

$$\int 5\sqrt{5x+1}\,dx = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + c.$$

3. Por la misma razón que antes, multiplicamos y dividimos por 2 para que nos quede $\int y'y^{1/2}$.

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + c.$$

4. La derivada de lo que hay dentro de la raíz es $2x$ que es, salvo una constante multiplicativa, lo que hay fuera. Por tanto, multiplicamos y dividimos por 2 para que quede una integral del tipo $\int y'y^{1/2} = \frac{y^{3/2}}{3/2}$:

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$$