

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA



**ESTIMACIÓN DE SEÑALES A PARTIR DE  
OBSERVACIONES INCIERTAS Y OBSERVACIONES  
RETRASADAS ALEATORIAMENTE**

**TESIS DOCTORAL**  
**Doctorado en Estadística**

**M<sup>a</sup> ISABEL SÁNCHEZ RODRÍGUEZ**  
**2005**



TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN DE SEÑALES A PARTIR DE OBSERVACIONES  
INCIERTAS Y OBSERVACIONES RETRASADAS ALEATORIAMENTE**

Memoria realizada para optar al grado de doctor por  
M<sup>a</sup> Isabel Sánchez Rodríguez bajo la dirección de **Dra. D<sup>a</sup>  
Aurora Hermoso Carazo** y **Dra. D<sup>a</sup> Josefa Linares Pérez**,  
profesoras del Departamento de Estadística e Investigación  
Operativa de la Universidad de Granada.

Septiembre de 2005



*Deseo mostrar mi más sincero agradecimiento a las profesoras Dra. D<sup>a</sup> Aurora Hermoso Carazo y Dra. D<sup>a</sup> Josefa Linares Pérez, por su constante y valiosa dedicación a lo largo de estos años y por su excelente labor como directoras de esta memoria.*

*También deseo agradecer todas las muestras de ayuda y estímulo recibidas por familiares, amigos y compañeros; todos ellos han tomado parte, de alguna u otra forma, en la realización de la misma.*

# Índice general

<b>Introducción general</b>	<b>III</b>
<b>1. Estimación lineal de señales discretas</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Algoritmos de estimación . . . . .	6
1.4. Ejemplo numérico . . . . .	23
<b>2. Estimación lineal de señales discretas a partir de observaciones inciertas</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Planteamiento del problema . . . . .	36
2.2.1. Formulación general por innovaciones . . . . .	37
2.2.2. Ecuación de observación en sistemas con observaciones inciertas	39
2.3. Proceso innovación . . . . .	41
2.4. Algoritmos de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo . . . . .	45
2.5. Extensiones . . . . .	54
2.5.1. Señal afectada por ruidos blanco y coloreado . . . . .	55

2.5.2. Señal y ruido blanco correlados . . . . .	62
2.6. Ejemplo numérico . . . . .	70
2.6.1. Señal, filtro y suavizador punto fijo . . . . .	73
2.6.2. Señal, filtro y suavizador intervalo fijo . . . . .	81
<b>3. Estimación lineal de señales discretas a partir de observaciones</b>	
<b>retrasadas aleatoriamente</b>	<b>85</b>
3.1. Introducción . . . . .	85
3.2. Planteamiento del problema . . . . .	87
3.3. Algoritmos de predicción, filtrado y suavizamiento . . . . .	92
3.4. Señal afectada por ruidos blanco y coloreado . . . . .	98
3.4.1. Planteamiento del problema . . . . .	98
3.4.2. Algoritmos de estimación . . . . .	101
3.5. Ejemplo numérico . . . . .	112
<b>A. Demostraciones postpuestas del Capítulo 2</b>	<b>119</b>
A.1. Demostración del Teorema 2.5.1 . . . . .	119
A.2. Demostración del Teorema 2.5.2 . . . . .	122
A.3. Demostración del Teorema 2.5.3 . . . . .	123
A.4. Demostración del Teorema 2.5.4 . . . . .	125
A.5. Demostración del Teorema 2.5.5 . . . . .	128
A.6. Demostración del Teorema 2.5.6 . . . . .	129
<b>B. Demostraciones postpuestas del Capítulo 3</b>	<b>133</b>
B.1. Demostración del Teorema 3.1.1 . . . . .	133
B.2. Demostración del Teorema 3.3.2 . . . . .	135
<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>

# Introducción general

Debido al carácter aleatorio de la mayoría de los sistemas físicos de la naturaleza, uno de los problemas estadísticos más estudiados gira en torno a la estimación del estado de un sistema estocástico, suponiéndose conocido el modelo matemático que lo rige así como las condiciones iniciales que el sistema posee al principio del estudio. La variable objeto de estudio vendrá representada matemáticamente por el vector estado que, en general, no es accesible directamente, sino que sólo se dispone de una serie de medidas u observaciones relacionadas con dichos estados y perturbadas por un término de error, en general, aleatorio, denominado *ruido*. El objetivo de la *Teoría de estimación en sistemas dinámicos* consiste en obtener un estimador óptimo, según un criterio de optimalidad preestablecido.

## Desde los inicios hasta Gauss

Los antecedentes históricos sobre el estudio del problema de estimación de los estados de un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo son amplios. Diversas investigaciones han encontrado evidencias de que, hacia el año 3000 a. C., en algunas civilizaciones antiguas, como son la babilónica o la egipcia, el hombre ya mostraba interés por realizar predicciones futuras sobre fenómenos naturales, basándose en la observación y la experimentación.

Sin embargo, los primeros estudios rigurosos relativos a sistemas dinámicos se asocian al campo de la astrofísica, concretamente, cuando Newton enuncia las *Leyes de la mecánica y de la gravitación universal*, donde utiliza, por primera vez en la historia, un modelo matemático para plasmar el conocimiento abstracto que explicaba un problema planteado. A finales del siglo XVIII, Gauss (1777-1855) introduce formalmente el *Método de mínimos cuadrados* para estimar sistemas dinámicos a partir de observaciones perturbadas por un término de error. Anteriormente, en el siglo XVII, el propio Galileo Galilei (1564-1642) había reconocido la importancia de los errores de las observaciones, estudiando la forma de minimizar funciones de error, pero fue Gauss quien, en 1809, aplicó el método de mínimos cuadrados en su obra *Theoria motus corporum celestium* para la estimación de los seis coeficientes que determinaban de forma exacta la órbita elíptica del asteroide Ceres, en una situación en que el número de observaciones excedía el número de parámetros a estimar. Aunque la aplicación empírica del método de mínimos cuadrados había sido realizada por Gauss y Legendre, sería Laplace quien, en 1812 y en la obra *Teoría analítica de las probabilidades*, presentaría la demostración formal del mismo. En 1821, Gauss desarrolló también una variante recursiva del método de mínimos cuadrados que permitía, conocida una nueva observación, corregir el estimador previo sin necesidad de repetir los cálculos y, en 1826, presentó el famoso teorema que aún se conoce con el nombre de *Teorema de Gauss-Markov* que afirma que *el estimador de mínimos cuadrados es el que posee menor varianza en la clase de los estimadores lineales e insesgados*. La introducción del método de estimación de mínimos cuadrados supuso un importante avance científico y una innovadora vía de conexión entre las ciencias teóricas y las experimentales, proporcionando una técnica que aún es muy usada en la actualidad.

## Comienzos del siglo XX: las aportaciones de Wiener y Kolmogorov

Ya iniciado el siglo XX, el académico ruso Kolmogorov (1903-1987) se consolida como una de las primeras figuras reconocidas en *Teoría de la probabilidad* y en *Teoría de procesos estocásticos*. Posteriormente, compartiría sus estudios con Wiener (1894-1964), llegando a establecer diversos aspectos de la *Teoría de predicción, filtrado y suavizamiento de procesos de Markov* y de la *Teoría de procesos ergódicos*. Wiener desarrolló, en concreto, los primeros resultados formales sobre estimación óptima para sistemas que se modelizan mediante un proceso aleatorio. Hacia 1940, Kolmogorov y Wiener, junto con Krein, llevarían a cabo, además, las primeras aplicaciones del método de estimación de mínimos cuadrados introducido por Gauss en el campo de los sistemas dinámicos.

En 1939, Kolmogorov consideró procesos estacionarios en tiempo discreto; inspirado en los estudios de Wold, proporcionó un tratamiento completo del problema de predicción, resultados que serían extendidos de forma ingeniosa por Krein, en 1945, al caso continuo. En 1942, Wiener realizó estudios similares a los realizados por Kolmogorov y Krein de forma independiente, considerando, en primer lugar, el problema de predicción y, más tarde, el problema de filtrado de una señal interferida por un proceso ruido; encontró una forma explícita para el estimador óptimo y probó que la condición necesaria y suficiente de optimalidad estaba dada por una ecuación integral del tipo Wiener-Hopf, que había sido resuelta por él mismo y Hopf en 1931. En 1950, Bode y Shanon publicaron una derivación distinta a la de Wiener, más adecuada para la aplicación en el campo de la ingeniería, ámbito que había llevado también a Wiener a iniciar sus investigaciones sobre procesos estocásticos.

Aunque los estudios realizados en la primera mitad del siglo XX supusieron un importante avance en el contexto de la estimación en sistemas dinámicos, existían

aún importantes limitaciones. Por un lado, los resultados sólo eran aplicables a procesos estacionarios con intervalos de observación infinitos o semiinfinitos; por otro lado, como apunta Kailath [18], no era fácil la actualización con el aumento del intervalo de observación, no se adaptaban de forma conveniente al caso vectorial y su puesta en práctica resultaba complicada, puesto que a menudo era necesario dar soluciones de ecuaciones diferenciales y algebraicas auxiliares, así como el cálculo de raíces de polinomios. Por este motivo, las investigaciones posteriores se encaminaron a solventar todas estas limitaciones.

### **Hacia la mejora de los resultados anteriores: el filtro de Kalman**

A mediados del siglo XX, los estudios se orientan hacia la eliminación de algunas de las restricciones impuestas por Kolmogorov y Wiener respecto al carácter infinito o semiinfinito de los intervalos de observación. El primer intento significativo de extender la teoría se debe a Zadeh y Ragazzini, en 1950, pero fue Follin quien estableció, hacia 1955, ecuaciones diferenciales para el estimador en el caso de intervalos finitos de observación, probando que la solución de dichas ecuaciones coincidía con la proporcionada por Wiener en el caso en que se hacía tender a infinito la amplitud del intervalo. Los trabajos de Follin fueron base de muchos otros estudios, entre los que cabe destacar los desarrollados por Swerling, en 1958, que presentaban algoritmos recursivos para la determinación de órbitas que resultaron ser de gran utilidad posterior, o las investigaciones de Bucy quien demostró, en 1959, que también puede desarrollarse un estudio paralelo al realizado por Follin para sistemas no estacionarios.

En 1960, Kalman [20] desarrolló un algoritmo recursivo para la estimación de menor error cuadrático medio en sistemas lineales discretos; el estudio nació como una extensión del filtro de Wiener, pero varió la formulación convencional del

problema, introduciendo el denominado *Modelo de espacio de estados* de un sistema dinámico y utilizando las nociones de solución recursiva y de *proceso innovación*.

Desde su aparición, el filtro de Kalman se aplica en muy diversos campos, como son investigaciones realizadas por la NASA, estudios aéreos y de navegación y en control de sistemas (una de las más conocidas, por ejemplo, es la aplicación del filtro para rastrear a la nave espacial Apolo XI); de hecho, muchas de estas actividades deben algunos de sus progresos más importantes a la aparición de este filtro. Fueron numerosos los trabajos posteriores que extendieron el filtro de Kalman; como referencia, podemos citar Anderson y Moore [1], Brammer y Siffing [3], Caines [4], Catlin [5], Grewal y Andrews [10], [11], Kailath [17], Korbicz y Bidyuk [21], Meditch [23], etc. Un recorrido más completo sobre los estudios de estimación en sistemas dinámicos, desde Gauss hasta Kalman, puede encontrarse en Kailath [18], [19] o en Sorenson [43].

### **Sistemas con observaciones inciertas**

En toda la *Teoría clásica de estimación en sistemas estocásticos lineales* se supone que, en cualquier instante de tiempo, la señal que se desea estimar está siempre presente en las observaciones y que la perturbación de éstas se debe únicamente a un ruido aditivo. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas la señal interviene en la observación de forma aleatoria, por lo que existe una probabilidad positiva, denominada *probabilidad de falsa alarma*, de que las observaciones contengan únicamente ruido. Esta situación suele presentarse, por ejemplo, en diversos problemas de transmisión de señales en canales ionosféricos, reflexión de señales o en el campo de las telecomunicaciones; los sistemas que describen dichas situaciones se denominan *Sistemas con observaciones inciertas*.

En 1969, Nahi [26] obtuvo el filtro lineal de menor error cuadrático medio en

sistemas con observaciones inciertas describiendo la incertidumbre por variables aleatorias de Bernoulli independientes y suponiendo que los ruidos del estado y las observaciones son incorrelados. El filtro determinado por Nahi responde a una estructura recursiva similar al filtro de Kalman. En 1975, Monzingo [24] completó los resultados de Nahi y, en 1981, Tugnait [45] analizó la estabilidad del estimador. Más recientemente, Hermoso y Linares [14], [15] generalizaron el estudio sobre estimación en sistemas con observaciones inciertas realizado por Nahi y Monzingo, tratando los problemas de filtrado y suavizamiento en el caso en que los ruidos aditivos del estado y de la observación están correlados.

Jaffer y Gupta [16], en 1971, se plantearon obtener un algoritmo recursivo para calcular el estimador óptimo en sistemas con observaciones inciertas. El algoritmo que propusieron requería almacenar una cantidad de información de crecimiento exponencial, aspecto que dificultaba enormemente el cálculo computacional. Por este motivo, las técnicas de investigación se orientaron hacia la búsqueda de estimadores subóptimos.

En 1979, Hadidi y Schwartz [12] generalizaron los resultados obtenidos por Nahi para el filtro lineal de menor error cuadrático medio, eliminando la hipótesis de independencia de las variables que modelizan la incertidumbre. Establecieron una condición necesaria y suficiente para que el filtro lineal de mínimos cuadrados tuviera una estructura recursiva, después de verificar que este estimador no siempre era recursivo. Bajo la condición establecida, el filtro recursivo resultaba ser una generalización de los filtros de Kalman y Nahi. Monzingo [25] analiza, en 1981, el problema de suavizamiento en esta situación y, en 1984, Wang [46] obtiene resultados análogos a los establecidos anteriormente por Hadidi y Schwartz, de forma independiente y utilizando un tratamiento distinto.

## Observaciones aleatoriamente retrasadas

Los estudios clásicos sobre estimación en sistemas dinámicos han supuesto usualmente que las observaciones disponibles para estimar el estado del sistema en cada instante de tiempo contienen información relativa a dicho estado. Sin embargo, existen numerosas situaciones prácticas en las que la llegada de las observaciones al dispositivo que las recibe puede estar afectada por un cierto retraso y, por tanto, la nueva medida disponible en un instante puede contener sólo información del estado del sistema en un instante anterior. Por ejemplo, la transmisión de datos desde un computador a otro interconectados entre sí mediante una red de área amplia puede estar afectada por un retraso que depende de ciertos requisitos de la red, como son el ancho de banda, el nivel de congestión, el camino seguido por el mensaje...

Aunque los retrasos en las observaciones han sido considerados a veces como errores de medida o interpretados como una función determinística del tiempo, la mejor solución pasa por modelizar matemáticamente el retraso como un proceso estocástico, incluyen sus propiedades estadísticas en la descripción del sistema. En este sentido, diversos problemas de estimación relacionados con la economía o la ingeniería han sido resueltos recientemente de forma más acertada mediante la introducción del retraso aleatorio en la modelización del sistema (véase, por ejemplo, Evans y Krishnamurthy [9] o Su y Lu [44]).

## Modelo de espacio de estados desconocido

El *Modelo de espacio de estados* de un sistema dinámico introducido por Kalman varió la formulación clásica del problema de estimación y tuvo una considerable repercusión en los estudios posteriores. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas no se dispone del modelo de espacio de estados completo del sistema objeto de estudio, por lo que es necesario utilizar otro tipo de información. En este sentido,

algunas investigaciones recientes han supuesto que sólo se conocen las funciones de covarianzas (expresadas en forma de núcleo semidegenerado) de la señal y de los ruidos que intervienen en la ecuación de observación, y, en caso de que exista incertidumbre en las observaciones, la probabilidad de que la señal aparezca en los valores observados.

Bajo la hipótesis de que sólo se dispone de la función de covarianzas de la señal, Nakamori [27], [28] resuelve los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo. Nakamori et al. [30], [32] contemplan estos mismos problemas en el caso en que existe incertidumbre en las observaciones y esta incertidumbre se modeliza por variables aleatorias de Bernoulli independientes; Nakamori et al. [31] generalizan los resultados anteriores, eliminando la hipótesis de independencia de las variables aleatorias de Bernoulli que describen la incertidumbre en las observaciones. Los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo también son resueltos por Nakamori et al. [33] en el caso en que las observaciones de la señal están afectadas por un retraso aleatorio, modelizado por variables aleatorias de Bernoulli independientes, y por un ruido blanco.

El problema de suavizamiento intervalo fijo también ha sido estudiado, bajo distintas hipótesis, usando funciones de covarianza. Caballero et al. [7] analizan este problema en sistemas lineales discretos con certidumbre en las observaciones. Posteriormente, Nakamori et al. [35], [36] resuelven el problema de suavizamiento intervalo fijo en sistemas con observaciones inciertas bajo las hipótesis de que las variables aleatorias de Bernoulli que modelizan la incertidumbre en las observaciones son independientes y la señal y el ruido aditivo de la observación están correlados; Nakamori et al. [34] contemplan este mismo problema de estimación, considerando que las variables de Bernoulli que describen la incertidumbre no son necesariamente independientes. Por otra parte, Nakamori et al. [37] resuelven el problema de

suavizamiento intervalo fijo de señales usando medidas retrasadas aleatoriamente y perturbadas por un ruido blanco y, posteriormente, Nakamori et al. [39]-[42] extienden estos resultados al caso en que las observaciones también están afectadas por un ruido coloreado, incorporando así mismo el estudio de los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo.

En líneas generales, el objetivo de esta memoria consiste en el estudio del problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio de una señal a partir de observaciones de la misma y suponiendo que no se conoce completamente el modelo de espacio de estados que la genera, sino únicamente su función de covarianzas. En primer lugar, se resuelve el problema de estimación en el caso en que las observaciones están afectadas únicamente por un ruido blanco. Posteriormente, se supone la situación en que existe incertidumbre no necesariamente independiente en las observaciones. Y, para finalizar, se contempla el caso de observaciones perturbadas por un retraso aleatorio.

De forma más concreta, esta memoria se estructura de la siguiente forma:

- En el **Capítulo 1**, se plantean y resuelven los problemas de estimación lineal de mínimos cuadrados de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo de una señal a partir de observaciones perturbadas por un ruido blanco. La única información que se supone conocida del sistema es la función de covarianzas de la señal (expresada en forma de núcleo semidegenerado) y del ruido, además de los valores observados. Todos los algoritmos deducidos se acompañan de fórmulas para calcular las matrices de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, que miden la precisión de los estimadores respectivos. Además, los resultados obtenidos se ilustran mediante un ejemplo de simulación numérica.

- El **Capítulo 2** analiza el problema de estimación lineal (filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo) en sistemas discretos a partir de observaciones inciertas, en el caso de que la incertidumbre está modelizada por variables aleatorias de Bernoulli no necesariamente independientes. Los algoritmos propuestos requieren únicamente el conocimiento de los momentos de segundo orden de la señal y los ruidos, las distribuciones marginales del proceso que describe la incertidumbre en las observaciones y los elementos en posición  $(2, 2)$  de las matrices de transición de este proceso. A continuación, se considera una posible extensión de los resultados anteriores: se analiza el problema de estimación suponiendo el caso en que la ecuación de observación está afectada por incertidumbre no independiente y por ruidos blanco y coloreado; en este contexto, se presentan los algoritmos de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo. También se contempla la situación en la que la incertidumbre en las observaciones se modeliza mediante variables indicadoras independientes y la señal y el ruido aditivo de la observación están correlados, obteniéndose así mismo los correspondientes algoritmos para los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo e intervalo fijo. Finalmente, los algoritmos obtenidos son aplicados para la estimación de señales que pueden transmitirse a través de uno de dos posibles canales.
- A continuación, el **Capítulo 3** contempla el estudio del problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de señales a partir de observaciones afectadas por un retraso aleatorio, en el caso en que este retraso se modeliza matemáticamente mediante una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes y usando únicamente las funciones de covarianzas de la señal y los ruidos que intervienen en la ecuación de observación. En primer lugar,

se considerará la situación en la que existe un único ruido aditivo que perturba a las observaciones, concretamente, un ruido blanco; posteriormente, los resultados anteriores se extienden al caso en que existen dos ruidos aditivos que afectan a la observación: un ruido blanco y un ruido coloreado. En ambas situaciones se plantean y resuelven los problemas de predicción, filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo. Además, los algoritmos propuestos son aplicados en un ejemplo numérico.

- Finalmente, se presentan dos apéndices donde se recogen las demostraciones de algunos de los teoremas presentados en los Capítulos 2 y 3.



# Capítulo 1

## Estimación lineal de señales discretas

### 1.1. Introducción

El problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio de una señal, a partir de observaciones afectadas por un ruido aditivo blanco, ha sido ampliamente estudiado cuando se conoce el modelo de espacio de estados que genera la señal. Para resolver este problema, Kalman [20] desarrolló, en 1960, un algoritmo recursivo, haciendo uso de una técnica basada en proyecciones ortogonales. Este algoritmo supondría un avance espectacular respecto a los existentes hasta ese momento y sería aplicado en numerosas situaciones prácticas (véase, por ejemplo, Chui y Chen [8]).

Sin embargo, el modelo de espacio de estados de la señal no siempre es conocido y es necesario utilizar otro tipo de información para abordar el problema de estimación. Así, por ejemplo, Nakamori [27], [28] trata el problema de filtrado y suavizamiento punto fijo de mínimos cuadrados bajo la hipótesis de que únicamente se conocen, además de los valores observados, las funciones de covarianzas de los procesos

involucrados. El algoritmo propuesto es aplicable a una gran cantidad de situaciones, incluyendo sistemas estacionarios.

Siguiendo esta misma línea, es decir, sin requerir un conocimiento completo del modelo que genera la señal, sino únicamente información de covarianzas, en este capítulo se trata el problema de estimación de mínimos cuadrados de una señal afectada por un ruido blanco. Concretamente, se recogen los resultados sobre filtrado y suavizamiento punto fijo de Nakamori [27], [28] y se completa el estudio mediante un algoritmo recursivo para el problema de suavizamiento intervalo fijo (Caballero et al. [7]).

Los distintos algoritmos se obtienen partiendo de una fórmula general en la que el estimador de la señal en un instante se expresa como combinación lineal de las observaciones disponibles, suponiendo que la función de covarianzas de la señal admite una factorización en *forma de núcleo semidegenerado*.

Sin embargo, más recientemente, estos algoritmos han sido obtenidos de forma más sencilla empleando un tratamiento por innovaciones (véase Caballero et al. [6]), es decir, partiendo de la expresión del estimador como combinación lineal de las innovaciones, en lugar de las observaciones<sup>1</sup>. Este tratamiento por innovaciones, que se empleará en los dos próximos capítulos, se utiliza, así mismo, en la obtención del algoritmo de suavizamiento intervalo fijo de Caballero et al. [7]; sin embargo, en este capítulo, con la finalidad de unificar los procedimientos, dicho algoritmo se deduce, al igual que los anteriores, partiendo de la expresión del estimador en función de las observaciones.

---

<sup>1</sup>Esta técnica se justifica mediante la propiedad de que el proceso innovación puede obtenerse a partir de las observaciones, y recíprocamente, mediante una cierta operación lineal y, por tanto, los estimadores pueden expresarse como combinación lineal de las innovaciones (véase Kailath [19]).

Además, junto con cada algoritmo de estimación se presenta un algoritmo para obtener la matriz de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, matriz que proporciona, en cada caso, una medida de bondad del estimador propuesto. Finalmente, los resultados obtenidos se ilustran mediante un ejemplo de simulación numérica.

## 1.2. Planteamiento del problema

Sea  $z(k)$  el vector  $n$ -dimensional que describe la señal que se desea estimar en el instante  $k$ .

En el estudio que abordaremos a continuación, se supondrá que el modelo de espacio de estados que genera la señal no es completamente conocido y que sólo se dispone de la función de covarianzas de la misma, que admite una cierta factorización conocida.

Además, supondremos que se dispone de un conjunto de observaciones relacionadas con la señal y afectadas por un ruido blanco, independiente de la señal, y cuya función de covarianzas es, así mismo, conocida.

Por tanto, suponemos que la ecuación de observación en el instante  $k$  está descrita por

$$y(k) = z(k) + v(k), \quad k \geq 1, \quad (1.1)$$

donde se suponen las siguientes hipótesis:

H.1 El proceso señal  $\{z(k); k \geq 1\}$  tiene media cero y su función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 1 \leq k \leq s, \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

H.2 El proceso  $\{v(k); k \geq 1\}$  es un ruido blanco, centrado, con función de covarianzas conocida,  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k-s)$ , donde  $\delta_K$  denota la función delta de Kronecker.

H.3 Los procesos  $\{z(k); k \geq 1\}$  y  $\{v(k); k \geq 1\}$  son independientes.

En este capítulo, nuestro objetivo es el estudio del problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio de la señal a partir de las observaciones dadas mediante la ecuación (1.1); más concretamente, nuestra finalidad es obtener el predictor en una etapa, el filtro y los suavizadores punto fijo e intervalo fijo.

Según se ha indicado en la sección anterior, en este capítulo se deducen los distintos algoritmos de estimación partiendo de la expresión general del estimador como combinación lineal de las observaciones, es decir,

$$\hat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j h(k, i, j)y(i), \quad (1.2)$$

donde  $h(k, i, j)$ ,  $i = 1, \dots, j$ , es la denominada *función impulso-respuesta*.

Por el *Lema de proyecciones ortogonales* (LPO), el estimador de mínimos cuadrados  $\hat{z}(k, j)$  es la única combinación lineal de las observaciones  $\{y(1), \dots, y(j)\}$  tal que el error de estimación,  $z(k) - \hat{z}(k, j)$ , es ortogonal a ellas, esto es,

$$E[z(k)y^T(s)] = E[\hat{z}(k, j)y^T(s)], \quad s \leq j,$$

y sustituyendo  $\hat{z}(k, j)$  por su expresión, dada en (1.2), se obtiene la denominada *ecuación de Wiener-Hopf*,

$$E[z(k)y^T(s)] = \sum_{i=1}^j h(k, i, j)E[y(i)y^T(s)], \quad s \leq j.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis del modelo en la expresión anterior, se obtiene

$$K_z(k, s) = \sum_{i=1}^j h(k, i, j) [K_z(i, s) + R(i)\delta_K(i - s)], \quad s \leq j,$$

y, por tanto, la ecuación de Wiener-Hopf puede ser reescrita de la siguiente forma

$$h(k, s, j)R(s) = K_z(k, s) - \sum_{i=1}^j h(k, i, j)K_z(i, s), \quad s \leq j. \quad (1.3)$$

Como se ha indicado anteriormente, nuestro objetivo es el estudio del problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones  $\{y(i); i \leq j\}$ . Este problema adquiere distintas denominaciones dependiendo de la relación existente entre el instante de tiempo  $k$  en que se estima la señal y el número de observaciones  $j$ . Si  $k = j$ , se obtiene un estimador de  $z(k)$  basado en observaciones hasta el instante  $k$ ; este problema se denomina *problema de filtrado*. Si  $k > j$ , el estimador de  $z(k)$  se calcula considerando observaciones anteriores al instante  $k$  y el problema se denomina *problema de predicción*. Si  $k < j$ , se determina un estimador  $z(k)$  considerando observaciones anteriores y posteriores al instante  $k$ ; este problema se conoce como *problema de suavizamiento*. Es posible establecer una clasificación adicional de este último problema en función de que los índices  $k$  y  $j$  sean fijos o variables. Si  $k$  es fijo y el número de observaciones va aumentando, se habla de *problema de suavizamiento punto fijo*; si tenemos un número fijo,  $j$ , de observaciones y se desea estimar la señal  $z(k)$  en cualquier instante  $k < j$  a partir de todas las observaciones disponibles, el problema se denomina *problema de suavizamiento intervalo fijo*; finalmente, si no están prefijados ni el instante de estimación,  $k$ , ni el número de observaciones,  $j$ , sino la diferencia entre ellos,  $j - k$ , se habla de *problema de suavizamiento retraso fijo*. En esta memoria se considerarán únicamente dos de los problemas de suavizamiento especificados, concretamente, el suavizamiento punto fijo y el suavizamiento intervalo fijo.

En la siguiente sección se obtienen los diferentes algoritmos de estimación a partir de la expresión general del estimador como combinación lineal de las observaciones, (1.2), y teniendo en cuenta la versión de la ecuación de Wiener-Hopf dada en (1.3).

### 1.3. Algoritmos de estimación

En los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2 que se muestran a continuación, se presentan algoritmos para los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo, respectivamente, a partir de observaciones de la señal especificadas mediante la ecuación (1.1) verificando las hipótesis descritas anteriormente.

**Teorema 1.3.1** *Si se considera la ecuación de observación (1.1) en la que los procesos señal y ruido verifican las hipótesis descritas en la Sección 1.2, los estimadores de filtrado y de suavizamiento punto fijo de la señal  $z(k)$  pueden determinarse a partir de las relaciones*

$$\hat{z}(k, k) = A(k)O(k), \quad k \geq 1, \quad (1.4)$$

$$\hat{z}(k, L) = \hat{z}(k, L-1) + h(k, L, L)\nu(L), \quad L > k, \quad (1.5)$$

donde los vectores  $O(L)$  están dados de la forma

$$O(L) = O(L-1) + J(L, L)\nu(L), \quad O(0) = 0, \quad (1.6)$$

y la matriz de ganancia,  $h(k, L, L)$ , satisface

$$h(k, L, L) = [B(k) - F(k, L-1)] A^T(L) \Pi^{-1}(L), \quad L > k. \quad (1.7)$$

La innovación,  $\nu(L)$ , está dada por la expresión

$$\nu(L) = y(L) - A(L)O(L-1), \quad (1.8)$$

y su matriz de covarianzas,  $\Pi(L)$ , verifica

$$\Pi(L) = R(L) + A(L)B^T(L) - A(L)r(L-1)A^T(L). \quad (1.9)$$

Finalmente, las matrices  $J(L, L)$ ,  $F(k, L)$  y  $r(L)$  satisfacen las siguientes relaciones

$$J(L, L) = [B^T(L) - r(L-1)A^T(L)] \Pi^{-1}(L), \quad (1.10)$$

$$F(k, L) = F(k, L-1) + h(k, L, L) [B(L) - A(L)r(L-1)], \quad L > k; \quad (1.11)$$

$$F(k, k) = A(k)r(k),$$

$$r(L) = r(L-1) + J(L, L) [B(L) - A(L)r(L-1)], \quad r(0) = 0. \quad (1.12)$$

**Nota.** Si la matriz  $\Pi(L)$  fuese singular, se sustituye la inversa por la pseudoinversa de Moore-Penrose (véase Magnus y Neudecker [22]).

**Demostración.** En principio, se obtiene la expresión (1.5) para el suavizador punto fijo de la señal, que será determinado en función del proceso innovación y aplicando el LPO de forma reiterada.

Si denotamos por  $\hat{y}(L, L-1)$  al predictor en una etapa de menor error cuadrático medio de  $y(L)$  basado en las observaciones  $\{y(1), \dots, y(L-1)\}$ , entonces  $\nu(L) = y(L) - \hat{y}(L, L-1)$  representa la *innovación* en el instante  $L$ , es decir,  $\nu(L)$  proporciona una medida de la nueva información que aporta la observación  $y(L)$  respecto a las observaciones anteriores al instante  $L$ .

Por una parte, aplicando el LPO, se tiene que

$$E [\hat{z}(k, L)y^T(L-1)] = E [z(k)y^T(L-1)]. \quad (1.13)$$

Por otra parte, se verifica

$$\begin{aligned} E [\{\hat{z}(k, L-1) + h(k, L, L)\nu(L)\}y^T(L-1)] \\ = E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L-1)] + h(k, L, L)E [\nu(L)y^T(L-1)], \end{aligned}$$

y, utilizando nuevamente el LPO, se deduce que,

$$E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L-1)] = E [z(k)y^T(L-1)], \quad E [\nu(L)y^T(L-1)] = 0,$$

y, por tanto, se obtiene la siguiente expresión

$$E [\{\hat{z}(k, L-1) + h(k, L, L)\nu(L)\}y^T(L-1)] = E [z(k)y^T(L-1)]. \quad (1.14)$$

Así, uniendo (1.13) y (1.14) y usando la propiedad de unicidad del estimador, se deduce, finalmente, la expresión recursiva (1.5) para el suavizador punto fijo de la señal.

A continuación, con la finalidad de determinar explícitamente la relación (1.5) para los estimadores  $\hat{z}(k, L)$ ,  $L > k$ , se calculan fórmulas explícitas para la innovación,  $\nu(L)$ , la ganancia,  $h(k, L, L)$ , y también para el filtro de la señal,  $\hat{z}(k, k)$ , condición inicial de dicha expresión recursiva.

(I) *Proceso innovación.* Como acabamos de indicar, el proceso innovación está dado, en el instante  $L$ , por  $\nu(L) = y(L) - \hat{y}(L, L-1)$ ; por tanto, este proceso quedará determinado obteniendo una expresión para el predictor en una etapa de la observación,  $\hat{y}(L, L-1)$ .

Según el LPO, se verifica

$$E [y(L)y^T(s)] = E [\hat{y}(L, L-1)y^T(s)], \quad s \leq L-1. \quad (1.15)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que, según las hipótesis del modelo, el proceso ruido de la ecuación de observación es blanco e incorrelado con la señal, a partir de (1.1) obtenemos

$$E [y(L)y^T(s)] = E [z(L)y^T(s)], \quad s \leq L-1, \quad (1.16)$$

y, aplicando de nuevo el LPO, se tiene que

$$E [z(L)y^T(s)] = E [\widehat{z}(L, L-1)y^T(s)], \quad s \leq L-1. \quad (1.17)$$

Así, a partir de las relaciones (1.15)-(1.17), deducimos que

$$\widehat{y}(L, L-1) = \widehat{z}(L, L-1) \quad (1.18)$$

y, por tanto, el proceso innovación está dado por

$$\nu(L) = y(L) - \widehat{z}(L, L-1), \quad (1.19)$$

con lo cual, para determinar la innovación basta con obtener una expresión para el predictor en una etapa de la señal,  $\widehat{z}(L, L-1)$ , que, aplicando la expresión general (1.2), está dado por,

$$\widehat{z}(L, L-1) = \sum_{i=1}^{L-1} h(L, i, L-1)y(i). \quad (1.20)$$

Evaluando en  $k = L$  y  $j = L-1$  la ecuación de Wiener-Hopf, dada en (1.3), y usando que, según las hipótesis del modelo,  $K_z(L, s) = A(L)B^T(s)$ , para  $L \geq s$ , se tiene que

$$h(L, s, L-1)R(s) = A(L)B^T(s) - \sum_{i=1}^{L-1} h(L, i, L-1)K_z(i, s), \quad s \leq L-1;$$

así, si se define una función matricial  $J$  verificando

$$J(s, L-1)R(s) = B^T(s) - \sum_{i=1}^{L-1} J(i, L-1)K_z(i, s), \quad s \leq L-1, \quad (1.21)$$

es inmediato comprobar que se verifica la igualdad

$$h(L, s, L-1) = A(L)J(s, L-1), \quad s \leq L-1.$$

Entonces, partiendo de la expresión (1.20) para  $\hat{z}(L, L-1)$  y definiendo la función vectorial

$$O(L) = \sum_{i=1}^L J(i, L)y(i), \quad L \geq 1; \quad O(0) = 0, \quad (1.22)$$

se deduce que el predictor en una etapa de la señal está dado por

$$\hat{z}(L, L-1) = A(L)O(L-1), \quad (1.23)$$

y, por tanto, usando (1.19), la innovación satisface (1.8).

A continuación, nuestro objetivo es obtener la expresión recursiva (1.6) para  $O(L)$ . Con este fin, comenzamos expresando  $J(s, L)$  en términos de  $J(s, L-1)$ , por lo que calculamos las diferencias  $J(s, L)R(s) - J(s, L-1)R(s)$ , para  $s \leq L-1$ . Usando la expresión (1.21) para  $J$  y teniendo en cuenta las hipótesis del modelo para  $K_z(L, s)$ , con  $s \leq L$ , se tiene que

$$\begin{aligned} [J(s, L) - J(s, L-1)]R(s) &= -J(L, L)A(L)B^T(s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{L-1} [J(i, L) - J(i, L-1)]K_z(i, s). \end{aligned}$$

Comparando esta última expresión con la que resulta, de (1.21), para  $J(s, L-1)R(s)$ , se obtiene que

$$J(s, L) - J(s, L-1) = -J(L, L)A(L)J(s, L-1), \quad s \leq L-1,$$

o, de forma equivalente,

$$J(s, L) = [I_M - J(L, L)A(L)]J(s, L-1), \quad s \leq L-1. \quad (1.24)$$

Así, si partimos de la definición (1.22) para la matriz  $O(L)$ , separando el último sumando y considerando la relación (1.24) para  $J(i, L)$ , obtenemos

$$O(L) = J(L, L)y(L) + [I_M - J(L, L)A(L)] \sum_{i=1}^{L-1} J(i, L-1)y(i),$$

por tanto, teniendo en cuenta la definición de  $O(L-1)$  y la fórmula (1.8) para  $\nu(L)$ , la fórmula recursiva (1.6) para  $O(L)$  es inmediata.

Demostramos, a continuación, la expresión (1.10) para  $J(L, L)$ . Con este fin, usando la relación recursiva (1.6) para  $O(L)$ , se tiene

$$E [O(L)\nu^T(L)] = E [O(L-1)\nu^T(L)] + J(L, L)E [\nu(L)\nu^T(L)];$$

de la aplicación del LPO se deduce que  $E [O(L-1)\nu^T(L)] = 0$  y denotando  $\Pi(L) = E [\nu(L)\nu^T(L)]$ , matriz de covarianzas de la innovación  $\nu(L)$ , a partir de la expresión anterior se obtiene la siguiente expresión para  $J(L, L)$

$$J(L, L) = E [O(L)\nu^T(L)] \Pi^{-1}(L). \quad (1.25)$$

Usando la definición de  $\nu(L)$  y la fórmula (1.23) para  $\hat{z}(L, L-1)$ , se deduce

$$J(L, L) = \{E [O(L)y^T(L)] - E [O(L)O^T(L-1)] A^T(L)\} \Pi^{-1}(L). \quad (1.26)$$

Calculamos ahora las dos esperanzas incluidas en la expresión anterior, para obtener una expresión explícita para  $J(L, L)$ . Por una parte, usando la definición de  $O(L)$ , dada en (1.22), y las hipótesis del modelo, se tiene que

$$E [O(L)y^T(L)] = J(L, L)R(L) + \sum_{i=1}^L J(i, L)K_z(i, L),$$

y calculando, a partir de (1.21), la matriz  $J(L, L)R(L)$ , se obtiene

$$J(L, L)R(L) = B^T(L) - \sum_{i=1}^L J(i, L)K_z(i, L);$$

de las dos igualdades anteriores se deduce, de forma inmediata, que

$$E [O(L)y^T(L)] = B^T(L). \quad (1.27)$$

Por otra parte, usando la fórmula (1.6) para  $O(L)$  y aplicando el LPO, se obtiene que

$$E [O(L)O^T(L-1)] = E [O(L-1)O^T(L-1)]. \quad (1.28)$$

Así, definiendo la función matricial

$$r(L) = E [O(L)O^T(L)], \quad (1.29)$$

la expresión (1.10) para  $J(L, L)$  queda probada, partiendo de (1.26) y usando (1.27)-(1.29).

Para comprobar la expresión (1.9) para la matriz de covarianzas de la innovación,

$$\Pi(L) = E \left[ (y(L) - \hat{y}(L, L-1))(y(L) - \hat{y}(L, L-1))^T \right],$$

comenzamos aplicando, nuevamente, el LPO, según el cual se verifica que  $E [\hat{y}(L, L-1)y^T(L)] = E [\hat{y}(L, L-1)\hat{y}^T(L, L-1)]$  y, por tanto,

$$\Pi(L) = E [y(L)y^T(L)] - E [\hat{y}(L, L-1)\hat{y}^T(L, L-1)].$$

Así, usando las hipótesis del modelo en  $E [y(L)y^T(L)]$ , la igualdad (1.18), la fórmula (1.23) para  $\hat{z}(L, L-1)$  y la función  $r(L)$ , definida en (1.29), la expresión (1.9) para  $\Pi(L)$  queda verificada.

La fórmula (1.12) para  $r(L)$  se obtiene de forma inmediata partiendo de la definición de la función  $r$ , dada en (1.29), usando la relación recursiva (1.6) para  $O(L)$  y aplicando, una vez más, el LPO.

(II) *Matriz de ganancia.* Para demostrar la fórmula (1.7) para la matriz de ganancia del suavizador punto fijo de la señal,  $h(k, L, L)$ , comenzamos aplicando el LPO, de donde se deduce que

$$E [z(k)y^T(L)] = E [\hat{z}(k, L)y^T(L)].$$

Aplicando las hipótesis del modelo en  $E [z(k)y^T(L)]$  y utilizando la fórmula recursiva (1.5) para  $\hat{z}(k, L)$  y la propiedad de incorrelación, según el LPO, entre  $\hat{z}(k, L-1)$  y  $\nu(L)$ , la expresión anterior se reescribe como

$$B(k)A^T(L) = E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L)] + h(k, L, L)E [\nu(L)y^T(L)].$$

Puesto que, también por el LPO,  $E [\nu(L)\hat{y}(L, L-1)] = 0$ , se tiene que  $E [\nu(L)y^T(L)] = \Pi(L)$  y, despejando de la fórmula anterior, la ganancia está dada como

$$h(k, L, L) = \{B(k)A^T(L) - E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L)]\} \Pi^{-1}(L). \quad (1.30)$$

Para determinar completamente esta expresión, obtenemos una fórmula explícita para la esperanza; concretamente, aplicando el LPO, se deduce que

$$E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L)] = E [\hat{z}(k, L-1)\hat{y}^T(L, L-1)],$$

y, usando la igualdad (1.18) y la expresión (1.23) para  $\hat{z}(L, L-1)$ , se obtiene

$$E [\hat{z}(k, L-1)y^T(L)] = E [\hat{z}(k, L-1)O^T(L-1)] A^T(L). \quad (1.31)$$

Por tanto, definiendo la función matricial

$$F(k, L) = E [\hat{z}(k, L)O^T(L)], \quad L > k, \quad (1.32)$$

la fórmula (1.7) para la ganancia  $h(k, L, L)$  queda probada de forma inmediata, partiendo de la expresión (1.30) y usando (1.31).

A continuación, demostramos la relación recursiva (1.11) para la matriz  $F(k, L)$ ; si partimos de la definición de  $F$  y usamos la fórmula (1.5) para  $\hat{z}(k, L)$  obtenemos, aplicando el LPO, que

$$\begin{aligned} F(k, L) &= E [\hat{z}(k, L)O^T(L)] \\ &= E [\hat{z}(k, L-1)O^T(L)] + h(k, L, L)E [\nu(L)O^T(L)]. \end{aligned}$$

Usando la expresión recursiva (1.6) para  $O(L)$  y el LPO en  $E [\widehat{z}(k, L-1)O^T(L)]$  y la fórmula (1.25), de donde  $E [\nu(L)O^T(L)] = \Pi(L)J^T(L, L)$ , se obtiene

$$F(k, L) = E [\widehat{z}(k, L-1)O^T(L-1)] + h(k, L, L)\Pi(L)J^T(L, L);$$

finalmente, utilizando la definición de  $F(k, L-1)$  y la expresión (1.10) para  $J(L, L)$ , la fórmula (1.11) para la matriz  $F(k, L)$  queda inmediatamente probada.

(III) *Filtro.* Para demostrar la expresión (1.4) para el filtro  $\widehat{z}(k, k)$ , condición inicial de la relación recursiva (1.5) para  $\widehat{z}(k, L)$ ,  $L > k$ , evaluamos en  $j = k$  la ecuación de Wiener-Hopf, dada en (1.3), y se obtiene que

$$h(k, s, k)R(s) = K_z(k, s) - \sum_{i=1}^k h(k, i, k)K_z(i, s), \quad s \leq k. \quad (1.33)$$

Esta relación para  $h(k, s, k)$  permite expresar

$$h(k, s, k) = A(k)J(s, k), \quad s \leq k, \quad (1.34)$$

siendo  $J$  la función matricial introducida en (1.21); así, partiendo de la expresión (1.2) evaluada en  $j = k$  y usando la función  $O$  definida en (1.22), se obtiene

$$\widehat{z}(k, k) = \sum_{i=1}^k h(k, i, k)y(i) = A(k)\sum_{i=1}^k J(i, k)y(i) = A(k)O(k), \quad k \geq 1.$$

Finalmente, la condición inicial de la expresión recursiva (1.11) para  $F(k, T)$ , dada por  $F(k, k) = A(k)r(k)$ , es inmediata sin más que usar la definición de  $F(k, k)$ , dada en (1.32), y las expresiones (1.4) y (1.29) para el filtro y la función  $r$ , respectivamente. ■

La bondad de los estimadores  $\widehat{z}(k, j)$  puede medirse mediante los errores de estimación,  $z(k) - \widehat{z}(k, j)$ , y, de forma más concreta, mediante la matriz de

covarianzas de estos errores,

$$P(k, j) = E[(z(k) - \hat{z}(k, j))(z(k) - \hat{z}(k, j))^T].$$

Puesto que, por el LPO, el error  $z(k) - \hat{z}(k, j)$  es ortogonal al estimador  $\hat{z}(k, j)$ , se tiene que  $E[\hat{z}(k, j)z^T(k)] = E[\hat{z}(k, j)\hat{z}^T(k, j)]$  y, por tanto,

$$P(k, j) = K_z(k, k) - E[\hat{z}(k, j)\hat{z}^T(k, j)]. \quad (1.35)$$

A partir de esta fórmula se deducen, a continuación, expresiones para las matrices de covarianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo,  $P(k, L)$  con  $L > k$ .

La siguiente fórmula para el cálculo de  $P(k, k)$  se obtiene fácilmente a partir de (1.35), usando la expresión del filtro,  $\hat{z}(k, k) = A(k)O(k)$ , y la expresión (1.29) para  $r(k)$ ,

$$P(k, k) = A(k)B^T(k) - A(k)r(k)A^T(k). \quad (1.36)$$

Para obtener una fórmula recursiva para  $P(k, L)$ , con  $L > k$ , sustituimos la expresión (1.5) para  $\hat{z}(k, L)$  en (1.35); aplicando nuevamente el LPO se tiene que  $E[\hat{z}(k, L-1)\nu^T(L)] = 0$  y, por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} P(k, L) &= K_z(k, k) - E[\hat{z}(k, L-1)\hat{z}^T(k, L-1)] \\ &\quad - h(k, L, L)\Pi(L)h^T(k, L, L), \quad L > k, \end{aligned}$$

y, consecuentemente, usando la definición de  $P(k, L-1)$ ,

$$P(k, L) = P(k, L-1) - h(k, L, L)\Pi(L)h^T(k, L, L), \quad L > k, \quad (1.37)$$

donde  $h(k, L, L)$  y  $\Pi(L)$  están determinadas, respectivamente, en (1.7) y (1.12).

La condición inicial en la relación recursiva anterior viene dada por la matriz de covarianzas del error de filtrado,  $P(k, k)$ , cuya fórmula ha sido obtenida en (1.36).

En el siguiente teorema se muestra un algoritmo para obtener el suavizador intervalo fijo de la señal, a partir de observaciones de la misma especificadas por la ecuación (1.1).

Según se indicó anteriormente, la demostración está desarrollada en Caballero et al. [7], si bien el procedimiento utilizado es distinto al que aquí mostramos; así, en este caso, y siguiendo una línea similar a la empleada en el Teorema 1.3.1, se parte de la expresión general del estimador como función lineal de las observaciones, mientras que en Caballero et al. [7] el estimador se expresa inicialmente como combinación lineal de las innovaciones.

**Teorema 1.3.2** *Si se considera la ecuación de observación (1.1) verificando las hipótesis descritas en la Sección 1.2, los estimadores de suavizado intervalo fijo de la señal verifican la siguiente relación*

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) - M(k, T)O(k) + [B(k) - N(k, T)]q(k, T), \quad k < T, \quad (1.38)$$

donde las matrices  $M(k, T)$  y  $N(k, T)$  satisfacen

$$M(k, T) = [B(k) - A(k)r(k)]c(k, T)[I_M - r(k)c(k, T)]^{-1}, \quad k < T, \quad (1.39)$$

$$N(k, T) = [A(k) - M(k, T)]r(k), \quad k < T, \quad (1.40)$$

y los vectores  $q(k, T)$  y las matrices  $c(k, T)$  están dados recursivamente hacia atrás a partir de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} q(k, T) &= [A^T(k+1) - c(k, T)B^T(k+1)]R^{-1}(k+1) \\ &\quad \times [y(k+1) - B(k+1)q(k+1, T)] + q(k+1, T), \quad k < T; \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$q(T, T) = 0.$$

$$\begin{aligned}
c(k, T) &= \{A^T(k+1)R^{-1}(k+1)[A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)] + c(k+1, T)\} \\
&\quad \times \{I_M + B^T(k+1)R^{-1}(k+1)[A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)]\}^{-1}, \quad k < T; \\
c(T, T) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Los vectores  $O(k)$  y las matrices  $r(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas especificadas en el Teorema 1.3.1.

**Demostración.** Partiendo de la expresión (1.2) para  $j = T$ , el suavizador intervalo fijo de la señal  $z(k)$  está dado por la siguiente expresión

$$\hat{z}(k, T) = \sum_{i=1}^k h(k, i, T)y(i) + \sum_{i=k+1}^T h(k, i, T)y(i), \quad k < T; \tag{1.43}$$

por tanto, hemos de calcular los coeficientes  $h(k, i, T)$ , para  $i \leq k$ , por una parte, y para  $k+1 \leq i \leq T$ , por otra parte.

Comenzamos calculando, a partir de (1.3), las diferencias  $h(k, i, T) - h(k, i, k)$  para  $i \leq k$ . Teniendo en cuenta que, según las hipótesis del modelo,  $K_z(j, i) = A(j)B^T(i)$  para  $i \leq j$ , se verifica que

$$\begin{aligned}
[h(k, i, T) - h(k, i, k)]R(i) &= - \sum_{j=k+1}^T h(k, j, T)A(j)B^T(i) \\
&\quad - \sum_{j=1}^k [h(k, j, T) - h(k, j, k)]K_z(j, i), \quad i \leq k < T.
\end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la que se obtiene, de (1.21), para  $J(i, k)R(i)$  y definiendo la función matricial

$$M(k, T) = \sum_{j=k+1}^T h(k, j, T)A(j), \quad k < T, \tag{1.44}$$

se deduce la siguiente relación

$$h(k, i, T) - h(k, i, k) = -M(k, T)J(i, k), \quad i \leq k < T;$$

además, si se tiene en cuenta que, de (1.34),  $h(k, i, k) = A(k)J(i, k)$  para  $i \leq k$ , la expresión anterior se reescribe como

$$h(k, i, T) = [A(k) - M(k, T)] J(i, k), \quad i \leq k < T. \quad (1.45)$$

Sustituyendo esta fórmula en el primer sumando de (1.43) y usando la definición (1.22) para la función  $O(k)$  y la expresión (1.4) para  $\widehat{z}(k, k)$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^k h(k, i, T)y(i) = \widehat{z}(k, k) - M(k, T)O(k), \quad k < T. \quad (1.46)$$

Por otra parte, usando (1.3), los coeficientes  $h(k, i, T)$ , con  $k+1 \leq i \leq T$ , verifican

$$h(k, i, T)R(i) = K_z(k, i) - \sum_{j=1}^T h(k, j, T)K_z(j, i), \quad k+1 \leq i \leq T;$$

sabiendo que  $K_z(j, i) = B(j)A^T(i)$  para  $j \leq i$  y definiendo la función matricial

$$N(k, T) = \sum_{j=1}^k h(k, j, T)B(j), \quad k < T, \quad (1.47)$$

la expresión anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned} h(k, i, T)R(i) &= [B(k) - N(k, T)] A^T(i) \\ &\quad - \sum_{j=k+1}^T h(k, j, T)K_z(j, i), \quad k+1 \leq i \leq T, \end{aligned}$$

lo que permite expresar  $h(k, i, T)$  como

$$h(k, i, T) = [B(k) - N(k, T)] \Delta(k, i, T), \quad k+1 \leq i \leq T, \quad (1.48)$$

siendo  $\Delta$  una función matricial satisfaciendo

$$\Delta(k, i, T)R(i) = A^T(i) - \sum_{j=k+1}^T \Delta(k, j, T)K_z(j, i), \quad k+1 \leq i \leq T. \quad (1.49)$$

Si usamos ahora la expresión (1.48) en el segundo sumando de (1.43) y definimos la función vectorial

$$q(k, T) = \sum_{j=k+1}^T \Delta(k, j, T)y(j), \quad k < T, \quad (1.50)$$

se obtiene

$$\sum_{i=k+1}^T h(k, i, T)y(i) = [B(k) - N(k, T)]q(k, T), \quad k < T;$$

así, sustituyendo esta expresión, y la obtenida en (1.46), en la fórmula (1.43) para  $\widehat{z}(k, T)$ , se deduce la relación (1.38) para el suavizador intervalo fijo.

A continuación, obtenemos las expresiones (1.39) y (1.40), para  $M(k, T)$  y  $N(k, T)$ , respectivamente. Si partimos de la definición de  $N(k, T)$  y usamos la relación (1.45) para los coeficientes  $h(k, i, T)$ , con  $i \leq k < T$ , se obtiene que

$$N(k, T) = \sum_{j=1}^k h(k, j, T)B(j) = [A(k) - M(k, T)] \sum_{j=1}^k J(j, k)B(j), \quad k < T;$$

así, la expresión (1.40) para  $N(k, T)$  quedará demostrada si se comprueba que

$$r(k) = \sum_{j=1}^k J(j, k)B(j). \quad (1.51)$$

En efecto, utilizando las definiciones (1.29) y (1.22) para  $r(k)$  y  $O(k)$ , respectivamente, se deduce que

$$r(k) = E [O(k)O^T(k)] = \sum_{j=1}^k J(j, k)E [y(j)O^T(k)];$$

y, empleando el mismo razonamiento que conduce a (1.27), se prueba que  $E [y(j)O^T(k)] = B(j)$ , por lo que (1.51) queda probada y, por consiguiente, también la expresión (1.40) para  $N(k, T)$ .

Por otra parte, si partimos de la definición de  $M(k, T)$ , dada en (1.44), y usamos la igualdad (1.48) para los coeficientes  $h(k, j, T)$ , con  $k + 1 \leq j \leq T$ , se obtiene

$$M(k, T) = \sum_{j=k+1}^k h(k, j, T)A(j) = [B(k) - N(k, T)] \sum_{j=k+1}^T \Delta(k, j, T)A(j), \quad k < T;$$

así, definiendo la función matricial

$$c(k, T) = \sum_{j=k+1}^T \Delta(k, j, T)A(j), \quad k < T; \quad c(T, T) = 0, \quad (1.52)$$

la expresión anterior se reescribe como

$$M(k, T) = [B(k) - N(k, T)] c(k, T), \quad k < T. \quad (1.53)$$

Por tanto, sustituyendo la expresión (1.40) para  $N(k, T)$ , la fórmula (1.39) queda demostrada sin más que despejar el valor de  $M(k, T)$ .

A continuación, obtenemos la expresión recursiva (1.41) para  $q(k, T)$ . Con esta finalidad, expresamos los coeficientes  $\Delta(k, i, T)$  en términos de  $\Delta(k + 1, i, T)$  y, para ello, calculamos, usando (1.49), las diferencias  $\Delta(k, i, T)R(i) - \Delta(k + 1, i, T)R(i)$ , para  $k + 2 \leq i \leq T$ ,

$$\begin{aligned} [\Delta(k, i, T) - \Delta(k + 1, i, T)] R(i) &= -\Delta(k, k + 1, T)B(k + 1)A^T(i) \\ &\quad - \sum_{j=k+2}^T [\Delta(k, j, T) - \Delta(k + 1, j, T)] K_z(j, i), \quad k + 2 \leq i \leq T; \end{aligned}$$

comparando la relación anterior con la que se obtiene, de (1.49), para  $\Delta(k + 1, i, T)R(i)$ , es inmediato deducir la siguiente expresión

$$\Delta(k, i, T) - \Delta(k + 1, i, T) = -\Delta(k, k + 1, T)B(k + 1)\Delta(k + 1, i, T), \quad k + 2 \leq i \leq T,$$

o, equivalentemente,

$$\Delta(k, i, T) = [I_M - \Delta(k, k + 1, T)B(k + 1)] \Delta(k + 1, i, T), \quad k + 2 \leq i \leq T. \quad (1.54)$$

Si utilizamos esta relación en la definición de  $q(k, T)$ , dada en (1.50), separamos el primer término de la suma y usamos la definición de  $q(k+1, T)$ , se deduce que

$$\begin{aligned}
q(k, T) &= \Delta(k, k+1, T)y(k+1) + \sum_{j=k+2}^T \Delta(k, j, T)y(j) \\
&= \Delta(k, k+1, T)y(k+1) + [I_M - \Delta(k, k+1, T)B(k+1)]q(k+1, T) \\
&= \Delta(k, k+1, T)[y(k+1) - B(k+1)q(k+1, T)] + q(k+1, T), \quad k < T.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Para determinar por completo la expresión anterior, hemos de encontrar una fórmula explícita para  $\Delta(k, k+1, T)$ ; partiendo de (1.49) y usando la definición de la función  $c(k, T)$ , dada en (1.52), obtenemos

$$\Delta(k, k+1, T) = [A^T(k+1) - c(k, T)B^T(k+1)]R^{-1}(k+1), \quad k < T. \tag{1.56}$$

Así, sustituyendo esta expresión en (1.55), se deduce la fórmula recursiva (1.41) para  $q(k, T)$ .

Para finalizar, comprobamos la relación recursiva hacia atrás (1.42) para  $c(k, T)$ . Si partimos de (1.52), separamos el primer término de la suma y usamos las expresiones (1.54) y (1.56) y la definición de  $c(k+1, T)$ , se deduce que

$$\begin{aligned}
c(k, T) &= \Delta(k, k+1, T)A(k+1) + \sum_{j=k+2}^T \Delta(k, j, T)A(j) \\
&= \Delta(k, k+1, T)A(k+1) + [I_M - \Delta(k, k+1, T)B(k+1)]c(k+1, T) \\
&= \Delta(k, k+1, T)[A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)] + c(k+1, T) \\
&= [A^T(k+1) - c(k, T)B^T(k+1)]R^{-1}(k+1) \\
&\quad \times [A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)] + c(k+1, T), \quad k < T,
\end{aligned}$$

o, de forma equivalente,

$$\begin{aligned}
c(k, T) &\{I_M + B^T(k+1)R^{-1}(k+1)[A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)]\} \\
&= A^T(k+1)R^{-1}(k+1)[A(k+1) - B(k+1)c(k+1, T)] + c(k+1, T),
\end{aligned}$$

y, despejando el término  $c(k, T)$ , se obtiene la expresión (1.42) del teorema. ■

Finalmente, para medir la precisión de los estimadores de suavizamiento intervalo fijo de la señal, obtenemos una expresión para las matrices de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, dadas por la siguiente fórmula

$$P(k, T) = E \left[ (z(k) - \hat{z}(k, T))(z(k) - \hat{z}(k, T))^T \right], \quad k < T.$$

Según el LPO, el error  $z(k) - \hat{z}(k, T)$  es ortogonal al estimador  $\hat{z}(k, T)$  y, por tanto, se verifica que

$$\begin{aligned} P(k, T) &= E \left[ (z(k) - \hat{z}(k, T))z^T(k) \right] \\ &= E \left[ z(k)z^T(k) \right] - E \left[ \hat{z}(k, T)z^T(k) \right], \quad k < T. \end{aligned}$$

Usando las hipótesis del modelo en  $E \left[ z(k)z^T(k) \right]$  y las expresiones (1.38) y (1.4) para  $\hat{z}(k, T)$  y  $\hat{z}(k, k)$ , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} P(k, T) &= A(k)B^T(k) - [A(k) - M(k, T)] E \left[ O(k)z^T(k) \right] \\ &\quad - [B(k) - N(k, T)] E \left[ q(k, T)z^T(k) \right], \quad k < T. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Desarrollando la esperanza  $E \left[ O(k)z^T(k) \right]$  de la expresión anterior, si usamos la definición (1.22) para  $O(k)$ , las hipótesis del modelo y la igualdad (1.51) para  $r(k)$ , se deduce que

$$E \left[ O(k)z^T(k) \right] = \sum_{i=1}^k J(i, k) E \left[ y(i)z^T(k) \right] = \sum_{i=1}^k J(i, k) B(i) A^T(k) = r(k) A^T(k).$$

Por otra parte, usando las definiciones para  $q(k, T)$  y  $c(k, T)$ , dadas en (1.50) y (1.52), y las hipótesis del modelo en la expresión de la esperanza  $E \left[ q(k, T)z^T(k) \right]$  de (1.57), se deduce

$$\begin{aligned} E \left[ q(k, T)z^T(k) \right] &= \sum_{i=k+1}^T \Delta(k, i, T) E \left[ y(i)z^T(k) \right] \\ &= \sum_{i=k+1}^T \Delta(k, i, T) A(i) B^T(k) = c(k, T) B^T(k), \quad k < T. \end{aligned}$$

Así, sustituyendo estas dos últimas fórmulas en la expresión (1.57), se comprueba, finalmente, que

$$P(k, T) = A(k)B^T(k) - [A(k) - M(k, T)]r(k)A^T(k) \\ - [B(k) - N(k, T)]c(k, T)B^T(k), \quad k < T,$$

o, equivalentemente, empleando la expresión (1.53) para  $M(k, T)$ , la expresión anterior se reescribe como

$$P(k, T) = P(k, k) - M(k, T) [B^T(k) - r(k)A^T(k)], \quad k < T,$$

siendo  $P(k, k)$  la matriz de covarianzas del error de filtrado, dada en (1.36).

## 1.4. Ejemplo numérico

Con la finalidad de ilustrar los resultados obtenidos en las secciones anteriores hemos implementado en *MatLab* los algoritmos de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo presentados en los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2, aplicándolos a un ejemplo concreto. Para mostrar la efectividad de estos algoritmos, se ha realizado un programa que, en cada iteración, simula la señal que se desea estimar así como la observación correspondiente y proporciona las estimaciones (de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo) y las matrices de covarianzas de los errores de estimación, que miden la precisión de los estimadores.

El propósito de este ejemplo consiste en estimar una señal escalar emitida por cierto dispositivo, usando las observaciones recibidas por otro dispositivo, en el caso en que estas observaciones están afectadas por un término de error o ruido asociado al canal de transmisión y suponiéndose conocidas las varianzas de la señal y del ruido (es decir, se verifican las hipótesis recogidas en la Sección 1.2, necesarias para aplicar los algoritmos de estimación propuestos en este capítulo).

Concretamente, la señal,  $\{z(k); k \geq 0\}$ , enviada por el mecanismo emisor tiene media cero y está generada por un modelo autorregresivo de segundo orden -AR(2)-:

$$z(k) = -a_1 z(k-1) - a_2 z(k-2) + u(k), \quad (1.58)$$

siendo  $a_1 = -0.35$ ,  $a_2 = -0.55$  y  $\{u(k); k \geq 0\}$  un ruido blanco Gaussiano centrado y con  $Var[u(k)] = \sigma_u^2 = 0.25$ , para todo  $k$ .

Si denotamos  $d_1, d_2 = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})/2$ , es decir, las raíces de la ecuación característica  $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$  (en este caso,  $d_1 = 0.936987$ ,  $d_2 = -0.586987$ ), es inmediato comprobar (véase, por ejemplo, Haykin [13]) que la función de covarianzas de la señal indicada en (1.58) está dada en forma de núcleo semidegenerado de la siguiente forma

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s, \end{cases}$$

siendo  $A(k) = [p_1 d_1^k \ p_2 d_2^k]$  y  $B(k) = [d_1^{-k} \ d_2^{-k}]$  matrices de dimensión  $1 \times 2$ , especificadas mediante las siguientes relaciones

$$p_1 = \sigma_z^2 \cdot \frac{d_1(d_2^2 - 1)}{(1 + d_1 d_2)(d_2 - d_1)},$$

$$p_2 = -\sigma_z^2 \cdot \frac{d_2(d_1^2 - 1)}{(1 + d_1 d_2)(d_2 - d_1)},$$

$$\sigma_z^2 = Var[z(k)] = \frac{1 + a_2}{1 - a_2} \cdot \frac{\sigma_u^2}{(1 + a_2)^2 - a_1^2};$$

en este caso, se verifica que  $p_1 = 0.812476$ ,  $p_2 = 0.094781$  y  $\sigma_z^2 = 0.907258$ .

Hemos de notar que los algoritmos obtenidos en este capítulo, según se indica en el planteamiento del problema, únicamente requieren el conocimiento de la función de covarianzas de la señal (expresada en forma de núcleo semidegenerado) y no el

modelo de espacio de estados completo que la genera; por tanto, para su aplicación, no es necesario conocer los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$  y  $\sigma_u^2$  del modelo AR(2) que describe la señal  $\{z(k); k \geq 0\}$ , sino basta con conocer las matrices  $A(k)$  y  $B(k)$  que determinan la función de covarianzas de la misma.

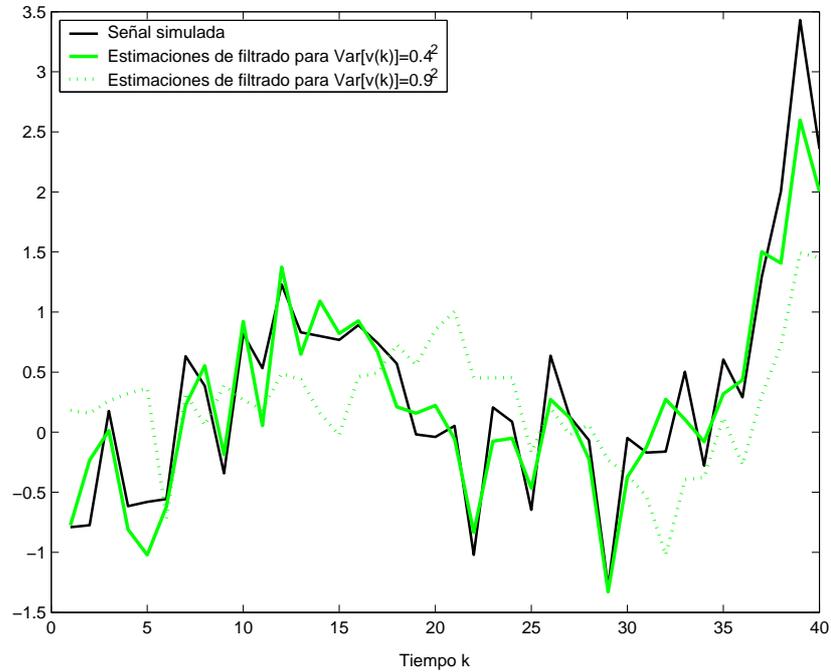
Además, se supone que las observaciones de la señal que recibe el dispositivo receptor verifican, en cada instante  $k$ , la siguiente ecuación

$$y(k) = z(k) + v(k),$$

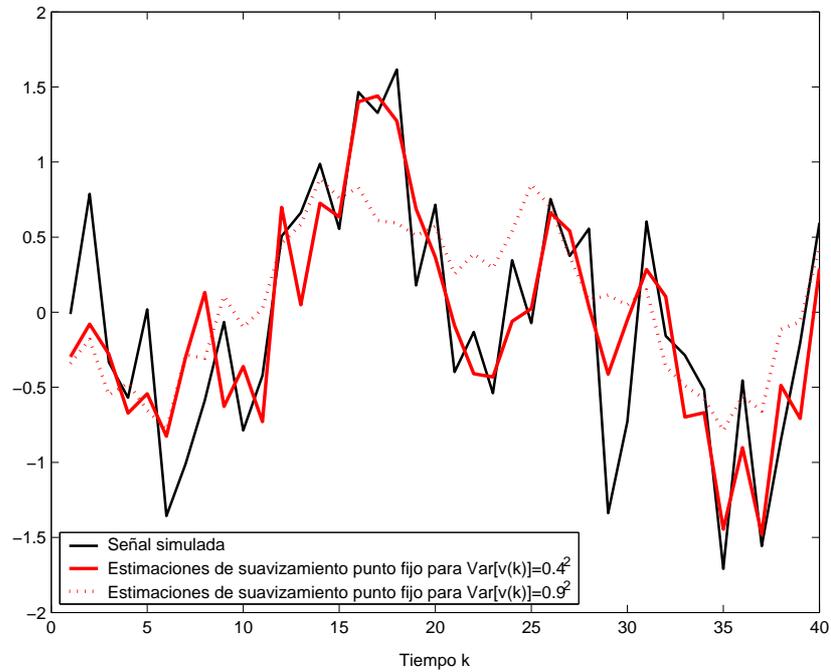
siendo  $\{v(k); k \geq 0\}$  un proceso ruido blanco Gaussiano, centrado, con función de covarianzas conocida e independiente de la señal. En nuestro estudio, se comprobará cómo influye la variabilidad del ruido de la observación en la estimación de la señal suponiendo varios valores para la varianza del mismo, concretamente,

$$\text{Var}[v(k)] = \sigma_v^2 = 0.4^2, 0.5^2, 0.9^2, \quad \forall k.$$

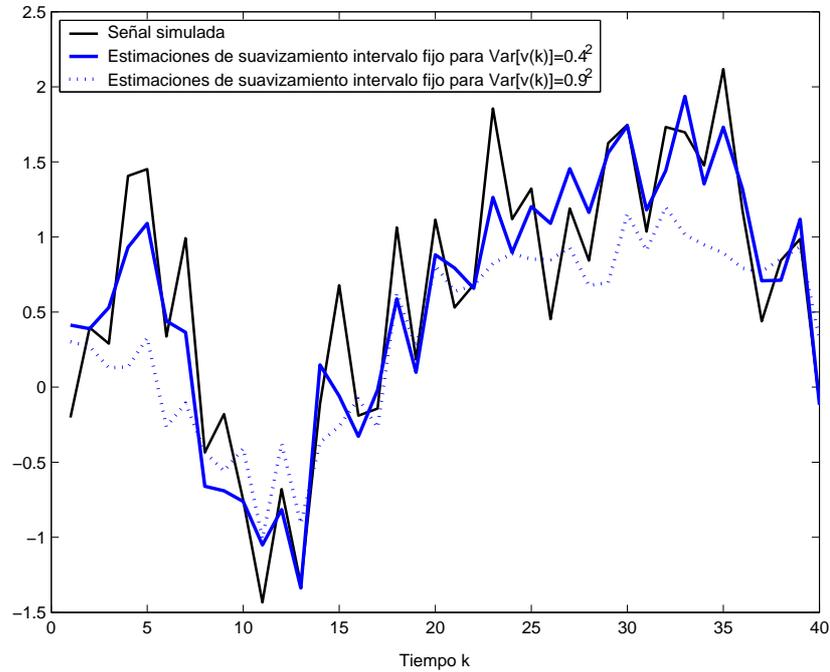
Así, en la Figura 1.4.1 se muestra una simulación de la señal enviada por el dispositivo emisor y las estimaciones de filtrado ( $\hat{z}(k, k)$  con  $k \leq 40$ ) que se obtendrían, según los algoritmos propuestos, para dos valores distintos de la varianza del ruido de la observación, concretamente,  $\sigma_v^2 = 0.4^2, 0.9^2$ . Como cabría esperar, la estimación obtenida es mejor cuanto menor es la variabilidad del ruido. Considerando también estos dos posibles valores para  $\sigma_v^2$ , en las Figuras 1.4.2 y Figura 1.4.3 se representan, respectivamente, las estimaciones de suavizamiento punto fijo ( $\hat{z}(k, k+3)$  con  $k \leq 40$ ) e intervalo fijo ( $\hat{z}(k, 40)$  con  $k \leq 40$ ) asociadas a dos nuevas simulaciones de la señal.



**Figura 1.4.1.** Señal simulada y estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , asociadas a los valores  $Var[v(k)] = 0.4^2, 0.9^2$ .



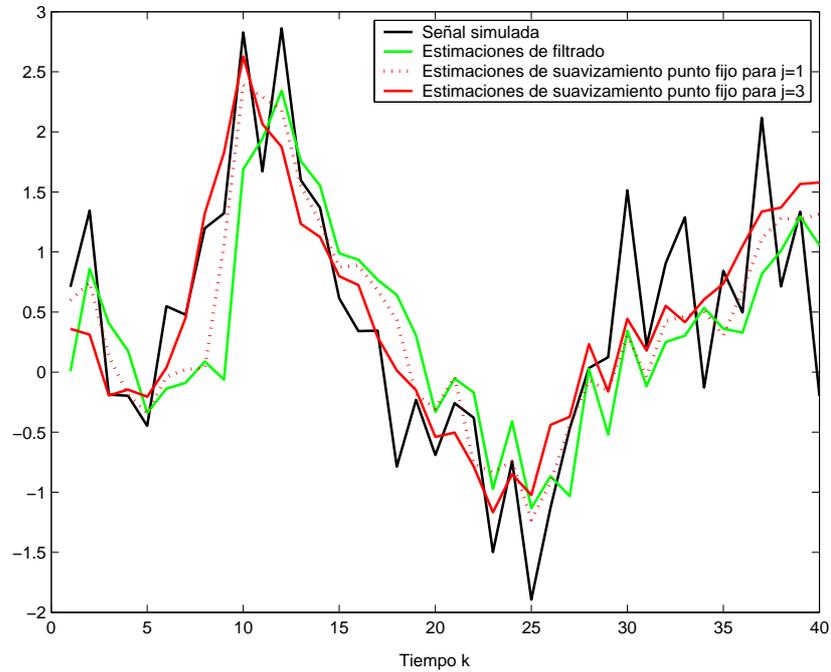
**Figura 1.4.2.** Señal simulada y estimaciones de suavizamiento punto fijo  $\hat{z}(k, k+3)$ , para los valores  $Var[v(k)] = 0.4^2, 0.9^2$ .



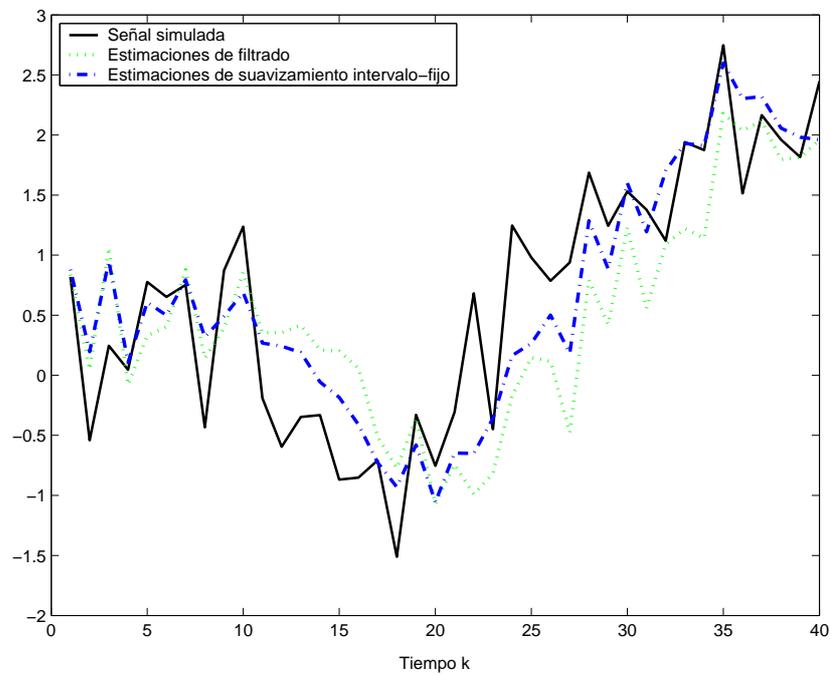
**Figura 1.4.3.** Señal simulada y estimaciones de suavizamiento intervalo fijo  $\hat{z}(k, 40)$ , para los valores  $Var[v(k)] = 0.4^2, 0.9^2$ .

A continuación, y suponiendo el valor  $\sigma_v^2 = 0.9^2$ , en la Figura 1.4.4 se representa una nueva señal simulada, así como las estimaciones  $\hat{z}(k, k)$ ,  $\hat{z}(k, k+1)$  y  $\hat{z}(k, k+3)$ . Observando la figura se deduce que las estimaciones de suavizamiento punto fijo,  $\hat{z}(k, k+1)$  y  $\hat{z}(k, k+3)$ , mejoran a la estimación de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y, además, esta mejora aumenta a medida que se incrementa el número de observaciones usadas para calcular el suavizador punto fijo.

Por otra parte, en la Figura 1.4.5 se representa, suponiendo la misma variabilidad para  $v(k)$ , otra señal simulada, las estimaciones de filtrado y las estimaciones de suavizamiento intervalo fijo para el instante fijo  $T = 40$ . También se observa, en esta ocasión, que el suavizador intervalo fijo sigue la evolución de la señal de forma más acertada que el filtro.



**Figura 1.4.4.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento punto fijo  $\hat{z}(k, k+1)$  y  $\hat{z}(k, k+3)$ , siendo  $Var[v(k)] = 0.9^2$ .

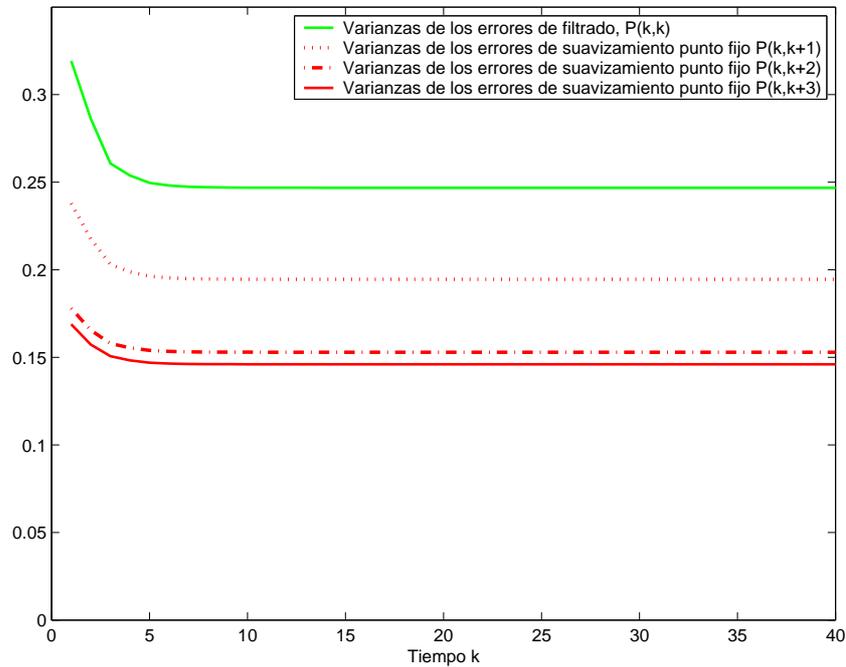


**Figura 1.4.5.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento intervalo fijo  $\hat{z}(k, 40)$ , siendo  $Var[v(k)] = 0.9^2$ .

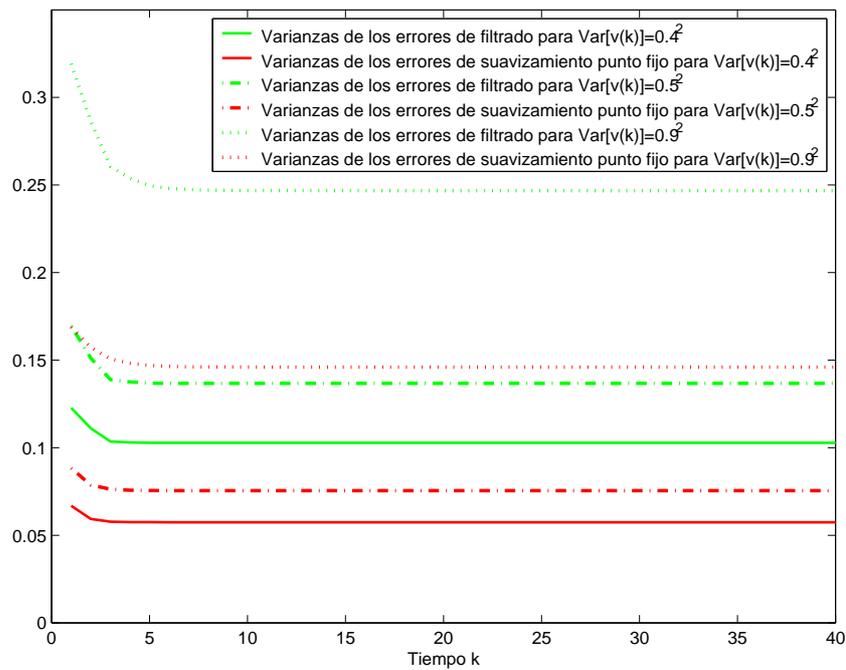
Seguidamente, las conclusiones obtenidas a partir de las figuras anteriores se confirman observando las gráficas donde se representan las varianzas de los errores de estimación, independientes de las simulaciones concretas que se realizan.

Así, la Figura 1.4.6 (obtenida para el valor  $Var[v(k)] = 0.9^2$ ) pone de manifiesto que las varianzas de los errores de estimación de filtrado,  $P(k, k)$ , son mayores, en todo instante  $k$ , que las varianzas de los errores de suavizamiento punto fijo,  $P(k, k + j)$  con  $j > 1$ . Además, las varianzas de los errores de suavizamiento punto fijo disminuyen a medida que aumenta el número de observaciones usadas para obtener el suavizador, es decir, a medida que aumenta el valor  $j$ .

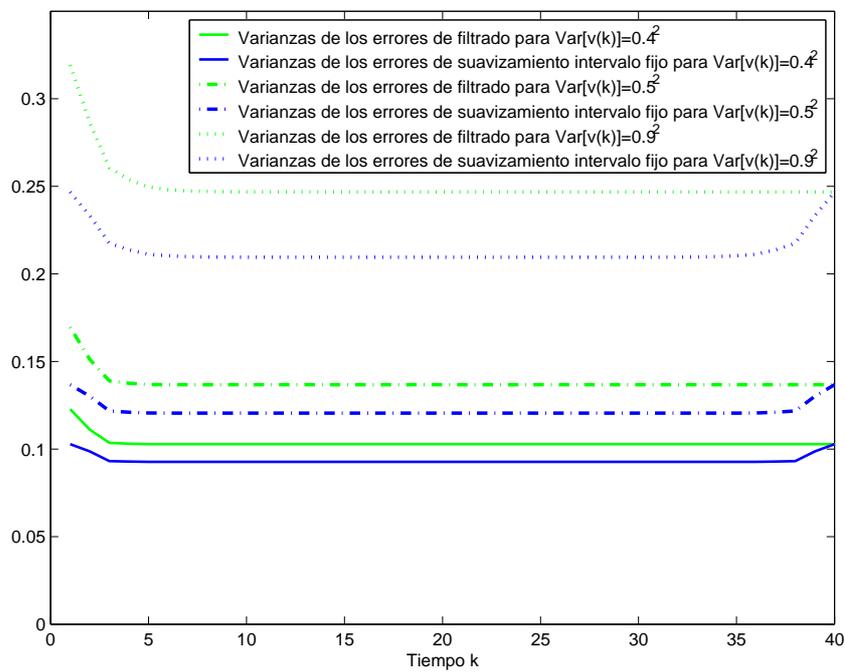
Para finalizar, las Figuras 1.4.7 y 1.4.8 reafirman la propiedad de que las varianzas de los errores de filtrado son mayores que las de los errores de suavizamiento (punto fijo e intervalo fijo), por lo que ambos suavizadores mejoran al filtro. Además, estas gráficas también ponen claramente de manifiesto que cualesquiera de los estimadores calculados son tanto más precisos, como se podría suponer, cuanto menor es la variabilidad del ruido que perturba la observación de la señal.



**Figura 1.4.6.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo para  $j = 1, 2, 3$ , es decir,  $P(k, k + 1)$ ,  $P(k, k + 2)$  y  $P(k, k + 3)$ , siendo  $\text{Var}[v(k)] = 0.9^2$ .



**Figura 1.4.7.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo para  $j = 3$ ,  $P(k, k + 3)$ , siendo  $\text{Var}[v(k)] = 0.4^2, 0.5^2, 0.9^2$ .



**Figura 1.4.8.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento intervalo fijo para  $T = 40$ ,  $P(k, 40)$ , siendo  $\text{Var}[v(k)] = 0.4^2$ ,  $0.5^2$ ,  $0.9^2$ .



## Capítulo 2

# Estimación lineal de señales discretas a partir de observaciones inciertas

### 2.1. Introducción

Como se ha indicado anteriormente, el problema de estimación del estado de un sistema dinámico a partir de observaciones del mismo afectadas por un ruido ha sido ampliamente estudiado. Aunque en las investigaciones iniciales se suponía que la señal que se desea estimar está siempre presente en las observaciones y, por tanto, la perturbación de éstas se debe, únicamente, a un ruido aditivo, existen numerosas situaciones prácticas como, por ejemplo, en telecomunicaciones o en procesamiento de imágenes, en las que el mecanismo de medida de la señal puede estar sometido a atenuaciones aleatorias y, por tanto, la señal interviene en la ecuación de observación de manera aleatoria, existiendo una probabilidad positiva (denominada *probabilidad de falsa alarma*) de que la observación contenga sólo ruido. Para modelizar matemáticamente tales situaciones se hace necesario incluir en la ecuación de observación, además del ruido aditivo, un ruido multiplicativo; se habla

de *sistemas con observaciones inciertas* en el caso de que este ruido multiplicativo sea una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli.

El problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio en sistemas con observaciones inciertas ha sido ampliamente estudiado cuando es conocido el modelo de espacio de estados de la señal. Nahi [26] fue el primero, en 1969, en abordar este problema; modelizando la incertidumbre en las observaciones mediante una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes y suponiendo que los ruidos del estado y la observación son incorrelados, obtuvo algoritmos para los problemas de filtrado y predicción lineal de mínimos cuadrados, algoritmos con una estructura recursiva similar al filtro de Kalman.

En 1971, Jaffer y Gupta [16] establecieron un algoritmo recursivo para el estimador óptimo (en el sentido de mínimos cuadrados) en sistemas con observaciones inciertas; sin embargo, debido a que el cálculo práctico de este estimador resulta inviable por requerir una cantidad de memoria computacional que crece exponencialmente en cada iteración, las investigaciones posteriores se orientan hacia la búsqueda de estimadores subóptimos, como es el caso del estimador lineal.

Así, considerando nuevamente el problema de estimación lineal de mínimos cuadrados, los resultados de Nahi sería completados por Monzingo [24], quien estudió el problema de suavizamiento y Tugnait [45], que analizó la estabilidad del estimador. Posteriormente, Hermoso y Linares [14], [15] trataron los problemas de filtrado y suavizamiento en el caso en que los ruidos aditivos del estado y la observación son correlados.

En 1979, Hadidi y Schwartz [12] generalizaron los estudios de Nahi, eliminando la hipótesis de independencia de las variables de Bernoulli que modelizan la incertidumbre en las observaciones. Probaron que, en general, el filtro lineal de mínimos cuadrados no tiene estructura recursiva y establecieron una condición

necesaria y suficiente que garantiza la recursividad del estimador. En tal caso, el algoritmo de estimación resulta ser una generalización de los filtros de Kalman y Nahi. Los resultados de Hadidi y Schwartz serían completados, en 1981, por Monzingo [25], quien estudió el problema de suavizamiento en el mismo contexto.

Aunque en los trabajos anteriores se supone conocido, el modelo de espacio de estados que genera la señal que se desea estimar no siempre está disponible y es necesario utilizar otro tipo de información para abordar el problema de estimación. En Nakamori et al. [30], utilizando la misma ecuación de observación que Nahi [26], se obtienen algoritmos recursivos para los problemas de filtrado y suavizamiento punto fijo, usando como única información las funciones de covarianzas de los procesos que intervienen en la misma. Nakamori et al. [31] generalizan este trabajo eliminando la hipótesis de independencia de las variables aleatorias que describen la incertidumbre en las observaciones; concretamente, considerando la ecuación de Hadidi y Schwartz [12].

El objetivo de este capítulo es el estudio del problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio de señales discretas a partir de observaciones inciertas, cuando la incertidumbre en las observaciones se modeliza mediante una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli no necesariamente independientes. Concretamente, se presentan (Sección 2.4) los algoritmos de filtrado y suavizamiento punto fijo obtenidos en Nakamori et al. [31], deducidos, en este caso, mediante un tratamiento por innovaciones, y se completa este estudio proponiendo un algoritmo para el problema de suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [34]). Dichos algoritmos requieren únicamente el conocimiento de los momentos de segundo orden de la señal y del ruido aditivo, las distribuciones marginales del proceso que describe la incertidumbre en las observaciones y los elementos  $(2, 2)$  de las matrices de transición de este proceso.

Posteriormente, se propone (Sección 2.5.1) una extensión del algoritmo anterior; concretamente, suponiendo el caso en que la ecuación de observación está afectada por incertidumbre no independiente y por ruidos blanco y coloreado, se deducen mediante un tratamiento por innovaciones los algoritmos de filtrado y suavizamiento punto fijo obtenidos anteriormente por Nakamori et al. [32] y se completa el estudio proponiendo un algoritmo para el problema de suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [38]).

Por otra parte, se considera (Sección 2.5.2) la situación en la que la incertidumbre en las observaciones se modeliza mediante variables indicadoras independientes y la señal y el ruido aditivo de la observación están correlados; en este contexto, se proponen algoritmos para los problemas de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [29], [35], [36]).

Todos los algoritmos referidos anteriormente se acompañan de un algoritmo para el cálculo de la matriz de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, que mide la precisión de los estimadores. Además, para finalizar, se muestra un ejemplo numérico para mostrar la efectividad de algunos de los algoritmos propuestos.

## 2.2. Planteamiento del problema

Consideremos un sistema dinámico cuyo estado se manifiesta en el tiempo a través de un proceso señal  $n$ -dimensional  $\{z(k); k \geq 1\}$  y supongamos que estamos interesados en estimar la señal en cierto instante de tiempo  $k$ . Se dispone de un conjunto de observaciones  $\{y(i); i \leq j\}$  relacionadas, en cada instante, con la señal pero que no proporcionan un valor exacto de la misma puesto que están perturbadas por uno o varios ruidos. Así, nuestro objetivo es el estudio del problema de estimación

lineal de menor error cuadrático medio de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones  $\{y(i); i \leq j\}$ .

Habitualmente, los distintos algoritmos de estimación se obtenían partiendo de una expresión del estimador como función lineal de las observaciones (como se ha realizado en el Capítulo 1); sin embargo, en este capítulo se sustituirá el proceso observación por el proceso innovación, expresándose, por tanto, el estimador como función lineal de las innovaciones. Esta técnica fue utilizada por primera vez por Bode y Shanon, en 1950, y por Zadeh y Ragazzini, de forma independiente, y posee una doble justificación: por una parte, las observaciones pueden determinarse a partir de las innovaciones mediante una función lineal y recíprocamente (Kailath [19]) y, por otra parte, la ecuación de Wiener-Hopf se resuelve más fácilmente en este contexto puesto que el proceso innovación es blanco.

En la siguiente sección se define el proceso innovación y se obtiene la expresión general del estimador de mínimos cuadrados de la señal en términos de innovaciones.

### 2.2.1. Formulación general por innovaciones

Si denotamos por  $\hat{y}(i, i-1)$  al predictor lineal en una etapa de  $y(i)$ , es decir, el estimador lineal de menor error cuadrático medio de  $y(i)$  basado en  $\{y(1), \dots, y(i-1)\}$ ,  $\nu(i) = y(i) - \hat{y}(i, i-1)$  puede interpretarse como una medida de la nueva información, o la *innovación*, contenida en la observación  $y(i)$ . Es conocido (Kailath [19]) que cualquier conjunto de innovaciones,  $\{\nu(i); i \leq j\}$ , puede determinarse a partir de las correspondientes observaciones,  $\{y(i); i \leq j\}$ , mediante una función lineal y recíprocamente. Por tanto, las observaciones pueden reemplazarse por las innovaciones sin perder ninguna información y, consecuentemente, el estimador lineal de menor error cuadrático medio de la señal

$z(k)$ , dadas las observaciones  $\{y(i); i \leq j\}$ , que denotaremos por  $\widehat{z}(k, j)$ , coincide con el estimador lineal de menor error cuadrático medio dadas las innovaciones  $\{\nu(1), \dots, \nu(j)\}$ ; de esta forma,

$$\widehat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j g(k, i, j) \nu(i), \quad (2.1)$$

donde  $g(k, i, j)$ ,  $i = 1, \dots, j$ , es la denominada *función impulso-respuesta*.

Por el *Lema de proyecciones ortogonales* (LPO), el error de estimación  $z(k) - \widehat{z}(k, j)$  es incorrelado con las innovaciones  $\{\nu(1), \dots, \nu(j)\}$ , por lo que se tiene

$$E[z(k) \nu^T(s)] = E[\widehat{z}(k, j) \nu^T(s)], \quad s \leq j,$$

y sustituyendo  $\widehat{z}(k, j)$  por su expresión, dada en (2.1), se obtiene la denominada *ecuación de Wiener-Hopf*,

$$E[z(k) \nu^T(s)] = \sum_{i=1}^j g(k, i, j) E[\nu(i) \nu^T(s)], \quad s \leq j.$$

Por otra parte, el proceso innovación  $\{\nu(k); k \geq 1\}$  es un proceso blanco; así,  $E[\nu(i) \nu^T(s)] = \Pi(i) \delta_K(i - s)$ , donde  $\delta_K$  denota la función delta de Kronecker. Utilizando esta propiedad del proceso innovación, la ecuación de Wiener-Hopf queda

$$E[z(k) \nu^T(s)] = g(k, s, j) \Pi(s), \quad s \leq j,$$

y, por tanto, la función impulso-respuesta  $g(k, s, j)$  es independiente de  $j$  y puede expresarse

$$g(k, s, j) = E[z(k) \nu^T(s)] \Pi^{-1}(s), \quad s \leq j.^1$$

En definitiva, denotando  $S(k, i) = E[z(k) \nu^T(i)]$ , la expresión general (2.1) para el estimador de la señal  $z(k)$  se reescribe de la forma

$$\widehat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i). \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Si la matriz  $\Pi(s)$  fuese singular, se sustituye la inversa por la pseudoinversa de Moore-Penrose (véase Magnus y Neudecker [22]).

A partir de la expresión general anterior para el estimador lineal de mínimos cuadrados de la señal se obtendrán posteriormente los distintos algoritmos para resolver los problemas de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo, considerando diferentes especificaciones del modelo de observación.

### 2.2.2. Ecuación de observación en sistemas con observaciones inciertas

Como ya se ha comentado, en muchos problemas prácticos la observación en un instante puede contener sólo ruido o señal más ruido. Estas situaciones se modelizan mediante una ecuación de observación perturbada, además de por un ruido aditivo,  $v(k)$ , por un ruido multiplicativo que hace que la señal,  $z(k)$ , intervenga en la observación,  $y(k)$ , de forma aleatoria. Concretamente, para reflejar la posibilidad de que la observación en un instante  $k$  contenga sólo ruido con probabilidad  $1 - p(k)$ , definimos la ecuación de observación de la señal de la siguiente forma

$$y(k) = \begin{cases} z(k) + v(k), & \text{con probabilidad } p(k), \\ v(k), & \text{con probabilidad } 1 - p(k). \end{cases}$$

Si denotamos por  $\gamma(k)$  una variable aleatoria de Bernoulli con

$$P[\gamma(k) = 1] = p(k),$$

la ecuación de observación de la señal puede reescribirse como

$$y(k) = \gamma(k)z(k) + v(k), \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

Cuando las atenuaciones aleatorias en la medida de la señal en distintos instantes de tiempo no guardan relación entre sí, la incertidumbre en las observaciones puede modelizarse mediante una sucesión de variables aleatorias indicadoras,  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ , independientes.

Sin embargo, en muchos problemas prácticos, las interrupciones aleatorias a las que está sometido el mecanismo de medida de la señal no pueden considerarse independientes; para modelizar matemáticamente estas situaciones es necesario conocer, además de las distribuciones marginales del proceso ruido multiplicativo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ , la matriz de transición del mismo, esto es,

$$\mathbb{P}(k/j) = \begin{pmatrix} P_{1,1}(k/j) & P_{1,2}(k/j) \\ P_{2,1}(k/j) & P_{2,2}(k/j) \end{pmatrix},$$

siendo  $P_{m,n}(k/j) = P[\gamma(k) = n - 1 / \gamma(j) = m - 1]$ , para  $m, n \in \{1, 2\}$  y  $k, j \geq 1$ .

Como en Hadidi y Schwartz [12], en este estudio se supondrá una condición adicional sobre el elemento (2,2) de la matriz de transición anterior, que garantiza la recursividad del estimador. Hadidi y Schwartz probaron que el estimador lineal de menor error cuadrático medio, en el caso de incertidumbre modelizada por variables indicadoras no necesariamente independientes, no tiene estructura recursiva en general y encontraron una condición necesaria y suficiente que garantiza su recursividad. Concretamente, demostraron que *el estimador lineal óptimo tiene estructura recursiva si, y sólo si, el elemento en posición (2,2) de la matriz de transición  $\mathbb{P}(k/j)$ ,  $P_{2,2}(k/j)$ , es independiente de  $j$  para  $j < k$ , es decir,*

$$P_{2,2}(k/j) = P[\gamma(k) = 1 / \gamma(j) = 1] = P_{2,2}(k), \quad j = 1, \dots, k - 1.$$

En definitiva, en este capítulo se considera una señal  $n$ -dimensional cuyo modelo de espacio de estados no es completamente conocido y las observaciones de la misma están dadas por la siguiente ecuación

$$y(k) = \gamma(k)z(k) + v(k), \quad k \geq 1, \quad (2.4)$$

donde se verifican las hipótesis:

- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 1\}$  tiene media cero y su función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 1 \leq k \leq s, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

- El proceso  $\{v(k); k \geq 1\}$  es un ruido blanco, centrado, con función de covarianzas  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k - s)$ .
- El ruido multiplicativo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ , que describe la incertidumbre en las observaciones, es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con  $P[\gamma(k) = 1] = p(k) \neq 0$  y  $P[\gamma(k) = 1/\gamma(j) = 1] = P_{2,2}(k)$  para cualquier  $j < k$ .
- El proceso señal,  $\{z(k); k \geq 1\}$ , y los ruidos,  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  y  $\{v(k); k \geq 1\}$ , son mutuamente independientes.

## 2.3. Proceso innovación

Como se ha indicado anteriormente, la innovación  $\nu(k)$  representa una medida de la nueva información que aporta la observación en el instante  $k$  y está definida por  $\nu(k) = y(k) - \hat{y}(k, k - 1)$ , siendo  $\hat{y}(k, k - 1)$  el predictor lineal en una etapa de  $y(k)$ . En esta sección nos planteamos determinar el proceso innovación, puesto que su expresión explícita, así como una fórmula para su matriz de covarianzas, son necesarias para obtener los distintos algoritmos de estimación a partir de la expresión general (2.2) del estimador de la señal.

La innovación quedará determinada cuando hayamos obtenido una fórmula para  $\hat{y}(k, k-1)$ ; según el LPO,  $\hat{y}(k, k-1)$  es la única combinación lineal de las observaciones  $\{y(1), \dots, y(k-1)\}$  tal que el error de estimación  $y(k) - \hat{y}(k, k-1)$  es ortogonal a ellas, esto es,

$$E [y(k)y^T(s)] = E [\hat{y}(k, k-1)y^T(s)], \quad s \leq k-1, \quad (2.6)$$

y teniendo en cuenta que  $E[\gamma(k)\gamma(s)] = P_{2,2}(k)p(s)$  para  $s < k$ , la hipótesis de que el ruido aditivo de la observación es blanco y la independencia mutua de las variables que intervienen en el modelo, la siguiente igualdad es inmediata

$$E [y(k)y^T(s)] = P_{2,2}(k)E [z(k)y^T(s)], \quad s \leq k-1. \quad (2.7)$$

Aplicando de nuevo el LPO, el predictor lineal en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , verifica

$$E [z(k)y^T(s)] = E [\hat{z}(k, k-1)y^T(s)], \quad s \leq k-1. \quad (2.8)$$

Así, de (2.6)-(2.8) se deduce fácilmente la siguiente relación

$$\hat{y}(k, k-1) = P_{2,2}(k)\hat{z}(k, k-1), \quad (2.9)$$

y, por tanto, el proceso innovación para el problema bajo estudio está dado por

$$\nu(k) = y(k) - P_{2,2}(k)\hat{z}(k, k-1), \quad k \geq 1. \quad (2.10)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las hipótesis del modelo para  $E [y(k)y^T(k)]$  y la relación (2.9) para  $\hat{y}(k, k-1)$ , se obtiene que la matriz de covarianzas del proceso innovación,  $\Pi(k) = E [y(k)y^T(k)] - E [\hat{y}(k, k-1)\hat{y}^T(k, k-1)]$ , está dada por

$$\Pi(k) = p(k)A(k)B^T(k) + R(k) - P_{2,2}^2(k)E [\hat{z}(k, k-1)\hat{z}^T(k, k-1)]. \quad (2.11)$$

Las fórmulas (2.10) y (2.11) proporcionan expresiones para la innovación  $\nu(k)$  y para su matriz de covarianzas,  $\Pi(k)$ , en términos del predictor en una etapa de

la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , y de su matriz de covarianzas,  $E [\hat{z}(k, k-1)\hat{z}^T(k, k-1)]$ , respectivamente. Por lo tanto, para obtener los diferentes algoritmos de estimación es necesario deducir expresiones explícitas para  $\nu(k)$  y  $\Pi(k)$  y, teniendo en cuenta (2.10) y (2.11), hemos de determinar el predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , y su matriz de covarianzas,  $E [\hat{z}(k, k-1)\hat{z}^T(k, k-1)]$ .

Estos resultados se presentan en el siguiente teorema, cuya demostración se realiza de una forma más simple a la propuesta en Nakamori et al. [31].

**Teorema 2.3.1** *Bajo las hipótesis descritas en la Sección 2.2, el proceso innovación asociado a la ecuación de observación (2.4) es un proceso blanco, con media cero, que verifica*

$$\nu(k) = y(k) - P_{2,2}(k)A(k)O(k-1), \quad k \geq 1, \quad (2.12)$$

donde el vector  $M$ -dimensional  $O(k)$  se obtiene recursivamente mediante la relación

$$O(k) = O(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O(0) = 0, \quad (2.13)$$

siendo

$$J(k) = p(k)B^T(k) - P_{2,2}(k)r(k-1)A^T(k), \quad (2.14)$$

y donde  $r$  es una función matricial verificando

$$r(k) = r(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)J^T(k), \quad r(0) = 0. \quad (2.15)$$

La matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k)$ , está dada por

$$\Pi(k) = R(k) + A(k) [p(k)B^T(k) - P_{2,2}^2(k)r(k-1)A^T(k)]. \quad (2.16)$$

**Demostración.** De acuerdo con la expresión (2.10), para determinar  $\nu(k)$  necesitamos obtener el predictor en una etapa de la señal, el cual, según (2.2),

está dado por

$$\widehat{z}(k, k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k > 1; \quad \widehat{z}(1, 0) = 0. \quad (2.17)$$

Así, hemos de calcular los coeficientes

$$S(k, i) = E[z(k) \nu^T(i)] = E[z(k) y^T(i)] - P_{2,2}(i) E[z(k) \widehat{z}^T(i, i-1)], \quad i \leq k-1.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis del modelo para  $E[z(k) y^T(i)]$  y sustituyendo la expresión (2.17) para  $k = i$  en  $E[z(k) \widehat{z}^T(i, i-1)]$ , se tiene

$$S(k, i) = A(k) p(i) B^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j), \quad 2 \leq i \leq k, \quad (2.18)$$

$$S(k, 1) = A(k) p(1) B^T(1).$$

Esta relación para  $S(k, i)$  permite expresar

$$S(k, i) = A(k) J(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2.19)$$

donde  $J$  es una función matricial que verifica

$$J(i) = p(i) B^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=1}^{i-1} J(j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j), \quad i \geq 2, \quad (2.20)$$

$$J(1) = p(1) B^T(1).$$

Por tanto, si definimos

$$O(k) = \sum_{i=1}^k J(i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k \geq 1; \quad O(0) = 0, \quad (2.21)$$

usando (2.17) y (2.19), se deduce fácilmente que el predictor en una etapa de la señal está dado por

$$\widehat{z}(k, k-1) = A(k) O(k-1), \quad k \geq 1, \quad (2.22)$$

y se tiene (2.12). La fórmula recursiva (2.13) para  $O(k)$  es inmediata a partir de (2.21).

A continuación, establecemos la expresión (2.14) para  $J(k)$ . Escribiendo en (2.20)  $i = k$  y teniendo en cuenta (2.19), obtenemos

$$J(k) = p(k)B^T(k) - P_{2,2}(k) \sum_{j=1}^{k-1} J(j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(k), \quad k \geq 2,$$

y denotando

$$r(k) = E [O(k)O^T(k)] = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)J^T(i), \quad k \geq 1; \quad r(0) = 0, \quad (2.23)$$

la expresión (2.14) queda establecida. La relación recursiva (2.15) para la función matricial  $r$  se obtiene de forma inmediata de (2.23).

Finalmente, la fórmula (2.16) para la matriz de covarianzas del proceso innovación,  $\Pi(k)$ , se obtiene a partir de (2.11), usando la expresión (2.22) para el predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , y la función matricial  $r$  definida en (2.23). ■

En la siguiente sección se obtienen algoritmos para los problemas de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo, acompañándose cada algoritmo de la matriz de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, que miden la precisión de los estimadores.

## 2.4. Algoritmos de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo

En el teorema siguiente se presentan algoritmos para los problemas de filtrado y de suavizamiento punto fijo de la señal; para deducirlos, se partirá de la expresión

general (2.2) del estimador, considerando,  $j = k$  y  $j = L > k$  (para un valor de  $k$  fijo), respectivamente. Puesto que en la sección anterior ha quedado determinado el proceso innovación y su matriz de covarianzas, únicamente será necesario calcular los coeficientes  $S(k, i) = E[z(k)\nu^T(i)]$  para  $i \leq L$ .

**Teorema 2.4.1** *Si se considera la ecuación de observación (2.4) verificando las hipótesis descritas en la Sección 2.2, los estimadores de filtrado y de suavizamiento punto fijo de la señal  $z(k)$  pueden determinarse a partir de las relaciones*

$$\hat{z}(k, k) = A(k)O(k), \quad k \geq 1, \quad (2.24)$$

$$\hat{z}(k, L) = \hat{z}(k, L-1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k. \quad (2.25)$$

Las matrices  $S(k, L)$  verifican

$$S(k, L) = [p(L)B(k) - P_{2,2}(L)E(k, L-1)]A^T(L), \quad (2.26)$$

donde  $E(k, L)$ , matriz de dimensión  $M \times n$ , satisface la siguiente relación recursiva

$$\begin{aligned} E(k, L) &= E(k, L-1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)J^T(L), \quad L > k; \\ E(k, k) &= A(k)r(k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

La innovación  $\nu(L)$ , los vectores  $O(k)$  y sus matrices de covarianzas,  $\Pi(L)$  y  $r(k)$ , respectivamente, se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 2.3.1.

**Demostración.** A partir de la expresión general (2.2) para el estimador lineal de la señal  $z(k)$ , el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , está dado por

$$\hat{z}(k, k) = \sum_{i=1}^k S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1;$$

usando la expresión (2.19) para  $S(k, i)$ , con  $i \leq k$ , y teniendo en cuenta (2.21), la fórmula (2.24) para el filtro es inmediata.

La fórmula recursiva (2.25) para el estimador de suavizamiento punto fijo también se deduce fácilmente de (2.2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\widehat{z}(k, L) &= \sum_{i=1}^{L-1} S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L) \\ &= \widehat{z}(k, L-1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k,\end{aligned}\quad (2.28)$$

donde la condición inicial está dada por el filtro  $\widehat{z}(k, k)$ . Por tanto, partiendo de la expresión del filtro, y puesto que en el Teorema 2.3.1 ya se han obtenido expresiones explícitas para  $\nu(L)$  y  $\Pi(L)$ , únicamente nos queda determinar la matriz  $S(k, L)$ .

Para hallar la expresión (2.26) para la matriz  $S(k, L) = E[z(k)\nu^T(L)]$ , utilizamos la fórmula (2.12) para la innovación  $\nu(L)$  y así deducimos que

$$S(k, L) = E[z(k)y^T(L)] - P_{2,2}(L)E[z(k)O^T(L-1)]A^T(L), \quad L > k;$$

definiendo  $E(k, L) = E[z(k)O^T(L)]$  y aplicando las hipótesis del modelo en  $E[z(k)y^T(L)]$ , la ecuación (2.26) queda probada.

Finalmente, la relación (2.27) para  $E(k, L)$  se obtiene de forma inmediata si se tiene en cuenta la expresión recursiva (2.13) para  $O(L)$ . Para demostrar la condición inicial, dada por  $E(k, k) = A(k)r(k)$ , basta con tener en cuenta que, según el LPO, se verifica

$$E[z(k)O^T(k)] = E[\widehat{z}(k, k)O^T(k)], \quad k \geq 1,$$

y, usando la expresión (2.24) para el filtro  $\widehat{z}(k, k)$  y (2.23) para  $r(k)$ , la relación para  $E(k, k)$  queda demostrada. ■

A continuación, obtenemos las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y de suavizamiento punto fijo, con la finalidad de proporcionar una medida de la precisión de los correspondientes estimadores.

En general, la bondad de los estimadores  $\widehat{z}(k, j)$  puede medirse mediante los errores de estimación,  $z(k) - \widehat{z}(k, j)$ , y, de forma más concreta, mediante la matriz de covarianzas de estos errores,

$$P(k, j) = E[(z(k) - \widehat{z}(k, j))(z(k) - \widehat{z}(k, j))^T].$$

Puesto que, por el LPO, el error  $z(k) - \widehat{z}(k, j)$  es ortogonal al estimador  $\widehat{z}(k, j)$ , tenemos que  $E[\widehat{z}(k, j)z^T(k)] = E[\widehat{z}(k, j)\widehat{z}^T(k, j)]$  y, por tanto,

$$P(k, j) = K_z(k, k) - E[\widehat{z}(k, j)\widehat{z}^T(k, j)]. \quad (2.29)$$

A partir de esta expresión general, se obtienen a continuación fórmulas para las matrices de covarianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo,  $P(k, L)$  con  $L > k$ .

La siguiente fórmula para el cálculo de  $P(k, k)$  es obtenida fácilmente de (2.29), teniendo en cuenta las hipótesis del modelo para  $K_z(k, k)$ , la fórmula (2.24) para el filtro,  $\widehat{z}(k, k)$ , y la función matricial  $r(k)$  definida en (2.23),

$$P(k, k) = A(k)B^T(k) - A(k)r(k)A^T(k), \quad k \geq 1. \quad (2.30)$$

En segundo lugar, la expresión que aparece a continuación para  $P(k, L)$ ,  $L > k$ , es inmediata a partir de (2.29), usando la relación (2.25) para  $\widehat{z}(k, L)$ , la definición de  $P(k, L-1)$  y la propiedad de incorrelación entre la innovación  $\nu(L)$  y el estimador  $\widehat{z}(k, L-1)$ ,

$$P(k, L) = P(k, L-1) - S(k, L)\Pi^{-1}(L)S^T(k, L), \quad L > k,$$

cuya condición inicial está dada por la matriz de covarianzas del error de filtrado,  $P(k, k)$ .

Para finalizar el estudio del problema de estimación de la señal bajo las hipótesis planteadas en la Sección 2.2, se presenta un algoritmo para el problema de estimación de suavizamiento intervalo fijo.

**Teorema 2.4.2** *Se considera la ecuación (2.4) verificando las hipótesis especificadas en la Sección 2.2. Entonces, los estimadores  $\hat{z}(k, T)$ , para  $k < T$ , pueden ser calculados a partir de la siguiente expresión*

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + B(k)q_1(k, T) - A(k)r(k-1)q_2(k, T), \quad k < T, \quad (2.31)$$

donde los vectores  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$ , para  $k < T$ , se obtienen recursivamente hacia atrás mediante las relaciones

$$q_1(k, T) = q_1(k+1, T) - p(k)H(k)q_2(k+1, T) + [p(k+1)I_M - P_{2,2}(k+1)p(k)H(k)]A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1), \quad (2.32)$$

$$q_2(k, T) = [I_M - P_{2,2}(k)H(k)][q_2(k+1, T) + P_{2,2}(k+1)A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1)], \quad (2.33)$$

siendo  $q_1(T, T) = 0$  y  $q_2(T, T) = 0$  las condiciones iniciales,  $I_M$  la matriz identidad de dimensión  $M \times M$  y

$$H(k) = A^T(k)\Pi^{-1}(k)J^T(k). \quad (2.34)$$

El filtro  $\hat{z}(k, k)$ , las matrices  $r(k)$  y  $J(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 2.3.1 y el Teorema 2.4.1.

**Demostración.** Para probar la fórmula (2.31) para  $\hat{z}(k, T)$ , partimos de la expresión general para el estimador lineal de la señal, (2.2), deduciéndose la siguiente expresión

para el suavizador intervalo fijo

$$\widehat{z}(k, T) = \widehat{z}(k, k) + \sum_{i=k+1}^T S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T;$$

así, puesto que el filtro ya está determinado por la fórmula (2.24), la relación (2.33) quedará probada si se demuestra que el sumatorio de la igualdad anterior coincide con  $B(k)q_1(k, T) - A(k)r(k-1)q_2(k, T)$ , donde  $q_1$  y  $q_2$  están determinadas en (2.32) y (2.33).

Para ello, comenzamos calculando los coeficientes  $S(k, i) = [z(k)\nu^T(i)]$  para  $i \geq k+1$ ; usando un razonamiento similar al empleado en el Teorema 2.3.1 para obtener  $S(k, i)$  para  $i \leq k$ , deducimos la siguiente expresión

$$S(k, i) = B(k)p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i)\sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j), \quad i \geq k. \quad (2.35)$$

Utilizando la expresión (2.19) para los coeficientes  $S(k, i)$  con  $i \leq k$  y (2.23) para  $r(k)$ , la fórmula anterior puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} S(k, i) &= B(k)p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i)A(k)r(k-1)A^T(i) \\ &\quad - P_{2,2}(i)\sum_{j=k}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i), \quad i > k, \\ S(k, k) &= [p(k)B(k) - P_{2,2}(k)A(k)r(k-1)]A^T(k); \end{aligned} \quad (2.36)$$

esta relación permite expresar los coeficientes  $S(k, i)$  de la forma

$$S(k, i) = B(k)\Delta_1(k, i) - A(k)r(k-1)\Delta_2(k, i), \quad i \geq k, \quad (2.37)$$

siendo  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  funciones matriciales verificando

$$\begin{aligned} \Delta_1(k, i) &= p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i)\sum_{j=k}^{i-1} \Delta_1(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i), \quad i > k, \\ \Delta_1(k, k) &= p(k)A^T(k). \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\Delta_2(k, i) = P_{2,2}(i)A^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=k}^{i-1} \Delta_2(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i), \quad i > k, \quad (2.39)$$

$$\Delta_2(k, k) = P_{2,2}(k)A^T(k).$$

Por tanto, si definimos los vectores

$$q_1(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta_1(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad q_1(T, T) = 0, \quad (2.40)$$

$$q_2(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta_2(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad q_2(T, T) = 0, \quad (2.41)$$

se obtiene que

$$\sum_{i=k+1}^T S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) = B(k)q_1(k, T) - A(k)r(k-1)q_2(k, T), \quad (2.42)$$

y, de esta manera, la expresión (2.31) queda demostrada.

Por otra parte, con la finalidad de deducir las fórmulas recursivas hacia atrás (2.32) y (2.33), calculamos las diferencias  $\Delta_1(k, i) - \Delta_1(k+1, i)$ , usando (2.38) y la función matricial  $H(k)$  definida en (2.34),

$$\begin{aligned} \Delta_1(k, i) - \Delta_1(k+1, i) &= -P_{2,2}(i)p(k)H(k)A^T(i) - P_{2,2}(i) \\ &\quad \times \sum_{j=k+1}^{i-1} [\Delta_1(k, j) - \Delta_1(k+1, j)]\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i). \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la que resulta de (2.39) para  $\Delta_2(k+1, i)$ , es decir,

$$\Delta_2(k+1, i) = P_{2,2}(i)A^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_2(k+1, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i),$$

deducimos la siguiente relación para  $\Delta_1$

$$\Delta_1(k, i) = \Delta_1(k+1, i) - p(k)H(k)\Delta_2(k+1, i), \quad i > k+1. \quad (2.43)$$

Realizando un razonamiento similar para  $\Delta_2$ , obtenemos

$$\Delta_2(k, i) = [I_M - P_{2,2}(k)H(k)] \Delta_2(k+1, i), \quad i > k+1. \quad (2.44)$$

Es inmediato comprobar que las relaciones (2.43) y (2.44) obtenidas, respectivamente, para  $\Delta_1(k, i)$  y  $\Delta_2(k, i)$  con  $i > k+1$ , también se verifican para  $i = k+1$ .

Por tanto, teniendo en cuenta las definiciones de  $q_1(k+1, T)$  y  $q_2(k+1, T)$  y las fórmulas (2.34), (2.38) y (2.43), se obtiene la expresión recursiva hacia atrás (2.32) para  $q_1(k, T)$

$$\begin{aligned} q_1(k, T) &= \Delta_1(k, k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1) + \sum_{i=k+2}^T \Delta_1(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) \\ &= \Delta_1(k, k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1) + q_1(k+1, T) - p(k)H(k)q_2(k+1, T) \\ &= q_1(k+1, T) - p(k)H(k)q_2(k+1, T) \\ &\quad + [p(k+1)I_M - P_{2,2}(k+1)p(k)H(k)]A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1), \end{aligned}$$

y, de forma análoga, usando la definición de  $q_2(k+1, T)$  y las fórmulas (2.34), (2.39) y (2.44), se obtiene la expresión recursiva hacia atrás (2.33) para  $q_2(k, T)$

$$\begin{aligned} q_2(k, T) &= \Delta_2(k, k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1) + \sum_{i=k+2}^T \Delta_2(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) \\ &= \Delta_2(k, k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1) + [I_M - P_{2,2}(k)H(k)]q_2(k+1, T) \\ &= [I_M - P_{2,2}(k)H(k)][q_2(k+1, T) + P_{2,2}(k+1)A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1)]. \end{aligned}$$

■

A continuación, calculamos la matriz de covarianzas de los errores de suavizamiento intervalo fijo,  $P(k, T)$  con  $k < T$ .

Considerando  $j = T$  en la expresión (2.29) para la matriz de covarianzas del error de estimación, obtenemos

$$P(k, T) = K_z(k, k) - E[\hat{z}(k, T)\hat{z}^T(k, T)];$$

y usando la fórmula (2.31) para  $\hat{z}(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_i(k, T)$ ,  $i = 1, 2$ , y el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , se deduce que

$$P(k, T) = P(k, k) - B(k)Q_1(k, T)B(k)^T - A(k)r(k-1)Q_2(k, T)r(k-1)A(k)^T \\ + B(k)Q_{12}(k, T)r(k-1)A(k)^T + A(k)r(k-1)Q_{12}^T(k, T)B^T(k), \quad k < T,$$

siendo

$$Q_i(k, T) = E [q_i(k, T)q_i^T(k, T)], \quad i = 1, 2. \\ Q_{12}(k, T) = E [q_1(k, T)q_2^T(k, T)],$$

y  $P(k, k)$  la matriz de covarianzas de los errores del filtrado, dada en (2.30).

Finalmente, las ecuaciones (2.32) y (2.33) y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_i(k+1, T)$ ,  $i = 1, 2$ , y la innovación  $\nu(k+1)$  conducen a las siguientes expresiones recursivas hacia atrás

$$Q_1(k, T) = Q_1(k+1, T) - p(k)Q_{12}(k+1, T)H^T(k) - p(k)H(k)Q_{12}^T(k+1, T) \\ + p^2(k)H(k)Q_2(k+1, T)H^T(k) + [p(k+1)I_M - P_{2,2}(k+1)p(k)H(k)] \\ \times A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)A(k+1)[p(k+1)I_M - P_{2,2}(k+1)p(k)H(k)]^T,$$

$$Q_2(k, T) = [I_M - P_{2,2}(k)H(k)][Q_2(k+1, T) + P_{2,2}^2(k+1)A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1) \\ \times A(k+1)][I_M - P_{2,2}(k)H(k)]^T,$$

$$Q_{12}(k, T) = \{Q_{12}(k+1, T) - p(k)H(k)Q_2(k+1, T) + P_{2,2}(k+1)[p(k+1)I_M \\ - P_{2,2}(k+1)p(k)H(k)]A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)A(k+1)\}[I_M - P_{2,2}(k)H(k)]^T,$$

cuyas condiciones iniciales son  $Q_1(T, T) = 0$ ,  $Q_2(T, T) = 0$  y  $Q_{12}(T, T) = 0$ , respectivamente.

## 2.5. Extensiones

En la Sección 2.4 se ha resuelto el problema de estimación de mínimos cuadrados de señales discretas a partir de observaciones afectadas por ruidos aditivo y multiplicativo, concretamente, suponiendo que el ruido aditivo es blanco, centrado, y el ruido multiplicativo, que representa la incertidumbre en las observaciones, está modelizado por una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli no necesariamente independientes, con independencia mutua entre la señal y los ruidos. En este contexto, y suponiendo que no se conoce completamente el modelo de espacio de estados de la señal, sino únicamente los momentos de segundo orden de la misma y del ruido aditivo, las distribuciones marginales del proceso que describe la incertidumbre en las observaciones y el elemento  $(2,2)$  de las matrices de transición de este proceso, se han presentado algoritmos para el problema de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo.

A continuación, nos proponemos contemplar otras posibles situaciones en sistemas con observaciones inciertas, que serán modelizadas considerando hipótesis distintas a las supuestas en la Sección 2.2 sobre la señal y los ruidos que intervienen en la ecuación de observación. Concretamente, en primer lugar (Sección 2.5.1), se propone una posible extensión de los algoritmos anteriores, que surge al considerar que la ecuación de observación está afectada por incertidumbre no independiente y por ruidos blanco y coloreado (Nakamori et al. [32], [38]). Posteriormente, en la Sección 2.5.2, se considera la situación en la que la señal y el ruido blanco aditivo de la observación están correlados (Nakamori et al. [29], [35], [36]); en este caso, supondremos que las variables indicadoras que modelizan la incertidumbre en las observaciones son independientes.

En ambos contextos se obtendrán algoritmos para los problemas de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo, así como algoritmos para las matrices de covarianzas de los correspondientes errores de estimación.

### 2.5.1. Señal afectada por ruidos blanco y coloreado

En esta sección nos planteamos obtener algoritmos para los problemas de estimación lineal (en el sentido de mínimos cuadrados) de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo a partir de observaciones inciertas, modelizadas por una sucesión de variables aleatorias no necesariamente independientes. Este problema ya ha sido resuelto anteriormente (Sección 2.4) en el caso en que las observaciones están afectadas por un único ruido aditivo, concretamente, un ruido blanco con media cero y función de covarianzas conocida. Sin embargo, existen situaciones prácticas en las que las observaciones de la señal están afectadas, además de por un ruido blanco, por un ruido aditivo  $\{w(k); k \geq 1\}$  verificando que la matriz de covarianzas  $E[w(k)w^T(s)]$  no siempre coincide con la matriz cero para cualesquiera  $k, s \geq 1$  distintos, es decir, un *ruido coloreado*. Ésta será la situación contemplada en esta sección, en la que se propondrán los distintos algoritmos, así como las correspondientes matrices de covarianzas de los errores de estimación.

### Planteamiento del problema

Consideremos una señal  $n$ -dimensional  $z(k)$  generada por la siguiente ecuación de observación

$$y(k) = \gamma(k)z(k) + v(k) + w(k), \quad k \geq 1, \quad (2.45)$$

donde se verifican las hipótesis:

- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 1\}$  tiene media cero y su función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 1 \leq k \leq s, \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

- El ruido aditivo  $\{v(k); k \geq 1\}$  es un ruido blanco, centrado, con función de covarianzas conocida,  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k - s)$ .
- El ruido aditivo  $\{w(k); k \geq 1\}$  es un ruido coloreado con media cero y función de covarianzas expresada en forma de núcleo semidegenerado de la siguiente forma

$$K_w(k, s) = E[w(k)w^T(s)] = \begin{cases} \alpha(k)\beta^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ \beta(k)\alpha^T(s), & 1 \leq k \leq s, \end{cases}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones matriciales conocidas de dimensiones  $n \times N$ .

- El ruido multiplicativo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ , que describe la incertidumbre en las observaciones, es un sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con  $P[\gamma(k) = 1] \neq 0$  y verificando la condición que garantiza la recursividad del estimador (Hadidi y Schwartz [12]), es decir,  $P[\gamma(k) = 1/\gamma(j) = 1]$  es independiente de  $j$  para  $j < k$ ; estas probabilidades son ambas conocidas y denotadas por  $p(k)$  y  $P_{2,2}(k)$ , respectivamente.
- Finalmente, los procesos  $\{z(k); k \geq 1\}$ ,  $\{v(k); k \geq 1\}$ ,  $\{w(k); k \geq 1\}$  y  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  son mutuamente independientes.

A continuación, nos planteamos resolver el problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones hasta el instante

$j$ ,  $\{y(1), \dots, y(j)\}$ , dadas mediante la ecuación de observación (2.45); concretamente, pretendemos obtener el filtro ( $j = k$ ), el suavizador punto fijo ( $j = L > k$ ,  $k$  fijo) y el suavizador intervalo fijo ( $k < j = T$ ,  $T$  fijo).

Nuevamente se utilizará una técnica basada en innovaciones para simplificar la obtención de los algoritmos; por este motivo, comenzamos determinando el proceso innovación.

Teniendo en cuenta las hipótesis de los procesos que intervienen en (2.45), se deduce que

$$\begin{aligned} E [y(k)y^T(s)] &= E [\{\gamma(k)z(k) + w(k)\}y^T(s)] \\ &= E [\gamma(k)\gamma(s)] E [z(k)z^T(s)] + E [w(k)w^T(s)] \\ &= P_{2,2}(k)p(s)E [z(k)z^T(s)] + E [w(k)w^T(s)] \\ &= E [\{P_{2,2}(k)z(k) + w(k)\}\{\gamma(s)z(s) + w(s)\}^T] \\ &= E [\{P_{2,2}(k)z(k) + w(k)\}y^T(s)], \quad s \leq k - 1. \end{aligned}$$

Si denotamos por  $\hat{w}(k, k - 1)$  al estimador lineal de mínimos cuadrados del ruido coloreado  $w(k)$  basado en las observaciones hasta el instante  $k - 1$ , y aplicamos el LPO, se tiene

$$E [y(k)y^T(s)] = E [\{P_{2,2}(k)\hat{z}(k, k - 1) + \hat{w}(k, k - 1)\}y^T(s)], \quad s \leq k - 1.$$

Así, puesto que  $E [y(k)y^T(s)] = E [\hat{y}(k, k - 1)y^T(s)]$ , para  $s \leq k - 1$ , se obtiene la siguiente expresión para el predictor en una etapa de la observación

$$\hat{y}(k, k - 1) = P_{2,2}(k)\hat{z}(k, k - 1) + \hat{w}(k, k - 1), \quad (2.46)$$

y, por tanto, el proceso innovación está dado por

$$\nu(k) = y(k) - P_{2,2}(k)\hat{z}(k, k - 1) - \hat{w}(k, k - 1), \quad k \geq 1. \quad (2.47)$$

## Algoritmos de estimación

En esta sección se presentan algoritmos para resolver los problemas de estimación de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo de la señal, a partir de observaciones dadas por la ecuación (2.45) verificando las hipótesis descritas.

Los algoritmos de filtrado y suavizamiento punto fijo fueron obtenidos por Nakamori et al. [31] partiendo de la expresión general del estimador de la señal como combinación lineal de las observaciones; sin embargo, en este caso, la deducción de los diversos algoritmos se realiza utilizando un tratamiento por innovaciones, es decir, partiendo de la expresión del estimador como función de las innovaciones, procedimiento que simplifica la obtención de los algoritmos de forma considerable.

### Teorema 2.5.1 (Algoritmo de filtrado)

El filtro de la señal  $z(k)$ ,  $\hat{z}(k, k)$ , está dado por

$$\hat{z}(k, k) = A(k)O(k), \quad k \geq 1, \quad (2.48)$$

donde los vectores  $M$ -dimensionales  $O(k)$  se calculan recursivamente como

$$O(k) = O(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O(0) = 0, \quad (2.49)$$

y la innovación,  $\nu(k)$ , satisface

$$\nu(k) = y(k) - P_{2,2}(k)A(k)O(k-1) - \alpha(k)\bar{O}(k-1), \quad \nu(0) = 0, \quad (2.50)$$

con  $\bar{O}(k)$  vector  $N$ -dimensional verificando

$$\bar{O}(k) = \bar{O}(k-1) + \bar{J}(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad \bar{O}(0) = 0, \quad (2.51)$$

y siendo  $J$  y  $\bar{J}$  la siguientes funciones matriciales

$$J(k) = p(k)B^T(k) - P_{2,2}(k)r(k-1)A^T(k) - c(k-1)\alpha^T(k), \quad J(0) = 0, \quad (2.52)$$

$$\bar{J}(k) = \beta^T(k) - P_{2,2}(k)c^T(k-1)A^T(k) - d(k-1)\alpha^T(k), \quad \bar{J}(0) = 0. \quad (2.53)$$

Las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$  y  $d(k)$  se calculan recursivamente como

$$r(k) = r(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)J^T(k), \quad r(0) = 0, \quad (2.54)$$

$$c(k) = c(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)\bar{J}^T(k), \quad c(0) = 0, \quad (2.55)$$

$$d(k) = d(k-1) + \bar{J}(k)\Pi^{-1}(k)\bar{J}^T(k), \quad d(0) = 0, \quad (2.56)$$

y la matriz de covarianzas de la innovación  $\nu(k)$ ,  $\Pi(k)$ , verifica

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k)A(k)B^T(k) + \alpha(k)\beta^T(k) + R(k) - P_{2,2}^2(k)A(k)r(k-1)A^T(k) \\ & - P_{2,2}(k)A(k)c(k-1)\alpha^T(k) - P_{2,2}(k)A(k)c^T(k-1)A^T(k) \\ & - \alpha(k)d(k-1)\alpha^T(k), \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\Pi(0) = 0.$$

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.1. ■

Para medir la precisión de los estimadores de filtrado calculamos la matriz de covarianzas de los correspondientes errores; tomando  $j = k$  en la expresión general (2.29), se obtiene

$$P(k, k) = K_z(k, k) - E[\hat{z}(k, k)\hat{z}^T(k, k)],$$

y teniendo en cuenta las hipótesis del modelo en  $K_z(k, k)$  y la relación (2.48) para el filtro, deducimos que

$$P(k, k) = A(k)[B^T(k) - r(k)A^T(k)], \quad k \geq 1. \quad (2.58)$$

**Teorema 2.5.2 (Algoritmo de suavizamiento punto fijo)**

Los estimadores  $\hat{z}(k, L)$ , para  $L > k$  con  $k$  fijo, pueden calcularse a partir de la siguiente relación recursiva

$$\hat{z}(k, L) = \hat{z}(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k, \quad (2.59)$$

cuya condición inicial está dada por el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , y

$$S(k, L) = p(L)B(k)A^T(L) - P_{2,2}(L)E(k, L - 1)A^T(L) - \bar{E}(k, L - 1)\alpha^T(L), \quad L > k, \quad (2.60)$$

donde las matrices  $E(k, L)$  y  $\bar{E}(k, L)$  satisfacen las siguientes fórmulas recursivas

$$E(k, L) = E(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)J^T(L), \quad (2.61)$$

$$\bar{E}(k, L) = \bar{E}(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\bar{J}^T(L), \quad (2.62)$$

cuyas condiciones iniciales son  $E(k, k) = A(k)r(k)$  y  $\bar{E}(k, k) = A(k)c(k)$ , respectivamente.

El filtro, las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$ ,  $J(k)$  y  $\bar{J}(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 2.5.1.

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.2. ■

La matriz de covarianzas de los errores de suavizamiento punto fijo verifica la siguiente relación recursiva, que se obtiene de (2.29) aplicando las hipótesis del modelo y la relación (2.59) para el suavizador punto fijo,

$$P(k, L) = P(k, L - 1) - S(k, L)\Pi^{-1}(L)S^T(k, L), \quad L > k,$$

donde la matriz de covarianzas del error de filtrado, dada en (2.58), proporciona la condición inicial.

**Teorema 2.5.3 (Algoritmo de suavizamiento intervalo fijo)**

Los estimadores  $\hat{z}(k, T)$ , para  $k < T$  con  $T$  fijo, de la señal  $z(k)$  están dados a partir de la siguiente fórmula

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \Psi(k)q(k, T), \quad k < T, \quad (2.63)$$

donde los vectores  $q(k, T)$  se calculan recursivamente hacia atrás a partir de la relación

$$q(k, T) = \Phi(k+1) \begin{pmatrix} \nu(k+1) \\ q(k+1, T) \end{pmatrix}, \quad k < T; \quad q(T, T) = 0, \quad (2.64)$$

siendo  $\Psi(k)$  y  $\Phi(k)$  las siguientes matrices

$$\Psi(k) = (B(k), -A(k)r(k), -A(k)c(k)), \quad (2.65)$$

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} G(k) & I_M & -G(k)J^T(k) & -G(k)\bar{J}^T(k) \\ H(k) & 0 & I_M - H(k)J^T(k) & -H(k)\bar{J}^T(k) \\ \alpha^T(k)\Pi^{-1}(k) & 0 & -\alpha^T(k)\Pi^{-1}(k)J^T(k) & I_N - \alpha^T(k)\Pi^{-1}(k)\bar{J}^T(k) \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

y donde

$$G(k) = p(k)A^T(k)\Pi^{-1}(k), \quad (2.67)$$

$$H(k) = P_{2,2}(k)A^T(k)\Pi^{-1}(k), \quad (2.68)$$

e  $I_b$  es la matriz identidad de orden  $b \times b$ .

El filtro  $\hat{z}(k, k)$ , las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$ ,  $J(k)$  y  $\bar{J}(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 2.5.1.

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.3. ■

A continuación, obtenemos un algoritmo para la matriz de covarianzas de los errores de suavizamiento intervalo fijo; si partimos de la expresión general (2.29),

teniendo en cuenta las hipótesis del modelo, la expresión (2.63) para el suavizador intervalo fijo y la propiedad de incorrelación entre el vector  $q(k, T)$  y el filtro  $\hat{z}(k, k)$ , se obtiene

$$P(k, T) = P(k, k) - \Psi(k)Q(k, T)\Psi^T(k), \quad k < T,$$

donde denotamos

$$Q(k, T) = E [q(k, T)q^T(k, T)], \quad k \leq T,$$

y siendo  $P(k, k)$  la matriz de covarianzas del error de filtrado, (2.58).

Para completar el algoritmo, hemos de obtener una expresión explícita para la matriz  $Q(k, T)$ ; la expresión (2.64) para el vector  $q(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre  $q(k+1, T)$  y  $\nu(k+1)$  conducen a la siguiente expresión recursiva hacia atrás para  $Q(k, T)$

$$Q(k, T) = \Phi(k+1) \begin{pmatrix} \Pi(k+1) & 0 \\ 0 & Q(k+1, T) \end{pmatrix} \Phi^T(k+1), \quad k < T,$$

donde la condición inicial está dada por  $Q(T, T) = 0$ .

### 2.5.2. Señal y ruido blanco correlados

En esta sección nos planteamos, nuevamente, obtener algoritmos para los problemas de estimación lineal de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo de señales discretas a partir de observaciones inciertas modelizadas por variables indicadoras. En todas las situaciones consideradas hasta este momento se ha supuesto que la señal que se desea estimar y el ruido blanco aditivo que interviene en la ecuación de observación son independientes. En este caso, nos proponemos debilitar esta hipótesis considerando que ambos están correlados; así, si los procesos  $\{z(k); k \geq 1\}$  y  $\{v(k); k \geq 1\}$  representan la señal y el ruido

blanco respectivamente, en esta sección se supone que la matriz de covarianzas  $E[z(k)v^T(s)]$  coincide con la matriz cero sólo cuando  $k < s$ , por lo que la señal en un instante  $k$ ,  $z(k)$ , está correlada con el ruido aditivo  $v(s)$ , para cualquier instante  $s$  anterior o igual a  $k$ . En esta ocasión, supondremos que las variables aleatorias que modelizan la incertidumbre en las observaciones son independientes. Así, bajo estas hipótesis, y considerando que únicamente se conocen las funciones de covarianzas de los procesos que intervienen en la ecuación de observación y la probabilidad de que la señal intervenga en la observación de la misma, se deducen los diversos algoritmos y se proponen fórmulas para las matrices de covarianzas de los errores de estimación en cada caso.

## Planteamiento del problema

Se supone que la ecuación de observación de la señal está dada de la siguiente forma

$$y(k) = \gamma(k)z(k) + v(k), \quad k \geq 1, \quad (2.69)$$

donde  $z(k)$  e  $y(k)$  son vectores  $n$ -dimensionales que representan, respectivamente, la señal que se desea estimar y la observación de la misma.

Para tratar el problema de estimación de la señal a partir de las observaciones dadas por la ecuación (2.69), se suponen las siguientes hipótesis:

- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 1\}$  tiene media cero y su función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 1 \leq k \leq s, \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

- El proceso aditivo  $\{v(k); k \geq 1\}$  es un ruido blanco centrado con función de covarianzas conocida,  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k - s)$ .
- El ruido multiplicativo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ , que describe la incertidumbre en las observaciones, es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes con probabilidades  $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$  conocidas; por tanto,  $1 - p(k)$  representa la probabilidad de que la observación en el instante  $k$  contenga solo ruido, esto es, la *probabilidad de falsa alarma*.
- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 1\}$  y el ruido aditivo  $\{v(k); k \geq 1\}$  están correlados y

$$K_{zv}(k, s) = E[z(k)v^T(s)] = \begin{cases} C(k)D^T(s), & 1 \leq s \leq k, \\ 0, & 1 \leq k < s, \end{cases}$$

donde  $C$  y  $D$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times N$ .

- Para finalizar, el proceso  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  es independiente de  $(\{z(k); k \geq 1\}, \{v(k); k \geq 1\})$ .

Nuevamente, el objetivo que nos planteamos en esta sección consiste en el estudio del problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones  $\{y(1), \dots, y(j)\}$  especificadas por la ecuación de observación (2.69). Como en los casos anteriores, los estimadores se expresarán como función lineal de las innovaciones, con la finalidad de simplificar el tratamiento del problema y la deducción de los algoritmos.

Así, para determinar los estimadores es necesario encontrar una expresión explícita para la innovación,  $\nu(k) = y(k) - \hat{y}(k, k - 1)$ . Al igual que en ocasiones anteriores, comenzamos obteniendo una expresión para el predictor en una etapa

de la observación,  $\hat{y}(k, k-1)$ , en función del predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ .

Aplicando el LPO, se obtiene

$$E [y(k)y^T(s)] = E [\hat{y}(k, k-1)y^T(s)], \quad s \leq k-1;$$

teniendo en cuenta las hipótesis de independencia del modelo, según las cuales se verifica que  $E [v(k)y^T(s)] = 0$ , para  $s < k$ , y aplicando nuevamente el LPO, se deduce

$$E [y(k)y^T(s)] = E [\gamma(k)z(k)y^T(s)] = p(k)E [\hat{z}(k, k-1)y^T(s)], \quad s \leq k-1.$$

Finalmente, uniendo las dos expresiones anteriores es inmediato comprobar que

$$\hat{y}(k, k-1) = p(k)\hat{z}(k, k-1), \quad (2.70)$$

y, por tanto, la innovación está dada por

$$\nu(k) = y(k) - p(k)\hat{z}(k, k-1), \quad k \geq 1. \quad (2.71)$$

## Algoritmos de estimación

En esta sección se presentan algoritmos para los problemas de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo, a partir de observaciones dadas por la ecuación (2.69) verificando las hipótesis especificadas.

### Teorema 2.5.4 (Algoritmo de filtrado)

*Los estimadores de filtrado de la señal  $z(k)$  verifican la siguiente relación*

$$\hat{z}(k, k) = A(k)O_1(k) + C(k)O_2(k), \quad k \geq 1, \quad (2.72)$$

donde los vectores  $O_1(k)$  y  $O_2(k)$  se calculan recursivamente a partir de

$$O_1(k) = O_1(k-1) + J_1(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O_1(0) = 0, \quad (2.73)$$

$$O_2(k) = O_2(k-1) + J_2(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O_2(0) = 0, \quad (2.74)$$

siendo  $\nu(k)$  la innovación, que satisface

$$\nu(k) = y(k) - p(k) [A(k)O_1(k-1) + C(k)O_2(k-1)], \quad (2.75)$$

y

$$J_1(k) = p(k) [B^T(k) - r_1(k-1)A^T(k) - r_{12}(k-1)C^T(k)], \quad (2.76)$$

$$J_2(k) = D^T(k) - p(k) [r_{12}^T(k-1)A^T(k) + r_2(k-1)C^T(k)]. \quad (2.77)$$

Las funciones matriciales  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_{12}$  verifican las siguientes relaciones recursivas

$$r_1(k) = r_1(k-1) + J_1(k)\Pi^{-1}(k)J_1^T(k), \quad r_1(0) = 0, \quad (2.78)$$

$$r_2(k) = r_2(k-1) + J_2(k)\Pi^{-1}(k)J_2^T(k), \quad r_2(0) = 0, \quad (2.79)$$

$$r_{12}(k) = r_{12}(k-1) + J_1(k)\Pi^{-1}(k)J_2^T(k), \quad r_{12}(0) = 0. \quad (2.80)$$

La matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k)$ , está dada por

$$\Pi(k) = R(k) + p(k) [D(k)C^T(k) + C(k)J_2(k)] + p(k)A(k) [(1-p(k))B^T(k) + J_1(k)]. \quad (2.81)$$

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.4. ■

La matriz de covarianzas de los errores de filtrado, que mide la precisión de los correspondiente estimadores, verifica la siguiente fórmula, obtenida a partir de la expresión general (2.29) y teniendo en cuenta las hipótesis del modelo y la relación (2.72) para el filtro,

$$P(k, k) = A(k) [B^T(k) - r_1(k)A^T(k) - r_{12}(k)C^T(k)] - C(k) [r_{12}^T(k)A^T(k) + r_2(k)C^T(k)], \quad k \geq 1. \quad (2.82)$$

**Teorema 2.5.5 (Algoritmo de suavizamiento punto fijo)**

Los estimadores  $\widehat{z}(k, L)$ , para  $L > k$  con  $k$  fijo, verifican la siguiente relación recursiva

$$\widehat{z}(k, L) = \widehat{z}(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k, \quad (2.83)$$

cuya condición inicial está dada por el filtro,  $\widehat{z}(k, k)$ , obtenido en el Teorema 2.5.4, y donde

$$S(k, L) = p(L) [B(k)A^T(L) - E_1(k, L - 1)A^T(L) - E_2(k, L - 1)C^T(L)]; \quad (2.84)$$

las matrices  $E_1(k, L)$  y  $E_2(k, L)$  satisfacen las siguientes fórmulas

$$E_1(k, L) = E_1(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)J_1^T(L), \quad (2.85)$$

$$E_2(k, L) = E_2(k, L - 1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)J_2^T(L), \quad (2.86)$$

siendo  $E_1(k, k) = A(k)r_1(k) + C(k)r_{12}^T(k)$  y  $E_2(k, k) = A(k)r_{12}(k) + C(k)r_2^T(k)$  las correspondientes condiciones iniciales.

Las matrices  $r_1(k)$ ,  $r_2(k)$ ,  $r_{12}(k)$ ,  $J_1(k)$  y  $J_2(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 2.5.4.

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.5. ■

La siguiente relación recursiva para la matriz de covarianzas de los errores de suavizamiento punto fijo se obtiene de (2.29), sin más que aplicar las hipótesis del modelo y la relación (2.83) para el suavizador punto fijo,

$$P(k, L) = P(k, L - 1) - S(k, L)\Pi^{-1}(L)S^T(k, L), \quad L > k,$$

donde la condición inicial está dada por la matriz de covarianzas del error de filtrado,  $P(k, k)$ , dada en (2.82).

**Teorema 2.5.6 (Algoritmo de suavizamiento intervalo fijo)**

Los estimadores  $\hat{z}(k, T)$ , para  $k < T$  con  $T$  fijo, de la señal  $z(k)$  pueden obtenerse a partir de la siguiente relación

$$\begin{aligned} \hat{z}(k, T) = & \hat{z}(k, k) + [B(k) - A(k)r_1(k) - C(k)r_{12}^T(k)] q_1(k, T) \\ & - [A(k)r_{12}(k) + C(k)r_2(k)] q_2(k, T), \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , está dado en el Teorema 2.5.4 y los vectores  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$  verifican las siguientes fórmulas recursivas hacia atrás

$$\begin{aligned} q_1(k, T) = & [I_M - H_1(k+1)J_1^T(k+1)] q_1(k+1, T) - H_1(k+1) \\ & \times J_2^T(k+1)q_2(k+1, T) + H_1(k+1)\nu(k+1), \quad q_1(T, T) = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} q_2(k, T) = & [I_N - H_2(k+1)J_2^T(k+1)] q_2(k+1, T) - H_2(k+1) \\ & \times J_1^T(k+1)q_1(k+1, T) + H_2(k+1)\nu(k+1), \quad q_2(T, T) = 0, \end{aligned} \quad (2.89)$$

siendo

$$H_1(k) = p(k)A^T(k)\Pi^{-1}(k),$$

$$H_2(k) = p(k)C^T(k)\Pi^{-1}(k),$$

e  $I_b$  la matriz identidad de dimensión  $b \times b$ .

Las matrices  $J_1(k)$  y  $J_2(k)$ , la innovación  $\nu(k)$  y las matrices de covarianzas  $r_1(k)$ ,  $r_2(k)$ ,  $r_{12}(k)$  y  $\Pi(k)$  están dadas en el Teorema 2.5.4.

**Demostración.** Postpuesta al Apéndice A.6. ■

Para finalizar, determinamos la precisión del suavizador intervalo fijo calculando la matriz de covarianzas de los correspondientes errores de estimación; tomando  $j = T$  en la expresión general (2.29), se obtiene

$$P(k, T) = K_z(k, k) - E [\hat{z}(k, T)\hat{z}^T(k, T)],$$

y teniendo en cuenta la relación (2.87) para  $\widehat{z}(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_i(k, T)$ ,  $i = 1, 2$ , y el filtro,  $\widehat{z}(k, k)$ , deducimos que

$$P(k, T) = P(k, k) - R_1(k)Q_1(k, T)R_1^T(k) + R_1(k)Q_{12}(k, T)R_2^T(k) \\ + R_2(k)Q_{12}^T(k, T)R_1^T(k) - R_2(k)Q_2(k, T)R_2^T(k), \quad k < T,$$

donde  $P(k, k)$  es la matriz de covarianzas de los errores de filtrado, (2.82), y

$$Q_i(k, T) = E [q_i(k, T)q_i^T(k, T)] \quad (i = 1, 2), \quad Q_{12}(k, T) = E [q_1(k, T)q_2^T(k, T)], \\ R_1(k) = B(k) - A(k)r_1(k) - C(k)r_{12}^T(k), \quad R_2(k) = A(k)r_{12}(k) + C(k)r_2(k).$$

Finalmente, usando las relaciones recursivas (2.88) y (2.89) para  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_i(k + 1, T)$ ,  $i = 1, 2$  y la innovación  $\nu(k + 1)$ , se obtienen las siguientes expresiones para  $Q_1(k, T)$ ,  $Q_2(k, T)$  y  $Q_{12}(k, T)$

$$Q_1(k, T) = [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)] Q_1(k + 1, T) [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)]^T \\ - [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)] Q_{12}(k + 1, T)J_2(k + 1)H_1^T(k + 1) \\ - H_1(k + 1)J_2^T(k + 1)Q_{12}^T(k + 1, T) [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)]^T \\ + H_1(k + 1)J_2^T(k + 1)Q_2(k + 1, T)J_2(k + 1)H_1^T(k + 1) \\ + H_1(k + 1)\Pi(k + 1)H_1^T(k + 1),$$

$$Q_2(k, T) = [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)] Q_2(k + 1, T) [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)]^T \\ - [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)] Q_{12}^T(k + 1, T)J_1(k + 1)H_2^T(k + 1) \\ - H_2(k + 1)J_1^T(k + 1)Q_{12}(k + 1, T) [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)]^T \\ + H_2(k + 1)J_1^T(k + 1)Q_1(k + 1, T)J_1(k + 1)H_2^T(k + 1) \\ + H_2(k + 1)\Pi(k + 1)H_2^T(k + 1),$$

$$Q_{12}(k, T) = [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)] Q_{12}(k + 1, T) [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)]^T \\ - [I_M - H_1(k + 1)J_1^T(k + 1)] Q_1(k + 1, T)J_1(k + 1)H_2^T(k + 1) \\ - H_1(k + 1)J_2^T(k + 1)Q_2(k + 1, T) [I_N - H_2(k + 1)J_2^T(k + 1)]^T \\ + H_1(k + 1)J_2^T(k + 1)Q_{12}^T(k + 1, T)J_1(k + 1)H_2^T(k + 1) \\ + H_1(k + 1)\Pi(k + 1)H_2^T(k + 1),$$

donde las condiciones iniciales están dadas por  $Q_1(T, T) = 0$ ,  $Q_2(T, T) = 0$  y  $Q_{12}(T, T) = 0$ , respectivamente.

## 2.6. Ejemplo numérico

En esta sección se presenta un ejemplo de simulación numérica para ilustrar la aplicación de los algoritmos de filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo propuestos en los Teoremas 2.4.1 y 2.4.2. Para mostrar la efectividad de estos algoritmos, se ha realizado un programa en *MatLab* que, en cada iteración, simula la señal que se desea estimar y proporciona las correspondientes estimaciones, así como las matrices de covarianzas de los errores de estimación.

En este caso, el problema que se plantea consiste en reconstruir, usando los algoritmos propuestos, una señal desconocida transmitida a través de cierto mecanismo emisor usando las observaciones que recibe un mecanismo receptor, permitiéndose el caso en que, en ciertos instantes de tiempo, la observación que llega al receptor contenga únicamente ruido.

La señal que se desea estimar,  $\{z(k); k \geq 1\}$ , se supone escalar y con función de covarianzas conocida, dada por la siguiente expresión

$$K_z(k, s) = 1.025641 \times 0.95^{k-s}, \quad 0 \leq s \leq k,$$

la cual tiene forma de núcleo semidegenerado, según se indica en la Sección 2.2.2, con  $A(k) = 1.025641 \times 0.95^k$  y  $B(k) = 0.95^{-k}$ .

Es inmediato comprobar (véase, por ejemplo, Box y Jenkins [2]) que la señal con la anterior función de covarianzas está generada por un modelo autorregresivo de

primer orden, concretamente

$$z(k+1) = 0.95z(k) + u(k), \quad E\{u(k)u(s)\} = 0.1\delta_K(k-s).$$

Como en Hadidi y Schwartz [12], consideramos que la señal puede transmitirse a través de uno de dos posibles canales, el segundo de los cuales está sometido a atenuaciones aleatorias y, por tanto, existen ciertos instantes de tiempo en los que las observaciones que llegan al receptor, transmitidas por este canal, contienen únicamente ruido (por tanto, este segundo canal se modelizará matemáticamente mediante un sistema con observaciones inciertas). En definitiva, estos canales se caracterizan, respectivamente, por las siguientes ecuaciones

$$\text{Canal I: } y(k) = z(k) + v(k),$$

$$\text{Canal II: } y(k) = \beta(k)z(k) + v(k),$$

donde  $\{v(k); k \geq 1\}$  es un ruido blanco Gaussiano con media cero y  $Var[v(k)] = 0.5$ , para todo  $k$ , y  $\{\beta(k); k \geq 1\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con  $P[\beta(k) = 1] = \bar{p}$ , para todo  $k$ .

Se supone que el Canal II puede ser elegido aleatoriamente con probabilidad  $q$  y, por tanto, definiendo  $\gamma(k) = (1 - \alpha) + \alpha\beta(k)$ , donde  $\alpha$  es una variable aleatoria de Bernoulli con  $P[\alpha = 1] = q$ , las observaciones de la señal están dadas por la siguiente ecuación

$$y(k) = \gamma(k)z(k) + v(k). \quad (2.90)$$

Es evidente que  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con  $P[\gamma(k) = 1] = P = \bar{p}q + (1 - q)$ , para todo  $k$ , y con la siguiente matriz de transición

$$P(k/j) = \begin{pmatrix} 1 - \bar{p} & \bar{p} \\ \frac{\bar{p}q(1 - \bar{p})}{1 - q(1 - \bar{p})} & \frac{1 - q(1 - \bar{p}^2)}{1 - q(1 - \bar{p})} \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

cuyo elemento en posición  $(2, 2)$ ,  $P_{2,2}(k/j) = P_{2,2} = \frac{1 - q(1 - \bar{p}^2)}{1 - q(1 - \bar{p})}$ , es claramente independiente de  $j$  (y también de  $k$ ), para  $j < k$ , tal y como se supone en el estudio teórico.

Para finalizar, suponemos que la señal,  $\{z(k); k \geq 1\}$ , y los ruidos,  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  y  $\{v(k); k \geq 1\}$ , son mutuamente independientes.

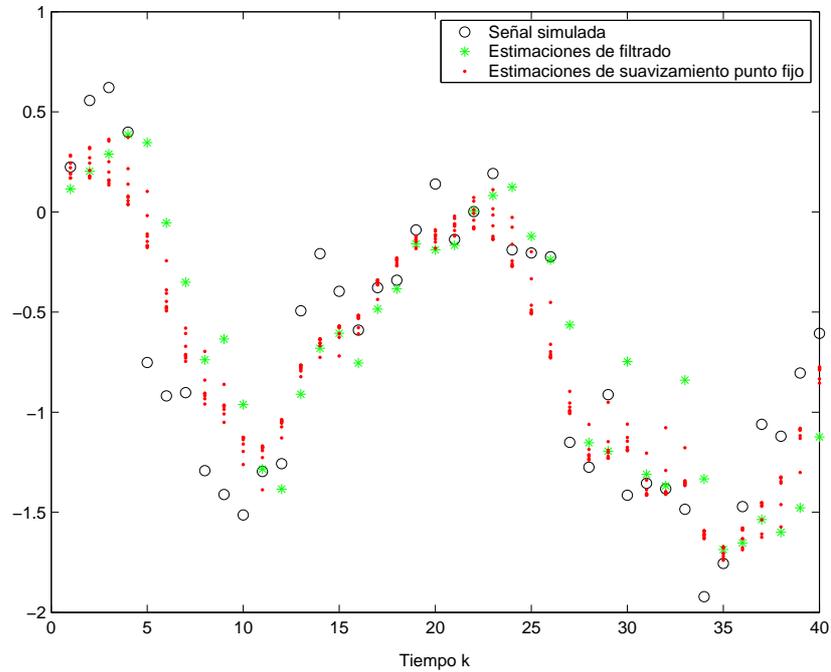
Notemos que si  $q = 1$ , se verifica que  $\alpha = 1$  y, por tanto, los ruidos  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  y  $\{\beta(k); k \geq 1\}$  coinciden; en este caso, la señal se transmite únicamente a través del Canal II y  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes con  $P = \bar{p}$ , para todo  $k$ ; esta situación es la que se considera en Nakamori et al. [32]. Por otro lado, si  $q = 0$ , entonces  $\alpha = 0$  y  $\gamma(k) = 1$  para todo  $k$ ; en este caso la señal se transmite únicamente a través del Canal I y  $P = 1$ , para todo  $k$ , es decir, no existe incertidumbre en las observaciones; esta situación es la considerada en el Capítulo 1.

A continuación se realiza un estudio comparativo entre la señal, el filtro y el suavizador punto fijo, en primer lugar, y entre señal, filtro y suavizador intervalo fijo, en segundo lugar, a partir de los algoritmos propuestos en los Teoremas 2.4.1 y 2.4.2. Se considera un único valor para la probabilidad marginal  $P$  y varios valores para la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , asociados a distintos valores de los parámetros  $\bar{p}$  y  $q$  y que conducen a diferentes situaciones para la sucesión  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$ . Concretamente, se considerarán los valores  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$ ; puede comprobarse que los valores  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$  están asociados a los parámetros  $\bar{p} = 0.72$  y  $q = 1$  (situación en que la incertidumbre en las observaciones se modeliza por variables aleatorias de Bernoulli independientes); análogamente,  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.7926$  se corresponden con  $\bar{p} = 0.53331$  y  $q = 0.59997$  y  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.88333$ , con  $\bar{p} = 0.3$  y  $q = 0.4$ .

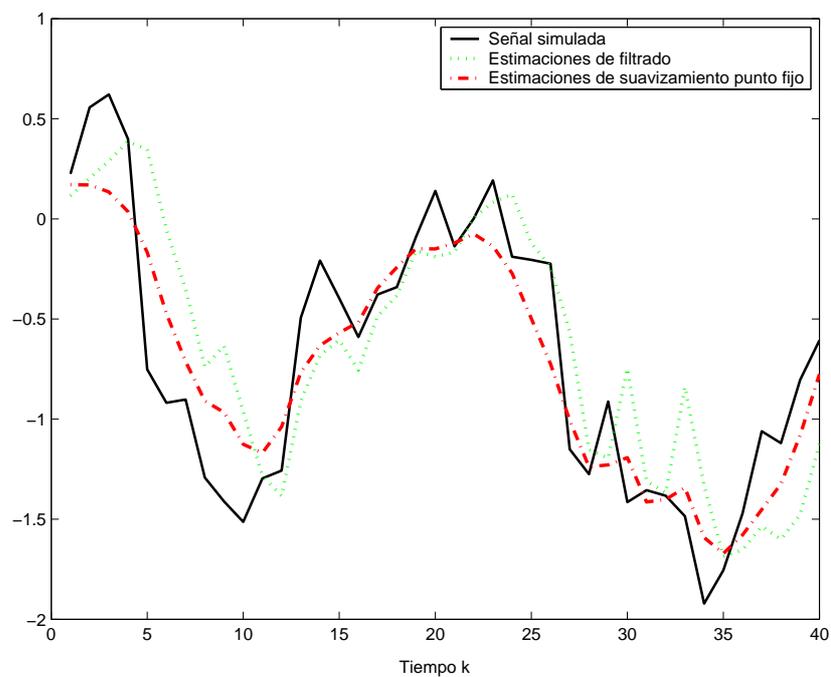
### 2.6.1. Señal, filtro y suavizador punto fijo

Supongamos que estamos interesados en estimar la señal en un instante fijo  $k$ . Si disponemos de observaciones hasta dicho instante, podemos calcular la estimación de filtrado  $\hat{z}(k, k)$ . A medida que van siendo conocidas nuevas observaciones, dicha estimación puede ser mejorada mediante las correspondientes estimaciones de suavizamiento punto fijo,  $\hat{z}(k, k+1)$ ,  $\hat{z}(k, k+2)$ ,... En nuestro caso, hemos calculado, para cada punto  $k = 1, \dots, 40$  la estimación de filtrado  $\hat{z}(k, k)$  y las estimaciones de suavizamiento punto fijo  $\hat{z}(k, k+j)$ , para  $j = 1, \dots, 8$ , y considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2.6.1, que pone de manifiesto una mayor proximidad a la señal de las estimaciones de suavizamiento que las de filtrado.

En la Figura 2.6.2 se representan, en forma continua, la señal simulada  $z(k)$ , la estimación de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y la estimación de suavizamiento punto fijo en el caso en que se dispone de 8 nuevas observaciones de la señal, es decir,  $\hat{z}(k, k+8)$ , para los mismos valores de  $P$  y  $P_{2,2}$  de la figura anterior. Esta figura pone de manifiesto, más claramente que la Figura 2.6.1, que la estimación de suavizamiento punto fijo sigue la evolución de la señal mejor que la estimación de filtrado.

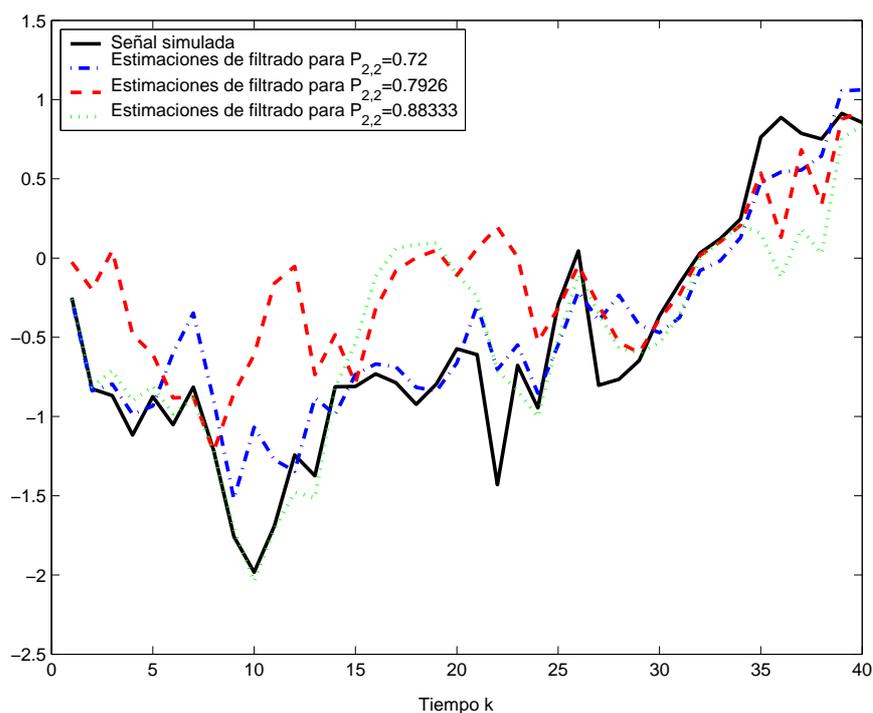


**Figura 2.6.1.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento punto fijo,  $\hat{z}(k, k + j)$  para  $j = 1, \dots, 8$ , considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$

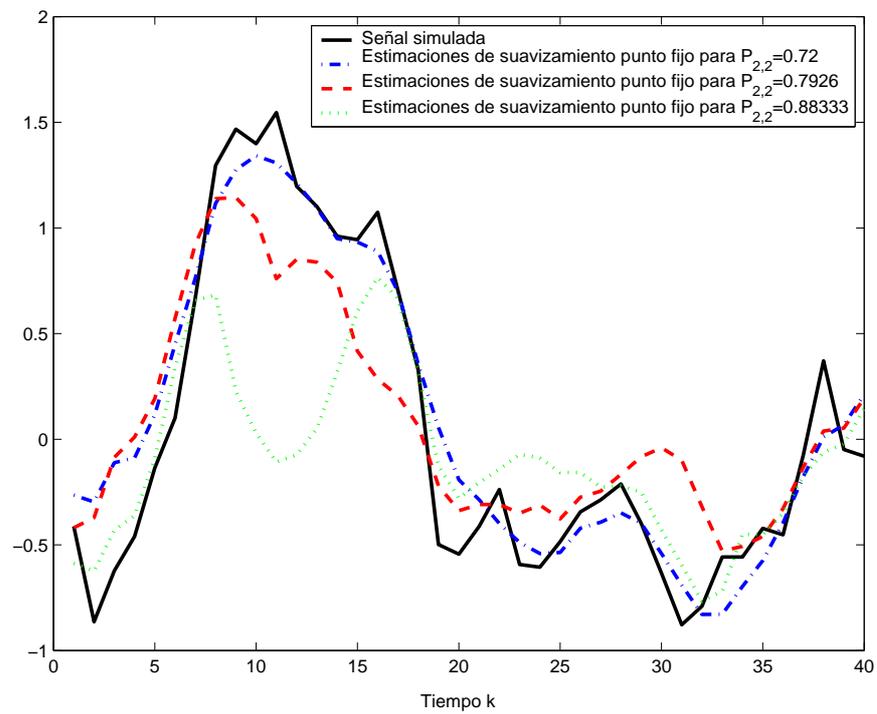


**Figura 2.6.2.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento punto fijo  $\hat{z}(k, k + 8)$ , considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$

A continuación, la Figura 2.6.3 representa las diferentes estimaciones de filtrado de una señal simulada que se obtienen al suponer el valor  $P = 0.72$  y distintos valores para la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , concretamente,  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$ . La Figura 2.6.3 pone de manifiesto que la estimación de la señal es mejor a medida que la probabilidad  $P_{2,2}$  disminuye. Esta misma conclusión se deduce de la Figura 2.6.4, donde se presentan las distintas estimaciones de suavizado punto fijo para una nueva simulación de la señal, considerándose los mismos valores para  $P$  y  $P_{2,2}$  descritos antes.

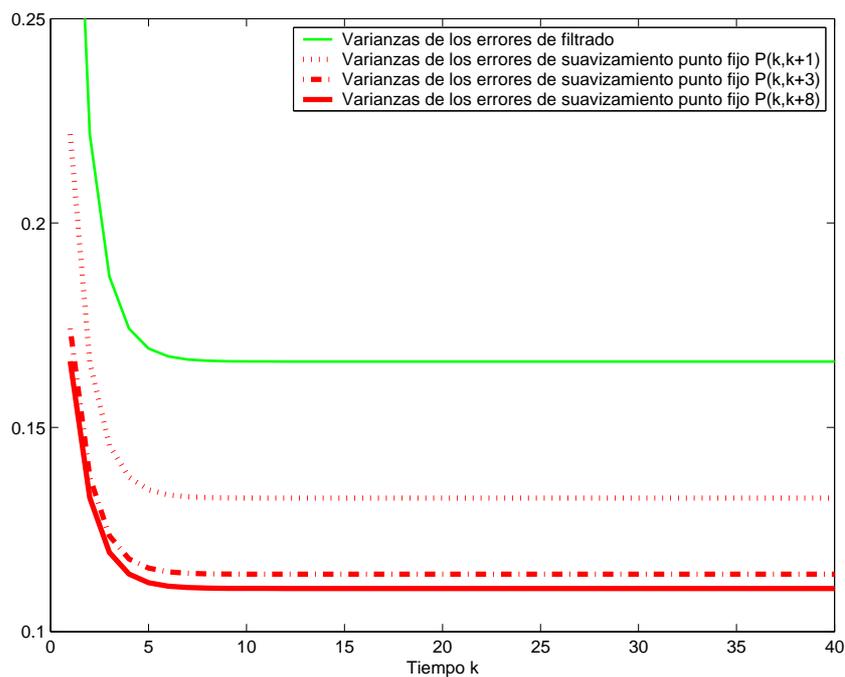


**Figura 2.6.3.** Señal simulada y estimaciones de filtrado, considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$



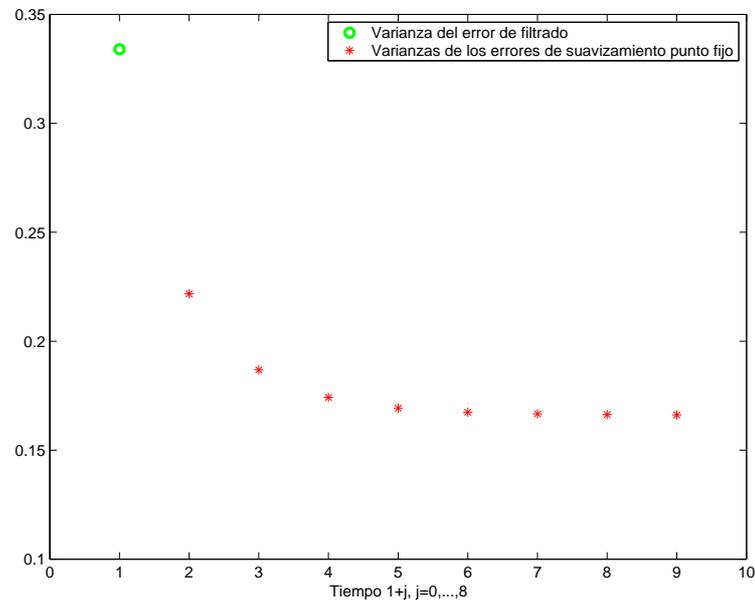
**Figura 2.6.4.** Señal simulada y estimaciones de suavizado punto fijo  $\hat{z}(k, k+8)$ , considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$

Las conclusiones extraídas de las gráficas anteriores se confirman mediante el cómputo de las varianzas de los errores de estimación, que no dependen de las simulaciones concretas de la señal. La Figura 2.6.5 representa las varianzas de los errores de filtrado y las varianzas de los errores de suavizamiento punto fijo para tres valores de  $j$ , concretamente,  $j = 1, 3, 8$ , esto es,  $P(k, k)$ ,  $P(k, k + 1)$ ,  $P(k, k + 3)$  y  $P(k, k + 8)$ , considerando  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$ . Esta figura indica, por un lado, que las varianzas correspondientes a las estimaciones de suavizamiento son menores que las de filtrado y, por otro lado, que las varianzas de los errores de suavizamiento punto fijo son menores a medida que el valor  $j$  aumenta, es decir, a medida que hay más observaciones disponibles para estimar la señal en cierto instante fijo  $k$ .

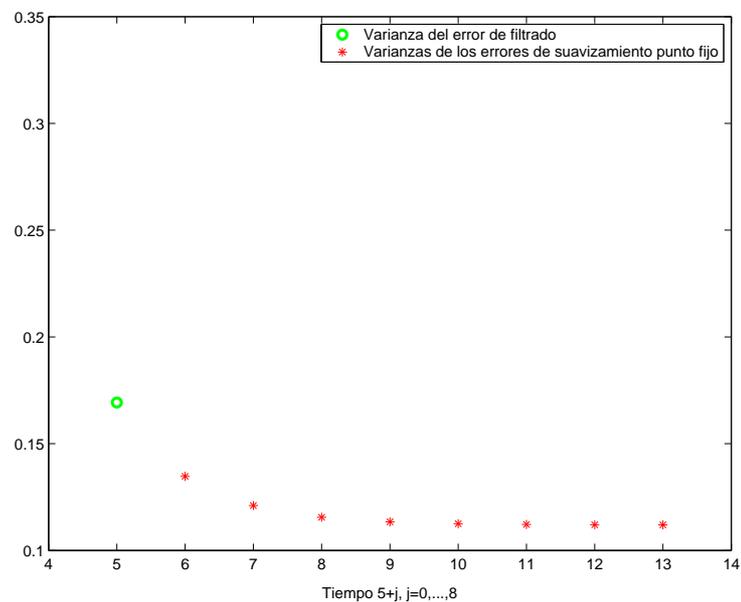


**Figura 2.6.5.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo para  $j = 1, 3, 8$ , es decir,  $P(k, k + 1)$ ,  $P(k, k + 3)$  y  $P(k, k + 8)$

Las dos figuras siguientes, Figuras 2.6.6 y 2.6.7, ponen de manifiesto, en dos instantes fijos  $k$ , la disminución concreta de la varianza del error de suavizado punto fijo  $P(k, k + j)$  a medida que el valor  $j$  aumenta, es decir, a medida que el número de observaciones disponibles para estimar el estado de la señal en un instante  $k$  aumenta. Concretamente, se han considerado dos instantes fijos  $k = 1$  y  $k = 5$  y, en ambos casos, los valores  $j = 0, 1, \dots, 8$  -notemos que el valor  $j = 0$  corresponde a la varianza del error de filtrado-, con  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$ . Estas figuras muestran una clara disminución de la varianza del error de estimación de la señal en el instante  $k$  -y, por tanto, una evidente mejora de la precisión del estimador- cuando se dispone, al menos, de 3 observaciones más.

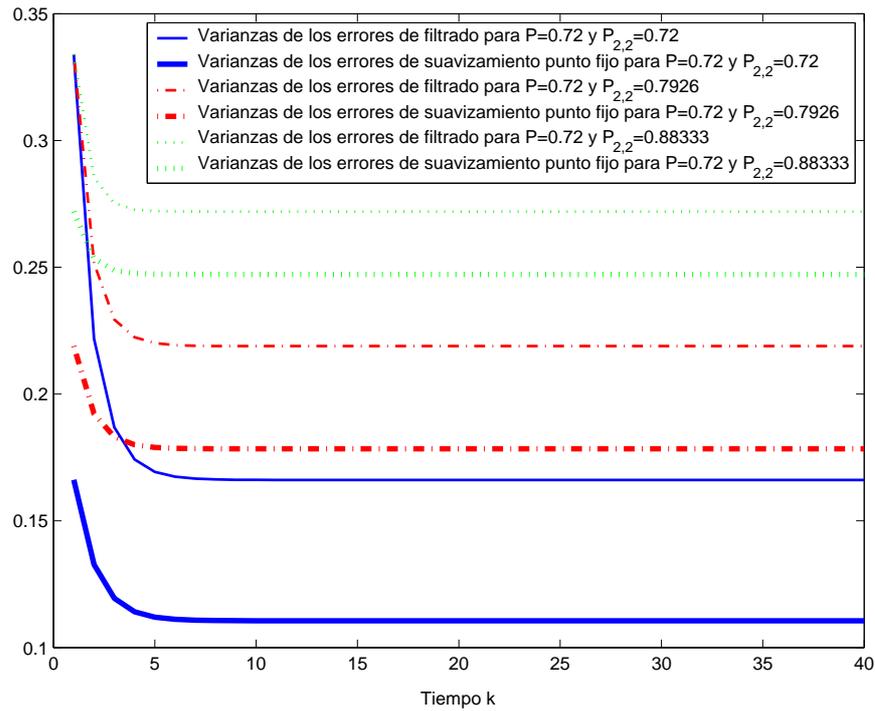


**Figura 2.6.6.** Varianzas de los errores de filtrado y de suavizamiento punto fijo para  $k = 1$  y  $j \leq 8$



**Figura 2.6.7.** Varianzas de los errores de filtrado y de suavizamiento punto fijo para  $k = 5$  y  $j \leq 8$

Finalmente, la Figura 2.6.8 presenta las varianzas de los errores de filtrado y de suavizamiento punto fijo para  $P = 0.72$  y los distintos valores de la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$  considerados anteriormente, concretamente,  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$ . A partir de esta figura puede concluirse, por una parte, que, para cada valor de la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , la varianza correspondiente a la estimación de suavizamiento es menor que la de filtrado y, por otra parte, que ambas varianzas del error de estimación son menores a medida que la probabilidad  $P_{2,2}$  disminuye.

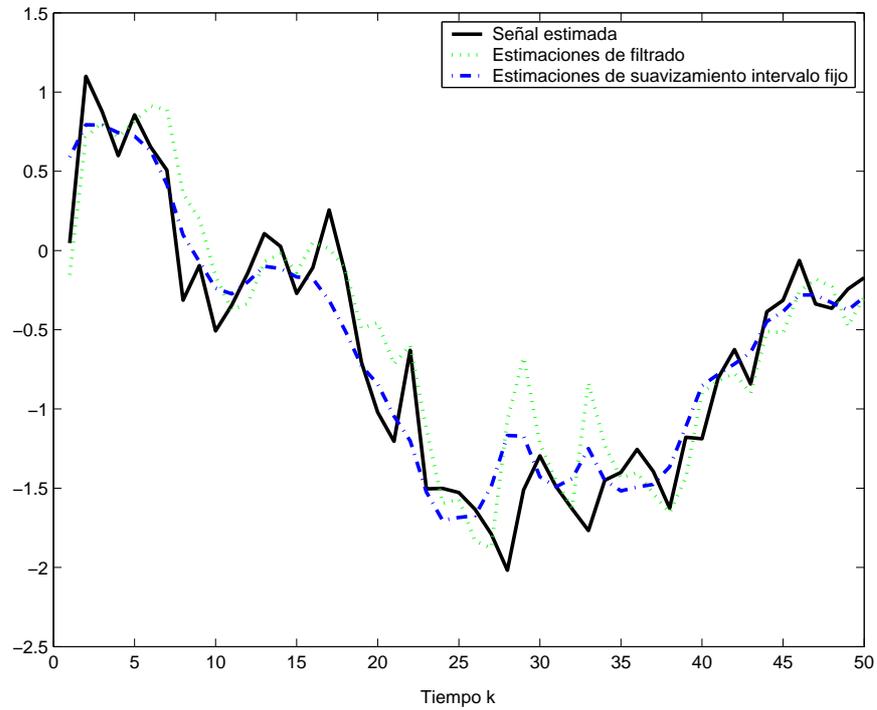


**Figura 2.6.8.** Varianzas de los errores de filtrado y de suavizamiento punto fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$

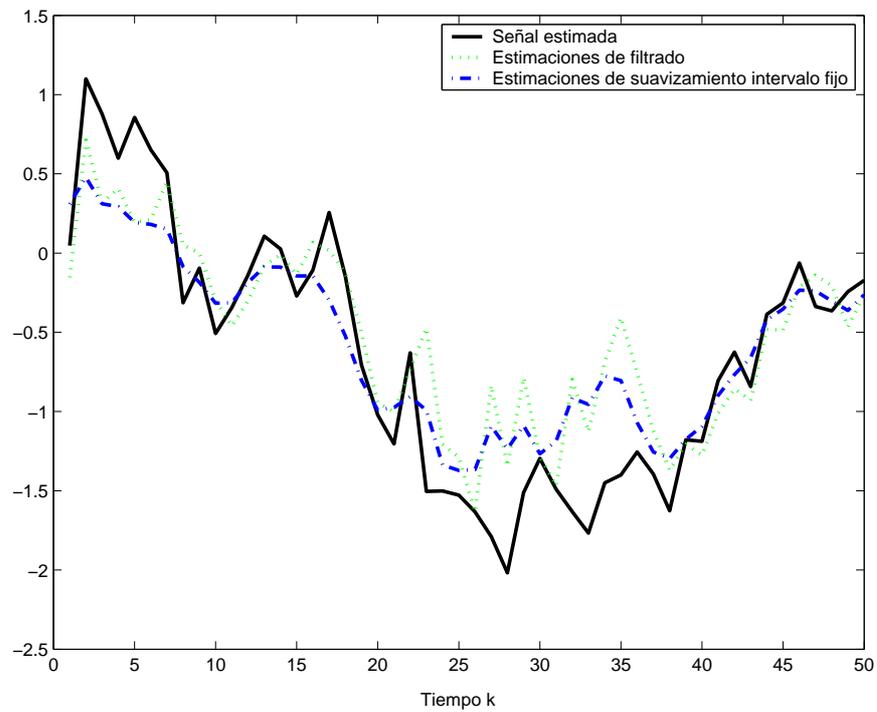
### 2.6.2. Señal, filtro y suavizador intervalo fijo

Supongamos que se dispone de observaciones de la señal hasta un instante fijo  $T$ ,  $\{y(1), \dots, y(T)\}$ , que permiten el cálculo de las estimaciones de filtrado  $\hat{z}(k, k)$  para  $k \leq T$  y de las estimaciones de suavizamiento intervalo fijo  $\hat{z}(k, T)$  para  $k < T$ . Concretamente, las Figuras 2.6.9 - 2.6.11 muestran simultáneamente la señal simulada y las estimaciones de filtrado y suavizamiento intervalo fijo, suponiendo que se dispone de  $T = 50$  observaciones y considerando un único valor para la probabilidad marginal,  $P = 0,72$ , y tres valores diferentes para la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , concretamente,  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.8833$ . Estas figuras muestran, por una parte, que la estimación de suavizamiento intervalo fijo sigue la evolución de la señal mejor que la estimación de filtrado y, por otra parte, que ambas estimaciones mejoran a medida que disminuye la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ .

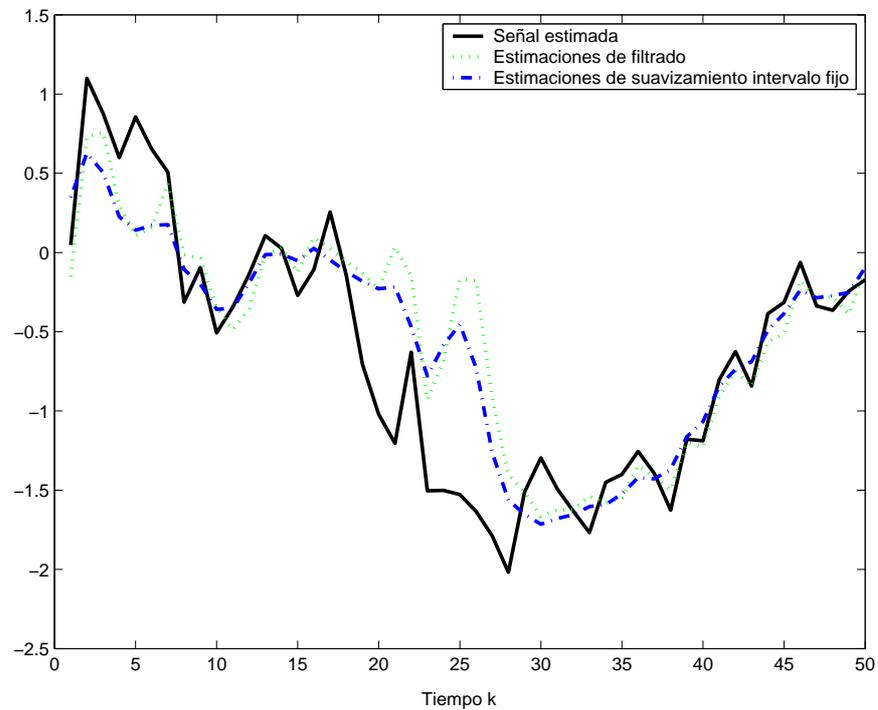
Para observar de una manera más precisa, en una sola figura, la forma en que la estimación de suavizamiento intervalo fijo es mejor cuanto menor es la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , la Figura 2.6.12 muestra las distintas estimaciones de suavizamiento intervalo fijo de una señal simulada para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.8833$ . Se observa que, en efecto, la estimación correspondiente al valor  $P_{2,2} = 0.72$  es la que más se ajusta a la evolución de la señal.



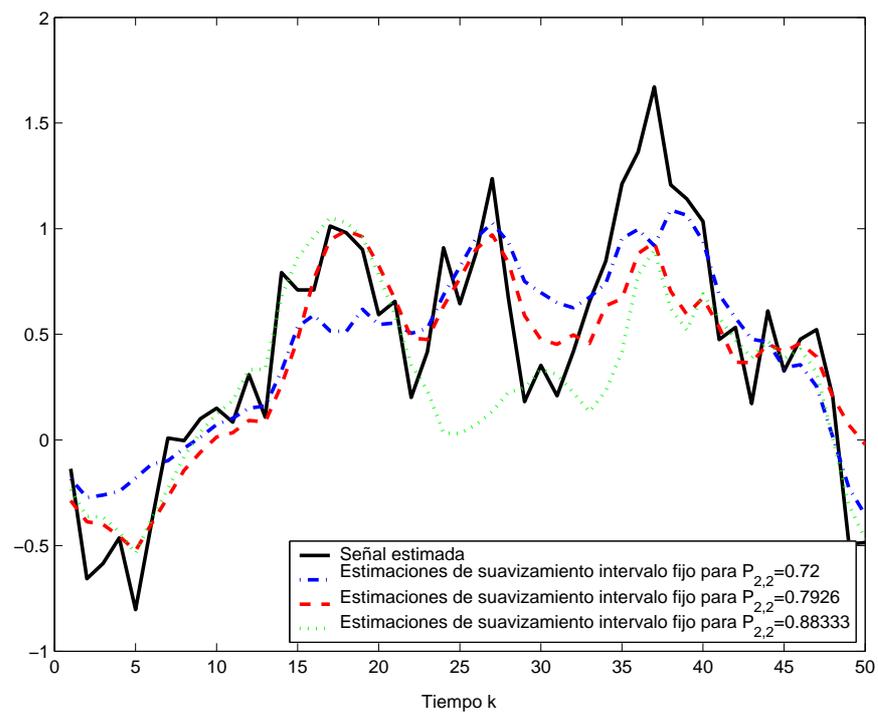
**Figura 2.6.9.** Señal simulada y estimaciones de filtrado y suavizado intervalo fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72$



**Figura 2.6.10.** Señal simulada y estimaciones de filtrado y suavizado intervalo fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.7926$

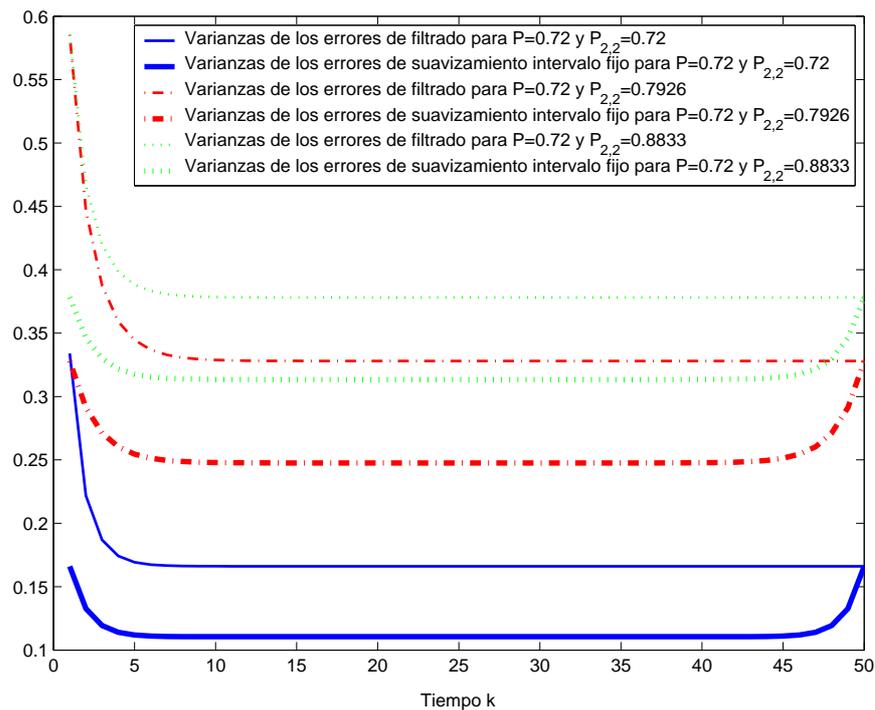


**Figura 2.6.11.** Señal simulada y estimaciones de filtrado y suavizamiento intervalo fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.88333$



**Figura 2.6.12.** Señal simulada y estimaciones de suavizamiento intervalo fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$

Con la finalidad de medir la precisión de los estimadores, se han calculado las varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento intervalo fijo, considerando los mismos valores para la probabilidad marginal y para la probabilidad condicionada, es decir,  $P = 0,72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.8833$ ; los resultados obtenidos se representan gráficamente en la Figura 2.6.13 que muestra que, para cada valor de la probabilidad condicionada  $P_{2,2}$ , las varianzas del error correspondientes al suavizador intervalo fijo son menores que las correspondientes al filtro. Esta figura indica, así mismo, que a medida que la probabilidad  $P_{2,2}$  es menor, ambas varianzas de filtrado y suavizamiento también disminuyen y, consecuentemente, mejora la precisión de los estimadores.



**Figura 2.6.13.** Varianzas de los errores de filtrado y suavizamiento intervalo fijo para  $P = 0.72$  y  $P_{2,2} = 0.72, 0.7926, 0.88333$

# Capítulo 3

## Estimación lineal de señales discretas a partir de observaciones retrasadas aleatoriamente

### 3.1. Introducción

Las observaciones disponibles para estimar el estado de un sistema dinámico en un instante de tiempo contienen usualmente información relativa a dicho estado. Sin embargo, existen numerosas situaciones prácticas, como las relacionadas con la transmisión de datos en redes de comunicación, en las que la llegada de las observaciones al receptor de datos está afectada por un cierto retraso, que origina que la medida disponible para estimar la señal en cierto instante de tiempo pueda no estar actualizada.

Los retrasos en las observaciones han sido considerados a veces como errores de medida o interpretados como una función determinística del tiempo; sin embargo,

la mejor manera de tratar el retraso es interpretándolo como un proceso estocástico, incluyendo sus propiedades estadísticas en la descripción del sistema. En este sentido, numerosas investigaciones del campo de la ingeniería o la economía han aplicado el retraso aleatorio para resolver diversos problemas de estimación. Así, por ejemplo, Evans y Krishnamurthy [9] tratan el problema de estimación del estado de un sistema modelizando el retraso aleatorio en las observaciones mediante una cadena de Markov finita. En Su y Lu [44], se diseña una extensión del algoritmo de filtrado de Kalman para la estimación del estado de un sistema de redes interconectadas a partir de observaciones retrasadas. En estos trabajos se dispone del modelo de espacio de estados que genera la señal.

El objetivo de este capítulo es el estudio del problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de señales a partir de observaciones afectadas por un retraso aleatorio, usando únicamente las funciones de covarianzas de la señal y los ruidos que intervienen en la ecuación de observación. El retraso en las observaciones se modeliza mediante una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes de parámetro conocido en cada instante, cuyos valores, uno o cero, indican si existe o no retraso en las observaciones.

En primer lugar, se considerará la situación en la que existe un único ruido aditivo que perturba a las observaciones, concretamente, un ruido blanco; en este contexto, se presentan (Sección 3.3) los algoritmos de predicción, filtrado y suavizamiento punto fijo obtenidos en Nakamori et al. [33] y se completa el estudio proponiendo un algoritmo para el problema de suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [37]). En todos los casos, los algoritmos deducidos se acompañan de fórmulas para calcular las correspondientes matrices de covarianzas de los errores de estimación.

Posteriormente, nos planteamos (Sección 3.4) una extensión de los algoritmos anteriores, suponiendo que existen dos ruidos aditivos que afectan a la observación: un ruido blanco y un ruido coloreado. También en este caso se presentan algoritmos para los problemas de predicción, filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [39]-[42]).

Los algoritmos propuestos no requieren el conocimiento completo del modelo de espacio de estados que genera la señal, sino sólo los momentos de segundo orden de la señal y de los ruidos que intervienen en la ecuación de observación y los parámetros de las variables de Bernoulli que modelizan el retraso en las observaciones.

## 3.2. Planteamiento del problema

Como se comentó anteriormente, en muchos problemas prácticos, tales como los relacionados con la transmisión de datos en redes de comunicación, la medida disponible para estimar el estado de un sistema en un instante de tiempo puede no contener información relativa a dicho estado, debido a que las observaciones no están actualizadas, sino que son recibidas con un cierto retraso.

Así, si se consideran observaciones de una señal  $n$ -dimensional  $z(k)$  dadas a partir de la siguiente ecuación de observación

$$\tilde{y}(k) = z(k) + v(k), \quad k \geq 0,$$

donde  $\{v(k); k \geq 0\}$  representa un ruido blanco, para reflejar la posibilidad de que la medida disponible para estimar la señal en el instante  $k$ ,  $y(k)$ , pueda estar afectada por un retraso aleatorio de una unidad de tiempo, con una probabilidad

$p(k)$ , o bien actualizada, con una probabilidad  $1-p(k)$ , se define dicha medida como

$$y(k) = \begin{cases} \tilde{y}(k-1), & \text{con probabilidad } p(k), \\ \tilde{y}(k), & \text{con probabilidad } 1-p(k). \end{cases}$$

Por tanto, si denotamos por  $\gamma(k)$  una variable aleatoria de Bernoulli con

$$P[\gamma(k) = 1] = p(k),$$

la medida disponible para estimar la señal en el instante  $k$  está dada de la siguiente forma

$$y(k) = (1 - \gamma(k))\tilde{y}(k) + \gamma(k)\tilde{y}(k-1), \quad k \geq 1.$$

Al igual que en los capítulos anteriores, el modelo de espacio de estados de la señal que se desea estimar no es completamente conocido y sólo se dispone de los momentos de segundo orden de la señal y el ruido blanco y los parámetros de las variables de Bernoulli que modelizan el retraso en las observaciones.

En definitiva, en este capítulo se considera el problema de estimación de una señal  $n$ -dimensional  $z(k)$  dada por el siguiente modelo de observación

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) &= z(k) + v(k), \quad k \geq 0, \\ y(k) &= (1 - \gamma(k))\tilde{y}(k) + \gamma(k)\tilde{y}(k-1), \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde se verifican las hipótesis:

- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 0\}$  tiene media cero y su función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

- El proceso  $\{v(k); k \geq 0\}$  es un ruido blanco, centrado, con función de covarianzas conocida,  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k - s)$ , donde  $\delta_K$  denota la función delta de Kronecker.
- El ruido multiplicativo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes con  $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$ , donde  $p(k)$  denota la probabilidad de retraso en el instante  $k$ .
- El proceso señal,  $\{z(k); k \geq 0\}$ , y los ruidos,  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  y  $\{v(k); k \geq 0\}$ , son mutuamente independientes.

A continuación, nos planteamos resolver el problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones aleatoriamente retrasadas hasta el instante  $j$ ,  $\{y(1), \dots, y(j)\}$ , dadas mediante el modelo especificado en (3.1); concretamente, nuestro propósito es obtener el filtro ( $j = k$ ), el suavizador punto fijo ( $j = L > k$ ,  $k$  fijo) y el suavizador intervalo fijo ( $k < j = T$ ,  $T$  fijo).

Al igual que en el Capítulo 2, y con la finalidad de simplificar el tratamiento del problema y la deducción de los algoritmos, los estimadores se expresarán como función lineal de las innovaciones; si  $\hat{y}(k, k - 1)$  denota el predictor lineal en una etapa de la observación  $y(k)$ , la innovación en el instante  $k$  está dada por  $\nu(k) = y(k) - \hat{y}(k, k - 1)$  y representa la nueva información que aporta la observación  $y(k)$ . El hecho de que las innovaciones constituyen un proceso blanco, permite expresar el estimador lineal de mínimos cuadrados de la señal  $z(k)$  como

$$\hat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i)^1, \quad (3.3)$$

siendo  $S(k, i) = E[z(k)\nu^T(i)]$  y  $\Pi(i) = E[\nu(i)\nu^T(i)]$ .

<sup>1</sup>Si la matriz  $\Pi(i)$  fuese singular, se sustituye la inversa por la pseudoinversa de Moore-Penrose (véase Magnus y Neudecker [22]).

Con la finalidad de determinar el proceso innovación, comenzamos obteniendo una expresión para el predictor en una etapa de la observación,

$$\hat{y}(k, k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} E[y(k)\nu^T(i)]\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 2. \quad (3.4)$$

Cuando las observaciones de la señal no están afectadas por un retraso aleatorio, como ocurre en los capítulos anteriores, toda la información anterior al instante  $k$  requerida para estimar  $y(k)$  está contenida en el predictor de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ ; sin embargo, como se comprobará a continuación, esta propiedad no se verifica en el caso en que las observaciones están retrasadas aleatoriamente.

Si denotamos

$$Z(k) = \begin{pmatrix} z(k) \\ z(k-1) \end{pmatrix}, \quad V(k) = \begin{pmatrix} v(k) \\ v(k-1) \end{pmatrix}, \quad \Theta(k) = [(1-\gamma(k))I_n, \gamma(k)I_n],$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ , una representación compacta de la medida disponible en el instante  $k$  está dada por

$$y(k) = \Theta(k)Z(k) + \Theta(k)V(k), \quad k \geq 1. \quad (3.5)$$

Hemos de notar que  $\{V(k); k \geq 1\}$  no es un ruido blanco; concretamente, las matrices de covarianzas  $E[V(k)V^T(s)]$ , con  $k, s \geq 1$ , están dadas de la siguiente forma

$$E[V(k)V^T(k)] = \begin{pmatrix} R(k) & 0 \\ 0 & R(k-1) \end{pmatrix}, \quad E[V(k)V^T(k-1)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R(k-1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$E[V(k)V^T(s)] = 0 \quad (s \neq k, k-1).$$

Teniendo en cuenta esta propiedad para  $\{V(k); k \geq 1\}$ , la expresión (3.5) para  $y(k)$  y la independencia mutua entre  $\{Z(k); k \geq 1\}$ ,  $\{V(k); k \geq 1\}$  y  $\{\Theta(k); k \geq 1\}$  y denotando  $\bar{\Theta}(k) = E[\Theta(k)] = [(1-p(k))I_n, p(k)I_n]$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}
E[y(k)\nu^T(i)] &= E[\Theta(k)Z(k)\nu^T(i)] = \bar{\Theta}(k)E[Z(k)\nu^T(i)], \quad i \leq k-2, \\
E[y(k)\nu^T(k-1)] &= E[\Theta(k)Z(k)\nu^T(k-1)] + E[\Theta(k)V(k)V^T(k-1)\Theta^T(k-1)] \\
&= \bar{\Theta}(k)E[Z(k)\nu^T(k-1)] + \bar{\Theta}(k)E[V(k)V^T(k-1)]\bar{\Theta}^T(k-1) \\
&= \bar{\Theta}(k)E[Z(k)\nu^T(k-1)] + p(k)(1-p(k-1))R(k-1).
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.4), se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k, k-1) &= \bar{\Theta}(k) \sum_{i=1}^{k-1} E[Z(k)\nu^T(i)]\Pi^{-1}(i)\nu(i) \\
&\quad + p(k)(1-p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1)\nu(k-1),
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\hat{Z}(k, k-1) = \begin{pmatrix} \hat{z}(k, k-1) \\ \hat{z}(k-1, k-1) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k-1} E[Z(k)\nu^T(i)]\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad (3.6)$$

concluimos que el predictor en una etapa de la observación está dado por

$$\hat{y}(k, k-1) = \bar{\Theta}(k)\hat{Z}(k, k-1) + p(k)(1-p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1)\nu(k-1). \quad (3.7)$$

Por tanto, la innovación  $\nu(k)$  verifica la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}
\nu(k) &= y(k) - (1-p(k))\hat{z}(k, k-1) - p(k)\hat{z}(k-1, k-1) \\
&\quad - p(k)(1-p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1)\nu(k-1), \quad k \geq 2, \quad (3.8) \\
\nu(1) &= y(1).
\end{aligned}$$

Observando la expresión anterior, podemos comprobar que la innovación en el instante  $k$ ,  $\nu(k)$ , se obtiene como combinación lineal de la nueva observación,  $y(k)$ , el predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , el filtro en el instante anterior,  $\hat{z}(k-1, k-1)$ , y la innovación anterior,  $\nu(k-1)$ . En el siguiente teorema se proponen algoritmos para los estimadores de predicción y filtrado, necesarios para determinar la innovación.

### 3.3. Algoritmos de predicción, filtrado y suavizamiento

En esta sección se presentan algoritmos para los problemas de predicción en una etapa, filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo de la señal, a partir de observaciones aleatoriamente retrasadas especificadas por el modelo de observación (3.1), que verifica las hipótesis descritas anteriormente.

#### **Teorema 3.3.1 (Algoritmo de predicción en una etapa y filtrado)**

*Si se considera el modelo de observación (3.1), el predictor en una etapa y el filtro de la señal  $z(k)$ ,  $\hat{z}(k, k-1)$  y  $\hat{z}(k, k)$ , respectivamente, se obtienen a partir de las siguientes expresiones*

$$\hat{z}(k, k-1) = A(k)O(k-1), \quad (3.9)$$

$$\hat{z}(k, k) = A(k)O(k), \quad (3.10)$$

donde los vectores  $O(k)$  se calculan recursivamente como

$$O(k) = O(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O(0) = 0, \quad (3.11)$$

siendo  $J$  la función matricial que verifica

$$J(k) = G_B^T(k) - r(k-1)G_A^T(k) - J(k-1)H^T(k), \quad (3.12)$$

donde  $r(k)$ ,  $G_Y(k)$  y  $H(k)$  son las matrices siguientes

$$r(k) = r(k-1) + J(k)\Pi^{-1}(k)J^T(k), \quad r(0) = 0, \quad (3.13)$$

$$G_Y(k) = (1-p(k))Y(k) + p(k)Y(k-1), \quad Y = A, B, \quad (3.14)$$

$$H(k) = p(k)(1-p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1), \quad H(1) = 0. \quad (3.15)$$

La innovación,  $\nu(k)$ , satisface

$$\nu(k) = y(k) - G_A(k)O(k-1) - H(k)\nu(k-1), \quad (3.16)$$

y la matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k)$ , está dada por

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & (1-p(k))[A(k)B^T(k)+R(k)] + p(k)[A(k-1)B^T(k-1)+R(k-1)] \\ & - G_A(k)r(k-1)G_A^T(k) - G_A(k)J(k-1)H^T(k) \\ & - H(k)J^T(k-1)G_A^T(k) - H^2(k)\Pi(k-1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Demostración.** La demostración del Teorema 3.3.1 está desarrollada en Nakamori et al. [33]; se realiza un esquema de la misma en el Apéndice B.1 ya que algunos de sus pasos serán utilizados, posteriormente, en el Teorema 3.3.3. ■

### Teorema 3.3.2 (Algoritmo de suavizamiento punto fijo)

Dado el modelo de observación especificado en (3.1), los estimadores  $\hat{z}(k, L)$ , para  $L > k$  con  $k$  fijo, pueden calcularse a partir de la siguiente relación recursiva

$$\hat{z}(k, L) = \hat{z}(k, L-1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k, \quad (3.18)$$

cuya condición inicial está dada por el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , y siendo

$$\begin{aligned} S(k, L) = & B(k)G_A^T(L) - E(k, L-1)G_A^T(L) - S(k, L-1)H^T(L), \quad L > k; \\ S(k, k) = & A(k)J(k), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde las matrices  $E(k, L)$  satisfacen la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} E(k, L) = & E(k, L-1) + S(k, L)\Pi^{-1}(L)J^T(L), \quad L > k; \\ E(k, k) = & A(k)r(k), \end{aligned} \quad (3.20)$$

El filtro, las matrices  $r(k)$ ,  $G_A(k)$ ,  $H(k)$  y  $J(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 3.3.1.

**Demostración.** Al igual que en el teorema anterior, la demostración del Teorema 3.3.2 está desarrollada en Nakamori et al. [33] y se realiza un esquema de la misma en el Apéndice B.2. ■

**Teorema 3.3.3 (Algoritmo de suavizamiento intervalo fijo)**

Si consideramos el modelo de observación especificado en la Sección 3.2, los estimadores  $\hat{z}(k, T)$ , con  $k < T$  (para  $T$  fijo), de la señal  $z(k)$  pueden calcularse a partir de la siguiente relación

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + [B(k) - A(k)r(k)]q_1(k, T) + A(k)J(k)q_2(k, T), \quad k < T, \quad (3.21)$$

donde los vectores  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$ , para  $k < T$ , se obtienen recursivamente hacia atrás a partir de las fórmulas

$$\begin{aligned} q_1(k, T) = & [I_M - G_A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)J^T(k+1)]q_1(k+1, T) \\ & + G_A^T(k+1)q_2(k+1, T) + G_A^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} q_2(k, T) = & H^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)J^T(k+1)q_1(k+1, T) \\ & - H^T(k+1)q_2(k+1, T) - H^T(k+1)\Pi^{-1}(k+1)\nu(k+1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

y las condiciones iniciales están dadas por  $q_1(T, T) = 0$  y  $q_2(T, T) = 0$ , siendo  $I_M$  la matriz identidad de dimensión  $M \times M$ .

El filtro  $\hat{z}(k, k)$ , las matrices  $r(k)$ ,  $J(k)$ ,  $G_A(k)$ ,  $H(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 3.3.1.

**Demostración.** Con la finalidad de demostrar la fórmula (3.21) para  $\hat{z}(k, T)$ , partimos de la expresión (3.3), de donde se obtiene que

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \sum_{i=k+1}^T S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad (3.24)$$

por tanto, hemos de determinar los coeficientes  $S(k, i) = E[z(k)\nu^T(i)]$ , para  $i \geq k + 1$ . A partir de (3.16), se deduce de forma inmediata que

$$S(k, i) = E[z(k)y^T(i)] - E[z(k)O^T(i-1)]G_A^T(i) - S(k, i-1)H^T(i), \quad i \geq k + 1.$$

Usando las hipótesis del modelo para calcular la esperanza  $E[z(k)y^T(i)]$  y teniendo en cuenta la fórmula (B.3) para el vector  $O(i-1)$ , se obtiene

$$S(k, i) = B(k)G_A^T(i) - \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)G_A^T(i) - S(k, i-1)H^T(i), \quad i \geq k + 1.$$

Así, considerando la relación  $S(k, j) = A(k)J(j)$ , para  $j \leq k$ , obtenida en (B.1), y la fórmula (B.4) para la matriz  $r(k)$ , la ecuación anterior puede reescribirse de la forma

$$S(k, i) = [B(k) - A(k)r(k)]G_A^T(i) - \sum_{j=k+1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)G_A^T(i) - S(k, i-1)H^T(i), \quad i > k + 1,$$

$$S(k, k+1) = [B(k) - A(k)r(k)]G_A^T(k+1) - A(k)J(k)H^T(k+1).$$

Por tanto, la matriz  $S(k, i)$  puede expresarse como

$$S(k, i) = [B(k) - A(k)r(k)]\Delta_1(k, i) + A(k)J(k)\Delta_2(k, i), \quad i \geq k + 1, \quad (3.25)$$

siendo  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  funciones matriciales que verifican

$$\Delta_1(k, i) = G_A^T(i) - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_1(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)G_A^T(i) - \Delta_1(k, i-1)H^T(i), \quad i > k + 1,$$

$$\Delta_1(k, k+1) = G_A^T(k+1), \quad (3.26)$$

y

$$\Delta_2(k, i) = -\sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_2(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)G_A^T(i) - \Delta_2(k, i-1)H^T(i), \quad i > k + 1,$$

$$\Delta_2(k, k+1) = -H^T(k+1). \quad (3.27)$$

Entonces, si definimos ahora las funciones matriciales

$$q_a(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta_a(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k < T; \quad a = 1, 2, \quad (3.28)$$

la expresión (3.21) queda probada, a partir de (3.24) y usando (3.25) para  $S(k, i)$ , con  $k+1 \leq i \leq T$ .

A continuación, con el objetivo de deducir las fórmulas recursivas (3.22) y (3.23) para  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$ , restamos (3.26) en  $k+1$  de (3.26) en  $k$  y, comparando la expresión resultante con las que se obtienen de (3.26) y (3.27) para  $\Delta_1(k+1, i)$  y  $\Delta_2(k+1, i)$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \Delta_1(k, i) &= [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1)] \Delta_1(k+1, i) \\ &\quad + G_A^T(k+1) \Delta_2(k+1, i), \quad i \geq k+2. \end{aligned}$$

Un razonamiento similar conduce a la siguiente fórmula para  $\Delta_2(k, i)$

$$\Delta_2(k, i) = H^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1) \Delta_1(k+1, i) - H^T(k+1) \Delta_2(k+1, i), \quad i \geq k+2.$$

Por tanto, teniendo en cuenta las dos relaciones anteriores y la fórmula (3.28), las expresiones recursivas (3.22) y (3.23) quedan probadas de forma inmediata. ■

Finalmente, para medir la precisión de los estimadores de suavizamiento intervalo fijo de la señal, calculamos las matrices de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, esto es,

$$P(k, T) = K_z(k, k) - E [\widehat{z}(k, T) \widehat{z}^T(k, T)], \quad k < T.$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.21) para el suavizador  $\widehat{z}(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_a(k, T)$ ,  $a = 1, 2$ , y el filtro  $\widehat{z}(k, k)$  y definiendo las matrices

$$\begin{aligned} Q_a(k, T) &= E [q_a(k, T) q_a^T(k, T)], \quad a = 1, 2; \\ Q_{12}(k, T) &= E [q_1(k, T) q_2^T(k, T)], \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} P(k, T) = & P(k, k) - [B(k) - A(k)r(k)] Q_1(k, T) [B(k) - A(k)r(k)]^T \\ & - [B(k) - A(k)r(k)] Q_{12}(k, T) J^T(k) A^T(k) - A(k) J(k) Q_{12}^T(k, T) \\ & \times [B(k) - A(k)r(k)]^T - A(k) J(k) Q_2(k, T) J^T(k) A^T(k), \quad k < T, \end{aligned}$$

siendo  $P(k, k) = A(k) [B^T(k) - r(k)A^T(k)]$  la matriz de covarianzas de los errores de filtrado.

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) para  $q_1(k, T)$  y  $q_2(k, T)$  y la propiedad de incorrelación entre cada  $q_a(k+1, T)$ ,  $a = 1, 2$ , y la innovación  $\nu(k+1)$  conducen a las siguientes relaciones recursivas, para  $k < T$ ,

$$\begin{aligned} Q_1(k, T) = & G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) G_A(k+1) + [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) \\ & \times J^T(k+1)] Q_1(k+1, T) [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1)]^T \\ & + [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1)] Q_{12}(k+1, T) G_A(k+1) \\ & + G_A^T(k+1) Q_{12}^T(k+1, T) [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1)]^T \\ & + G_A^T(k+1) Q_2(k+1, T) G_A(k+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2(k, T) = & H^T(k+1) \{ \Pi^{-1}(k+1) + \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1) Q_1(k+1, T) J(k+1) \\ & \times \Pi^{-1}(k+1) - \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1) Q_{12}(k+1, T) - Q_{12}^T(k+1, T) \\ & \times J(k+1) \Pi^{-1}(k+1) + Q_2(k+1, T) \} H(k+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{12}(k, T) = & \{ -G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) + [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) J^T(k+1)] \\ & \times Q_1(k+1, T) J(k+1) \Pi^{-1}(k+1) - [I_M - G_A^T(k+1) \Pi^{-1}(k+1) \\ & \times J^T(k+1)] Q_{12}(k+1, T) + G_A^T(k+1) Q_{12}^T(k+1, T) J(k+1) \\ & \times \Pi^{-1}(k+1) - G_A^T(k+1) Q_2(k+1, T) \} H(k+1), \end{aligned}$$

siendo  $Q_1(T, T) = 0$ ,  $Q_2(T, T) = 0$  y  $Q_{12}(T, T) = 0$  las condiciones iniciales respectivas.

### 3.4. Señal afectada por ruidos blanco y coloreado

En las secciones previas, se ha planteado y resuelto el problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de señales a partir de observaciones afectadas por un retraso aleatorio y por un ruido blanco, en el caso en que no se dispone del modelo de espacio de estados que genera la señal, sino únicamente se conocen los momentos de segundo orden de la señal y el ruido, y los parámetros de las variables de Bernoulli que modelizan el retraso en las observaciones.

En esta sección nos proponemos extender el estudio anterior contemplando la posibilidad de que las observaciones puedan estar perturbadas por un ruido coloreado, además de por un ruido blanco. Por tanto, nuestro objetivo es nuevamente obtener algoritmos para los problemas de estimación lineal (en el sentido de mínimos cuadrados) de predicción, filtrado, suavizamiento punto fijo y suavizamiento intervalo fijo (Nakamori et al. [39]-[42]).

#### 3.4.1. Planteamiento del problema

Se consideran observaciones de una señal  $n$ -dimensional  $z(k)$  dadas a partir de la siguiente ecuación de observación

$$\tilde{y}(k) = z(k) + v(k) + w(k), \quad k \geq 0, \quad (3.29)$$

donde  $\{v(k); k \geq 0\}$  y  $\{w(k); k \geq 0\}$  representan los ruidos blanco y coloreado, respectivamente.

Las observaciones de la señal en el instante  $k$  pueden estar actualizadas o afectadas por un retraso de una unidad de tiempo. Así, si  $\gamma(k)$  es una variable aleatoria de Bernoulli con  $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$ , donde  $p(k)$  denota la probabilidad de retraso en el instante  $k$ , la medida disponible en dicho instante puede expresarse

como

$$y(k) = (1 - \gamma(k))\tilde{y}(k) + \gamma(k)\tilde{y}(k-1), \quad k \geq 1. \quad (3.30)$$

Se suponen las siguientes hipótesis sobre la señal y los ruidos:

- El proceso señal  $\{z(k); k \geq 0\}$  tiene media cero y su función de covarianzas puede expresarse en forma de núcleo semidegenerado, esto es,

$$K_z(k, s) = E[z(k)z^T(s)] = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k, \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s, \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times M$ .

- El proceso  $\{v(k); k \geq 0\}$  es un ruido blanco, centrado, con función de covarianzas conocida,  $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_K(k-s)$ .
- El proceso  $\{w(k); k \geq 0\}$  es un ruido coloreado, centrado, con función de covarianzas expresada en forma de núcleo semidegenerado, es decir,

$$K_w(k, s) = E[w(k)w^T(s)] = \begin{cases} \alpha(k)\beta^T(s), & 0 \leq s \leq k, \\ \beta(k)\alpha^T(s), & 0 \leq k \leq s, \end{cases}$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  funciones matriciales conocidas de dimensión  $n \times N$ .

- Los procesos  $\{z(k); k \geq 0\}$ ,  $\{v(k); k \geq 0\}$ ,  $\{w(k); k \geq 0\}$  y  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  son mutuamente independientes.

Nuestro objetivo es el estudio del problema de estimación lineal de mínimos cuadrados de la señal,  $z(k)$ , a partir de las observaciones aleatoriamente retrasadas hasta el instante  $j$ ,  $\{y(1), \dots, y(j)\}$ , especificadas por (3.29) y (3.30); concretamente, se pretende obtener el predictor en una etapa ( $j = k-1$ ), el filtro ( $j = k$ ), el suavizador punto fijo ( $j > k$ ,  $k$  fijo) y el suavizador intervalo fijo ( $k < j$ ,  $j$  fijo).

Al igual que en otras situaciones contempladas anteriormente, se usará una técnica basada en innovaciones, que simplifica sustancialmente la obtención de los algoritmos. Concretamente, el hecho de que las innovaciones constituyen un ruido blanco conduce a la siguiente expresión general para el estimador de la señal

$$\hat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j S_z(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad (3.31)$$

siendo  $S_z(k, i) = E[z(k) \nu^T(i)]$  y  $\Pi(i) = E[\nu(i) \nu^T(i)]$ .

Con la finalidad de determinar la innovación,  $\nu(k) = y(k) - \hat{y}(k, k-1)$ , comenzamos calculando el predictor en una etapa de la observación

$$\hat{y}(k, k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} E[y(k) \nu^T(i)] \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k \geq 2; \quad \hat{y}(1, 0) = 0. \quad (3.32)$$

Denotando  $S_w(k, i) = E[w(k) \nu^T(i)]$  y  $S(k, i) = S_z(k, i) + S_w(k, i)$  y teniendo en cuenta las hipótesis del modelo, se tiene que

$$\begin{aligned} E[y(k) \nu^T(i)] &= (1-p(k)) S(k, i) + p(k) S(k-1, i), \quad i \leq k-2, \\ E[y(k) \nu^T(k-1)] &= (1-p(k)) S(k, k-1) + p(k) S(k-1, k-1) \\ &\quad + p(k) (1-p(k-1)) R(k-1). \end{aligned}$$

Si sustituimos estas últimas expresiones en (3.32), se deduce que

$$\begin{aligned} \hat{y}(k, k-1) &= (1-p(k)) \sum_{i=1}^{k-1} S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i) + p(k) \sum_{i=1}^{k-1} S(k-1, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i) \\ &\quad + p(k) (1-p(k-1)) R(k-1) \Pi^{-1}(k-1) \nu(k-1); \end{aligned}$$

denotando por  $\hat{w}(k, j)$  al estimador lineal de mínimos cuadrados del ruido coloreado  $w(k)$  basado en las observaciones  $\{y(1), \dots, y(j)\}$ , dado mediante la expresión

$$\hat{w}(k, j) = \sum_{i=1}^j S_w(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad (3.33)$$

y utilizando (3.31), puede concluirse que el predictor en una etapa de la observación satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned}\widehat{y}(k, k-1) = & (1 - p(k))\widehat{z}(k, k-1) + p(k)\widehat{z}(k-1, k-1) + (1 - p(k))\widehat{w}(k, k-1) \\ & + p(k)\widehat{w}(k-1, k-1) + p(k)(1 - p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1)\nu(k-1).\end{aligned}\quad (3.34)$$

A partir de la expresión anterior, para determinar la innovación necesitamos obtener expresiones explícitas para el predictor en una etapa y el filtro de la señal y del ruido coloreado. Una vez deducida la expresión explícita para la innovación, se obtienen los diferentes algoritmos de estimación de la señal a partir de la fórmula general (3.31).

### 3.4.2. Algoritmos de estimación

En el siguiente teorema se presentan fórmulas que determinan los estimadores de predicción en una etapa y de filtrado de la señal.

#### **Teorema 3.4.1 (Algoritmo de predicción en una etapa y filtrado)**

*El predictor en una etapa y el filtro de la señal  $z(k)$  se obtienen, respectivamente, como*

$$\widehat{z}(k, k-1) = A(k)O_z(k-1), \quad k \geq 1, \quad (3.35)$$

$$\widehat{z}(k, k) = A(k)O_z(k), \quad k \geq 1, \quad (3.36)$$

*donde los vectores  $M$ -dimensionales  $O_z(k)$  están dados recursivamente mediante la relación*

$$O_z(k) = O_z(k-1) + J_z(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O_z(0) = 0, \quad (3.37)$$

*y  $\nu(k)$ , la innovación, satisface*

$$\nu(k) = y(k) - G_A(k)O_z(k-1) - G_\alpha(k)O_w(k-1) - H(k)\nu(k-1), \quad \nu(0) = 0, \quad (3.38)$$

siendo  $O_w(k)$  un vector  $N$ -dimensional verificando

$$O_w(k) = O_w(k-1) + J_w(k)\Pi^{-1}(k)\nu(k), \quad O_w(0) = 0, \quad (3.39)$$

y  $J_z, J_w$  las siguientes funciones matriciales

$$J_z(k) = G_B^T(k) - r(k-1)G_A^T(k) - c(k-1)G_\alpha^T(k) - J_z(k-1)H^T(k), \quad J_z(0) = 0, \quad (3.40)$$

$$J_w(k) = G_\beta^T(k) - c^T(k-1)G_A^T(k) - d(k-1)G_\alpha^T(k) - J_w(k-1)H^T(k), \quad J_w(0) = 0, \quad (3.41)$$

donde las matrices  $G_Y(k)$  ( $Y = A, B, \alpha, \beta$ ) y  $H(k)$  están dadas por

$$G_Y(k) = (1 - p(k))Y(k) + p(k)Y(k-1), \quad (3.42)$$

$$H(k) = p(k)(1 - p(k-1))R(k-1)\Pi^{-1}(k-1). \quad (3.43)$$

Las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$  y  $d(k)$  se calculan mediante las siguientes fórmulas recursivas

$$r(k) = r(k-1) + J_z(k)\Pi^{-1}(k)J_z^T(k), \quad r(0) = 0, \quad (3.44)$$

$$c(k) = c(k-1) + J_z(k)\Pi^{-1}(k)J_w^T(k), \quad c(0) = 0, \quad (3.45)$$

$$d(k) = d(k-1) + J_w(k)\Pi^{-1}(k)J_w^T(k), \quad d(0) = 0, \quad (3.46)$$

y  $\Pi(k)$ , matriz de covarianzas de la innovación  $\nu(k)$ , verifica

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & (1 - p(k)) [A(k)B^T(k) + \alpha(k)\beta^T(k) + R(k)] \\ & + p(k) [A(k-1)B^T(k-1) + \alpha(k-1)\beta^T(k-1) + R(k-1)] \\ & - G_A(k) [r(k-1)G_A^T(k) + c(k-1)G_\alpha^T(k) + J_z(k-1)H^T(k)] \\ & - G_\alpha(k) [d(k-1)G_\alpha^T(k) + c^T(k-1)G_A^T(k) + J_w(k-1)H^T(k)] \\ & - H(k) [\Pi(k-1)H^T(k) + J_z^T(k-1)G_A^T(k) + J_w(k-1)G_\alpha^T(k)], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\Pi(0) = 0.$$

**Demostración.** Teniendo en cuenta la expresión (3.31) para  $j = k$ , la determinación del filtro requiere el cálculo de los coeficientes  $S_z(k, i) = E[z(k)\nu^T(i)]$ , para  $i \leq k$ . Usando la expresión (3.34) para  $\hat{y}(i, i-1)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} S_z(k, i) &= E[z(k)y^T(i)] - (1-p(k))E[z(k)\hat{z}^T(k, k-1)] - p(k)E[z(k)\hat{z}^T(k-1, k-1)] \\ &\quad - (1-p(k))E[z(k)\hat{w}^T(k, k-1)] - p(k)E[z(k)\hat{w}^T(k-1, k-1)] \\ &\quad - p(k)(1-p(k-1))S_z(k, k-1)\Pi^{-1}(k-1)R(k-1), \quad 1 \leq i \leq k, \end{aligned}$$

y considerando las hipótesis del modelo para  $E[z(k)y^T(i)]$ , las relaciones (3.31) y (3.33) para los estimadores de la señal y del ruido coloreado, respectivamente, y las matrices  $S(k, i)$  y  $H(k)$ , la expresión anterior puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} S_z(k, i) &= A(k)G_B^T(i) - (1-p(i))\sum_{j=1}^{i-1} S_z(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j) \\ &\quad - p(i)\sum_{j=1}^{i-1} S_z(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i-1, j) - S_z(k, i-1)H^T(i), \quad 2 \leq i \leq k, \\ S_z(k, 1) &= A(k)G_B^T(1). \end{aligned}$$

Esta expresión para  $S_z(k, i)$  garantiza que

$$S_z(k, i) = A(k)J_z(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (3.48)$$

donde  $J_z$  es una función matricial satisfaciendo

$$\begin{aligned} J_z(i) &= G_B^T(i) - (1-p(i))\sum_{j=1}^{i-1} J_z(j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j) \\ &\quad - p(i)\sum_{j=1}^{i-1} J_z(j)\Pi^{-1}(j)S^T(i-1, j) - J_z(i-1)H^T(i), \quad 2 \leq i \leq k, \\ J_z(1) &= G_B^T(1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por tanto, si denotamos

$$O_z(k) = \sum_{i=1}^k J_z(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1; \quad O_z(0) = 0, \quad (3.50)$$

las expresiones (3.35) y (3.36) para el predictor y el filtro quedan probadas. La relación recursiva (3.37) para los vectores  $O_z(k)$  es inmediata de (3.50).

A partir de (3.34), para determinar la innovación,  $\nu(k)$ , también hemos de calcular el predictor y el filtro del ruido coloreado,  $w(k)$ . Usando un razonamiento similar al empleado para calcular los coeficientes  $S_z(k, i) = E[z(k)\nu^T(i)]$  con  $i \leq k$ , se obtiene que  $S_w(k, i) = \alpha(k)J_w(i)$  para  $i \leq k$ , siendo  $J_w$  una función matricial verificando

$$\begin{aligned} J_w(i) &= G_\beta^T(i) - (1 - p(i)) \sum_{j=1}^{i-1} J_w(j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j) \\ &\quad - p(i) \sum_{j=1}^{i-1} J_w(j) \Pi^{-1}(j) S^T(i-1, j) - J_w(i-1) H^T(i), \quad 2 \leq i \leq k, \\ J_w(1) &= G_\beta^T(1). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Por tanto, se deduce que

$$\widehat{w}(k, k-1) = \alpha(k)O_w(k-1), \quad \widehat{w}(k, k) = \alpha(k)O_w(k), \quad (3.52)$$

siendo

$$O_w(k) = \sum_{i=1}^k J_w(i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k \geq 1; \quad O_w(0) = 0. \quad (3.53)$$

Sustituyendo las expresiones (3.35), (3.36) y (3.52) para  $\widehat{z}(k, k-1)$ ,  $\widehat{z}(k, k)$ ,  $\widehat{w}(k, k-1)$  y  $\widehat{w}(k, k)$  en la fórmula (3.34) para  $\widehat{y}(k, k-1)$ , deducimos la expresión (3.38) para la innovación. La relación recursiva (3.39) para los vectores  $O_w(k)$  es inmediata de (3.53).

A continuación, teniendo en cuenta que  $S(k, i) = A(k)J_z(i) + \alpha(k)J_w(i)$ , para  $1 \leq i \leq k$ , y denotando

$$r(k) = E [O_z(k)O_z^T(k)] = \sum_{i=1}^k J_z(i) \Pi^{-1}(i) J_z^T(i), \quad k \geq 1; \quad r(0) = 0, \quad (3.54)$$

$$c(k) = E [O_z(k)O_w^T(k)] = \sum_{i=1}^k J_z(i)\Pi^{-1}(i)J_w^T(i), \quad k \geq 1; \quad c(0) = 0, \quad (3.55)$$

$$d(k) = E [O_w(k)O_w^T(k)] = \sum_{i=1}^k J_w(i)\Pi^{-1}(i)J_w^T(i), \quad k \geq 1; \quad d(0) = 0, \quad (3.56)$$

se deducen fácilmente, a partir de (3.49) y (3.51), las expresiones recursivas (3.40) y (3.41) para  $J_z(k)$  y  $J_w(k)$ . Las fórmulas (3.44)-(3.46) para  $r(k)$ ,  $c(k)$  y  $d(k)$  son también inmediatas de las respectivas relaciones (3.54)-(3.56).

Para finalizar, obtenemos la fórmula (3.47) para la matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k) = E [y(k)y^T(k)] - E [\hat{y}(k, k-1)\hat{y}^T(k, k-1)]$ . El predictor en una etapa de la observación,  $\hat{y}(k, k-1)$ , verifica la siguiente expresión, deducida a partir de (3.38),

$$\hat{y}(k, k-1) = G_A(k)O_z(k-1) + G_\alpha(k)O_w(k-1) + H(k)\nu(k-1);$$

si sustituimos esta igualdad en la expresión de  $\Pi(k)$  y tenemos en cuenta, junto con las hipótesis del modelo, las expresiones (3.54), (3.55) y (3.56) para las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$  y  $d(k)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & (1 - p(k)) [A(k)B^T(k) + \alpha(k)\beta^T(k) + R(k)] \\ & + p(k) [A(k-1)B^T(k-1) + \alpha(k-1)\beta^T(k-1) + R(k-1)] \\ & - G_A(k) [r(k-1)G_A^T(k) + c(k-1)G_\alpha^T(k) + E [O_z(k-1)\nu^T(k)] H^T(k)] \\ & - G_\alpha(k) [d(k-1)G_\alpha^T(k) + c^T(k-1)G_A^T(k) + E [O_w(k-1)\nu^T(k)] H^T(k)] \\ & - H(k) [\Pi(k-1)H^T(k) + J_z^T(k-1)G_A^T(k) + E [O_w(k-1)\nu^T(k)] G_\alpha^T(k)], \end{aligned}$$

Usando las relaciones recursivas (3.37) y (3.39) para  $O_z(k-1)$  y  $O_w(k-1)$ , puesto los vectores  $O_z(k-2)$  y  $O_w(k-2)$  son ambos ortogonales a la innovación  $\nu(k-1)$ , se tiene que  $E [O_z(k-1)\nu^T(k-1)] = J_z(k-1)$  y  $E [O_w(k-1)\nu^T(k-1)] = J_w(k-1)$ , y, por tanto, la expresión (3.47) para  $\Pi(k)$  queda probada. ■

A continuación, con el objetivo de proporcionar una medida de la bondad de los estimadores de predicción en una etapa y de filtrado, calculamos la matriz de covarianzas de los correspondientes errores de estimación, es decir,

$$P(k, j) = K_z(k, k) - E[\widehat{z}(k, j)\widehat{z}^T(k, j)], \quad (3.57)$$

para  $j = k - 1, k$ , respectivamente.

Las hipótesis del modelo para  $K_z(k, k)$ , las expresiones (3.35) y (3.36) para  $\widehat{z}(k, k - 1)$  y  $\widehat{z}(k, k)$  y la función matricial  $r$  definida en (3.54) conducen a las siguientes fórmulas para la matrices de covarianzas de los errores de predicción y filtrado,

$$\begin{aligned} P(k, k - 1) &= A(k) [B^T(k) - r(k - 1)A^T(k)], \\ P(k, k) &= A(k) [B^T(k) - r(k)A^T(k)]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

En el siguiente teorema se propone un algoritmo recursivo para los estimadores de suavizamiento punto fijo de la señal.

**Teorema 3.4.2 (Algoritmo de suavizamiento punto fijo)**

*Los estimadores  $\widehat{z}(k, L)$ , para  $L > k$  con  $k$  fijo, pueden calcularse a partir de la siguiente relación recursiva*

$$\widehat{z}(k, L) = \widehat{z}(k, L - 1) + S_z(k, L)\Pi^{-1}(L)\nu(L), \quad L > k, \quad (3.59)$$

*cuya condición inicial está dada por el filtro,  $\widehat{z}(k, k)$ , y*

$$\begin{aligned} S_z(k, L) &= B(k)G_A^T(L) - E_z(k, L - 1)G_A^T(L) - E_w(k, L - 1)G_\alpha^T(L) \\ &\quad - S_z(k, L - 1)H^T(L), \quad L > k; \\ S_z(k, k) &= A(k)J_z(k), \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde las matrices  $E_z(k, L)$  y  $E_w(k, L)$  satisfacen las siguientes fórmulas recursivas

$$\begin{aligned} E_z(k, L) &= E_z(k, L-1) + S_z(k, L)\Pi^{-1}(L)J_z^T(L), \quad L > k; \\ E_z(k, k) &= A(k)r(k), \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} E_w(k, L) &= E_w(k, L-1) + S_z(k, L)\Pi^{-1}(L)J_w^T(L), \quad L > k; \\ E_w(k, k) &= A(k)c(k). \end{aligned} \quad (3.62)$$

El filtro, las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$ ,  $G_Y(k)$  ( $Y = A, \alpha$ ),  $H(k)$ ,  $J_z(k)$  y  $J_w(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus matrices de covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 3.4.1.

**Demostración.** Para obtener la expresión (3.59) para el suavizador punto fijo de la señal a partir de observaciones dadas por el modelo especificado en la Sección 3.4.1, partimos de la fórmula general (3.31), por lo que basta con separar el último término de la suma.

A continuación, calculamos la relación (3.60) para  $S_z(k, L) = E[z(k)\nu^T(L)]$ ,  $L > k$ ; utilizando la fórmula (3.38) para la innovación  $\nu(L)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} S_z(k, L) &= E[z(k)y^T(L)] - E[z(k)O_z^T(L-1)]G_A^T(L) \\ &\quad - E[z(k)O_w^T(L-1)]G_\alpha^T(L) - E[z(k)\nu^T(L-1)]H^T(L), \quad L > k. \end{aligned}$$

Usando las hipótesis del modelo para  $E[z(k)y^T(L)]$  y definiendo, para  $L \geq k$ , las funciones  $E_z(k, L) = E[z(k)O_z^T(L)]$  y  $E_w(k, L) = E[z(k)O_w^T(L)]$ , se deduce fácilmente la fórmula (3.60) para  $S_z(k, L)$ , con  $L > k$ . Además, si tenemos en cuenta (3.48), la condición inicial  $S_z(k, k) = A(k)J_z(k)$  queda probada.

Finalmente, usando las expresiones recursivas (3.37) y (3.39) para  $O_z(k)$  y  $O_w(k)$ , respectivamente, deducimos las fórmulas recursivas (3.61) y (3.62) para  $E_z(k, L)$  y  $E_w(k, L)$ , con  $L > k$ . Sus condiciones iniciales se obtienen teniendo en cuenta que,

como consecuencia del LPO,

$$E_z(k, k) = E[z(k)O_z^T(k)] = E[\hat{z}(k, k)O_z^T(k)],$$

y usando las expresiones (3.36) y (3.54) para  $\hat{z}(k, k)$  y  $r(k)$ , la fórmula  $E_z(k, k) = A(k)r(k)$  queda probada. Un razonamiento análogo conduce a la condición inicial en (3.62). ■

A continuación, calculamos una expresión para la matriz de covarianzas de los errores de suavizamiento punto fijo, es decir,  $P(k, L)$ , con  $L > k$  ( $k$  fijo). Si partimos de la fórmula (3.57) para  $j = L$  y utilizamos la relación (3.59) para  $\hat{z}(k, L)$ , la definición de  $P(k, L - 1)$  y la propiedad de incorrelación entre la innovación  $\nu(L)$  y el estimador  $\hat{z}(k, L - 1)$ , se deduce que

$$P(k, L) = P(k, L - 1) - S(k, L)\Pi^{-1}(L)S^T(k, L), \quad L > k,$$

cuya condición inicial está dada por la matriz de covarianzas del error de filtrado, (3.58).

En el siguiente teorema se presenta un algoritmo para los estimadores de suavizamiento intervalo fijo de la señal.

### **Teorema 3.4.3 (Algoritmo de suavizamiento intervalo fijo)**

*Los estimadores  $\hat{z}(k, T)$ , para  $k < T$  con  $T$  fijo, se calculan a partir de la siguiente fórmula*

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \Psi(k)q(k, T), \quad k < T, \quad (3.63)$$

*donde los vectores  $q(k, L)$  se calculan recursivamente hacia atrás a partir de la relación*

$$q(k, T) = \Phi(k - 1) \begin{pmatrix} \Pi^{-1}(k - 1)\nu(k - 1) \\ q(k + 1, T) \end{pmatrix}, \quad k < T; \quad q(T, T) = 0, \quad (3.64)$$

siendo  $\Psi(k)$  y  $\Phi(k)$  las siguientes matrices

$$\Psi(k) = (B(k) - A(k)r(k), -A(k)c(k), -A(k)J_z(k)), \quad (3.65)$$

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} G_A^T(k) & I_M - G_A^T(k)\Pi^{-1}(k)J_z^T(k) & -G_A^T(k)\Pi^{-1}(k)J_w^T(k) & -G_A^T(k) \\ G_\alpha^T(k) & -G_\alpha^T(k)\Pi^{-1}(k)J_z^T(k) & I_N - G_\alpha^T(k)\Pi^{-1}(k)J_w^T(k) & -G_\alpha^T(k) \\ H^T(k) & -H^T(k)\Pi^{-1}(k)J_z^T(k) & -H^T(k)\Pi^{-1}(k)J_w^T(k) & -H^T(k) \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

El filtro  $\hat{z}(k, k)$ , las matrices  $r(k)$ ,  $c(k)$ ,  $G_Y(k)$  ( $Y=A, \alpha$ ),  $H(k)$ ,  $J_z(k)$  y  $J_w(k)$ , las innovaciones  $\nu(k)$  y sus covarianzas  $\Pi(k)$  se obtienen a partir de las fórmulas dadas en el Teorema 3.4.1.

**Demostración.** Partimos de la expresión general (3.31) y se obtiene, de forma inmediata, la siguiente fórmula

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \sum_{i=k+1}^T S_z(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad (3.67)$$

puesto que en el Teorema 3.4.1 se ha deducido una expresión para el filtro  $\hat{z}(k, k)$ , para obtener el suavizador intervalo fijo basta con determinar el sumatorio.

Por tanto, hemos de calcular los coeficientes  $S_z(k, i) = [z(k)\nu^T(i)]$ , para  $i \geq k + 1$ .

Usando la expresión (3.38) para  $\nu(i)$ , se deduce que

$$\begin{aligned} S_z(k, i) &= E[z(k)y^T(i)] - E[z(k)O_z^T(i-1)]G_A^T(i) - E[z(k)O_w^T(i-1)]G_\alpha^T(i) \\ &\quad - E[z(k)\nu^T(i-1)]H^T(i), \quad i \geq k + 1; \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las hipótesis del modelo y las fórmulas (3.50) y (3.53), se obtiene

$$\begin{aligned} S_z(k, i) &= B(k)G_A^T(i) - \sum_{j=1}^{i-1} S_z(k, j)\Pi^{-1}(j)J_z^T(j)G_A^T(i) - \sum_{j=1}^{i-1} S_z(k, j)\Pi^{-1}(j)J_w^T(j)G_\alpha^T(i) \\ &\quad - S_z(k, i-1)H^T(i), \quad i \geq k + 1. \end{aligned}$$

Usando (3.48), (3.54) y (3.55) para  $S_z(k, i)$  ( $i \leq k$ ),  $r(k)$  y  $c(k)$ , respectivamente, la expresión anterior puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} S_z(k, i) &= [B(k) - A(k)r(k)] G_A^T(i) - A(k)c(k)G_\alpha^T(i) \\ &\quad - \sum_{j=k+1}^{i-1} S_z(k, j)\Pi^{-1}(j) [J_z^T(j)G_A^T(i) + J_w^T(j)G_\alpha^T(i)] \\ &\quad - S_z(k, i-1)H^T(i), \quad i > k+1, \\ S_z(k, k+1) &= [B(k) - A(k)r(k)] G_A^T(k+1) - A(k)c(k)G_\alpha^T(k+1) \\ &\quad - S_z(k, k)H^T(k-1). \end{aligned}$$

Esta igualdad permite deducir que

$$S_z(k, i) = \Psi(k)\Delta(k, i), \quad i \geq k+1, \quad (3.68)$$

siendo  $\Psi(k)$  la matriz definida en (3.65) y

$$\Delta(k, i) = \begin{pmatrix} \Delta_1(k, i) \\ \Delta_2(k, i) \\ \Delta_3(k, i) \end{pmatrix}, \quad i > k+1; \quad \Delta(k, k+1) = \begin{pmatrix} G_A^T(k+1) \\ G_\alpha^T(k+1) \\ H^T(k-1) \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_1(k, i) &= G_A^T(i) - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_1(k, j)\Pi^{-1}(j) [J_z^T(j)G_A^T(i) + J_w^T(j)G_\alpha^T(i)] \\ &\quad - \Delta_1(k, i-1)H^T(i), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(k, i) &= G_\alpha^T(i) - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_2(k, j)\Pi^{-1}(j) [J_z^T(j)G_A^T(i) + J_w^T(j)G_\alpha^T(i)] \\ &\quad - \Delta_2(k, i-1)H^T(i), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(k, i) &= - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_3(k, j)\Pi^{-1}(j) [J_z^T(j)G_A^T(i) + J_w^T(j)G_\alpha^T(i)] \\ &\quad - \Delta_3(k, i-1)H^T(i). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por tanto, si definimos

$$q(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k < T; \quad q(T, T) = 0, \quad (3.73)$$

la expresión (3.63) para  $\widehat{z}(k, T)$  es inmediata de (3.67), usando (3.68).

Finalmente, hemos de deducir la fórmula (3.64) para  $q(k, T)$ . Si calculamos, usando (3.69)-(3.72), la diferencia  $\Delta(k, i) - \Delta(k+1, i)$ , para  $i \geq k+2$ , y comparamos la expresión obtenida con la resultante, de (3.69)-(3.72), para  $\Delta(k+1, i)$ , se deduce la siguiente relación

$$\Delta(k, i) = \Phi_{12}(k+1) \Delta(k+1, i), \quad i \geq k+2, \quad (3.74)$$

donde

$$\Phi_{12}(k) = \begin{pmatrix} I_M - G_A^T(k) \Pi^{-1}(k) J_z^T(k) & -G_A^T(k) \Pi^{-1}(k) J_w^T(k) & -G_A^T(k) \\ -G_\alpha^T(k) \Pi^{-1}(k) J_z^T(k) & I_N - G_\alpha^T(k) \Pi^{-1}(k) J_w^T(k) & -G_\alpha^T(k) \\ -H^T(k) \Pi^{-1}(k) J_z^T(k) & -H^T(k) \Pi^{-1}(k) J_w^T(k) & -H^T(k) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si partimos de (3.73), la fórmula recursiva (3.64) para  $q(k, T)$  es inmediata sin más separar el término correspondiente a  $i = k+1$  y usar (3.74) y las definiciones de  $\Delta(k, k+1)$  y  $q(k+1, T)$ . ■

La matriz de covarianzas del error de suavizado intervalo fijo se obtiene a partir de la expresión

$$P(k, T) = P(k, k) - \Psi(k) Q(k, T) \Psi^T(k), \quad k < T,$$

donde  $P(k, k)$ , matriz de covarianzas del error de filtrado, está dada en (3.58) y  $Q(k, T)$  verifica la siguiente relación recursiva

$$Q(k, T) = \Phi(k-1) \begin{pmatrix} \Pi^{-1}(k-1) & 0 \\ 0 & Q(k+1, T) \end{pmatrix} \Phi^T(k-1), \quad k < T; \quad Q(T, T) = 0.$$

### 3.5. Ejemplo numérico

Para ilustrar la aplicación de los algoritmos de estimación presentados en los Teoremas 3.4.1 y 3.4.2, en esta sección se considera un ejemplo de simulación numérica similar al presentado en el Capítulo 2, es decir, el problema que se plantea consiste en reconstruir una señal enviada por un mecanismo emisor a partir de las observaciones que recibe un mecanismo receptor a través de un canal de transmisión. En este caso, la llegada de las observaciones al receptor podrá estar afectada por un cierto retraso, que se considerará aleatorio, debido a factores como son el nivel de congestión del canal o la longitud del mismo.

Concretamente, como en la Sección 2.6, se considera una señal escalar,  $\{z(k); k \geq 0\}$ , generada por un modelo autorregresivo de primer orden, dado por

$$z(k) = 0.95z(k-1) + u(k),$$

siendo  $\{u(k); k \geq 0\}$  un ruido blanco Gaussiano con media cero y  $Var[u(k)] = 0.1$ , para todo  $k$ . La función de covarianzas de la señal está dada por

$$K_z(k, s) = 1.025641 \times 0.95^{k-s}, \quad 0 \leq s \leq k,$$

y puede expresarse en forma de núcleo semidegenerado, como se ha indicado en el estudio teórico, con  $A(k) = 1.025641 \times 0.95^k$  y  $B(k) = 0.95^{-k}$ .

Se supone que la observación de la señal enviada por el mecanismo emisor en el instante  $k$ ,  $\tilde{y}(k)$ , está perturbada por el efecto que ocasionan ciertas deficiencias del

canal de transmisión, modelizadas matemáticamente mediante dos términos de ruido (un ruido blanco y un ruido coloreado); concretamente, la ecuación de observación que se considera es la siguiente

$$\tilde{y}(k) = z(k) + v(k) + w(k), \quad k \geq 0,$$

donde el proceso  $\{v(k); k \geq 0\}$  es un ruido blanco Gaussiano centrado con  $Var[v(k)] = 0.9$ , para todo  $k$ , y el proceso  $\{w(k); k \geq 0\}$  es un ruido coloreado, centrado, con función de covarianzas conocida

$$K_w(k, s) = 0.1 \times 0.5^{k-s}, \quad 0 \leq s \leq k,$$

que se expresa en forma de núcleo semidegenerado, como en el estudio teórico, siendo  $\alpha(k)$  y  $\beta(k)$  los siguientes escalares

$$\alpha(k) = 0.1 \times 0.5^k, \quad \beta(k) = 0.5^{-k}.$$

Además, debido a que los recursos del sistema son limitados, la señal enviada desde el mecanismo emisor en el instante  $k$ ,  $\tilde{y}(k)$ , podrá estar afectada por un cierto retraso aleatorio. Así, para reflejar la posibilidad de que, en el instante  $k$ , la medida disponible por el mecanismo receptor para estimar la señal,  $y(k)$ , esté retrasada por una unidad de tiempo, con una probabilidad  $p(k)$ , o bien actualizada, con una probabilidad  $1 - p(k)$ , se define dicha medida como

$$y(k) = (1 - \gamma(k))\tilde{y}(k) + \gamma(k)\tilde{y}(k-1), \quad k \geq 1,$$

siendo  $\{\gamma(k); k \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes, cuyos valores, cero o uno, indican si las medidas están actualizadas o retrasadas por un instante de tiempo. Debido a que la actividad del sistema se

incrementa con el paso del tiempo, las probabilidades de retraso aumentan en función de  $k$ ; concretamente, estas probabilidades son las siguientes

$$P[\gamma(k) = 1] = p(k) = \begin{cases} 0.1, & 1 \leq k < 12 \\ 0.2, & 12 \leq k < 24 \\ 0.5, & 24 \leq k \leq 50 \end{cases} \quad (3.75)$$

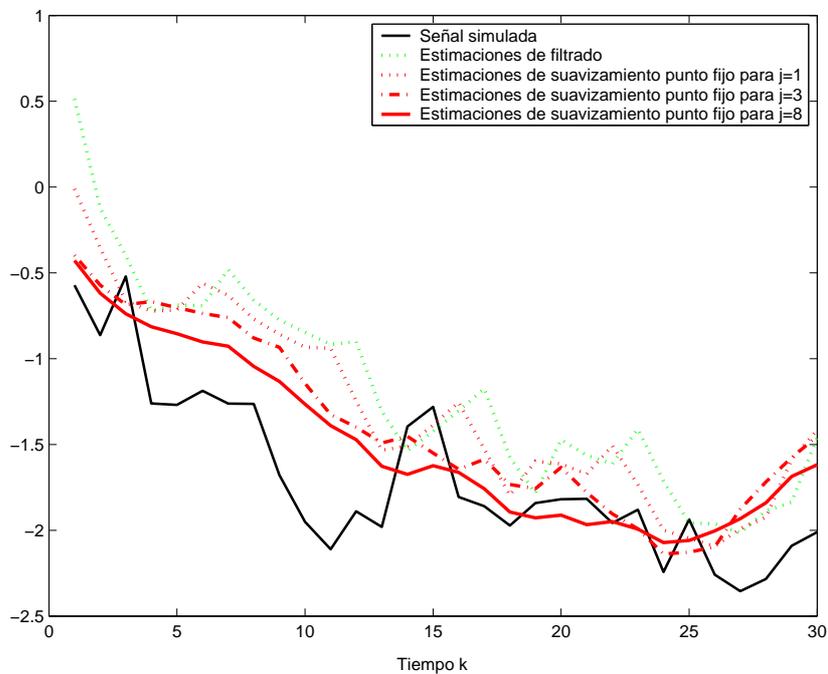
A continuación, para mostrar los resultados propuestos en este capítulo (Sección 3.4), se han realizado programas en *MatLab* que simulan el valor de la señal que se desea estimar y comparan, por una parte, las estimaciones de filtrado y suavizamiento punto fijo y, por otra, el filtro con el suavizador intervalo fijo, proporcionando, en cada caso, las correspondientes varianzas de los errores de estimación.

### Señal, filtro y suavizador punto fijo

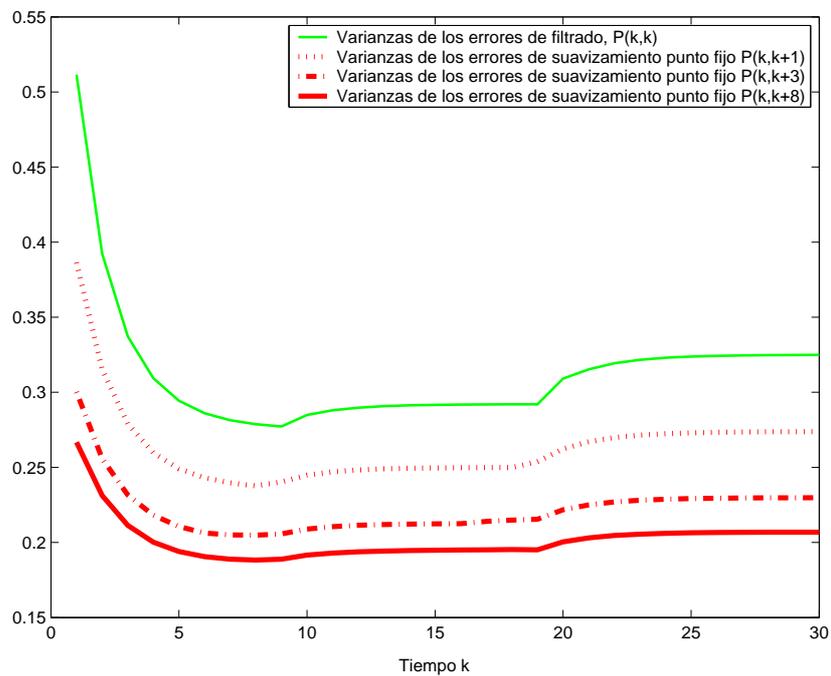
En primer lugar, en la Figura 3.5.1 se representan las estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y de suavizamiento punto fijo  $\hat{z}(k, k+j)$ , para  $k = 1, \dots, 30$  y  $j = 1, 3, 8$ . Los resultados ponen de manifiesto que las estimaciones de suavizamiento muestran, en cada instante, una mayor proximidad a la señal que se desea estimar que las de filtrado. Además, las estimaciones de suavizamiento punto fijo se aproximan más al valor de la señal a estimar a medida que se incrementa el número de observaciones disponibles.

Los comentarios realizados a partir de la Figura 3.5.1 se confirman mediante la Figura 3.5.2, donde se representan las varianzas de los errores de estimación, que miden la precisión de los correspondientes estimadores con independencia de las simulaciones concretas. Concretamente, en la Figura 3.5.2 se representan gráficamente las varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizamiento

punto fijo para  $j = 1, 3, 8$ , es decir,  $P(k, k + 1)$ ,  $P(k, k + 3)$  y  $P(k, k + 8)$ , a partir de las fórmulas dadas en la Sección 3.4. Los resultados indican, por una parte, que las varianzas de los errores de suavizamiento son menores que las de filtrado y, por otra, que las varianzas de los errores de suavizamiento punto fijo decrecen a medida que aumenta el número de observaciones disponibles para estimar la señal en un instante  $k$  fijo.



**Figura 3.5.1.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento punto fijo,  $\hat{z}(k, k + j)$  para  $j = 1, 3, 8$ , con probabilidades de retraso  $p(k)$  dadas en (3.75).

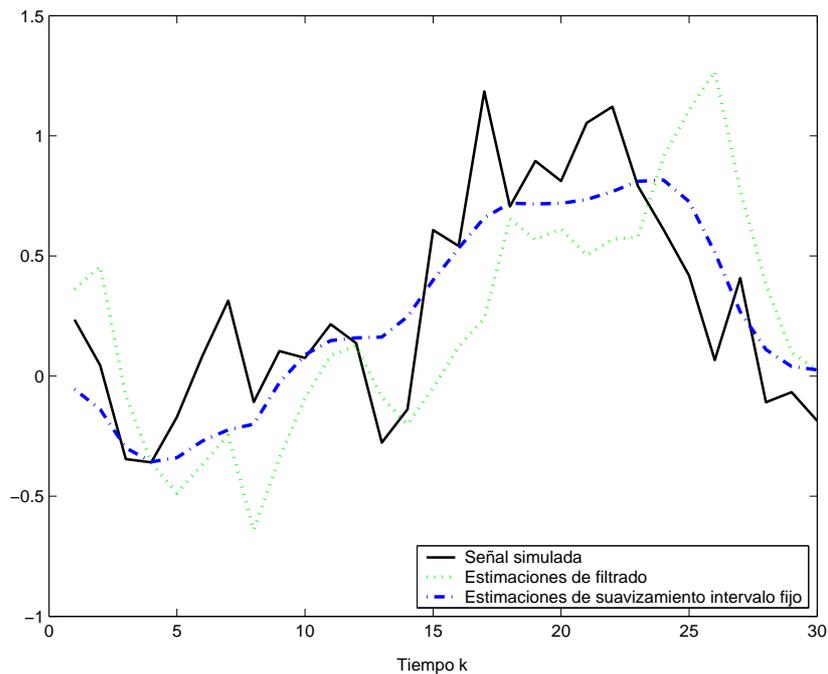


**Figura 3.5.2.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizado punto fijo,  $P(k, k+j)$ , para  $j = 1, 3, 8$ , con probabilidades de retraso  $p(k)$  dadas en (3.75).

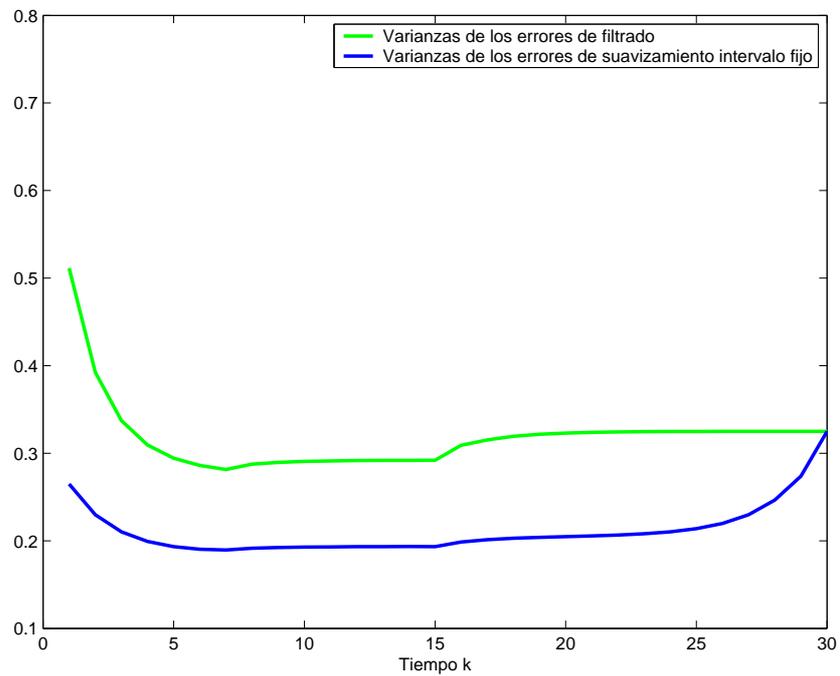
### Señal, filtro y suavizador intervalo fijo

En la Figura 3.5.3 se representan las estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y de suavizamiento intervalo fijo,  $\hat{z}(k, T)$ , basadas en las observaciones hasta el instante fijo  $T = 30$ . Los resultados obtenidos muestran que la estimación de suavizamiento sigue la evolución de la señal mejor que la de filtrado.

Para finalizar, realizamos el análisis de la bondad de los estimadores, comparando las varianzas de los errores de estimación. La Figura 3.5.7 muestra que las varianzas de los errores de suavizamiento intervalo fijo son menores que las correspondientes a los errores de filtrado.



**Figura 3.5.3.** Señal simulada, estimaciones de filtrado,  $\hat{z}(k, k)$ , y estimaciones de suavizamiento intervalo fijo,  $\hat{z}(k, 30)$ , con probabilidades de retraso  $p(k)$  dadas en (3.75).



**Figura 3.5.4.** Varianzas de los errores de filtrado,  $P(k, k)$ , y de suavizado intervalo fijo,  $P(k, 30)$ , a partir de observaciones retrasadas con probabilidades  $p(k)$  dadas en (3.75).

# Apéndice A

## Demostraciones postpuestas del Capítulo 2

### A.1. Demostración del Teorema 2.5.1

Hemos de determinar el filtro de la señal bajo las hipótesis especificadas en la Sección 2.5.1; partiendo de la expresión general del estimador en función de las innovaciones,

$$\hat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad (\text{A.1})$$

evaluada en  $j = k$ , hemos de calcular los coeficientes  $S(k, i) = E[z(k) \nu^T(i)]$ ,  $i \leq k$ , que, según (2.47), verifican

$$S(k, i) = E[z(k) y^T(i)] - E[z(k) \{P_{2,2}(i) \hat{z}(i, i-1) + \hat{w}(i, i-1)\}^T], \quad i \leq k-1.$$

Teniendo en cuenta que el estimador de mínimos cuadrados del ruido coloreado, en función de las innovaciones, está dado por la siguiente expresión

$$\hat{w}(k, j) = \sum_{i=1}^j \bar{S}(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\bar{S}(k, i) = E[w(k)\nu^T(i)]$ , y usando las hipótesis del modelo para  $E[z(k)y^T(i)]$  y la fórmula (A.1) para  $\hat{z}(i, i-1)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} S(k, i) &= A(k)p(i)B^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)\bar{S}^T(i, j), \quad 2 \leq i \leq k, \\ S(k, 1) &= A(k)p(1)B^T(1), \end{aligned}$$

relación que permite factorizar  $S(k, i)$  de la forma

$$S(k, i) = A(k)J(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (\text{A.3})$$

donde  $J$  es una función matricial que satisface

$$\begin{aligned} J(i) &= p(i)B^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=1}^{i-1} J(j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j) - \sum_{j=1}^{i-1} J(j)\Pi^{-1}(j)\bar{S}^T(i, j), \quad i \geq 2, \\ J(1) &= p(1)B^T(1). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por tanto, definiendo

$$O(k) = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1; \quad O(0) = 0, \quad (\text{A.5})$$

se deduce fácilmente, a partir de (A.1), que el filtro de la señal verifica la fórmula (2.48).

Para determinar la innovación a partir de (2.47), hemos de calcular expresiones para el predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , y del ruido coloreado,  $\hat{w}(k, k-1)$ . Un razonamiento similar al empleado para deducir la fórmula (2.48) para el filtro, conduce a la siguiente expresión para el predictor

$$\hat{z}(k, k-1) = A(k)O(k-1), \quad k \geq 1. \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, para calcular el predictor en una etapa del ruido coloreado, partimos de la expresión (A.2) para el estimador  $\widehat{w}(k, j)$ , por lo que se han obtenido los coeficientes  $\bar{S}(k, i) = E [w(k)\nu^T(i)]$ , para  $i \leq k - 1$ . Utilizando un razonamiento similar al empleado anteriormente para calcular  $S(k, i)$ , con  $i \leq k$ , se obtiene que

$$\bar{S}(k, i) = \alpha(k)\bar{J}(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (\text{A.7})$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{J}(i) &= \beta^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=1}^{i-1} \bar{J}(j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j) - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{J}(j)\Pi^{-1}(j)\bar{S}^T(i, j), \quad i \geq 2, \\ \bar{J}(1) &= \beta^T(1). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Así, sustituyendo (A.7) en la expresión del estimador del ruido coloreado, (A.2), y denotando

$$\bar{O}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{J}(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1; \quad \bar{O}(0) = 0, \quad (\text{A.9})$$

deducimos que

$$\widehat{w}(k, k-1) = \alpha(k)\bar{O}(k-1), \quad k \geq 1, \quad (\text{A.10})$$

y sustituyendo la expresión anterior y (A.6) en la relación (2.47), se deduce la fórmula (2.50) para el proceso innovación.

Las expresiones (2.49) y (2.51) para  $O(k)$  y  $\bar{O}(k)$  son inmediatas de (A.5) y (A.9), respectivamente. Así mismo, las relaciones (2.52) y (2.53) para  $J(k)$  y  $\bar{J}(k)$  se deducen fácilmente de (A.4) y (A.8) sin más que denotar

$$r(k) = E [O(k)O^T(k)] = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)J^T(i), \quad k \geq 1; \quad r(0) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$c(k) = E [O(k)\bar{O}^T(k)] = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)\bar{J}^T(i), \quad k \geq 1; \quad c(0) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$d(k) = E \left[ \overline{O}(k) \overline{O}^T(k) \right] = \sum_{i=1}^k \overline{J}(i) \Pi^{-1}(i) \overline{J}^T(i), \quad k \geq 1; \quad d(0) = 0. \quad (\text{A.13})$$

De las fórmulas anteriores se obtienen de forma inmediata, las correspondientes relaciones recursivas (2.54)-(2.56) para  $r(k)$ ,  $c(k)$  y  $d(k)$ .

Finalmente, la fórmula (2.57) para la matriz de covarianzas del proceso innovación,  $\Pi(k)$ , se deduce fácilmente, teniendo en cuenta la expresión (2.50) para la innovación  $\nu(k)$ , las hipótesis del modelo y las funciones matriciales  $r$ ,  $c$  y  $d$  definidas en (A.11)-(A.13).

## A.2. Demostración del Teorema 2.5.2

La fórmula recursiva (2.59) para el estimador de suavizamiento punto fijo de la señal, a partir de las observaciones especificadas en la Sección 2.5.1, es inmediata a partir de la expresión (A.1) evaluada en  $j = L > k$  ( $k$  fijo), sin más que separar el último sumando. Como en el Teorema 2.5.1 ya están determinados los elementos  $\nu(L)$  y  $\Pi(L)$  de (2.59), así como su condición inicial,  $\widehat{z}(k, k)$ , únicamente queda proponer una expresión explícita para la matriz  $S(k, L) = E[z(k)\nu^T(L)]$ , para  $L > k$ .

La relación (2.60) para  $S(k, L)$  es inmediata sin más que utilizar la fórmula (2.50) para la innovación  $\nu(L)$  y definir las funciones matriciales

$$\begin{aligned} E(k, L) &= E[z(k)O^T(L)], \quad L > k, \\ \overline{E}(k, L) &= E[z(k)\overline{O}^T(L)], \quad L > k. \end{aligned}$$

Las fórmulas recursivas (2.61) y (2.62) para  $E(k, L)$  y  $\overline{E}(k, L)$  se obtienen fácilmente utilizando las relaciones (2.49) y (2.51) para  $O(k)$  y  $\overline{O}(k)$ . Finalmente, las condiciones iniciales de las fórmulas anteriores se deducen teniendo en cuenta

el LPO, la expresión del filtro  $\hat{z}(k, k)$  y las expresiones (A.11) y (A.12) para las funciones de covarianzas  $r$  y  $c$ .

### A.3. Demostración del Teorema 2.5.3

Con el objetivo de demostrar la fórmula (2.63) para el suavizador intervalo fijo,  $\hat{z}(k, T)$ , partimos de la expresión general (A.1), de donde se obtiene que

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \sum_{i=k+1}^T S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad (\text{A.14})$$

puesto que en el Teorema 2.5.1 ya se ha obtenido una fórmula para el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , la innovación,  $\nu(k)$ , y su matriz de covarianzas,  $\Pi(k)$ , únicamente nos queda determinar los coeficientes  $S(k, i) = [z(k)\nu^T(i)]$ , para  $i \geq k+1$ . Usando la expresión (2.50) para  $\nu(i)$ , obtenemos que

$$S(k, i) = E[z(k)y^T(i)] - P_{2,2}(i)E[z(k)O^T(i-1)]A^T(i) - E[z(k)\bar{O}^T(i-1)]\alpha^T(i),$$

para  $i \geq k+1$ ; considerando las hipótesis del modelo en  $E[z(k)y^T(i)]$  y las expresiones (A.5) y (A.9) para las matrices  $O(k)$  y  $\bar{O}(k)$ , se deduce que

$$\begin{aligned} S(k, i) = & B(k)p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i)\sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i) \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)\bar{J}^T(j)\alpha^T(i), \quad i \geq k+1. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación  $S(k, j) = A(k)J(j)$  para  $j \leq k$ , deducida en (A.3), y las funciones matriciales  $r$  y  $c$  definidas en (A.11) y (A.12), la expresión anterior se

reescribe como

$$\begin{aligned}
S(k, i) &= B(k)p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i)A(k)r(k)A^T(i) - A(k)c(k)\alpha^T(i) \\
&\quad - P_{2,2}(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i) \\
&\quad - \sum_{j=k+1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)\bar{J}^T(j)\alpha^T(i), \quad i > k + 1, \\
S(k, k + 1) &= B(k)p(k + 1)A^T(k + 1) - P_{2,2}(k + 1)A(k)r(k)A^T(k + 1) \\
&\quad - A(k)c(k)\alpha^T(k + 1),
\end{aligned}$$

relaciones que permiten expresar los coeficientes  $S(k, i)$  como

$$S(k, i) = \Phi(k)\Delta(k, i), \quad i \geq k + 1, \quad (\text{A.15})$$

siendo  $\Phi(k)$  la matriz definida en (2.65) y

$$\Delta(k, i) = \begin{pmatrix} \Delta^{(11)}(k, i) \\ \Delta^{(21)}(k, i) \\ \Delta^{(31)}(k, i) \end{pmatrix}, \quad i > k + 1; \quad \Delta(k, k + 1) = \begin{pmatrix} p(k + 1)A^T(k + 1) \\ P_{2,2}(k + 1)A^T(k + 1) \\ \alpha^T(k + 1) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta^{(11)}(k, i) &= p(i)A^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(11)}(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i) \\
&\quad - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(11)}(k, j)\Pi^{-1}(j)\bar{J}^T(j)\alpha^T(i), \quad i > k + 1,
\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(21)}(k, i) &= P_{2,2}(i)A^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(21)}(k, j)\Pi^{-1}(j)J^T(j)A^T(i) \\
&\quad - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(21)}(k, j)\Pi^{-1}(j)\bar{J}^T(j)\alpha^T(i), \quad i > k + 1,
\end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(31)}(k, i) &= \alpha^T(i) - P_{2,2}(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(31)}(k, j) \Pi^{-1}(j) J^T(j) A^T(i) \\ &\quad - \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta^{(31)}(k, j) \Pi^{-1}(j) \bar{J}^T(j) \alpha^T(i), \quad i > k + 1. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por tanto, si definimos ahora

$$q(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad k < T; \quad q(T, T) = 0, \quad (\text{A.20})$$

la expresión (2.63) para  $\hat{z}(k, T)$  es inmediata de (A.14), usando (A.15).

Finalmente, deducimos la fórmula recursiva (2.64) para  $q(k, T)$ . Si calculamos, usando (A.16)-(A.19), las diferencias  $\Delta(k, i) - \Delta(k + 1, i)$ , para  $i \geq k + 2$ , y comparamos las expresiones obtenidas con las que resultan, de (A.16)-(A.19), para  $\Delta(k + 1, i)$ , se obtiene la siguiente relación

$$\Delta(k, i) = \Phi^{(12)}(k + 1) \Delta(k + 1, i), \quad i \geq k + 2, \quad (\text{A.21})$$

siendo  $\Phi^{(12)}(k + 1)$  la matriz

$$\begin{pmatrix} I_M & -H(k + 1) J^T(k + 1) & -H(k + 1) \bar{J}^T(k + 1) \\ 0 & I_M - G(k + 1) J^T(k + 1) & -G(k + 1) \bar{J}^T(k + 1) \\ 0 & -\alpha^T(k + 1) \Pi^{-1}(k + 1) J^T(k + 1) & I_N - \alpha^T(k + 1) \Pi^{-1}(k + 1) \bar{J}^T(k + 1) \end{pmatrix},$$

donde las funciones matriciales  $G$  y  $H$  están dadas en (2.67) y (2.68).

Por tanto, la fórmula recursiva (2.64) para  $q(k, T)$  es inmediata de (A.20) si separamos el término en  $i = k + 1$  y usamos (A.21) y las definiciones de  $\Delta(k, k + 1)$  y  $q(k + 1, T)$ .

## A.4. Demostración del Teorema 2.5.4

Para determinar el estimador de filtrado de la señal  $z(k)$  a partir de las observaciones especificadas en la Sección 2.5.2, partimos de la fórmula general del

estimador en función de las innovaciones,

$$\widehat{z}(k, j) = \sum_{i=1}^j S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad (\text{A.22})$$

evaluada en  $j = k$ , y comenzamos calculando los coeficientes  $S(k, i) = E[z(k) \nu^T(i)]$ , con  $1 \leq i \leq k$ , que, usando (2.71), están dados de la forma

$$S(k, i) = E[z(k) y^T(i)] - p(i) E[z(k) \widehat{z}^T(i, i-1)], \quad 1 \leq i \leq k.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis del modelo y que

$$\widehat{z}(i, i-1) = \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j) \Pi^{-1}(j) \nu(j), \quad i > 1; \quad \widehat{z}(1, 0) = 0,$$

obtenemos

$$S(k, i) = A(k) p(i) B^T(i) + C(k) D^T(i) - p(i) \sum_{j=1}^{i-1} S(k, j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j), \quad 2 \leq i \leq k;$$

$$S(k, 1) = A(k) p(1) B^T(1) + C(k) D^T(1).$$

La expresión anterior garantiza que los coeficientes  $S(k, i)$  pueden expresarse como

$$S(k, i) = A(k) J_1(i) + C(k) J_2(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (\text{A.23})$$

donde  $J_1$  y  $J_2$  son funciones matriciales que satisfacen

$$J_1(i) = p(i) B^T(i) - p(i) \sum_{j=1}^{i-1} J_1(j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j), \quad i \geq 2; \quad (\text{A.24})$$

$$J_1(1) = p(1) B^T(1),$$

$$J_2(i) = D^T(i) - p(i) \sum_{j=1}^{i-1} J_2(j) \Pi^{-1}(j) S^T(i, j), \quad i \geq 2; \quad (\text{A.25})$$

$$J_2(1) = D^T(1).$$

Por tanto, si definimos

$$O_1(k) = \sum_{i=1}^k J_1(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1, \quad (\text{A.26})$$

$$O_2(k) = \sum_{i=1}^k J_2(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k \geq 1, \quad (\text{A.27})$$

la fórmula (2.72) es inmediata, partiendo de (A.22) y usando (A.23). Además, las relaciones recursivas (2.73) y (2.74) para los vectores  $O_1(k)$  y  $O_2(k)$  son deducidas fácilmente de (A.26) y (A.27), considerando como condiciones iniciales  $O_1(0) = 0$  y  $O_2(0) = 0$ , respectivamente.

Un razonamiento similar al empleado para obtener (2.72) conduce a la siguiente expresión para el predictor en una etapa de la señal

$$\hat{z}(k, k-1) = A(k)O_1(k-1) + C(k)O_2(k-1); \quad (\text{A.28})$$

por tanto, de (2.71), la expresión (2.75) para la innovación  $\nu(k)$  queda probada.

La expresión (2.76) para  $J_1(k)$  también queda establecida considerando  $i = k$  en (A.24), teniendo en cuenta que, por (A.23), se tiene que

$$\begin{aligned} J_1(k) &= p(k)B^T(k) - p(k)\sum_{j=1}^{k-1} J_1(j)\Pi^{-1}(j)J_1^T(j)A^T(k) \\ &\quad - p(k)\sum_{j=1}^{k-1} J_1(j)\Pi^{-1}(j)J_2^T(j)C^T(k), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

y definiendo las siguientes matrices de covarianzas

$$r_1(k) = E [O_1(k)O_1^T(k)] = \sum_{j=1}^k J_1(j)\Pi^{-1}(j)J_1^T(j), \quad k \geq 1; \quad r_1(0) = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$r_{12}(k) = E [O_1(k)O_2^T(k)] = \sum_{j=1}^k J_1(j)\Pi^{-1}(j)J_2^T(j), \quad k \geq 1; \quad r_{12}(0) = 0. \quad (\text{A.30})$$

De forma análoga, la expresión (2.77) para  $J_2(k)$  se obtiene usando (A.25) y denotando

$$r_2(k) = E [O_2(k)O_2^T(k)] = \sum_{j=1}^k J_2(j)\Pi^{-1}(j)J_2^T(j), \quad k \geq 1; \quad r_2(0) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Las relaciones recursivas (2.78)-(2.79) para las matrices  $r_1(k)$ ,  $r_2(k)$  y  $r_{12}(k)$  son inmediatas de (A.29)-(A.31).

Finalmente, para obtener la expresión (2.81) para la matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k)$ , utilizamos la fórmula (2.75) para  $\nu(k)$ , las funciones matriciales  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_{12}$  definidas en (A.29)-(A.31) y la relaciones (2.76) y (2.77) para las matrices  $J_1(k)$  y  $J_2(k)$ .

## A.5. Demostración del Teorema 2.5.5

La fórmula recursiva (2.59) para el estimador de suavizamiento punto fijo de la señal, a partir de observaciones especificadas en (2.69), se deduce fácilmente de la expresión general (A.22), separando el último sumando. Los elementos de esta fórmula están completamente determinados por los resultados recogidos en el Teorema 2.5.4, salvo la matriz  $S(k, L) = E[z(k)\nu^T(L)]$ , para  $L > k$ ; si utilizamos (2.75) para la innovación  $\nu(L)$  y las hipótesis del modelo y definimos las funciones matriciales

$$E_i(k, L) = E[z(k)O_i^T(L)], \quad L > k; \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.32})$$

la fórmula (2.60) para  $S(k, L)$  se deduce de forma inmediata.

Las relaciones recursivas (2.85) y (2.85) para  $E_1(k, L)$  y  $E_2(k, L)$  se obtienen fácilmente usando las expresiones (2.73) y (2.74) para  $O_1(k)$  y  $O_2(k)$ , respectivamente. Para finalizar, la condiciones iniciales de las fórmulas anteriores

se deducen teniendo en cuenta que, por el LPO,  $E[z(k)O_i^T(k)] = E[\hat{z}(k, k)O_i^T(k)]$ , para  $i = 1, 2$ ; así, usando la expresión (2.72) para el filtro y la definición de las funciones matriciales  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_{12}$ , dichas condiciones iniciales quedan establecidas.

## A.6. Demostración del Teorema 2.5.6

Para obtener el estimador de suavizamiento intervalo fijo de la señal, a partir de observaciones verificando las hipótesis descritas en la Sección 2.5.2, partimos de la expresión (A.22), de donde se deduce que

$$\hat{z}(k, T) = \hat{z}(k, k) + \sum_{i=k+1}^T S(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T.$$

Puesto que en el Teorema 2.5.4 se ha obtenido una expresión para el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , sólo nos queda determinar el sumatorio; con esta finalidad, calculamos los coeficientes  $S(k, i)$  para  $i \geq k + 1$ . Usando un razonamiento similar al utilizado en el Teorema 2.5.4 para obtener  $S(k, i)$  con  $i \leq k$ , obtenemos, en este caso, que

$$S(k, i) = B(k)p(i)A^T(i) - p(i)\sum_{j=1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j), \quad i \geq k + 1,$$

y teniendo en cuenta (A.23) para  $S(k, i)$ , con  $i \leq k$ , y las expresiones (A.29)-(A.31) para  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_{12}$ , se deduce

$$\begin{aligned} S(k, i) = & [B(k) - A(k)r_1(k) - C(k)r_{12}^T(k)] p(i)A^T(i) - [A(k)r_{12}(k) + C(k)r_2(k)] \\ & \times p(i)C^T(i) - p(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} S(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j), \quad i \geq k + 1. \end{aligned}$$

Esta expresión para  $S(k, i)$  permite expresar

$$\begin{aligned} S(k, i) = & [B(k) - A(k)r_1(k) - C(k)r_{12}^T(k)] \Delta_1(k, i) \\ & - [A(k)r_{12}(k) + C(k)r_2(k)] \Delta_2(k, i), \quad i \geq k + 1, \end{aligned}$$

siendo  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  funciones matriciales verificando

$$\begin{aligned}\Delta_1(k, i) &= p(i)A^T(i) - p(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_1(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j), \quad i > k + 1, \\ \Delta_1(k, k + 1) &= p(k + 1)A^T(k + 1),\end{aligned}\tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(k, i) &= p(i)C^T(i) - p(i) \sum_{j=k+1}^{i-1} \Delta_2(k, j)\Pi^{-1}(j)S^T(i, j), \quad i > k + 1, \\ \Delta_2(k, k + 1) &= p(k + 1)C^T(k + 1).\end{aligned}\tag{A.34}$$

Por tanto, si definimos

$$q_1(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta_1(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad q_1(T, T) = 0,\tag{A.35}$$

$$q_2(k, T) = \sum_{i=k+1}^T \Delta_2(k, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad k < T; \quad q_2(T, T) = 0,\tag{A.36}$$

la expresión (2.87) para el suavizador intervalo fijo queda demostrada.

A continuación, se obtiene la fórmula (2.88) para  $q_1(k, T)$ . Con esta finalidad, se utiliza la siguiente expresión, obtenida de (A.33) y válida para  $i > k + 2$ ,

$$\begin{aligned}\Delta_1(k, i) - \Delta_1(k + 1, i) &= -H_1(k + 1)p(i) [A(i)J_1(k + 1) + C(i)J_2(k + 1)]^T \\ &\quad - p(i) \sum_{j=k+2}^{i-1} [\Delta_1(k, j) - \Delta_1(k + 1, j)] \Pi^{-1}(j)S^T(i, j),\end{aligned}$$

siendo  $H_1(k + 1) = p(k + 1)A^T(k + 1)\Pi^{-1}(k + 1)$ . Comparando esta expresión con (A.33) y (A.34) en  $k + 1$ , se deduce que, para  $i > k + 2$ ,

$$\Delta_1(k, i) - \Delta_1(k + 1, i) = -H_1(k + 1) [J_1^T(k + 1)\Delta_1(k + 1, i) + J_2^T(k + 1)\Delta_2(k + 1, i)],\tag{A.37}$$

relación que, según puede probarse fácilmente, también se verifica para  $i = k + 2$ .

Por tanto, si despejamos  $\Delta_1(k, i)$  en la fórmula anterior y sustituimos la expresión resultante en la relación (A.35) para  $q_1(k, T)$ , se obtiene

$$q_1(k, T) = [I_M - H_1(k+1)J_1^T(k+1)] \sum_{i=k+2}^T \Delta_1(k+1, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) \\ - H_1(k+1)J_2^T(k+1) \sum_{i=k+2}^T \Delta_2(k+1, i)\Pi^{-1}(i)\nu(i) + H_1(k+1)\nu(k+1),$$

y utilizando la definición de las funciones  $q_1$  y  $q_2$ , dada en (A.35) y (A.36), se deduce la expresión (2.88) para  $q_1(k, T)$ . Análogamente se deduce la relación (2.89) para  $q_2(k, T)$ .



# Apéndice B

## Demostraciones postpuestas del Capítulo 3

### B.1. Demostración del Teorema 3.1.1

Considerando las hipótesis especificadas en la Sección 3.2, hemos de determinar el predictor en una etapa y el filtro de la señal que, según (3.3), están dados por

$$\hat{z}(k, k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i), \quad \hat{z}(k, k) = \sum_{i=1}^k S(k, i) \Pi^{-1}(i) \nu(i).$$

Por tanto, hemos de calcular los coeficientes  $S(k, i) = E [z(k) \nu^T(i)]$ , para  $i \leq k$ ; usando las expresiones (3.7) y (3.6) para  $\hat{y}(i, i-1)$  y  $\hat{Z}^T(i, i-1)$ , se deduce que

$$S(k, i) = A(k)J(i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (\text{B.1})$$

donde  $J$  es una función matricial que satisface

$$\begin{aligned} J(i) &= G_B^T(i) - \sum_{j=1}^{i-1} J(j) \Pi^{-1}(j) E [\nu(j) Z^T(i)] \bar{\Theta}^T(i) \\ &\quad - J(i-1) H^T(i), \quad 2 \leq i \leq k, \\ J(1) &= G_B^T(1). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Por tanto, si denotamos

$$O(k) = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)\nu(i), \quad (\text{B.3})$$

el predictor en una etapa de la señal,  $\hat{z}(k, k-1)$ , y el filtro,  $\hat{z}(k, k)$ , claramente satisfacen las expresiones (3.9) y (3.10), respectivamente.

La fórmula recursiva (3.11) para el vector  $O(k)$  es inmediata de (B.3). Además, sustituyendo (3.9) y (3.10) en (3.8), se tiene que la innovación,  $\nu(k)$ , está dada por (3.16).

La expresión (3.12) para  $J(k)$  se obtiene fácilmente de (B.2), teniendo en cuenta (B.1) y denotando

$$r(k) = E [O(k)O^T(k)] = \sum_{i=1}^k J(i)\Pi^{-1}(i)J^T(i), \quad r(0) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Además, a partir de esta expresión, las matrices  $r(k)$  satisfacen claramente la relación recursiva (3.13).

Finalmente, obtenemos la expresión (3.17) para la matriz de covarianzas de la innovación,  $\Pi(k) = E [y(k)y^T(k)] - E [\hat{y}(k, k-1)\hat{y}^T(k, k-1)]$ . A partir de la expresión (3.16) para  $\nu(k)$ , se deduce que

$$\hat{y}(k, k-1) = G_A(k)O(k-1) + H(k)\nu(k-1);$$

así, utilizando esta expresión en la fórmula anterior para  $\Pi(k)$ , las ecuaciones (B.4) y (3.11) para las matrices  $r(k)$  y  $O(k)$  y las hipótesis del modelo, la expresión (3.17) para  $\Pi(k)$  queda probada.

## B.2. Demostración del Teorema 3.3.2

La expresión (3.18) para el suavizador punto fijo se obtiene de forma inmediata a partir de (3.3), sin más que separar el último término de la suma.

Para calcular la relación (3.19) para  $S(k, L) = E[z(k)\nu^T(L)]$ , con  $L > k$ , utilizamos la fórmula (3.16) para la innovación  $\nu(L)$  y definimos, para  $L \geq k$ , las funciones  $E(k, L) = E[z(k)O^T(L)]$ . Además, si tenemos en cuenta (B.1), la condición inicial  $S(k, k) = A(k)J(k)$  también queda probada.

Finalmente, usando la expresión recursiva (3.11) para  $O(k)$ , se deduce la fórmula (3.20) para  $E(k, L)$  con  $L > k$ . La condición inicial de esta relación,  $E(k, k) = A(k)r(k)$ , es inmediata ya que, por el LPO,

$$E(k, k) = E[z(k)O^T(k)] = E[\hat{z}(k, k)O^T(k)],$$

y teniendo en cuenta (3.10) y (B.4), para  $\hat{z}(k, k)$  y  $O(k)$ , respectivamente, la fórmula queda probada.



# Bibliografía

- [1] Anderson, B. y Moore, J. (1979), *Optimal filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. [Pág. vii]
- [2] Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1976), *Time series analysis. Forecasting and control*, Holden-Day, U.S.A. [Pág. 70]
- [3] Brammer, K. y Siffing, G. (1989), *Kalman-Bucy filters*, Artech House. [Pág. vii]
- [4] Caines, P. E. (1988), *Linear stochastic systems*, John Wiley & Sons, New York. [Pág. vii]
- [5] Catlin, D. E. (1989), *Estimation, control and the discrete Kalman filter*, Springer-Verlag, New York. [Pág. vii]
- [6] Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A., Jiménez-López, J. y Linares-Pérez, J. (2003), Filtering and fixed-point smoothing from an innovation approach in systems with uncertainty, *Extracta Mathematicae*, **18(1)**, 119-128. [Pág. 2]
- [7] Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J., Nakamori, S. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2003), Suavizador intervalo fijo en sistemas lineales discretos usando funciones de covarianza, *Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa SEIO*, 4366-4377. [Pág. x, 2, 16]

- 
- [8] Chui, C. K. y Chen, G. (1999), *Kalman filtering with real-time applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany. [Pág. 1]
- [9] Evans, J. S. y Krishnamurthy, V. (1999), Hidden Markov model state estimation with randomly delayed observations, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **47**, 2157-2166. [Pág. IX, 86]
- [10] Grewal, M. S. y Andrews, A. P. (1993), *Kalman filtering. Theory and practice*, Prentice Hall, New Jersey. [Pág. VII]
- [11] Grewal, M. S. y Andrews, A. P. (2001), *Kalman filtering theory. Theory and practice using MATLAB*, Prentice Hall, New Jersey. [Pág. VII]
- [12] Hadidi, M. T. y Schwartz, S. C. (1979), Linear recursive state estimators under uncertain observations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-24(6)**, 944-948. [Pág. VIII, 34, 35, 40, 56, 71]
- [13] Haykin, S. (1996), *Adaptive filter theory*, Prentice-Hall, New York. [Pág. 24]
- [14] Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (1994), Linear estimation for discrete-time systems in the presence of time-correlated disturbances and uncertain observations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-39(8)**, 1636-1638. [Pág. VIII, 34]
- [15] Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (1995), Linear smoothing for discrete-time systems in the presence of correlated disturbances and uncertain observations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-40(8)**, 1486-1488. [Pág. VIII, 34]

- 
- [16] Jaffer, A. G. y Gupta, S. C. (1971), Recursive bayesian estimation with uncertain observation, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-17**, 614-616. [Pág. VIII, 34]
- [17] Kailath, T. (1968), An innovation approach to least squares estimation. Part I: Linear filtering in additive white noise, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-13**, 646-655. [Pág. VII]
- [18] Kailath, T. (1974), A view of three decades of linear filtering theory, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-20**, 146-181. [Pág. VI, VII]
- [19] Kailath, T. (1976), *Lectures on linear least-squares estimation*, Springer-Verlag. [Pág. VII, 2, 37]
- [20] Kalman, R. E. (1960), A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME. Journal of Basic Engineering*, **D-82**, 35-45. [Pág. VI, 1]
- [21] Korbicz, J. y Bidyuk, P. (1993), *State and parameter estimation*, Higher College Engineering Press, Poland. [Pág. VII]
- [22] Magnus, J. R. y Neudecker, H. (1999), *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*, Wiley & Sons, New York. [Pág. 7, 38, 89]
- [23] Meditch, J. S. (1969), *Stochastic optimal linear estimation and control*, McGraw-Hill, New York. [Pág. VII]
- [24] Monzingo, R. A. (1975), Discrete optimal linear smoothing for systems with uncertain observations, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-21(3)**, 271-275. [Pág. VIII, 34]

- 
- [25] Monzingo, R. A. (1981), Discrete linear recursive smoothing for systems with uncertain observations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26(3)**, 754-757. [Pág. VIII, 35]
- [26] Nahi, N. E. (1969), Optimal recursive estimation with uncertain observation, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-15(4)**, 457-462. [Pág. VII, 34, 35]
- [27] Nakamori, S. (1992), Design of recursive fixed-point smoother using covariance information in linear discrete-time systems, *International Journal of Systems Science*, **23(12)**, 2323-2334. [Pág. x, 1, 2]
- [28] Nakamori, S. (1995), Estimation technique using covariance information in linear discrete-time systems, *Signal Processing*, **43**, 169-179. [Pág. x, 1, 2]
- [29] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A., Jiménez-López, J. y Linares-Pérez, J. (2004), An innovation approach to the estimation problem from uncertain observations with correlated signal and noise, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Wiley-VCH, Germany, 283-286. [Pág. 36, 54]
- [30] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2003), New design of estimators using covariance information with uncertain observations in linear discrete-time systems, *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 429-441. [Pág. x, 35]
- [31] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2003), Fixed-point smoothing with non-independent uncertainty using covariance information, *International Journal of Systems Science*, **34(7)**, 439-452. [Pág. x, 35, 43, 58]

- [32] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2003), Linear estimation from uncertain observations with white plus coloured noises using covariance information, *Digital Signal Processing*, **13**, 552-568. [Pág. x, 36, 54, 72]
- [33] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2005), Recursive estimators of signals from measurements with stochastic delays using covariance information, *Applied Mathematics and Computation*, **162(1)**, 65-79. [Pág. x, 86, 93, 94]
- [34] Nakamori, S., Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2003), Fixed-interval smoother with non-independent uncertainty using covariance information, *Proceedings of the 12th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling* 399-404. [Pág. x, 35]
- [35] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2003), Recursive fixed-interval smoother with correlated signal and noise in presence of uncertain observations, *Proceedings of the 3rd International Symposium on ISPA*, 854-859. [Pág. x, 36, 54]
- [36] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Fixed-interval smoothing problem from uncertain observations with correlated signal and noise, *Applied Mathematics and Computation*, **154**, 239-255. [Pág. x, 36, 54]
- [37] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Fixed-interval smoother from randomly delayed observations, *Proceedings of the 3rd IEEE SAM Signal Processing Workshop* [Pág. x, 86]

- [38] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Fixed-interval smoother under non-independent uncertainty with white plus coloured noises, *Proceedings of the 6th World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability*, 173-174. [Pág. 36, 54]
- [39] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Estimation algorithm from randomly delayed observations with white plus coloured noises, *Proceedings of the 1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 19-23. [Pág. xi, 87, 98]
- [40] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Signal estimation from observations affected by random delays and white plus coloured noises, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Wiley-VCH, Germany, 287-290. [Pág. xi, 87, 98]
- [41] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Estimación de señales a partir de observaciones aleatoriamente retrasadas, *Actas del XXVIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa SEIO*, 51-52. [Pág. xi, 87, 98]
- [42] Nakamori, S., Hermoso-Carazo, A., Linares-Pérez, J. y Sánchez-Rodríguez, M. I. (2004), Signal estimation from observations affected by random delays and white plus coloured noises, *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, **1(3)**, 495-506. [Pág. xi, 87, 98]
- [43] Sorenson, H. W. (1970), Least squares estimation: from Gauss to Kalman, *IEEE Spectrum*, **7**, 63-68. [Pág. vii]

- 
- [44] Su, C. L. y Lu, C. N. (2001), Interconnected network state estimation using randomly delayed measurements, *IEEE Transactions on Power Systems*, **16**, 870-878. [Pág. IX, 86]
- [45] Tugnait, J. K. (1981), Asymptotic stability of the MMSE linear filter for systems with uncertain observations, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-27(2)**, 247-250. [Pág. VIII, 34]
- [46] Wang, X. (1984), Recursive algorithms for linear LMSE estimators under uncertain observations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29(9)**, 853-854. [Pág. VIII]