

# Algunas notas sobre el modelo solar y la teoría de la precesión de los equinoccios en la obra astronómica de Alfonso X\*

JULIO SAMSO\*\*

## I. INTRODUCCION

El prólogo del *Libro de las Taulas* conserva algunos de los escasos datos conocidos acerca de las observaciones astronómicas que llevaron a cabo los colaboradores del rey Alfonso, Yehudá b. Moshé e Isaac b. Sid. En él se hace especial hincapié en las observaciones solares:

«E trabajamos en Rectificar una sazón, e seguimos en Rectificar el sol quanto un anno conplido. E antes d'esto y despues Rectificamos-lo todavia quanto entrava en las ygualdades y en los dos tropicos e en los otros quartos del cielo, que son el medio de Tauro y d'Escorpion, de Leon y Aquario» (1).

El texto resulta lo suficientemente explícito como para poder afirmar que se realizaron observaciones solares durante más de un año utilizando dos métodos distintos. El primero de ellos es el ptolemaico, basado en la observación del paso del Sol por los equinoccios (*ygualdades*) y solsticios (*trópicos*). Este método no ofrece dificultad alguna en la determinación de los equinoccios, en los que la variación de la declinación solar alcanza unos 24' por día, pero plantea serios problemas en los solsticios, en los cuales la variación diaria de la declinación sólo es del orden de unos 12'', resultando por ello difícilmente observable con el instrumental de la época. Para corregir los valores obtenidos por este método, los astrónomos alfonsíes recurrieron a la observación del paso del Sol por los puntos Tauro 15°, Leo 15°, Scorpio 15° y Acuario 15°: se trata precisamente de los puntos medios situados entre los equinoccios y los solsticios, y los primeros astrónomos que introdujeron esta innovación metodológica fueron los que llevaron a cabo el programa de ob-

\* El presente trabajo ha sido realizado gracias a una subvención de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

\*\* Departamento de Arabe. Facultad de Filología. Universidad de Barcelona.

(1) HILTY, G. (1955). El libro conplido en los iudicios de las estrellas. *Al-Andalus*, 20, 1-74, cita de pp. 41-42.

DYNAMIS

*Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam*. Vol. 4, 1984, pp. 81-114.  
ISSN: 0211-9536.

servaciones patrocinado por el califa ‘abbaāsī al-Ma’mūn entre los años 828 y 832 (2).

Este énfasis en las observaciones solares tiene antecedentes claros en la tradición astronómica árabe, de la que es heredera la astronomía alfonsí. La razón es obvia: si las condiciones meteorológicas resultan adecuadas, pueden realizarse observaciones del Sol que lleven al establecimiento de nuevos parámetros sólo en un año, mientras que las observaciones planetarias requieren, habitualmente, períodos de tiempo mucho más largos. Por otra parte, el astrónomo hispanoárabe más importante de todos los tiempos, Azarquiel (*m.* 1100), constituye un precedente importante para los astrónomos alfonsíes, en tanto sus observaciones solares se prolongaron a lo largo de un período de veinticinco años y dieron lugar no sólo a la determinación de nuevos parámetros, sino a modificaciones estructurales del modelo solar ptolemaico que repercutieron en la obra de Copérnico (3).

Basándonos en estos precedentes resulta, quizá, oportuno revisar el modelo solar alfonsí, bien conocido en sus líneas generales, con el fin de aportar algunas precisiones en parte nuevas. Podemos tomar como punto de partida los datos que nos ofrece el *Cuadrante para rectificar*, obra original de Isaac b. Sid, fechada en 1277, acerca de la longitud del Sol al final de cada mes del año (4). Este tipo de datos resultaba hace unos años de manejo muy engorroso, pero su aprovechamiento se encuentra, hoy en día, al alcance de cualquier historiador de la astronomía gracias a la difusión de los ordenadores o, a nivel mucho más elemental, mediante el uso de calculadoras programables. En mi caso, con una calculadora *Hewlett-Packard 41 C*, he diseñado pequeños programas que me permiten calcular rápidamente la posición del Sol utilizando las cuatro series de tablas astronómicas más difundidas en la España Medieval: se trata de las tablas de al-Jwārizmī (5), de al-Battānī (6), *Tablas de*

(2) HARTNER, W.; SCHRAMM, M. (1963): Al-Bīrūnī and the theory of the solar apogee: An example of originality in arabic science. En: CROMBIE, A. C. (ed.). *Scientific Change*. London, pp. 206-218.

(3) TOOMER, G. J. (1969). The solar theory of al-Zarqāl. A history of errors. *Centaurus*, 14, 306-336.

(4) RICO Y SONOBIA, M. (1864-1866). *Libros del saber de Astronomía del rey don Alfonso X de Castilla*. Madrid, vols. III y IV, cita del vol. III, pp. 298-299.

(5) SUTER, H. (1914). Die Astronomischen Tafeln des Muhammed Ibn Mūsā al-Khwārizmī in der Bearbeitung des Maslama Ibn Ahmed al-Madjrī ti und der latein. Uebersetzung des Athelhard von Bath auf Grund der Vorarbeiten von A. Björmbö und R. Besthorn in Kopenhagen». *D. Kgl. Danske Videnske Vidensk. Selsk. Skrifter. 7. Række Historisk og filosofisk. Afd., III/1* y NEUGEBAUER, O. (1962a). The Astronomical tables of Al-Khwarizmi. Translation with commentaries of the latin version edited by H. Suter, supplemented by Corpus Christi College MS 283. *Historisk-filosofiske Skrifter udgivet af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.*, Bind 4, n.º 2 (Köbenhavn).

*Toledo* (7) y *Tablas Alfonsíes* [ediciones latinas de 1483, 1524 y 1553 (8)]. En la Tabla I se comparan los datos tomados del *Cuadrante para rectificar* con los que se obtienen a partir de las cuatro tablas antes mencionadas y, finalmente, con los calculados utilizando las tablas aproximadas de P. V. Neugebauer (9). En la última columna, entre paréntesis, se muestran las diferencias entre las posiciones computadas con las tablas de Neugebauer y las que derivan de las *Tablas Alfonsíes*. En todos los casos, las posiciones del Sol van referidas al año 1277 y al mediodía de la fecha siguiente a la establecida por el *Cuadrante para rectificar*. De hecho, este texto nos está dando las posiciones del Sol al comienzo de cada mes y no al fin del mes anterior.

Las posiciones del Sol están computadas, en el caso de las tablas de al-Jwārizmī, sin tener en cuenta la precesión de los equinoccios, que estas tablas no consideran (10), y sin corregir, por consiguiente, la posición del apogeo solar. Ello explica la considerable diferencia que encontramos entre esta serie de posiciones y las que se calculan con las tablas restantes. En el caso de las tablas de al-Battānī se ha corregido la posición del apogeo aplicando la constante de precesión albateniana, obteniendo con ello una longitud de  $88;23,48^\circ$  para 1277. Para las *Tablas de Toledo* se ha corregido también la posición del apogeo ( $87;06,49^\circ$  para 1277) con las tablas de trepidación atribuidas a Thābit b. Qurra (11), que quedaron incorporadas al *corpus* toledano. Por otra parte, dado que los movimientos medios del Sol y los planetas en las *Tablas de Toledo* están computados para coordenadas sidéreas (las de al-Battānī y *Alfonsíes* son trópicas), he corregido las posiciones del Sol en longitud sumando el valor de la precesión para el año 1277 ( $9;16,49^\circ$ ), utilizando, asi-

- 
- (6) NALLINO, C. A. (1903-1907). *Al-Battani sive Albateni, Opus Astronomicum*. Mediolani Insu-  
brum, 3 vols. (reimpreso en: Frankfurt, 1969).
- (7) TOOMER, G. J. (1968). A survey of the Toledan tables. *Osiris*, 15, 5-174.
- (8) POULLE, E. (1984). *Les tables alphoncines avec les canons de Jean de Saxe. Edition, traduction et  
commentaire*. Paris, CNRS.
- (9) STAHLMAN, W.; GINGERICH, O. (1963). *Solar and planetary longitudes for years -2,500 to  
+2,000 by 10-day intervals*. Madison, University of Wisconsin Press, cita de pp. XX-XXI.
- (10) Cfr. MILLAS VENDRELL, E. (1963). *El comentario de ibn al-Mu'annā' a las Tablas Astronómicas  
de al-Jwārizmī. Estudio y edición crítica del texto latino en la versión de Hugo Sanctallensis*.  
Madrid-Barcelona, pp. 17-18.
- (11) MILLAS VALLICROSA, J. M. (1943-1950). *Estudios sobre Azarquiel*. Madrid-Granada.  
NEUGEBAUER, O. (1962b). Thābit ben Qurra «on the solar year» and «on the motion  
of the eighth sphere». *Proc. Am. Phil. Soc.*, 106, 264-299; GOLDSTEIN, B. R. (1964). On the  
theory of trepidation according to Thābit b. Qurra and al-Zarqāllu and its implications  
for Homocentric Planetary Theory. *Centaurus*, 10, 232-247; MERCIER, R. (1976-1977).  
Studies in the medieval conception of precession. *Arch. Int. Hist. Sci.*, 26, 197-220; 27, 33-  
71. NORTH, J. (1967). Medieval star catalogues and the movement of the eighth sphere.  
*Arch. Int. Hist. Sc.*, 17, 73-83. MERCIER, R. (1976-1977). Studies in the medieval concep-  
tion of precession. *Arch. Int. Hist. Scien.*, 26, 197-220; 27: 33-71.

TABLA I  
 Comparación de los datos del Cuadrante para rectificar con los obtenidos a partir de las Tablas de al-Jwārizmī,  
 al-Battānī, Tablas de Toledo, Tablas Alfonsíes y Tablas aproximadas de P. V. Neugebauer

	Cuadrante (°)	Jwārizmī	Battānī	Toledo	Alfonsíes	P. V. Neugebauer
31-I	321	308;33,55°	320;55,43°	318;41,57°	320;58,48°	320;31,12° (-0;27,36°)
28-II	348	336;40,03°	348;54,34°	346;49,49°	348;59,58°	348;36,00° (-0;23,58°)
31-III	19	7;10,51°	19;21,37°	17;27,39°	19;26,40°	18;58,48° (-0;27,52°)
30-IV	48	36;07,41°	48;21,11°	46;35,45°	48;23,19°	48;03,36° (-0;19,43°)
31-V	78	65;39,12°	77;59,21°	76;18,52°	77;56,46°	77;42,00° (-0;14,46°)
30-VI	107	94;06,46°	106;34,49°	104;54,25°	106;27,03°	106;18,00° (-0;09,03°)
31-VII	136	123;40,31°	136;10,55°	134;31,43°	136;04,22°	135;58,48° (-0;05,34°)
31-VIII	166	153;40,08°	166;22,04°	164;28,02°	166;06,28°	166;01,12° (-0;05,16°)
30-IX	196	183;17,38°	195;59,13°	193;54,35°	195;43,14°	195;42,00° (-0;01,14°)
31-X	227	214;30,12°	227;07,31°	224;52,44°	226;54,14°	226;51,00° (-0;03,14°)
30-XI	258	245;04,27°	257;38,02°	255;17,13°	257;29,48°	257;18,00° (-0;11,48°)
31-XII	288	276;46,19°	289;16,03°	286;55,08°	289;13,56°	288;52,48° (-0;21,08°)

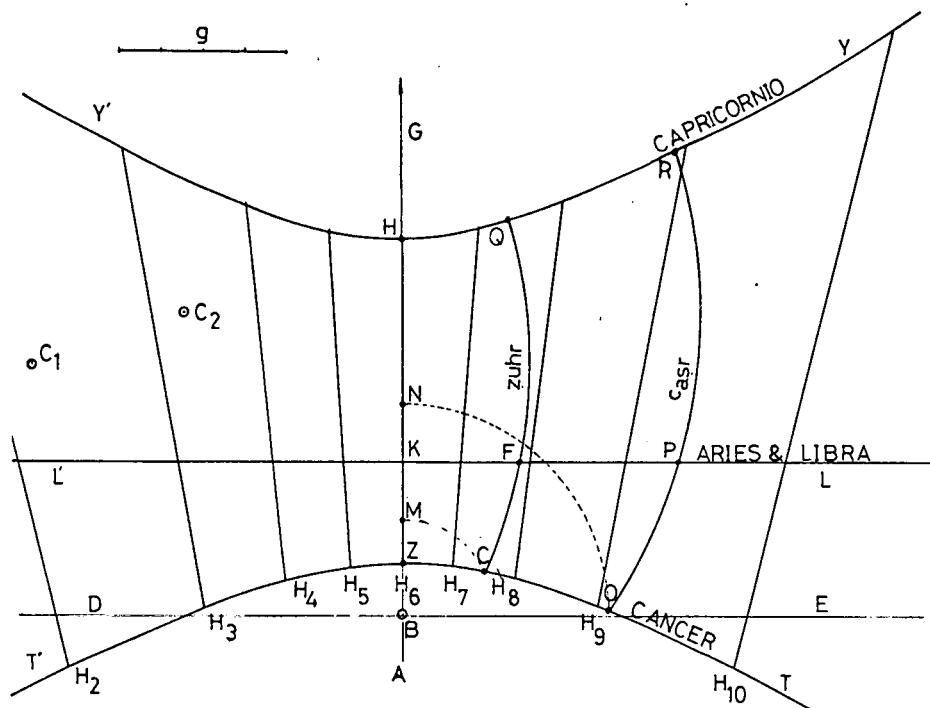


Figura 1.

mismo, las tablas atribuidas a Tābit (12). Finalmente, para la serie de longitudes computadas con las *Tablas Alfonsíes* la posición del apogeo solar para 1277 (88;56;27°) ha sido computada con el modelo alfonsí de trepidación al que me referiré en el apartado 2 de este trabajo.

El análisis de los valores de la Tabla 1 lleva a descartar, de entrada, la posibilidad de que las tablas utilizadas por Isaac b. Sid fueran las de al-Jwārizmī o *Tablas de Toledo*. En cambio, puede observarse que se obtienen posiciones muy próximas calculando con las de al-Battānī o las *Alfonsíes*, pese a que ambas tablas utilizan distintos parámetros. De las doce posiciones del Sol que nos da el *Cuadrante para rectificar*, ocho concuerdan perfectamente con las que podemos obtener de estas dos últimas series de tablas. Dos posiciones son manifiestamente erróneas: los 348° del 28-II (debieran ser 349°) y los 288° del 31-XII (debieran ser 289°). Las restantes dos posiciones (30-VI y 30-XI) no son resultado de un error: la pequeña discrepancia que encontramos se debe, probablemente, a que las posiciones no han sido computadas con las tablas mis-

(12) Cfr. TOOMER, G. J. (1968). *Op. cit.*, n.º 7, p. 45.

mas, sino con sus parámetros. Es obvio que una calculadora programable interpola con mucha más precisión que un astrónomo del siglo XIII.

Dicho lo anterior nos queda la duda de si las mencionadas posiciones fueron calculadas con las *Tablas* de al-Battānī o con las *Alfonsíes*. Pese a que los astrónomos alfonsíes conocían perfectamente la obra de al-Battānī, pues tradujeron los cánones de sus tablas (13), me inclino a creer, dada la fecha de composición del *Cuadrante para rectificar* (1277), que las tablas utilizadas son las *Alfonsíes*. Si esta hipótesis se confirma tendríamos aquí, posiblemente, el primer caso conocido de utilización de nuestras tablas para calcular posiciones. En cambio, no está documentada la utilización de la obra de al-Battānī para calcular posiciones del Sol o de los planetas por los colaboradores del rey Alfonso. Parece probable que, antes de disponer de sus propias tablas, utilizaran las toledanas. Esto es, al menos, lo que parece desprenderse del análisis del horóscopo levantado probablemente por Yehudá b. Moshé para determinar el momento idóneo para que se iniciara la traducción latina, llevada a cabo por Egidius de Thebaldis y Petrus de Regio, del *Libro concluido*. Las posiciones planetarias corresponden al 12-III-1254 hacia las seis de la mañana, y han sido calculadas con las *Tablas de Toledo*, según puede comprobarse en la Tabla 2, cuyos datos debo a la amabilidad del profesor Owen Gingerich, de la Universidad de Harvard. Los valores han sido computados con un ordenador, de acuerdo con un programa cuya finalidad ha sido expuesta por POULLE y GINGERICH en 1967 (14).

TABLA 2

*Análisis del horóscopo y posiciones planetarias según las Tablas de Toledo y Tablas Alfonsíes*

<i>Horóscopo</i>	Tablas de Toledo	Tablas Alfonsíes	
358° .....	358;13,45°	359;11,59°	Sol
286° .....	285;50,16°	288;23,07°	Saturno
13;30° .....	13;48,22°	14;31,15°	Mercurio
132° .....	133;20,15°	131;36,10°	Marte
249° .....	249;06,08°	249;36,14°	Luna
65;37° .....	65;42,15°	65;51,05°	Júpiter
32° .....	31;58,19°	32;53°	Venus

(13) BOSSONG, G. (1978). *Los Cánones de Albateni*. Tübingen, Max Niemeyer Verlag.

(14) POULLE, E.; GINGERICH, O. (1967). Les positions des planetes au Moyen Age. Application du calcul électronique aux tables alfonsines. *Compt. Rendus de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres*. Paris, pp. 531-548.

## II. EL MOVIMIENTO MEDIO DEL SOL Y LA POSICION DE SU APOGEO

Conviene ahora que sigamos, paso a paso, el proceso para calcular la longitud del Sol para una fecha determinada utilizando las *Tablas Alfonsíes*. El modelo solar alfonsí no difiere, cualitativamente, del ptolemaico, aunque utiliza parámetros distintos. Aún a riesgo de repetir cosas archisabidas señalaré que el Sol se mueve sobre un círculo cuyo centro (*C*) no coincide con el centro de la Tierra (*T*) (cf. Figura 1). Si el Sol se encuentra en la posición *S*, su *longitud verdadera*, medida a partir del apogeo solar ( $\lambda$ ), será el ángulo *ATS*. Ahora bien, este ángulo no puede computarse directamente, ya que el Sol no se mueve con velocidad uniforme en torno al punto *T*. En cambio, sí lo hace en torno al centro de su órbita *C*. Por esta razón empezaremos por calcular el valor del ángulo *ACS* ( $\bar{\lambda}$ ), la *longitud media* del Sol a partir del apogeo.

Para ello empezaremos por ver en una edición de las *Tablas Alfonsíes* (utilizo la edición *princeps* de 1483) cuál era la posición del Sol en una de las fechas *radix* utilizadas en estas tablas. Elijo la era del propio rey Alfonso, que corresponde al mediodía del 31-V-1252 (16), y leo en la tabla correspondiente que el Sol se encontraba a 76;37,12,38,42° del comienzo de Aries. A partir de aquí tendré que calcular el número de días transcurridos desde la anterior fecha *radix* (*n*) y multiplicarlo por el avance medio del Sol en un día, que es, según la tabla del movimiento medio del Sol (*Tabula medii motus Solis, Veneris et Mercurii*), de 0;59,08,19,37,19,13,56°. Tendremos, por consiguiente, que la longitud media del Sol será:

$$\text{Longitud media} = 76;37,12\dots^\circ + 0;59,08\dots^\circ \times n$$

En el caso de que obtengamos un resultado superior a 360° deberemos, evidentemente, restar los múltiplos de 360° y obtener, así, la longitud media del Sol medida desde Aries 0°.

Antes de seguir adelante quiero hacer dos incisos: en primer lugar, señalar que el parámetro alfonsí para el movimiento medio del Sol (0;59,08...°) es original y más adelante veremos de dónde deriva; en segundo lugar, el hecho de que la tabla de movimientos medios del Sol sea, al mismo tiempo, la de los movimientos medios de Venus y Mercurio y coincide plenamente con lo que se afirma en el capítulo 18 de los cánones castellanos:

(15) HILTY, G. (1954). *Aby Aben Ragel. El Libro Conplido en los iudizios de las estrellas*. Madrid, Real Academia Española.

(16) El comienzo del reinado de nuestro monarca tuvo lugar al día siguiente.

«Et la eguacion de Venus et de Mercurio es tal como la eguacion de los tres planetas de suso. Non a entrellas alguna disimilitud, fuera ende en ell argumento de cada una dellas, segund lo que sale de las taulas, et el medio curso de cada una dellas es el medio curso del sob» (17).

A este hecho debe añadirse que, en el caso de Venus, no sólo sus movimientos medios son los mismos que los del Sol, sino que también coinciden la posición de sus apogeos y el valor de la ecuación del centro. Es obvio que la astronomía alfonsí está recogiendo aquí los ecos de una antigua tradición indopersa (18), que está también viva en la astronomía hispanoárabe, perfectamente conocida por los colaboradores del rey Alfonso (19). La finalidad que se persigue es clara: justificar la elongación limitada de Venus y Mercurio con respecto al Sol.

Recojamos el hilo: obtenida la longitud media del Sol a partir del punto Aries debemos introducir — como veremos más adelante — la corrección representada por la ecuación del centro (ángulo CST), con el fin de convertir la longitud media en longitud verdadera. Ahora bien, el argumento de entrada en la tabla de la ecuación del centro no es la longitud media desde Aries 0°, sino desde el apogeo (ángulo ACS). Debemos, por tanto, verificar la operación:

$$\text{ACS} = \text{longitud media desde Aries } 0^\circ - \text{longitud del apogeo.}$$

Pasemos, por tanto, a ocuparnos de la posición del apogeo solar en las *Tablas Alfonsíes*. Con el fin de recabar algún indicio sobre la originalidad de la posición del apogeo solar que nos dan las *Tablas Alfonsíes*, debemos considerar asimismo toda la serie de apogeos planetarios y compararla con las que se encuentran en otras tablas astronómicas documentadas en la España Medieval. Esto es lo que hago, precisamente, en la Tabla 3, en donde aparecen las longitudes de los apogeos del Sol y de los planetas según las *Tablas Alfonsíes* (20) (posiciones correspondientes a la era de Alfonso), el *Almagesto* de Ptolomeo (21), las tablas de al-Jwārizmī, de al-Battānī y *Tablas de Toledo*. Entre paréntesis, y tras cada posición, anoto la diferencia entre la longitud que nos dan las *Tablas Alfonsíes* y la que se encuentra en la fuente correspondiente. Resulta

{17} RÍCO Y SINOBAS, M. (1986). *Op. cit.*, n.º 4, vol. IV, p. 136.

{18} GOLDSTEIN, B. R. (1977). Remarks on Ptolomey's equant model in islamic astronomy. En: PRISMATA: *Festschrift für Willy Harner*. Wiesbaden, pp. 175-181.

{19} SAMSO, J. (1983). Notas sobre el ecuador de Ibn-al Samh. En: VERNET, J. (ed.). *Nuevos estudios sobre astronomía española en el siglo de Alfonso X*. Barcelona, pp. 105-108, cita de p. 112.

{20} Prescindo de la cifra correspondiente a los tercios, que no resulta significativa.

{21} Cfr. TOOMER, G. J. (1984). *Ptolomey's Almagest. Translated and annotated by...* New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag.



TABLA 3

*Apogeos planetarios en las Tablas Alfonsíes*

	<i>Era de Alfonso</i>	<i>Ptolomeo (Alm. XI, 1, 5 y 7)</i>	<i>Al-Jwārizmī</i>	<i>Al-Battānī</i>	<i>Tablas de Toledo</i>	
Sol/Venus.....	80;37,00°	65;30° (Sol) 55	(+ 15;02°) (+ 25;37°)	81;15° (- 0;38°)	82;14° (- 1;37°)	77;50° (+ 2;47°)
Saturno.....	242;35,20°	233	(+ 9;35,20°)	244;55° (- 2;19,40°)	244;28° (- 1;52,40°)	240;05° (+ 2;30,20°)
Júpiter.....	162;48,38°	161	(+ 1;48,38°)	172;32° (- 9;43,22°)	164;28° (- 1;39,22°)	164;30° (- 1;41,22°)
Marte.....	124;23,51°	115;30°	(+ 8;53,51°)	128;24° (- 4;00,09°)	126;18° (- 1;51,09°)	121;50° (+ 2;33,51°)
Mercurio.....	199;51,11°	190	(+ 9;51,11°)	224;54° (- 25;02,49°)	201;28° (- 1;36,49°)	197;30° (+ 2;21,11°)

TABLA 4

*Diferencia entre las longitudes de los apogeos calculadas para dos eras según las Tablas Alfonsíes*

	<i>Diluvio</i>	<i>Alfonso</i>	<i>Diferencia</i>
Sol y Venus.....	0;48,38,2 <sup>s</sup>	1;20,37,00 <sup>s</sup>	31;58,58 <sup>s</sup>
Saturno.....	3;30,36,20,41	4;02,35,20,41	31;59
Júpiter.....	2;10,49,38,41	2;42,48,38,41	31;59
Marte.....	1;32,24,51,41	2;04,23,51,41	31;59
Mercurio.....	2;47,52,11,41	3;19,50,11,41	31;59

obvio que si las longitudes alfonsíes derivaran, por la adición de una constante de precesión, de alguna de las fuentes mencionadas, la serie de diferencias correspondientes a la fuente en cuestión debería ser constante. Puede comprobarse fácilmente que tal hecho no se produce en ningún caso, por más que los apogeos alfonsíes no resultan incoherentes con los que aparecen en las tablas de al-Battānī y *Toledanas*. Es, pues, posible que esta serie de longitudes, y concretamente la del apogeo solar, sea original y resultado de la labor de observación alfonsí.

Un segundo punto de interés se centra en la Tabla 4: las *Tablas Alfonsíes* dan las posiciones de los apogeos no sólo para la era de Alfonso, sino también para toda la serie de *radices* habituales (Diluvio, eras de Nabucodonosor, de Filippo, de Alejandro, de César, de la Encarnación, de Diocleciano, de la Hégira y de Yezdeguer) (22). Si tomamos las dos posiciones extremas, que corresponden al Diluvio y a la era de Alfonso, y tenemos en cuenta que la unidad utilizada son signos de  $60^\circ$ , observaremos en la columna de las diferencias una constante de  $31;59^\circ$  (salvo en el caso del Sol y Venus, en el que obtenemos una cifra análoga,  $31;58,58^\circ$ ). Esta diferencia constante debe estar relacionada con la precesión de los equinoccios y, si recurrimos a la tabla liminar de las *Tablas Alfonsíes*, veremos que el número de días transcurridos entre la era del Diluvio y la de Alfonso es, en notación sexagesimal, 7, 21, 40, 38, o sea:

$$7 \times 60^3 + 21 \times 60^2 + 40 \times 60 + 38 = 1.590.038 \text{ días.}$$

Y si dividimos:

$$31;59^\circ: 1.590.038 \text{ días} = 0;0,0,4,20,41,17,12^\circ$$

que es precisamente el movimiento medio diario de los apogeos de las estrellas fijas que aparece en la *Tabula medii motus augium et stellarum fixarum*.

Ahora bien, ha sido suficientemente aclarado por DELAMBRE (23), DREYER (24), PRICE (25) y MERCIER (26) que el movimiento anterior corresponde únicamente a uno de los dos términos de la precesión alfonsí. Se trata de la precesión uniforme y constante en virtud de la cual

(22) CRADDOCK, J. R. (1974). La nota cronológica inserta en el prólogo de las «Siete partidas». Edición crítica y comentario. *Al-Andalus*, 39, 363-389.

(23) DELAMBRE, J. E. (1819). *Histoire de l'astronomie du Moyen Age*. París, pp. 250-251.

(24) DREYER, J. L. E. (1920). The original form of the alfonsine tables. *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, 80, 243-262.

(25) PRICE, J. D. S. (1955a). A medieval footnote to ptolemaic precession. *Vistas in Astronomy*, 1, 66 (1955b). *The Equatorie of the Planetis*. Cambridge, pp. 104-107.

(26) MERCIER, R. (1976 y 1977). *Op. cit.*, n.º 11, *cf.* especialmente, 1977, pp. 58-60.

los puntos equinocciales retrogradan a una velocidad de unos 26.45'' por año. En virtud de este retroceso realizarían un giro completo de 360° en 49.000 años, ya que:

$$\frac{360^\circ}{365,25 \times 49.000} = 0;0,4,20,41,17,8...^\circ$$

que es, prácticamente, idéntico al que he mencionado antes.

Resulta obvio, asimismo, que los astrónomos alfonsíes no podían considerar satisfactorio un valor de la precesión de sólo 26.45'' por año, cuando el valor real se encuentra en torno a los 50'' anuales. Existe, por tanto, un segundo término, oscilatorio, basado en el modelo geométrico de la trepidación atribuido a Tābit b. Qurra (m. 901) y expuesto en el *Liber de motu octavae spere*. Este modelo se encuentra representado en la Figura 2, en la que:

AN = Ecuador, cuyo polo es P.

AD = radio de un pequeño epiciclo cuyo centro (A) se encuentra sobre el Ecuador.

PIN = meridiano cuyo polo es A, de acuerdo con la interpretación de GOLDSTEIN (1964) y NORTH (1967). En un trabajo más reciente MERCIER (1976-77) prefiere considerar que el arco DI = 90° para el modelo de Tābit b. Qurra, por más que acepta la hipótesis de GOLDSTEIN y NORTH en el caso alfonsí, en la cual AI = 90°.

IN = oblicuidad media de la eclíptica ( $\epsilon_0$ ) —siempre según la hipótesis GOLDSTEIN-NORTH que, para Tābit b. Qurra es 23;33°. Veremos más adelante que, posiblemente, el modelo alfonsí utiliza el mismo parámetro.

AI = eclíptica media.

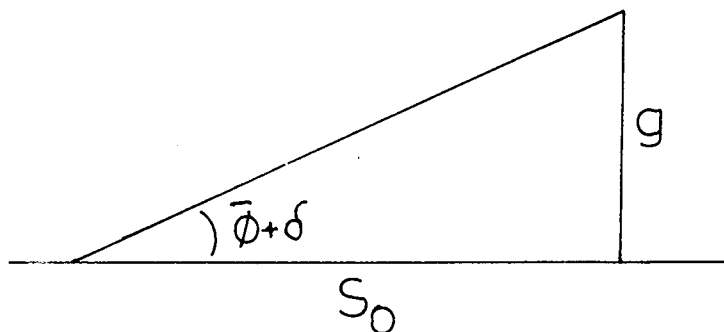


Figura 2.

En el modelo descrito el punto D gira sobre el epiciclo de radio AD, formando un ángulo ( $i$ ) con el plano del Ecuador. El punto D es Aries  $0^\circ$ , pero no es el equinoccio, ya que éste se define como la intersección de la eclíptica móvil (BDI), que siempre pasa por I, con el Ecuador. Cuando Aries  $0^\circ$  se encuentre en D, el equinoccio se encontrará en B, y BD será la ecuación de la distancia en longitud (*eguacion en allongamiento o en retornamiento*) —según el texto castellano del *Libro de las Taulas* (27)— que podemos representar por  $\Delta\lambda$ . El máximo valor positivo de  $\Delta\lambda$  ( $9^\circ$  en las *Tablas Alfonsíes*) se alcanzará para  $i = 90^\circ$ . El máximo valor negativo de  $\Delta\lambda$  ( $-9^\circ$  en nuestras tablas) se alcanzará para  $i = 270^\circ$ . Cuando el punto D se encuentre en  $D_3$  y  $D_4$ , entonces  $i = 0^\circ$  e  $i = 180^\circ$ , respectivamente, y en ambos casos Aries  $0^\circ$  coincidirá con el equinoccio, ya que el punto D se encontrará en la intersección de la eclíptica móvil con el Ecuador. Entonces, evidentemente,  $\Delta\lambda = 0^\circ$ . Señalemos, por último, siguiendo la explicación del *Libro de las Taulas*, que cuando  $0^\circ < i < 180^\circ$  el valor de la ecuación ( $\Delta\lambda$ ) será positivo y habrá *allongamiento*. En cambio, cuando  $180^\circ < i < 360^\circ$  el valor de la ecuación será negativo y habrá *retornamiento*.

Hasta aquí el modelo alfonsí no difiere del de Tābit b. Qurra cualitativamente, si dejamos de lado el problema de las distintas interpretaciones presentadas por GOLDSTEIN-NORTH y MERCIER. Conviene apuntar, en primer lugar, que los astrónomos alfonsíes se muestran originales —dentro de la tradición medieval de la teoría de la trepidación— al combinar una precesión constante de  $26.45''$  por año con la trepidación. Con ello la astronomía alfonsí parece continuar una tradición hispanoárabe ya que, en el siglo XI, Sā'id de Toledo (28) y Azarquiel (29) y, en el siglo XII, al-Bītrūyī (30), al trazar la historia del problema, atribuyen a Teón de Alejandría (s. IV de J.C.) la combinación de precesión y trepidación. Ya DREYER aludió a este precedente al ocuparse de al-Bītrūyī (31).

GOLDSTEIN (32) ha señalado que los modelos de trepidación, como el de Tābit b. Qurra, pretendían justificar tres fenómenos: en primer lu-

(27) RICO Y SINOBAS, M. (1866). *Op. cit.*, n.º 4, vol. IV, p. 179.

(28) BLACHERE, R. (trad.) (1935). *Sa'id al-Andalusi, Kitab Tabaqāt al-Uman (Livre des Catégories des Nations)*. París, p. 86.

(29) MILLAS VALLICROSA, J. M. (1943-1950). *Op. cit.*, n.º 11, pp. 275-276.

(30) GOLDSTEIN, B. R. (1971). *Al Bītrūyī: On the principles of Astronomy. An edition of the arabic and hebrew versions with translation, analysis and arabic-hebrew english glossary*, 2 vols., New Haven-London, vol. I, pp. 89-91; vol. II, pp. 173-181.

(31) DREYER, J. L. E. (1953). *A history of astronomy from Thales to Kepler*. 2.ª ed., New York, Dover (reimpresión de la edición de 1906), p. 278.

(32) GOLDSTEIN, B. R. (1964). *Op. cit.*, n.º 11, pp. 232-233.

gar, el aumento «observado» (debido a errores de observación) en la velocidad de la precesión desde la época de Ptolomeo; en segundo lugar, la disminución en la oblicuidad de la eclíptica (fenómeno real pero exagerado, dado lo inadecuado del parámetro ptolemaico); y en tercer lugar, el carácter periódico de ambos fenómenos. La combinación de precesión y trepidación podía, evidentemente, utilizarse con la misma finalidad que la trepidación simple. Ha sido PRICE (33) quien ha explicado el motivo que llevó a los astrónomos alfonsíes a esta complicación aparentemente innecesaria. En efecto, en virtud de la precesión constante, el Sol realizará 49.001 revoluciones trópicas en 49.000 años. En un año civil de 365,25 días el Sol recorrerá:

$$\frac{49.001 \times 360^\circ}{49.000} = 360,0073469^\circ$$

Ahora bien, el Sol tardará en recorrer 360°:

$$\frac{360^\circ \times 365,25}{360,0073469^\circ} = 365 \text{ días } 5;49,15,58,58,56,38,24 \text{ horas}$$

que es, precisamente, el parámetro del año trópico alfonsí que se obtiene al dividir 360° por 0;59,8,19,37,19,13,56° que, como hemos visto, es el avance medio del Sol en un día. Al estar, por consiguiente, el movimiento medio del Sol en las *Tablas Alfonsíes* directamente relacionado con el ciclo de 49.000 años, es poco probable que este parámetro sea el resultado directo de una serie de observaciones.

Volvamos, ahora, a la trepidación alfonsí. Sus parámetros son, en general, distintos de los utilizados por Tābit b. Qurra. La *Tabula motus accessus et recessus octaue sphere* tabula el incremento diario del ángulo *i* a razón de 0;0,0,30,24,49° por día. También es sabido que este parámetro depende de un ciclo de 7.000 años, ya que:

$$\frac{360^\circ}{7.000 \times 365,25} = 0;0,0,30,24,48,59\dots^\circ$$

El usuario de las tablas, una vez establecido el valor de *i* para una fecha determinada, debe entrar con él en la *Tabula equationum motus accessus et recessus octaue sphere*. Esta tabla nos da el valor de la ecuación ( $\Delta\lambda$ ) para cada grado de *i*, desde 1° hasta 90°. Los estudiosos que se han ocupado del tema (34) han afirmado repetidamente que esta tabla está calculada mediante la aproximación:

(33) PRICE, J. D. S. *Op. cit.*, n.º 25, *loc. cit.*

(34) DELAMBRE, J. B. (1819), p. 251; DREYER (1920). *Op. cit.*, n.º 20, p. 247; MERCIER, R. (1977). *Op. cit.*, n.º 11, p. 58, por ejemplo.

$$\Delta\lambda = 9^\circ \text{ sen } i$$

aproximación cuya justificación puede encontrarse en GOLDSTEIN (35). En la Tabla 5 se ha recalculado, de 5° en 5°, el valor de la ecuación utilizando la aproximación anterior. Entre paréntesis puede verse la diferencia entre el valor de las *Tablas Alfonsíes* y el valor recalculado por mí. Aceptar la hipótesis de que la tabla haya sido calculada de este modo implica el uso de una tabla de senos muy mala por parte de los calculadores alfonsíes. Un único ejemplo basta: si 4;29,10° es el resultado de 9 sen 30°, entonces:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{4;29,10^\circ}{9^\circ} = 0,4985$$

en lugar de 0.5, algo totalmente inaceptable.

TABLA 5  
Tabula equationum motus accessus et recessus octavae sphere

$i$ (°)	Recalculada por aproximación: 9 sen $i$	Recalculada por aproximación: sen 9° sen $i$	Recalculada por aproximación: <sup>*</sup> $\frac{\text{tg } r}{\text{sen } \epsilon_0} \text{ sen } i = \text{sen } \Delta\lambda$
1. ....	0; 9,25° (0)	0; 9,23° (+ 2'')	0; 9,23° (+ 2'')
5. ....	0;47,04° (- 12'')	0;46,52° (0)	0;46,52° (0)
10. ....	1;33,46° (- 26'')	1;33,24° (- 4'')	1;33,24° (- 4'')
15. ....	2;19,46° (- 33'')	2;19,14° (- 1'')	2;19,13° (0)
20. ....	3;04,41° (- 52'')	3;04,01° (- 12'')	3;04,01° (- 12'')
25. ....	3;48,13° (- 46'')	3;47,27° (0)	3;47,26° (+ 1'')
30. ....	4;30 (- 50'')	4;29,10° (0)	4;29,09° (+ 1'')
35. ....	5;09,44° (- 53'')	5;08,52° (- 1'')	5;08,52° (- 1'')
40. ....	5;47,06° (- 50'')	5;46,16° (0)	5;46,15° (+ 1'')
45. ....	6;21,50° (- 48'')	6;21,03° (- 1'')	6;21,02° (0)
50. ....	6;53,40° (- 42'')	6;52,57° (+ 1'')	6;52,57° (+ 1'')
55. ....	7;22,21° (- 37'')	7;21,44° (0)	7;21,43° (+ 1'')
60. ....	7;47,39° (- 29'')	7;47,10° (0)	7;47,09° (+ 1'')
65. ....	8;09,24° (- 22'')	8;09,03° (- 1'')	8;09,02° (0)
70. ....	8;27,26° (- 15'')	8;27,11° (0)	8;27,10° (+ 1'')
75. ....	8;41,36° (- 8'')	8;41,27° (+ 1'')	8;41,26° (+ 2'')
80. ....	8;51,48° (- 4'')	8;51,44° (0)	8;51,43° (+ 1'')
85. ....	8;57,57° (- 2'')	8;57,56° (- 1'')	8;57,54° (+ 1'')
90. ....	9;00,00° (0)	9;00,00° (0)	8;59,59° (+ 1'')

\* (para  $\epsilon_0 = 23;33^\circ$   $r = 3;34,35^\circ$ )

(35) GOLDSTEIN, B. R. (1964). *Op. cit.*, n.º 11, pp. 237-238.

Ahora bien, DOBRZYCKI (36) apuntó la solución del problema al sugerir la aproximación *sen 9° sen i*, con la que se obtienen excelentes resultados, según puede comprobarse en la segunda columna de la Tabla 5. Por otra parte, MERCIER (37), al estudiar el modelo geométrico de Tābit b. Qurra, sugiere una nueva aproximación que, de hecho, no da resultado con la tabla del astrónomo oriental, pero que nos puede ser de utilidad aquí. Se trata de:

$$\text{sen } \Delta\lambda = \text{sen } i \frac{\text{tg } r}{\text{sen } \epsilon_0}$$

donde  $\epsilon_0$  es la oblicuidad media (arco IN en la Figura 2) y  $r$  el radio del pequeño epiciclo ecuatorial (AD en la Figura 2). Si suponemos que los astrónomos alfonsíes utilizaron, como Tābit, una oblicuidad media de 23;33°, podemos obtener fácilmente el valor de  $r$ :

$$r = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\text{sen } \Delta\lambda \text{ sen } 23;33^\circ}{\text{sen } i} \right)$$

Si aplicamos la fórmula anterior al valor máximo de  $\Delta\lambda$  (9°), al que le corresponde  $i = 90^\circ$ , obtendremos  $r = 3;34,35^\circ$ .

Con estos parámetros he recalculado la *Tabula equationum* utilizando la fórmula de MERCIER. En la tercera columna de la Tabla 5 puede verse una muestra de los resultados, que son casi tan buenos como los que se obtienen con la aproximación de DOBRZYCKI. La máxima diferencia es de  $-12''$  para  $i = 20^\circ$ , error que se obtiene también con la fórmula de DOBRZYCKI: posiblemente se trate de una errata en la edición de 1483, de las *Tablas Alfonsíes* que estoy manejando, conservada en la reciente edición de POULLE (38). En cualquier caso, gracias a la aproximación de MERCIER, he podido establecer los valores de  $r$  y  $\epsilon_0$  que son, aproximadamente, compatibles con la *Tabula equationum* alfonsí. Necesitaremos estos parámetros para estudiar, en el apartado III, la variación en la oblicuidad de la eclíptica implícita en el modelo de trepidación alfonsí. Queda, pues, claro que los astrónomos alfonsíes utilizaron un modelo de trepidación igual, cualitativamente, al de Tābit, pero con parámetros distintos (salvo el de la oblicuidad media).

(36) DOBRZYCKI, J. (1965). Teoria precesji w astronomii sredniowiecznej. *Studia i Materialy z Dziejow Nauki Polskiej*. Serie Z.Z.11,3-47 (en polaco, con un resumen amplio en inglés), cita de p. 23.

(37) MERCIER, R. (1976). *Op. cit.*, n.º 11, p. 205.

(38) POULLE, E. (1984). *Op. cit.*, n.º 8, p. 131.

Como, por otra parte, MERCIER (39) ha formulado y demostrado los procedimientos exactos para calcular la ecuación, de acuerdo con las dos hipótesis presentadas por los estudiosos, a efectos de comparación doy una muestra de los resultados que se obtienen con ellos en la Tabla 6.

Los parámetros utilizados son los mismos que en el caso anterior. La hipótesis 1 (formulada por MERCIER) se basa en considerar  $DI = 90^\circ$  en la Figura 2. En este caso:

$$\begin{aligned} \text{sen } \Delta\lambda &= \\ &= \text{sen } i \text{ tg } r \left( \frac{1 + \text{tg}^2 r \cos^2 (i - \epsilon_0)}{\text{tg}^2 r \text{ sen}^2 (i - \epsilon_0) + [\text{sen } \epsilon_0 + \text{tg}^2 r \cos (i - \epsilon_0) \text{ sen } i]^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Por otra parte, la hipótesis NORTH-GOLDSTEIN considera que  $AI = 90^\circ$  también en la Figura 2. Asimismo en este caso:

TABLA 6  
Tabula equationum motus accessus et recessus octavae sphere

$i$ ( $^\circ$ )	Hipótesis 1 (Mercier)	Hipótesis 2 (North-Goldstein)
1	0;09,23 $^\circ$ (+ 2 $''$ )	0;09,21 $^\circ$ (0)
5	0;46,51 $^\circ$ (- 1 $''$ )	0;46,44 $^\circ$ (- 8 $''$ )
10	1;33,21 $^\circ$ (- 7 $''$ )	1;33,10 $^\circ$ (- 18 $''$ )
15	2;19,06 $^\circ$ (- 7 $''$ )	2;18,55 $^\circ$ (- 18 $''$ )
20	3;03,45 $^\circ$ (- 28 $''$ )	3;03,39 $^\circ$ (- 34 $''$ )
25	3;46,56 $^\circ$ (- 29 $''$ )	3;46,59 $^\circ$ (- 26 $''$ )
30	4;28,20 $^\circ$ (- 48 $''$ )	4;28,36 $^\circ$ (- 32 $''$ )
35	5;07,36 $^\circ$ (- 1;17 $''$ )	5;08,08 $^\circ$ (- 45 $''$ )
40	5;44,27 $^\circ$ (- 1;47 $''$ )	5;45,17 $^\circ$ (- 57 $''$ )
45	6;18,37 $^\circ$ (- 2;25 $''$ )	6;19,46 $^\circ$ (- 1;16 $''$ )
50	6;49,50 $^\circ$ (- 3;06 $''$ )	6;51,18 $^\circ$ (- 1;38 $''$ )
55	7;17,54 $^\circ$ (- 3;48 $''$ )	7;19,37 $^\circ$ (- 2;05 $''$ )
60	7;42,35 $^\circ$ (- 4;33 $''$ )	7;44,33 $^\circ$ (- 2;35 $''$ )
65	8;03,45 $^\circ$ (- 5;17 $''$ )	8;05,52 $^\circ$ (- 3;10 $''$ )
70	8;21,14 $^\circ$ (- 5;55 $''$ )	8;23,27 $^\circ$ (- 3;42 $''$ )
75	8;34,56 $^\circ$ (- 6;28 $''$ )	8;37,09 $^\circ$ (- 4;15 $''$ )
80	8;44,46 $^\circ$ (- 6;56 $''$ )	8;46,54 $^\circ$ (- 4;48 $''$ )
85	8;50,39 $^\circ$ (- 7;14 $''$ )	8;52,37 $^\circ$ (- 5;16 $''$ )
90	8;52,35 $^\circ$ (- 7;25 $''$ )	8;54,18 $^\circ$ (- 5;42 $''$ )

(39) MERCIER, R. (1976), p. 212 y (1977), pp. 62-65, *op. cit.*, n.º 11.



$$\text{sen } \Delta\lambda = \text{sen } i \text{ sen } r \left( \frac{1 + \text{tg}^2 r \text{ sen}^2 (i - \epsilon_0)}{\text{sen}^2 \epsilon_0 + \text{tg}^2 r \text{ sen}^2 (i - \epsilon_0)} \right)^{1/2}$$

Tras el análisis anterior, podemos proceder a calcular la posición del apogeo solar para mediados de 1277. Utilizo como fecha el mediodía del 31-V-1277, exactamente veinticinco años después del comienzo de la era del rey Alfonso. Estos veinticinco años equivalen a 9,131 días, o sea,  $2 \times 60^2 + 32 \times 60 + 11$  días. El avance de la posición del apogeo desde la fecha *radix* será:

$2 \times 60^2$	.....	0;08,41,22,34,24°
$32 \times 60$	.....	0;02,19,02,01,10,24°
11	.....	<u>0;00,00,47,47,34,09,12°</u>
		0;11,01,12,23,08,33,12°

Este valor corresponde al primer término de la precesión (precesión constante).

Para obtener el valor de la trepidación debemos empezar por calcular el valor del ángulo  $\hat{\epsilon}$ :

<i>Radix</i>	.....	63;34;04°
$2 \times 60^2$	.....	1;00,49,38°
$32 \times 60$	.....	0;16;13;14,08°
11	.....	<u>0;00,05,34,32,59°</u>
		64;51,12,26,40,59°, que podemos redondear en 64;51,12°.

En la tabla de ecuaciones constatamos que:

64°	.....	8;04,56°
65°	.....	8;09,02°

Y, por interpolación lineal, obtendremos que, para  $\hat{\epsilon} = 64;51,12^\circ$ ,  $\Delta\lambda = 8;08,26^\circ$ .

La posición del apogeo solar será el resultado de la suma de los dos términos anteriores a la posición del apogeo en la fecha *radix* que nos dan las *Tablas*. Hemos visto ya que esta posición incluye la precesión constante hasta el 31-V-1252, pero no la trepidación. Así:

<i>Radix</i>	.....	80;37;00°
Precesión constante desde 31-V-1252	.....	0;11;01°
Trepidación total	.....	<u>8;08;26°</u>
		88;56;27°

Posición del apogeo que deberemos tener en cuenta en nuestro cálculo de las longitudes del Sol para el año 1277. Ahora bien, antes de seguir con este tema quisiera ocuparme, aunque sea someramente, de una cuestión a la que han aludido DREYER (40) y PRICE (41), y que ha sido estudiada en detalle, en su contexto general, por MERCIER (42): el de la precisión que tiene el valor de la precesión alfonsí para la segunda mitad del siglo XIII. Con la misma técnica que acabamos de utilizar podemos calcular la posición del apogeo solar para dos fechas clave: 16-V-16 de nuestra era y el 31-V-1252. La primera de estas dos fechas corresponde al día en que el ángulo  $\hat{\iota}$  alcanza el valor de  $0^\circ$ , tal como señala MERCIER (43) [no el 18-V-15, como afirma DREYER (44)], y en el que, por consiguiente,  $\Delta\lambda = 0^\circ$ . Las longitudes de los apogeos para estas fechas son:

16-V-16	.....	71;32,10 $^\circ$
31-V-1252	.....	88;40,36 $^\circ$

Entre estas dos fechas han transcurrido, prácticamente, mil doscientos treinta y seis años y el apogeo solar ha avanzado 17;08,26 $^\circ$ , a lo que corresponde un avance medio por año de 49.92", de una precisión notable ya que puede calcularse fácilmente (46) que, en el año 1252, el valor de la precesión era de 50.11", aproximadamente. Asimismo puede establecerse que entre los años 16 y 1252 el incremento de longitud debido a la precesión, calculado con una fórmula moderna, es de 17;21,06 $^\circ$ , o sea, sólo 0;12,40 $^\circ$  más que el valor que hemos obtenido con las *Tablas Alfonsíes*.

Podemos cotejar este valor medio de la precesión con los que se obtienen a partir de las posiciones del apogeo solar en las fechas *radix* de las *Tablas Alfonsíes*. Los resultados aparecen en la Tabla 7, que se ha podido construir con un mínimo de cálculo, dado que, como hemos visto, las tablas nos dan las posiciones del apogeo solar para las fechas *radix* te-

(40) DREYER, J. L. E. (1920). *Op. cit.*, n.º 24.

(41) PRICE, J. D. S. (1955b). *Op. cit., loc. cit.*, n.º 24.

(42) MERCIER, R. (1976 y 1977). *Op. cit.*, n.º 11.

(43) MERCIER, R. (1977). *Op. cit.*, n.º 11, p. 59.

(44) DREYER, J. L. E. (1920). *Op. cit.*, n.º 24, p. 247.

(45) He computado esta posición a partir de la tabla de ecuaciones por interpolación lineal. Ahora bien, las *Tablas Alfonsíes* dan directamente 84; 41,01 para esta fecha.

(46) MERCIER, R. (1977). *Op. cit.*, n.º 11, p. 61.

(47) CAUSSIN DE PERCEVAL, A. P. (1804). Le livre de la grande table Hakémite. *Noticies et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale (Paris)*, 7, 16-240, p. 134.

(48) VERNET, J. (1956). Las «Tabulae probatae». En: *Homenaje a Millás Vallicrosa*. Barcelona, CSIC, vol. II, pp. 501-522 [reimpreso en: Vernet, J. (1979). *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval*. Barcelona-Bellaterra, pp. 191-212], p. 515.

TABLA 7  
*Apogeo solar en las fechas "radix" según las Tablas Alfonsíes*

<i>Radix</i>	Tablas Alfonsies	Hewlett- Packard 41	<i>Diferencia con la posición en la era de Alfonso</i>	<i>Avance anual</i>	<i>1° en x años</i>
Diluvio . . . . .	45;40,50°	45;36,59°	43;00,11°	37.72''	101.23
Nabucodonosor . . . . .	60;15,44°	60;15,43°	28;24,25°	51.18''	70.34
Filipo . . . . .	66;22,02°	66;22,00°	22;18,08°	50.99''	70.60
Alejandro . . . . .	66;32,42°	66;32,43°	22;07,25°	50.97''	70.63
César . . . . .	70;42,53°	70;42,53°	17;57,15°	50.13''	71.82
Encarnación . . . . .	71;32,48°	71;17,57°	17;22,11°	49.97''	72.05
Diocleciano . . . . .	75;38,40°	75;36,42°	13;03,26°	48.57''	74.12
Hégira . . . . .	80;38,03°	80;38,02°	8;02,06°	46.66''	77.16
Yezdeguerd . . . . .	80;46,28°	80;46,30°	7;53,38°	45.84''	78.54
Alfonso . . . . .	88;41,01°	88;40,08°	—	—	—

niendo en cuenta la precesión constante que aparece incorporada al parámetro correspondiente. Por otra parte, la tabla de las *Radices motus octave sphere* nos da asimismo los valores del *motus* (trepidación) que corresponde a cada fecha. Además, he consignado en la columna siguiente las posiciones calculadas con un programa de la calculadora *Hewlett-Packard 41*, para que el lector pueda apreciar la mayor o menor precisión que se obtiene con este tipo de programas. La columna correspondiente al *Avance anual* nos da el valor medio por año de la precesión, que resulta de dividir la diferencia entre la posición del apogeo en la fecha en cuestión y la longitud del apogeo en la era de Alfonso, por el número de años transcurridos entre ambas fechas. Los valores que se obtienen resultan aceptables (entre 45'' y 51'' por año) a partir de la era de la Encarnación, pero son notablemente insatisfactorios (37.72'' por año) si se considera la era del Diluvio.

Estos valores medios de la precesión alfonsí nos llevan a considerar un pasaje de la *Expositio intentionis Regis Alfonsii circa Tabulas eius*, debida a

(49) NEUGEBAUER, O. (1962b). *Op. cit.*, n.º 11, p. 276.

(50) NALLINO, C. A. (1903-1907). *Op. cit.*, n.º 6, vol. I, p. 72.

(51) CAUSSIN DE PERCEVAL, A. P. (1804). *Op. cit.*, n.º 47, p. 216.

(52) SAMSO, J. (1985). Al-Zarqāl Alphonse X and Peter of Aragon on the solar equation. (En curso de publicación en el volumen de homenaje a E. S. Kennedy, que será editado por D. King y G. Saliba).

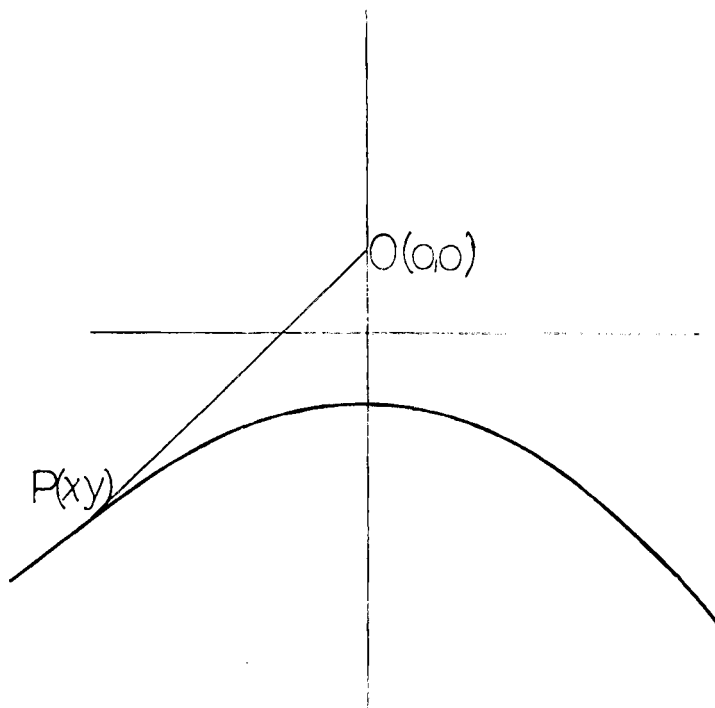


Figura 3.

Juan de Murs, quien la escribió en 1321 (53). Este autor, al referirse a las distintas constantes de precisión utilizadas por los autores griegos y árabes, observa lo siguiente:

«Alfonsius ulterius posuit ipsum in 72 annos cum medio moveri continue uno gradu quod verius estimatur et hoc consonat modernis qui sic dicens Alfonsium inscienter insequentur.»

A continuación señala que la precesión avanza  $1;22,40,53^{\circ}$  en cien años y  $49''28'''$  en un año (54). Estos parámetros no coinciden con ninguno de los obtenidos en la Tabla 7, pero su origen probable resulta fácil de establecer si tenemos en cuenta que Juan de Murs trata de determinar la cuantía de la precesión en función de la diferencia entre la longitud media del Sol computada con las *Tablas de Tolosa* y con las *Tablas Alfonsíes*. No dispongo de ningún manuscrito de las *Tablas de Tolosa*, pero es bien sabido que éstas constituyen una de las versiones «cristiani-

(53) POULLE, E. (1980). Jean de Murs et les Tables Alphonsines. *Arch. Hist. Doctr. Litter. Moyen Age*, 241-271, cita de p. 258.

(54) *Ibid.*, p. 259.

zadas» de las *Tablas de Toledo* (55), y que utilizan sus mismos parámetros para el movimiento medio del Sol. Hallemos, por consiguiente, la diferencia entre el movimiento medio del Sol en un día según las *Tablas Alfonsíes* y según las *Tablas de Toledo* (56):

<i>Tablas Alfonsíes</i> . . . . .	0,59,08,19,37,19,13,56°
<i>Tablas de Toledo</i> . . . . .	0,59,08,11,28,27°
	0;00,00,08,08,52,13,56°

Y si multiplicamos 0;00,00,08,08,52,13,56° por 365.25 obtendremos un valor anual de la precesión de 49''26", al que corresponde un avance de un grado en 72.58 años y de 1;22,40,00° en cien años. Tenemos, por consiguiente, una idea acerca del procedimiento utilizado por Juan de Murs para computar sus valores medios de la precesión alfonsí. No me preocupa demasiado el no haber reconstruido las cifras exactas del astrónomo francés: el propio Poulle, al editar el texto, ya señaló que las sucesivas equivalencias que da Juan de Murs no son siempre coherentes las unas con las otras.

Hagamos hincapié, por último, en algo obvio: las longitudes solares que se computan con las *Tablas Alfonsíes* son trópicas y no sidéreas, como en el caso de las *Tablas de Toledo*. Esto significa que las tablas del movimiento medio del Sol llevan forzosamente incorporado el valor del incremento en longitud debido a la precesión o, al menos, de un valor medio de la precesión: acabamos de comprobarlo al establecer la diferencia entre el movimiento medio solar entre estas dos tablas. Ahora bien, el capítulo 49 del *Libro de las Taulas* (57) —en el que se describe un modelo de trepidación, que tanto puede ser el alfonsí como el de Tābit b. Qurra, ya que no menciona parámetros numéricos— afirma que, una vez obtenida la ecuación ( $\Delta\lambda$ ), ésta se sumará o restará a la longitud verdadera del Sol, la Luna y los planetas:

«añádalo/mígualo a los logares de las luminarias et de los planetas que te salieron de las eguaciones de sus taulas.»

Dejando de lado, de momento, el problema de la Luna y de los planetas, señalemos que, en el caso del Sol, se nos están describiendo unas tablas de movimiento medio que no llevaban incorporadas el valor de la precesión y que, por consiguiente, servían para computar posiciones sidéreas y no trópicas. Si existió una versión de las tablas numéricas que

(55) GINGERICH, O; WELTHER, B. (1977). The accuracy of the Toledan Tables. En: PRISMATA. *Festschrift für Willy Hartner*. Wiesbaden, pp. 151-163.

(56) Cfr. TOOMER, G. J. (1968), p. 44.

(57) RICO Y SINOBAS, M. (1866). *Op. cit.*, n.º 4, vol. IV, p. 179.

correspondía a la descripción del texto castellano, éstas eran, por consiguiente, distintas de las que encontramos en las versiones latinas de las *Tablas Alfonsíes*.

Para terminar con el tema de la precesión de los equinoccios y del movimiento del apogeo solar consideremos, por un momento, la Tabla 8. En ella se registran algunas determinaciones de la longitud del apogeo y se comparan con las que se pueden computar con las *Tablas Alfonsíes*, tanto manualmente como con el programa de la *Hewlett-Packard 41*. El propósito es, evidentemente, averiguar si los astrónomos alfonsíes tuvieron en cuenta alguna de estas determinaciones cuando ajustaron los parámetros de su modelo de trepidación. En la columna de las diferencias queda claro que para nada se tuvo en cuenta la posición del apogeo establecida por Hiparco de Rodas y, evidentemente, hay que descartar el que pudiera considerarse la determinación de Ptolomeo, quien obtuvo el mismo resultado que Hiparco (65;30°) en el siglo II de nuestra era. En cambio es muy probable que los astrónomos alfonsíes tuvieran en cuenta la posición del apogeo solar para comienzos de la era de Yezdegerd (632 de nuestra era) que, según los hermanos Banū Mūsā b. Šakir, era de 80;44,19°. Otra coincidencia notable —no reseñada en la Tabla 8— se da para la determinación del apogeo realizada en el Irán sasánida hacia el año 450 de nuestra era. La fuente es aquí, como en el caso anterior, Ibn Yūnus, quien señala que los astrónomos persas encontraron el apogeo a 77;55° (58). Con las *Tablas* calculo 78;08,32° (*Hewlett-Packard 41*: 78;08,23°); la diferencia es sólo de 0;13,32°. No he logrado encontrar otras determinaciones del apogeo a las que se ajuste con tanta precisión el modelo alfonsí, a pesar de que las *Tablas* dan errores tolerables (inferiores a 1°) para las determinaciones de los apogeos de los astrónomos del califa al-Ma'mūn, Tābit b. Qurra, Ibn Yūnus y Azarquiel. Llama, en cambio, la atención la notable diferencia (1;55,04°) con el apogeo de al-Battānī, dado que las tablas de este astrónomo eran perfectamente conocidas por los colaboradores del rey Alfonso.

### III. LA OBLICUIDAD DE LA ECLIPTICA

Si, tal como afirma el prólogo de los cánones castellanos de las *Tablas Alfonsíes*, se llevaron a cabo observaciones solares durante más de un año, parece lógico suponer que entre los parámetros básicos se deter-

(58) KENNEDY, E. S.; VAN DER WAERDEN, B. I. (1963). The world-year of the persians. *J. Am. Or. Soc.*, 83, 315-327 [reimpreso en: Kennedy, E. S. et al. (1983), *op. cit.*, pp. 338-350, cita de p. 325.

TABLA 8

*Algunas determinaciones históricas de la longitud del apogeo solar comparadas con la posición que se computa a partir de las Tablas Alfonsies*

<i>Fuente</i>	<i>Fecha</i>	<i>Apogeo (A)</i>	<i>Apogeo con Tablas Alfonsies (B)</i>	<i>Hewlett- Packard 41</i>	<i>(A) - (B)</i>
Hiparco ( <i>Alm.</i> 3, 4) . . . . .	<i>c. 140</i>	65;30°	69;06,47°	69;09,50°	- 3;36,47°
Banū Mūsā (47) . . . . .	<i>632</i>	80;44,19°	80;46,28°	80;46,59°	- 0;02,09°
Astrónomos ma'mūnīs (48) . . . . .	<i>830</i>	82;39°	83;30,58°	83;31,01°	- 0;51,58°
Tābit b. Qurra (49) . . . . .	<i>831</i>	82;45°	83;31,48°	83;31,49°	- 0;46,48°
		(82;54°/82;55°)			
Al-Battānī (50) . . . . .	<i>1-III-830</i>	82;15°	84;10,04°	84;10,06°	- 1;55,04°
Ibn Yūnūs (51) . . . . .	<i>1004</i>	86;10°	85;45,35°	85;46,00°	+ 0;24,25°
Azarquiel (52) . . . . .	<i>1080</i>	85;50°	86;36,18°	86;41,51°	- 0;46,18°

minó la oblicuidad de la eclíptica. Ahora bien, de manera harto curiosa, en las tres ediciones de las *Tablas* que he consultado (1483, 1524 y 1553) no aparece una sola tabla de la declinación del Sol. La oblicuidad puede, evidentemente, deducirse de la tabla de ascensiones rectas, pero la que aparece en las *Tablas Alfonsies* parece copiada de las *Tablas de Toledo* (59), o de las de al-Battānī (60), y está computada para una oblicuidad de  $23;35^{\circ}$ . Por otra parte, los cánones castellanos (61) dan, para la oblicuidad, un valor de  $23;33^{\circ}$  que es el parámetro de Azarquiel y también, como hemos visto, el modelo de trepidación alfonsí.

A su vez, el *Libro de las Taulas* alude a una tabla de declinaciones solares (62), y en el *Cuadrante para rectificar* Isaac b. Sid menciona un nuevo parámetro para la oblicuidad:  $23;32,29^{\circ}$ , del que no conozco precedentes (63). Este texto nos da, asimismo, dos valores de la declinación que resultan perfectamente compatibles con el parámetro anterior: se trata de la declinación que corresponde a las longitudes de  $30^{\circ}$  (11;31,11<sup>o</sup>) y  $60^{\circ}$  (20;14,13<sup>o</sup>). En el último caso el valor correcto sería un segundo inferior. Parece, pues, que nos encontramos ante un resto de la tabla alfonsí de declinaciones solares que, de hecho, se conserva en otra obra de Isaac b. Sid, el *Libro del reloj de la piedra de la sombra*, en el que se nos reproduce la mencionada tabla, calculada de grado en grado, para un valor de la oblicuidad de  $23;32,30^{\circ}$ , resultado obvio de redondear  $23;32,29^{\circ}$  del *Cuadrante para rectificar*. Salvo tres errores manifiestos (64), la tabla está, en general, bien calculada y conviene subrayar que el texto del *Libro del reloj* manifiesta que fue «rectificada en este nuestro tiempo», lo cual implica que el parámetro correspondiente a la oblicuidad ( $23;32,29$  redondeado en  $23;32,30$ ) se obtuvo mediante una o varias observaciones de la altura del Sol en los solsticios.

La primera constatación que se impone al considerar este valor de la oblicuidad es que sorprende por su precisión, ya que la fórmula de Newcomb nos da una oblicuidad de  $23;32,11^{\circ}$  para 1262 y de  $23;32,04^{\circ}$  para 1277 (fecha en la que se escribió el *Cuadrante para rectificar*). A la

{59} TOOMER, G. J. (1968). *Op. cit.*, n.º 7, pp. 34-35.

{60} NALLINO, C. A. (1903-1907). *Op. cit.*, n.º 6, vol. II, pp. 61-64.

{61} RICO Y SINOBÍAS, M. (1866). *Op. cit.*, n.º 4, vol. IV, p. 153.

{62} *Ibid.*, p. 136 y pp. 179-180.

{63} *Ibid.*, pp. 295-297.

{64} Los valores de la declinación para una longitud de  $40^{\circ}$  (14, 22,  $36^{\circ}$  en la ed. de RICO, frente al valor correcto 14, 52,  $36^{\circ}$ ),  $48^{\circ}$  (17; 17,02<sup>o</sup> en lugar de 17, 16,01<sup>o</sup>) y  $70^{\circ}$  (22; 02,13<sup>o</sup> en lugar de 22; 02,41<sup>o</sup>). Estos tres casos son, probablemente, errores de copia en el manuscrito o erratas de imprenta en la edición de RICO, fáciles de justificar, ya que la tabla aparece en números romanos. En los restantes casos la diferencia entre los valores de la tabla y los que he recalculado oscilan entre 0'' y 4'', predominando con mucho las diferencias de sólo 1''.



vista de ello conviene que nos planteemos si este valor es resultado de las observaciones alfonsíes, o bien si ha sido computado de otro modo.

Dado que no conozco ninguna determinación de la oblicuidad anterior al rey Alfonso, cuyo resultado haya sido 23;32,29°, creo que existían tres procedimientos, indudablemente conocidos por los colaboradores del monarca, que permitían calcular la oblicuidad para una fecha determinada. Se trata de los métodos —todos ellos relacionados con la teoría de la trepidación— de Tābit b. Qurra, Azarquiel y el propio Alfonso X. De entrada debe descartarse el modelo de Azarquiel para justificar la variación de la oblicuidad de la eclíptica, ya que tanto éste como las tablas correspondientes postulan un valor máximo de 23;53° (que correspondería a la época de Ptolomeo, *c.* 140 de nuestra era) y un valor mínimo de 23;33° (que se habría alcanzado alrededor del año 1050) (65): 23;32,29° se encuentra, claramente, fuera de estos límites.

En lo que respecta al modelo de Tābit, los valores de la oblicuidad han sido computados por MERCIER por tres métodos distintos (66). El primero de ellos se basa en la hipótesis Mercier, de acuerdo con la cual  $DI = 90^\circ$  en la Figura 2. La fórmula que utiliza es:

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos r \cos \varepsilon_0 + \operatorname{tg} r \operatorname{sen} r \cos (i - \varepsilon_0) \cos i}{[1 + \operatorname{tg}^2 r \cos^2 (i - \varepsilon_0)]^{1/2}}$$

El segundo procedimiento se basa en la hipótesis North-Goldstein, según la cual  $AI = 90^\circ$ , también en la Figura 2:

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \varepsilon_0}{[1 + \operatorname{tg}^2 r \operatorname{sen}^2 (i - \varepsilon_0)]^{1/2}}$$

En ambos casos los parámetros a utilizar son los que proporciona el propio Tābit en el *Liber de motu*, a saber:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 23;33^\circ \\ r &= 4;18,43^\circ \end{aligned}$$

Por otra parte, Tābit b. Qurra, además de tabular directamente la ecuación ( $\Delta\lambda$ ), nos da también el valor del arco DC (Figura 3), que podemos considerar como la declinación ( $\delta$ ) del punto D, perteneciente a la eclíptica móvil, situado a una distancia  $\Delta\lambda$  del punto verbal B. Por

(65) MILLAS VALLIGROSA, J. M. (1943-1950). *Op. cit.*, n.º 11, p. 325; GOLDSTEIN, B. R. (1964). *Op. cit.*, n.º 11, pp. 238-240.

(66) MERCIER, R. (1976), p. 212 y (1977), p. 39, *op. cit.*, n.º 11.

consiguiente, MERCIER puede obtener el valor de la oblicuidad ( $\epsilon$ ) por un tercer procedimiento, aplicando:

$$\text{sen } \epsilon = \frac{\text{sen DC } (i)}{\text{sen BD}}$$

En los tres procedimientos, el valor de la oblicuidad será función del ángulo  $i$ . Podemos averiguar fácilmente, mediante las tablas del *Liber de motu*, el valor de este ángulo para los años 1263 (supuesto inicio de las observaciones alfonsíes) y 1277 (fecha de redacción del *Cuadrante para rectificar*):

- $i$  (14-VII-1263) = 58;26,51°
- $i$  (14-VII-1277) = 59;41,23°

Con estos valores de  $i$  computaremos la oblicuidad de la eclíptica de acuerdo con los tres procedimientos expuestos por MERCIER (Tabla 9):

TABLA 9  
*Oblicuidad de la elíptica según los procedimientos de MERCIER*

$i$	Hipótesis Mercier	Hipótesis North-Goldstein	$\text{sen}^{-1} (\text{sen DC}/\text{sen BD})$
58;26,51° .....	23;49,21°	23;40,19°	23;49,09°
59;41,23° .....	23;49,56°	23;40,45°	23;51,00°

De lo que parece desprenderse que el valor de la oblicuidad reseñado por Isaac b. Sid no ha sido computado con el modelo de trepidación de Tābit b. Qurra.

Un resultado análogo obtendremos si calculamos el valor de la oblicuidad para el 31-V-1263 ( $i = 64;08,00^\circ$ ) y para el 31-V-1277 ( $i = 64;53,02^\circ$ ) utilizando las dos primeras fórmulas de MERCIER, pero con los parámetros alfonsíes que hemos deducido en el apartado 2 del presente trabajo (Tabla 10):

TABLA 10  
*Oblicuidad de la elíptica según MERCIER*

$i$	Hipótesis Mercier	Hipótesis North-Goldstein
64;08,00° .....	23;46,03°	23;39,30°
64;53,02° .....	23;46,10°	23;39,42°

Podemos concluir, por consiguiente, que el parámetro  $23;32;29^\circ$  tampoco ha sido computado a partir del modelo de trepidación alfonsí. Es lógico suponer, por tanto, que este parámetro sea el resultado de una o varias observaciones afortunadas de la altura meridiana del Sol en los solsticios. Si esto es así, nos encontramos probablemente ante el primer caso conocido de determinación, por observación, de la oblicuidad de la eclíptica realizado en la Europa Cristiana: poco después, en 1290, Guillermo de Saint Cloud obtendrá un valor mucho peor ( $23;34^\circ$ ) (67).

Ahora bien, resulta sorprendente esta discordancia entre los valores de la oblicuidad que se computan a partir del modelo de trepidación alfonsí y el parámetro, mucho más preciso, que consta que los colaboradores del rey Alfonso conocían. Con el fin de aclarar esta cuestión doy, en la Tabla 11, una serie de valores de la oblicuidad computados, utilizando las dos fórmulas de Mercier, con dos programas de la *Hewlett-Packard 41*.

El análisis de esta tabla es interesante por más de un concepto. Observemos, en primer lugar, que los valores de la oblicuidad se mueven entre límites razonables. En la hipótesis Mercier el valor mínimo de  $\epsilon$  será  $23;30,29^\circ$  (para  $i = 3^\circ, 183^\circ$ ) y el máximo  $23;50,46^\circ$  (para  $i = 93^\circ, 273^\circ$ ); en la hipótesis North-Goldstein el valor mínimo de  $\epsilon$  será  $23;33^\circ$  (para  $i = 23;33^\circ$  y  $203;33^\circ$ ) y el máximo de  $23;48;17^\circ$  (para  $i = 114^\circ, 294^\circ$ ). No obstante, sabemos que en el modelo alfonsí  $i = 0^\circ$  el 16-V-16 de nuestra era y, de acuerdo con la hipótesis Mercier, la función  $\epsilon$  es creciente a partir de  $i > 3^\circ$ , no siendo decreciente hasta que  $i > 93^\circ$ . Ahora bien, las observaciones antiguas y medievales habían mostrado lo contrario: la disminución secular del valor de la oblicuidad. Limitémonos sólo a tres ejemplos:

Ptolomeo (c. 140 de nuestra era)	: $23;51,20^\circ$
Astrónomos de al-Ma'mūn (c. 830)	: $23;35^\circ$ o $23;33^\circ$
Azarquiel (c. 1080)	: $23;33^\circ$

A esto podríamos añadir la estimación alfonsí de la oblicuidad (c. 1277) de  $23;32,29^\circ$ . Podemos ahora calcular el valor de  $i$  para las cuatro fechas mencionadas:

140 . . . . .	$6;24,34^\circ$
830 . . . . .	$41;53,42^\circ$
1080 . . . . .	$54;45;08^\circ$
1277 . . . . .	$64;51,12^\circ$

(67) POUILLE, E. (1980). *Op. cit.*, n.º 53, pp. 261-262.

TABLA 11

*Valores de la oblicuidad según el modelo de trepidación alfonsí*

$i$ ( $^{\circ}$ )	<i>Hipótesis Mercier</i>	<i>Hipótesis North-Goldstein</i>
0	23;30,33 $^{\circ}$	23;35,27 $^{\circ}$
5	23;30,31 $^{\circ}$	23;34,33 $^{\circ}$
10	23;30,48 $^{\circ}$	23;33,51 $^{\circ}$
15	23;31,22 $^{\circ}$	23;33,20 $^{\circ}$
20	23;32,14 $^{\circ}$	23;33,04 $^{\circ}$
25	23;33,21 $^{\circ}$	23;33,01 $^{\circ}$
30	23;34,41 $^{\circ}$	23;33,12 $^{\circ}$
35	23;36,12 $^{\circ}$	23;33,36 $^{\circ}$
40	23;37,51 $^{\circ}$	23;34,14 $^{\circ}$
45	23;39,36 $^{\circ}$	23;35,03 $^{\circ}$
50	23;41,22 $^{\circ}$	23;36,03 $^{\circ}$
55	23;43,06 $^{\circ}$	23;37,11 $^{\circ}$
60	23;44,46 $^{\circ}$	23;38,25 $^{\circ}$
65	23;46,19 $^{\circ}$	23;39,44 $^{\circ}$
70	23;47,41 $^{\circ}$	23;41,04 $^{\circ}$
75	23;48,50 $^{\circ}$	23;42,23 $^{\circ}$
80	23;49,45 $^{\circ}$	23;43,38 $^{\circ}$
85	23;50,22 $^{\circ}$	23;44,49 $^{\circ}$
90	23;50,43 $^{\circ}$	23;45,52 $^{\circ}$
95	23;50,44 $^{\circ}$	23;46,45 $^{\circ}$
100	23;50,28 $^{\circ}$	23;47,27 $^{\circ}$
105	23;49,54 $^{\circ}$	23;47,57 $^{\circ}$
110	23;49,03 $^{\circ}$	23;48,13 $^{\circ}$
115	23;47,56 $^{\circ}$	23;48,16 $^{\circ}$
120	23;46,37 $^{\circ}$	23;48,05 $^{\circ}$
125	23;45,06 $^{\circ}$	23;47,41 $^{\circ}$
130	23;43,27 $^{\circ}$	23;47,04 $^{\circ}$
135	23;41,43 $^{\circ}$	23;46,15 $^{\circ}$
140	23;39,57 $^{\circ}$	23;45,16 $^{\circ}$
145	23;38,12 $^{\circ}$	23;44,09 $^{\circ}$
150	23;36,32 $^{\circ}$	23;42,55 $^{\circ}$
155	23;34,59 $^{\circ}$	23;41,37 $^{\circ}$
160	23;33,36 $^{\circ}$	23;40,17 $^{\circ}$
165	23;32,26 $^{\circ}$	23;38,58 $^{\circ}$
170	23;31,31 $^{\circ}$	23;37,42 $^{\circ}$
175	23;30,53 $^{\circ}$	23;36,31 $^{\circ}$
180	23;30,33 $^{\circ}$	23;35,27 $^{\circ}$

Vemos, pues, que todos estos valores de  $i$  se encuentran en aquel sector de la tabla en la que la función  $\epsilon$  es creciente, de acuerdo con la hipótesis Mercier. Algo semejante sucede si adoptamos la hipótesis North-Goldstein, aunque, en este caso,  $\epsilon$  sólo crece a partir de  $i > 23;33^\circ$ . Las observaciones de Ptolomeo quedan, pues, situadas dentro del sector decreciente de la función, pero podrá fácilmente comprobarse que el modelo de trepidación alfonsí no puede, en modo alguno, dar un valor de la oblicuidad para la época de Ptolomeo que se acerque al parámetro establecido por éste.

Se impone, pues, una conclusión necesaria: el modelo de trepidación construido por los astrónomos alfonsíes no tenía en cuenta, en absoluto, la variación de la oblicuidad de la eclíptica. Su única y exclusiva función era justificar la precesión de los equinoccios.

#### IV. LA TABLA DE LA ECUACION DEL SOL

Volvamos ahora al principio del apartado 2 del presente trabajo. Hemos expuesto ya el procedimiento para obtener el valor de  $\bar{\lambda}$ , la longitud media del Sol a partir del apogeo (ángulo ACS en la Figura 1). Si queremos convertir esta longitud media en longitud verdadera, es necesario introducir la corrección  $\eta$ , denominada ecuación del centro. Es fácil de ver que cuando la longitud media está comprendida entre  $0^\circ$  (apogeo) y  $180^\circ$  (perigeo):

$$SCT = 180^\circ - \bar{\lambda}$$

$$ATS = \lambda = 180^\circ - (SCT + CST) = 180^\circ - (180^\circ - \bar{\lambda} + \eta) = \bar{\lambda} - \eta$$

En cambio, si la longitud media a partir del apogeo está comprendida entre  $180^\circ$  (perigeo) y  $360^\circ$  (apogeo), obtendremos, por el contrario:

$$\lambda = \bar{\lambda} + \eta$$

Podemos, por consiguiente, considerar que la ecuación del centro es negativa para

$$0^\circ < \bar{\lambda} < 180^\circ$$

y positiva para

$$180^\circ < \bar{\lambda} < 360^\circ$$

Los procedimientos para calcular la ecuación del centro han sido múltiples a lo largo de la historia de la astronomía antigua y medieval y una buena colección de los mismos, reunidos por el astrónomo oriental

al-Bīrūnī, se encuentran expuestos en un importante trabajo de KENNEDY-MURUWWA (1958). Un análisis somero de la tabla de la ecuación del centro en las *Tablas Alfonsíes* muestra que el valor máximo de la ecuación es de  $2;10^{\circ}$  para una longitud media del apogeo comprendida entre  $92^{\circ}$  y  $94^{\circ}$ . Este dato nos proporciona, de entrada, dos indicios: por una parte, nos señala que la tabla ha sido computada según procedimientos ptolemaicos y no siguiendo los antiguos métodos hindúes (soluciones por senos y por declinaciones), de acuerdo con los cuales el valor máximo de la ecuación del centro se alcanza cuando la longitud media desde el apogeo es de  $90^{\circ}$  y  $270^{\circ}$  (68). Conviene señalar que la llamada solución por declinaciones estaba aún viva en España en el siglo XIV, ya que fue utilizada por los astrónomos de Pedro el Ceremonioso de Aragón para computar la tabla de la ecuación del Sol en las *Tablas de Barcelona* (69). Por otra parte, no me atrevo a pronunciarme acerca de la originalidad de la máxima ecuación del centro alfonsí ( $2;10^{\circ}$ ), ya que se encuentra muy próxima a otros parámetros de la tradición indoiraniana:  $2;14^{\circ}$  es el valor utilizado en el *Ziġ al-Šāh* (que utiliza también  $2;13^{\circ}$ ) (70) y aparece asimismo en las tablas de al-Jwārizmī (71). Igualmente, en el siglo VIII, el astrónomo oriental al-Fazārī utilizaba también  $2;14^{\circ}$  y  $2;11,15^{\circ}$ . Asimismo, al-Bīrūnī atribuye a la tradición del *Sindhind* el uso de  $2;10,46,40^{\circ}$ , parámetro que puede relacionarse con el  $2;10,31^{\circ}$  del *Paitāmahāsiddhānta* (72). Del mismo modo, el parámetro alfonsí no difiere mucho de los  $2;12,23^{\circ}$  utilizados, en el siglo XII, por al-Jāzinī (73).

Realizadas estas consideraciones, podemos proceder a recalcular la tabla alfonsí de la ecuación del centro con la *Hewlett-Packard 41*, utilizando uno de los procedimientos que al-Bīrūnī considera «correctos» (i.e. ptolemaicos) (74), a saber:

$$\text{sen} = \frac{\text{sen } \tilde{\lambda} \text{ sen } \eta_{\text{máx.}}}{[\text{sen}^2 \lambda + (\cos \lambda + \text{sen } \eta_{\text{máx.}})^2]^{1/2}}$$

- (68) KENNEDY, E. S.; MURUWWA, A. (1958). Bīrūnī on the solar equation. *J. Near East. Studi.*, 17, 112-121 [reimpreso en: KENNEDY, E. S. et al. (1983), *op. cit.*, pp. 603-612], cita de pp. 118-119.
- (69) SAMSO, J. (1985). *Op. cit.*, n.º 52.
- (70) KENNEDY, E. S. (1958). The sasanian astronomical handbook *Ziġ-i-Šāh* and the Astrological Doctrine of «Transit» (Mamarr). *J. Am. Or. Soc.*, 78, 246-262 [reimpreso en: KENNEDY, E. S., et al. (1983). *Studies in the Islamic Exact Sciences*. Beirut, pp. 319-335], cita de p. 259.
- (71) NEUGEBAUER, O. (1962a). *Op. cit.*, n.º 5, pp. 95-96.
- (72) PINGREE, D. (1970). The fragments of the works of al-Fazārī. *J. Near East. Stud.*, 29, 103-123; pp. 110-114 y (1968). The fragments of the works of Ya'qūb Ibn Tāriq. *J. Near East. Studi.*, 27, 97-125, cita de pp. 103-104.
- (73) KENNEDY, E. S. (1956). A survey of Islamic Astronomical Tables. *Trans. Am. Phil. Soc.*, 46, 123-175.
- (74) KENNEDY, E. S.; MURUWWA, A. (1958). *Op. cit.*, n.º 68, p. 117 (método 11).

Un muestreo de los resultados obtenidos al recalcular la tabla de acuerdo con la fórmula anterior, aparecen en la Tabla 12, en la que anoto los valores que nos dan las *Tablas Alfonsíes*, consignando, entre paréntesis, el error cometido con respecto al valor computado.

TABLA 12  
*Tabla alfonsí de la ecuación del Sol*

<i>i</i> (°)		<i>i</i> (°)	
1.º	0;02,10º (- 1'')	92º	2;10,00º (0)
10.º	0;21,28º (- 18'')	100º	2;08,45º (- 2'')
20.º	0;42,43º (- 12'')	110º	2;04,05º (+ 24'')
30.º	1;02,54º (- 1'')	120º	1;54,57º (+ 16'')
40.º	1;20,48º (- 23'')	130º	1;41,57º (- 4'')
50.º	1;37,00º (- 10'')	140º	1;26,03º (+ 2'')
60.º	1;50,44º (+ 18'')	150º	1;07,07º (- 4'')
70.º	2;00,26º (- 5'')	160º	0;45,53º (- 12'')
80.º	2;06,45º (- 21'')	170º	0;23,42º (+ 16'')
90.º	2;09,57º (- 3'')	180º	0;00,00º (0)

El análisis de la tabla anterior muestra que, posiblemente, una buena parte de los valores fueron obtenidos por interpolación. En efecto, sólo se obtienen valores exactos, además de para los argumentos 92º y 180º ya señalados, para

129º ..... 1;43,26º  
149º ..... 1;09,10º

Por otra parte, en 12 ocasiones la tabla contiene errores de sólo 1''. Además de los valores correspondientes a los argumentos 1º y 30º, se trata de:

53º ..... 1;41,27 (- 1'')	102º ..... 2;08,06 (+ 1'')
69º ..... 1;59,41 (+ 1'')	103º ..... 2;07,41 (+ 1'')
91º ..... 2;09,58 (+ 1'')	104º ..... 2;07,14 (+ 1'')
93º ..... 2;10,00 (+ 1'')	136º ..... 1;32,46 (- 1'')
98º ..... 2;09,20 (+ 1'')	163º ..... 0;39,26 (+ 1'')

Señalaré, por último, que el máximo error de la tabla es de 30'' y corresponde a:

111º ..... 2;03,27º

Nos encontramos, pues, ante una tabla con pocos valores correctos y que, en un número elevado de casos, fue computada utilizando un

método aproximado, o bien interpolando entre los valores correctos. Me resulta imposible precisar más. Los errores de esta tabla quedan, en cambio, disimulados en la tabla de la ecuación del centro de Venus, que da los mismos valores que en la correspondiente tabla del Sol, pero sólo aproxima hasta los minutos.

## V. CONCLUSIONES

El presente trabajo ha intentado revisar sistemáticamente una serie de cuestiones relativas al movimiento del Sol en las *Tablas Alfonsíes*. Por este motivo, me he permitido repetir conceptos elementales de astronomía ptolemaica que son bien conocidos y no constituyen novedad alguna. Por otra parte, he pretendido también mostrar las posibilidades de una pequeña calculadora programable para cualquier tipo de estudios relacionados con la historia de la astronomía medieval, comparando frecuentemente los valores computados con la *Hewlett-Packard 41* con los que se obtienen manualmente a partir de las mencionadas *Tablas*.

Pese a la notable cantidad de nociones comunes que he repetido a lo largo de estas páginas y que han constituido, en cierto modo, el «hijo de mi relato», creo haber aportado asimismo un cierto número de novedades. La primera de ellas ha sido el análisis de los datos que ofrece el *Cuadrante para rectificar* acerca de la longitud del Sol a principio de cada mes del año. Pese a no haber podido demostrarlo de modo absoluto, es muy posible que estas longitudes del Sol hubieran sido calculadas por Isaac b. Sid utilizando las *Tablas Alfonsíes*: tendríamos, pues, uno de los primeros ejemplos claros del uso de estas tablas, ya que el *Cuadrante para rectificar* está fechado en 1277.

He pasado, a continuación, a ocuparme de la posición del apogeo solar mostrando que, posiblemente, el parámetro que nos dan las *Tablas Alfonsíes* para la longitud de este apogeo sea original. Ahora bien, al estudiar el movimiento del apogeo me he visto obligado a realizar una larga digresión acerca de la teoría de la precesión-trepidación utilizada por los astrónomos alfonsíes. Aquí he llamado la atención sobre los antecedentes hispánicos de la combinación entre precesión y trepidación que desarrollan plenamente, por vez primera, nuestras *Tablas*. Por otra parte, al analizar la tabla de la trepidación, creo haber añadido a las aportaciones de DOBRZYCKI y MERCIER algunas consideraciones sobre un método aproximado para computar la mencionada tabla, gracias al cual he podido establecer dos parámetros compatibles con ella: una oblicuidad media de  $23;33^{\circ}$ , tomada, posiblemente, de Tābit b. Qurra,



y un radio del epiciclo ecuatorial de  $3;34,35^{\circ}$ , totalmente independiente de Tābit. Resulta curioso señalar la influencia de este astrónomo oriental (m. 901) en la obra de los colaboradores de Alfonso: esta influencia contrasta con los escasos ecos del toledano Azarquiel, introductor de importantes novedades en el modelo solar ptolemaico (75) que no parecen haber interesado a los astrónomos alfonsíes.

Se ha afirmado, repetidamente, que la combinación de precesión y trepidación alfonsí da un valor muy aceptable de la precesión anual para la época de Alfonso X y hemos tenido ocasión de comprobarlo. Ahora bien, al comparar las longitudes del apogeo solar computadas con nuestras *Tablas* con algunas determinaciones históricas de la posición del apogeo, hemos visto que existe una coincidencia sorprendente entre la longitud de las *Tablas* y la que, según informan los Banū Mūsā, fue computada para el comienzo de la era de Yezdeguerd (632 de J.C.): la diferencia entre ambas posiciones es sólo de  $2;09'$ . Parece, pues, que tenemos aquí un dato más a añadir a la larga serie de ecos que tuvo la astronomía de tradición indoiraniana en la España Medieval. Se trata de un tema que ha sido excasamente explotado en lo que respecta a la astronomía alfonsí y en el que convendrá insistir en lo sucesivo.

En relación con lo anterior quiero, asimismo, insistir en el tema de las diferencias existentes entre los cánones castellanos y las tablas latinas editadas. Una lista de estas diferencias puede encontrarse en MILLÁS (76) y en DREYER (77), pero creo haber señalado una novedad: las tablas latinas dan longitudes trópicas del Sol, mientras que parece claro que las tablas castellanas daban longitudes sidéreas. Parece, pues, que se produjo una evolución importante en los astrónomos alfonsíes, que pasaron de una tradición tendente a computar longitudes sidéreas —representada en España por las tablas de al-Jwārizmī y por las *Tablas de Toledo*— a otra tradición de signo ptolemaico, que tendía a computar longitudes trópicas.

Una última novedad viene representada por la aparición de un nuevo parámetro ( $23;32,29^{\circ}$ ) para la oblicuidad de la eclíptica. Creo haber demostrado que el mencionado valor es extremadamente preciso para la época de Alfonso, y que no pudo ser computado por ninguno de los métodos conocidos. Es, por ello, muy posible que derivara de la observación. Por otra parte, siguiendo las huellas del importante trabajo de MERCIER (78) sobre los distintos modelos de trepidación, he puesto

(75) TOOMER, G. J. (1969). *Op. cit.*, n.º 3.

(76) MILLÁS VALLICROSA, J. M. (1943-1950). *Op. cit.*, n.º 11, p. 408.

(77) DREYER, J. L. E. (1920). *Op. cit.*, n.º 24.

(78) MERCIER, R. (1976 y 1977). *Op. cit.*, n.º 11.

de relieve que los astrónomos alfonsíes no intentaron justificar, con su modelo de trepidación, la disminución secular de la oblicuidad de la eclíptica. Algo similar podría decirse, probablemente, de Tābit b. Qurra, al contrario de lo que sucede con Azarquiel: de nuevo una aportación del astrónomo toledano que los astrónomos alfonsíes pasaron por alto.

Finalmente, y con el deseo de completar esta revisión del modelo solar alfonsí, he pasado revista a la tabla de la ecuación del centro. Aquí debo confesar mi fracaso: no he logrado establecer el procedimiento exacto utilizado por los astrónomos alfonsíes para computar la tabla, aunque sí he apuntado a un posible nuevo eco de la tradición india en el parámetro alfonsí para la máxima ecuación del centro.