# Notas sobre Cinemática (Tema 2). Física de los Procesos Biológicos. Grupo C

Sándalo Roldán Vargas
*Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada*

**RESUMEN**

En estas notas breves se presenta el tratamiento cinemático de cuatro tipos de movimiento representativos descritos por un *punto material* o *partícula*. Al tratarse de un estudio cinemático, apenas nos centraremos en las causas (fuerzas) que condicionan cada uno de los movimientos estudiados sino que buscaremos esencialmente las relaciones que vinculan a las cuatro magnitudes que describen dichos movimientos, es decir, las relaciones existentes entre el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula. Pese a ello, en aquellos movimientos en los que la aceleración no sea nula, mencionaremos brevemente la causa (fuerza) que da lugar a dicha aceleración.

En los dos primeros tipos de movimiento la partícula se desplaza en una dimensión, mientras que en los dos últimos el movimiento de la partícula sigue una trayectoria no rectilínea contenida en un plano.

## I. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Llamamos *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU) a aquel en el que el vector velocidad es constante (tanto en módulo, como en dirección y sentido), describiendo, por tanto, una línea recta como trayectoria. Al tener una velocidad constante, el MRU presenta una aceleración nula ($a = 0$) por lo que, en virtud de la segunda ley de Newton, sobre la partícula actuará una fuerza neta nula: $F = ma = 0$, siendo $m$ la masa de la partícula.

Llamando $x(t)$ a la coordenada que marca la posición de la partícula en el tiempo $t$ y $v$ a su velocidad, tendremos la siguiente relación general (que no es más que la definición de velocidad instantánea):

$$\frac{dx(t)}{dt} = v \tag{1}$$

Con objeto de determinar $x(t)$, integramos la ecuación (1):

$$\int_0^t v dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \, , \tag{2}$$

donde la integral de la izquierda tiene como límites el tiempo 0 y el tiempo $t$ mientras que la de la derecha tiene como límites la posición inicial de la partícula en el tiempo 0, $x_0$, y la posición de la partícula en el tiempo $t$, $x(t)$. Teniendo en cuenta que la velocidad es constante, resulta:

$$v(t - 0) = x(t) - x_0 \, , \tag{3}$$

o, lo que es igual:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt} \tag{4}$$

La ecuación (4) describe completamente el MRU.

## II. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Llamamos *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado* (MRUA) a aquel en el que la trayectoria de la partícula es una línea recta y en el que la aceleración (contenida en la trayectoria recta) es además constante y distinta de cero. Al tener una aceleración constante distinta de cero, la fuerza neta que actúa la partícula en un MRUA será también constante y distinta de cero, tal como impone la segunda ley de Newton: $F = ma \neq 0$.

Para obtener las ecuaciones del MRUA partimos de la definición de aceleración instantánea $a$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a\,, \tag{5}$$

donde $v(t)$ es la velocidad en el instante $t$. De nuevo, integramos la ecuación (5) para obtener la velocidad en el tiempo $t$:

$$\int_0^t a dt = \int_{v_0}^{v(t)} dv\,, \tag{6}$$

donde el tiempo transcurre entre 0 y $t$ y la velocidad, que ya no es constante como lo era en el MRU, cambia entre $v_0$ (velocidad inicial) y $v(t)$. Teniendo en cuenta que la aceleración es constante:

$$a(t-0) = v(t) - v_0\,, \tag{7}$$

o, lo que es igual:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \tag{8}$$

La ecuación (8) nos permite conocer la velocidad $v(t)$ sin más que conocer la velocidad inicial de la que partió la partícula y la aceleración. Si queremos ahora conocer la posición de la partícula $x(t)$ en el instante $t$ debemos de nuevo integrar, tal como hicimos en la ecuación (2), pero esta vez teniendo en cuenta que la velocidad ya no es constante:

$$\int_0^t v(t)dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \tag{9}$$

Si usamos la ecuación (8), resulta:

$$\int_0^t (v_0 + at)dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx\,, \tag{10}$$

que da lugar a:

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x(t) - x_0\,, \tag{11}$$

donde finalmente:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \tag{12}$$

El MRUA queda por tanto completamente descrito por las ecuaciones (8) y (12), aunque a veces resulta útil obtener a partir de ellas una tercera relación en la que no aparece el tiempo de forma explícita:

$$2a\big(x(t) - x_0\big) = v^2(t) - v_0^2 \tag{13}$$

## III. MOVIMIENTO PARABÓLICO

Nos ocupamos ahora del primero de los dos movimientos cuya trayectoria, contenida en un plano, no es una línea recta: el *Movimiento Parabólico*. En particular, trataremos el movimiento de una partícula que es lanzada sobre la superficie terrestre con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, cuya dirección forma un ángulo $\theta_0$ con el plano tangente (horizontal) a dicha superficie (ver figura 1). **Este movimiento será descompuesto en dos movimientos perpendiculares e independientes**: un MRU en la dirección horizontal (eje $x$) y un MRUA en la dirección perpendicular a la superficie terrestre (eje $y$), cuya aceleración es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $g$.

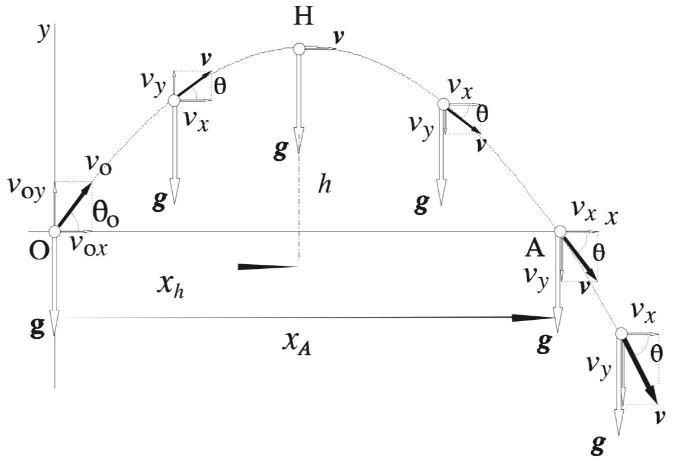


**Figura 1.** Esquema del Movimiento Parabólico (tomado con fines pedagógicos y permiso del autor de [1]).

En primer lugar, proyectamos la velocidad inicial $\vec{v}_0$ sobre los dos ejes para así determinar sus componentes cartesianas:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath} = v_0\,cos(\theta_0)\,\hat{\imath} + v_0\,sen(\theta_0)\,\hat{\jmath} \tag{14}$$

Si situamos el origen del movimiento en el punto de partida (punto O en la figura 1), las coordenadas iniciales serán: $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Sabemos que **en el eje $x$ tenemos un MRU** (ecuación (4)) cuya velocidad, constante, es $v_{0x} = v_0\,cos(\theta_0)$:

$$x(t) = v_{0x}\,t = v_0\,cos(\theta_0)\,t \tag{15}$$

Por otra parte, **las ecuaciones del movimiento en el eje $y$ son las de un MRUA** (ecuaciones (8) y (12)), donde la velocidad inicial viene dada por $v_{0y} = v_0\,sen(\theta_0)$ y la aceleración es $a = -g$ (nótese que, según el sentido de ejes definido en la figura, velocidad positiva hacia arriba, la aceleración de la gravedad será negativa):

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0\,sen(\theta_0) - gt \tag{16}$$

$$y(t) = v_0\,sen(\theta_0)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{17}$$

Las ecuaciones (15), (16) y (17) describen por completo el movimiento parabólico. Extraigamos de ellas algunas propiedades interesantes. En primer lugar, veamos que **la trayectoria seguida por la partícula es una parábola**. Para ello despejamos el tiempo $t$ en la ecuación (15) y lo sustituimos en la ecuación (17). Esto resulta:

$$\boxed{y(t) = tg(\theta_0)\,x(t) - \frac{g}{2v_0^2cos^2(\theta_0)}\,x^2(t)} \tag{18}$$

La ecuación (18) es, en efecto, la ecuación de una parábola en el plano $xy$ cuya concavidad está dirigida hacia abajo (ver figura 1). Esto es, una ecuación del tipo $y = ax - bx^2$, donde $a = tg(\theta_0)$ y $b = g/(2v_0^2 cos^2(\theta_0))$.

Como segunda propiedad, podemos obtener **el tiempo $t_H$ que la partícula tarda en alcanzar su altura máxima** (punto H en la figura 1). Esta altura se alcanzará cuando la velocidad en el eje $y$ se anule: $v_y(t_H) = 0$. Imponiendo esta condición en la ecuación (16) resulta:

$$\boxed{t_H = \frac{v_0\, sen(\theta_0)}{g}} \tag{19}$$

A partir de este tiempo podemos obtener **la altura máxima alcanzada** $y_H$, sin más que sustituir dicho tiempo en la ecuación (17). La altura máxima resulta:

$$\boxed{y_H = \frac{v_0^2\, sen^2(\theta_0)}{2g}} \tag{20}$$

Por último, nos ocupamos de conocer **el alcance de la partícula**, es decir, el desplazamiento horizontal de la partícula mientras ésta está en vuelo, hasta tocar de nuevo el suelo en un punto que se encuentre a la misma altura que el origen, $y = 0$, del que partió (punto A en la figura 1). El tiempo total de vuelo será el doble del tiempo que la partícula tarda en llegar a la altura máxima (ecuación (19)). Esto es así ya que, durante la subida, la partícula parte de una velocidad inicial en el eje $y$ que es decelerada por la aceleración $g$ hasta llegar a la altura $y_H$. Durante la bajada, la partícula vuelve a recorrer una altura $y_H$ en sentido opuesto a la subida, siendo esta vez acelerada por la misma acelaración $g$, y llegando al suelo con una velocidad final en el eje $y$ cuyo módulo es igual al módulo de la velocidad de partida $v_{0y}$ (ver ecuación (13)) pero cuyo sentido es opuesto al de la velocidad de partida: $v_y(\mathrm{A}) = -v_{0y}$. Por último, por la ecuación (8), el tiempo empleado en la subida es igual al tiempo empleado en la bajada. Así, para obtener el alcance $x_A$ basta sustituir $2t_H$ en la ecuación (15), que es la ecuación que controla el desplazamiento horizontal. Esto resulta:

$$\boxed{x_A = \frac{2v_0^2\, sen(\theta_0)\, cos(\theta_0)}{g} = \frac{v_0^2\, sen(2\theta_0)}{g}} \tag{21}$$

Para llegar al último término de la ecuación (21), hemos hecho uso de la identidad trigonométrica: $2\, sen(\theta_0)\, cos(\theta_0) = sen(2\theta_0)$. La ecuación (21) nos revela que **para obtener un alcance máximo**, partiendo de una velocidad $\vec{v}_0$, **el ángulo inicial debe ser** $\theta_0 = 45° = \pi/4$, para que así la función seno en la ecuación (21) alcance su valor máximo: $sen(2\theta_0 = \pi/2) = 1$. Esta estrategia para maximizar el alcance, ajustando el ángulo de propulsión a 45°, es usada por varias especies saltadoras, desde las pulgas a los canguros.

## IV. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Por último, nos ocupamos del llamado *Movimiento Circular Uniforme* (MCU), que es aquel en el que la trayectoria seguida por la partícula es una circunferencia y en el que el módulo de la velocidad es constante, es decir, en el que el que el arco de circunferencia recorrido por unidad de tiempo es constante.

Para describir el MCU, partamos de una circunferencia de radio $R$, y tomemos dos puntos muy próximos de la trayectoria (ver figura 2). En el primero de los puntos, el vector velocidad (**que es siempre tangente a la trayectoria**) es $\vec{v}(t)$, mientras que en el segundo punto es $\vec{v}(t + dt)$, donde $dt$ es un pequeño incremento en el tiempo, ya que los puntos se han tomado muy próximos. Consideraremos, de hecho, que $dt \to 0$, es decir, $dt$ es un intervalo de tiempo *infinitesimal*. Debido a que el módulo de la velocidad es constante, tendremos:

$$|\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t + dt)| = v \tag{22}$$

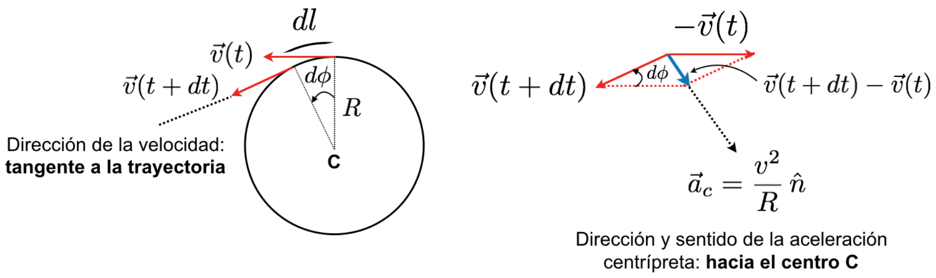


**Figura 2.** Esquema del Movimiento Circular Uniforme.

Tal como muestra la figura 2, la longitud (infinitesimal) de arco $dl$ recorrida por la partícula durante ese intervalo de tiempo podrá ser relacionada con el ángulo barrido $d\phi$ a través de la relación:

$$\boxed{dl = Rd\phi} \tag{23}$$

Para entender esta relación, basta recordar la definición de ángulo (expresado en radianes), $\phi = l/R$. Diviendo la ecuación (23) por el intervalo de tiempo $dt$, resulta:

$$\frac{dl}{dt} = v = R\frac{d\phi}{dt} = \omega R \tag{24}$$

Donde $\omega = d\phi/dt$ es la llamada *velocidad angular*, que nos indica el ángulo barrido por unidad de tiempo y que, en el sistema internacional, tendrá unidades de rad/s o, sencillamente, $s^{-1}$ (ya que el radián es una cantidad sin dimensiones). Escribiendo de nuevo la ecuación (24), tendremos:

$$\boxed{v = \omega R} \tag{25}$$

La ecuación (25) nos relaciona el módulo de la velocidad $v$ (que en el sistema internacional se medirá en m/s) con la velocidad angular $\omega$, que, al igual que $v$, será también constante.

Para finalizar el estudio del MCU, consideremos que, aunque el módulo de la velocidad es constante, la dirección de la velocidad cambia. En virtud de la segunda ley de Newton, **el MCU presentará, por tanto, una aceleración que no hará cambiar la velocidad en módulo pero sí en dirección** (figura 2). Esta es la llamada *aceleración centrípeta* $\vec{a}_c$. Aunque no daremos aquí una prueba formal de la expresión que nos permite calcular esta aceleración, sí daremos al menos argumentos intuitivos que nos permitan saber de qué magnitudes depende su módulo y qué dirección y sentido tiene (una prueba más rigurosa para llegar a la expresión final de $\vec{a}_c$ se puede consultar en [1] y [2]).

En primer lugar, el MCU viene descrito, por definición, por dos únicas magnitudes, el módulo de la velocidad $v$ y el radio de la circunferencia $R$. Por simple análisis dimensional (problema 2 de la relación del tema 1), sabemos que el módulo de la aceleración centrípeta $a_c$ cumplirá:

$$a_c \propto \frac{v^2}{R} \tag{26}$$

Por lo que se refiere a su dirección y sentido, sabemos que, como toda aceleración, la aceleración centrípeta se obtendrá a partir de la diferencia $\vec{v}(t) - \vec{v}(t+dt)$ como:

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{27}$$

Donde la ecuación (27) no es más que la derivada del vector velocidad, ya que hemos considerado que $dt \to 0$. Tal como vemos en la figura 2, la diferencia $\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$, para dos puntos muy próximos de la trayectoria, da lugar a un vector que marcará la dirección de $\vec{a}_c$, y que apunta hacia el centro de la circunferencia C. Esta dirección (perpendicular, o normal, a la trayectoria) y sentido (hacia dentro) vienen dados por un versor que notamos como $\hat{n}$. Así:

$$\vec{a}_c \propto \frac{v^2}{R}\hat{n} \tag{28}$$

Con estos argumentos sencillos, hemos construido casi por completo el vector $\vec{a}_c$, a excepción de un factor multiplicativo. Un análisis más formal, que omitimos aquí pero que queda argumentado en las referencias [1] y [2], nos permite ver que la aceleración centrípeta es, de hecho:

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{v^2}{R}\hat{n}} \tag{29}$$

Esta última expresión (en la que ha desaparecido el símbolo $\propto$) nos muestra que la aceleración centrípeta será mayor cuanto mayor sea el módulo de la velocidad (necesitaremos una mayor aceleración para cambiar la orientación de la velocidad cuando ésta crezca) y menor cuanto mayor sea el radio de la circunferencia (la aceleración necesaria para cambiar la dirección de la velocidad será menor cuanto menor sea la curvatura). Mencionamos, por último, que este tipo de movimiento se manifiesta (con un alto grado de precisión) en múltiples fenómenos naturales. En particular, en el movimiento de muchos planetas alrededor del Sol o en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. En estos dos ejemplos, la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular es la fuerza gravitatoria.

**AGRADECIMIENTOS**

El autor de estas notas agradece al Prof. Manuel R. Ortega el permiso para reproducir en ellas la figura 1. De igual modo, el autor de estas notas agradece la gran inspiración que siempre fueron para él las *Lecciones de Física* del Prof. Ortega [1]. El autor agradece la financiación recibida de la Comisión Europea a través del proyecto individual Marie Skłodowska-Curie 840195-ARIADNE, del que disfrutó durante la confección de estas notas.

✉ `sandalo@ugr.es`

[1] M. R. Ortega, *Lecciones de Física (Mecánica I)*, Editado por M. R. Ortega (2006) I.S.B.N. 84-404-4290-4.
[2] F. Cussó, C. lópez y R. Villar, *Física de los procesos biológicos, Capítulo 1*, Editorial Ariel (2004).