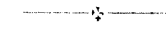


MECÁNICA

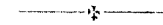
APLICADA A LAS CONSTRUCCIONES



2 400 40  MADE IN SPAIN

y
MECÁNICA

APLICADA Á LAS CONSTRUCCIONES



MECÁNICA

APLICADA Á LAS CONSTRUCCIONES

FOR EL

CORONEL GRADUADO TENIENTE CORONEL DE INGENIEROS

D. JOSÉ MARVÁ Y MAYER

Profesor que fué de la Academia del Cuerpo

SEGUNDA EDICIÓN
AUMENTADA

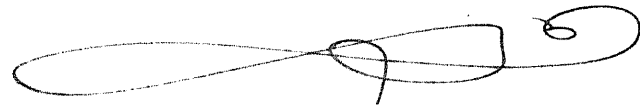
MADRID

IMPRESA Y LITOGRAFÍA DE JULIÁN PALACIOS
Calle del Arsenal, 27 — Teléfono 133

1894

PRÓLOGO

*Es propiedad de su autor. Los
ejemplares llevarán su firma y
contraseña.*



Cábeme en la composición de este libro cierta responsabilidad que, lejos de abrumarme, me envanece. Hace ya algunos años, llevado de mi afición á estudios que han ocupado lo mejor de mi vida, analizaba un notable trabajo del distinguido profesor de la Academia de Guadalajara, y concluía diciendo: «Los alumnos de las Escuelas y los ingenieros de diversos ramos, carecen de un libro donde puedan consultar los casos que presenta diariamente la práctica, aunando la sencillez al último adelanto de las teorías. Profesores como el Sr. Marvá, están llamados á llenar este vacío» (1).

No cayó mi excitación en campo estéril, y hoy puede disfrutar el público estudioso de una obra especialísima en su género. El autor, á quien son familiares los desarrollos analíticos, y que posee el don, el buen gusto podemos decir, necesario para

(1) *Anales de la construcción y de la industria*, tomo VII, pág. 205; 1882.

escoger los procedimientos gráficos más elegantes y adecuados, se ha ejercitado no poco en la experimentación de las propiedades físicas de los materiales; y todo este caudal, unido al que suministra la diaria tarea del magisterio, ha producido la obra que tengo la inmerecida honra de encabezar con estas líneas. En ella se huye de cálculos complicados que fatigan al alumno y molestan al ingeniero encargado de la redacción de un proyecto, y se emplean, al lado del procedimiento detallado, métodos abreviados, sin perjuicio de la exactitud, buscando relaciones fáciles de retener en la memoria, mediante las cuales se llegue directa y rápidamente al término del problema.

El Sr. Marvá, hombre que antes de enseñar ha proyectado y construido mucho, conoce mejor que nadie la importancia de los pormenores, y no los ha escaseado. En casi todos los libros de Mecánica aplicada se atiende al conjunto de una obra, sin fijarse en los medios de enlace ó de apoyo, que se abandonan al arbitrio del práctico, aun cuando son condiciones esenciales sin las que todo cálculo reposa en vacío; aquí, bien al contrario, se encontrará un arsenal inapreciable de elementos para proyectar con acierto las dimensiones de cuerdas, cadenas, rodillos, articulaciones, pernos, tornillos y roblones. También se hallan suficientemente expla-

nados los importantísimos experimentos con que ha sido confirmada la teoría matemática de los límites de carga permanente dada por Poncelet en su inimitable *Introduction à la Mécanique industrielle* (1), así como aquellos otros cuyo fin ha sido aquilatar el nuevo modo de considerar la acción de las masas pulverulentas. Y si se mira el gran caudal de tablas de todas clases, así de datos como de resultados, á cada paso intercaladas, se vendrá á conocer cómo en un solo libro tiene el ingeniero un tratado doctrinal y un manual ó *vademecum* de manejo diario.

Donde el sistema de tablas no alcanza, como en las armaduras y en las bóvedas, el autor propone y calcula tipos de los cuales se pueden deducir las dimensiones de obras análogas por los métodos de transformación anamórfica. En lo relativo al empuje de tierras, acepta los resultados de las investigaciones más recientes; pero en las bóvedas se atiende á las curvas de presión hipotéticas, cuyo uso ha tomado carta de naturaleza, no obstante ser tan empírico. A pesar de mi ya antigua preferencia por los métodos que hacen entrar las bóvedas bajo el dominio de la teoría de la elasticidad (2), cuyo

(1) Segunda edición, Metz; 1839.

(2) Véase mi nota VI á la *Instrucción sobre la estabilidad de las construcciones*, Madrid; 1870.

imperio en la ciencia del ingeniero debe ser absoluto, reconozco la prudente reserva con que el señor Marvá se ha abstenido de adoptar un camino que reprueban aún escritores de nota, y que no conduce á resultados de sencilla y rápida aplicación á la práctica. Tal vez esté llamado á trabajar en este sentido y alcanzar con ello nuevos lauros el mismo oficial que tanto honra á la esclarecida insignia de las torres de plata.

Eduardo Saavedra.

ADVERTENCIA

En esta segunda edición ha introducido el autor algunos aumentos, siendo entre ellos de notar, principalmente, los relativos al mejor conocimiento de los cementos y reglas para su ensayo; el cálculo de las planchas metálicas para pavimentos de edificios ó de puentes; el empleo de las líneas de influencia en la determinación de los máximos momentos de flexión y esfuerzos cortantes producidos por cargas en movimiento; el cálculo de las bóvedas articuladas de mampostería y el de las pilas, metálicas ó de mampostería, y estribos de puente.

NOTACIONES PRINCIPALES

NOTACIONES PRINCIPALES

$P, P' \dots P_1 \dots$	}	Fuerzas aisladas.
$F, F' \dots F_1 \dots$	}	
$p, p' \dots p_1 \dots$	}	Fuerzas repartidas, por unidad lineal ó por uni-
$q, q' \dots q_1 \dots$	}	dad superficial.
$C, C' \dots$		Esfuerzos cortantes.
$C_0, C'_0 \dots$		Idem íd. máximos.
$S, S' \dots$		Esfuerzos rasantes.
$S_0, S'_0 \dots$		Idem íd. máximos.
$M, M' \dots M_1 \dots$	}	Momentos de flexión.
$m, m' \dots \mu \dots$	}	
$M_0 \dots m_0 \dots \mu_0 \dots$		Idem íd. máximos.
$I, I' \dots I_0 \dots$	}	Momentos de inercia de las secciones trasversales
	}	de las piezas.
$E \dots$		Coeficiente de elasticidad longitudinal.
$E' \dots$		Idem íd. transversal.
$i, i' \dots i_0 \dots$	}	Deformaciones longitudinales y trasversales, por
	}	unidad lineal de sólido.
$D, D' \dots$		Límites de elasticidad.
$\bar{R}, \bar{R}_1 \dots R_m \dots$		Coeficientes de fractura por extensión.
$\bar{R}', \bar{R}'_1 \dots \bar{R}'_m \dots$		Idem íd. por compresión.
$\bar{R}'' , \bar{R}''_1 \dots \bar{R}''_m \dots$		Idem íd. por esfuerzo cortante.
$\bar{R}''' , \bar{R}'''_1 \dots \bar{R}'''_m \dots$		Idem íd. por desgarramiento longitudinal.

R, R_1, \dots, R_m	Coefficientes de trabajo por extensión.
R', R'_1, \dots, R'_m	Idem íd. por compresión.
R'', R''_1, \dots, R''_m	Idem íd. por esfuerzo cortante.
$R''', R'''_1, \dots, R'''_m$	Idem íd. por desgarramiento longitudinal.
L, L', \dots, l, l'	Longitudes.
e, e', \dots, z	{ Distancias de las fibras de una pieza prismática al eje neutro.
a	
b	Lado de escuadría paralelo al plano de las fuerzas.

FE DE ERRATAS

TEXTO

Páginas	Líneas.	Dice.	Debe decir.
68	25	alargamiensos	alargamientos
213	22	} los centros de uno de los orificios	} los centros de los orificios
312	3		
312	14	$m = \frac{Px}{l} (1 + \dots$	$m = \frac{Px}{l} (-d + \dots$
637	9	$y = -\frac{z}{l}$	$y = -\frac{z}{l}$
656	7	igual á la unidad lineal	igual á la abscisa $OS = x$
657	34	$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots, \frac{n}{1}$	} $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots, \frac{n}{1}$, multiplicadas por $l - x$
658	3	$(mb - mb') \times 1$	
658	4	$(S_2 a_2 - S_2 d_2) \times 1$	$(S_2 a_2 - S_2 d_2) \times \frac{1}{l-x}$

I

INTRODUCCIÓN

1.º DEFINICIONES

2.º CONDICIONES DE EQUILIBRIO Y RESISTENCIA
EN UNA CONSTRUCCIÓN

1.º DEFINICIONES

MECÁNICA APLICADA Á LAS CONSTRUCCIONES

1. Definición.—La mecánica aplicada á las construcciones, es una ciencia que tiene por objeto dar al conjunto y á los elementos de una construcción cualquiera, la disposición, forma y dimensiones más convenientes, para garantizarla de la destrucción producida por las fuerzas que sobre ella actúan.

2. Problemas que resuelve.—Aun suponiendo que los materiales empleados en las obras fuesen indestructibles é indeformables, sería preciso para conseguir los objetos precedentes que hubiese equilibrio en todas las fuerzas á que se halla sometida la construcción. La resolución de este problema corresponde á la estática.

Pero como quiera que los cuerpos son deformables y perecederos, hay necesidad, además, de asegurarles resistencia y rigidez suficientes para neutralizar la acción destructora de las fuerzas aplicadas á sus diferentes puntos.

En suma; los problemas que resuelve la mecánica aplicada á las construcciones, pueden incluirse en los dos grupos siguientes:

Resistencia de materiales.

Estabilidad de las construcciones.

3. Naturaleza de su estudio.—La mecánica aplicada á las construcciones, es una ciencia práctica relacionada con la física y con la mecánica racional.

La observación de los fenómenos que acompañan á la deformación y fractura de los materiales, producidas por fuerzas exteriores, ha proporcionado interesante y cada vez más numerosa colección de datos. Generalizando estos resultados de experiencia, se han deducido *hipótesis* que han servido de base para formar, con el indispensable auxilio de las leyes generales de la mecánica, *las teorías de la resistencia de materiales*.

NATURALEZA DE LAS FUERZAS

4. Fuerzas repartidas.—Las fuerzas que considera la mecánica aplicada, son:

1.º Fuerzas que actúan sobre la masa de los cuerpos (pesantez).

2.º Fuerzas que obran sobre la superficie de los cuerpos, comprimiéndolos, extendiéndolos, flexándolos, etc.

Todas estas fuerzas son designadas con el nombre de *fuerzas exteriores*; las engendradas por éstas, que ejercen su acción en el interior de los cuerpos, se llaman *fuerzas interiores*. Todas ellas son *fuerzas repartidas*; es decir, que están compuestas de fuerzas elementales, cada una de las cuales actúa sobre un elemento de volumen ó de la superficie de aplicación. Por esta razón son también denominadas *fuerzas moleculares* ó *acciones moleculares*, puesto que están aplicadas á elementos diferenciales de volumen ó de área.

En mecánica racional se opera con fuerzas aisladas aplicadas á un punto geométrico, pura abstracción admitida tan sólo para facilitar los razonamientos.

En la naturaleza, toda fuerza finita está repartida en un volumen ó en una superficie finitos también. Un peso que obra sobre una viga, una rueda que se apoya sobre un carril, son ejemplos que pueden presentarse en que la parte sustentada y la sustentante tienen una superficie común, pequeña, pero apreciable; y cuando el área de contacto no es suficiente, los cuerpos se deforman hasta aumentarla, en cantidad tal, que la fracción de fuerza correspondiente á cada elemento de superficie común, pueda ser soportada por la materia sin nuevas deformaciones.

5. Para medir las fuerzas repartidas, hay que tener en consideración la fuerza total P y el área ω de la superficie en que obra.

Llamando p á la fuerza local que actúa en cada unidad de superficie de la de aplicación, cada elemento de área $d\omega$ estará sometido á la fuerza elemental $p d\omega$, y será

$$P = \int \int p d\omega.$$

6. Fuerzas uniformemente repartidas. Su medida.—Si p es constante, la fuerza repartida se llama de *intensidad uniforme* ó *fuerza uniformemente re-*

partida, y puede ser representada por las ordenadas de una superficie paralela á la de ocupación ó de contacto. Entonces

$$P = p \int \int d\omega = p \omega.$$

$$p = \frac{P}{\omega}$$

p mide la intensidad de la fuerza repartida; es el cociente de la fuerza total por el área de aplicación. Como quiera que las fuerzas se pueden representar por pesos, la fuerza repartida se puede medir en peso por unidad superficial. He aquí las unidades más empleadas y su equivalencia:

1 kilogramo por milímetro cuadrado	= 100 kilogs. por cm ² .
»	= 10000 kilogs. por dm ² .
»	= 1000000 kilogs. por m ² .
1 libra inglesa por pulgada cuadrada	= 0,000703 kilogs. por mm ² .
»	= 0,0703 kilogs. por cm ² .
»	= 144 libras por pie cuadrado.
1 tonelada inglesa por fd. fd.	= 1,57 kilogs por mm ² .

En las fuerzas uniformemente repartidas, la resultante, de valor P , pasa por el centro de gravedad de la superficie de aplicación. Recíprocamente, cuando la resultante pasa por el centro de gravedad del área ω , en cada unidad superficial actuará una fuerza $p = \frac{P}{\omega}$.

7. Fuerzas repartidas variables.— Si p varía de un punto á otro, la fuerza repartida P se denomina de *intensidad variable*, pudiéndose verificar la variación de modo uniforme ó sin obedecer á ley alguna.

Fuerzas repartidas *variables de modo uniforme*, son aquellas cuya intensidad en un punto cualquiera de la superficie de aplicación, es proporcional á la distancia de este punto á una línea recta dada.

Suponiendo plana la superficie AC de aplicación, las fuerzas variables de modo uniforme estarán representadas por las ordenadas del plano BD (fig. 1.^a, lám. 1.^a).

8. Fuerzas aisladas.—A pesar de lo que dejamos dicho, cuando ω sea muy pequeño, supondremos, para facilitar los cálculos, que las fuerzas están aplicadas á un punto. Tal sucede con un peso suspendido de una viga por

medio de una cuerda ó varilla, con una rueda que descansa sobre un apoyo, etcétera. Daremos á estas fuerzas el nombre de *fuerzas aisladas*, y reservaremos la denominación de *fuerzas repartidas* á las que tienen gran superficie de acción; por ejemplo, la cubierta de un edificio, la carga de tierra que cubre una bóveda, el peso de una muchedumbre que ocupa un suelo ó un puente, etc.

9. A veces, y para mayor facilidad de los cálculos, un conjunto de fuerzas iguales, aisladas, será sustituido por una fuerza uniformemente repartida; y recíprocamente, una fuerza repartida será otras veces sustituida por su resultante ó por la serie de resultantes que obran sobre cada unidad superficial.

Todas estas sustituciones podrán hacerse únicamente cuando no modifiquen las condiciones del problema (núm. 35), ni alteren sensiblemente el valor absoluto de los resultados.

10. **Clasificación de las fuerzas.**—Resumiendo; en los problemas de mecánica intervienen:

Fuerzas aisladas.

Fuerzas repartidas.....	{ uniformemente á razón de p kilogramos por unidad superficial; variables de modo uniforme.

Las fuerzas *aisladas* ó *repartidas* que actúan sobre los cuerpos, se clasifican, en razón á sus efectos, en simples y compuestas.

Las primeras son:

1.º De *compresión*: cuando obrando normalmente á la superficie común á los dos cuerpos en contacto, ó á las dos partes ideales de un cuerpo, tienden á reducir sus dimensiones en sentido de su línea de acción.

2.º De *tracción* ó de *extensión*, si, en iguales circunstancias, tienden á alargar el cuerpo, ó á separar dos en contacto.

3.º *Cortantes* ó *tangenciales*; si actuando tangencialmente á la superficie real ó ideal de unión de dos cuerpos ó partes de un cuerpo, tratan de separarlos.

Las fuerzas compuestas producen á un tiempo dos ó más acciones simples.

Las fuerzas de flexión, por ejemplo, se traducen en compresiones, extensiones y esfuerzos cortantes, como más adelante veremos.

NATURALEZA DE LOS CUERPOS

11. **Deformación.**—Se da este nombre á la modificación producida en el volumen ó figura de un cuerpo ó en ambas cosas á un tiempo, por las fuerzas que le están aplicadas.

12. **Sólido natural.**—Es un cuerpo que opone una resistencia apreciable á las deformaciones de figura y volumen de que es susceptible.

Hay algunos cuerpos que solamente pueden ser considerados como sólidos para cierta clase de deformaciones. Tal sucede con un hilo, un tejido; oponen resistencia apreciable á ser estirados, y nula á ser doblados.

En la mecánica racional se consideran cuerpos invariables, ó *sólidos geométricos*, indeformables, perfectamente duros y lisos. Son cuerpos ideales que no existen en la naturaleza.

En los problemas de mecánica aplicada nos ocuparemos tan sólo de *sólidos naturales*, que se deforman y rompen bajo la acción de las fuerzas, que son imperfectamente duros y lisos, y dan lugar, por tanto, á rozamientos al moverse á lo largo de una superficie común.

13. **Rigidez.**—Es la propiedad de resistir á las deformaciones.

14. **Elasticidad.**—Consideremos (fig. 2.ª, lám. 1.ª) dos moléculas O y m de un sólido en estado libre. Se admite que la molécula O ejerce una cierta acción atractiva sobre la m , dirigida de m á O , y otra repulsiva dirigida de O á m .

Estas fuerzas de atracción y de repulsión son funciones de la distancia entre las dos moléculas; y como todo lo que está en la relación de *causa* y *efecto*, podremos representar gráficamente estas funciones tomando como abscisas distancias variables On , Om , Os , etc., y por ordenadas los equivalentes lineales de las fuerzas de atracción y repulsión.

Así resulta una curva $RM R$ para las repulsiones, y otra AMA para las atracciones. Estas curvas se cortan en un punto M : la abscisa Om correspondiente representa la distancia (infinitamente pequeña) molecular de equilibrio en un cuerpo en estado libre.

Tratemos de aumentar la distancia Om llevando la molécula m á s , supuesta fija la O ; á esta distancia, la fuerza atractiva representada por cs es mayor que la repulsiva ds ; esto dice que hay necesidad de introducir una fuerza dirigida de m á s y de magnitud cd , si se quiere mantener en s la

molécula m , para equilibrar el predominio $c d$ de fuerza atractiva, sobre la repulsiva á esta distancia.

Cuando la fuerza exterior aplicada deje de obrar, la molécula s volverá á m , posición de equilibrio molecular, en virtud del excedente $c d$ de fuerza atractiva.

Si, por el contrario, se trata de llevar la molécula m á n , habrá que introducir una fuerza exterior, según $m n$, é igual en valor á $a b$, para equilibrar el exceso de fuerza repulsiva $a b$ sobre la atractiva que hay á la distancia $O n$, y en virtud del cual la molécula n volverá á m cuando deje de actuar la fuerza exterior.

La propiedad que tiene la molécula m de volver á su posición de equilibrio después de ser separada de ella por una fuerza exterior, se llama *elasticidad*. Las fuerzas atractivas ó repulsivas engendradas por variaciones de distancia $O m$, producidas por fuerzas exteriores, que se oponen á estas variaciones y tienden á colocar la molécula m en su posición de equilibrio, se denominan *fuerzas elásticas*. La elasticidad que acabamos de considerar puede llamarse directa ó longitudinal, porque corresponde á la deformación elemental del mismo nombre.

Para pequeños valores de $O n$, los valores de $n a$ son muy grandes, así como los de $a b$. La curva $R M R$ tiene por asíntota el eje $O Y$; es decir, que se supone necesaria la aplicación de una fuerza infinita para anular la distancia $O m$.

Las curvas $R M R$ y $A M A$ tienen por asíntota el eje $O X$; los valores de $c d$ disminuyen con rapidez, de modo que á una distancia no mucho mayor que $O m$, las acciones moleculares mutuas se reducen á una muy pequeña atracción.

Puede construirse la curva $h m l$, tomando como ordenadas las diferencias $a b$, $c d$, etc., de fuerzas atractivas y repulsivas, ó sean las fuerzas que hay que introducir, según $O X$, para aumentar ó disminuir la distancia molecular de equilibrio $O m$.

15. La molécula m (fig. 3.^a, lám. 1.^a) estando fija la O , ofrece también resistencia para moverse según la recta $Y Y'$, pues la distancia $O m$ se aumenta pasando á ser $O b$, $O c$, etc.

Levantando en los puntos b, c ordenadas $b a, c d$, equivalentes á las fuerzas exteriores que hay que introducir según $m Y, m Y'$, para llevar la molécula m á las posiciones b, c , etc., se podrá construir una curva $a m d$ que ligue las fuerzas exteriores y las deformaciones. La elasticidad manifestada por la molécula m se llama *transversal*, del nombre de la deformación.

16. Generalizando, y pasando de las dos moléculas O y m de los casos anteriores á las infinitas comprendidas en la superficie esférica de radio $O m$ y de centro O , diremos que *elasticidad* es la propiedad que tienen los cuerpos de volver á tomar las formas y dimensiones primitivas, cuando dejan de actuar las fuerzas que produjeron la deformación; y *fuerzas elásticas*, las fuerzas atractivas ó repulsivas, desarrolladas en el interior del cuerpo por las fuerzas exteriores, que tienden á hacer desaparecer la deformación producida por éstas cuando dejan de obrar.

Las fuerzas elásticas son fuerzas repartidas, susceptibles, por tanto, de medirse en pesos por unidad superficial.

La *teoría matemática de la elasticidad*, tiene por objeto la determinación de las relaciones analíticas que existen entre las deformaciones de los cuerpos elásticos y las fuerzas exteriores que las producen, en tanto que aquéllas sean funciones lineales de éstas, y que los cuerpos satisfagan á las dos condiciones siguientes:

- 1.^a Las deformaciones permanentes ó plásticas son nulas ó de valor despreciable, si se comparan con las deformaciones elásticas (*).
- 2.^a La variación elástica de una longitud medida en el interior ó en la superficie de un cuerpo, es una pequeña fracción de dicha longitud.

Supone, además, que los cuerpos son homogéneos, y que en ellos se cumple la *ley de continuidad* de las acciones moleculares, según la cual, si en una sección ideal cualquiera de un cuerpo, se pasa de un punto á otro infinitamente próximo, la intensidad y dirección de la acción molecular ejercida sobre este plano, varían muy poco. Si los cuerpos son heterogéneos, hay soluciones de continuidad ó defectos de adherencia ó discontinuidad de las acciones exteriores, la teoría de la elasticidad padece excepciones.

17. **Elasticidad perfecta é imperfecta.**—Un cuerpo tiene elasticidad perfecta cuando recobra el *volumen* y *forma* primitivos al cesar de actuar las fuerzas exteriores.

En caso contrario, los cuerpos son *imperfectamente elásticos*.

En tanto que las deformaciones sean pequeñas, y no rebasen un cierto límite, distinto para cada materia, los sólidos naturales pueden considerarse sensiblemente como perfectamente elásticos. En todos casos, la *elasticidad de volumen* es mucho más perfecta que la elasticidad de figura ó forma.

En los gases, la elasticidad de figura es nula, pero en cambio gozan de una gran elasticidad de volumen.

(*) *Deformaciones permanentes* son las que subsisten aun cuando las fuerzas exteriores dejen de obrar; y *deformaciones elásticas* las que desaparecen con las fuerzas.

18. Coeficiente de elasticidad longitudinal. — Hagamos extensivo á un cuerpo prismático los razonamientos precedentes aplicados á dos moléculas.

Supondremos, para la más fácil inteligencia de cuanto sigue, comparable un sólido prismático á un sistema de discos, que representen las secciones transversales del cuerpo, unidos por resortes ó muelles de espiral, cuya elasticidad ha de sustituir á las fuerzas atractivas y repulsivas moleculares (fig. 4.^a, lámina 1.^a).

En estado libre los resortes no funcionan; pero cuando la fuerza P tiende á separar las dos bases A y B , suponiendo fija la A , ó á acercarlas, los resortes se alargan ó acortan, engendrándose las fuerzas elásticas q que se oponen á la deformación.

Consideremos un prisma de longitud igual á la unidad, y cuya área de sección transversal sea también la unidad superficial. Llamemos i á la deformación longitudinal, alargamiento ó acortamiento, experimentada por el sólido bajo la acción de la fuerza p de extensión ó de compresión.

Tómese en el eje OX como abscisas los valores oh, ob, od, \dots , variables, de las deformaciones i ; y como ordenadas, magnitudes he, ba, \dots proporcionales á los valores también variables de p (fig. 5.^a, lám. 1.^a).

La línea Oar encierra ó comprende todos los fenómenos de la deformación del cuerpo prismático.

Las ordenadas representan la *causa eficiente* ó productora de la deformación, y las abscisas el efecto producido, ó sea la deformación; de modo que la ecuación de la curva Oar , $y = F(x)$ da la ley que liga las deformaciones con las fuerzas que las originan ó producen.

La inclinación de las tangentes, los puntos singulares, el área de la superficie, comprendida por la curva y el eje OX , en una palabra, todos los elementos de la curva tienen una significación particular que sirve para definir la naturaleza del prisma, como más adelante veremos.

Experimentalmente se ha demostrado:

1.^o Dentro de ciertos límites, variables con el material, p ó i tienen relación constante; es decir, que $\frac{eh}{Oh} = \frac{ab}{Ob} = \dots = \frac{p}{i} = E$. Esto equivale á decir que la línea Oa es recta.

La constante E se llama *coeficiente de elasticidad directa ó longitudinal* (*), y como acabamos de ver, expresa la relación entre la fuerza de ex-

(*) Más bien debiera llamarse *coeficiente de rigidez*, pues E es tanto mayor cuanto más rígida es la materia. En efecto; á igual valor de fuerza p , la deformación i será menor en los cuerpos más rígidos, menos deformables: el ángulo SOX crece con E .

tensión ó compresión por unidad superficial de sección transversal y el alargamiento ó acortamiento por unidad de longitud, siempre que el sólido esté en perfecta libertad de variar sus dimensiones transversales.

19. Deformaciones transversales.—Esta aclaración es necesaria si se tiene en cuenta que á la deformación longitudinal del prisma acompañan siempre deformaciones transversales como consecuencia inevitable.

Si el prisma se alarga, la sección transversal se contrae; y por el contrario, los acortamientos del prisma causan ensanchamientos ó dilataciones laterales.

Cada una de estas deformaciones no puede realizarse sin ir seguida de la otra: por esta razón es necesaria la libertad de alteraciones transversales, si han de tener lugar, como es debido, las deformaciones longitudinales.

20. Coeficiente de elasticidad transversal.—Si el sólido que antes hemos considerado estuviese sometido en una de sus bases á una fuerza transversal p' contenida en dicha base, sufriría ésta un desplazamiento i_1 con relación á la otra base supuesta fija.

El coeficiente $\frac{p'}{i_1} = E'$ toma el nombre de *coeficiente de elasticidad transversal*, y expresa la relación entre la *fuerza transversal*, por unidad superficial de sección y la deformación i_1 en este sentido, ó distorsión, por unidad lineal de sólido.

21. En adelante, y para abreviar, llamaremos simplemente *coeficiente de elasticidad* al directo ó longitudinal.

22. El coeficiente de elasticidad es una fuerza por unidad superficial.

En efecto, haciendo $\frac{1}{i} = n$, $E = np$. Como p es una fuerza que obra en la unidad de superficie, el múltiplo np también lo es. Para la casi totalidad de los materiales n es mayor que la unidad.

23. Eje de elasticidad.—Es una dirección en el cuerpo sólido para la cual existe cierta simetría en las relaciones $\frac{p}{i}$.

Será *eje de elasticidad directa* si las deformaciones longitudinales producen tan sólo acciones moleculares normales y ninguna tangencial, sobre un plano perpendicular á él.

24. Cuerpos isotropos ó amorfos. Cuerpos heterotropos.—En los cuerpos *isotropos* la estructura interna es idéntica en todas las direcciones. La acción de las fuerzas elásticas es la misma en todos sentidos; en una palabra, tiene infinitos ejes de elasticidad directa.

En los cuerpos heterotropos la estructura molecular varía de un punto á otro, y los coeficientes de elasticidad varían también con las direcciones. Todo eje de simetría de la materia será, sin embargo, un eje de elasticidad directa.

Energía potencial de elasticidad de un volumen primitivamente cúbico y deformado, es el trabajo capaz de producir para borrar esta deformación pasando al estado libre.

25. Período elástico. Fuerza límite de elasticidad. — Mientras las deformaciones lineales no excedan de Ob (fig. 5.^a, lám. 1.^a), el sólido conserva su elasticidad perfecta; es decir, que cuando cesan las fuerzas se borran las deformaciones.

Este período se llama *elástico* por dicha razón; en él se verifica la proporcionalidad entre fuerzas y deformaciones.

La mayor de las fuerzas p por unidad superficial que se puede aplicar al sólido sin que se altere su elasticidad, es $ab = D$. Y la máxima deformación elástica, es decir, de las que desaparecen al cesar las fuerzas, es $Ob = i'$.

La fuerza D se llama fuerza límite de elasticidad, ó simplemente *límite de elasticidad*. Es una fuerza por unidad superficial tal, que la inmediata superior produce deformaciones permanentes.

Para un mismo material, es decir, para un mismo valor de E , el estado límite de elasticidad puede definirse por la deformación máxima i' del período elástico.

$$\text{Tendremos, pues, } E = \frac{D}{i'} \left\{ \begin{array}{l} D = E i' \\ i' = \frac{D}{E} \end{array} \right\} \quad (1)$$

26. Al hablar de las deformaciones permanentes nos referimos á las visibles, á las apreciables á simple vista, y no á las microscópicas que producen muchas veces fuerzas de pequeña intensidad, pues éstas no tienen interés para el constructor.

Dedúcese de esto que el límite de elasticidad no puede determinarse con rigor matemático, pues es difícil señalar el límite en que son apreciables las deformaciones permanentes, tanto más, cuanto que en el valor de éstas influye mucho la duración de los esfuerzos, siendo, á igualdad de materia, mayor la deformación para duraciones prolongadas.

Los valores del límite de elasticidad encontrados por los experimentadores, deben considerarse como datos aproximados, aunque de exactitud suficiente para nuestro objeto, como tendremos ocasión de ver.

27. Deformaciones permanentes. Fractura. — A partir de la fuerza límite de elasticidad ab , las deformaciones Od , Os , etc., crecen más rápidamente que las fuerzas cd , rs , etc., de modo que

$$\frac{rs}{Os} < \frac{cd}{Od} < \dots < E.$$

Además, suprimida la fuerza, no se borra toda la deformación, sino que queda una parte permanente.

Si continúa aumentando la fuerza p , sobreviene la fractura del sólido.

28. Rigidez. — Ya hemos visto (nota del núm. 18) que está medida por el valor de E .

29. Plasticidad. — Un sólido es *plástico* cuando con una muy imperfecta elasticidad de forma, es susceptible de experimentar cambios de figura grandes sin romperse.

En los cuerpos plásticos, el *período elástico* es nulo ó de escasa amplitud, de modo que los valores D é i' (núm. 25), son inapreciables.

30. Resistencia. — Está medida por la máxima ordenada rs (fig. 5.^a, lámina 1.^a).

31. Resistencia viva. — Está medida (fig. 5.^a, lám. 1.^a) por el *trabajo* que han desarrollado las fuerzas para producir una cierta deformación. La *resistencia viva de fractura*, en un prisma de base unidad y longitud unidad también, será el trabajo desarrollado por las fuerzas eh , ab , cd , rs , para romper el sólido. Es, pues, la suma de los trabajos elementales, ó sea de los productos parciales de las fuerzas eh , ab , cd , rs , etc., por las deformaciones Oh , hb , bd , ds

En suma, es el área de la figura $OarsO$.

Si la base del prisma es de área ω , y la longitud fuera L , había que multiplicar el resultado anterior por ωL .

La resistencia viva de fractura tendrá, pues, por expresión

$$T' = \omega L \int \varphi(i) di \quad (2)$$

siendo $\varphi(i) = p$ la relación desconocida entre p é i en todos los períodos.

Resistencia viva elástica. — Se refiere exclusivamente al 1.^{er} período ó pe-

ríodo elástico, y su máximo valor es dado por el área del triángulo Oab (figura 5.^a, lám. 1.^a), ó $T = \frac{1}{2} Di' \omega L = \frac{1}{2} Ei'^2 \omega L$ (3)

Para un valor particular de $p = eh$, sería $T = \frac{1}{2} pi \omega L$ (4), y puesto que según veremos en el núm. 51,

$p \omega = P =$ fuerza total de extensión ó de compresión.
 $i L = l =$ alargamiento ó acortamiento total del prisma,

$$\text{será } T = \frac{1}{2} Pl \text{ (5).}$$

32. Fuerzas de rozamiento. — Los sólidos naturales no son, como los geométricos ideales que se consideran en mecánica racional, perfectamente duros y lisos; dan, por tanto, lugar á las fuerzas pasivas de rozamiento.

Los rozamientos, tan perjudiciales en las máquinas por cuanto ocasionan pérdidas notables de potencia motriz y efecto útil, son favorables á la estabilidad de las construcciones.

El rozamiento desarrollado tangencialmente á la superficie de contacto ó unión de dos elementos ó partes contiguas de una construcción cualquiera, se opone al movimiento de estas partes, originado por las fuerzas exteriores. Esta propiedad de los rozamientos de favorecer la estabilidad, se hace especialmente notable en las construcciones de piedra como ya se verá.

Siendo f el coeficiente de rozamiento de resbalamiento, P la presión en la superficie de contacto, y F la fuerza de rozamiento, recordaremos que

$$F = Pf$$

f es una cantidad constante para cada material; de modo que F aumenta con P , fuerza de compresión, y puede adquirir grandes valores, siempre, por supuesto, que el de P no llegue á producir el aplastamiento.

VALORES

DE COEFICIENTES DE ROZAMIENTO f Y DE ÁNGULOS DE ROZAMIENTO φ
 PARA DIVERSOS MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

METALES

METALES	f	φ
Fundición sobre fundición ó sobre bronce (en seco).....	0,15	8°, 30'
Id. id. mojados con agua.....	0,31	17°, 10'
Hierro forjado sobre hierro forjado (en seco)	0,44	24°
Hierro sobre fundición ó sobre bronce (sin engrase).....	0,18	10°, 10'
Bronce sobre bronce (sin engrase).....	0,20	10°, 20'
Bronce sobre fundición (id.)	0,22	12°, 20'
Bronce sobre hierro (id.)	0,16	9°, 10'
METALES, MADERAS Y PIEDRAS		
Fundición sobre encina (mojadas con agua)	0,22	12°, 20'
Id. id. id. (sin lubricar)....	0,49	26°, 10'
Id. id. id. (untadas con jabón seco).....	0,19	10°, 50'
Hierro sobre encina (sin lubricar).....	0,62	31°, 50'
Id. (mojados con agua)....	0,26	14°, 30'
Id. (untados con jabón seco)	0,21	11°, 50'
Hierro sobre olmo (sin lubricar).....	0,38	20°, 50'
Latón sobre encina (sin lubricar).....	0,62	31°, 50'
Hierro sobre piedra.....	0,7 á 0,3	35° á 16°, 6'
Madera sobre piedra.....	0,4	22°
Olmo sobre encina (sin lubricar).....	0,43 á 0,45	23°, 20' á 24°, 10'
Id. (untado con jabón seco).	0,25	14°, 10'
Encina sobre encina (sin lubricar).....	0,34 á 0,48	18°, 30' á 24°
Id. (con jabón seco).....	0,16	9°, 10'
Id. (con agua).....	0,25	14°, 10'
Fresno, haya y pino, sobre encina (sin lubricar).....	0,36 á 0,40	19°, 50' á 22°

PIEDRAS, LADRILLOS, MAMPOSTERÍA

	f	φ
Dos piedras superpuestas, cuyas caras de contacto son planas, pero con rugosidades.	0,7 á 0,8	35° á 39°
Piedras superpuestas, de caras pulimentadas.	0,55 á 0,60	29° á 31°
Ladrillo sobre piedra, caras planas....	0,65	33°
Piedras separadas por capa de mortero fresco.....	0,50	27°
Piedras sobre mortero fraguado.....	0,75	35°
Piedras sobre mortero endurecido.....	1,00	45°
Primera hilada de cimientos, sobre el fondo de la trinchera de tierra seca.....	0,50 á 0,55	27° á 29°
Id. id. sobre arcilla húmeda y reblandecida.	0,34	19°

TIERRAS

	f	φ	Peso del m. ³ en kilogs.
Arena gruesa y seca.....	0,50 á 0,70	27° á 35°	1300 á 1500
Id. extrafina y seca.....	0,30 á 0,50	17° á 27°	1300 á 1500
Id. fina y seca.....	0,50 á 0,70	27° á 35°	1300 á 1500
Id. fina un poco húmeda.....	0,70 á 0,90	35° á 42°	1450 á 1600
Id. fina y húmeda muy coherente.....	0,90 á 1,20	42° á 50°	1600 á 1900
Id. fina arcillosa.....	0,60 á 0,70	31° á 35°	1700 á 1800
Tierra franca.....	0,60 á 1,20	31° á 50°	1200 á 1590
Id. fuerte con alguna grava...	0,90 á 1,40	42° á 54°	1300 á 1550
Arcilla seca.....	0,60 á 0,80	31° á 39°	1500 á 1600
Id. húmeda.....	0,40 á 0,60	22° á 31°	1650 á 1800
Grava.....	0,70 á 1,20	35° á 50°	1350 á 1500
Tierra arcillosa mezclada con grava ó piedras.....	0,50 á 0,70	27° á 35°	1600 á 1900

NOTAS.—1.^a Los valores de f y φ suponen iniciado el movimiento ó resbalamiento.

2.^a Los valores de φ en las tierras, son los de la tangente del ángulo del talud natural.

2.º CONDICIONES

DE EQUILIBRIO Y RESISTENCIA QUE HA DE CUMPLIR
UNA CONSTRUCCIÓN

33. Partes de una construcción. Piezas prismáticas.—Las construcciones no pueden ser de una sola pieza, sino que se componen de *partes* enlazadas, según los preceptos de la estereotomía. Tal sucede con una bóveda, que se compone de dovelas; con un muro, formado de sillares; con un entramado de madera ó de hierro, que consta de diversas piezas.

Las superficies de contacto de las partes se denominan *juntas*.

Cuando los elementos tienen sección trasversal de dimensiones pequeñas con respecto á su longitud, como sucede á las piezas de madera y de hierro, y algunas de piedra, reciben el nombre de piezas prismáticas.

Esta definición no tiene el rigor geométrico, pues comprende á los sólidos de forma general, rectilínea ó curva, y de sección constante ó variable gradualmente. En una palabra; reciben el nombre de *pieza prismática* todos los sólidos engendrados por un perfil plano, de forma variable ó invariable, cuyo centro de gravedad describe una línea continua, recta ó curva, á la que aquél es normal en todas sus posiciones. El perfil plano generador es la *sección trasversal*, y la línea continua directriz el *eje longitudinal* de la pieza.

La variación de la sección trasversal ha de ser continua y poco rápida, de modo que, sin error sensible, la porción de pieza comprendida por dos secciones trasversales infinitamente próximas pueda considerarse como un prisma recto de bases iguales y paralelas. Además, si el eje longitudinal no es recto, ha de tener radios de curvatura muy grandes.

Supondremos en lo sucesivo:

1.º Que las piezas prismáticas son de materia homogénea.

2.º Que están compuestas de haces de prismas cuyas bases son elementos superficiales de la base total, y cuyos ejes son paralelos al del prisma principal.

34. Apoyos. Reacciones.—Las construcciones descansan sobre un cierto

número de *apoyos*, á los cuales transmiten presiones ó empujes que son funciones de las fuerzas exteriores. Cada elemento ó parte de una construcción está en idéntico caso respecto á las partes contiguas, comunicándoles extensiones ó compresiones.

Cuando se quiera aplicar al todo ó parte de una construcción las leyes de la mecánica, hay que representar la acción de los apoyos por fuerzas que sean iguales y de dirección contraria á las de extensión ó compresión que dichos apoyos sufren. Estas fuerzas, capaces de sustituir á los apoyos desde el punto de vista estático, se llaman *reacciones*.

Las reacciones son funciones de las fuerzas que obran sobre la construcción, y por tanto, variarán cuando sufra modificación su intensidad ó posición.

35. Fuerzas exteriores. — En los problemas que hemos de resolver, llamaremos *fuerzas exteriores*, aisladas ó repartidas, las siguientes:

Peso propio de los materiales.
Sobrecargas permanentes ó accidentales.
Reacciones de los apoyos.

Observaremos respecto á estas fuerzas, que no puede siempre hacerse, como en mecánica racional, la sustitución de un cierto número de ellas por su resultante ó por un sistema equivalente.

Estas sustituciones, posibles en estática racional, que se ocupa tan sólo de sólidos geométricos, no lo son cuando se trata de sólidos naturales deformables, porque puede suceder muy bien que dos sistemas de fuerzas, mecánicamente equivalentes, ocasionen en un sólido deformaciones muy diversas.

La sustitución, pues, será siempre posible, cuando se resuelvan únicamente problemas de estabilidad; pero en los de resistencia no se hará, á no estar convencidos de que las condiciones del problema no sufren alteración.

Cuando los puntos de aplicación no cambian, la sustitución es posible en todos los casos. Se podrá, por tanto, componer y descomponer las fuerzas aisladas que tengan el mismo punto de aplicación.

36. Cómo debe entenderse el equilibrio en las construcciones. — El equilibrio, tal como se considera en mecánica racional, es alterado por una pequeña modificación en el valor ó en la posición de una cualquiera de las fuerzas.

Este equilibrio estricto es inadmisibile en mecánica aplicada, porque las construcciones están sometidas á fuerzas exteriores que pueden variar accidentalmente. En un puente las cargas varían de intensidad y posición; una

armadura de cubierta de edificio está sometida á fuerzas variables, como son el viento y la nieve.

La estabilidad ha de subsistir aun cuando se varíe la posición y magnitud de las fuerzas exteriores.

37. Condiciones de equilibrio de una construcción. — Las condiciones de equilibrio de una construcción, son:

1.^a *Deben equilibrarse las fuerzas exteriores que obran sobre toda la construcción.* Estas fuerzas, son, como ya se ha dicho:

El peso propio de la construcción.
Las cargas ó empujes.
Las reacciones de los apoyos.

En efecto; aunque la construcción fuera de una sola pieza, esta condición es necesaria, pues de no cumplirse habría una fuerza ó par resultante que produciría movimientos traslatorios ó de rotación.

2.^a *Deben equilibrarse las fuerzas exteriores que actúan sobre cada elemento de la construcción.* Estas fuerzas son:

El peso del elemento.
Las acciones exteriores que sobre él obran.
Las reacciones de las partes contiguas.

De nada serviría el cumplimiento de la 1.^a condición, si no se satisface á la 2.^a; pues si se mueve una de las partes de la construcción, se sigue la ruina de ésta.

38. Ejemplos.—Sea una bóveda de piedra (fig. 6.^a, lám. 1.^a), cubierta de tierra en una cierta altura.

La 1.^a condición exige el equilibrio de la fuerza P , resultante del peso de la bóveda y de la tierra, y de las reacciones Q , T , de los apoyos (figura 7.^a, lám. 1.^a).

Por la 2.^a condición, una dovela cualquiera, tal como la AMN (figs. 6.^a y 8.^a, lám. 1.^a), ha de estar en equilibrio por las fuerzas siguientes:

P' resultante del peso de la dovela AMN y de la carga de tierra ACD .
 Q' y T' , reacciones de las dovelas inmediatas, ó sea fuerzas iguales y de dirección contraria á la de las compresiones que la dovela considerada ejecuta sobre las contiguas.

39. Condiciones de resistencia y rigidez. — Si se supone un plano trasversal ideal, que corte á un elemento de la construcción bajo un ángulo cualquiera, es preciso que la estimación de las fuerzas exteriores, tangencial

y normalmente á este plano, sea equilibrada por las fuerzas elásticas que se desarrollan en dichas dos direcciones, de modo que no solamente no se llegue á la fractura del sólido ni al período de deformaciones permanentes, sino que la deformación elástica que resulte sea aceptable, teniendo en cuenta el objeto de la obra.

El valor de las fuerzas elásticas depende de la cantidad de materia contenida en el sólido según el plano transversal ideal considerado: quiere esto decir, que los problemas de resistencia y de rigidez consisten en asignar dimensiones á la sección transversal de los sólidos prismáticos en relación con las fuerzas exteriores.

En el ejemplo del número anterior, si suponemos un plano cualquiera XZ (fig. 6.^a, lám. 1.^a), que corte á la dovela AMN , y que sea F (fig. 9.^a, lámina 1.^a), la resultante de las fuerzas exteriores, la condición de resistencia y rigidez exige que las componentes F' y F'' sean equilibradas por las fuerzas elásticas que se desarrollan normal y tangencialmente á XZ .

ORDEN QUE SE SIGUE EN ESTE LIBRO PARA LA RESOLUCIÓN
DE LOS PROBLEMAS

40. Estudiaremos, en primer lugar, un elemento ó pieza prismática, aisladamente, sometido á la acción de fuerzas exteriores, y resolveremos todos los problemas de resistencia á que pueda dar lugar.

Una vez hecho esto, pasaremos al estudio del conjunto de elementos ó piezas prismáticas que forman entramados de todas especies, muros y bóvedas, resolviendo también los problemas de estabilidad y resistencia.

41. Esfuerzos á que puede encontrarse sometida una pieza prismática. — Sea O (fig. 10., lám. 1.^a), el centro de gravedad de una sección transversal MN ; OX , OY , OZ , tres ejes coordenados normales á las caras y bases del prisma; y P , una fuerza aislada oblicua con respecto á los tres ejes: P puede ser también la resultante de una fuerza repartida. Haciendo pasar por O dos fuerzas P' y P'' iguales á P y de dirección contraria, habremos transformado P en un fuerza P' , y un par $P''P$.

La fuerza P'' estimada según los ejes, da:

1.^o Según OX , una *extensión* ó *compresión* conforme sea el sentido de la fuerza.

También puede producir desgarramiento longitudinal (fig. 11, lám. 1.^a), cuando el prisma se apoye en una parte de la base nada más.

2.^o Según OX y OZ , *esfuerzos cortantes* (figs. 12 y 13, lám. 1.^a), llamados así porque, en efecto, tiende á ser cortado el prisma según el plano MN .

El par $P''P$ proyectado sobre los tres planos coordenados, produce:

1.^o Sobre el XZ , un par de *flexión* que tiende á encorvar el prisma alrededor de OY (fig. 14, lám. 1.^a).

2.^o Sobre el XY , un par de *flexión* alrededor de OZ (fig. 15, lám. 1.^a).

3.^o Sobre el plano YZ , un par de *torsión* que produce la rotación de la sección MN (fig. 16, lám. 1.^a).

Algunas de las componentes de la fuerza P' ó del par $P''P$, pueden ser cero, por estar situada la fuerza P en alguno de los planos de proyección, ó pasar por el origen O , ó coincidir con alguno de los ejes, en cuyo caso resultaría sometido el prisma á una ó algunas de las deformaciones elementales anteriores.

42. En resumen; resolveremos los problemas siguientes de estabilidad, resistencia y rigidez:

ELEMENTOS DE CONSTRUCCIÓN

- | | |
|---|-------------------------------------------|
| 1 | Piezas prismáticas sometidas á extensión. |
| 2 | » » » compresión. |
| 3 | » » » esfuerzo cortante. |
| 4 | » » » desgarramiento longitudinal. |
| 5 | » » » flexión. |
| 6 | » » » torsión. |

7 Piezas prismáticas sometidas á la vez á dos ó más de las acciones simples precedentes.

COMBINACIÓN DE ELEMENTOS

1. Estabilidad y resistencia de entramados de todas clases.
2. Estabilidad y resistencia de muros y de bóvedas.

Pero antes de pasar á la resolución de estos problemas, necesitamos conocer experimentalmente interesantes fenómenos relativos á la deformación y fractura de los materiales diversos empleados en las construcciones, así como algunas constantes específicas que han de servir de base á los cálculos de resistencia.

Esta importantísima materia será el objeto del capítulo siguiente.

II

CONSTANTES ESPECÍFICAS

1.º DEFINICIONES

2.º ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES
Y DE LA FRACTURA

3.º MATERIALES METÁLICOS

4.º MATERIALES DE ORIGEN PÉTREO

5.º MATERIALES DE ORIGEN VEJETAL

1.º DEFINICIONES

43. En los problemas de estabilidad y resistencia, son *datos* ciertas cantidades ó *constantes específicas* que dependen de la naturaleza del material, y cuyo conocimiento es, por tanto, indispensable. Las enunciaremos á continuación.

44. Peso específico. — El peso específico, ó peso de la unidad de volumen, interesa, en primer lugar, porque una de las principales fuerzas exteriores es, según se ha visto en el núm. **35**, el peso propio de los materiales.

En los materiales metálicos, el conocimiento del peso específico interesa en el concepto económico. Las obras de hierro, de acero y de fundición, se pagan al peso; de modo, que una vez hecha la cubicación del metal labrado, el presupuesto se forma por una simple multiplicación. De aquí se deduce lo importante que es el fijar con exactitud el peso específico de estos metales, y muchas veces se hace figurar en los pliegos de condiciones facultativas la cantidad que se entiende pesa el metro cúbico, para que sirva de norma en la valoración; y aun cuando, en general, se hacen directamente, en la fábrica, las pesadas de los elementos de obra ejecutados para los efectos del pago, no es menos importante al ingeniero el conocimiento de aquel dato en la redacción del presupuesto.

El peso específico de los materiales no metálicos, no se determina con la escrupulosidad que previenen los tratados de física. Basta emplear una balanza ó báscula verificadas, pesar una cierta cantidad del material y dividir el peso por el volumen, repitiendo esta operación algunas veces, si fuera preciso, para tomar el promedio de los resultados.

45. Coeficiente de elasticidad. — Ya tendremos ocasión de ver que esta constante específica interviene en todos los problemas de deformaciones y en algunos de resistencia. Todas las fórmulas que determinan la deformación de un prisma por extensión, compresión, flexión, etc., contienen el valor de *E*. Si, pues, se miden directamente las fuerzas exteriores, las longitudes y deformaciones, en un prisma sometido á cierto esfuerzo, y se sustituyen

estas cantidades en la fórmula que da la deformación correspondiente, se podrá despejar el valor de E .

Donde más interesa el conocimiento de E es en los materiales elásticos y deformables; en las piedras y en las mamposterías en general, su conocimiento tiene escaso interés.

46. Límite de elasticidad. — Es necesario conocer la fuerza límite de elasticidad de los materiales, con objeto de que las fuerzas exteriores no engendren en el interior de los cuerpos esfuerzos que alcancen este valor, pues entonces las deformaciones serán permanentes.

En los materiales rígidos, es muy difícil la determinación del límite de elasticidad.

47. Carga de fractura. Coeficiente de fractura. — La carga de fractura por extensión, compresión, etc., es la fuerza total P que la ocasiona. Coeficiente de fractura es el valor de $\bar{R} = \frac{P}{\omega}$, por unidad superficial de sección primitiva con el que dicha fractura tiene lugar (*).

Por ejemplo: si una varilla de acero dulce de 200 milímetros cuadrados de sección se rompe por tracción con una fuerza de 8800 kilogramos, la *carga de fractura* será $P = 8800$ kilogramos, y el *coeficiente de fractura* tendrá por valor $\bar{R} = \frac{8800}{200} = 44$ kilogramos por mm^2 .

Si necesario es que las fuerzas interiores repartidas no lleguen al valor límite de elasticidad, con mayor razón ha de procurarse sean muy inferiores al coeficiente de fractura; por esto es tan interesante su conocimiento.

48. Coeficiente de trabajo. Coeficiente de seguridad. — La fatiga molecular que experimenta una pieza prismática, expresada en peso por unidad superficial de su sección transversal, es lo que se llama *coeficiente de trabajo*.

Si un dado de piedra de 200 centímetros cuadrados de sección transversal soporta un peso uniformemente repartido de 1600 kilogramos, el coeficiente de trabajo de la piedra será

$$R = \frac{1600}{200} = 8 \text{ kilogramos por cm}^2.$$

Se dice entonces que *la piedra trabaja á 8 kilogs. por centímetro cuadrado*.

(*) Es necesario fijar la atención en que ω representa aquí el área de la sección transversal del prisma antes de la aplicación de las fuerzas; pues según veremos más adelante, el área ω sufre alteraciones por la deformación del sólido y se convierte en ω' , de modo que si considerásemos este último valor, cambiaría el de R .

El coeficiente de trabajo es una fracción del coeficiente de fractura, que el ingeniero fijará en cada caso particular, según las circunstancias del problema. Según esto,

$$R = \frac{1}{m} \bar{R}.$$

Cuanto mayor sea el denominador m , el coeficiente de trabajo será más pequeño, y como consecuencia la construcción ofrecerá más garantías de solidez y de seguridad. Por esta razón se da á m el nombre de *coeficiente de seguridad*.

El coeficiente de seguridad es, pues, un número abstracto que mide la relación $\frac{\bar{R}}{R}$ que existe entre el coeficiente de fractura y el de trabajo, y pone de manifiesto el grado de solidez de la obra.

El coeficiente de trabajo ha de ser menor siempre que la fuerza límite de elasticidad, para evitar las deformaciones permanentes, pero puede tener valores variables; m fluctúa generalmente entre 4 y 10 (*).

49. Se emplearán, en los cálculos de resistencia, valores pequeños de coeficiente de trabajo:

- 1.º Cuando el material sea de mediana calidad.
- 2.º Cuando, aun siendo de buena calidad, pueda experimentar alteraciones que lo debiliten, por efecto de las influencias atmosféricas ó por otras causas.
- 3.º Cuando las cargas han de ser permanentes ó de larga duración.
- 4.º Cuando se tema la acción de fuerzas anormales no tomadas en consideración en el cálculo.
- 5.º Cuando se desee obtener una gran solidez.

Por el contrario, se dará gran valor al coeficiente de trabajo:

- 1.º En obras provisionales, ó cuando las fuerzas ejerzan su acción durante poco tiempo.
- 2.º Empleando materiales de muy buena calidad.
- 3.º En obras atrevidas.

(*) Véase lo que se dice en el art. 6.º, cap. VI, referente á los coeficientes de trabajo que deben emplearse en el caso de fuerzas repetidas un gran número de veces.

El peso del metro cúbico del mercurio, es de 13600 kilogs.
Tenemos:

$$P \times a c = Q \times a b, \text{ de donde } P = Q \times \frac{a b}{a c}$$

Por otra parte, la presión de abajo arriba que la columna mercurial h determinada en el disco de caucho, y que es igual á Q por razón de equilibrio, vale

$$Q = S h \times 13600$$

$$\text{luego } P = \frac{a b}{a c} \times S h \times 13600.$$

Generalmente $\frac{a b}{a c} = 10$, de modo que

$$P = 136000 \times S h,$$

relación que liga las fuerzas P y las alturas manométricas h .

51. Materiales dúctiles y elásticos. — Para el mejor estudio de los fenómenos relativos á la deformación y fractura de piezas prismáticas por extensión, comenzaremos por los materiales dúctiles, que son los que presentan un cuadro más completo de fases ó períodos.

Supongamos una barra de acero dulce, tipo de los cuerpos dúctiles y elásticos, sometida, en una máquina de ensayo, á esfuerzos de tracción gradualmente crecientes.

Sean:

$L =$ longitud de la barra
 $\omega =$ área de la sección transversal } antes de la deformación.

$P =$ resultante de la fuerza total, variable, de tracción, que pasa por el eje del prisma.

$l =$ alargamiento total de la barra, variable con P .

$p =$ fuerza variable de tracción por unidad superficial de sección transversal primitiva.

$i =$ alargamiento variable con p , correspondiente á cada unidad de longitud de barra.

La experiencia demuestra que los alargamientos totales, producidos en barras de igual sección, por fuerzas de tracción iguales, son proporcionales á las longitudes de las barras.

2.º ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

Y DE LA FRACTURA

DEFORMACIONES Y FRACTURA POR EXTENSIÓN

50. Máquinas empleadas. — Constan de dos brazos A y B (fig. 17, lámina 1.ª), provistos de garras, entre las cuales se coloca la barra de ensayo. El esfuerzo tractor, que en muchas máquinas es producido por una prensa hidráulica, se aplica al brazo A . El brazo B está en relación con un aparato dinamométrico, que señala en cada instante el valor de la fuerza de tracción ejercida sobre el prisma sometido á la experiencia.

El compresor de la prensa hidráulica está organizado de manera que los crecimientos de fuerza tractora sean tan lentos como se quiera. El aparato dinamométrico puede ser de contrapesos ó de manómetro. Este segundo sistema es el más general; á él pertenece la máquina Thomasset, cuyo aparato dinamométrico está representado en la fig. 17.

Una palanca acodada $c a b$ gira alrededor del cuchillo a , está en contacto por medio del c con el brazo B , y apoya su otra rama en el cuchillo b correspondiente al platillo D . Este platillo descansa sobre un disco de caucho m , que sirve de tapadera á la cuba de fundición F llena de líquido; el tubo r pone en comunicación esta cuba con la cubeta de mercurio G , provista del tubo manométrico graduado $s t$.

Obedeciendo al esfuerzo tractor, la palanca acodada gira alrededor de a de izquierda á derecha, y hace descender el platillo D . El líquido desalojado del depósito F hace subir el nivel de mercurio de s á t á una altura tal, que el peso de la columna mercurial equilibre á la fuerza de tracción P .

La graduación del tubo del monómetro, se hace del modo siguiente:

Llamemos:

$Q =$ la compresión total que el platillo ejerce sobre el disco de caucho.

$S =$ el área de la base del platillo en metros cuadrados.

$h =$ la altura del mercurio producida por la fuerza P , contada en metros.

Por esto, y por lo dicho en el núm. 6:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{P}{\omega} \\ i &= \frac{l}{L} \end{aligned} \right\} (1)$$

A semejanza de lo hecho en el núm. 18, representaremos gráficamente los resultados de la experiencia, tomando (fig. 18, lám. 1.^a), como abscisas los valores de i y como ordenadas los de p .

Desde que se inicia la tracción hasta que tiene lugar la fractura, la barra pasa por los cuatro períodos siguientes:

1.^{er} período. Se conoce también con el nombre de período de elasticidad perfecta (núm. 25). La relación $\frac{p}{i}$ es contante é igual á E , coeficiente de elasticidad (núm. 18).

Teniendo en cuenta los valores (1), se obtiene:

$$E = \frac{p}{i} = \frac{PL}{l\omega} (2) \quad l = \frac{PL}{E\omega} (3).$$

El límite de elasticidad $D = Aa$ y el máximo alargamiento elástico $Oa = i'$ están ligados por la relación

$$E = \frac{D}{i'} (4).$$

En este período los alargamientos desaparecen cuando las fuerzas dejan de obrar.

Si suponemos $i = 1$, resulta $E = p$. Es decir, que el coeficiente de elasticidad es una fuerza por unidad superficial, capaz de duplicar la longitud de una barra, si esto fuese posible hacerlo dentro del período elástico; pero esta definición es inexacta, porque ninguno de los materiales de construcción es tan elástico que pueda ser duplicada su longitud sin que la elasticidad se altere y sin llegar á la fractura.

52. Contracciones transversales del período elástico.

Llamemos:

V' aumento de volumen que experimenta el prisma al ser deformado por tracción.

d diámetro, ó uno de los lados, de la sección transversal, antes de la deformación.

d' el valor de d después de la deformación.

$c = d - d'$ contracción lateral.

$x = \frac{d - d'}{d}$ contracción por unidad lineal de lado d . Resulta ser también $c = x d$.

n relación $\frac{x}{i}$ entre la contracción por unidad lineal de lado de la sección y el alargamiento por unidad de longitud de prisma.

Se ha demostrado por la experiencia que la densidad del material no disminuye sensiblemente por efecto de la deformación de extensión, lo cual equivale á decir que V' es una cantidad muy pequeña.

Si el volumen del prisma sufre tan escasa variación, se deduce que el aumento de longitud trae consigo disminución en el área de la sección recta, es decir, que ha de haber contracciones laterales.

Supongamos dividido el prisma antes de la deformación en cubos elementales de arista 1, y de volumen 1, por medio de planos normales y paralelos al eje. Después de la deformación, un cubo elemental cualquiera se habrá convertido en prisma, cuya base, situada en plano normal al eje del prisma principal, será un cuadrado de lado $1 - x$; y cuya longitud, paralela á dicho eje, tendrá por valor $1 + i$.

El volumen del cubo deformado será $V = (1 - x)^2 (1 + i)$; ó poniendo en vez de x su igual $n i$, y despreciando los términos que tengan por factor i^2 , por su pequeña magnitud; $V = 1 + i (1 - 2n)$.

El aumento de volumen ha sido, pues:

$$V' = i (1 - 2n);$$

de donde

$$n = \frac{i - V'}{2i}$$

Para el hierro, por ejemplo, $V' < 0,00007$, y como el mayor valor de i del período elástico es, para este metal, $i' = 0,001$, resulta $n > 0,465$.

El máximo valor de n corresponde á $V' = 0$; en cuyo caso, $n = 0,5$ y tendremos

$$x = n i = 0,5 i;$$

contracción total, lateral, $c = x d = 0,5 i d$.

53. Ejemplo. — Una barra metálica de sección rectangular, de lados $d = 0,^m02$ y $e = 0,^m03$, ha experimentado dentro del período elástico un alargamiento lineal de $i = 0,^m0008$. Admitamos $n = 0,5$.

$$\begin{aligned} \text{La contracción del lado } d, \text{ habrá sido } & 0,5 \times 0,0008 \times 0,^m02 = \\ & = 0,^m000008. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{La del lado } e \dots\dots\dots & 0,5 \times 0,0008 \times 0,^m03 = \\ & = 0,000012. \end{aligned}$$

54. Wertheim hizo experiencias con alambre de diversos metales, y dedujo que n es constante é igual á 0,33.

Las experiencias de Duguet, dan, para n , los valores siguientes:

Acero Martín, extradulce.....	0,30 á 0,39
Hierro al carbón vegetal.....	0,32 á 0,40
Bronce.....	0,36

55. 2.º Período. — Este período y el tercero se conocen con el nombre de *períodos de ductilidad*. El segundo comprende las deformaciones desde la Oa (fig. 18), correspondiente al límite de elasticidad, hasta la Ob relativa á la resistencia límite ó máximo valor de $p = Bb$.

En este período (núm. 27), los alargamientos crecen más rápidamente que las fuerzas, de modo que

$$\frac{Bb}{Ob} < \frac{Hh}{Oh} < \frac{Aa}{Oa} < E.$$

Suprimidas las fuerzas de tracción, los alargamientos se borran en parte, pero queda una deformación permanente. Si Od (fig. 1.ª, lám. 2.ª), es la deformación producida por la fuerza $e d$, la experiencia prueba que al suprimir $e d$, desaparece el alargamiento Oc y queda como alargamiento permanente $e d$.

La parte Oc es la deformación elástica que correspondería á la fuerza $p = bc = e d$, si existiese para ella el período elástico, de modo que

$$Oc = \frac{e d}{E}$$

56. Esfuerzos sucesivos poco mayores que el límite de elasticidad. — Si

$e d$ es poco mayor que el límite de elasticidad Aa , al someter de nuevo el cuerpo á esfuerzos crecientes, la barra se porta como si fuese de material distinto, por cuanto si bien conserva el mismo valor de E , y varía poco el límite de elasticidad D , aumenta la resistencia máxima.

Si en la fig. 1.ª (lám. 2.ª) trazamos $e O'$ paralela á $b O$, con lo cual $O O' = c d$, y trasladamos el origen de coordenadas á O' , la nueva curva será $O' r'$; la resistencia máxima $r' t$ será mayor que $r t$, pero corresponde á la misma abscisa antigua $O t$, de modo que el alargamiento total $O' t$ es menor que el $O t$ en la cantidad $O O' = c d$, es decir, en el alargamiento permanente.

Estas propiedades se hacen sensibles, principalmente, en el hierro y en otros metales (*).

57. Contracciones laterales del 2.º período. — El valor de n no lo conocemos, pero sí puede decirse que las contracciones laterales continúan al par que los alargamientos; y como una parte de éstos es permanente, lo mismo sucede con aquéllas.

58. 3.º período. — Formación del huso. — Con un valor de $p = Bb$ (figura 18, lám. 1.ª) constante é igual al máximo del período anterior, continúan las deformaciones. Este resultado se expresa gráficamente por la recta BC , paralela al eje $O X$.

Bajo la acción de la fuerza p por unidad superficial, el alargamiento, en este período, se localiza en una parte de la longitud de la barra, mientras que el resto conserva el alargamiento adquirido anteriormente.

El alargamiento localizado da lugar á una gran contracción transversal ó *estrechamiento de sección*, y empieza á formarse lo que se llama *el huso* (figura 2.ª, lám. 2.ª).

Como la pieza deja de ser prismática, es preciso fijar á qué sección transversal nos referimos en la determinación de p . Llamando P á la fuerza total de tracción, y ω al área de la sección recta del prisma antes de la deformación, continuaremos refiriendo á ω el valor de P ; es decir, que seguirá siendo $p = \frac{P}{\omega}$.

El estrechamiento máximo de la sección se mide por la relación $\frac{\omega - \omega'}{\omega}$; siendo ω' el área de la sección de garganta en el huso (fig. 2.ª). Esta relación se denomina *coeficiente de contracción*.

(*) Experiencias de Bauschinger.—Cap. VI, art. 6.º

59. Deformaciones de las secciones rectas del huso.—La deformación de las generatrices es visible, pero no sucede lo mismo con la de las secciones rectas, y para determinarla se trazan en la superficie del prisma (figura 3.^a, lám. 2.^a) líneas normales y paralelas al eje, las cuales se modifican al formarse el huso de la manera que indica la figura. Resulta:

1.º Las secciones planas *ab* situadas fuera del huso, y la de garganta *cd*, permanecen planas.

2.º Son curvas, en el huso, las generatrices y secciones rectas, pero continúan siendo perpendiculares entre sí.

3.º Las secciones rectas deformadas vuelven la concavidad hacia la garganta, aumentando su curvatura á medida que se aproximan á la sección central *cd*.

4.º La deformación de las generatrices es tanto mayor cuanto más alejadas se hallan del eje.

60. 4.º período.—Fractura (fig. 18, lám. 1.^a).—La deformación sigue siendo local; aumenta la longitud y estrechamiento del huso, produciéndose estos efectos con fuerzas *p* menores que las *Cc* del período anterior, y continuándose hasta la fractura. La parte de curva *CN*, correspondiente á este período, presenta su concavidad al origen de coordenadas *O*.

61. Coeficiente de fractura.—La fractura ocurrida en el 4.º período tiene lugar por un valor *Nn* de *p*, menor que el *Cc* del período anterior. Claro es que de haber permanecido constante el valor de $p = Cc$, la fractura se hubiese realizado con mayor razón.

Entenderemos, en adelante, que el coeficiente de fractura por extensión, á que llamaremos *R*, es el máximo valor de *p* en los diversos períodos de deformación.

No debe olvidarse que en la estimación del valor de *p* nos referimos á la sección primitiva del prisma antes de las deformaciones trasversales, mientras no se especifique lo contrario.

62. Conocimiento de los cuatro períodos anteriores por el manómetro de las máquinas de ensayo.—En la máquina Thomasset y en sus similares, el mercurio del tubo manométrico indica los períodos diversos de la deformación, del modo que á continuación se expresa:

1.º período.—El mercurio del manómetro sube rápidamente.

2.º período.—El mercurio cambia de velocidad; continúa subiendo, pero lentamente, decreciendo por momentos la velocidad ascensional.

3.º período.—El mercurio permanece estacionario, ó bien oscila ligeramente su nivel.

4.º período.—Desciende el mercurio, y al cabo de un corto intervalo cae repentinamente.

63. Períodos de deformación por tracción en otros materiales.—No todos los cuerpos, al romperse por extensión, pasan por los cuatro períodos anteriores, que son característicos del acero dulce, y en general de los materiales dulces similares, resistentes, elásticos, y capaces, sin embargo, de adquirir grandes deformaciones.

En otros metales, el estrechamiento es poco visible; de modo que no existen los períodos 3.º y 4.º

Ciertos cuerpos muy rígidos, como el vidrio, el acero templado de herramientas, se rompen durante el primer período; no dan lugar á deformaciones permanentes, y el límite de elasticidad se confunde con el coeficiente de fractura.

Lo mismo sucede á los materiales pétreos. Mr. Tresca, rompiendo por flexión largos prismas de piedra caliza y de esquisto pizarroso, halló que las flechas de curvatura eran proporcionales á las cargas, hasta la de fractura inclusive (*), lo cual demuestra que en estos cuerpos no hay período de elasticidad imperfecta.

En todos estos cuerpos rígidos, las deformaciones son pequeñas.

El caucho es susceptible de adquirir deformaciones elásticas muy considerables; y en el 2.º período, los alargamientos permanentes son mucho más pequeños que los alargamientos elásticos, en oposición á lo que sucede en los metales, de modo que es muy difícil apreciar el paso del 1.º al 2.º período, ó sea el valor del límite de elasticidad.

64. Diversos modos de representar gráficamente los períodos de deformación.—En los párrafos anteriores se han tomado como ordenadas las fuerzas *p* de extensión por unidad superficial de sección primitiva del prisma; y por abscisas los alargamientos *i* por unidad de longitud.

Como los valores de *i* son pequeños, se suele tomar para abscisas los alargamientos por 100, ó 100 *i*.

Cualquiera que sea el método empleado, no resulta dificultad alguna para el dibujo de la curva correspondiente á los períodos 1.º y 2.º, porque las deformaciones en longitud y en sección se reparten en toda la barra de ensayo; pero en los períodos 3.º y 4.º los estrechamientos y alargamientos se localizan, y puede emplearse uno de los procedimientos siguientes:

(*) Esta proporcionalidad solamente existe en el período elástico (véase Flexión plana de prismas). Como la flexión origina extensiones en unas partes del prisma y compresiones en otras, se deduce que en las piedras ensayadas no existe otro período que el elástico para las deformaciones por extensión y por compresión.

1.º *Abcisas.*—Las magnitudes bc, bn, \dots (fig. 18, lám. 1.ª), serán los alargamientos h del huso referidos á la longitud total L del prisma, es decir, el cociente $d' = \frac{h}{L}$, que representará alargamiento por unidad de longitud, ó 100 d' , como se hizo con los alargamientos del 1.º y 2.º período.

Ordenadas.—Fuerzas $p = \frac{P}{\omega}$ por unidad de superficie de la sección primitiva del prisma. Resulta la curva $OABN$ de la fig. 18.

2.º *Abcisas.*—Alargamientos h del huso, referidos á la longitud H de prisma en que se inicia (fig. 2.ª, lám. 2.ª). Es decir, bc', bn', \dots , iguales á $\frac{h}{H} = d$, ó á $100 \frac{h}{H} = 100 d$ (fig. 18, lám. 1.ª).

Ordenadas.—Fuerzas $p = \frac{P}{\omega'}$ por unidad superficial de la sección ω' más contraída del huso.

Como $H < L$ resulta que $bc' > bc, bn' > bn$.

En cuanto á las ordenadas $C'e', N'n'$, irán creciendo; porque si bien P es constante en el 1.º período y disminuye de valor en el 4.º, disminuye más rápidamente el área ω' de la sección más estrecha del uso, es decir, aumentan los valores de p .

La curva será en este caso la $OBC'N'$ de la fig. 18 (lám. 1.ª), y el coeficiente de fractura será $N'n'$, mayor que el Nn obtenido por el método anterior, y que el Bb correspondiente al mayor valor de P , fuerza total. El valor $N'n'$ dará idea errónea de la resistencia del material; por esto, en uno y otro caso, debe considerarse como resistencia máxima por unidad superficial, ó máximo de $p = \bar{R}$, el valor Bb (núm. 61).

Generalmente se emplea el procedimiento 1.º

Cuando la experiencia tiene por objeto reunir los datos relativos á una barra de ensayo, en particular, sin generalización de resultados, se construye la curva de las deformaciones tomando por abscisas los alargamientos totales, y por ordenadas las fuerzas totales de tracción. La curva resulta entonces de la forma $OBCN$ (fig. 18, lám. 1.ª).

65. Ya se emplee este procedimiento ó el 1.º de los anteriores, interesa el conocimiento de los cuatro puntos A, B, C y N .

En el método 1.º, el punto A corresponde al límite de elasticidad $D = Aa$, y al máximo alargamiento i' por unidad lineal. La recta OA forma con el eje OX un ángulo cuya tangente trigonométrica es E , coeficiente de elasticidad.

El punto B está determinado por el coeficiente de máxima resistencia ó

de fractura $\bar{R} = Bb$, y el menor alargamiento $Ob = e$ que produce. La parte curva AB vuelve su concavidad hacia el eje OX .

El punto C corresponde al mayor alargamiento por 100, $Oc = g$, que produce la carga máxima \bar{R} por unidad superficial. BC es recta paralela al eje OX .

Finalmente, el punto N pertenece á la fractura, y está determinado por un valor de p , que llamaremos F , igual á Nn , y por el alargamiento $On = o$ correspondiente.

En los cuerpos rígidos, el punto B corresponde á la fractura, y á veces el punto A .

66. En la tabla siguiente figuran los valores de las constantes que preceden correspondientes á algunos materiales metálicos, ensayados por tracción en forma de barras de 0,ª100 de longitud, entre señales, y 0,ª014 de diámetro, y los relativos á un faja de caucho de 0,ª050 de ancha, 0,ª005 de gruesa y 0,ª100 de larga.

La fig. 4.ª (lám. 2.ª), contiene las curvas de tracción correspondientes. Las abscisas son deformaciones por 100; y las ordenadas correspondientes, fuerzas de tracción por unidad superficial de sección primitiva.

Para hacer más perceptibles las deformaciones de la barra de fundición, se ha tomado para ella una escala de alargamientos diez veces mayor. En cambio para el caucho, que es tan deformable, se ha tomado una escala de abscisas diez veces menor, y la de ordenadas ó fuerzas cien veces mayor, á fin de que la curva resulte comprendida en la figura.

MATERIALES	CURVAS	E Kilog. por mm.²	D Kilog. por mm.²	\bar{R} Kilog. por mm.²	F Kilog. por mm.²	ALARGAMIENTOS por 100.		
						e	g	o
Cobre.	$OA, B, D,$	12000	7	20	16	10	25	30
Acero muy dulce.	OD''	20000	18	35	30	12	31	35
Acero dulce de cañones	OD''	20000	30	60	56	8	13	15
Acero rígido.	OB'	20000	55	85	»	8	»	»
Acero de herramienta.	OA	20000	100	100	»	0,5	»	»
Fundición mezclada de								
Ruelle.	OB_2	10000	10	22	»	0,7	»	»
Caucho.	OB_3	»	»	0,4	»	505	»	525

En el caucho, el alargamiento máximo elástico del 1.^{er} período llega á 505 per 100, de modo que el permanente no pasa de 20 por 100.

67. Propiedades del material deducidas de los períodos de deformación. La rigidez está medida por el valor de E y de la deformación σ de fractura.

La elasticidad se mide por la gran amplitud del 1.^{er} período, con relación á los demás, y por el valor absoluto del límite de elasticidad D y de la máxima deformación elástica i' .

La ductilidad, ó sea la facultad de admitir alargamientos permanentes, es tanto mayor cuanto mayores sean los alargamientos de los últimos períodos y los estrechamientos de sección en el huso.

La tenacidad depende del valor de \bar{R} , es decir, de la ordenada máxima de la curva.

La plasticidad será grande cuando D , límite de elasticidad, é i' , deformación elástica máxima, tengan pequeños valores.

Hay cuerpos que reúnen á un tiempo dos ó más de las propiedades anteriores.

Las piedras y el vidrio son muy rígidos y tienen elasticidad.

El marfil es rígido y muy elástico.

El caucho tiene gran elasticidad; pero en cambio su tenacidad y rigidez son escasas.

Los aceros duros son muy rígidos, muy tenaces y muy elásticos.

Los aceros dulces tienen ductilidad y resistencia grandes.

El plomo es muy poco resistente, pero tiene gran plasticidad.

El cobre puede considerarse como un intermedio del acero dulce y del plomo.

La madera es regularmente resistente y bastante elástica.

68. Resultados detallados de una experiencia de fractura por tracción.— Como complemento de las ideas que acabamos de exponer, damos á continuación el cuadro de las experiencias hechas por MM. Considère y Montgolfier con una varilla de hierro de 16 mm. de diámetro, y 200 mm. de longitud contada para medida de las deformaciones; de modo que los datos de la segunda columna son cinco veces mayores que los alargamientos observados.

Las contracciones laterales de los períodos 1.^o y 2.^o han sido deducidas, por el cálculo, de los alargamientos, admitiendo que el volumen de la barra ha permanecido invariable.

Los estrechamientos de los últimos períodos han sido medidos directamente, y á su vez han servido para calcular las deformaciones longitudinales del huso, fundándose siempre en la inalterabilidad del volumen.

Esfuerzos totales. P Kilogramos.	Alargamientos entre señales por metro de longitud. Centímetros.	Diámetros de la sección. Mímetros.	Superficie de la sección más contraída. mm. ²	Tensión por mm. ² en la sección mínima. Kilogramos.	Tensión por mm. ² de la sección primitiva. Kilogramos.	Alargamiento por 100 en la sección mínima.	OBSERVACIONES
400	0,010		200,97	1,99	1,99	0,010	1. ^{er} período.
800	0,020		200,95	3,98	3,98	0,020	
1200	0,030		200,93	5,97	5,97	0,030	
1600	0,040		200,91	7,96	7,96	0,040	
2000	0,050		200,89	9,95	9,95	0,050	
2400	0,060		200,87	11,94	11,94	0,060	
2800	0,075		200,84	13,93	13,93	0,075	
3200	0,090		200,81	15,93	15,92	0,090	
3600	0,110		200,77	17,93	17,91	0,111	
4000	3,800		193,64	20,64	19,90	3,080	
4400	4,800		191,79	22,94	21,89	4,080	2. ^o período.
4800	6,250		189,17	25,37	23,88	6,250	
5200	8,250		185,68	28,00	25,87	8,025	3. ^{er} período, comienzo del estrechamiento.
5600	11,120		180,88	30,95	27,86	11,012	
6000	16,600		172,38	34,80	29,85	16,060	Coeficiente de fractura.
6100	23,250	14,2	158,36	38,51	30,34	27,000	
5900	27,600	13,3	138,92	42,47	29,35	44,000	4. ^o período.
5700	30,250	12,5	122,71	46,41	28,35	63,000	
5500	32,000	11,8	109,45	50,25	27,36	84,000	Fractura.
5300	33,000	11,2	98,52	53,79	26,36	104,000	

Carga
máxima.

69. Del examen de este cuadro se deduce:

1.º Mientras los alargamientos no han excedido de 0,06 por 100, son perfectamente proporcionales á los esfuerzos, de modo que estamos en pleno primer período ó período elástico.

El valor de E se obtendrá dividiendo un esfuerzo por una deformación, y resulta:

$$E = \frac{1,99}{0,0001} = \frac{3,98}{0,0002} \dots = 19,900 \text{ kilog. por mm.}^2$$

2.º Sensiblemente, el período elástico continúa hasta el esfuerzo total 3.600, y alargamiento 0^{cm},110, pues ya al valor de P siguiente (4000), no mucho mayor, se produce una deformación notablemente superior (3,80 = 0,038) fuera de la proporcionalidad anterior.

El límite de elasticidad está, pues, próximo á los 18 kilog. por mm.², y á partir de aquí empieza el 2.º período, que sigue hasta los 6.000 kilog. de fuerza total.

3.º El 3.º período puede suponerse comprendido entre los valores de $P = 6.000$ y $P = 5.900$, pues con esfuerzos de tracción casi constantes resultan grandes deformaciones. Además, empieza el estrechamiento y el diámetro de la sección se reduce á 14,2 mm.

4.º El 4.º período abraza desde $P = 5.900$ hasta $P = 5.300$. El estrechamiento continúa.

En el momento de la fractura la sección más contraída trabaja á 53,79 kilogramos por mm.²; pero no es así como se estima en general el coeficiente de fractura, según ya se ha dicho (núm. 61), sino que se refiere á la sección primitiva de la barra ensayada; de modo que para este caso será:

$$\bar{R} = \frac{\text{carga máxima} = 6100}{\omega \text{ primitiva} = 201 \text{ mm.}^2} = 30,34 \text{ kilog. por mm.}^2$$

La fig. 5.^a (lám. 2.^a) representa gráficamente el cuadro anterior. Para trazar la curva se han tomado como abscisas los alargamientos por metro (columna 2.^a del cuadro), y como ordenadas las tensiones por mm.² de la sección primitiva.

Fácilmente se distinguen los cuatro períodos. La parte BC es sensiblemente una recta paralela al eje OX .

En el período 1.º, ó elástico, las deformaciones son muy pequeñas, y

resulta una recta OA que casi se confunde con el eje OY ; el 2.º período comprende de A á B , el 3.º de B á C y el 4.º de C á N .

La escala de ordenadas es de un kilogramo por mm., y la de abscisas de 0^{mm},2 por metro.

70. Alargamiento total de fractura. Cómo debe contarse. — El alargamiento total de fractura por extensión, consta de dos sumandos, que son el alargamiento $l = Li$ distribuído en todo el prisma, correspondiente á los dos primeros períodos, y el $h = Hd$ correspondiente á la longitud H , en que se inició el huso, siendo respectivamente i y d los alargamientos por unidad lineal en la barra y en el huso.

La suma total, $l + h$, observada en barras distintas y referida á la longitud primitiva L del prisma, da valores $\frac{l+h}{L}$ muy diferentes, aun tratándose del mismo material, á causa del sumando h , cuyo valor es independiente de la longitud L , y esto puede inducir á errores sobre el verdadero valor del alargamiento de fractura por unidad de longitud de barra.

Veamos las condiciones que han de satisfacer dos prismas ó barras del mismo material para que sean comparables los resultados de experiencia relativos á alargamientos de fractura.

Sean:	1. ^a barra	2. ^a barra
Longitud primitiva.....	L	L'
Lados ó diámetros de la sección recta.....	A	A'
Alargamientos totales antes de los estrechamientos de sección.....	$l = Li$	$l' = L' i$
Parte de longitud en que se inicia el huso.....	H	H'
Alargamiento correspondiente al huso.....	$h = Hd$	$h' = H' d$

Como el material es el mismo en las dos barras, i y d son constantes.

El alargamiento total de la 1.^a barra, es $l + h$
 Y el de la 2.^a..... $l' + h'$

y los alargamientos por unidad de longitud,

$$\frac{l+h}{L} = i + \frac{h}{L} \text{ para el 1.º ejemplar.}$$

$$\frac{l'+h'}{L'} = i + \frac{h'}{L'} \text{ para el 2.º}$$

Estos valores serán iguales siempre que $\frac{h}{L} = \frac{h'}{L'}$ ó $\frac{h}{h'} = \frac{L}{L'}$.

Esta proporción quedará verificada cuando las dos barras sean semejantes, porque entonces

$$\frac{L}{L'} = \frac{A}{A'} \quad (1)$$

y además los husos resultan semejantes también; de modo que

$$\frac{A}{A'} = \frac{H}{H'} = \frac{h}{h'}$$

Si se admite, lo que es suficientemente exacto, que los alargamientos son independientes de la forma de la sección transversal, la relación (1) se convierte en esta otra:

$$\frac{L}{L'} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega'}}$$

Que será la condición necesaria para que los resultados de las experiencias sean comparables (*).

Es del mayor interés cuanto acaba de consignarse, porque para la recepción de los metales dúctiles, especialmente del acero dulce, se exige como condición, á más de la tenacidad, la de un cierto alargamiento mínimo, é importa, por tanto, fijar el modo de contarlos (núms. 99 y 116).

71. Circunstancias que influyen en el resultado de las experiencias.

Nada más fácil que deducir consecuencias erróneas de las experiencias de fractura, si no se tienen en cuenta todas las circunstancias que pueden influir en el valor de los resultados. Expondremos las principales.

72. 1.ª Heterogeneidad de los materiales. — La homogeneidad é isotropía de que se supone dotados á los cuerpos en la teoría matemática de la elasticidad, no existen en los materiales de construcción. Éstos, sin excep-

(*) En la fábrica del Creusot se ha adoptado por barra tipo un cilindro en que $L' = 10$ cm. y $\omega' = 2$ cm.², de modo que la longitud L y el área ω de base de cualquiera otra barra de ensayo, deben satisfacer la ecuación

$$\frac{L}{10} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad L^2 = 50 \omega.$$

En la Compañía francesa de ferrocarriles Paris-Lyon-Mediterráneo, se emplea la ecuación $L^2 = 80 \omega$ porque la barra tipo es de $L' = 20$ cm. y $\omega' = 5$ cm.²

ción, son heterogéneos, y están formados de aglomeraciones de materias diversas, más ó menos íntimamente mezcladas, de modo que las constantes específicas del conjunto son diferentes de las que corresponden á cada uno de los elementos.

Si se somete un cuerpo heterogéneo á la acción de fuerzas exteriores que crecen en intensidad indefinidamente, al principio se portará como un cuerpo elástico, pero más tarde, aumentando el valor de las fuerzas, se iniciará la desunión de los elementos de materia distinta, produciéndose roturas locales primero y la fractura total después.

Durante el primer período, se puede, no obstante, aplicar á los cuerpos heterogéneos las fórmulas que suponen la homogeneidad perfecta. El límite de elasticidad corresponde probablemente al punto de paso de este período al segundo, en el que vencida la adherencia mútua de dos moléculas próximas, empieza su separación. A partir de este límite, hay discordancia entre las indicaciones dadas por la teoría de la elasticidad para los cuerpos elásticos homogéneos y los resultados obtenidos por la experiencia en los cuerpos naturales.

Esto mismo sucede cuando los cuerpos heterogéneos presentan soluciones de continuidad, fisuras ó huecos producidos unas veces por un trabajo mecánico que ha hecho rebasar el límite de elasticidad de la materia, y otras veces por efecto del calor ó del enfriamiento, por falta de adherencia de los elementos en estado natural, ó por otras causas.

La heterogeneidad puede ser *de estructura* ó *de formación*. La primera, la más importante desde el punto de vista de las propiedades elásticas, consiste en la agrupación de partículas diferentes en el concepto químico y en el físico, en un fragmento cualquiera del cuerpo que se considera; y la segunda tiene lugar cuando las diferencias de composición corresponden, no á un mismo fragmento cualquiera, sino que se observan entre dos fragmentos tomados en puntos distantes de un mismo cuerpo.

La heterogeneidad de estructura existe en todos los materiales de construcción. Casi todas las piedras se componen de más de un mineral, y la estructura puede ser granular, cristalina, fibrosa, etc. Las maderas están formadas de fibras y células, y los metales contienen carbono, silicio, fósforo, azufre y otros metales ó metaloides que los impurifican.

La heterogeneidad de formación se observa también en los materiales, aun en aquéllos cuya composición parece ser más uniforme. Por ejemplo, el acero fabricado por cualquiera de los dos procedimientos Bessemer ó Martín Siemens, mientras permanece líquido en el convertidor ó en el horno, es

una mezcla íntima y uniforme; pero la solidificación en la lingotera se hace de modo no uniforme, primero junto á las paredes y más tarde en el núcleo y en la parte superior ó mazarota, y en estas partes se encuentra mayor proporción de carbono.

La heterogeneidad existe dentro de las mismas especies de material. En las piedras, la resistencia y elasticidad varían de un banco á otro, y aun dentro del mismo banco, y lo mismo sucede en las maderas, pues dichas constantes específicas son muy diferentes según que se tome el duramen ó la albura, la parte central del tronco, la superior ó la inmediata á la raíz. Hasta en los metales, á pesar de los adelantos de la metalurgia, dos barras de ensayo sacadas de la misma pieza pueden dar resultados diversos.

Sin embargo, cuando las piezas están bien trabajadas, calorífica y mecánicamente, las diferencias anteriores son poco sensibles; y como prueba de los progresos realizados en este punto, citaremos las experiencias hechas por Duguet con barras sacadas á lo largo de un cañón de 14 toneladas, de acero Martín, forjado, taladrado, templado y recocido (fig. 6.^a, lám. 2.^a).

El cuadro siguiente contiene el resultado de las experiencias:

BARRAS	DIÁMETRO		Reducción del diámetro. Por 100.	Alargamiento. Por 100.	Límite de elasticidad. Kilogs. por mm. ²	Coeficiente de fractura. Kilogs. por mm. ²
	primitivo. mm.	final. mm.				
<i>a</i>	14	10,3	26	22	33	58
<i>b</i>	14	10,9	21	23	29	56
<i>C</i>	25	20	20	17	32,5	57,5
<i>a</i> ₁	14	11	21	23	30	58
<i>b</i> ₁	14	10,3	26	19	36	62
<i>C</i> ₁	25	19,4	22	17	33	62

De este cuadro se deduce que la tenacidad del metal y el límite de elasticidad van aumentando, aunque poco, pero de modo uniforme, de la superficie exterior á la interior, como lo prueba la comparación de las barras de ensayo *a* y *b*₁; y que las barras sacadas á igual distancia del eje del cilindro son homogéneas y dan resultados iguales, como lo demuestra la comparación de las barras *a*, *b* y *C*. Se tendrá presente esta última circunstancia, y se procurará que los ejemplares de ensayo se saquen de un mismo cilindro ó

prisma y equidisten del eje, con cuyo requisito serán comparables los resultados de las experiencias.

73. 2.º Orientación.—La heterogeneidad de formación es causa de la heterotropía de los materiales, de modo que la dirección de los esfuerzos ha de ejercer forzosamente influencia grande en los resultados de experiencia.

En la madera, por ejemplo, la resistencia y elasticidad varían, según que la fuerza de tracción sea paralela, normal ó tangencial á las fibras.

Las piedras resisten de modo diverso á las fuerzas, según que éstas sean normales ó paralelas al hecho de cantera.

En los metales no es indiferente en general que la tracción se opere en dirección del laminado ó perpendicularmente.

74. Preparación de los prismas de ensayo.—Hay que poner especial cuidado en que las herramientas y operaciones dedicadas á la preparación de las barras de ensayo, no modifiquen favorable ó perjudicialmente las propiedades mecánicas del material.

Los metales requieren en este punto el más minucioso cuidado. Los prismas ó barras de ensayo se sacan cortando trozos de los carriles, cilindros, barras laminadas, lingotes, etc., cuya calidad se quiere reconocer, y dándoles forma conveniente, ya por la forja, ya en frío, con las herramientas de cortar, acepilliar, martillar, etc.

En el hierro y en el acero, las operaciones de forja, cuando están hábilmente practicadas, influyen favorablemente en las cualidades del material, haciéndole adquirir más fibra; y en cambio, si son torpemente ejecutadas, si el metal *se pasa al fuego*, según expresión práctica, pierde de resistencia (*).

Ya se ha dicho (núm. 56) que cuando se hace experimentar al hierro deformaciones poco superiores al límite de elasticidad, aumenta, aunque en pequeña cantidad, su resistencia, y disminuyen los alargamientos. Así se explica el que la laminación y martillado del hierro, ejecutados en frío, aumenten su tenacidad y disminuyan su ductilidad.

La tijera ejecuta en los bordes de la pieza de hierro cortada una acción

(*) De una misma varilla de hierro, procedente de la fábrica asturiana La Felguera, obtuve, en la máquina Thomasset, los resultados siguientes:

	Coeficiente de fractura por extensión.
Trozo preparado en frío.	34 kilogramos por mm. ²
Trozo con cabezas preparadas en la forja.	24 " "

Esta notable diferencia demuestra lo que puede perder el hierro por operaciones de forja mal hechas.

parecida á la del martillado en frío; la lima y las máquinas de tornear y de acepillar no ejercen acción alguna. De aquí se deduce que las barras de hierro para el ensayo no deben ser obtenidas por el forjado ni martillado en caliente ni en frío, sino que se las debe sacar de la pieza principal con la tijera, tajadera ó torno, limando ó acepillando después los bordes.

En el acero ejercen acción destructora la tijera y el punzón, en una pequeña zona inmediata al lugar en que la herramienta ha ejecutado su trabajo, y por esta razón hay que hacer desaparecer dicha zona, limando ó acepillando los bordes.

75. Influencia de la forma y dimensiones del prisma. — Hemos visto (núm. 70) la influencia que tiene la relación de dimensiones de una barra en los alargamientos, y la necesidad, para que éstos sean comparables en barras distintas, de que se verifique la condición $\frac{L}{L'} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega'}}$. También influye la relación de dimensiones en la resistencia ó tenacidad.

Cuando el material es rígido, importa poco que el ejemplar de ensayo sea corto ó largo; pero en los cuerpos dúctiles, si la relación de la longitud al diámetro ó lado menor de la sección recta es pequeña, no hay espacio para que se forme el *huso* precursor de la fractura, y la experiencia acredita que el coeficiente de fractura que se obtiene es mayor que el verdadero; esto es, que el que correspondería á una barra suficientemente larga para que pudiera formarse el huso. También aumenta el límite de elasticidad.

Estos hechos quedan perfectamente comprobados por las siguientes experiencias:

1.^a Mr. Duguet sometió á esfuerzos de tracción una barra de acero dulce, de la forma que representa la fig. 7.^a (lám. 2.^a); el diámetro era de 14 milímetros en *b*, y de 12,5 mm., tan sólo, en *a*. Ejerciendo los esfuerzos tracteros sobre las cabezas extremas *A* y *C*, se rompió la barra por *b*, es decir, por la sección mayor; con un material rígido hubiera tenido lugar en *a* la fractura.

También aumenta el coeficiente de fractura cuando se rebaja el diámetro ó sección de una barra en una pequeña longitud.

Mr. Barba, ingeniero del Creusot, sometió á la fractura por tracción barras de acero de sección rectangular, de 30 mm. \times 14 mm., en las que se habían practicado rebajos en forma de *V*, de 10 mm. de separación en las ramas, y de 8 mm. de profundidad en los rebajos abiertos en las caras menores (*a*, fig. 19, lám. 1.^a), y de 4 mm. en las mayores (*b*, fig. 19, lám. 1.^a)

Obtuvo los resultados siguientes:

	Coeficiente de fractura por extensión, en kg. por mm. ² de sección primitiva.	Contracción, después de la ruptura, de la sección estrechada.
Barra sin rebajos.....	42	0,302
» con rebajos <i>a</i> de 8 mm. en las caras menores.....	45,7	Muy pequeña.
» con rebajos <i>b</i> de 4 mm. en las caras mayores.....	57,1	Casi nula.
» con rebajos en las cuatro caras (<i>d</i>)...	60,4	Nula.

2.^a Mr. Barba ha encontrado que el coeficiente de fractura, en barras sacadas de la misma plancha y con la misma orientación, disminuye cuando aumenta la relación $\frac{a}{e}$ entre el ancho y el espesor del prisma.

He aquí los datos relativos á tres barras prismáticas de acero de la misma calidad:

Número de la barra.	Grueso <i>e</i> . Centímetros.	Ancho <i>a</i> . Centímetros.	Coeficiente de fractura. — Kilogramos por mm. ² .
1. ^a	1	2	42,7
2. ^a	1	6	41,3
3. ^a	1	10	40,2

Importa, pues, que la cantidad $\frac{a}{e}$ varíe poco en los diversos ejemplares.

En cuanto á la forma de la sección, es indiferente que sea cuadrada ó circular.

3.^a Cuando se hace un rebajo de poca longitud en una barra de material dúctil, hemos visto que aumenta el coeficiente de fractura y el límite de elasticidad; pero los aumentos son diferentes según la forma y dimensiones del rebajo, como lo acredita la siguiente experiencia realizada por Mr. Duguet en las barras de acero dulce *A*, *B*, *C*, *D* y *E* (fig. 8.^a, lám. 2.^a), y cuyos resultados aparecen en el cuadro siguiente:

	Coefficiente de fractura. — Kilogramos por mm ²	Contracción máxima. Por 100.	Fractura.
A. . . .	80	14	Granos gruesos brillantes.
B. . . .	79	7	Idem.
C. . . .	79	18	Granos más finos.
D . . .	68	25	En forma de copa de granos brillantes; granos grises esponjosos en el fondo.
E. . . .	58	26	Ordinaria.

Los números de la fig. 8.^a indican las dimensiones en mm. Todos los diámetros en la sección de garganta eran de 14 mm.

Si la disminución de sección es brusca (fig. 20, lám. 1.^a), de modo que no hay superficies curvas de unión, sino que se forma el ángulo recto *M*, el cuerpo tiende á romperse por tracción según direcciones oblicuas que parten de los puntos *M* (fig. 21, lám. 1.^a). Los valores del límite de elasticidad y coeficiente de fractura, si bien mayores que los que correspondían al prisma único de diámetro *d*, son menores que en los casos que señalan las figuras *A*, *B* y *C* (fig. 8.^a, lám. 2.^a).

Resumiendo; los estrechamientos de sección practicados en un prisma, producen aumentos en los valores del límite de elasticidad y coeficiente de fractura si se comparan con los correspondientes á prismas de sección constante igual á la que tiene en el estrechamiento el sometido á ensayo. Estos aumentos no son iguales en todos los casos, sino que dependen de la forma del rebajo, siendo mayores cuando el estrechamiento presente superficies redondeadas (*A*, fig. 8.^a, lám. 2.^a), y siguiendo después, por su orden, los estrechamientos que presentan ángulos vivos (*B*, fig. 8.^a, lám. 2.^a), y los cambios bruscos de sección (fig. 20, lám. 1.^a).

En general, es práctica corriente que las secciones trasversales de un prisma, varíen de modo progresivo, mediante superficies curvas.

76. 5.^a Influencia de la progresión de los esfuerzos.— Cuando el aumento gradual de fuerza de tracción es muy rápido, se obtienen coeficientes de fractura menores que cuando se opera por pequeños crecimientos, pudiendo llegar á diferenciarse los resultados en 18 por 100. Por esta razón conviene consignar como dato el tiempo invertido en los diversos detalles de la experiencia.

Generalmente se opera de modo progresivo lento, por incrementos de

esfuerzo tractor por unidad superficial de la sección recta, no aumentando fuerza hasta que la anterior haya producido todo su efecto, y anotando los alargamientos.

Otras veces se hace experimentar al prisma de ensayo un esfuerzo tractor inicial grande, que sea una fracción de la carga de fractura, operando después por incrementos más ó menos considerables hasta llegar á la fractura (*).

77. Influencia de la temperatura.— La temperatura del material en el momento de la experiencia influye en el resultado, especialmente en los metales, como más adelante veremos (núms. 96 y 114).

78. Influencia de la composición química de los materiales.— En algunos materiales la composición química ejerce influencia en sus cualidades físicas; en otros es nula, ó no se conoce hasta ahora. En los metales es en donde más visible y conocida es dicha influencia. La combinación del hierro con proporciones distintas de carbono, produce materias de tan diferente resistencia y rigidez como son la fundición, el hierro y el acero; y aun dentro de cada una de estas materias, conocida es la influencia de las proporciones, ó simplemente presencia, de otros metales y metaloides.

Otro tanto puede decirse de las numerosas aleaciones que se emplean en las construcciones.

Pero concretándonos al hierro y al acero, ¿está tan bien estudiada la influencia que sea posible establecer fórmulas que den la tenacidad y rigidez del metal en función de sus componentes químicos?

Esto han pretendido algunos ingenieros. Knüt Styffe afirma que el máximo valor del coeficiente de fractura por extensión para el hierro y acero pudelados, tiene lugar cuando encierran 0,8 por 100 de carbono; y para los ejes de acero cuando contiene 1,2 por 100.

Deshayes, Weyrauch y otros han dado fórmulas del valor de \bar{R} y de σ (núms. 108 y 109) en función de las cantidades de carbono y de otros cuerpos contenidos en el acero.

Sin embargo, se puede conceder muy escaso valor á las fórmulas empíricas que tratan de relacionar la tenacidad del metal con su composición química, ni aun tratándose del acero, metal mucho más homogéneo que el hierro.

(*) En la recepción de materiales de acero para los arsenales españoles, el esfuerzo tractor inicial se hace igual á los ocho décimos del exigido para la fractura de la barra de ensayo. Este esfuerzo se mantiene en acción durante un minuto ó más si el alargamiento de la barra continúa. Cuando la deformación cesa, se aumenta la fuerza de tracción hasta obtener la fractura á razón de medio kilogramo por mm. cuadrado de la sección primitiva, dando estos incrementos cada cuarto de minuto ó más, hasta que el alargamiento cese. (Pruebas para la recepción de aceros en los arsenales. Real Orden de 31 de Octubre de 1835.)

Hay hierros impuros que contienen tanto ó más carbono, y otros metales favorables á la tenacidad, que ciertos aceros, y, sin embargo, poseen cualidades mecánicas muy distintas.

Además, á la dificultad no pequeña del análisis químico cualitativo y cuantitativo, se une el error á que puede conducir la falta de homogeneidad del metal, de modo que según la parte de la pieza que se tome para analizar, se obtendrán proporciones muy diversas de carbono y de otros cuerpos. Para que se comprenda cuán grande puede ser el error por este concepto, diremos que haciendo enfriar muy lentamente acero fundido, ha llegado á encontrarse hasta 15 por 100 de carbono en las partes que tardaban más tiempo en solidificarse, mientras que en otras no excedía de 0,5 por 100; con esta heterogeneidad el análisis químico no puede servir de base para el conocimiento de las cualidades físicas.

Pero aun cuando se conociesen por el análisis las proporciones exactas de metales y metaloides que entran en la composición del hierro y del acero, no por esto podría deducirse su tenacidad, resistencia ni elasticidad; porque muchas operaciones mecánicas que se practican en frío no alteran la composición química, y, sin embargo, modifican las propiedades físicas (núm. 74).

79. Fractura. — Si la materia es rígida y homogénea, la fractura se opera según una sección recta, y presenta aspecto granular más ó menos pronunciado. Así se rompen por tracción las piedras, ladrillos, fundición, acero duro, etc., etc.

Igual aspecto ofrece la fractura de las materias dúctiles cuando no se deja espacio para la formación del huso (núm. 75); pero en el caso en que éste se forma, se rompe el cuerpo del modo que presenta la fig. 9.^a, lám. 2.^a, que corresponde á la fractura de una barra de acero dulce y homogéneo. Fórmense dos conos tanto más alargados cuanto mayor es la longitud del huso.

En las materias fibrosas y poco homogéneas, como la madera, la fractura es generalmente astillosa.

DEFORMACIONES Y FRACTURA POR COMPRESIÓN

80. Máquinas empleadas. — Pueden emplearse máquinas especiales dedicadas exclusivamente á las experiencias de compresión; pero en general se utilizan las máquinas de extensión con la adición de un aparato que, colocado entre las mordazas ó garras, hace que se aproximen dos platillos que comprenden el prisma de ensayo cuando aquéllas se separan.

La fig. 10 (lám. 2.^a), representa el aparato de compresión de la máquina Thomasset. Introduciendo los apéndices *M* y *N* en las garras de tracción, al separarse éstas se aproximan los dos platillos *a* y *b* y verifican la compresión del prisma *d*.

81. Dificultades que se presentan en las experiencias de compresión.— Las experiencias de compresión son mucho más difíciles de realizar en condiciones suficientes de exactitud de resultado, que las de extensión.

La primera dificultad que se presenta es la de conseguir una repartición igual y uniforme de fuerza compresora en toda la sección recta de la pieza comprimida, de modo que la resultante coincida con su eje geométrico y se obtenga, como valor constante de la presión por unidad superficial, $p = \frac{P}{\omega}$

Sería preciso, para alcanzar el resultado, que el prisma de ensayo tuviese sus bases perfectamente á escuadra con el eje, y que los dos platillos compresores *AA*, *BB* (fig. 11, lám. 2.^a), se moviesen paralelamente á sí mismos, circunstancias ambas de difícil realización en la práctica.

No coincidiendo la resultante *P* con el eje del prisma, la repartición de presiones se hace de modo desigual y desconocido, pues se ignora la posición del centro de presión.

Ocurre también que las bases del prisma resbalan á lo largo de los platillos, con lo cual la resultante *P* de la presión no coincide con el eje del prisma, el cual se rompe de seguida si es de material rígido, ó se deforma cuando es dúctil, de la manera que indican las figs. 12 (lám. 2.^a), relativas á un cilindro de acero dulce (*). Es fácil comprobar el resbalamiento de las bases del prisma aun con pequeños esfuerzos de compresión (fig. 13, lám. 2.^a). Para evitarlo se practica en dichas bases un cuadrículado de pequeñas ranuras, con objeto de aumentar el rozamiento de resbalamiento sobre los platillos, ó se toma cualquiera otra precaución que conduzca á este fin.

A otra deformación anormal da lugar la compresión cuando la longitud del prisma es mayor que dos veces la menor de las dimensiones de la sección recta. Prodúcese una flexión lateral que rompe desde luego el prisma si el material es rígido como las piedras, metales duros, maderas, etc., ó modifica sus dimensiones hasta el aplastamiento si se trata de un material dúctil.

Las figs. 14 y 15 (lám. 2.^a), se refieren á este modo de fractura en cilindros y prismas de acero dulce. Las dimensiones están expresadas en milímetros y las fuerzas de compresión en kilogramos.

(*) En las figuras aparecen las dimensiones del cuerpo en milímetros, y las fuerzas de compresión productoras de las deformaciones, en kilogramos.

Las figs. 1.^a y 2.^a (lám. 3.^a), representan la fractura por flexión lateral de prismas de piedra y de madera.

En todos los casos que anteceden, las deformaciones y fractura de los prismas de ensayo no corresponden á la compresión simple, y los resultados numéricos de las experiencias no deben tomarse como datos generales correspondientes al fenómeno de la compresión del material que se ensaya, sino como valores particulares relativos al modo especial de deformación y fractura obtenidos en cada experiencia.

Dedúcese también de los hechos que dejamos señalados, la conveniencia de dar á los prismas de ensayo pequeña longitud, que no exceda del doble del lado menor de la sección recta, para eliminar la flexión lateral, y de procurar evitar por todos los medios el resbalamiento de las bases. Así nos aproximaremos más á la compresión teórica, pero en cambio serán menores y más difíciles de apreciar las deformaciones elásticas y permanentes del sólido.

82. Materiales dúctiles y elásticos. Períodos de deformación.— Siguiendo el orden empleado en el estudio de las deformaciones por extensión, nos ocuparemos primero de los materiales dúctiles y elásticos, que son los que ofrecen mayor número de fenómenos, y después trataremos de los demás.

La línea $OABC$ (fig. 3.^a, lám. 3.^a), representa gráficamente los resultados de las experiencias por compresión, siendo las abscisas los acortamientos por unidad de longitud, y las ordenadas las fuerzas p de compresión por unidad superficial de sección primitiva ω , de modo que $p = \frac{P}{\omega}$.

El primer período, ó período elástico, corresponde á la parte recta OA ; p é i están en relación constante $\frac{p}{i} = E$, siendo E el coeficiente de elasticidad por compresión. $Aa = D'$ es la fuerza límite de elasticidad, y Oa el acortamiento elástico máximo.

El coeficiente de elasticidad por compresión tiene aproximadamente en cada material el mismo valor que el de extensión, y por esto lo representamos por la misma letra E . También se puede poner bajo la forma $E = \frac{PL}{l\omega}$ substituyendo p é i por sus respectivos valores $\frac{P}{\omega}$ y $\frac{l}{L}$; P es la fuerza total de compresión, l el acortamiento elástico total, y L y ω la longitud y el área de la sección recta del prisma.

A partir del valor límite $p = Aa$, las deformaciones son permanentes en

parte, y crecen más aprisa que los valores de p en el intervalo ab que constituye el 2.^o período. La curva AB vuelve su concavidad al eje OX .

Desde b á c los valores de p crecen más rápidamente que los de i ; la curva BC vuelve la convexidad al eje OX y el punto B es un punto de inflexión.

Sigue creciendo p hasta llegar al coeficiente de fractura $R' = Cc$, término del 3.^{er} período.

83. Dilataciones y ensanchamiento. Plegado de la superficie lateral.— Durante el primer período los acortamientos van acompañados de dilataciones laterales de intensidad uniforme, de modo que el sólido conserva su forma prismática. Las deformaciones trasversales se explican, como en la extensión, por la inalterabilidad del volumen del prisma.

En el 2.^o y 3.^{er} períodos las dilataciones laterales cesan de ser iguales, y crecen desde las bases hacia el medio del sólido, de modo que resulta un ensanchamiento máximo de sección en la equidistante de dichas bases, y el prisma toma la forma de un pequeño tonel (B , fig. 4.^a, lám. 3.^a).

Además, la parte de superficie lateral del prisma próximo á las bases se pliega y coloca en el plano de estas bases, aumentando así su diámetro y su área. El *plegado* de la superficie lateral corresponde, al parecer, al punto de inflexión B de la curva $OABC$ (fig. 3.^a). Estas deformaciones son permanentes.

Un ejemplo de estos fenómenos presenta el cilindro de acero dulce de la fig. 4.^a (lám. 3.^a); A es el cilindro antes de la deformación; en la superficie lateral se han trazado dos pequeñas líneas da , db , que se encuentran en un punto de la circunferencia base superior; B es la forma que afecta el cilindro después de deformado por una fuerza total de compresión $P = 20.000$ kilogramos. La altura del cilindro, que era de 18^{mm}, se ha reducido á 7^{mm}, y en cambio el diámetro de la base, que valía 10^{mm}, ha aumentado hasta 14,5^{mm}. La parte anular rayada indica la superficie lateral que se ha plegado á la base, como lo comprueban los trozos ó señales que en la parte próxima al vértice d han dejado de formar parte de la superficie cilíndrica y se han incorporado á la base plana.

El plegado de la superficie lateral tiene lugar en el primer período ó período elástico en los cuerpos de gran elasticidad, como el caucho, siendo fácil hacer la experiencia que comprueba dicho fenómeno. Suprimida la compresión desaparece el plegado y el ensanchamiento lateral.

84. Deformaciones de las secciones meridianas y paralelas.—Mr. Tresca formó un cilindro con otros varios superpuestos, compuesto cada uno de anillos concéntricos. Sometido el todo á compresión hasta la deformación

permanente, y haciéndola una sección por el eje, se halló (fig. 5.^a, lám. 3.^a) que las secciones habían sufrido las transformaciones siguientes:

1.^a Las secciones rectas se convierten en superficies curvas que presentan su convexidad á la sección media, única que permanece plana, aumentando la curvatura á medida que se alejan de esta sección.

2.^a Las generatrices rectilíneas de los diversos cilindros se transforman en líneas curvas de concavidad dirigida al eje, que permanece rectilíneo, y de curvatura creciente con la distancia á él. Después de la deformación, las generatrices son, aproximadamente, normales á las secciones rectas.

85. Prismas superpuestos.—Las deformaciones elásticas del caucho son de la misma especie que las permanentes de los cuerpos dúctiles, de modo que el conocimiento de éstas se puede deducir del examen de aquéllas.

Si se someten á compresión varios discos de caucho superpuestos, separados por pequeñas planchas de palastro suficientemente grandes para que en todos los períodos rebasen los discos, éstos se deforman aisladamente como si estuviesen solos (fig. 7.^a, lám. 3.^a). Pero si no se intercalan las planchas (figura 8.^a), el conjunto se deforma como si fuese una pieza única, incrustándose los discos extremos en el del medio, que viene á quedar de la forma de una lente bicóncava.

Cuando se superponen dos prismas de material dúctil, si no está prevenido el movimiento de las bases, resbalan éstas; y como las presiones se reparten entonces de modo desigual; la superficie común se inclina cada vez más con respecto á la dirección de los esfuerzos (fig. 9.^a, lám. 3.^a) hasta que los dos prismas se separan resbalando entre sí.

86. Fractura.—Se inicia la fractura por la aparición de grietas helicoidales en la superficie lateral (*a*, fig. 6.^a, lám. 3.^a), que van ensanchándose, y suele terminar con la separación ó desprendimiento de una ó varias partes.

En los sólidos que presentan cambios bruscos de sección (fig. 22, lám. 1.^a), la fractura tiene lugar según direcciones oblicuas que parten de los ángulos entrantes *M*. Tiene aquí aplicación lo que se dijo en el núm. 75 relativo á la tracción en esta clase de cuerpos.

87. Cuerpos rígidos.—En los cuerpos rígidos los acortamientos son muy pequeños, y las dilataciones laterales inapreciables. No hay ensanchamiento de la sección recta media ni plegado de la superficie lateral.

La fractura se opera de uno de los modos siguientes:

1.^o Por superficies de separación próximamente paralelas al eje (fig. 10, lám. 3.^a). Esta fractura es propia de los materiales homogéneos vítreos.

2.^o Por un plano oblicuo al eje (fig. 11). Esto sucede á los materiales de

textura granular, como las piedras, ladrillos, fundición de hierro, etc., especialmente cuando es algo grande la longitud del prisma, de modo que se pueda iniciar la flexión lateral.

Según experiencias de Hodgkinson, el plano de separación forma con el eje un ángulo comprendido entre 32° y 42°, para las fundiciones de hierro de diversas clases.

3.^o Cuando la altura del prisma es pequeña, los materiales de textura granular se rompen formando conos ó pirámides, cuyas bases son las del prisma, formados por planos ó superficies oblicuas de separación (fig. 12).

Para todos estos cuerpos la resistencia al aplastamiento es mucho mayor que la tenacidad ó resistencia á la extensión. En la fundición, por ejemplo, el coeficiente de fractura por compresión es 5 ó 6 veces mayor que el relativo á la extensión.

88. Cuerpos fibrosos.—En éstos las fibras tienden á separarse por efecto de la compresión, y el prisma se hiende longitudinalmente.

En general estos cuerpos son más aptos para resistir extensiones que compresiones, especialmente cuando la adherencia lateral de las fibras es pequeña.

DEFORMACIONES Y FRACTURA POR ESFUERZO CORTANTE Y POR DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL

89. Esfuerzo cortante.—Las deformaciones debidas al esfuerzo cortante no han sido estudiadas con la detención dedicada á las de extensión y compresión, mucho más interesantes.

Dijimos (núm. 20) que el coeficiente de elasticidad transversal era $E' = \frac{p'}{i_1}$, siendo p' el esfuerzo cortante por unidad superficial de área ω de la sección transversal del prisma, é i_1 la deformación transversal por unidad de longitud, es decir, el camino recorrido por la sección transversal, normalmente al eje del prisma, por cada unidad de longitud de éste.

Si llamamos C al esfuerzo cortante total, L á la longitud del prisma y l á la deformación transversal total:

$$p' = \frac{C}{\omega} \quad \text{y} \quad i_1 = \frac{l}{L}$$

de modo que $E' = \frac{CL}{l\omega}$ (1) ó $l = \frac{CL}{E'\omega}$.

En general:

Se admite que, para un mismo material, $E' = \frac{1}{3} E$.

La fig. 13 (lám. 3.^a), representa un roblón de hierro antes y después de la deformación por esfuerzo cortante, y también, en escala mayor, una de las dos secciones de fractura después de verificada ésta. La deformación trasversal se traduce en un pequeño alargamiento que ocasiona á su vez contracciones laterales en el roblón; y así se explica el que habiendo llenado el cuerpo de éste todo el taladro de la plancha antes de la deformación, resulten después de la fractura pequeñas holguras.

Todos los cuerpos dúctiles se portan del mismo modo.

La fractura de los cuerpos rígidos se verifica sin deformaciones preliminares visibles.

90. Desgarramiento longitudinal. — En los metales y piedras equivale al esfuerzo cortante, y las deformaciones y fractura tienen lugar del mismo modo. En los materiales fibrosos, como la madera, es en los que este esfuerzo se caracteriza mejor, siendo la superficie de fractura tanto menos astillosa, cuanto más señalada está la fibra y más fina y apretada es, como sucede en algunas clases de pino.

91. Flexión y torsión. — Las deformaciones y fractura por flexión y torsión son fenómenos complejos que dan origen á extensiones, compresiones, esfuerzos cortantes y desgarramientos longitudinales; por esta razón nos ocuparemos de ellos más adelante, limitándonos ahora al estudio de las deformaciones simples.

3. MATERIALES METÁLICOS

HIERRO

92. Circunstancias que influyen en el valor de las constantes específicas del hierro. — **1.º Minerales y detalles de fabricación.** — Las menas de hierro pueden ser más ó menos puras y contener metales y metaloides favorables unos y perjudiciales otros á la resistencia y buenas cualidades del producto.

Por otra parte, las menas dulces, las que tienen ganga más fusible, pueden ser convertidas en fundición con temperatura menos elevada; este motivo, y el de la economía, influyen en la elección de combustible con que se cargan los hornos altos y da lugar al empleo del carbón de leña ó del cok. Las impurezas del cok, procedentes de la hulla con que se fabricó, se transmiten á la fundición, y por tanto al hierro que resulta de su afinación; de modo que en el valor del producto, á igualdad de las demás condiciones, el combustible empleado ejerce influencia. La ejerce asimismo el fundente empleado en el horno alto y el uso de aire caliente ó frío de las toberas.

Antes de recibir los hierros la forma definitiva sufren varias operaciones. La fundición se liquida en el horno de pudelar, y por efecto de la acción oxidante del aire caliente se elimina el carbono, convertido en ácido carbónico y en óxido de carbono, y el azufre formando ácido sulfuroso. Al desaparecer parte del carbono, que hace de fundente, la masa líquida, continuamente removida por el pudelador, se solidifica parcialmente, formándose una masa esponjosa de hierro muy puro en estado pastoso, cuyos huecos están llenos de una escoria líquida que contiene la casi totalidad del silicio, y una parte de azufre y fósforo formando silicatos, fosfatos y sulfuros de hierro y de manganeso. La separación de la escoria no puede efectuarse por simple licuación, en virtud de la diferencia de densidades, y hay que expulsarla por choque ó presión. De este modo la esponja ó *zamarra* se convierte en *tocho*, que después ha de sufrir el forjado en martinets, y los trabajos de

desbaste y afinación en los laminadores hasta recibir la forma final. También se hacen *paquetes*, con barras más ó menos trabajadas, para soldarlas y laminar nuevas piezas.

Al practicar estas operaciones, los hierros sufren *caldas* preliminares y batidos ó laminados que cuanto más numerosos son eliminan mayor cantidad de escorias é impurezas y dan al hierro más homogeneidad y resistencia. En cada calda desaparece una parte de carbono, que se quema, convirtiéndose en óxido de carbono y ácido carbónico. Si las caldas son demasiado numerosas ó prolongadas, puede suceder que no solamente desaparezca casi por completo el carbono, sino que se oxide parte del hierro, y esto mismo puede acontecer en la operación del pudelado cuando se prolonga mucho. Entonces se dice que el hierro está quemado, ó pasado al fuego, y su resistencia disminuye considerablemente. (Véase la nota del núm. 74).

Cuanto más carbono contiene el hierro, mayor número de caldas puede recibir sin quemarse; de modo que los hierros que hayan de adquirir formas complicadas por medio de la forja, y que necesiten, por lo tanto, sufrir muchas caldas, deben ser ricos en carbono.

En todas estas operaciones la influencia del obrero es grandísima, y de él dependen, en una buena parte, la homogeneidad, pureza y resistencia de los productos.

La cuestión comercial influye también; y el afán de producir barato ha dado lugar al establecimiento de precios tan ínfimos, especialmente para las viguetas laminadas y piezas de gran sección, que no es posible alcanzarlos sino á expensas de la bondad de los productos.

93. 2.º Composición química. — Todas las operaciones practicadas con la zamarra hasta convertirla en metal, en barra ó chapa, no consiguen eliminar por completo la escoria, y este es uno de los caracteres que distinguen los hierros pudelados de los aceros fundidos dulces. La escoria, compuesta generalmente de silicato de hierro, y de una pequeña cantidad de fosfato de hierro y sales de alúmina, entra en una proporción variable, desde 0,15 por 100 en los productos más puros, hasta 2,3 por 100 en los hierros comunes.

A mayor cantidad de escoria corresponden valores menores del coeficiente de fractura, límite de elasticidad, alargamiento de fractura y coeficiente de elasticidad.

La escoria facilita la soldadura de los hierros, porque hace de fundente y favorece la expulsión, en estado líquido, de la ligera capa de óxido de hierro que se forma, durante la calda, en las superficies de unión de las dos piezas que se han de soldar.

Los hierros del comercio contienen carbono en proporciones que varían de 0,05 á 0,2 por 100.

El azufre no altera los valores de \bar{R} y σ cuando el hierro está á la temperatura ordinaria; pero á 360° hace quebradizo el metal, y muy difícil de trabajar al rojo cereza.

El silicio produce los mismos efectos para el trabajo del hierro en caliente. A la temperatura ordinaria hace disminuir \bar{R} y σ .

El fósforo hace más resistente el hierro para cargas estáticas; además facilita el trabajo en caliente. Pero los hierros fosforosos son muy frágiles para los choques.

94. 3.º Dimensiones de la sección transversal. — En general los hierros de pequeña sección son mejores que los de sección grande. En aquéllos la acción del martillo ó laminador es más enérgica, mientras que en éstos el núcleo ó parte central queda incompletamente trabajado. Por otra parte, los hierros malos no son susceptibles de trabajarse con pequeñas secciones.

Se comprende, por cuanto queda dicho, la gran variedad de hierros que expende el comercio. No es lo mismo la vigueta doble T para suelos que el hierro que se emplea en cadenas, roblones ó alambres, resultando infinitas variedades en resistencia, maleabilidad, dureza y demás propiedades físicas.

En general; los hierros poco trabajados, es decir, que han sufrido pocas caldas y batidos, y los de gran sección é imperfectamente depurados de escorias y de otros cuerpos extraños al hierro, son poco homogéneos, resistentes y dúctiles, y tienen coeficientes de elasticidad y límite de elasticidad de pequeño valor.

95. 4.º Orientación. — Los hierros presentan en sentido del laminado resistencia superior en 10 por 100, próximamente, á la correspondiente á esfuerzos que obran normalmente á dicha dirección. Cuanto más pronunciado sea el laminado en un sentido mayor es esta diferencia. Así, un palastro laminado de 2^m de longitud por 2^m de ancho puede presentar resistencia próximamente igual en los dos sentidos, mientras que en un palastro laminado de 8^m de longitud y 1^m de anchura, puede llegar la diferencia á 20 por 100 en la resistencia y 50 á 75 por 100 en los alargamientos. En las barras, escuadras, tes, etc., todavía se hace más sensible esta influencia.

96. 5.º Temperatura. — Las experiencias, muy completas, de M. Knütt Styffe, Director del Instituto Tecnológico de Stockolmo, han dado los siguientes resultados, comparados con los correspondientes al hierro que tiene la temperatura ordinaria:

1.º Resistencia á la tracción. No disminuye para las temperaturas más

bajas observadas en Suecia. Aumenta algo para temperaturas comprendidas entre + 100° y + 200° centígrados.

2.º Alargamientos. Son los mismos para temperaturas muy bajas que para las ordinarias. Disminuyen notablemente para temperaturas de + 100° á + 200°.

3.º Límite de elasticidad. Se eleva para temperaturas muy bajas; disminuye á + 250°.

4.º Coeficiente de elasticidad. Aumenta cuando la temperatura baja; disminuye cuando se eleva. Estas variaciones son tan sólo de 0,00005 del valor total ordinario por cada grado centígrado.

Por lo que respecta á la resistencia al choque, numerosas experiencias acreditan que el hierro es mucho más frágil á temperaturas bajas. Según los ensayos practicados por el ingeniero inglés M. Webster, en barras de hierro á — 16° centígrados, la resistencia al choque disminuye en 3 por 100, y la flexibilidad en 18 por 100.

M. Considère afirma que á la temperatura de 360° los hierros impuros se hacen muy ágrios y quebradizos.

De las experiencias practicadas por M. Kollmann en 1878, sometiendo á fractura por extensión hierros y aceros á temperaturas comprendidas entre 0° y 1000°, se deduce que de 0 á 200° la tenacidad no disminuye ó disminuye poco; pero de 200° á 500°, y de 500° á 700°, experimenta reducciones notabilísimas.

He aquí los resultados relativos, representando por el número 100 la tenacidad ó resistencia á la fractura por extensión:

Temperatura.	Hierro fibroso.	Hierro de grano fino.	Acero Bessemer.
0	100	100	100
100	100	100	100
200	95	100	100
300	90	97	94
500	38	44	34
700	16	23	18
900	6	12	9
1000	4	7	7

Se deduce de aquí que en los límites de temperatura que alcanzan las construcciones metálicas en la práctica, no merece tenerse en cuenta la variación de resistencia por dicho concepto.

6.º Recocido y temple. — Por el recocido disminuye el coeficiente de fractura y aumenta el alargamiento total. Con las operaciones de temple (que el hierro no toma) aumenta la resistencia, ó sea el coeficiente de fractura, en 2 ó 3 kilg.s por mm.², pero disminuye la ductilidad, y, por tanto, los alargamientos (*).

97. 7.º Trabajo mecánico. Efectos de la tijera y del punzón. — El trabajo en caliente, laminado, forjado ó martillado, hace aumentar los valores de los coeficientes de fractura y de contracción lateral, del límite de elasticidad y del alargamiento total de fractura. Estos efectos son tanto más sensibles cuanto más enérgico haya sido el trabajo y mayor sea la relación entre la superficie exterior que recibe directamente el forjado y el núcleo interior de la pieza. Por esto, á igualdad de las demás circunstancias, las barras delgadas tienen más resistencia, por unidad superficial de sección, que las gruesas.

Si el trabajo en caliente es incompleto ó se detiene cuando la temperatura de la pieza es superior al rojo cereza, puede presentar el metal principios de cristalización, y los valores de \bar{R} , D , E y del coeficiente de contracción, son algo menores.

Las deformaciones efectuadas en el hierro á temperaturas inferiores al rojo cereza, aumentan \bar{R} y D , pero disminuyen σ y el coeficiente de contracción.

Si la deformación es producida por presión ó laminado en frío, los efectos anteriores son muy notables, como lo demuestra la experiencia siguiente de M. Considère:

	\bar{R}	D	σ
Palastro de hierro, de 8 mm. de grueso.....	37,4 . . .	22,8 . . .	15 $\frac{\sigma}{\sigma_0}$
El mismo, laminado en frío, y reducido su grueso á 7,1 mm.....	46,9 . . .	41,6 . . .	7 $\frac{\sigma}{\sigma_0}$

El martillo ejerce acción menor.

La tijera y el punzón producen un efecto parecido al de la compresión y batido que se acaba de citar, en una pequeña zona próxima á los bordes del corte ó agujero practicado en los hierros. El metal se rompe más fácilmente por flexión y por choque.

Todo esto está conforme con lo dicho en el núm. 74.

98. 8.º Vibraciones. — Se cree que los choques y vibraciones modifican

(*) Véase la nota del núm. 103, en la parte relativa á las experiencias de temple del hierro realizadas en el Creusot.

la estructura del hierro, cambiándola de fibrosa en granular y disminuyéndose su tenacidad y ductilidad.

99. Constantes específicas. — 1.^a *Peso.* El peso del metro cúbico se regula en 7.790 á 7.800 kilogramos, y estas cantidades, especialmente la primera, se emplean en la formación de los estados de cubicación y peso en los presupuestos.

2.^a *Coefficiente de elasticidad.* El coeficiente de elasticidad por compresión y por extensión que se emplea en los cálculos es:

$E = 18 \times 10^9$ á 20×10^9 kilogs. por metro cuadrado; ó, teniendo en cuenta la relación entre el metro cuadrado y el milímetro cuadrado.

$E = 18.000$ á 20.000 kilogs. por milímetro cuadrado.

En los hierros forjados de grandes dimensiones y calidad inferior, E desciende á 15.000 ó 16.000 kilogs. por mm.² Para el alambre, $E = 18.000$ kilogramos por mm.², según Mr. Ardant y otros experimentadores.

Cuanto mayor sea la pureza del hierro, será tanto mayor E .

El coeficiente de elasticidad por esfuerzo cortante es, como término medio, los $\frac{2}{5}$ del coeficiente de elasticidad por tracción.

Generalmente se toma 8×10^9 por metro cuadrado ú 8.000 por milímetro cuadrado.

3.^a *Límite de elasticidad por extensión y por compresión.* Varía entre 15 y 20 kilogramos por mm.² Puede considerarse como término medio

$$D = 18 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

En el alambre el límite de elasticidad por extensión es de 50 á 60 kilogramos por mm.²

4.^a *Alargamiento elástico máximo.* Tiene por valor medio $i' = 0,001$ (número 25); es decir, un milímetro por metro.

El alargamiento elástico del hierro por cada kilogramo de fuerza de tracción correspondiente á un milímetro cuadrado de sección transversal es, por metro de longitud, de 0,00005 á 0,000055. Estos números se pueden deducir de la relación $i = \frac{p}{E}$ haciendo p igual á la unidad y dando á E su valor.

5.^a *Alargamiento total de fractura.* El valor de o (número 65) es de los que más varían con la calidad del hierro; o está en general relacionado con el coeficiente de fractura \bar{R} . Además o varía también según que se trate de palastros, vigas laminadas, alambre, etc.

Como término medio, puede decirse que el alargamiento total o , medido en una longitud inicial de barreta de prueba de 200 milímetros, es:

$$\begin{aligned} o &= 2 \text{ á } 6 \text{ por } 100. \dots \text{ Hierros inferiores.} \\ o &= 6 \text{ á } 18 \text{ por } 100. \dots \text{ Hierros buenos.} \\ o &= 18 \text{ en adelante.} \dots \text{ Hierros de superior calidad.} \end{aligned}$$

6.^a *Contracción lateral en el período elástico.* Está comprendido entre 0,0000158 y 0,0000171 por cada metro de diámetro ó lado d de la sección y por cada kilogramo de fuerza tractora por milímetro cuadrado de sección transversal (números 52 y 54).

7.^a *Estrechamiento de la sección.* Es también cantidad muy variable. Si se mide por la relación $\frac{\omega - \omega'}{\omega}$ (número 58) puede variar de 0 á 0,50 y aún más.

8.^a *Coefficiente de fractura.* Estas constantes tienen valor variable con la naturaleza del hierro, dimensiones y formas. He aquí los valores medios del coeficiente de fractura \bar{R} por extensión, expresado en kilogramos por milímetro cuadrado:

	\bar{R}
Palastros ordinarios..	32 á 34
Palastros ordinarios..	En sentido normal..... 28 á 30
	Promedio..... 30
Palastros buenos.....	34 á 36
Palastros superiores..	Idem..... 36 en adelante.
Hierros especiales. Escuadras, tes, etc.....	34 á 40
Promedio.	36
Redondos y cuadradillos.....	34 á 42
Promedio.	38
Alambre.....	70 á 80
Alambre de hierro galvanizado (según Kirkaldy).....	46

El coeficiente de fractura por compresión es algo superior al relativo á la extensión; pero no hay inconveniente en darle igual valor que á éste, porque, como veremos más adelante (*), la fractura de las piezas de hierro compri-

(*) Piezas comprimidas según su eje. (Cap. VII.)

midas, de la longitud usual en las construcciones, se opera antes por flexión lateral que por aplastamiento simple.

El coeficiente de fractura por esfuerzo cortante con respecto al \bar{R} de extensión y compresión, es:

Según Kirkaldy.....	0,80 \bar{R}
Según MM. Harkot y Lavalley.....	0,80 \bar{R}
Según M. Greigh y Eyth.....	0,85 \bar{R}
Según MM. Lebasteur y Weyrauch.....	0,80 \bar{R}

El coeficiente de fractura por desgarramiento longitudinal tiene el mismo valor, para el hierro, que el correspondiente al esfuerzo cortante si se ejercita normalmente al laminado, y un poco menor si la dirección es la de las fibras. Pero en todos casos se toma el mismo valor.

100. Coeficiente de trabajo (*). — Para los cálculos de resistencia á la extensión y á la compresión se acostumbra á tomar como coeficiente de trabajo R , valores que varían entre 5 y 9 kilogramos por milímetro cuadrado, y hasta 10 y 11 en casos excepcionales. En general pueden adoptarse las siguientes cifras:

	R En kilogramos por mm. ²
Construcciones sólidas empleando hierros de calidad ordinaria.....	5 á 7
Obras ligeras ejecutadas con hierros ordinarios, ó bien obras ordinarias ejecutadas con hierros muy buenos.	7 á 9

En general: $R = \frac{1}{4} \bar{R}$ á $\frac{1}{8} \bar{R}$.

El coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante puede deducirse tomando 0,80 del correspondiente á la extensión y compresión, guardando así la misma relación que existe entre los coeficientes de fractura. Varía, por tanto, de 4 á 8 kilogramos por milímetro cuadrado, y puede tomarse como término medio la cifra 6. Este mismo valor se tomará para el desgarramiento longitudinal.

101. Coeficiente de seguridad. — De los datos que aparecen en el número

(*) Véase lo que se dice en el artículo 6.º, capítulo VI, á propósito de los coeficientes de trabajo que deben emplearse en el caso de esfuerzos repetidos un gran número de veces.

rò anterior, se deduce que el coeficiente de seguridad admitido para las obras de hierro, fluctúa entre 4 y 8, y es como término medio 6.

102. Clasificación de los hierros españoles. — Los principales fabricantes españoles convinieron en la clasificación de hierros siguiente: (*)

CLASIFICACIÓN POR CALIDADES

Ordinario.....	marcado	1	Equivalente al Best Staffordshire.
Bueno.....	marcado	2	Id. al Best. Best. id.
Superior.....	marcado	3	Id. al Best. Best. Best id.
Extrasuperior.....	marcado	E	Id. al Lowmoor y Bowling.

ACERO

103. El acero es un metal ferroso que contiene proporciones de carbono variables entre los límites 0,12 por 100 á 1,50 por 100. Se obtiene principalmente haciéndole pasar primeramente por el estado líquido en los convertidores ó en hornos; se convierte en lingotes y después en barra, chapa ó viga de forma cualquiera, por medio del forjado ó del laminado. (**)

(*) Esta clasificación y la de aceros del núm. (106) fueron convenidas por los fabricantes españoles en contestación á la convocatoria hecha por el Ministro de Marina á propósito de los suministros de estos materiales para los arsenales españoles.

(**) Esta definición es todavía muy admitida, y por eso la empleamos. Según ella, la diferencia entre el hierro y el acero consiste en el procedimiento de fabricación; el hierro se obtiene en estado pastoso, en la zamarra, y el acero en estado líquido.

Claro es que se prescindir de los aceros pudelados y de cementación, pero estos se fabrican en cada vez en menor cantidad. Los aceros para construcciones, artillería y fortificación, se obtienen exclusivamente haciéndoles pasar por el estado líquido, en hornos ó convertidores.

La clasificación adoptada por la comisión internacional de la Exposición Universal de Filadelfia es diferente; y, prescindiendo del procedimiento seguido para obtener el metal, se funda en la cualidad del temple, llamándose acero al metal que se endurece en esta operación, y hierro al que no se endurece. Según esta definición, lo que llamamos aceros dulces no serían aceros, sino hierros fundidos.

Esta clasificación es defectuosa por la dificultad de determinar el límite de separación de hierros y aceros por los efectos del temple. Teóricamente, en todos los compuestos de carbono y de hierro que tienen 0,1 á 1,50 por 100 de carbono, ejerce influencia el temple, tanto mayor cuanto más rápido sea el enfriamiento del metal. En el Creusot se han templado barras de acero dulce de 0,16 por 100 de carbono, y de hierro que tenía nada más que 0,12 por 100 de este metalóide, calentándolas al rojo cereza claro (1 000.º) y sumergiéndolas en agua helada á -15.º En el acero dulce el coeficiente de fractura por tracción, que era de 45 kilogramos por mm.² antes del temple, subió á 117, y el alargamiento por 100 de ruptura descendió de 10 á 105. En el hierro el coeficiente de fractura subió desde 44 á 95,5; y el alargamiento disminuye desde 27 á 4.

Hoy los fabricantes y constructores definen de este modo los productos siderúrgicos:

Fundición. Se obtiene en los altos hornos. Contiene 2,75 á 5 por 100 de carbono.

Hierro. Se obtiene, en estado pastoso, en los hornos de pudelar, por el afino de la fundición. Contiene de 0,05 á 0,15 por 100 de carbono. (Por excepción de 0,15 á 0,30 en los carriles.)

Acero. Se obtiene en estado líquido en los convertidores Bessemer, hornos Martín Siemens, crisoles, etc. Contiene 0,12 á 1 por 100 de carbono, y excepcionalmente hasta 1,50 por 100 (herramientas)

Los aceros pueden contener también níquel, manganeso, tungsteno, silicio y cromo, procedentes de las menas unas veces, ó incorporados á la masa durante las operaciones metalúrgicas.

La proporción de carbono da lugar á grandes variedades de calidad en el acero. Los aceros poco carburados, llamados dulces, no admiten temple, ó lo admiten muy poco, y se sueldan próximamente como el hierro; los aceros muy carburados no son susceptibles de soldarse entre sí y admiten el temple.

104. Los aceros se distinguen también de los hierros por su mayor homogeneidad, debida al estado líquido por que pasan, en cuyo estado la escoria permanece separada del metal y puede ser fácilmente eliminada; mientras que en los hierros, obtenidos en masas esponjosas, puede quedar intercalada.

105. La homogeneidad del acero es más perfecta en estado líquido. Al enfriarse se solidifican primero partículas de hierro puro que quedan envueltas en un líquido más carburado, y por tanto más fusible, que se solidifica más tarde; de modo que la masa viene á resultar como formada de granos poliédricos de hierro casi puro, rodeados de metal más rico en carbono á modo de cemento. Es decir, que puede compararse á un macizo de hormigón finísimo.

Estos efectos son apenas sensibles en los aceros dulces; pero se manifiestan en los duros y más enérgicamente cuanto mayores sean la proporción de carbono y la lentitud del enfriamiento. Cuando el enfriamiento es brusco, como sucede al templar en el agua ó en el aceite, ó no se producen ó se producen muy débilmente; por esta razón el acero templado es más resistente que el enfriado con lentitud, y por esto también el temple obra con más energía en los aceros más ricos en carbono.

106. Clasificación de los aceros. — Los aceros se clasifican por la proporción de carbono, y principalmente por su resistencia, ductilidad y demás propiedades específicas, pues el carbono puede ser sustituido en todo ó en parte por el manganeso, cromo, etc.

Los aceros dulces son menos tenaces y más dúctiles que los aceros duros; es decir, que los valores de \bar{R} y de σ varían en razón inversa. En realidad, \bar{R} , D , σ y el estrechamiento, definen perfectamente la calidad del acero como material de construcción.

Las fábricas tienen sus clasificaciones especiales (*); he aquí algunas de las principales:

(*) En punto á clasificaciones hay una gran confusión, y cada fabricante tiene la suya. Unos la fundamentan en los valores de \bar{R} , D y σ , como el Creusot; otros se limitan á agrupar los productos según su facilidad para tomar el temple, adoptando los calificativos de *extradulces*, *dulces*, *semidulces*, *semiduros*, *duros* y *extraduros*, que indican grados crecientes de carburación ó de dureza superficial. La primera clasificación nos parece más racional.

FÁBRICA DEL CREUSOT (FRANCIA)

	NÚMEROS											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Coefficiente de fractura en kilogramos por mm. ²	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35
Alargamiento por 100 en 200 mm.	7	9,5	12	14,5	17	19,5	22	24,5	27	29,5	32	35

Para construcciones se emplean los números 8 al 11; del 5 al 7 se aplican á cañones; el 11 se dedica á placas de blindaje; los demás números se emplean en cuchillería, muelles y resortes, llantas, carriles, etc.

FÁBRICA COCKERILL (BÉLGICA)

CLASES	Carbono, por 100.	Coefficiente de fractura en kilog. por mm. ²	Alargamiento por 100 en 200 mm.	Se sueldan.	Se templan.
1 Extradulces..	0,05 á 0,20	40 á 50	27 á 20	Sí.	No.
2 Dulces.	0,20 á 0,35	50 á 60	20 á 15	Poco.	Poco.
3 Duros.	0,35 á 0,50	60 á 70	15 á 10	No.	Sí.
4 Extraduros. .	0,50 en adelante.	70 á 80	10 á 50	No.	Mucho.

Los fabricantes españoles adoptaron la clasificación siguiente, para los aceros que había de suministrarse á los arsenales (núm. 102):

	Marcado.
Acero duro.	A.0
» semiduro.....	A.1
» dulce.....	A.2
» extradulce.	A.3

107. Circunstancias que influyen en el valor de las constantes específicas del acero. 1.^a Composición química. — La proporción de carbono aumenta la dureza, la tenacidad y la facilidad de tomar temple, dificultando

en cambio la soldadura. El alargamiento disminuye á medida que aumenta la proporción de carbono. El coeficiente de elasticidad E no varía.

El manganeso desempeña el mismo papel que el carbono, pero con la ventaja grande de proporcionar alargamientos mayores que éste, á igualdad de proporciones.

El azufre no influye sensiblemente en las propiedades físicas del acero en frío; en cambio hace imposible el laminado de piezas en caliente cuando entra en proporciones notables.

El silicio aumenta \bar{R} y disminuye σ , tratándose de cargas estáticas; hace muy quebradizo á los choques el metal.

El fósforo perjudica en grado considerable la cualidad del acero; \bar{R} y σ aumentan para cargas estáticas, pero los aceros fosforosos son extremadamente fragiles y quebradizos.

La proporción de fósforo superior á

0,03 á 0,04 por 100 para palastros de calderas
 0,05 á 0,10 » para palastros y vigas laminadas aplicadas á las construcciones
 0,10 á 0,12 » para carriles
 hace inadmisibles los aceros.

El tungsteno aumenta la dureza y la tenacidad. Añadiendo al acero 4 á 5 por 100 de tungsteno, se obtiene un metal de un coeficiente \bar{R} de fractura por extensión de 72 á 126 kilogramos por mm.², y un alargamiento por 100 de 15 á 7. Por el temple, \bar{R} llega á valer 133, y σ se reduce á 6.

El cromo aumenta considerablemente \bar{R} (hasta llegar á 95 kilogramos) sin disminuir sensiblemente los alargamientos de fractura; también aumenta el límite de elasticidad D . Empléase el acero cromado en placas de blindaje y en los proyectiles destinados á perforarlas. Su aplicación á las construcciones está restringida por las dificultades prácticas que se presentan al laminarlo y trabajarlo, y por su elevado precio.

El temple hace adquirir al acero cromado una grandísima dureza.

El níquel produce los mismos efectos que el cromo; los aceros niquelados son muy resistentes y muy dúctiles. Placas de blindaje de acero que contienen 3 por 100 de níquel, resisten perfectamente el choque de pesados proyectiles de artillería sin hendirse, como sucede á las de acero ordinario.

Según las experiencias hechas por M. Garnier, en Septiembre de 1892, en la fábrica de aceros de Cleveland Rolling Mills C^o (Ohio. E. U. de Amé-

rica) los aceros niquelados al 3 por 100 tienen coeficiente de fractura por tracción superior en 31 por 100 al de los aceros ordinarios, y el límite de elasticidad es superior en 20 por 100. La ductilidad no disminuye por la presencia del níquel. Fueron fundidos dos lingotes de acero de la composición siguiente:

	Kilogramos.
ACERO ORDINARIO.	Fundición..... 4080
	Retales de hierro..... 4080
	Ferromanganeso..... 70
ACERO AL NIQUEL.	Fundición..... 4080
	Retales de hierro..... 4080
	Níquel..... 240

Sometidas á ensayo barras de prueba sacadas de estos lingotes, dieron el siguiente resultado:

	Límite de elasticidad en kilogramos, por mm. ²	Coeficiente de fractura por extensión en kilogramos, por mm. ²
Acero ordinario no recocido.....	23 á 25	37 á 39
Id. id. recocido.....	25 á 27	38 á 40
Acero niquelado no recocido.....	32 á 34	45 á 47
Id. id. recocido.....	34 á 35	46 á 47

Los alargamientos de fractura, en barras de 200 mm. de longitud, fueron de 23 á 26 por 100 para el acero niquelado, recocido ó no, y de 26 á 32 por 100 para el ordinario.

108. Weyrauch ha dado la siguiente fórmula del valor de \bar{R} , relativa al acero Bessemer, deduciéndola de cuidadosas experiencias realizadas por Bauschinger.

$$\bar{R} = 43,50 (1 + C^2) (1)$$

\bar{R} es el coeficiente de fractura por extensión en kilogramos por milíme-

tro cuadrado, y C el tanto por 100 de carbono contenido en el acero. En todas las barras ensayadas por Bauschinger

$$\bar{R} > 37 (1 + C^2)$$

de modo que se puede aceptar como límite inferior de \bar{R} $\bar{R} = 37 (1 + C^2)$ (2).

Aplicando estas fórmulas á los aceros Cockerill (núm. 106), la (1) da resultados más exactos.

109. Las fórmulas siguientes son debidas á Mr. Deshayes, y se refieren á un acero que ha sufrido un forjado medio y un recocido, pero no ha sido batido en frío.

$$\bar{R} = 30 \text{ kilogramos} + 18 C + 36 C^2 + 18 Mn + 15 Ph + 10 Si$$

$$o = 42 - 36 C - 5,5 Mn - 6 Si$$

\bar{R} es el coeficiente de fractura por extensión, en kilogramos por milímetro cuadrado, y o el alargamiento por 100 en una barra de 100 milímetros de longitud.

C , Mn , Ph , Si , representan el tanto por 100 de carbono, manganeso, fósforo y silicio.

Para el hierro químicamente puro.

$$\bar{R} = 30$$

$$o = 42$$

En las fórmulas anteriores, la influencia del carbono es la más considerable.

Estas fórmulas no dan sino valores aproximados; ya hemos dicho en el núm. 78 las causas que se oponen á la exactitud.

110. 2.^a Trabajo mecánico. — Es interesante cuanto á este punto se relaciona, por la influencia que tiene en las propiedades específicas del acero.

El martillado, prensado ó laminado en frío, hace subir el valor de \bar{R} , pero disminuye el alargamiento de fractura o . Disminuye, por tanto, la resistencia viva de fractura (núm. 31).

He aquí algunas experiencias de M. Considère, que lo demuestran.

	\bar{R}	D	$\frac{D}{\bar{R}}$	o
1. Acero extradulce; estado natural.....	42,5	25,3	0,59	26,5
1. El mismo, comprimido en la prensa hidráulica á 50 kilogramos por milímetro cuadrado....	44,6	35,7	0,81	17,0
2. Plancha de acero de 10 mm. para construcciones navales (cascos); estado natural.....	52,5	29,6	0,56	18,0
2. La misma reducida á 9'45 mm. de espesor por laminado en frío.....	54,5	42,4	0,77	11,5

\bar{R} y D representan, en kilogramos por mm.², el coeficiente de fractura por extensión y el límite de elasticidad correspondiente, o es el alargamiento por ciento, en 200 mm de longitud.

La tijera y el punzón ocasionan un efecto local parecido, por cuanto en una pequeña zona inmediata al sitio en donde el útil ha ejercido su acción, el acero se altera y se vuelve ágrío y quebradizo; aumenta en tenacidad y pierde en ductilidad. El acero en que se ha abierto orificios con punzón ó sacabocados, se rompe por flexión ó alargamiento mucho menores que el que ha sido agujereado con taladro.

Las experiencias de Tresca, Kirkaldy, Considère, etc., demuestran la alteración que el metal sufre. Si se hace una sección por el eje del orificio (fig. 14, lám. 3.^a), el acero se presenta, en una pequeña zona B , como si hubiera experimentado una cristalización. Esta alteración suele ir acompañada de pequeñas grietas, casi invisibles, pero que después se pueden extender á toda la masa y ocasionar su rápida é inesperada destrucción.

El martillado en frío puede producir iguales efectos y por esto hay que ejecutarlo con gran cuidado, empleando martillos muy planos para evitar graves alteraciones moleculares en las inmediaciones de los puntos heridos.

Por la constitución del acero (núm. 105), comparable en cierto modo á un hormigón finísimo, puede tener explicación la formación de las grietas, efecto de la dislocación producida en la masa por el punzón ó la tijera. Estos efectos son tanto más acentuados cuanto más carburados sean los aceros.

Los inconvenientes graves á que da lugar el trabajo mecánico se evitan sometiendo las piezas al recocido después de trabajadas; parece como que se

funde la especie de cemento (hierro carburado), que liga los granos poliédricos de hierro (núm. 105), y las grietas se cierran. También se evitan quitando con la lima, con el taladro ó con la acepilladora, la pequeña zona de 1 á 2 milímetros alterada por el punzón ó tijera.

Por igual razón, cuando se trabaja el acero en caliente, martillándolo ó laminándolo, conviene terminar la operación á una temperatura alta, antes de que haya desaparecido el rojo, porque con ella se hace el papel del recocido.

Esta prescripción debe cumplirse por otra razón importante; según Adamson, á 315°, temperatura á la cual el metal toma un color azul característico, el acero dulce pierde toda su maleabilidad y se rompe al golpearlo con el martillo.

El trabajo de forja, cuando está bien hecho, favorece al acero; más todavía si se ejecuta con el martillo pilón que cuando se emplea el laminador. Pero es necesario, á más de las precauciones anteriores, procurar que no se pase al fuego el metal, que las caldas sean uniformes, y que el enfriamiento se ejecute de modo muy lento y uniforme. Es también aplicable al acero cuanto hemos dicho en el núm. 97 relativo al trabajo del hierro en caliente y en frío.

En resumen; el trabajo mecánico del acero exige mayores precauciones y cuidados que el del hierro. (*)

111. 3.ª Recocido y temple. — El recocido disminuye \bar{R} y el límite de elasticidad, y aumenta en cambio la maleabilidad y homogeneidad. La disminución de \bar{R} es insensible en los aceros muy dulces.

El temple al aceite aumenta la tenacidad (\bar{R}) y todavía más el límite de elasticidad (D); disminuye el estrechamiento de sección, y también, y en mayor proporción, el alargamiento de fractura (o).

El temple al agua aumenta D de igual modo, pero hace crecer \bar{R} todavía más, y decrecer o y el estrechamiento en mayor proporción.

La acción del temple es más enérgica en los aceros que tienen más cuerpos extraños al hierro, especialmente carbono.

112. 4.ª Homogeneidad. — El acero es mucho más homogéneo que el hierro, y esta circunstancia le hace más sensible á los comienzos de rotura.

En el hierro, si se presenta una pequeña grieta, no suele prolongarse, á

(*) En el puente sobre el Forth (Inglaterra), que es la mayor obra de acero construida hasta el día, no se toleró el uso de sacabocados y tijeras en el trabajo del metal; se recomendó sustituir la presión hidráulica al golpe del martillo siempre que fuese posible; y se prohibió trabajar el acero en caliente á temperaturas inferiores á la correspondiente al color azul.

causa de la misma heterogeneidad; en el acero se prolonga en sentido normal á la dirección del esfuerzo y produce la ruina de la pieza.

El lingote de acero que primeramente se obtiene, presenta, especialmente en los dúctiles, cavidades interiores producidas por el desprendimiento de los gases, las cuales se reducen ó desaparecen por el laminado.

113. 5.ª Orientación. — A diferencia de lo que sucede con los hierros, la resistencia de los aceros es sensiblemente la misma en sentido del laminado ó en dirección normal.

114. 6.ª Temperatura. — Según Mr. Knütt-Styffe, la resistencia á la tracción no disminuye en el acero cuando se le somete á temperaturas como las más bajas de Suecia.

Entre + 100° y + 200° centígrados, la resistencia á la tracción continúa siendo la misma.

El límite de elasticidad y el coeficiente de elasticidad, crecen á temperaturas bajas y disminuyen á + 250°.

Los alargamientos no cambian sensiblemente para temperaturas bajas y para las comprendidas entre + 100° y + 200°.

Sometidos al choque, los aceros son muy frágiles á temperaturas menores de 0°, especialmente los fosforosos.

115. Resistencia viva del acero y del hierro. — Con alargamientos o superiores, en general, á los del hierro, los aceros dulces empleados en las construcciones tienen coeficientes de fractura y límites de elasticidad superiores á los de aquél. Resulta de aquí una de las principales diferencias entre estos dos metales; los aceros dulces tienen resistencia viva, elástica y de fractura (núm. 31), superior á la de los hierros, y son, por tanto, más aptos que éstos para resistir choques, pues que pudiendo desarrollar mayor cantidad de trabajo al deformarse, son susceptibles de absorber mayor cantidad de fuerza viva.

116. Constantes específicas. — 1.ª *Peso.* Como el del hierro, ó sea de 7.790 á 7.800 kilogramos por metro cúbico.

2.ª *Coficiente de elasticidad.* Es el mismo para todos los aceros, dulces ó duros, por extensión y por compresión.

$$E = 29 \times 10^9 \text{ á } 22 \times 10^9 \text{ por metro cuadrado,}$$

ó sea 20.000 á 22.000 por por mm.².

Por esfuerzo cortante

$$E' = 8,8 \times 10^9 \text{ por metro cuadrado,}$$

ó $E' = 8.800$ por mm.².

3.^a *Coefficientes de fractura.* El coeficiente de fractura por extensión depende de la calidad del acero (tablas del núm. 106). Varía entre 40 y 90 kilogramos por mm.², correspondiendo las cantidades menores á los aceros más dulces, y las superiores á los duros; y aun se fabrican aceros muy duros en que \bar{R} excede de 100 kilogramos.

Los aceros empleados en las construcciones, sometidos á tracción, tienen \bar{R} comprendido entre 40 y 50 kilogramos por mm.² No conviene emplear aceros más resistentes porque estarían más carburados, y las operaciones de forja, roblonado, laminado, etc., serían peligrosas (núm. 110). (*)

El coeficiente de fractura por compresión es algo mayor, y respecto á él diremos lo mismo que para el hierro (núm. 99).

El coeficiente de fractura por esfuerzo cortante ó desgarramiento longitudinal es los 0,75 del relativo á la extensión. Varía, pues, para los aceros dulces empleados en las construcciones, entre 30 kilogramos y 38 kilogramos por mm.²

El alambre de acero ordinario se rompe por tracción con una carga \bar{R} de 100 á 110 kilogramos por mm.²

En el puente colgado de Brooklin (Nueva York), se emplearon alambres de acero de 0,0013 de diámetro, en los que el coeficiente de fractura por extensión \bar{R} valía 112,5 kilogramos, siendo el límite de elasticidad $D = 52$ kilogramos por mm.², y de 15 por 100 el alargamiento de fractura.

La fábrica francesa de Châtillon y Commentry construye, con aceros de crisol, alambres de resistencia y ductilidad muy grandes, medida esta última cualidad por el número de veces que se dobla el alambre antes de romperlo, sujetándolo al efecto entre quijadas de acero, cuyos bordes están redondeados en curva de 10 mm. de radio. He aquí las cualidades de dichos alambres, contándose la resistencia á la fractura por extensión cuando están aislados y cuando forman cable y se han torcido en hélice:

(*) Los ingenieros holandeses aplicaron á los puentes aceros en que R valía de 60 á 70 kilogramos, y cayeron en descrédito en Holanda estos materiales á causa de las numerosas fracturas de piezas. El Congreso internacional de los procedimientos de construcción verificado en Paris en 1889, fué de parecer que el acero para puentes debe tener las cualidades siguientes:

$$\bar{R} = 42 \text{ á } 45, \quad D = 18 \text{ á } 30, \quad o = 22 \text{ á } 24 \text{ por } 100.$$

$$\text{Coeficiente de contracción} = 0,75$$

$$\text{Para los roblones, } \bar{R} = 35 \text{ y } o = 33 \text{ por } 100 \text{ en } 200 \text{ mm.}$$

NÚMEROS	Coeficiente de fractura por extensión, en kilogramos por mm. ²		Valor medio admitido en los cálculos.	Número de dobleces antes de romperse.	
	Aislados.	Formando cable		Diámetro.	Diámetro
				1,8 mm.	2 mm.
I Metal dulce.	65 — 75	55 — 65	60	19	14
II Calidad ordinaria..	85 — 95	75 — 85	80	19	14
III » de gran resistencia.	130 — 140	115 — 125	120	20	18
IV Calidad superior...	150 — 160	135 — 145	140	24	21
V » extrasuperior.	210 — 225	195 — 205	200	30	23

Los alambres á que hace referencia la tabla anterior tienen 1,8 mm. y 2 mm. de diámetro. Cuando el diámetro aumenta, á igualdad de metal, disminuye \bar{R} y aumenta el alargamiento de fractura o . La torsión que sufren los alambres al arrollarse en hélice para formar el cable, reduce su resistencia en $\frac{1}{8}$.

En el alambre de acero al manganeso, dulce, $\bar{R} = 76$; y si está templado llega á valer $\bar{R} = 173$.

Las cuerdas de piano, de alambre de acero, alcanzan considerable coeficiente de fractura por extensión; de 220 á 260 kilogramos por mm.²

4.^a *Límite de elasticidad.* Está relacionado con \bar{R} .

En general, $\frac{D}{\bar{R}} = 0,50$; el manganeso hace aumentar algo esta relación

y lo mismo el fósforo.

En los aceros dulces empleados en las construcciones, el límite de elasticidad por extensión D varía entre 22 y 30 kilogramos por mm.²

5.^a *Alargamiento elástico.* Es de 0,000045 á 0,00005 por cada kilogramo por mm.² de fuerza tractora y por cada metro de longitud.

6.^a *Contracción lateral del período elástico.* Está comprendido entre 0,0000154 y 0,0000168 por cada metro de lado de la sección ó de diámetro, y por cada kilogramo de fuerza de tracción por milímetro cuadrado de sección transversal (núms. 52 y 54).

7.^a *Alargamiento total de fractura.* Esta constante (o) está íntimamente

ligada á \bar{R} , variando con ella en razón inversa. En los aceros empleados en las construcciones o ha de alcanzar valor grande, y éste mide en cierto modo la seguridad que ofrecerá el metal empleado.

8.^a *Valores combinados de \bar{R} y o .* Deben aceptarse como valores medios en las construcciones los siguientes, relativos al coeficiente de fractura por extensión y alargamiento por 100 correspondiente.

	\bar{R}		o	
	Medio.	Mínimo.	Medio.	Mínimo.
Palastro y vigas laminadas de formas especiales.....	45	40	22	18

\bar{R} viene dado en kilogramos por mm.² y o es el alargamiento total por 100 en 200^{mm} de longitud. (*)

9.^a *Estrechamiento de la sección en el huso.* Es dato de gran interés porque mide muy bien la ductilidad del acero y su resistencia al choque y es un indicio de la pureza química del metal.

El estrechamiento aumenta cuando la proporción de carbono es menor, ó bien, á igual dosis de carbono, cuando aumenta la proporción de manganeso.

En los aceros fosforosos el estrechamiento es débil; pero la adición de manganeso destruye la influencia desfavorable del fósforo.

(*) He aquí algunos valores exigidos en obras de importancia:

	\bar{R}	o
Puente de Monongahela (E. U.).....	49,7 á 56,2	18 por 100
" del Forth (Inglaterra) (piezas extendidas)...	47 á 52	20
" " (piezas comprimidas)...	54 á 59	17
" de Rouen (Francia) (piezas comprimidas)...	Mayor de 50	18
Marina francesa (palastros).....	42 á 45	22
Marina española (palastros).....	42 á 47	22 á 26
Barras de todas clases.....	42 á 46	18 á 24
Puentes metálicos en Francia. (Circular ministerial de 29 de Agosto de 1891.)		
Acero laminado. Barras de 20 mm.....	42	22
Roblones.....	38	28

Para los aceros de cañones de Trubia, resulta:

	Cuerpo del cañón.	Sunchos.	
Extensión....	Límite de elasticidad en kilogramos por mm. ²	36	32
	Coefficiente de fractura en id. id.	60 á 69	50 á 59
	Alargamiento por 100.....	17,25	20,05

En los cañones de acero Martin-Siemens, sistema Hontoria, de los calibres 28 cm. y 14 cm., construidos por el Creusot para nuestra marina, $\bar{R} = 62$, $D = 32$ y $o = 14$ por 100.

Si representamos por ω el área de la sección transversal del prisma ó cilindro antes de la deformación, y por ω' el área de la sección de garganta del huso, en la fractura (núm. 58) el estrechamiento ó coeficiente de contracción, $\frac{\omega - \omega'}{\omega}$ para los aceros dulces, debe valer como mínimo 0,45.

10. *Coefficientes de trabajo.* Para los esfuerzos de extensión y compresión se puede adoptar como coeficiente de trabajo R en kilogramos por milímetro cuadrado, los valores siguientes:

	R
Obras de gran solidez.....	9
» ordinarias.....	10
» atrevidas.....	12

Para los esfuerzos cortantes se tomará 0,75 de los valores anteriores, es decir, de 7 á 9 kilogramos por milímetro cuadrado. (*)

117. *Acero fundido, moldeado.* — Las constantes específicas que precaden se refieren al acero fundido que por laminación se convierte en palastro ó barras de sección cualquiera.

El acero fundido puede moldearse como la fundición de hierro, y sustituye ventajosamente á este último metal si se toma la precaución de recocerlo.

Se puede obtener acero moldeado, recocido, en que $\bar{R} = 45$ kilogramos por milímetro cuadrado para la extensión, con alargamiento de fractura o de 8 á 9 por 100 en 200^{mm}; puede llegarse á $\bar{R} = 65$ kilogramos. En cuanto á la compresión su resistencia es casi tan grande como la de la fundición.

Todavía es más ventajoso el acero moldeado, templado al aceite y recocido después.

He aquí sus constantes específicas:

Coefficiente de fractura por compresión.	400	kilogramos por mm. ²
Idem id. por extensión.....	45 á 60	» »
Alargamiento de fractura por extensión en 200 ^{mm}	20 á 12	por 100.

Este producto goza de las ventajosas cualidades de la fundición y de los aceros laminados; es, además, maleable.

(*) Véase en el art. 6.^o del cap. VI, los coeficientes de trabajo que deben emplearse en el caso de fuerzas repetidas un gran número de veces.

FUNDICIÓN

118. Circunstancias que influyen en el valor de las constantes específicas. — La calidad de las menas de hierro y su tratamiento en los hornos altos influyen poderosamente en las propiedades específicas de la fundición.

Las menas ricas y puras, reducidas por el carbón vegetal, dan productos excelentes; así son, entre otras, las fundiciones suecas, algunas vascongadas é inglesas, etc. Las menas impuras y el cok transmiten á la fundición materias extrañas que son, en gran número, perjudiciales á sus condiciones de resistencia.

Las materias que puede contener la fundición son:

Carbono en proporción de.....	2,75 á 5 por 100.
Silicio.	0,2 á 5 »
Fósforo.	0 á 2 »
Manganeso.	0 á 3 »
Azufre, cromo, tungsteno, aluminio.....	señales ó indicios.

De la cantidad total de carbono, una parte está como disuelta en el hierro, y el resto, en algunas fundiciones, separada en estado de grafito. La cantidad de carbono total y la de carbono grafitico y disuelto es variable y da origen á fundiciones grises, mezcladas y blancas, de propiedades específicas diversas.

A mayor proporción de carbono grafitico (fundiciones negras y grises) corresponde fundición más dulce y tierna y más fácil de trabajar; las fundiciones blancas, en que todo el carbono está disuelto ó incorporado, son duras é inatacables por la lima.

El silicio, cuando entra en gran proporción, reduce la del carbono incorporado hasta hacerlo desaparecer; hace más dulce la fundición, pero disminuye su resistencia. Las fundiciones obtenidas por el aire caliente son en general más siliciosas que las obtenidas por el aire frío, pues la mayor temperatura desarrollada en el horno alto favorece la reducción de una parte de la sílice del lecho de fusión; por esta causa las segundas son, á igualdad de mineral, algo más resistentes que las primeras.

Si la proporción de fósforo no excede de 0,2 á 0,3 por 100, no disminuye el coeficiente de fractura por extensión; pero de 1 á 2 por 100, resultan fundiciones duras y quebradizas.

El azufre hace á la fundición dura, cavernosa y frágil.

El manganeso favorece la disolución del carbono en la fundición, es decir, que produce un efecto contrario al del silicio. Hasta la proporción de 2,5 por 100, aumenta considerablemente la tenacidad de la fundición; en proporción mayor aumenta la dureza, pero disminuye la resistencia. La fundición con grandes proporciones de manganeso, es la llamada *especular* (*spiegelisen* de los alemanes), muy cristalina, que se emplea para mezclar con fundiciones de segunda fusión, y en la fabricación de aceros.

119. La marcha del horno alto no suele ser todo lo regular que fuera de desear, y de aquí que de la misma hornada puedan salir fundiciones de condiciones muy diferentes. Para dar una idea de estas variaciones, diremos que, conservando constantes las cargas de combustible y aumentando progresivamente las cargas de mineral, se pueden obtener, con minerales y combustible de la misma clase, y en la misma colada, las siguientes clases de fundición; 1, negra, de grano grueso y láminas de grafito; 2, negra de granos gruesos y finos; 3, gris de grano fino; 4, mezclada, manchada ó atruchada; 5, blanca laminar; 6, blanca granular.

Si se toman (fig. 15, lám. 3.^a) como ordenadas los valores de \bar{R} (coeficiente de fractura por extensión), resulta una curva *ABC*, que da la máxima resistencia para la fundición núm. 4, y valores próximamente iguales para los núms. 1 y 6, 2 y 5.

120. El estado más ó menos pastoso ó flúido de la fundición al verterla en el molde, influye en la pureza del producto, y por tanto en su resistencia. Es conveniente que la colada se haga con fundición muy caliente, y por tanto muy flúida, porque de este modo se habrá verificado mejor la separación de la arena, escorias, etc... Dos barretas de prueba obtenidas de la misma fundición, dieron para \bar{K} por extensión los valores siguientes:

	\bar{K}
Fundición muy caliente.....	17,4
Idem en estado muy pastoso.....	12,5

121. Todos los detalles del moldeo son interesantes en lo relativo á la resistencia de las piezas fabricadas.

Las piezas moldeadas verticalmente, y con mazarota, resultan en general de mayor pureza, homogeneidad y resistencia que las fabricadas con molde horizontal, porque la mazarota recoge las impurezas y escorias que de otro modo quedarían en la masa, y evita las cavidades interiores que suelen formarse á consecuencia de las contracciones de la fundición al solidificarse, con-

tracciones que empiezan en la periferia, que es la que primeramente se enfría.

Según que el molde sea de arena verde ó seca, ó metálico, la fundición goza de resistencias diversas, pudiendo llegar la diferencia á más de 24 por 100. La arena verde (húmeda) y el molde metálico, producen solidificación rápida de la fundición; los gases y escorias no pueden desprenderse, quedan en la masa y disminuyen su resistencia.

Las fundiciones moldeadas en molde metálico (fundiciones templadas ó endurecidas) se distinguen por la gran dureza de la superficie. Pueden ser también muy tenaces cuando se emplean minerales y mezclas convenientes.

122. De todo lo que antecede se deduce que la fundición es un material muy heterogeneo, y que esta heterogeneidad es mayor en las fundiciones de primera fusión. Por esto las fundiciones de moldeo son generalmente de segunda fusión, y para disminuir la heterogeneidad se mezclan fundiciones de clases variadas, en proporciones estudiadas practicamente; de este modo, el coeficiente de fractura por extensión, que para las buenas fundiciones es de 14 á 15 kilogramos por milímetro cuadrado, ha llegado á ser, por medio de mezclas convenientes, de más de 20 kilogramos, como tiene lugar en fundiciones americanas é inglesas, en las famosas de Gruson (Buckau, Alemania) y en las de Ganz (Ofen, Austria).

123. Constantes específicas.—1.^a *Peso específico*. Es variable; de 7.000 kilogramos á 7.500 kilogramos el peso del metro cúbico de fundición. Se toma generalmente 7.200.

2.^a *Coefficiente de elasticidad*. Según las numerosas experiencias de Hodgkinson, la ley de proporcionalidad $\frac{p}{l} = E$ es menos exacta para la fundición que para el hierro. Este experimentador encontró para E valores comprendidos entre 8.800 y 10.000 kilogramos por mm.² para la compresión y extensión; se puede admitir como promedio

$$E = \begin{cases} 9,5 \times 10^9 \text{ kilogramos por metro cuadrado} \\ 9.500 \text{ kilogramos por milímetro cuadrado} \end{cases}$$

para la extensión y compresión, es decir, la mitad del valor correspondiente al hierro.

Para la fundición maleable (*) halló Mr. Tresca $E = 18.929$ kilogramos

(*) La fundición maleable se obtiene, una vez moldeadas las piezas, por medio del recocido operado en crisoles en que éstas se introducen envueltas en polvo menudo de hematites roja. Se produce una descarburación que convierte la fundición ordinaria en un producto equivalente á un buen hierro, por cuanto se deja trabajar con la lima, martillar, estampar, etc., y goza de tenacidad y ductilidad grandes.

por mm.², es decir, el valor correspondiente al hierro de buena calidad.

El coeficiente de elasticidad trasversal es, término medio, $E' = 4.000$ kilogramos por mm.²

3.^a *Límite de elasticidad*. Es mayor para la compresión que para la extensión.

He aquí los valores:

	Fundiciones ordinarias.	Fundiciones tenaces.
Por extensión.....	4 á 8	8 á 12
Por compresión.....	14 á 24	24 á 40

El alargamiento en el período elástico es, por cada kilogramo de esfuerzo tractor por milímetro cuadrado de sección trasversal, 0^m,000105 por metro de longitud, ó sea 0,0105 por 100.

4.^a *Coefficientes de fractura*. — En fundiciones ordinarias de segunda fusión, el valor de \bar{R} por extensión está comprendido entre 9 y 15 kilogramos por milímetro cuadrado.

La fundición Gruson, endurecida por moldeo en molde metálico, parece obtenerse mezclando fundición gris muy resistente con fundición especular (*spiegeleisen*) que contiene mucho manganeso. El coeficiente de fractura por extensión, da idea de su gran tenacidad; \bar{R} varía entre 22 y 24 kilogramos por mm.²

Mr. Deny ha fabricado fundiciones tenaces en molde metálico, cuyo valor de \bar{R} por extensión ha sido de

Mezcla binaria de fundición hematites núm. 3.....	80 por 100.	} $\bar{R} = 24,4$
Acero forjado.....	20 »	
Mezcla ternaria de fundición hematites núm. 3.....	80 por 100.	} $\bar{R} = 26,4$
Idem de fundición blanca, laminar..	13,9 »	
Acero.....	6,1 »	

En la fundición maleable \bar{R} alcanza valores de 30 á 40 kilogramos por mm.² por extensión.

Para la fractura por compresión, \bar{R}' varía entre 45 kilogramos por milímetro cuadrado (fundiciones malas de primera fusión), y 110 kilogramos por mm.² (fundiciones de superior calidad). Se puede tomar como promedio 75 kilogramos por mm.²

Estos datos demuestran que la fundición es un material mucho más apto para resistir compresiones que extensiones.

El coeficiente de fractura por esfuerzo cortante \bar{R} , varía entre 16 y 20 kilogramos por mm.²

5.ª *Coefficiente de trabajo.* — Para la extensión, no debe exceder R de 2 á 3 kilogramos por mm.² para las fundiciones ordinarias, y de 4 á 6 para las tenaces y las maleables.

Para la compresión, puede darse á R' un valor variable de 6 á 12 kilogramos por mm.², según la clase de fundición y la naturaleza de la obra.

OTROS METALES

124. **Cobre.** — He aquí las propiedades específicas que se pueden exigir al cobre:

	Coefficiente de fractura por compresión en kilogs. por mm. ²	Coefficiente de fractura por extensión en kilogs. por mm. ²	Estrechamiento de sección en el huso.	Alargamiento por 100 de fractura en 200 mm.
Cobre batido { En plancha. ó laminado. { En barra..	80	20 á 22	0,40	18 á 30
	80	22 á 28	0,50	15 á 25
Cobre fundido.....	»	13 á 14	»	»

	Por m. ²	Por mm. ²
Coefficiente de elasticidad longitudinal (E).....	12×10^9	12.000
Idem íd. transversal (E').....	$4,4 \times 10^9$	4.400

	Por extensión.	Por compresión.	Por esfuerzo constante.
Alargamiento elástico máximo por metro lineal....	Cobre batido.. 0,0013	0,0013	»
	» recocido. 0,00027	0,00025	»
Límite de elasticidad en kilogramos por mm. ² ...	Cobre batido.. 14	14	10,5
	» recocido. 3	2,75	2
Coefficiente de trabajo en kilogramos por mm. ² ...	Cobre batido.. 6,6	6,60	5
	» recocido. 2,5	2	1,5

El alambre de cobre, no recocido, de 3,5 á 4,5 mm de diámetro, se rompe por tracción, según Kirkaldy, con $\bar{R} = 44$ kilogramos por mm.²

El peso del metro cúbico vale:

	Kilogramos.
Cobre batido.....	8.900
» fundido.....	8.600

125. **Aluminio.** — Según Sainte Clair Deville, el peso del metro cúbico es:

	Kilogramos.
Aluminio fundido.....	2.560
Idem laminado.....	2.670

El coeficiente de fractura por extensión es, por mm.²:

	\bar{R}
Aluminio fundido.....	10 á 12 kilogramos
Idem laminado en frío.....	27 »

En el aluminio laminado, el coeficiente de elasticidad longitudinal E , vale 7.200 kilogramos por mm.², ó $7,2 \times 10^9$ por m.² El alargamiento de fractura es de 3 por 100.

La adición de pequeñas cantidades de cobre, aumenta considerablemente la resistencia á la tracción, como lo demuestra el cuadro siguiente:

COMPOSICIÓN de la aleación.		Coefficiente de elasticidad E . — Kilogs. por mm. ²	DENSIDAD		Coefficiente de fractura por extensión. — Kilogs. por mm. ²	Alargamiento por 100.
Aluminio.	Cobre.		Calculada.	Medid.		
98	2	8.000	2,78	2,71	30,7	3
96	4	»	2,90	2,77	31,1	3
94	6	»	3,02	2,82	38,6	3
92	8	»	3,14	2,86	35,5	3

126. Plomo.

Plomo...	{	Peso del metro cúbico.....	11400 kilogramos.
		Coefficiente de fractura por extensión.....	2,3 kilogramos por mm. ²
		Idem íd. por compresión.....	5 » »
		Coefficiente de elasticidad.....	0,5 × 10 ⁹ por m. ² .
		Alargamiento elástico máximo.....	i' = 0,0021.
Alambre de plomo de copela, fundido, pasado por hilera, de 4mm de diámetro...	{	Alargamiento elástico máximo.....	i' = 0,00067
		Límite de elasticidad.....	D = 0,4 kilogs. por mm. ² .
		Coefficiente de elasticidad.....	E = 600 por mm. ² .
		Id. íd. impuro, del comercio, de 6mm de diámetro.	i' = 0,0005.
			D = 0,4 kilogs por mm. ² .
		E = 800 » »	

127. Zinc.

Peso del metro cúbico.....	6890 á 7200 kilogramos.
Coefficiente de fractura por extensión.....	4,9 á 5,6 kilogs. por mm. ²

128. Estaño fundido.

Peso del metro cúbico.....	7300 á 7500 kilogramos.
Coefficiente de fractura por extensión.....	3,2 kilogramos por mm. ²
Idem íd. por compresión.....	10,8 » »

129. Platino y otros metales.

Alambre no recocido de 0,127mm de diámetro. Coeficiente de fractura por extensión.....	116 kilogs. por mm. ²
Idem recocido del mismo diámetro, íd.....	34 » »

	E	
Oro estirado.....	8131	} Por mm. ²
» recocido.....	5585	
Plata estirada.....	7358	
» recocida.....	7140	
Alambre de platino.....	17044	
» recocido.....	15518	

ALEACIONES

130. Bronces.—Bronce ordinario de cañones.

Extensión.....	{	Peso del metro cúbico.....	8400 kilogramos.
		Límite de elasticidad.....	3 á 4 kilogs. por mm. ² .
		Coefficiente de fractura.....	14 á 25 » »
		Alargamiento por 100 en 200mm	1,7 á 4,5.
		Estrechamiento de sección en el huso, por 100.....	1,5 á 8,4.
Coefficiente de elasticidad.	{	Coefficiente de trabajo.....	2 á 3 kilogs. por mm. ² .
		Alargamiento elástico máximo.....	0,00063.
		Longitudinal.....	6 × 10 ⁹ por m. cuadrado.
		Trasversal.....	1,06 × 10 ⁹ » »
		Compresión.....	{
		Coefficiente de fractura.....	90 kilogramos por mm. ²
		Principio de la deformación....	12 á 13 » »

Bronce de cañones comprimido.

Peso del metro cúbico. ...	8500 á 8900 kilogramos.
----------------------------	-------------------------

	En el ánima	En el exterior.	
Extensión... {	Límite de elasticidad.....	18 kilogs. por mm. ²	7 kilogs. por mm. ²
	Coefficiente de fractura....	48 » »	33 » »

131. Bronce fosforoso.—El fósforo se incorpora al bronce como cuerpo reductor del óxido de cobre que con tanta facilidad se forma y disuelve en la aleación con perjuicio de su calidad y resistencia.

El bronce fosforoso posee gran fluidez; según las proporciones de la aleación se pueden obtener productos dúctiles como el cobre, resistentes como el hierro, ó duros como los aceros carburados, y es susceptible de emplearse en hojas, alambres ó piezas moldeadas.

CONSTANTES ESPECÍFICAS, SEGÚN KIRKALDY

FUERZA DE TRACCIÓN

	Límite de elasticidad en kgs. por mm. ²	Coefficiente de fractura en kgs. por mm. ²	Estrechamiento de sección por 100.	Alargamiento por 100 en 200 mm.
Bronce fosforoso de diversas calidades, en barras.....	7,5 á 16,5	14,5 á 34,5	3,9 á 31,9	3,6 á 33,4

132. Bronce de manganeso.—Se obtiene añadiendo á la aleación de bronce ordinario una cierta cantidad de *cupro manganeso* (aleación de 75 de cobre y 25 de manganeso) ó de *ferro manganeso*, con objeto de incorporar á la masa el manganeso necesario para eliminar el óxido de cobre que pueda formarse.

El producto, que se moldea, resulta muy homogéneo, dúctil y tenaz, y también muy duro, según las proporciones de los elementos.

He aquí las cualidades de los brónces, núms. 1 y 2, que por su ductilidad son comparables al acero forjado, y como éste se pueden forjar, laminar, etc.:

CALIDAD	EXTENSIÓN			OBSERVACIONES
	Límite de elasticidad en kilgs. por mm. ²	Coefficiente de fractura en kilgs. por mm. ²	Alargamiento por 100 en 200 mm.	
Núm. 1.—Redondos laminados en caliente.....	17,5	45,7	»	Recocido.
	21,0	46,0	»	Idem.
	37,4	49,8	»	Natural.
	54,0	62,5	»	Laminado en frío
Núm. 1.—Palastros laminados en caliente.....	23,0	48,2	34	Recocidos y en-
				sayados en sentido normal al laminado.
Núm. 2.—Comprimido al moldear.	27,0	52,0	16,5	»

133. Latón.—El latón fundido pesa 7800 á 8400 kilogramos por metro cúbico, y si está en alambre 8540.

EXTENSIÓN

Coefficiente de fractura \bar{R} para el latón en plancha ó en barra.....	19 kilogramos por mm. ²	
Idem íd. en alambre no recocido de 3,5 á 4,5mm...	56 » »	
Límite de elasticidad para el latón en barra ó en plancha.....	7 » »	
Alargamiento por 100 en 200mm.....	16,1 » »	
Coefficiente de elasticidad E .	Para el latón en barra ó en plancha.....	$6,5 \times 10^9$ por mm. ² .
	Para el alambre..	10×10^9 »
Alambre de latón recocido.....	$i' = 0,000135$	
	$D = 15$	
Latón fundido.....	$i' = 0,00076$	
	$D = 4,8$	

COMPRESIÓN

Coefficiente de fractura del latón fundido.....	7,3 kilogramos por mm. ²
E (coeficiente de elasticidad longitudinal).....	Los mismos valores que tiene para la extensión.

134. Metal Delta (*).— (Aleación de hierro, zinc y cobre):

Peso del metro cúbico.....	8400 kilogramos.
Punto de fusión.....	250°.

Coefficiente de fractura por extensión:

Moldeado en arena.....	33 kilogramos por mm. ²
Forjado al rojo sombrío.....	52 á 55 » »
Forjado ó estirado en frío.....	64 » »
Promedio del valor de \bar{R}	58 » »

(*) Esta aleación, inventada por Dick, ingeniero dinamarqués, en 1883, tiene la excelente propiedad de ser inoxidable. Se emplea mucho en arquitectura naval, para hélices, cadenas, torpedos y tubos lanzatorpedos, etc. Se ha empleado en algunas piezas del acorazado *Felayo* construido por la *Société des forges et chantiers de la Méditerranée*.

Límite de elasticidad por extensión.....	22	kilogramos	por mm.
Alargamiento de fractura por 100.....	12,9	»	»
Estrechamiento de sección, en el huso, por 100	17,4	»	»
Coefficiente de fractura por compresión (pro- medio).....	100	»	»
Alambre de metal Delta para cables; coefi- ciente de fractura por extensión.....	80	»	»

135. Bronces y latones de aluminio. — He aquí algunas constantes específicas de bronce y latones de aluminio obtenidas por M. Tetmajer:

MATERIAL	Tanto por 100 de aluminio.	Coefficiente de fractura por tracción, en kilogramos, por mm. ²	Alargamiento por 100.
Bronce de aluminio.	11,5	83	0,5
	11,0	70	1,0
	10,0	67	11,0
	9,5	64	19,0
	9,0	59	32,0
	8,5	52	52,5
	5,3	44	64,0
Latón de aluminio.	4,0	72	6,5
	3,0	62	7,5
	2,5	54	20,0
	2,0	50	30,0
	1,5	44	39,0
	1,0	40	50,0

TABLAS

DE

CONSTANTES ESPECÍFICAS DE LOS METALES

El peso del metro cúbico, en el bronce al 10 por 100 de aluminio, es 7.650 kilogramos; y el del latón al 3 por 100 es 8.300 kilogramos.

En el *metal Bourbouze* (del nombre de su inventor), aleación de 100 de aluminio y 10 de estaño, \bar{R} vale 14 kilogramos por mm.², con alargamiento de fractura de 6 por 100.

		\bar{R}	
Aleación de aluminio y	Al 5 por 100 de plata...	24	kilogramos por mm. ²
plata.....	Al 10 por 100 » ...	31	» » »

METALES
TABLA DE LAS PRINCIPALES CONSTANTES ESPECÍFICAS

MATERIALES	Peso del metro cúbico. Kilogramos.	Coeficiente de elasticidad por extensión y compresión. E Kilogs. por mm. ²	COMPRESIÓN			EXTENSIÓN			ESFUERZO CORTANTE		
			Coeficiente de fractura. R' Kilogramos por mm. ²	Límite de elasticidad. D' Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de trabajo. K' Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de fractura. R Kilogramos por mm. ²	Límite de elasticidad. D Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de trabajo. K Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de elasticidad. E'' Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de fractura. R'' Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de trabajo. K'' Kilogramos por mm. ²
HIERRO											
Palastros y barras de todas clases.....	7790 á 8000	18000 á 20000	30 á 40	15 á 20	5 á 9	30 á 40	15 á 20	5 á 9	8000	24 á 32	4 á 8
Alambre.....	»	»	»	»	»	70	»	12	»	»	»
Id. galvanizado.....	»	»	»	»	»	46	»	8	»	»	»
ACERO											
Acero extradulce para construcciones.....	7790 á 8000	20000 á 22000	40 á 50	22 á 30	9 á 12	40 á 50	22 á 30	9 á 12	8800	30 á 38	7 á 9
Alambre de acero.....	»	»	»	»	»	100 á 110	»	»	»	»	»
Acero moldeado, recocido.....	»	»	60 á 80	»	10 á 13	45 á 65	»	»	»	»	»
Id. templado al aceite y recocido.....	»	»	400	»	66	45 á 65	»	»	»	»	»
FUNDICIONES											
Fundición ordinaria de 2. ^a fusión.....	7000 á 7500	9500	50 á 110	14 á 24	6 á 12	9 á 15	4 á 8	2 á 3	4000	16 á 20	»
Fundiciones tenaces.....	»	»	»	24 á 40	»	24 á 27	8 á 12	4 á 5	»	»	»
Fundiciones maleables.....	»	»	»	»	»	30 á 40	»	5 á 7	»	»	»
OTROS METALES Y ALEACIONES											
Cobre batido.....	8900	12000	80	14	6 á 7	20 á 28	14	4 á 6	4400	15 á 20	3 á 5
Cobre fundido.....	8600	»	»	»	»	13 á 14	»	»	»	»	»
Alambre de cobre no recocido.....	»	»	»	»	»	44	»	»	»	»	»
Latón fundido.....	7800 á 8400	6500	7 á 8	»	1 á 2	19	7	3	»	»	»
Alambre no recocido.....	8540	10000	»	»	»	56	»	9 á 10	»	»	»
Plomo.....	11400	500	5	»	0,8 á 1	2 á 3	»	0,3 á 0,5	»	»	»
Zinc.....	6800 á 7200	»	»	»	»	5 á 6	»	0,8 á 1	»	»	»
Estaño fundido.....	7300 á 7500	»	10 á 11	»	1 á 2	3 á 4	»	0,5 á 0,7	»	»	»
Aluminio laminado.....	2560 á 2670	7200	»	»	»	27	»	4	»	»	»
Bronce de cañones.....	8400	6000	»	»	»	14 á 25	3 á 4	2 á 3	1060	»	»
Id. id. comprimido, en el ánima.....	»	»	»	»	»	48	18	8 á 9	»	»	»
Id. id. en la parte exterior.....	»	»	»	»	»	33	7	5 á 6	»	»	»
Bronce fosforoso.....	»	»	»	»	»	15 á 36	7 á 17	2,5 á 6	»	»	»
Id. al manganeso.....	»	»	»	»	»	45 á 52	17 á 27	8 á 9	»	»	»
Metal Delta.....	8400	»	100	»	16	33 á 64	22	6 á 11	»	»	»
Bronce de aluminio.....	»	»	»	»	»	44 á 83	»	7 á 14	»	»	»

4. MATERIALES DE ORIGEN PÉTREO

PIEDRAS

136. La piedra es un material sumamente heterogéneo, y, por tanto, sus propiedades específicas son muy variables.

Desde los pórfidos, que resisten esfuerzos de compresión superiores á 2000 kilogramos por cm.², hasta las areniscas deleznales y calizas muy tiernas, cuya carga de aplastamiento no llega á 20 kilogramos por centímetro cuadrado, existe numerosa serie de piedras de densidades y resistencias diferentes.

Esta diversidad de propiedades se encuentra aun en las piedras de la misma clase. El granito, que es la piedra menos heterogénea, ofrece variedades resistentes, según que sea tosco ó de grano fino y el mayor ó menor predominio del cuarzo. Las areniscas pueden ser tan flojas y deleznales que se desagreguen á la simple presión del dedo, ó duras y resistentes; y en cuanto á las calizas, la variedad es todavía mayor, desde las más blandas á los mármoles más duros, como puede verse en el cuadro que más adelante se acompaña.

137. Las cualidades físicas no sirven para determinar la resistencia de una piedra; de modo que no podrá deducirse consecuencia alguna exacta de su naturaleza geológica, ni de su color, aspecto exterior, dureza, etc.

Mr. Perrodil, ingeniero francés, ha pretendido relacionar la densidad con la resistencia, y ha formado tablas numéricas que dan la carga de fractura por aplastamiento, de las piedras calizas de las in mediaciones de París, conocido que sea su peso específico; pero estas relaciones tienen escasa exactitud, y eso que se refieren á piedras de la misma naturaleza y existentes en una pequeña comarca.

La densidad, como las demás propiedades físicas, no basta para determinar la resistencia de una piedra. El mismo peso específico tiene un banco alterado por las influencias atmosféricas que otro de la misma cantera no alterado, y sin embargo, las resistencias pueden variar del simple al cuádruplo.

ple y aún más; y lo mismo sucede en trozos de piedra sacados de un mismo banco.

Lo único que puede decirse es que, en general, en piedras de la misma clase, la resistencia aumenta con la densidad; que deben preferirse, en una misma cantera, las capas del centro, y que el grado de dureza sólo sirve para dar indicios del modo de romperse las piedras por compresión, efectuándose la fractura en láminas y agujas fácilmente reducibles á polvo en las duras, y formando conos ó pirámides, cuyas bases son las del prisma, en las blandas (núm. 87, figs. 10 y 12, lám. 3.^a).

Se ha experimentado la influencia que ejerce en la resistencia de una piedra la dirección de la fuerza de compresión. Cuando la piedra es homogénea y no se descubre fácilmente la dirección de las capas de estratificación, la piedra resiste de modo próximamente igual en todos sentidos; pero si la estratificación está bien señalada, la resistencia de la piedra es mayor cuando la fuerza de compresión actúa normalmente á las capas ó á lo que se llama *lecho de cantera*.

Las piedras resisten también de modo desigual, según que estén secas ó mojadas y según que haya desaparecido en mayor ó menor cantidad el *agua de cantera*. La diferencia de resistencia es más notable en las piedras porosas y tiernas; hay algunas de estas que, recientemente arrancadas y provistas del agua de cantera, resisten menos de la mitad de la carga correspondiente á la fractura cuando están secas. Conviene tener en cuenta esta circunstancia en las construcciones expuestas á la humedad (puentes, obras hidráulicas, etc.), y elegir en tales casos piedras duras si es posible.

138. En un cilindro comprimido entre dos planos (fig. 16, lám. 3.^a), la superficie se deprime cerca de las generatrices de contacto y se forman las cuñas bcd , $b'c'd'$, que hienden el cilindro en dos trozos que no han sufrido alteración en su cohesión; en cambio la materia que forma las cuñas es casi pulverulenta. El ángulo diedro $bcd = b'c'd'$ vale 90° ; y la distancia cc' es los $\frac{2}{3}$ del diámetro.

Este modo de fractura de los cilindros, observado por Vicat, es común á los sólidos de textura arenácea y terrosa ó granular, tales como las piedras, morteros y ladrillos.

En una esfera se forman cuñas cónicas pulverulentas bcd , $b'c'd'$ (fig. 16, lám. 3.^a), que producen la fractura en dos, tres ó más pedazos.

En ambos sólidos, Según Mr. Vicat, las fuerzas de aplastamiento son proporcionales á los cuadrados de los diámetros en figuras semejantes,

139. En vista de la heterogeneidad de esta clase de materiales, los datos relativos á su densidad y resistencia deben detallar la naturaleza y procedencia de las piedras para que tengan algún valor, sin que sea posible deducir por analogías las propiedades específicas de piedras de otras canteras distintas. Cuando se trate de una construcción importante, y las canteras de que se dispone no figuren en los datos contenidos en libros de construcción, debe procederse á practicar experiencias directas para la determinación de las constantes específicas que más interesan; el peso específico y el coeficiente de fractura por compresión y por extensión.

140. He aquí los resultados de algunas experiencias:

Autores de las experiencias.	CLASE DE PIEDRA	Peso del metro cúbico en kilogs.	Coeficiente de fractura por compresión en kilogs. por cm ²
Gautey....	Pórfido.....	2870	2472
Rondelet..	Basalto.....	2950	1995
Id.....	Lava del Vesubio.....	2600	592
Id.....	Id. de Roma.....	1970	228
Id.....	Piedra pómez.....	600	34
Valdés....	Brecha de Angono (Filipinas), compuesta de fragmentos de lava.....	1660	46
Id.....	Id. de Meycanayán (Filipinas), compuesta de pómez y escorias.....	1580	43
Id.....	Toba de Guadalupe (Filipinas).....	1450	26
Id.....	Traquita de San Miguel (Filipinas).....	2400	266
Churruca..	Id. de Aspe (Bilbao).....	2445	»
R.deSalces	Granito de Berrocal (Madrid).....	2681	489
Valdés....	Piedra silíceo de San Miguel (Cuba).....	2470	1160
R.deSalces	Mármol rojo de Rentería (Guipúzcoa).....	3016	399
	Mármol dorado de Cabra (Córdoba).....	2972	377
Valdés....	Mármol blanco de Macael (Almería).....	3016	344
	Id. de la Isla de Pinos (Cuba).....	2600	128
Morero....	Caliza de la Aldehuela (Madrid).....	2750	468
	Id. de Patones (íd.).....	2500	310
	Id. de la Atalaya (íd.).....	2140	218
	Id. de Rueda (Zaragoza). Piedra muy blanca á propósito para molduras.....	»	63

Autores de las experiencias.	CLASE DE PIEDRA	Peso del metro cúbico en kilogs.	Coeficiente de fractura por compresión en kilogs. por cm. ²	
R.de Salces	Caliza de Alconera (Badajoz).....	2769	479	
	Id. de Alhama (Aragón).....	2620	344	
	Id. blanca de Colmenar de Oreja.....	2599	319	
	Id. íd de Tudela.....	2030	123	
	Id. íd. de Arcos (Catedral de Cuenca)....	2093	101	
	Id. íd. de Fons.....	2280	78	
	Id. íd. de Segovia.....	1896	64	
	Id. amarillenta de Uclés.....	1847	57	
	Id. íd. de Luna.....	1807	55	
	Valdés....	Id. de Ponce (Puerto Rico).....	2100	170
R.de Salces	Id. magnesia de Tafalla.....	2588	262	
	Id. arcillosa de Baidés.....	2591	329	
	Id. íd. de Lamiquiz.....	2281	134	
	Brecha de Bará (Tarragona).....	2609	117	
	Piedra arcillosa de la Osa (Habana).....	2080	42	
Valdés....	Id. íd. de la Cueva (íd.).....	1600	37	
	Id. íd. de Vedao (íd. calidad superior)....	2110	62	
	Id. íd. íd. (íd., mediana).....	2080	51	
	Id. íd. de la Playa de Chivos (íd.).....	»	14	
	Id. íd. de la Cachimba de San Antonio (íd.)	2340	56	
	Id. íd. del Morro (íd.).....	2420	66	
	Vinelo (íd.).....	2200	26	
	Arenisca blanca de Petrel.....	2300	276	
	R.de Salces	Id. íd. de Monóvar.....	2204	242
		Id. íd. de Sax.....	2093	101
	Id. íd. de Novelda.....	2300	135	
Academia de Inge- nieros mi- litares...	Caliza de Tamajón (Guadalajara).....	»	280	
	Areniscas de Guadalupe (Guipúzcoa)....	»	120 á 170	

141. El coeficiente de trabajo R' se deduce del de fractura \bar{R}' por la relación $R' = \frac{1}{m} \bar{R}'$. Para las piedras sometidas á la compresión, $m = 10$ en

las piedras poco homogéneas, y $m = 6$ á 8 para las homogéneas y compactas que resisten bien las acciones atmosféricas.

Si no se conociesen los valores de \bar{R}' , se podrían admitir para R' los siguientes:

	R' en kilogramos por cm. ²
Piedras silíceas.....	50
» calizas y areniscas duras.....	30
» calizas y areniscas blandas.....	10

142. Las piedras trabajan rara vez por extensión, así es que existen pocos datos relativos al coeficiente de fractura correspondiente.

He aquí algunos:

AUTORES	CLASE DE PIEDRA	Coeficiente $\bar{\pi}$ de fractura por extensión en kilogramos por cm. ²
Coulomb....	Piedra blanca de grano fino.....	14
Tregold....	Caliza de Portland.....	60
Rondelet....	Basalto de Auvernia.....	77
Vicat.....	Piedra litográfica.....	31
	Caliza granugienta.....	23
	Id. oolítica.....	14
Academia de Ingenieros militares...	Arenisca de Guadalupe (Guipúzcoa)....	8 á 16

143. A falta de todo dato, se tomará como valor del coeficiente de fractura por extensión $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{15}$ del coeficiente de fractura por compresión.

El coeficiente de trabajo por extensión se formará del de fractura, haciendo $m = 10$, como en la compresión.

Se ha pretendido hallar una relación entre los coeficientes de fractura \bar{R} y \bar{R}' por extensión y compresión en una misma piedra. Para las calizas $\frac{\bar{R}}{\bar{R}'} = 0,133$, según algunos autores; de modo que del conocimiento del coeficiente de fractura por compresión \bar{R}' , se puede deducir el de extensión \bar{R} . Pero no debe tomarse este valor sino como aproximado.

LADRILLOS

144. La resistencia es muy variable; depende de la naturaleza de las tierras, de su preparación, amasadura y cochura, del lugar que ocupaba el ladrillo en el horno, y en una palabra, de todos los detalles de fabricación.

EXTENSIÓN

AUTORES	MATERIALES	Coeficiente de fractura por extensión en kilogramos por cm. ²
Gauthey.	Ladrillo duro, muy bien cocido, de Provenza.....	19
Tregold.	Ladrillo ordinario, bien cocido.....	19
»	Ladrillo mal cocido.....	8
A. de I.	Ladrillo de Guadalajara.....	8 á 12

COMPRESIÓN

AUTORES	MATERIALES	DENSIDAD	Coeficiente de fractura por compresión en kilogramos por cm. ²
Vicat.....	Adobes.....	»	33
Caudel.....	Ladrillo bien cocido de Borgoña.....	2,195	150
	Id. id. de Sarcelles.....	1,997	125

AUTORES	MATERIALES	DENSIDAD	Coeficiente de fractura por compresión en kilogramos por cm. ²
Caudel.....	Ladrillo de cocción ordinaria de Montereau.....	1,780	110
	Id. rojos ordinarios de París...	1,520	90
Ensayos verificados en las obras del Canal de Isabel II (Madrid), por D. J. Morer.	Ladrillo fino prensado, de la fábrica de Rombado.....	2,075	93
	Id. fino de Vaciamadrid.....	»	47
	Id. del puente de Segovia.....	»	60
	Id. recocho, fabricado en el depósito del Canal de Isabel II.	1,723	49
	Id. pardo, fabricado en el mismo depósito.....	»	33

145. Para formar el coeficiente de trabajo se hará $m = 10$, si los ladrillos son de buena calidad, y $m = 15$ cuando sean medianos.

MORTEROS Y YESOS

146. La resistencia de los morteros es sumamente variable y depende de un gran número de circunstancias, tales como la calidad de las cales, cementos, arenas y agua, proporciones de estos elementos, manipulación, temperatura y estado higrométrico de la atmósfera en el momento de su empleo, edad de los morteros, exposición al aire ó al agua, etc. Los datos que á continuación exponemos no pueden tener, por tanto, valor absoluto.

Los morteros y yesos resisten mucho más á la compresión que á la extensión; la relación de resistencia es en general de 10 á 1.

Según Rondelet, la relación entre los coeficientes de fractura por extensión y compresión es:

Yeso.....	1 : 12
Ladrillo de cemento.....	1 : 9,5
Idem de puzolana.....	1 : 7,5
Morteros antiguos.....	1 : 8

La fuerza de cohesión del mortero crece con el tiempo; la del yeso disminuye, por el contrario, especialmente cuando está expuesto al aire y á la humedad.

Mortero de cal y arena de río.....	1,12
» de cemento puro.....	1,25
» de cemento y arena.....	1,11
» de puzolana de Roma.....	1,14

149. Para coeficiente de trabajo por compresión, debe tomarse $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{15}$ del coeficiente de fractura.

150. El peso del metro cúbico de mortero ordinario es de 1600 á 1800 kilogramos, y el del mortero hidráulico de 1800 á 2100.

CEMENTOS

151. **Peso. Finura del polvo.** — El *peso específico* de los buenos cementos oscila entre 3,05 y 3,15; el de los de segunda clase fluctúa entre 3,00 y 3,04. No debe confundirse el peso específico con el *peso volumétrico*, ó sea el peso de la unidad cúbica de un cierto volumen de cemento molido. Este depende del grado de finura del polvo y de la magnitud del volumen. A mayor molido corresponde menor peso; y cuanto mayor sea el volumen, más se comprimen las capas inferiores de cemento molido, por efecto de su propio peso, y mayor resultará el de la unidad.

El grado de molido de un cemento se mide por el residuo que queda al cernerlo por tamices de cierto número de mallas por centímetro cuadrado. Los tamices son de tela metálica, generalmente de los números 50, 80 y 200, que tienen, respectivamente, 324, 900 y 5.000 mallas por centímetro cuadrado. En las conferencias de Berlín (Septiembre de 1890), encaminadas á la unificación de los métodos de ensayo de los materiales, se propuso sustituir la tela metálica con palastros perforados.

También se emplea, para los análisis químicos, tamices de seda que solamente dan paso á polvo impalpable.

Se admite generalmente que los residuos que deja un cemento bien molido, al pasar por tamíz de 900 mallas por centímetro cuadrado, deben ser del 10 al 15 por 100 del peso total del cemento sometido al tamizado.

El polvo fino que resulta de cerner el cemento molido con el tamíz de 5.000 mallas por centímetro cuadrado, pesa por litro:

Cementos de 1. ^a	1.050 á 1.120 gramos.
Idem de 2. ^a	950 á 1.000 »
Idem de clase inferior.....	Menos de 900 »

El cemento de primera calidad que da un residuo inferior á 30 por 100 en el tamíz de 5.000 mallas, pesa sin cerner 1.200 á 1.300 gramos por litro.

Se supone en cuanto antecede que el cemento se vierte en la medida sin golpearlo ni comprimirlo. Golpeando el vaso para que asienten las capas inferiores, se obtiene de 1.900 á 2.200 gramos por litro.

152. **Circunstancias que influyen en la resistencia de los cementos amasados, puros ó mezclados con arena.** — Se dice que los cementos son de fraguado rápido, medio ó lento, cuando el endurecimiento comienza antes de los quince minutos, entre quince y sesenta minutos, ó más tarde de una hora, todo contado desde el momento en que empieza el fraguado. El fraguado empieza cuando una aguja de acero, de un milímetro cuadrado de sección y 300-gramos de peso, penetra en un cilindro de pasta de 8 centímetros de diámetro y 4 de altura, por la acción de su propio peso, pero sin atravesarle por completo; y el fraguado se da por terminado cuando la aguja no penetra nada.

Muchas veces el fraguado lento de un cemento es indicio de dureza y tenacidad finales muy considerables. Tanto por esta causa cuanto por la facilidad de poner en obra grandes volúmenes de hormigón, de una vez, reduciendo así el número de juntas, que son otros tantos puntos débiles, son preferidos los cementos de fraguado lento en las obras de fortificación permanente, especialmente en las bóvedas y macizos expuestos á la destructora acción de los proyectiles. En las obras hidráulicas, sobre todo si se ejecutan en el mar, se requiere por el contrario cierta rapidez de fraguado en los cementos, para que las mamposterías con ellos fabricadas resulten preservadas en breve tiempo de la destrucción ó deterioros que puede causar el agua.

Para que se realicen en presencia del agua todas las reacciones químicas que originan el endurecimiento de los cementos, es preciso que estén reducidos á polvo; de modo que es altamente importante que el molido sea muy perfecto. Los residuos del cernido por tamices de 324 y 900 mallas, son inertes, es decir, que no se endurecen por el agua y hacen las veces de pequeños trozos de piedra introducida en la masa. Los granos que pasan por el tamíz de 900 mallas y se detienen en el de 5.000, son atacados por el agua al cabo de un cierto tiempo, y aumentan entonces la resistencia del cemento.

La mayor división de la materia facilita el fraguado. Además, á mayor grado de molido corresponde mayor resistencia final en la masa después de haber fraguado, como lo comprueban las experiencias de Michaëlis, el cual hizo prismas de ensayo con polvos de un mismo cemento, pasados por tamices diferentes mezclados con proporciones de arena tanto mayores cuanto

más fino era el polvo; y, sin embargo, las resistencias á la tracción fueron casi las mismas á pesar de variar la proporción de arena del simple al doble entre unos y otros ejemplares. Sería, sin embargo, erróneo deducir el valor de un cemento tan sólo de su grado de finura, porque se correría el riesgo de preferir cementos medianos y tiernos, de fácil molido, á cementos buenos, perfectamente cocidos y de grano más basto.

Es condición importante en los cementos la de la pureza, y no deben contener cenizas, carbón molido ni materia alguna inerte. Cuanto á su composición química, debe desecharse todos los que contengan más de 1 por 100 de ácido sulfúrico, ó sulfuros en proporciones dosificables. Si el análisis químico acusa más de 4 por 100 de óxido de hierro, ó da valor menor de 0,44 para la relación entre el peso total de la sílice combinada y de la alúmina, de una parte, y el peso de la cal de la otra, deberá mirarse con prevención el cemento y no aceptarlo hasta haber probado sus condiciones por medio de continuados ensayos (*).

La buena calcinación interviene, por modo principal, en la resistencia de los cementos. Un cemento poco cocido tiene pequeña densidad; su grano es fino, la resistencia suele ser grande, poco tiempo después de amasado, pero más tarde es mucho menor que la de los cementos bien cocidos. Difícil es determinar el grado de cocción de los cementos en su recepción; y por esto y por la gran importancia de la buena calcinación en el resultado final, es conveniente que un delegado de la Administración vigile en las fábricas todos los detalles de elaboración del producto. Así se hace hoy en Alemania, en Francia y en otros países.

La proporción de arena influye en alto grado en la resistencia de los morteros de cemento; á mayor cantidad de arena, corresponde menor resistencia á la extensión y compresión. Interesa también la calidad; la mejor arena es la cuarzosa y la silícea de granos ásperos; la peor es la arcillosa.

La amasadura, la proporción de agua, la naturaleza y temperatura de ésta, ejercen influencia en el fraguado, y, por tanto, en la resistencia. El agua del mar retarda el fraguado, por efecto de las sales que tiene en disolución (principalmente por el sulfato de magnesia y cloruro magnésico). Las altas temperaturas del agua y del aire aceleran el fraguado, y las bajas lo retrasan. Pero el factor principal es el tiempo trascurrido desde el fraguado hasta el momento de medir las resistencias á los esfuerzos de extensión y de

(*) Pliego de condiciones facultativas para la recepción de cementos Portland con destino á las obras de los puertos de Boulogne y Dunkerque.

compresión, especialmente los primeros; pues la aptitud para resistir compresiones la adquieren más pronto.

153. Las pruebas mecánicas admitidas hoy para determinar las cualidades de un cemento, son las de tracción; pero se van generalizando también las de compresión, y así debe ser, no solamente porque no hay relación establecida entre los coeficientes de fractura por extensión y por compresión en los materiales hidráulicos, sino porque en la práctica los morteros de cemento han de resistir principalmente compresiones. Debe tenerse en cuenta que, á igualdad de las demás circunstancias, los coeficientes de fractura que se obtienen en las experiencias son mayores cuando el área de la sección transversal de ruptura de los ejemplares de ensayo es más pequeña, de modo que conviene fijar en un principio cuál ha de ser este área. Hasta ahora se habían usado ejemplares de ensayo cuya sección de fractura por tracción era de 16 á 20 centímetros cuadrados. Hoy está generalmente admitida el área de 5 cm.² para la tracción, y de 50 cm.² para la base de los prismas que han de romperse por compresión.

154. Precauciones que hay que tomar en los ensayos de cemento para que los resultados sean comparables. — Dejando aparte lo que concierne al análisis químico, invariabilidad de volumen y otras circunstancias de los cementos que hay que tomar en consideración en los ensayos, nos concretaremos á lo que hace referencia al peso volumétrico y á las resistencias á la extensión y compresión.

En la determinación del peso volumétrico se pueden emplear dos procedimientos diferentes: buscar el máximo de compresión del polvo por efecto de su propio peso, para lo cual se somete el vaso que lo ha de contener, mientras se llena, á continuas sacudidas producidas ya por medio de pequeñas máquinas (aparato Tetmajer), ya á mano, ó bien evitar en lo posible el asiento del polvo de cemento vertiéndolo con mucho cuidado y removiéndolo antes con una espátula, sin que, en tanto, tenga el vaso movimiento alguno.

Para las experiencias de resistencia á la tracción y á la compresión, no solamente se emplea el cemento puro sino el mortero de cemento, de una parte, en peso, de cemento y tres de arena.

La arena empleada es la llamada *normal*. En Alemania, la arena normal es natural, enarizada, pura, extraída de Freienwalde, cerca de Berlín; muy bien lavada y seca, pasada por tamíz de 60 mallas por centímetro cuadrado para eliminar los granos demasiado gruesos, y por un segundo tamíz de 120 mallas para separar los granos más finos. El grueso de los alambres que

forman el tamíz, debe ser de 0,32 mm. á 0,38 mm. En Francia se emplea una arena obtenida artificialmente por la trituración y pulverización de cuarcitas extraídas de las canteras del Roule, en Cherburgo; esta arena ha de pasar por el tamíz de 64 mallas, y ser detenida por el de 144. En la conferencia de Berlín quedó adoptada la arena normal alemana, debiendo establecerse coeficientes de relación con las demás arenas empleadas oficialmente en los ensayos, en los demás países, para poder comparar los resultados.

Los pequeños ladrillos de mortero de cemento, de forma de carril de doble T que han de someterse á la tracción, presentan una superficie de fractura de 5 centímetros cuadrados, y los cubos que han de romperse por compresión tienen 50 centímetros cuadrados de superficie en la base. En la fabricación de los ejemplares de prueba se toman cuidadosas precauciones, mezclando primero, en seco, el cemento y la arena, en las proporciones de una á tres, como hemos dicho; añadiendo después el 10 por 100 del total, también en peso, de agua, batiendo el todo, introduciendo de una vez la masa en la gralla ó molde, y apisonándola hasta que resude el agua en la cara superior. El apisonado se hace á mano ó mecánicamente, empleando en este último caso el aparato de Böhme, con cuyo pisón se dan, sobre la masa, un cierto número de golpes, y en seguida se pasa un cuchillo, á guisa de rasero, para igualar la citada cara.

Quítase después el molde, y se lleva el ejemplar á un espacio cerrado al sol ó al aire caliente, á fin de evitar desecaciones prematuras, y á las veinticuatro horas se sumerge en agua, que se renueva, procurando que la temperatura del agua y del aire sea, constantemente, de 15° á 18°. Al cabo de un cierto número de días de inmersión, que generalmente es de veintiocho, se hacen las pruebas de tracción y de compresión, anotándose, con el mayor cuidado, los coeficientes de fractura. En las pruebas de tracción, se aumenta gradualmente el esfuerzo tractor por incrementos de 100 gramos por segundo hasta obtener la fractura. Generalmente se toma, como coeficiente de fractura, el promedio de los resultados de diez experiencias, y lo mismo se hace en los ensayos de compresión.

El aparato más generalmente empleado para los ensayos de tracción, es el de Michaëlis, y para los de compresión el de Le Chatelier, ó prensas hidráulicas.

El plazo de veintiocho días (uno de exposición al aire y veintisiete de sumersión en el agua) es admitido más comunmente, porque con él se da lugar al completo fraguado de los cementos. También se emplea el plazo de ocho días, y siempre que sea posible se harán experiencias con ejemplares de

mayor antigüedad, con lo que se tendrá conocimiento más perfecto de las cualidades mecánicas de los materiales hidráulicos.

155. Empleo del agua caliente en el ensayo de cementos.— Según Mr. Deval, si se emplea el agua fría á 15° para el endurecimiento de los ladrillos de mortero, las pruebas de fractura por tracción pueden dar indicaciones falsas respecto á la bondad del cemento Portland ensayado; pero no sucederá esto si los ladrillos se sumergen en agua caliente á 80°. Por ejemplo: los cementos que tienen un exceso de cal libre, ya sea por falta de cocción ó por mala dosificación al fabricarlos, ensayados por el agua fría, dan, después de siete y veintiocho días de inmersión, coeficientes de fractura por tracción tan elevados como los buenos cementos, y sin embargo, mucho tiempo después de haber fraguado se desagregan, más ó menos progresivamente, bajo la acción de los agentes atmosféricos, porque la cal libre se apaga, y el aumento de volumen, que es consiguiente, ocasiona hendiduras en la masa ya solidificada. También los cementos que contienen materias inertes en polvo dan resultados satisfactorios ensayados por el agua fría, á pesar de su mediana calidad. En los de una y otra clase los ladrillos de mortero no resisten el agua caliente á 80°, y se desagregan, ya por la falta de consistencia de la mezela, como sucede con los que contienen materias inertes, ya por el aumento de volumen en los que tienen exceso de cal libre, y así lo manifiesta el cuadro adjunto, resultado de las experiencias de Mr. Deval, en que pueden compararse los resultados obtenidos con el agua á 15° y el agua á 80°, manteniendo sumergidos los ejemplares de ensayo siete y veintiocho días en la primera y dos y siete días en la segunda.

	RESISTENCIA en frío		RESISTENCIA en caliente.	
	kilogramos por cm. ²		kilogramos por cm. ²	
	7 días.	28 días.	2 días.	7 días.
Cemento normal, fino.....	15	23,2	17,2	24,3
Cemento de molido grueso.....	6,7	13,7	7,6	11
Cemento rápido.....	6,2	16,5	7,3	16,2
Cemento de polvos inertes.....	2,9	3,9	Se desagregaron en agua caliente.	
Cemento mal cocido.....	6,1	12,2		
Cemento con exceso de cal libre...	7,6	20,2		

En todos los ensayos se emplearon mezclas de 1 cemento + 3 arena normal, haciendo el amasado con el 11 por 100 de agua y exponiendo la masa al aire libre durante veinticuatro horas antes de sumergirla en el líquido.

De las experiencias de Mr. Deval se deduce que los buenos cementos Portland resisten bien al agua caliente, y dan á los dos y siete días de inmersión coeficientes de fractura por tracción sensiblemente iguales á los obtenidos después de siete y veintiocho días de inmersión en agua fría.

Los cementos que tienen materias inertes se desagregan en el agua á 80°, pero pueden resistir la inmersión si ésta tiene lugar después que los ladrillos de mortero han estado expuestos al aire libre durante un tiempo mayor de veinticuatro horas. Entonces dan resistencias á la tracción casi iguales á las obtenidas empleando el agua fría.

Los morteros de cemento Portland que contienen exceso de cal, se desagregan también en el agua caliente, siempre que la exposición preliminar al aire libre no exceda de veinticuatro horas. Cuando esta exposición es mayor, y el exceso de cal libre menor, resisten el agua á 80°, pero su tenacidad á los dos y siete días de inmersión es mucho menor que la que presentan á los siete y veintiocho días de inmersión en agua fría.

Con los cementos de fraguado rápido, las experiencias de Deval no son decisivas.

Los ensayos con agua caliente fijan mejor que los hechos con agua fría la calidad de las cales hidráulicas, elevando los coeficientes de fractura de las buenas y disminuyendo los de las medianas.

156. Condiciones impuestas en algunos países para la recepción de los cementos Portland de fraguado lento. — El grado de molido se mide por el tanto por 100, en peso, de los residuos del tamizado del polvo de cemento por el tamíz de 900 mallas por centímetro cuadrado. Los ingenieros militares belgas, rusos y rumanos, exigen como máximo de los residuos el 15 por 100. En Suiza el 20 por 100, y en Alemania el 10 por 100.

La duración del fraguado ha de ser de más de treinta minutos, en Bélgica; de más de treinta minutos y de menos de dos horas, en Alemania y en Suiza; de más de sesenta minutos en Rusia y en Rumania (ingenieros militares). Los ingenieros civiles franceses exigen que el fraguado empiece después de treinta minutos y termine después de tres horas.

Para las pruebas de tracción se imponen las condiciones siguientes:

Francia. Ingenieros civiles. Ejemplares de 5 cm.² de sección de fractura, expuestos al aire un día y sumergidos después en el agua durante períodos de seis, veintisiete y ochenta y tres días, de modo que el ensayo por tracción

tiene lugar después de siete, veintiocho y ochenta y cuatro días de haber fraguado la pasta.

	Coeficiente de fractura por extensión \bar{R} en kilogramos por cm. ² , después de		
	7 días.	28 días.	84 días.
Cemento puro.....	20	35	45
Mortero de cemento de 1 cemento + 3 arena normal, en peso.....	8	15	18

Alemania (Obras públicas, Reglamento de 1887) y *Suiza*.

Las pruebas de fractura por tracción se efectúan en ejemplares de 5 cm.² de sección transversal mínima, de mortero de 1 cemento + 3 arena normal, y las de compresión en ejemplares cúbicos de la misma mezcla, de 50 cm.² de base. Expuestos un día al aire y veintisiete bajo el agua, deben dar como mínimo $\bar{R} = 16$ kilogramos por cm.², para la extensión, y $\bar{R}' = 160$ kilogramos por cm.² para la compresión.

Bélgica. Los ingenieros civiles exigen $\bar{R} = 25$ kilogramos por cm.², para el cemento puro, después de un día de exposición al aire y seis días de inmersión en el agua.

Para las grandes obras de hormigón de cemento, construidas por los ingenieros militares en los fuertes de Lieja y Namur, ha resultado:

	Pliego de condiciones	Obtenido en las pruebas.
Cemento puro, después de un día al aire y seis en el agua; sección 5 cm. ² \bar{R} , en kilogramos por cm. ²	25	33,7 á 40,7
Idem después de un día al aire y 27 bajo el agua.....	35	43,60 á 51,10
Mortero de 1 cemento + 3 arena normal, expuesto 1 día al aire y los restantes bajo el agua. Coeficiente de fractura \bar{R} por tracción, en kilogramos por cm. ²	A los 7 días.. 8	20
	A los 28 días.. 15	22 á 26,30

Rusia. Ingenieros militares.

La sección transversal de los ejemplares sometidos á ruptura por tracción tiene 16 cm.² En el cemento puro, después de un día al aire y siete en el agua, $R = 25$ kilogramos por cm.² La carga inicial ha de ser de 15 kilogramos por cm.², y los aumentos se hacen por fracciones de 1,5 kilogramos por cm.², hasta llegar á 22 kilogramos por cm.² A partir de este límite, hasta la fractura, los aumentos de carga son de 0,5 kilogramos por cm.²

La arena normal empleada en la confección de los ejemplares de mortero de cemento, ha debido pasar por tres tamices, uno de 64 mallas, otro de 144 y el tercero de 225 mallas por cm.² Se eliminan los residuos del primero y lo que pasa á través del último. El mortero consta de 1 cemento + 3 arena, en peso. Después de un día al aire y veintisiete en el agua, ha de ser $R = 10$ kilogramos por cm.², como mínimo.

Rumanía. Ingenieros militares.

Los ejemplares se exponen al aire, durante todo el tiempo, ó un día al aire y los restantes sumergidos en agua, ó bien constantemente en contacto con la tierra, como han de estar en las obras de fortificación.

El valor del coeficiente de fractura por tracción \bar{R} , en kilogramos por cm.² debe tener los valores siguientes:

		Al aire.	En el agua.	En tierra.
Cemento puro.	A los 7 días..	19	16	22
	A los 28 días.	27	26	30
Mortero de 1 cemento + 3 arena.	A los 7 días..	3	2	3,50
	A los 28 días.	4	4	6,30
Mortero de 1 cemento + 2 arena.	A los 7 días..	7	4	6
	A los 28 días.	5	6	11

Los números referentes á los morteros, son bastante menores que los correspondientes de otros países.

157. **Ensayo normal.** — Se da el nombre de *ensayo normal* al que tiene lugar en un mortero de 1 cemento + 3 arena, en peso, empleando arena normal y el agua en cantidad conveniente, exponiendo el ejemplar al aire durante veinticuatro horas y sumergiéndolo en agua por espacio de veintisiete días, efectuando el ensayo inmediatamente después.

158. **Coefficientes de fractura.** — A continuación figuran los principales datos relativos á cementos de fraguado lento (Portland), y de fraguado rápido

(cementos naturales de Vassy y de Zumaya), y á otros materiales hidráulicos. Experiencias del ingeniero de caminos D. Fernando García Arenal, en Gijón:

	COEFICIENTES DE FRACTURA POR EXTENSIÓN en kilogramos por cm. ² , siendo el tiempo de inmersión de					
	7 días.	28 días.	90 días.	1 año.	2 años.	3 años.
PORTLAND						
Cemento puro. ...	35	35 á 41	36 á 45	50	50	48 á 50
Mortero de 1 de cemento por 1 de arena, en peso. .	19	25	26	35	35	36
Id. de 1 de cemento por 3 de arena, en peso.	13 á 14	14 á 15	17 á 18	17	15	17
ZUMAYA						
Cemento puro.	8 á 17	8 á 23	17 á 20	21 á 22	24 á 26	25 á 28
Mortero de 1 de cemento por 1 de arena, en peso. .	4 á 5	8 á 14	10 á 17	18 á 20	26 á 27	25 á 31
Id. de 1 de cemento por 3 de arena, en peso.	2 á 4	4 á 5	6 á 9	10 á 11	10 á 12	10 á 11

Experiencias realizadas por la Asociación de Ingenieros alemanes, de Berlín, con morteros de cemento Portland:

COMPOSICIÓN del mortero.	Endurecimiento.	COEFICIENTE DE FRACTURA por tracción, en kilogs. por cm. ² después de							Observaciones.
		1 semana.	4 semanas.	13 semanas.	26 semanas.	1 año.	1,5 años.	2 años.	
1 cemento + 3 arena. Ensayo normal, 22,7 kilogramos por cm. ²	Al aire..	16,3	20,5	28,3	37,2	43,9	46,8	51,9	Experiencia hecha durante la primavera
	En agua.	14,3	22,7	37,3	38,8	44,3	»	»	
1 cemento + 3 arena. Ensayo normal, 20,7 kilogramos por cm. ²	Al aire..	14,3	22,7	37,3	38,8	44,3	»	»	A-2º Reaumur
	En agua.	14,5	20,7	24,5	27,1	31,6	»	»	

La masa de mortero, al fabricar los ejemplares de ensayo, fué sometida, en la gradilla, á 150 golpes de una maza de 2 kilogramos, del aparato Böhme.

Las pruebas de fractura por compresión de los cementos son más raras. Se admite que el coeficiente de fractura por compresión es próximamente ocho veces mayor que el relativo á la extensión, y que la resistencia definitiva á la compresión la adquieren los cementos mucho más pronto. Se puede contar, pues, con los valores siguientes, relativos al cm.²

	Coeficiente de fractura por compresión.
Zumaya... { Puro.....	100 á 200
{ 1 de cemento y 1 de arena.....	70 á 150
{ 1 de cemento por 3 de arena.....	50 á 100
Portland... { Puro.....	200 á 400
{ 1 de cemento por 1 de arena.....	150 á 300
{ 1 de cemento por 3 de arena.....	100 á 200

M. Perrodil ha hecho experiencias de compresión con cemento de Boulogne-sur-Mer (fábricas Demarles y Louquét). A este efecto fabricó pequeños cubos de cemento puro, dejando endurecer unos al aire y sumergiendo otros en agua.

He aquí los resultados obtenidos:

EDAD DE LOS MORTEROS	COEFICIENTE DE FRACTURA por compresión \bar{N} en kilogramos por cm. ²	
	EJEMPLARES EXPUESTOS	
	Al aire.	En el agua.
1 día.....	33,6	43,6
3 días.....	84,0	119,2
7 ».....	104,9	141,6
13 ».....	122,8	163,4
1 mes.....	103,0	234,2
2 meses.....	123,8	293,4
3 ».....	126,6	231,8
6 ».....	171,6	329,6

A continuación damos los resultados de experiencias relativas á la resistencia del cemento de Vassy (cemento natural de fraguado rápido).

AUTORES	RESISTENCIA	Coeficiente de fractura en kilogramos por cm. ²	
		Tracción.	Compresión.
	MORTERO DE 1 VOLUMEN DE CEMENTO POR 1 DE ARENA		
Ingenieros franceses de puentes y calzadas, 1878.	A las 6 horas.....	3,6	»
	» 24 ».....	5,5	»
	A los 8 días.....	9,0	»
	» 15 ».....	10,0	»
	EL MISMO MORTERO		
Claudel.....	A los 6 meses, endurecido al aire.....	9,62	»
	A 1 mes, en agua del mar..	11,30	»
	Al año en agua común.....	15,10	»
Gariel y Garnier.	Cemento puro.....	»	121 á 197
	Id. íd. promedio....	»	150
Couche.....	Mortero de 1 volumen de cemento por 1 de arena....	»	136
	CEMENTO PURO		
Réstal.....	A los 3 días de inmersión...	5	»
	A 1 mes.....	7	»
	» 6 ».....	14	»
	» 12 ».....	18	»
	» 18 ».....	20	»

El cemento Vassy es muy semejante al Zumaya por sus propiedades.

159. Hay que advertir que los cementos, principalmente el Zumaya, presentan grandes irregularidades en los resultados de fractura, ya por la heterogeneidad de los bancos de calizas naturales de que se extrae, ya también por la imperfección y poco esmero de la fabricación.

Los datos anteriores se refieren á experiencias practicadas con buenos cementos, amasados con cuidado, empleando buena arena y sumergiendo los ejemplares en agua tranquila y renovada con frecuencia. Cuando no concurren estas favorables circunstancias, la resistencia puede llegar á reducir-

se á la mitad, y será conveniente tenerlo así presente en las obras, en las cuales no se puede proceder con la escrupulosidad que se observa en los ensayos que tienen por objeto determinar la calidad de un cemento por comparación.

160. Morteros de trass. — En algunos países, principalmente en Alemania, emplean para la confección de hormigones, sobre todo en los destinados á obras de fortificación, morteros en que el cemento Portland está sustituido por una mezcla de *trass* y de cal hidráulica, (*) que es más económica.

He aquí los resultados obtenidos por la Asociación de ingenieros alemanes, en el ensayo de morteros fabricados con una parte, en peso, de *trass* + 1 de cal hidráulica + 1 de arena (ó sea, medido en volúmenes, 3 *trass* + 4 cal + 2 arena):

		Coefficiente de fractura \bar{R} por tracción en kilogramos por cm. ²
Ejemplares conservados en el agua, y ensayados después de.....	1 semana...	1,80
	4 » ...	10,70
	13 » ...	14,80
Id. expuestos al aire, después de 24 horas de inmersión en agua, y ensayados después de.....	26 » ...	19,30
	1 semana...	1,60
	4 » ...	6,50
Id. expuestos al aire después de 1 semana de inmersión en agua, y ensayados después de.....	13 » ...	12,40
	26 » ...	13,90
	1 semana...	2,00
	4 » ...	7,10
	13 » ...	12,40
	26 » ...	13,90

Los ejemplares sumergidos 28 días en agua, dieron un coeficiente de fractura por compresión $\bar{R}' = 74,40$ kilogramos por cm.²; y en los expuestos 28 días al aire, después de 24 horas de inmersión en el agua, $\bar{R}'' = 81,60$ kilogramos por cm.²

(*) Sabido es que la traquita conocida con el nombre de *trass de Holanda*, es una puzolana natural que se explota en las montañas volcánicas inmediatas al Rin, desde Maguncia á Colonia. También existe en Francia, no lejos de Aurillac (Cantal). Se emplea mucho en Alemania, Holanda, Bélgica y Francia.

161. Adherencia de los cementos y morteros. — La adherencia de los morteros y cementos á las piedras ó ladrillos, depende de la calidad de aquéllos, lisura mayor ó menor de las superficies de adherencia, cantidad de agua empleada en los materiales, limpieza de éstos y otras muchas circunstancias.

La adherencia es, por tanto, cantidad muy variable, pudiendo suceder que tenga escasísimo valor ó se anule por completo (núm. 168). Por esta razón no deben tomarse como datos definitivos y admisibles en absoluto, sino simplemente como indicaciones, los resultados de experiencias que á continuación se expresan:

AUTORES	MATERIALES	Edad del mortero.	Fuerza que destruye la adherencia en kilogs. por cm. ² de superficie adherente.
Boistard..	Calizas unidas con mortero de cal grasa.....	17 días.	0,7 á 1,8
Morin....	Calizas tiernas y mortero de cal hidráulica.....	48 días.	0,9 á 1,2
		83 días.	1,8
Rondelet.	Caliza muy dura. } Con mortero de cal grasa y arena fina.....	6 meses.	1,06 á 1,17
		íd.	1,20 á 1,80
Morin....	Ladrillos con mortero de cal hidráulica.....	íd.	2,04
		48 días.	1 á 1,40
Rondelet..	Ladrillos con mortero de cal grasa y arena fina.....	6 meses.	2,30
Rondelet.	Caliza muy dura y yeso.....	íd.	2,07
		íd.	2,12 á 2,40
Rondelet.	Caliza de varias clases y yeso.....	íd.	3,16
		íd.	3,36
Rondelet.	Ladrillos y yeso.....	íd.	4 á 10
		íd.	
	Ladrillos y cemento.....	íd.	

La adherencia del yeso es mayor que la del mortero ordinario ó hidráulico en los primeros años; pero después disminuye, mientras que la del mortero aumenta.

MAMPOSTERÍAS

162. Si hay heterogeneidad en los materiales elementales de una mampostería, tales como piedras, ladrillos y morteros, en punto á resistencia, con mayor razón la habrá en las mamposterías mismas, si se atiende, además, á la influencia considerable de los detalles de ejecución, relación entre las cantidades de materiales empleados, antigüedad de la obra, etc., etc. Así, pues, los coeficientes de fractura y de trabajo son difíciles de determinar y exigen se les conceda atención y estudio mayores que los que ordinariamente se les dedica.

Generalmente los tratados de construcción se limitan á consignar como datos los coeficientes de trabajo máximos para las distintas clases de mamposterías, deducidos de la observación de obras ejecutadas y de gran resistencia; pero estos valores, que solamente pueden tomarse á título de término medio, no tienen exactitud alguna, pues no se consigna al mismo tiempo la naturaleza de las piedras, ladrillos, morteros y cementos, la edad de la mampostería y otras mil causas que hacen variar entre límites tan distantes la resistencia de la obra. Al aceptar dichos valores se obtendrá solidez desmedida unas veces y se correrá el peligro de comprometer la seguridad de la construcción en otras.

Sin perjuicio de consignar al final los datos á que acabamos de hacer referencia, daremos algunas reglas que puedan servir de guía al constructor en tan interesante asunto.

163. **Compresión.** — 1.º Mampostería en seco. Si la mampostería está hecha con mampuestos irregulares, que tienen pequeña área de contacto en los lechos, puede producirse su aplastamiento con cargas muy pequeñas. Iniciado el aplastamiento puede suceder una de las dos siguientes cosas: se hace mayor el área de contacto de los mampuestos sin grandes asientos, y el aplastamiento iniciado cesa, ó bien el asiento y dislocación consiguiente del macizo ocasionan la ruina de la obra.

De todos modos, no se puede contar con esta clase de mampostería para muros sometidos á grandes presiones.

Si los mampuestos están regularmente labrados, de modo que la superficie de contacto en los lechos tenga valor apreciable, la mampostería podrá alcanzar tanta resistencia como si estuviese fabricada con téndeles de mortero. Veamos el modo de hacer esta comparación. Sean:

- s el área total ab (fig. 17, lám. 3.ª), de la superficie de lecho de un mampuesto, sillar ó sillarejo, de la mampostería en seco.
- s' el área efectiva de contacto del lecho de ab con los mampuestos de la hilada inferior.
- r' coeficiente de fractura, por compresión, de la piedra.
- r'' coeficiente de fractura por compresión, del mortero que pudiera emplearse en la mampostería que va á compararse con la de mampuestos en seco.

De emplear mortero en los lechos, cada mampuesto asienta sobre toda su base s ; de modo que la fuerza necesaria para el aplastamiento del mortero correspondiente á esta base (que ocasionaría la destrucción de la obra), será $s r''$.

Si no se interpone mortero, la destrucción del mampuesto por aplastamiento será debida á una fuerza $s' r'$.

Si una y otra mampostería han de ser igualmente resistentes, es preciso que $s' r' = s r''$, ó que

$$\frac{s}{s'} = \frac{r'}{r''} \quad \rightarrow \quad s' = s \times \frac{r''}{r'}$$

igualdad que marca la superficie efectiva de contacto que han de tener los lechos de cada mampuesto con los de la hilada inferior, para que la mampostería en seco sea tan resistente como otra ejecutada con mortero (*).

Ejemplo: $r' = 280$ kilogramos por cm.^2 y $r'' = 14$ kilogramos por cm.^2 ; será $s' = \frac{1}{20} s$.

Cuando se trata de sillares perfectamente labrados, la mampostería en seco alcanza resistencias muy grandes, superiores á la de la fábrica del mismo material tomado con mortero, pero inferiores á la resistencia de la piedra. Esto último se debe á que por bien labrados que estén los lechos, la superficie efectiva de contacto es menor que la base del sillar.

Esta clase de fábrica es susceptible de grandes resistencias, y así se empleaba en obras de la antigüedad, algunas de las cuales subsisten todavía. No es práctico, hoy, su empleo, por el coste de la labra esmeradísima de los lechos.

(*) En todo esto se supone que los mampuestos tengan suficiente grueso ó altura, para no romperse por flexión, cuando se colocan en seco.

164. 2.º Mampostería con mortero. La mampostería con mortero, de cualquiera clase que sea, se considerará rota por aplastamiento cuando uno de sus elementos, piedra, ladrillo ó mortero, se rompa por efecto de la compresión. Generalmente es el mortero el que primero perezce, y por él debe regularse el coeficiente de fractura de toda la obra; pero puede suceder otra cosa, como en la fábrica de ladrillo tomado con buen cemento, en la que el ladrillo es el que se aplasta primero.

Según esto, el coeficiente de fractura por compresión de una mampostería es igual al coeficiente de fractura del material menos resistente de todos los que entran en su fabricación, en el momento en que las fuerzas compresoras ejercen su acción (*).

Para coeficiente de trabajo se tomará $\frac{1}{10}$ del de fractura; empleando fracción tan pequeña para tener en cuenta las circunstancias desfavorables á la resistencia que pueden ocurrir, dependientes de la mano de obra ó de otras causas.

Como ya hemos dicho, en la casi totalidad de los casos el mortero se destruye primeramente; de modo que su coeficiente de fractura es el de la mampostería. Pero ¿tiene igual coeficiente de fractura el mortero comprimido aisladamente en los cubos ó prismas de ensayo, ó interpuesto en capa delgada entre dos piedras ó ladrillos como se halla en las mamposterías? Las experiencias de Mr. Tourtay demuestran que en este segundo caso puede elevarse considerablemente el coeficiente de fractura de los morteros.

Mr. Tourtay sometió al aplastamiento pequeños sillares de calizas dura, media y tierna, unidos con morteros de cemento de fraguado lento, de cal hidráulica, y con delgadas tortadas de cemento puro de fraguado lento. De sus experiencias dedujo:

1.º El aplastamiento del mortero tiene lugar con fuerzas de compresión muy superiores á la resistencia intrínseca del mortero, si bien inferiores á la resistencia de la piedra.

2.º Á igualdad de las demás circunstancias, la presión que produce la desagregación del mortero está en razón inversa del espesor ó grueso del tendel; de modo que interesa altamente reducir los gruesos de las capas de mortero cuanto sea compatible con la buena mano de obra.

(**) Los morteros resisten de modo diverso, según su edad. Por esta razón conviene no cargar las mamposterías frescas; afortunadamente, si bien es cierto que el endurecimiento de los morteros ordinarios es lento, adquieren pronto la resistencia máxima á la compresión (núm. 148). En cuanto á los morteros hidráulicos y cementos, se encuentran todavía en mejores condiciones.

3.º Los sillares colocados en seco (sin mortero) dan resistencias notablemente inferiores á la de la piedra, pero superiores á la fábrica que resultaría uniendo dichos sillares con mortero *en las condiciones de las experiencias*. (La superficie efectiva de contacto de los sillares, en los lechos y sobrelechos, era de 0,8 de la superficie total de las bases, lo cual indica una cuidadosa labra).

4.º Los sillares unidos por una delgada capa de cemento (*) se portaban como monolitos, y daban resistencias muy superiores á la fábrica con mortero.

165. Teniendo en cuenta estas circunstancias, he aquí cómo pueden formarse los coeficientes de trabajo por compresión de las mamposterías en función del coeficiente de fractura \bar{R}' de los morteros. El valor de \bar{R}' es el intrínseco, obtenido rompiendo directamente por compresión cubos de mortero, y se refiere á la edad ó tiempo de fabricación que tenga en el momento en que las mamposterías sean cargadas.

(a) *Mampostería mal hecha*. Ya sea de sillarejos, mampostería concertada ú ordinaria ó de ladrillo, si los tendeles son de desigual espesor ó no llenan bien los lechos, el mortero está desigualmente comprimido, y la diferencia de asientos de uno á otro punto puede producir grietas ó dislocaciones; el coeficiente de trabajo R' se hará,

$$R' = \frac{1}{15} \text{ á } \frac{1}{20} \text{ de } \bar{R}'.$$

(b) *Mamposterías regularmente hechas, con capa gruesa de mortero*. Hormigón, mampostería ordinaria careada ó concertada, mampostería con hiladas horizontales, pero con tendeles gruesos.

$$R' = \frac{1}{5} \text{ á } \frac{1}{10} \text{ de } \bar{R}'$$

(c) *Fábrica aparejada por hiladas, con tendeles delgados*. Sillares, sillarejos, fábrica de ladrillo bien moldeado y regular, etc.

$$R' = \frac{1}{5} \text{ á } \frac{1}{6} \text{ de } \bar{R}'$$

(*) Esta fábrica se hacía lavando bien los lechos y sobrelechos de los sillares, extendiendo sobre ellos delgada capa de cemento, asentándolos sobre la hilada inferior, moviéndolos y resbalándolos para reducir aún más el espesor de la capa de cemento interpuesto y expulsar las burbujas de aire. La resistencia del conjunto resultaba cuádruple, cuando menos, de la intrínseca del cemento interpuesto.

(d) *Sillería bien labrada, tomada con fina capa de cemento.*

$$R' = \frac{1}{2} \text{ á } \frac{1}{4} \text{ de } R''$$

En todos estos casos se supone que la piedra ó ladrillo es más resistente que el mortero ó cemento. En caso contrario el valor de R' se obtendrá tomando $\frac{1}{10}$ del coeficiente de fractura del ladrillo ó piedra tierna empleados.

166. Cuando no haya dato alguno relativo á la resistencia intrínseca de las piedras, ladrillos y morteros que entran en la composición de las mamposterías, se podrán aceptar para éstas las cifras siguientes, que aparecen en todos los tratados de construcción:

CLASE DE OBRA	Peso del metro cúbico en kilogramos.	Coficiente de trabajo por compresión en kilogramos por cm. ²
Sillería.....	2400 á 2700	30 á 40
Sillarejo.....	2100 á 2250	14 á 20
Hormigón fabricado con mortero ordinario.....	2300 á 2400	5
Id. íd. con cemento.....	2300 á 2400	10 á 14
Fábrica de ladrillo con mortero ordinario.....	1700 á 1800	6 (*)
Id. íd. con cemento.....	1700 á 1800	10

167. *Coficientes de trabajo por compresión en obras reputadas de atrevidas.*

	R' en kilogramos por cm. ²
Pilares de la cúpula de los inválidos (París).....	14,76
Idem de San Pedro (Roma).....	16,00

(*) Como ejemplo notable de fábrica de ladrillo se puede citar la chimenea de Townsend, en Port-Dundas, cerca de Glasgow (Escocia), de 133 metros de altura, cuyos ladrillos de la base trabajan á 14,5 kilogramos por cm.²

	R' en kilogramos por cm. ²
Idem de San Pablo (Londres).....	19,00
Columnas de San Pablo (extramuros de Roma).....	19,76
Pilares de la cúpula de Santa Genoveva.....	29,11
Idem de la torre de la iglesia de Saint-Mery.....	29,11
Columnas de la iglesia de Todos los Santos (Angers).	44,00

168. Extensión.— En términos generales, la resistencia de las piedras, ladrillos y morteros á la extensión, es $\frac{1}{10}$ de la correspondiente á la compresión; de modo que parece como que podría obtenerse el coeficiente de fractura y de trabajo por extensión de las mamposterías tomando $\frac{1}{10}$ de los valores correspondientes á la compresión; pero no es así por las razones que á continuación se exponen:

La fractura por extensión no solamente puede tener lugar por rotura de la piedra ó del mortero, sino también por falta de adherencia de ambos. Ahora bien; esta adherencia puede faltar ó ser muy debil:

1.º Por no haber mojado bien las piedras ó ladrillos al ponerlos en obra, en cuyo caso absorben el agua que el mortero necesitaría para su solidificación y para su adherencia á los otros materiales.

2.º Por emplear las piedras cuando están cubiertas de una delgada capa de barro ó polvo arcilloso que impide el contacto del mortero.

3.º Por heladas fuertes en las mamposterías frescas.

4.º En general, por cambios bruscos ó intensos de temperatura, productores de dilataciones ó contracciones diferentes en los morteros y en las piedras ó ladrillos, que causan su desunión.

La falta de adherencia se nota más en las mamposterías aparejadas por hiladas. Esto se puede comprobar observando la facilidad con que se verifican las demoliciones en esta clase de obras; un golpe de pico ó alcotana dado en un tendel hace levantar una gran parte de la hilada. En las mamposterías ordinarias, los mampuestos están más envueltos de mortero y las capas de éste son más irregulares, de modo que la adherencia es mayor. Los hormigones están en mejores condiciones todavía.

De todo lo expuesto deducimos que debe considerarse como nula la resistencia á la extensión de las mamposterías aparejadas por hiladas regulares,

y como débil la de las mamposterías ordinarias con mortero ordinario.

Pero en cambio, las mamposterías y hormigones fabricados con mortero de cemento, y mejor con cemento puro, cuando están bien hechas y se evita cuidadosamente toda grieta, pueden resistir perfectamente esfuerzos de extensión.

Se debe tomar como coeficiente de trabajo por extensión de la mampostería, $\frac{1}{20}$ del coeficiente de fractura por tracción del cemento ó mortero de cemento empleado.

Lo mismo puede decirse de la fábrica con yeso muy bueno, cuya adherencia al ladrillo es de consideración. Solamente admitiendo el trabajo por extensión es como puede explicarse la resistencia que ofrecen delgadas bovedillas de rasilla tomada con yeso, y atrevidas bóvedas de hormigón de cemento, de débiles espesores.

El hormigón de cemento, tan resistente á la tracción, puede prestar grandes servicios á los constructores en muros y bóvedas, admitiendo, en el cálculo de sus dimensiones, el trabajo por extensión que no se tomaba en cuenta en los muros y bóvedas aparejados regularmente, construídos con mortero ordinario.

169. Esfuerzo cortante. — Si la fuerza A es paralela á los lechos de las hiladas, en mamposterías aparejadas de modo regular (fig. 18, lám. 3.^a), no hay más fuerza resistente que la adherencia del mortero del tendel ab á las piedras ó ladrillos, ó la cohesión de este mortero, cantidades ambas de escaso valor, á no ser que se trate de cementos, de modo que es prudente no contar con ellas.

Cuando la fuerza (B , fig. 18, lám. 3.^a), es oblícua á la hilada, se descompone en dos: una T , tangencial, de esfuerzo cortante ó deslizamiento longitudinal, y otra N , normal, que produce una fuerza pasiva de rozamiento igual á Nf , siendo f el coeficiente de rozamiento de resbalamiento de piedra ó ladrillo sobre mortero.

El equilibrio exige que $Nf > T$, ó bien, sustituyendo N y T por sus valores $B \cos \alpha$, $B \sin \alpha$,

$$f > tg \alpha,$$

$$\text{ó } \alpha < \text{ángulo de } tg = f.$$

El ángulo de tangente igual á f es el ángulo de rozamiento.

Es decir, que el equilibrio y resistencia existirán siempre que la fuerza B

forme con la normal al lecho un ángulo menor que el de rozamiento (*).

170. En la mampostería ordinaria, la resistencia al esfuerzo cortante, según un plano cualquiera CD (fig. 19, lám. 3.^a), se debe no solamente al mortero, sino también á la piedra. La resistencia de la piedra al esfuerzo cortante es un intermedio de las resistencias á la tracción y á la compresión, acercándose más á esta última, de modo que alcanza valor muy considerable; pero debe tenerse en cuenta que el esfuerzo cortante se traduce en compresiones para el mortero interpuesto. Se tomará, pues, como coeficiente de fractura, el de la piedra por esfuerzo cortante, ó el del mortero por compresión, eligiendo el menor de estos valores.

El hormigón ordinario, y aun mejor el fabricado con cemento, se encuentran en condiciones más favorables para la resistencia.

Es de observar que rara vez se hallan las mamposterías expuestas al esfuerzo cortante, y que éste, en general, alcanza escaso valor; de modo que las mamposterías ordinarias y hormigones tienen resistencia sobrada.

171. Dilatación de las mamposterías. — El coeficiente de dilatación de las mamposterías, es un término medio de los correspondientes á los materiales con que se fabrican.

La desigual dilatación del mortero y de la piedra, del ladrillo y del cemento, puede producir dislocaciones en los macizos de mampostería cuando las temperaturas sean muy elevadas, como sucede en las bóvedas de los hornos, y en este caso conviene emplear materiales de coeficientes de dilatación próximamente iguales. En las construcciones ordinarias no hay este peligro.

Más de temer son las dilataciones de las piezas metálicas empotradas en macizos de mampostería cuando pueden adquirir temperaturas elevadas. En general esto no ocurre (salvo los casos de incendio), porque los metales en contacto con mamposterías están al abrigo de las influencias térmicas.

172. Coeficientes de dilatación.

M E T A L E S	
	Dilatación por metro de longitud y 1° centigrado.
Hierro	0,0000120
Alambre de hierro	0,0000120
Fundición	0,0000110
Acero	0,0000120
Bronce	0,0000181

(*) Véase la tabla de ángulos y coeficientes de rozamiento, del núm. 23.

cia, exponemos á continuación los resultados de experiencias relativos á pesos, elasticidad y fractura de las principales especies maderables.

EXPERIENCIAS DE MM. CHEVANDIER Y WERTHEIM

5. MATERIALES DE ORIGEN VEGETAL

MADERAS

174. De las experiencias numerosas practicadas por Chevandier, Wertheim, Rondelet, Hodgkinson, Renniè y otros, se deduce:

- 1.º La densidad de las maderas varía poco con la edad.
- 2.º La desecación aumenta considerablemente la elasticidad, y en muchas maderas la resistencia á la extensión y compresión. En la encina se nota mucho esta diferencia; en el pino es menos sensible.
- 3.º La edad del árbol, exposición, suelo, parte del árbol de donde se sacan los ejemplares de prueba, influyen considerablemente en la densidad, elasticidad y resistencia.
- 4.º El coeficiente de elasticidad no guarda relación con el coeficiente de fractura.
- 5.º La época de la corta y espesor de las capas anuales no ejercen influencia en el coeficiente de elasticidad.
- 6.º En las maderas no hay límite de elasticidad propiamente dicho, pues se producen, con pequeñas fuerzas, deformaciones permanentes. El alargamiento elástico máximo dado por los Sres. Chevandier y Wertheim, es de 0,00005 por metro (valor de *i'*).

175. Como puede verse, la madera es un material de los más heterogéneos, aun en árboles de la misma especie. Del pino de Flandes al de las Landas, ó al de Soria ó Cuenca, se encuentran diferencias notabilísimas en las propiedades específicas; y el mismo árbol dará ejemplares de ensayo de densidad, resistencia y elasticidad diferentes, según que se saquen de la albura ó duramen, del raigal, cogollo ó ramas.

Así, pues, es necesario no aceptar los datos contenidos en los manuales y tratados de construcción, relativos muchos de ellos á maderas del extranjero, sino como meras indicaciones, ejecutando directamente, en cuanto sea posible, las experiencias con el material que ha de emplearse. En esta inteligen-

ESPECIES	Densidad. — Peso del m. ³ en kilogramos.	LÍMITE DE ELASTICIDAD en kilogramos por mm. ²			Coeficiente de elasticidad — Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de fractura por extensión. — Kilogramos por mm. ²
		Maderas verdes.	MADERAS SECADAS			
			En sitios cerrados.	Al aire y sol.		
Acacia.....	717	»	3,17	3,18	1281,9	7,93
Pinabete.....	493	»	1,59	2,15	1113,2	4,18
Roble de fruto sentado.....	808	»	1,94	2,35	977,8	6,49
Roble de fruto pedunculado..	872	»	»	»	921,8	5,66
Haya.....	823	»	2,02	2,32	980,4	3,57
Pino silvestre....	559	»	1,39	1,63	564,1	2,48
Olmo.....	723	0,98	»	1,84	1165,3	6,99
Fresno.....	697	1,72	»	2,03	1121,4	6,78
Alamo.....	477	»	1,20	1,48	517,2	1,97

DATOS DE MR. MAISTRE

	Coeficiente de fractura por extensión en kilogramos por mm. ²
Roble fuerte.....	8,00
» débil.....	6,00
Haya.....	8,00
Teca.....	11,00
Peral.....	6,90
Caoba.....	5,60
Boj de los Vosgos.....	14,00

176. Mr. Mikolaschek dedujo de sus experiencias que para el esfuerzo de extensión:

1.º El límite de elasticidad y el coeficiente de fractura en ejemplares sacados del mismo árbol, son mayores en la parte inferior del tronco, continuando por orden decreciente la parte central y las ramas.

2.º Para el coeficiente de elasticidad, el orden de mayor á menor es:

Parte central
» inferior
Ramas.

177. Para la compresión, el límite de elasticidad y el coeficiente de fractura tienen los valores siguientes:

	COMPRESIÓN	
	Límite de elasticidad en kilogramos por mm. ²	Coefficiente de fractura en kilogramos por mm. ²
Teca.....	»	8 á 9
Encina.....	2,40	3,80 á 4,70
Pino.....	2,00	2,6 á 4
Olmo.....	1,80	3 á 4
Haya.....	2,50	4 á 5
Pino de Soria.....	»	2,6 á 3

El coeficiente de elasticidad y el de fractura por compresión, según Mikolaschek, son mayores en la parte inferior del tronco que en la parte media.

El límite de elasticidad es mayor en las ramas que en la parte media del tronco, y en ésta mayor que en la parte inferior.

178. El coeficiente de trabajo por compresión y por extensión se forma tomando $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{10}$ de los coeficientes de fractura correspondientes.

Queda á juicio del ingeniero aceptar la fracción que convenga á cada caso, según que la madera sea más ó menos sana, limpia ó con nudos, expuesta á la intemperie ó colocada á cubierto, etc.

Cuando no se tengan datos relativos al coeficiente de fractura, se tomarán para coeficientes de trabajo por extensión y compresión los valores siguientes:

	Kilogramos por cm. ²
Obras ligeras ó maderas elegidas.....	80
Obras ordinarias.....	60
Obras de gran solidez ó maderas medianas.....	40

179. Para el desgarramiento longitudinal hemos encontrado por experiencias directas los valores siguientes que se refieren á ejemplares sanos, bien secos y exentos de nudos:

ESPECIES	Coefficiente de fractura por desgarramiento en kilogramos por cm. ²
Acacia.....	90
Encina sana.....	116
Fresno.....	112
Haya.....	93
Nogal.....	90
Olmo.....	73
Roble.....	70
Pino.....	40 á 60

Se tomará para coeficiente de trabajo por desgarramiento $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{10}$ del de fractura.

TABLA DE COEFICIENTES DE ALGUNAS MADERAS
Y OTRAS MATERIAS ORGÁNICAS

MATERIALES	COEFICIENTES DE FRACTURA		Coeficiente de elasticidad longitudinal <i>E</i> Kilogramos por mm. ²
	Por extensión <i>K'</i> en kilogramos por mm. ²	Por compresión <i>K''</i> en kilogramos por mm. ²	
Bambú (<i>Bambusa arundinacea</i>).....	4,4	»	»
Ballena.....	5,4	»	»
Cedro del Líbano.....	8	4,1	300
Castaño.....	7 á 9,2	»	800
Sicomoro.....	9,2	»	700
Teca india.....	11	8,4	1700
Ebano.....	»	13,4	»
Cuero de buey.....	3	»	17
Piel de buey, en bruto.....	4,4	»	»
Seda (hilo).....	36,6	»	900
Hielo á — 5° C (*)......	0,1 á 0,17	0,21	250

CUERDAS

180. La resistencia de las cuerdas depende de la calidad del material, de su grado de sequedad ó humedad, de la clase de colchado ó torcido, fuerte ó flojo, del diámetro de la cuerda, del alquitranado ó embreado, etc.

Por el colchado ó torcido las fibras sufren una torsión que se traduce en extensiones; á mayor colchado corresponde mayor tensión preliminar.

A medida que el diámetro aumenta, el torcido es mayor; de modo que la cuerda resistirá menor carga por unidad superficial de sección.

Según Coulomb, al embrear una cuerda se la hace perder de $\frac{1}{3}$ á $\frac{1}{4}$ de resistencia, ó lo que es lo mismo, la resistencia de las cuerdas embreadas es $\frac{2}{3}$ á $\frac{3}{4}$ de la de las blancas de igual diámetro.

Según Duhamel, la resistencia de una cuerda mojada es $\frac{1}{2}$ á $\frac{1}{3}$ de la que tiene cuando está seca.

(*) A una temperatura próxima á la del punto de fusión, la resistencia se reduce en $\frac{1}{3}$ y el coeficiente de elasticidad no tiene más que la mitad del valor correspondiente á la temperatura — 5°.

Las cuerdas ordinarias están formadas de 3, 4 ó 6 cordones ó torones, torcidos alrededor de un cordón central rectilíneo llamado alma, unas veces, y otras torcidos sin alma central. También hay *cuerdas planas* formadas de varios cordones yustapuestos.

El alma, en las cuerdas que la tienen, no contribuye á la resistencia.

La sección transversal resistente á la tracción, de una cuerda, es la suma de las secciones transversales de los cordones elementales; pero suele tomarse como área resistente la del círculo circunscrito, que es mayor que la real.

Por esta razón, al formar el coeficiente de fractura, dividiendo la carga total de fractura por el área resistente, debiera añadirse si se ha tomado como valor del área la del círculo circunscrito, ó simplemente la de los torones; en el primer caso resulta para coeficiente de fractura un valor menor que el verdadero. A continuación consignamos datos relativos á cuerdas de distintas procedencias.

CABOS BLANCOS ELABORADOS EN LA FÁBRICA DE JARCÍAS
DEL ARSENAL DE CARTAGENA

PROCEDENCIA DE LOS CÁÑAMOS	CLASES	MENA (circunferencia) en mm.	CARGA de fractura en kilogramos.	Coeficiente de fractura en kilogramos por mm. ²
1 Granada.....	2. ^a y 3. ^a	58	2314	8,64
2 Orihuela.....	2. ^a	58	2314	8,64
3 Id.	1. ^a	58	2314	8,64
4 Id.	1. ^a	58	2498	9,32
5 Id.	1. ^a	58	2038	7,62
6 Granada.....	2. ^a y 3. ^a	58	2406	8,99
7 Orihuela.....	1. ^a	58	2038	7,62
8 Id.	2. ^a	58	2038	7,62
9 Id.	2. ^a	58	2590	9,67
10 Id.	2. ^a	58	2682	10,02
11 Granada.....	2. ^a y 3. ^a	58	2406	8,99
12 Id.	2. ^a y 3. ^a	58	2222	8,30
13 Calatayud.....	1. ^a	»	2070	7,73
14 Id.	1. ^a	»	1840	6,87
15 Id.	2. ^a	»	1978	7,38
16 Id.	2. ^a	»	1932	7,21
17 Id.	2. ^a	»	1840	6,87
18 Id.	3. ^a	»	1840	6,87
19 Id.	3. ^a	»	1932	7,21

El coeficiente de fractura se ha obtenido dividiendo la carga total de fractura por el área del círculo circunscrito á la sección trasversal.

Todos estos cabos estaban fabricados con tres cordones de 15 filásticas cada uno, á excepción de los cabos 2 á 5 y 7 á 10, que lo habían sido con tres cordones de 32 filásticas cada uno.

CÁÑAMOS EXTRANJEROS

AUTORES	CLASE DE CUERDAS	Coeficiente de fractura por extensión en kilogramos por mm. ²
	CÁÑAMO DE STRASBURGO	
	Cuerda de diámetro $d = 13$ mm.....	9,50
	» » $d = 25$ »	6,30
	» » $d = 33$ »	5,90
	» » $d = 40$ »	5,40
Noirfontaine. ...	» » $d = 50$ »	4,85
	* CÁÑAMO DE LORENA	
	Cuerda de diámetro $d = 14$ mm.....	7,10
	» » $d = 23$ »	5,90
	CÁÑAMO DE FLANDES	
Experiencias hechas en la Academia de Ingenieros del ejército.....	Amarra de 17,5 mm de diámetro, de colchado flojo, formada de 4 torones de 7 mm y un alma de igual diámetro.	
	Tomando como sección resistente... { Los 4 torones.	11,80
	{ Los 4 torones y el alma.....	9,50
	{ El área del círculo circunscrito.....	7,60
Reuleux.	Cuerdas de colchado flojo (tomando como sección resistente la suma de áreas de los torones, sin el alma).....	8 á 9
	Cuerdas de colchado fuerte.....	12 á 13

En los datos de Noirfontaine no se consigna cuál es la sección resistente; parece ser la del círculo circunscrito.

El coeficiente de elasticidad del cáñamo es $E = 20 \times 10^7$ por metro cuadrado, ó 200 por milímetro cuadrado; es decir, la centésima parte del valor de E para el hierro.

Examinando los resultados de experiencia de Noirfontaine, se observa que la resistencia disminuye á medida que el diámetro aumenta.

Esta influencia del diámetro es tenida en cuenta por la fórmula siguiente de la marina francesa, correspondiente á cuerdas embreadas,

$$P = (45 - 0,25 c) c^2,$$

siendo P la carga total de fractura de la cuerda en kilogramos, y c la circunferencia ó mena de la cuerda expresada en centímetros.

Aplicando esta fórmula á las cuerdas blancas, y teniendo en cuenta su mayor resistencia según Coulomb, sería:

$$P = \left(\frac{3}{2} \text{ á } \frac{4}{3} \right) (45 - 0,25 c) c^2$$

Para coeficiente de trabajo se toma de $\frac{1}{2}$ á $\frac{1}{5}$ del de fractura, según el estado de conservación de la cuerda, y según que las cargas hayan de obrar durante breve tiempo ó permanentemente.

En general, suponiendo cuerdas en buen estado, se toma para cargas permanentes un coeficiente de trabajo de 1 kilogramo por mm.² de círculo circunscrito; y para cargas accidentales, de 2 á 3 kilogramos.

Los alargamientos de las cuerdas nuevas son:

Para la carga de fractura..... $\frac{1}{6}$ de la longitud primitiva.

Para la mitad de esta carga.... $\frac{1}{10}$ » » »

El peso propio de las cuerdas, en kilogramos por metro lineal, se puede obtener por las fórmulas siguientes, debidas á Reuleux:

Cuerdas de colchado flojo..... $p = 0, \text{kgs.} 00071 d^2.$

Idem de colchado fuerte..... $p = 0, \text{kgs.} 00106 d^2.$

d es el diámetro de la circunferencia circunscrita, expresada en milímetros, y p el peso del metro de cuerda en kilogramos.

181. Relación de resistencias de cuerdas de varias materias.

Siendo la resistencia de una cuerda de cáñamo..... 1

la resistencia de cuerdas del mismo diámetro es:

Seda.....	5,3
Algodón.....	1,33
Ramio.....	1,33
Lino.....	0,88

Para las *correas*, se admite un coeficiente de trabajo de 0,2 kilogramos por mm.²

COLA, CLAVOS, TORNILLOS

182. Fuerza de adherencia de la cola. — De las experiencias que hemos practicado con objeto de determinar la fuerza de tracción capaz de separar dos pedazos de madera encolados, hemos deducido lo siguiente:

1.º La fuerza de adherencia de la cola es diferente, según que los trozos encolados lo hayan sido por testa ó paralelamente á las fibras.

2.º Para el pino (empleando cola clara, como la usan los carpinteros), el encolado por testa resiste mucho menos que el practicado según las fibras, sin duda porque en el primer caso absorbe la madera mayor cantidad de cola clara, no dejando en la junta la suficiente.

La cola espesa, por el contrario, da mayor adherencia á los pedazos de pino encolados por testa, y lo mismo sucede con el nogal y otras maderas.

3.º Cuando las piezas se unen yustaponiendo las fibras, es indiferente para la adherencia que las de las dos piezas sean paralelas ó se corten á ángulo recto.

4.º Las diferencias de presión ejercidas por los gatos de aprieto ó cárceles, en las piezas encoladas, parece que no tienen influencia en la fuerza adherente final.

A continuación se expresan los resultados obtenidos:

ESPECIES DE MADERA	MODO DE UNIÓN	Adherencia en kilogramos por cm. ² de superficie adherente.	OBSERVACIONES
Idem.....	Por testa.....	15	
Idem.....	Según fibras.....	30	} Á los 6 días, cola es- pesa.
Idem.....	Por testa.....	40	
Nogal.....	Según fibras.....	45	} Á los 7 días, cola es- pesa.
Idem.....	Por testa.....	102	

Los datos presentados por Mr. Karmasch (*Nouvelles Annales du genie civil*, 1875), difieren notablemente de los anteriores en cuanto al pino, como puede verse en la tabla siguiente:

MADERAS	FUERZA ADHERENTE EN KILOGRAMOS POR CM. ²	
	Encolados por testa.	Encolados por fibras.
Haya.....	155,55	78,83
Acebuche.....	126,50	77,16
Arce.....	87,66	63,00
Encina.....	128,33	55,16
Pino.....	110,50	24,16

183. Tornillos introducidos en madera. Fuerza necesaria para arrancarlos. — Los tornillos que hemos empleado en las experiencias, son de la forma representada en la fig. 20, lám. 3.^a; los filetes están en una superficie cilíndrica de diámetro d ; pero el núcleo es ligeramente cónico, siendo d' el diámetro medio. Llamaremos p al paso de la hélice, n al número de pasos y $l = n p$ á la longitud de la parte terrajada. Todas estas dimensiones serán expresadas en milímetros.

Para introducir los tornillos se empezó por hacer con barrena delgada el agujero necesario para que penetrase la guía ó extremo inferior. Los trozos

de madera empleada eran próximos al duramen, y los tornillos penetraban todos los filetes, de modo que la profundidad de hincada era l .

Los tornillos introducidos normalmente á las fibras de la madera salen limpios de viruta ó serrín, astillando el orificio, sobre todo en las maderas blandas y fibrosas como el pino, y produciendo crujidos precursores del arranque.

Los que se introducen paralelamente á las fibras salen sin ruido, con pequeños trozos de madera cortada llenando los huecos de los filetes, y dejan un agujero cilíndrico y liso en la madera, como si se hubiese abierto con barrena espiral.

DIMENSIONES DEL TORNILLO en milímetros.					MADERA	TORNILLO HINCADO					
d	d'	p	n	l		PARALELO Á LAS FIBRAS			NORMAL Á LAS FIBRAS		
						Fuerza de arranque.			Fuerza de arranque.		
			Minima	Máxim.		Media.	Minima	Máxim.	Media.		
7	5	3	10	30	Encina.....	650	875	730	»	»	»
					Roble.....	500	650	570	540	710	625
					Pino de Soria....	380	520	450	»	»	»
7	5	3	15	45	Pino de Cuenca..	420	560	475	»	»	»
					Pino de Soria....	300	450	410	435	510	426
					Pino de Cuenca..	480	520	500	»	»	»
9	6,5	3,5	10	35	Olmo.....	420	540	450	»	»	»
8	5,5	3,5	18	63	Pino de Soria....	600	890	750	590	800	694
					Pino de Cuenca..	790	910	825	»	»	»

Las fuerzas de arranque están expresadas en kilogramos.

Se puede tomar $\frac{1}{10}$ de los valores medios de esta tabla, como fuerzas que pueden resistir permanentemente los tornillos.

184. Clavos. — He aquí los resultados medios de las experiencias que hemos practicado:

ALFILERES (SECCIÓN CIRCULAR)

Longitud total del clavo en mm.	Longitud hincada en mm.	Diámetro del clavo en mm.	Especie de madera.	FUERZA EN KILOGRAMOS para arrancar el clavo introducido.	
				Paralelo á la fibra.	Normal á la fibra.
39	29	2,2	Pino.	20	»
46	35	2,4	Id.	30	58
57	42	2,8	Id.	35	68
69	56	3,4	Id.	70	134
81	65	4,2	Id.	111	220
39	25	2,2	Nogal.	61	124
69	54	3,4	Id.	142	211
81	60	4,2	Id.	391	640

Clavos, de sección cuadrada, de 6mm de lado, 84mm de longitud y 57mm de hincada normalmente á las fibras de un trozo de pino de Soria, necesitaron para arrancarse una fuerza de 250 kilogramos. Otros de 7mm de lado y 65mm de hincada en encina, según las fibras, se arrancaron con 1.000 kilogramos.

EXPERIENCIAS DE M. BEVAU

CLAVOS HINCADOS NORMALMENTE Á LAS FIBRAS, EN PINO DE NORUEGA

LONGITUD del clavo en milímetros.	NÚMERO de clavos en kilogramos.	LONGITUD de hincada en milímetros.	FUERZA NECESARIA para arrancarlo en kilogramos.
11,0	9900	10,0	11
13,2	6980	11,0	19
31,0	1200	12,5	30
35,0	820	12,5	36
50,0	300	37,5	163
62,5	160	25,0	95
62,5	160	37,5	166
62,5	160	50,0	270

III

EXTENSIÓN Y COMPRESIÓN SIMPLES;

ESFUERZO CORTANTE Y DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL

1. EXTENSIÓN
2. COMPRESIÓN
3. ESFUERZO CORTANTE Y DESGARRAMIENTO
LONGITUDINAL
4. APLICACIONES DE LOS PROBLEMAS DE EXTENSIÓN,
COMPRESIÓN Y ESFUERZO CORTANTE

EXTENSIÓN

185. Fórmulas.—Supondremos que la fuerza aislada, ó la resultante de la fuerza de extensión, pasa por el eje de figura del prisma; es decir, que se reparten de modo uniforme en toda su sección transversal dichas extensiones.

Sean:

P = fuerza de extensión.

ω = área de la sección recta del prisma.

L = longitud del prisma antes de la deformación.

l = alargamiento total producido por la fuerza P .

La fuerza de extensión á que se halla sometido el prisma por unidad superficial de sección recta, es $\frac{P}{\omega}$. La fuerza tractora por unidad superficial de sección recta que puede soportar el prisma es R , coeficiente de trabajo por extensión que, para los diversos materiales de construcción, tiene los valores consignados en el capítulo 2.º

El prisma gozará de resistencia conveniente si se verifica la ecuación,

$$\frac{P}{\omega} = R$$

ó $P = R \omega$ (1).

Cuanto á la rigidez, será medida por el valor de la deformación longitudinal l , que es, según hemos visto en el núm. 51,

$$l = \frac{P L}{E \omega} \quad (2).$$

186. Observaciones.—1.º Las fórmulas (1) y (2) se refieren tan sólo á las extensiones del primer período ó período elástico; de modo que R es menor

que el límite de elasticidad D . No olvidemos, en efecto, que la fórmula (2) se ha deducido de la igualdad $E = \frac{P}{\epsilon}$, exacta únicamente en el período elástico (núm. 25), y que para coeficiente de trabajo se toma siempre un valor que no produzca deformaciones permanentes, y menor, por tanto, que D .

2.^a Todas las cantidades que entran en estas fórmulas deben referirse á la misma especie de unidad.

Ejemplos:

P y E	ω	L y l
Kilogs. por metro cuadrado....	Metros cuadrados.....	Metros.
Kilogs. por centímetro cuadrado.	Centímetros cuadrados...	Centímetros.
Kilogs. por milímetro cuadrado.	Milímetros cuadrados....	Milímetros.
Toneladas por pulgada cuadrada	Pulgadas cuadradas.....	Pulgadas.

3.^a R es una fracción del coeficiente de fractura \bar{R} , y éste se ha obtenido experimentalmente por medio de cargas graduales, crecientes de 0 á \bar{R} . Lo mismo diremos de la proporcionalidad $E = \frac{P}{\epsilon}$, que supone fuerzas crecientes de 0 á D , variables como las ordenadas de una recta.

Las fórmulas (1) y (2) se refieren, pues, al caso de fuerzas ó cargas no aplicadas bruscamente, sino creciendo de modo gradual, más ó menos rápido, de 0 á P .

Entenderemos por carga brusca la que obra íntegra desde el primer instante.

187. **Problemas que resuelven las fórmulas.**—Tres son los problemas que resuelven las fórmulas (1) y (2):

1.º Conocido P y L , determinar ω por la fórmula (1) (es decir, la escuadría del prisma), y la deformación l por la fórmula (2). R y E son dados por las tablas de constantes específicas.

2.º Conocido el prisma, es decir, ω y L , determinar la fuerza de tracción P que es capaz de resistir (fórmula 1) y el alargamiento que sufrirá (fórmula 2).

3.º Conocidas la fuerza P y las dimensiones del prisma (L y ω), determinar el valor que le corresponde al coeficiente de trabajo, esto es, las condiciones de resistencia en que se encuentra (fórmula 1). Este es el problema que resuelve el ingeniero en el reconocimiento de una obra; mide direc-

tamente P , L y ω , y en vista del valor que obtiene para R y del estado del material, deduce el grado de seguridad de la construcción.

188. **Resistencia viva elástica.** — Según hemos visto en el núm. 31, si P es la fuerza de tracción, y l el alargamiento correspondiente dentro del período elástico, la resistencia viva tiene por valor $T = \frac{1}{2} P l$, y como

$$P = R \omega \text{ y } l = \frac{P L}{E \omega}$$

$$T = \frac{R^2}{2 E} L \omega \text{ (3).}$$

$L \omega$ es el volumen del prisma; de modo que la resistencia viva, esto es, el trabajo T de las fuerzas que producen el alargamiento l , es proporcional á dicho volumen; á $\frac{R^2}{2 E}$ se le da el nombre de *coeficiente de resistencia viva*.

La expresión (3) mide la semifuerza viva de choque longitudinal que puede absorber el prisma, trabajando la materia á R kilogramos por unidad superficial, suponiendo que los esfuerzos se transmiten de modo instantáneo de un punto á otro, por efecto del choque (lo cual no es absolutamente exacto).

189. **Equivalencias de cargas.** — 1.º *Carga aplicada instantáneamente.*— Si la fuerza P crece de 0 á P y produce el alargamiento l , el trabajo de las acciones elásticas está representado por el área del triángulo $O A B$ (fig. 21, lámina 3.^a), y vale $\frac{1}{2} P l$.

Llamemos X á la fuerza constante de extensión que, actuando íntegra desde el primer momento, produzca el mismo alargamiento, dando lugar al mismo desarrollo de fuerzas elásticas. El trabajo vendrá dado por el área del rectángulo $O C D A$ que tiene l por base y X por altura, y deberá verificarse

$$X l = \frac{1}{2} P l;$$

de donde resulta $X = \frac{1}{2} P$; es decir, que para los efectos del trabajo y resistencia de la materia, son equivalentes una fuerza P , creciente de 0 gradualmente, y otra $\frac{1}{2} P$ aplicada bruscamente.

190. 2.º *Carga aplicada instantáneamente y animada de la velocidad v.* — Supondremos que el peso propio del prisma es despreciable, y que éste puede tomar movimientos oscilatorios.

El alargamiento total l' producido por un peso que viene á extender el prisma, animado de la velocidad v es:

$$l' = l \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 E h \omega}{P L}} \right) \quad (4)$$

siendo l' el alargamiento correspondiente á la carga estática y gradual P , y h la altura de caída que produce la velocidad v (*).

Como los alargamientos, en cargas estáticas graduales, son proporcionales á estas cargas, el alargamiento l' sería producido por un peso P' , creciente desde cero, de valor

$$P' = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 E h \omega}{P L}} \right) \quad (5)$$

La carga P animada de la velocidad v , ó cayendo de la altura h , es equivalente á la carga estática P' creciente desde cero.

En las fórmulas (1) y (2) habrá, pues, que sustituir P por el segundo miembro de la ecuación 5.

Si $h = 0$ (caso de carga instantánea) resulta $P' = 2 P$, conforme con lo hallado en el número anterior.

191. *Caso en que se tiene en cuenta el peso propio del prisma.*—Gene-

(*) Consideremos el prisma en el momento en que ha pasado de la posición señalada por trazo continuo (fig. 22, lám. 3.ª), á la representada por líneas de puntos, á consecuencia de la deformación que está operando el peso P que traía la velocidad v . La fuerza estática gradual capaz de producir la deformación y , es $\omega \frac{y}{L}$.

Aplicando al sistema la ecuación general del movimiento $m \frac{d^2 s}{dt^2} = \Sigma (F)$ tendremos:

$$\frac{P}{y} \frac{d^2 y}{dt^2} = P - E \omega \frac{y}{L}$$

E integrando entre los límites $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = v$, y llamando l' á la deformación ó alargamiento total,

$$-\frac{P v^2}{2 y} = P l' - \frac{E \omega}{2 L} l'^2 - P h$$

de donde

$$l' = l \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 h E \omega}{P L}} \right)$$

ralmente el peso propio del prisma es insignificante comparado con la carga exterior, y así es que no se tiene en cuenta. Pero no puede hacerse lo mismo cuando se emplean cables ó barras de gran longitud, como sucede en la apertura de pozos artesianos y en otros casos.

Si la pieza es prismática (fig. 23, lám. 3.ª), la sección superior A , que es la más cargada, está sometida á la fuerza de tracción $P + L \omega t$, siendo

ω = área de la sección transversal constante del prisma.

L = longitud total AB .

t = peso del metro cúbico de prisma.

Aplicando la fórmula (1), resulta

$$P + L \omega t = R \omega$$

$$\text{ó } \omega = \frac{P}{R - L t}$$

Si el prisma tuviese que soportar, simplemente, su propio peso,

$$R \omega = L \omega t \quad \text{ó } R = L t$$

y la longitud máxima posible, para un coeficiente de trabajo R en la sección A , es $L = \frac{R}{t}$.

He aquí algunos valores de L :

MATERIALES	R en kilogramos por m. ²	Peso del m. ³ en kilogramos.	Longitud máxima L en metros.
Madera.....	600000	600	1000
Hierro en barra.....	6000000	7800	769
Fundición.....	3000000	7200	416
Acero en barra.....	10000000	7800	1282

192. *Sólido de igual resistencia.*— De suponer prismática ó cilíndrica la pieza extendida, hemos aceptado para valor constante de ω el correspondiente á la sección A (fig. 23, lám. 3.ª), que es la que se encuentra en peores condiciones. Así resulta exceso de materia en las secciones intermedias, ta-

les como la C , que sufre únicamente la carga $P + A C \omega t$, y como la B , que soporta tan sólo el peso P .

Veamos el modo de uniformar el trabajo del material en todas las secciones, de modo que ω varíe con relación á las fuerzas de extensión y resulte un coeficiente de trabajo R constante.

193. Solución aproximada. — Divídase en n partes iguales la longitud L del sólido (fig. 24, lám. 3.^a); cada parte tendrá por longitud $l = \frac{L}{n}$. Llamemos s_1, s_2, \dots, s_n , á las áreas de sus secciones rectas.

En el trozo inferior, y teniendo en cuenta la sección superior que es la que más trabaja,

$$P + l t s_1 = R s_1, \quad s_1 = \frac{P}{R - l t} = P \frac{1}{R - l t}.$$

$$\text{En el trozo 2.º} \dots \dots \dots \begin{cases} P + l t s_1 + l t s_2 = R s_2 \\ \text{ó } R s_1 + l t s_2 = R s_2 \end{cases}$$

de modo que $s_2 = \frac{R s_1}{R - l t}$; y sustituyendo $s_1, \dots, s_2 = P \frac{R}{(R - l t)^2}$

Para el trozo 3.º $s_3 = \frac{R s_2}{R - l t}$ ó $s_3 = P \frac{R^2}{(R - l t)^3}$

De modo que para el trozo n ésimo $s_n = P \frac{R^{n-1}}{(R - l t)^n}$

La ley de formación de los valores de s es bien sencilla.

El peso total P_1 , que actúa sobre la base superior del primer trozo, es:

$$P_1 = P + l t s_1 = R s_1.$$

En el 2.º,

$$P_2 = P + l t s_1 + l t s_2 = R s_2.$$

De donde se deduce que los valores de P_1, P_2, \dots, P_n , se obtienen multiplicando por R los correspondientes de s_1, s_2, \dots etc. Así, el peso ó fuerza total de tracción que actúa en el trozo de orden n , será:

$$P_n = R s_n = P \frac{R^n}{(R - l t)^n}$$

194. Solución exacta.—Consideremos una superficie de revolución de eje OZ (fig. 25, lám. 3.^a), y dos secciones AA', CC' , infinitamente próximas.

Sean:

$$\overset{\circ}{C}D = r_{\parallel} AB = r + d r_{\parallel} BD = dz.$$

El exceso de área AA' sobre la CC' ha de servir para resistir, á razón de R kilogramos por unidad superficial, el peso del volumen $AA' C' C$.

La diferencia de áreas $AA' - CC'$ es $\pi [(r + dr)^2 - r^2] = 2\pi r dr$ despreciando dr^2 por su pequeñez.

El peso del volumen $AA' C' C$ es $t\pi r^2 dz$.

Luego aplicando la fórmula $P = R \omega$

$$t\pi r^2 dz = R 2\pi r dr$$

$$\text{ó } \frac{dr}{r} = \frac{t}{2R} dz;$$

é integrando:

$$\log. \text{ nep. } r = \frac{t}{2R} z + C.$$

Para $z = 0$, es decir, para la sección O , se convierte r en r_0 , siendo r_0 determinado por la ecuación $P = R \pi r_0^2$.

Luego $C = \log. \text{ nep. } r_0$

$$\text{y } \log. \text{ nep. } \frac{r}{r_0} = \frac{t}{2R} z$$

$$\text{ó } 2,3026 \log. \text{ ord. } \frac{r}{r_0} = \frac{t}{2R} z \quad (6)$$

ecuación de una curva logarítmica asintótica del eje OZ , que permite determinar r en función de z .

Si el sólido soportase su propio peso solamente, habrá que sustituir en las ecuaciones anteriores los valores

$$P = 0 \quad r_0 = 0 \quad C = 0.$$

195. Es fácil la determinación del peso y volumen del sólido.

Determinese por la ecuación (6) el radio r_1 de la sección HH' , haciendo al efecto $z = L$.

Sea P' el peso del sólido; puesto que en la sección HH' , como en todas, el trabajo del material por unidad superficial es R , tendremos

$$R \pi r_i^2 = P + P'$$

Ecuación que determina P' , y el volumen $V = \frac{P'}{t}$

$$\text{Si } P = 0, P' = R \pi r_i^2, \text{ y } V = \frac{R \pi r_i^2}{t}$$

196. Alargamientos cuando se tiene en cuenta el peso del prisma. —
1.º *Sólidos prismáticos.* Para determinar el alargamiento que produce el peso propio del prisma, supongamos á este dividido en elementos de altura dL á partir de la base (fig. 26, lám. 3.ª).

El peso de cada elemento es $t \omega dL = dP'$, siendo P' el peso total del prisma.

En el elemento a , el alargamiento debido al peso propio es (fórmula 2)

$$\frac{dP' dL}{E \omega}$$

$$\text{En el } b, \text{ cuyo peso es } 2 dP' \dots\dots\dots \frac{2 dP' dL}{E \omega}$$

$$\text{En el } c \dots\dots\dots \frac{3 dP' dL}{E \omega}$$

y así sucesivamente.

La suma total de alargamientos parciales es:

$$l' = \frac{1}{E \omega} (dP' dL + dP' 2 dL + \dots)$$

La cantidad contenida en el paréntesis es la suma de los momentos de los pesos elementales con relación á la base del prisma, y equivale, por tanto, al momento del peso total P' con respecto á dicha base, y que vale $P' \frac{1}{2} L$.

$$\text{Luego } l' = \frac{P' L}{2 E \omega} \text{ (7)}$$

es decir, la mitad del alargamiento que se produciría si el peso total del prisma estuviese aplicado al extremo inferior.

El alargamiento debido á la carga exterior P , es $l'' = \frac{P L}{E \omega}$; de modo que el alargamiento total vale

$$l = l' + l'' = \frac{L}{E \omega} \left(P + \frac{1}{2} P' \right)$$

197. 2.º Sólido de igual resistencia. En un elemento diferencial cualquiera, de sección s_m , siendo p_m el peso que carga, el alargamiento es $dl = \frac{p_m dL}{E s_m}$; y como por ser sólido de igual resistencia debe verificarse que $p_m = R s_m$ en todos los puntos, resulta

$$dl = \frac{R}{E} dL$$

é integrando,

$$l = \frac{R L}{E} \text{ (8)}$$

198. Sólido cargado con fuerzas de extensión uniformemente repartidas, á razón de p por unidad de longitud (fig. 27, lámina 3.ª)—Sea x la longitud AD contada á partir de A .

En la sección D obra la fuerza px , de modo que $px = R \omega$, y $\omega = \frac{px}{R}$.

Para el punto A , $x = 0$ y $\omega = 0$; para el punto B , $x = L$ y $\omega = \frac{pL}{R}$.

Tomando BC igual á este valor y uniendo A y C , la recta DD' representa el valor de ω para la sección D .

El problema de las deformaciones es el mismo del núm. 196, sin más que sustituir dP' por dp , y P' por pL . El alargamiento l es

$$l = \frac{p L^2}{2 E \omega}$$

No se ha tenido en cuenta el peso propio del prisma.

2. COMPRESIÓN

199. Fórmulas generales. - Lo mismo que en la extensión, supondremos que las fuerzas están distribuidas uniformemente en toda la sección transversal del prisma ó del cilindro, de modo que la resultante coincide con el eje de la pieza.

El problema de la compresión es muy complejo cuando la longitud del prisma es grande con relación á las dimensiones de la sección recta, pues es de temer entonces la flexión lateral (*). Para estar dentro del problema de la compresión simple, que en este capítulo se trata, supondremos que la relación de la longitud del prisma á la menor de las dimensiones de su sección transversal, es tal que no existe peligro de flexión lateral. En términos generales, esta relación tiene por valor 10 á 12.

Las mismas fórmulas (1) y (2) del núm. 185 resuelven los problemas de compresión, sin más variaciones que las de representar P la fuerza compresora y l el acortamiento elástico correspondiente.

Cuanto queda dicho en los núms. 187, 188, 189, 190, es aplicable á la compresión, y por esta razón no lo repetiremos aquí, pudiendo emplear desde luego las fórmulas que allí se dieron.

Los sólidos de igual resistencia se determinan asimismo por los procedimientos de los núms. 192 á 194. La fig. 25 de la lám. 3.^a, invertida, es la forma de la torre maciza de igual resistencia, y la ecuación (6) es también la de la curva generatriz, siendo r_0 ahora el radio de la base superior de la torre.

La misma ecuación (6) es aplicable al caso de torre hueca, siendo el hueco cilíndrico interior de radio a . En efecto; dos secciones anulares consecutivas AA' , CC' (fig. 1.^a, lám. 4.^a), se diferencian también, en área, en la cantidad $2\pi r dr$, como en el caso de torre maciza (siendo r el radio de la superficie externa); de modo que todo el cálculo se repetiría hasta llegar á la dicha ecuación (6). La única diferencia consiste en que el radio exterior r_0 de la base superior, se determina por la ecuación $P = R\pi(r_0^2 - a^2)$.

(*) Véase el Capítulo VII.

3. ESFUERZO CORTANTE

Y DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL

200. Los problemas correspondientes se resolverán, en general, por la fórmula $P = R''\omega$ (1), en que R'' representa el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante ó por desgarramiento, P la fuerza y ω el área de la sección resistente.

Sea L la longitud AC (fig. 21, lám. 6.^a), que separa la sección CD sometida al esfuerzo cortante C , de la AB supuesta fija; $l = CC'$ y ω el área de CD .

Según hemos visto en el núm. 20, $E' = \frac{p'}{i_1}$, siendo p' el esfuerzo cortante por unidad superficial de ω , é i_1 la deformación transversal por unidad de longitud L .

Será, pues, $p' = \frac{C}{\omega}$ „ $i_1 = \frac{l}{L}$, y

$$E' = \frac{CL}{\omega l} \quad \text{ó} \quad l = \frac{CL}{E'\omega} \quad (2),$$

fórmula análoga á la de las deformaciones por extensión y por compresión (fórmula (2) del núm. 185). Todo en el supuesto de que C se distribuya uniformemente en la sección transversal.

4. APLICACIONES DE LOS PROBLEMAS

DE EXTENSIÓN, COMPRESIÓN Y ESFUERZO CORTANTE

CUERDAS DE CÁÑAMO

201. Se resuelven los problemas por las fórmulas

$$P = R \omega$$

$$l = \frac{P L}{E \omega}$$

Recordaremos que para las cuerdas blancas:

R = coeficiente de trabajo, que vale 1 kilogramo por milímetro cuadrado para cargas permanentes, y 2 á 3 kilogramos por milímetro cuadrado para cargas accidentales (núm. 180). Se disminuirán estos valores prudencialmente, si las cuerdas están en mal estado.

ω = área del círculo circunscrito.

P = carga.

L = longitud de la cuerda.

l = alargamiento total.

E = coeficiente de elasticidad, igual á 200 kilogramos por milímetro cuadrado.

Las cuerdas embreadas resisten los $\frac{2}{3}$ á $\frac{3}{4}$ de las blancas.

Para la resolución de los problemas de resistencia relativos á cuerdas, pueden emplearse con notable economía de tiempo las tablas de cuadrados, cubos, diámetros y áreas de círculos que contienen todos los manuales, agendas, carteras, etc., del constructor.

Admitiendo para coeficiente de trabajo R de las cuerdas 1 kilogramo por milímetro cuadrado de sección transversal, según acabamos de decir, la fórmula $P = R \omega$ se convierte en $P = \omega$; es decir, que el número de kilogramos que resistirá la cuerda será igual al de milímetros cuadrados de la sección transversal. Si se da P , con este número se irá á la casilla de áreas $\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)$ y á la izquierda se obtendrá el diámetro d (que deberá contarse en milímetros) de la circunferencia circunscrita á la cuerda; si, por el contrario, se conociera el diámetro exterior d de la cuerda en milímetros, las tablas darán el área correspondiente, y el número que la exprese será el de kilogramos con que se puede cargar aquélla.

Ejemplos. 1.º Cuerda blanca que ha de sufrir una tracción permanente de 600 kilogramos.

En las tablas de áreas no existe el número 600; se tomará el inmediato superior (en beneficio de la resistencia) que es 602,63: el diámetro correspondiente es $d = 27,7$ milímetros.

2.º Una cuerda blanca, en buen estado, de 30 mm. de diámetro, ha de estar sometida á fuerza de tracción permanente. Se desea conocer su valor.

El área del círculo de diámetro 30, es, según las tablas, 706,86; este será el de kilogramos valor de la fuerza buscada.

Cuando por la buena calidad de la cuerda, ó por tratarse de cargas accidentales, pueda tomarse para R , coeficiente de trabajo, valor mayor de 1 (2 á 3), los problemas se resolverán también fácilmente. Si es dado P , se dividirá por R ; el cociente $\frac{P}{R}$ se buscará en la columna de áreas, y á la izquierda se hallará el diámetro correspondiente d ; y si, por el contrario, fuese conocido d , se encontrará el área ω , y se multiplicará por R con lo cual se obtendrá P .

Ejemplos. 1.º Cuerda blanca en buen estado, que ha de emplearse en la elevación de un sillar de 840 kilogramos de peso.

$$\text{Haremos } R = 2 \text{ kilogramos por mm.}^2; \omega = \frac{P}{R} = \frac{840}{2} = 420.$$

El valor inmediato superior á 420, en las tablas, es 422,73, al cual corresponde un diámetro $d = 23,2$. Este será, en milímetros, el diámetro de la cuerda.

2.º Cuerda blanca, de muy buen cáñamo, de 25 mm. de diámetro exterior. Ha de sufrir un esfuerzo tractor accidental, P .

$$\text{Haremos } R = 3.$$

El área correspondiente á $d = 25$, es 490, 87 mm.²

$$P = 490,87 \times 3 = 1472,61 \text{ kilogramos.}$$

Cuando se trate del reconocimiento de una obra, la incógnita es R , coeficiente de trabajo; y de este valor, y de la calidad del material, dependerá el informe del ingeniero ó arquitecto.

Ejemplos. 1.º Una cuerda de $d = 40$ mm. de diámetro, de excelente cáñamo, y en buen estado, soporta un peso permanente de $P = 800$ kilogramos.

El área del círculo circunscrito es $\omega = 1256$ mm.² El coeficiente de trabajo será $R = \frac{P}{\omega} = \frac{800}{1256} = 0,63$ kilogramos por mm.²

La cuerda ofrece toda seguridad.

2.º Una cuerda usada, de $d = 32$ mm. se emplea en un torno para elevar pesos de 3000 kilogramos.

$$\omega = 804 \text{ mm.}^2, R = \frac{3000}{804} = 3,73 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

La cuerda ofrece muy escasa seguridad, y aun ninguna si el cáñamo fuese de mediana calidad.

PIEZAS DE MADERA, BARRAS METÁLICAS

202. Pueden presentarse los tres problemas del núm. 187, siendo incógnitas ω , P ó R y determinando, como segunda parte de cada uno de ellos, la deformación longitudinal l por la fórmula (2) del núm. 185.

En todos ellos debe tenerse presente que ω representa el área de la sección transversal resistente; de modo que si la pieza ó barra no es prismática, ó si siéndolo está debilitada en alguna parte por orificios, escotaduras, etcétera, deberá representar ω el área de la menor sección transversal.

En las piezas de madera sometidas á tracción, deberán tenerse en cuenta los nudos grandes, que interrumpiendo las fibras son motivo de debilidad para la sección transversal, cuya área ω deberá disminuirse en la de aquéllos.

Cuando se trata de barras cilíndricas, se podrá utilizar las tablas de diámetros y áreas de círculos según se ha dicho ya para las cuerdas; pero ha

de cuidarse, en los materiales metálicos, de acomodarse á las dimensiones transversales de las piezas que se expenden en el comercio y dan las fábricas. Por esta razón, cuando se haya de resolver el primer problema, esto es, conocida la fuerza de tracción P determinar la escuadría, deberá procederse del siguiente modo: se elegirá el coeficiente de trabajo R ; se hallará el coeficiente $\frac{P}{R}$ y este será el valor de ω en mm.², cm.², m.², etc., según que R re-

presente kilogramos por mm.², cm.², m.², etc.; se buscará de seguida una pieza, entre las del comercio, cuyo perfil transversal sea poco diferente del ω que nosotros hayamos hallado preliminarmente, y dividiendo P por el nuevo ω , obtendremos el coeficiente de trabajo definitivo que hemos de presentar como comprobante de los cálculos en el proyecto.

Ejemplo 1.º Varilla de hierro sometida á una extensión $P = 6250$ kilogramos. (Péndola de un entramado.)

Se desea gran solidez, de modo que aceptaremos un coeficiente de trabajo preliminar, de 6 kilogramos por mm.²

Necesitamos una varilla cuya área sea, aproximadamente,

$$\omega = \frac{P}{6} = \frac{6250}{6} = 1041,66 \text{ milímetros cuadrados.}$$

Supongamos que las varillas tengan diámetros crecientes de dos en dos milímetros. Las tablas de superficies nos darán,

$d = 36$ mm.....	$\omega = 1017,87$
$d = 38$ mm.....	$\omega = 1134,10$

que son valores de ω que comprenden al obtenido (1041,66), de modo que puede aceptarse para diámetro de la varilla uno de los valores de d anteriores, y se obtendría;

Varilla de 36 mm. de diámetro

$$\omega = 1017,87 \text{ mm.}^2, P = 6250 \text{ kilogramos.}$$

$$R = \frac{P}{\omega} = 6,14 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Varilla de 38 mm. de diámetro.

$$\omega = 1134,10 \text{ mm.}^2, P = 6250 \text{ kilogramos.}$$

$$R = \frac{P}{\omega} = 5,51 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Si quisiéramos determinar el alargamiento l correspondiente á la varilla de 36 mm., por ejemplo, suponiendo que su longitud L fuese de 2 metros, aplicaríamos la fórmula $l = \frac{P L}{E \omega}$ (2 del núm. 185).

Tomando todas las dimensiones en kilogramos y milímetros, por ejemplo, sería:

$$P = 6250 \text{ kilogramos. } L = 2^m = 2000 \text{ mm. } \omega = 1017,87 \text{ mm.}^2$$

$$E = 18000 \text{ por mm.}^2$$

$$l = \frac{6250 \times 2000}{18000 \times 1017,87} = 0,68 \text{ mm.}$$

Las tablas que acompañan á este número facilitan considerablemente la resolución de los problemas de extensión en varillas y barras de hierro.

2.º Hierro T , tirante de una armadura, sometido á una fuerza de extensión de 7000 kilogramos. El nervio vertical ha de quedar debilitado con un orificio de 16 mm de diámetro, para las roblonaduras.

Admitiendo como valor medio de coeficiente de trabajo $R = 7$ kilogramos por milímetro cuadrado, resulta que el área resistente de la T ha de ser próximamente de $\frac{P}{R} = \frac{7000}{7} = 1000 \text{ mm.}^2$

Supongamos que en los catálogos de hierros perfilados hallamos:

- 1.º T de $\frac{60 \times 60}{9}$ (*)..... área de 999 mm.²
- 2.º T de $\frac{65 \times 65}{7}$ área de 1089 mm.²

Si elegimos la primera, habremos de descontar, del área de su perfil, el hueco que deja el roblón de 16 mm y que será $16 \times 9 = 144 \text{ mm.}^2$; de modo que la superficie resistente á la tracción sería,

$$\omega = 999 - 144 = 855 \text{ mm.}^2$$

y resulta para coeficiente de trabajo definitivo

$$R = \frac{P}{\omega} = \frac{7000}{855} = 8,18 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

(*) Sabido es que esta notación indica que la T tiene sus dos ramas de 60 milímetros de longitud, y el espesor de éstas es de 9 milímetros.

Si este valor nos pareciera exagerado, ensayaríamos el segundo perfil. Por el orificio para el roblón de 16 mm de diámetro, siendo de 7 mm el grueso de las ramas de esta T , se debilita la sección en $16 \times 7 = 112 \text{ mm.}^2$; de modo que la sección resistente es,

$$\omega = 1089 - 112 = 977 \text{ mm.}^2$$

y el coeficiente de trabajo definitivo,

$$R = \frac{P}{\omega} = \frac{7000}{977} = 7,16 \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

valor que se separa muy poco del que deseábamos.

3.º Pieza de madera de pino, sometida á 2400 kilogramos de tracción.

Haciendo $R = 60$ kilogramos por cm.², será $\omega = \frac{P}{R} = 40 \text{ cm.}^2$. Debemos elegir una pieza que tenga 40 cm.² de sección resistente.

Cuando la pieza metálica sea de sección rectangular, se calculará primeramente $\omega = \frac{P}{R}$, y se formará después el perfil rectangular cuya área tenga por valor ω , y en el cual la relación de los lados sea la conveniente por razones de fabricación, no olvidando que en las piezas de esta especie, sometidas á tracción, los gruesos son pequeños.

Los problemas de compresión se resuelven de modo idéntico, siempre, por supuesto, que con arreglo á la hipótesis del núm. 199, la longitud del prisma no exceda de 10 á 12 veces la menor de las dimensiones de la sección trasversal, en cuyo caso la solución se obtiene de modo diferente (*).

Puede suceder que se conozcan:

P fuerza de extensión ó compresión, repartida igualmente en n prismas yustapuestos.

ω área de la sección trasversal de un prisma.

R coeficiente de trabajo,

y que la incógnita sea el número n .

El problema se resolverá por la fórmula (1) del núm. 185, que ahora se convierte en

$$P = R n \omega.$$

(*) Véase el capítulo relativo á piezas comprimidas según su eje. Cap. VII.

TABLA
DE RESISTENCIAS DE BARRAS DE HIERRO,
DE SECCIÓN RECTANGULAR

LADOS del rectángulo en mm.	ÁREA de la sección en mm. ² ω	PESO por metro lineal de la barra en kilogramos.	FUERZA DE EXTENSIÓN P en kilogramos para un coeficiente R de trabajo en kilogramos por mm. ²		
			6	7	8
20	80	0,624	4	480	640
			6	720	960
			8	960	1280
25	120	0,936	10	1200	1600
			12	1440	1920
			4	600	800
			6	900	1200
			8	1200	1600
			10	1500	2000
30	160	1,248	12	1800	2400
			14	2100	2800
			4	600	800
			6	900	1200
			8	1200	1600
			10	1500	2000
35	200	1,560	12	2100	2800
			14	2400	3200
			4	600	800
			6	900	1200
			8	1200	1600
			10	1500	2000
40	240	1,872	12	2400	3200
			14	2800	3600
			4	600	800
			6	900	1200
			8	1200	1600
			10	1500	2000

TABLA DE RESISTENCIAS DE BARRAS CILÍNDRICAS DE HIERRO

DIÁMETRO d en mm.	ÁREA ω de la sección en mm. ²	PESO del metro lineal en kilogramos.	FUERZA DE EXTENSIÓN P en kilogramos para un coeficiente de trabajo R en kilogramos por mm. ²			DIÁMETRO d en mm.	ÁREA ω de la sección en mm. ²	PESO del metro lineal en kilogramos.	FUERZA DE EXTENSIÓN P en kilogramos para un coeficiente de trabajo R en kilogramos por mm. ²		
			6	7	8				6	7	8
4	12	0,09	72	84	96	31	754	5,888	4524	5278	6032
5	19	0,15	114	133	152	32	804	6,27	4824	5628	6432
6	28	0,22	168	196	224	33	855	6,67	5130	5985	6840
7	38	0,29	228	266	304	34	908	7,08	5448	6356	7264
8	50	0,39	300	350	400	35	962	7,50	5772	6734	7696
9	63	0,49	378	441	504	36	1018	7,94	6108	7126	8144
10	78	0,61	468	546	624	37	1075	8,38	6450	7525	8560
11	95	0,74	570	665	760	38	1134	8,84	6801	7938	9072
12	113	0,88	678	791	904	39	1194	9,31	7154	8268	9552
13	132	1,03	792	924	1056	40	1256	9,79	7515	8792	10048
14	154	1,20	924	1078	1232	41	1320	10,29	7875	9240	10560
15	176	1,37	1056	1232	1408	42	1385	10,80	8235	9795	11080
16	201	1,56	1206	1407	1608	43	1452	11,32	8601	10364	11616
17	227	1,77	1362	1589	1816	44	1520	11,85	8972	10950	12240
18	254	1,98	1524	1778	2032	45	1590	12,40	9348	11544	12880
19	283	2,20	1698	1981	2264	46	1662	12,96	9729	12145	13536
20	314	2,44	1884	2188	2512	47	1735	13,53	10116	12760	14208
21	346	2,70	2076	2405	2768	48	1809	14,11	10509	13384	14896
22	380	2,96	2280	2640	3040	49	1885	14,70	10917	14016	15600
23	415	3,23	2490	2905	3320	50	1963	15,31	11330	14648	16320
24	452	3,52	2712	3164	3616	51	2043	15,93	11758	15292	17056
25	491	3,82	2946	3437	3928	52	2123	16,56	12192	15948	17808
26	530	4,13	3180	3710	4240	53	2206	17,20	12632	16616	18576
27	560	4,46	3432	4001	4576	54	2290	17,85	13077	17296	19360
28	615	4,80	3690	4305	4920	55	2376	18,51	13527	17988	20160
29	660	5,14	3960	4620	5280	56	2463	19,18	13982	18692	20976
30	707	5,51	4242	4949	5656	60	2552	20,05	14442	19408	21808

TABLA
DE RESISTENCIAS DE BARRAS DE HIERRO,
DE SECCIÓN RECTANGULAR

LADOS del rectángulo en mm.		ÁREA de la sección en mm. ² ω	PESO por metro lineal de la barra en kilogramos.	FUERZA DE EXTENSIÓN P en kilogramos para un coeficiente R de trabajo en kilogramos por mm. ²		
mayor. b	menor. a			6	7	8
45	4	180	1,404	1080	1260	1440
	6	270	2,106	1620	1890	2160
	8	360	2,808	2160	2520	2880
	10	450	3,510	2700	3150	3600
	12	540	4,212	3240	3780	4320
	14	630	4,914	3780	4410	5040
	16	720	5,516	4320	5040	5760
	18	810	6,318	4860	5670	6480
	20	900	7,020	5400	6300	7200
	22	990	7,722	5940	6930	7920
	4	200	1,560	1200	1400	1600
	6	300	2,340	1800	2100	2400
50	8	400	3,120	2400	2800	3200
	10	500	3,900	3000	3500	4000
	12	600	4,680	3600	4200	4800
	14	700	5,460	4200	4900	5600
	16	800	6,240	4800	5600	6400
	18	900	7,020	5400	6300	7200
	20	1000	7,800	6000	7000	8000
	22	1100	8,580	6600	7700	8800
	24	1200	9,360	7200	8400	9600
	4	240	1,870	1440	1680	1920
	6	360	2,810	2160	2520	2880
	8	480	3,740	2880	3360	3840
60	10	600	4,680	3600	4200	4800
	12	720	5,610	4320	5040	5760
	14	840	6,550	5040	5880	6720
	16	960	7,490	5760	6720	7680
	18	1080	8,420	6480	7560	8640
	20	1200	9,360	7200	8400	9600
	22	1320	10,490	7920	9240	10560
	24	1440	11,230	8640	10090	11520
	26	1560	12,170	9360	10920	12480
	28	1680	13,100	10080	11760	13440
	30	1800	14,040	10800	12600	14400

CABLES DE ALAMBRE

203. Los cables redondos se componen de seis torones, torcidos alrededor de un alma central de cáñamo (figs. 28 y 29, lám. 3.^a); cada torón consta de un cierto número de alambres, arrollados también á su correspondiente alma de cáñamo.

El objeto de las almas de cáñamo es impedir la oxidación y rozamiento de los alambres y proporcionar flexibilidad al cable.

Llamaremos

d = diámetro total del cable.

d' = ídem de un alambre.

n = número total de alambres.

Generalmente cada torón se compone de seis alambres (fig. 29); de modo que el número total es $n = 36$, y entonces $d = 8 d'$; pero puede constar de 8, 9, 10..... etc., en cuyo caso n y la relación $\frac{d}{d'}$ tienen los siguientes valores:

n	36...	48	...	54	...	60	...	66	...	72
$\frac{d}{d'}$	8...	10,25...	11,33...	12,80...	13,25...	14,20				

También se fabrican cables planos compuestos de varios torones yuxtapuestos, generalmente seis, de 24 alambres, que dan un total $n = 144$.

Los alambres pueden ser de hierro ó de acero sin recocer, de 1 á 3mm de diámetro.

Sea P el esfuerzo tractor y R el coeficiente de trabajo del alambre; la fórmula $P = R \omega$ es en este caso

$$P = R n \frac{\pi d'^2}{4}$$

Para alambre de hierro, $R = 9$ kilogramos por mm.² (*), lo cual da $P = 7,07 n d'^2$ (1).

(*) Podría darse á R mayor valor si no fuera porque la torsión sufrida por los alambres al formar el cable ha ocasionado ya una tensión preliminar. Según experiencias realizadas en el Creusot, la torsión de los alambres disminuye en 20 por 100 su resistencia; de modo que la resistencia de un cable de hierro ó de acero es 0,8 de la del total de alambres que lo componen.

En los cables de $n = 36$ alambres,

$$\left. \begin{aligned} P &= 254,5 d'^2 \\ d' &= 0,062 \sqrt{P} \end{aligned} \right\} (2).$$

Si se quiere determinar la relación entre P y el diámetro total del cable, haremos $d = 8 d'$, y resulta

$$\left. \begin{aligned} P &= 4 d^2 \\ d &= 0,5 \sqrt{P} \end{aligned} \right\} (3).$$

En los cables planos de 144 alambres, la fórmula (1) se convierte en

$$P = 1018,08 d'^2 (4).$$

En todas esas fórmulas P viene expresado en kilogramos y d y d' en milímetros.

Para el alambre de acero puede hacerse $R = 12$ á 14 kilogramos por milímetro cuadrado. Tomando el número 12, resulta

$$P = 9,43 n d'^2 (5) (*).$$

204. El metro lineal de cable cualquiera, de alambre de hierro ó de acero, pesa, en kilogramos, $p = 0,007 n d'^2$ (6); de modo que para los de 36 alambres, $p = 0,25 d'^2$; y para los planos de 144 alambres, $p = d'^2$.

Comparando los valores (1) y (6), se deduce que $P = 1000 p$ (7); es decir, que los cables de alambre de hierro pueden resistir permanentemente (trabajando á 9 kilogramos por mm.²) una carga igual á 1000 veces el peso de un metro lineal. Según esto, y para el mismo valor de $R = 9$, cuando el cable ha de resistir solamente su propio peso, puede tener 1000 metros de longitud.

Siendo el coeficiente de fractura del alambre de hierro de 5 á 7 veces el valor anterior de R , se deduce que un cable de 5000 á 7000 metros, se rompería por la acción de su propio peso. En el agua, á causa de la pérdida de peso, la carga de fractura sería de 5600 á 7800 metros.

En los cables largos, habrá de descontarse de la carga total P que pueden

(*) Corresponde á esta fórmula un coeficiente de seguridad igual á 10; es decir, que la carga total de fractura es 10 P .

resistir, según la fórmula (1), el peso propio Lp (siendo L la longitud en metros); de modo que la carga útil será

$$P - Lp = P \left(1 - \frac{L}{1000} \right).$$

205. La fórmula (7) relaciona la carga que puede soportar el cable, con el peso propio de éste por metro lineal. Rankine da la fórmula $P = 1416 p$, lo cual supone un coeficiente de trabajo $R = 12,60$ kilogramos por mm.².

Para los cables de alambre de acero, resulta de la comparación de las fórmulas (5) y (6).

$$P = 1347 p.$$

206. A continuación damos una tabla de las cargas P que pueden soportar los cables de alambre de hierro para un coeficiente de trabajo $R = 9$ kilogramos por milímetro cuadrado; estas cargas han sido calculadas por la fórmula (3) para los cables redondos de 36 alambres, y por la (4) para los planos de 144.

Diámetro de los alambres d' en mm.	CABLES REDONDOS de 36 alambres			CABLES PLANOS de 144 alambres.				Radio mínimo de las poleas ó tambores en que se arrollan en mm.
	Diámetro d en mm.	Carga que puede soportar P en kilogs.	Peso del metro lineal de cable p en kilogs.	Grueso en mm.	Ancho en mm.	Carga que puede soportar en kilogs.	Peso del metro lineal de cable en kilogs.	
1,00	8,00	256	0,25	6,0	36,0	1018	1,00	555
1,2	9,60	369	0,36	7,2	43,2	1466	1,45	666
1,4	11,20	502	0,49	8,4	50,4	1995	1,98	777
1,6	12,80	655	0,64	9,6	57,6	2606	2,58	888
1,8	14,40	829	0,81	10,8	64,8	3298	3,27	999
2,00	16,00	1024	1,00	12,0	72,0	4072	4,03	1110
2,25	18,00	1296	1,26	13,5	81,0	5153	5,10	1249
2,50	20,00	1600	1,56	15,0	90,0	6362	6,30	1388
2,75	22,00	1936	1,89	16,5	99,0	7696	7,62	1526
3,00	24,00	2304	2,25	18,0	108,0	9162	9,07	1665

CADENAS

207. Las cadenas empleadas en construcciones y en máquinas son:

1. Cadenas de eslabones oblongos alargados (fig. 30, lám. 3.^a).
2. » » » recogidos (fig. 31, lám. 3.^a).
3. » afianzadas ó de eslabones afianzados (fig. 32, lám. 3.^a).
4. » de gancho (sistema Vaucanson) (fig. 2.^a, lám. 4.^a).
5. » articuladas... $\left\{ \begin{array}{l} \text{de Galle (fig. 3.^a, lám. 4.^a)} \\ \text{de Neustadt (fig. 4.^a, lám. 4.^a)} \end{array} \right.$

Las primeras reciben en el extranjero el nombre de *alemanas*, y las segundas el de *inglesas*. Se diferencian en la longitud del eslabón, que es mayor en las primeras y permite soldar uno después de haber introducido los dos inmediatos, lo cual no puede hacerse en las segundas; éstas son también algo más pesadas.

Las cadenas afianzadas resisten más porque el travesaño se opone á la deformación por flexión de las dos ramas del eslabón; de modo que éstas trabajan por extensión solamente, mientras que en las ordinarias (clases 1 y 2) las dos ramas de un eslabón tienden á flexarse girando alrededor de las secciones transversales superior é inferior (fig 30, lám. 3.^a), disminuyendo como consecuencia el ancho del eslabón y aumentando su longitud. Estas secciones son las más peligrosas, porque en ellas el metal trabaja por extensión, no solamente por efecto de la fuerza de tracción, sino también por la flexión que se produce en la parte curva del eslabón.

Además, el metal se aplasta en el contacto de los eslabones, y el punto geométrico se convierte en una pequeña superficie de área suficiente para resistir por compresión el efecto de los pesos que carguen de la cadena.

Para facilitar los cálculos relativos á las cadenas de eslabones oblongos no afianzados, se prescinde de la flexión, y se supone que trabajan simplemente por tracción las dos ramas de un eslabón; de modo que se hace uso de la fórmula $P = R \omega$, siendo la sección resistente ω la de las dos ramas; en cambio se toma un valor de R , coeficiente de trabajo, menor que el ordinario, para compensar el error anterior.

El hierro empleado en la fabricación de cadenas ha de ser muy dúctil. De ordinario se le exige un coeficiente de fractura de 32 á 36 kilogramos por milímetro cuadrado, con un alargamiento de 10 á 20 por 100 en barras de ensayo de 200 milímetros.

A las cadenas ya fabricadas, se les exige una carga de fractura á razón de 23 á 26 kilogramos por milímetro cuadrado de sección de las dos ramas de un eslabón. Para la recepción se someten á la fractura algunos trozos elegidos á voluntad.

Las buenas fábricas no entregan las cadenas sin someterlas antes á una carga de prueba de 14 kilogramos por milímetro cuadrado de sección de las dos ramas, para las cadenas ordinarias, clases 1 y 2, y de 17 kilogramos por milímetro cuadrado para las afianzadas; es decir, que se llega casi al límite de elasticidad del material.

208. Llamemos:

d = diámetro de la varilla con que se fabrica la cadena.

a = ancho exterior de un eslabón.

b = ancho interior = $a - 2d$.

h = longitud exterior del eslabón.

l = longitud interior del mismo.

P = carga de trabajo ordinario que pueden soportar las cadenas.

P' = carga de prueba.

Tenemos, para las cargas de prueba;

$$P' = R \omega = R \frac{2\pi d^2}{4}$$

$$\text{Para } R = 14 \text{ (cadenas no afianzadas)} \dots \left\{ \begin{array}{l} d = 0,211 \sqrt{P'} \\ P' = 22 d^2 \end{array} \right\} (1).$$

$$\text{Para } R = 17 \text{ (cadenas afianzadas)} \dots \left\{ \begin{array}{l} d = 0,194 \sqrt{P'} \\ P' = 26,7 d^2 \end{array} \right\} (2).$$

Cuanto á las cargas ordinarias, se debe tomar $R = 5$ kilogramos por milímetro cuadrado para las cadenas 1 y 2, y $R = 6$ kilogramos por milímetro cuadrado para las cadenas afianzadas.

Así resulta, empleando la fórmula $P = R \frac{2\pi d^2}{4}$:

$$\text{Cadenas 1 y 2 (no afianzadas)} \dots \left\{ \begin{array}{l} d = 0,127 \sqrt{P} \\ P = 7,85 d^2 \end{array} \right\} (3).$$

$$\text{Cadenas 3 (afianzadas)} \dots \left\{ \begin{array}{l} d = 0,106 \sqrt{P} \\ P = 9,42 d^2 \end{array} \right\} (4).$$

En todas estas fórmulas, los valores de a , b , l y d se expresan en milímetros; P , P' en kilogramos, y R en kilogramos por milímetro cuadrado.

209. Con las fórmulas (1), (2), (3) y (4) se ha formado la siguiente:

Cadenas Abiertas no Afianzadas					Cadenas Afianzadas				
DIÁMETRO de la varilla de los eslabones <i>d</i> milímetros.	CARGA de prueba <i>P'</i> kilogramos.	CARGA de trabajo ordinario <i>P</i> kilogramos.	PESO DEL METRO LINEAL		DIÁMETRO de la varilla de los eslabones <i>d</i> milímetros.	CARGA de prueba <i>P'</i> kilogramos.	CARGA de trabajo ordinario <i>P</i> kilogramos.	PESO del metro lineal <i>P</i> kilogramos.	
			Cadena de eslabones recogidos <i>P</i> kilogramos.	Cadenas de eslabones recogidos <i>P</i> kilogramos.					
6	792	282	0,81	0,68	15	6008	2119	5,29	
7	1078	384	1,11	0,93	16	6835	2411	6,02	
8	1408	502	1,45	1,21	17	7716	2722	6,79	
9	1782	636	1,83	1,54	18	8651	3052	7,61	
10	2200	785	2,26	1,90	19	9639	3400	8,48	
11	2662	950	2,73	2,30	20	10680	3768	9,40	
12	3168	1130	3,25	2,74	22	12923	4539	11,37	
13	3718	1326	3,82	3,21	24	15379	5426	13,54	
14	4312	1536	4,43	3,72	26	18049	6368	15,89	
15	4950	1766	5,09	4,28	28	20933	7385	18,42	
16	5632	2008	5,79	4,86	30	24300	8478	21,50	
17	6358	2268	6,53	5,49	32	27341	9644	24,06	
18	7128	2543	7,32	6,16	34	30865	10888	27,16	
19	7942	2833	8,16	6,86	36	34603	12208	30,46	
20	8800	3140	9,04	7,60	38	38555	13600	33,93	
21	9702	3456	9,97	8,38	40	42720	15072	37,60	
22	10648	3800	10,94	9,20	42	47099	16616	41,45	
23	11638	4152	11,96	10,05	44	51691	18236	45,50	
24	12672	4520	13,02	10,94	46	56497	19932	49,73	
25	13750	4912	14,13	11,88	48	61517	21704	54,14	
26	14872	5304	15,28	12,84	50	66750	23550	58,75	
27	16038	5724	16,48	13,85	52	72197	25472	63,53	
28	17248	6144	17,72	14,90	54	77857	27468	68,54	
29	18502	6101	19,01	15,98	56	83731	29540	73,70	
30	19800	7065	20,34	17,10	58	89819	31688	79,95	

210. Proporciones de las cadenas. — En la fabricación se suele dar á las cadenas las proporciones siguientes, que no son invariables:

$$\begin{aligned}
 \text{Cadenas de eslabones alargados} & \dots \dots \dots \begin{cases} a = 3,5 d \\ b = 1,5 d \\ l = 3,5 d \\ h = l + 2 d = 5,5 d \end{cases} \\
 \text{Cadenas de eslabones recogidos} & \dots \dots \dots \begin{cases} a = 3,5 d \\ b = 1,5 d \\ l = 2,6 d \\ h = 4,6 d \end{cases} \\
 \text{Cadenas afianzadas} & \dots \dots \dots \begin{cases} a = 3,75 d \\ l = 3 d \\ h = 5 d \end{cases}
 \end{aligned}$$

El almirantazgo inglés adoptó como tipos para todas las cadenas $\begin{cases} l = 4 d \\ b = 1,6 d \end{cases}$

La marina militar francesa exige $\begin{cases} l = 3,25 d \\ b = 1,4 d \end{cases}$ para las cadenas abiertas;

y $\begin{cases} l = 3,85 d \\ b = 1,75 d \end{cases}$ para las afianzadas.

El radio de las poleas ó tambores donde se enrollan las cadenas, medido desde el eje al medio de la cadena, es 10 *d* á 12 *d*.

211. Cadenas Vaucanson. — Son muy poco resistentes por su forma; los eslabones no están soldados, y se emplean más bien como órganos de trasmisión de pequeñas fuerzas que como cadenas de carga. En todo caso, debe aceptarse como límite superior del coeficiente de trabajo $R = 2,5$ kilogramos por milímetro cuadrado, en cuyo caso

$$\begin{aligned}
 d &= 0,5 \sqrt{P} \\
 P &= 4 d^2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Las proporciones de la cadena están expresadas en la fig. 2.^a, lám. 4.^a

112. Cadenas de Galle (fig. 3.^a, lám. 4.^a). — Se componen de placas reunidas por pasadores que sirven de ejes de articulación. Un eslabón tiene *n* placas (*A, B, C, ...*), y el siguiente *n* + 1; (*r, b, c, h, ...*).

Sean *a* el ancho de las placas, *D* la longitud, *e* el grueso, *l* la distancia entre los centros de los agujeros para los pasadores y *d* el diámetro de estos.

La cadena puede romperse de estos tres modos:

1.º Por esfuerzo cortante en el pasador, cuya sección transversal tiene por área $\frac{\pi d^2}{4}$.

2.º Las placas, por tracción, según r s, que es la sección más débil á causa del orificio de diámetro d abierto para el pasador, y cuya área es $(a - d) e$.

3.º Las placas, por desgarramiento longitudinal, según los planos z . La sección resistente es $2 z e$.

Si la fuerza P de tracción se reparte uniformemente en las placas, resulta que en el eslabón que tiene n , cada placa A, B , etc., soporta un esfuerzo tractor igual á $\frac{P}{n}$.

La placa A transmite la mitad de este esfuerzo, ó sea $\frac{P}{2n}$ á la r del eslabón inmediato, y la otra mitad á la b . Del mismo modo, la placa B comunica $\frac{P}{2n}$ de fuerza á las b y c , y así en las demás; resultando, en definitiva,

que en los eslabones de $n + 1$ placas, las extremas r y h soportan $\frac{P}{2n}$, y las centrales b, c , etc., $\frac{P}{n}$. Para facilitar los cálculos, prescindiremos de la excepción, y supondremos que todas las placas están sometidas á la fuerza de extensión $\frac{P}{n}$.

Puede considerarse al pasador EE como suspendido de las placas r, b, c, h , y solicitado por fuerzas $\frac{P}{n}$ que obran según las placas A, B , etc..... A cada placa A le corresponden dos secciones del pasador EE resistentes al esfuerzo cortante.

Será preciso para la resistencia:

$$\frac{P}{n} = \frac{2 \pi d^2}{4} R'' (6)$$

siendo R'' el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante del material de que se compone el pasador.

Para que haya resistencia en las placas, es necesario que queden satisfechas las siguientes ecuaciones:

$$\text{Tracción.....} \quad \frac{P}{n} = (a - d) e R (7)$$

$$\text{Desgarramiento en } z \text{.....} \quad \frac{P}{n} = 2 z e R''' (8)$$

Siendo R y R''' los coeficientes de trabajo por tracción y desgarramiento. (*)

La ecuación (8) no se emplea generalmente, pues dando á z el valor $1,75 d$ á $2 d$ que se le asigna en la fabricación, hay resistencia sobrada al desgarramiento.

Las ecuaciones (6) y (7) resuelven el problema de determinación de las dimensiones de la cadena, una vez conocido P ; pero el problema es indeterminado porque intervienen cuatro incógnitas, que son n, a, d y e .

La indeterminación desaparece, en parte, por las relaciones siguientes basadas en la práctica de la fabricación.

$$\begin{aligned} a &= 3 d \\ l &= 4 d \\ D &= 7,5 d \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta además que $R'' = 0,8 R$ (núm. 100), las ecuaciones (6) y (7) se convierten en

$$\frac{P}{n} = 1,256 d^2 R$$

$$\frac{P}{n} = 2 e d R$$

$$\text{De las cuales se deduce.....} \quad \left\{ \begin{aligned} e &= 0,628 d \\ d &= \sqrt{0,79 \frac{P}{R n}} \end{aligned} \right\} (9)$$

e y d vienen expresados en milímetros, P en kilogramos y R en kilogramos por milímetro cuadrado.

Falta conocer n ; esta cantidad se determina por condiciones de fabricación y por la de que el peso sea el menor posible.

(*) R''' es igual á R'' para los metales.

El peso p del metro lineal de cadena de Galle, en kilogramos, es dado por la fórmula

$$p = (0,025 n + 0,021) d^2 \quad (10),$$

ó, puesto que $d^2 = 0,79 \frac{P}{Rn}$ (expresiones 9),

$$p = \left(0,02 + \frac{0,016}{n} \right) \frac{P}{R} \quad (11),$$

que dice disminuye el peso cuando n aumenta, á igualdad de las demás condiciones; pero entonces disminuye d , y siempre ha de resultar d mayor de 7 milímetros. Por esta razón el máximo valor de n , en las cadenas de Galle, es 5.

A R se le da el valor de 6 á 8 kilogramos por milímetro cuadrado.

213. Cadenas de Neustadt. — Se emplean para cargas, y principalmente para transmisiones, introduciéndose los pasadores entre los dientes de un piñón (fig. 4.^a, lám. 4.^a)

Las fórmulas aplicables á las cadenas construídas por Neustadt, son:

$$n = \text{número par inmediatamente mayor que } \frac{1}{3} \sqrt[3]{P}$$

$$e = \frac{0,35}{n+1} \sqrt{P} \quad d = \frac{0,2(n+2)}{(n+1)} \sqrt{P} \quad d = 0,57(n+2)e.$$

e y d vienen expresados en milímetros.

El piñón debe tener	8	dientes cuando	$P =$	250 á 3000	kilogramos.
»	»	»	9	»	4000 á 20000
»	»	»	10	»	20000 en adelante.

El radio r de la circunferencia media del piñón, debe estar calculado de modo que la cuerda que corresponde al intervalo de dos dientes, sea igual á la longitud D de los eslabones, de centro á centro; esto sucederá si

$$r = \frac{D}{2 \operatorname{sen.} \frac{180^\circ}{m}}$$

siendo m el número de dientes.

Para $m = 8$	9.....	10
corresponde $r = 1,3066 D$	$1,3619 D$	$1,6180 D$.

Las dimensiones restantes de la cadena son, en milímetros,

$$d_1 = 1,2 d \quad c = 6 + 1,67 d \quad D = 5 + 2,8 d \quad t = 2 + 0,9 d.$$

En cuanto al piñón, la base e_1 de los dientes, la altura ó salida k y su espesor u , son dados por las fórmulas

$$e_1 = \sqrt{\frac{P}{R}} \quad u = 4 \sqrt{\frac{P}{R}} \quad k = 1,3 e_1$$

siendo R el menor de los dos coeficientes de trabajo, por extensión ó por compresión, del material del piñón.

214. Peso de las cadenas. — Si llamamos:

L = longitud total de una cadena.

S = desarrollo ó longitud de varilla de hierro de toda la cadena.

l = longitud interior de un eslabón (figs. 30 á 32, lám. 3.^a)

s = desarrollo de un eslabón. En las cadenas afianzadas, el travesaño va incluído en s ; en las de nudos y en las Vaucanson, s comprende el desarrollo completo de todo el eslabón.

p = peso del metro lineal de cadena.

L' = longitud de cadena que, por su propio peso y sin carga adicional, hace trabajar los eslabones más comprometidos (el superior) á R kilogramos por mm.² de sección de ramas.

L'' = longitud de cadena que, por su propio peso, produce la rotura.

\bar{R} = coeficiente de fractura de la cadena en kilogramos por mm.² de sección transversal del eslabón.

Claro es que $\frac{S}{L} = \frac{s}{l}$; de modo que el peso del metro corriente de cadena p se obtendrá multiplicando el peso de un metro de varilla por la relación $\frac{s}{l}$.

Resulta, pues, expresando d en milímetros y p en kilogramos:

$$p = \frac{\pi d^2}{4} \times 1000 \times 0,0000078 \times \frac{s}{l};$$

y como $\frac{s}{l}$ tiene para las diversas clases de cadenas los valores que expresa la tabla que en el número siguiente aparece, tendremos:

$$(12). \left\{ \begin{array}{ll} p = 0,0190 d^2 \dots\dots\dots & \text{Cadena de eslabones ordinarios alargados.} \\ p = 0,0226 d^2 \dots\dots\dots & \text{Idem íd. de eslabones recogidos.} \\ p = 0,0235 d^2 \dots\dots\dots & \text{Cadenas afianzadas.} \\ p = 0,0367 d^2 \dots\dots\dots & \text{Cadena de nudos.} \\ p = 0,0300 d^2 \dots\dots\dots & \text{Cadena Vaucanson.} \end{array} \right.$$

Para las cadenas de Galle, se aplicarán las fórmulas (10) y (11).
 Puesto que $P = m d^2$ (fórmulas 3, 4 y 5), y $p = m' d^2$ (fórmula 12), la relación $\frac{P}{p}$ entre la carga de trabajo ordinario y el peso del metro lineal de cadena es constante é igual á $\frac{m'}{m} = k$.

Podremos establecer, por tanto, $P = k p$; y como ya hemos visto en los cables (núm. 204), la longitud de cadena cuyo peso total produce el mismo efecto que la carga P estará representada por la cantidad k ; de modo que $L' = k$.

La longitud L'' de fractura guardará con L' la misma relación que los coeficientes de fractura y de trabajo de la cadena.

CLASE DE CADENAS	$\frac{s}{l}$	$\frac{P}{p} = k$	$\frac{R}{\text{en kilogs. por mm.}^2}$	L' metros.	L'' metros.
Cadena ordinaria de eslabones alargados.....	3,14	500	24	500	2000
Idem íd. de eslabones recogidos.....	3,68	416	24	400	1600
Cadenas afianzadas.....	3,87	588	32	600	2100
Cadena de nudos.....	6,00	714	26	700	2101
Cadena Vaucanson.....	5,00	127	10	130	520

La tabla del núm. 209 contiene los pesos p de metro lineal de las tres primeras clases de cadenas.

215. De lo que antecede se deduce que en las cadenas ordinarias el peso p es tanto más pequeño, ó, lo que es lo mismo, la relación $\frac{P}{p}$ tanto más grande, cuanto más largos sean los eslabones. Por esta razón, las cadenas fijas que se emplean en las construcciones, ya como tensores, ya como anclajes permanentes, se fabrican de la forma que representan las figs. 5.^a y 6.^a de la lámina 4.^a, para disminuir el peso. Ambas se calcularán por la fórmula $P = R \omega$, siendo ω el área de la rama única (fig. 6.^a) ó la suma de la de las dos ramas (fig. 5.^a), y R el coeficiente de trabajo, que puede hacerse de 6 á 7 kilogramos por milímetro cuadrado para el hierro y de 7 á 9 para el acero dulce.

216. TABLA DE DIMENSIONES Y CARGAS DE LAS CADENAS ARTICULADAS DE NEUSTADT

CARGA de trabajo ordinario P kilogramos.	NÚMERO de placas n	ESPESOR de las placas e milímetros.	ANCHURA de las placas a milímetros.	DIÁMETRO menor de los pasadores d milímetros.	LONGITUD de los eslabones entre centros de orificios D milímetros.
250	2	2	13	5	18
500	2	3	16,5	6,5	21
750	2	4	19	7,5	23
1000	4	2	23	8	28
1500	4	3	25	10	32
2000	4	3	31	11	38
3000	6	3	34	14	41
4000	6	4	36	16	44
5000	6	4	42	17	51
7500	6	4	56	19,5	66
10000	8	4	61	23	71
15000	8	5	73	29	86
20000	8	6	85	35	100
25000	8	7	96	40	112
30000	8	8	108	44	130

Esta tabla ha sido dada por Neustadt.

ENVOLVENTES CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS, CALDERAS, TUBOS,
DEPÓSITOS, ETC.

217. Envolventes cilíndricas delgadas, sometidas á presiones interiores. — Supongamos un cilindro de diámetro d y espesor e , pequeño relativamente á d , sometido á presiones uniformes del interior al exterior, como las que puede causar un fluido perfecto.

Llamemos p la presión interior por unidad superficial, y consideremos un trozo de tubo de longitud igual á la unidad.

Sea BC un plano diametral cualquiera (fig. 7.^a, lám. 4.^a). Sobre el elemento cb , de área $cb \times 1$, obra una presión $p \times cb$, cuya componente normal al plano BC es $p \times cb \cos$. $A = ph$, llamando h á la proyección de cb sobre BC . El total de presiones normales á AB que tienden á romper el tubo por tracción, según este plano (fig. 8.^a), es $p d$.

La aplicación de la fórmula $P = R \omega$ conduce á la ecuación

$$\left. \begin{aligned} p d &= R \times 2 e \\ \text{ó } p d &= 2 R e \\ e &= \frac{p d}{2 R} \end{aligned} \right\} (1)$$

que relaciona p , d y e .

Este cálculo supone:

- 1.º Que la fractura tiene lugar según un diámetro.
- 2.º Que es constante el esfuerzo de tracción por unidad superficial en todo el espesor del tubo, lo cual no es exacto, y solamente puede admitirse sin error sensible cuando e es pequeño. En los cilindros gruesos, las presiones interiores originan extensiones que disminuyen del interior al exterior del espesor con arreglo á una cierta ley.

El espesor teórico que dan las fórmulas (1) se aumenta considerablemente para tener en cuenta defectos de fabricación de los tubos y fuerzas anormales á que se pueden encontrar sometidos, causas ambas de importancia que pueden acarrear la fractura. El aumento es dado por la experiencia; de modo que la fórmula teórica queda convertida en fórmula empírica.

218. Aplicación á los tubos de conducción de agua. — Generalmente se hacen de fundición, á cuyo metal corresponde un coeficiente de trabajo por extensión de 2 á 3 kilogramos por mm.² Haremos $R = 3$ kilogramos

por mm.²; y recordando que una atmósfera de presión es equivalente á 1,033 kilogramos por cm.², ó 0,01 kilogramos por mm.², la presión p en kilogramos por mm.² es $p = 0,01 n$, siendo n el número de atmósferas de presión efectiva ejercida por el fluido en las paredes interiores del tubo, y la fórmula (1) se convierte en

$$e = \frac{0,01 n d}{6} = 0,0016 n d (2),$$

en la que el espesor e del tubo y el diámetro d están expresados en milímetros.

Conviene recordar que para formar n ha habido necesidad de restar la presión atmosférica que obra del exterior al interior; de modo que la total del fluido interior es $n + 1$.

El espesor dado por la fórmula (2) es inadmisibles por su pequeñez. Por defectos de moldeo resulta muchas veces que el espesor del tubo no es uniforme; cuéntese además con que el metal se altera á la larga, interiormente, por los depositos salinos, y al exterior por la oxidación que producen las filtraciones. Finalmente, el tubo puede hallarse sometido á flexión cuando se asienta el fondo de la trinchera sobre que se apoya, y se encuentra de hecho sometido á golpes de ariete al cerrar las llaves é interrumpir la circulación del líquido por la cañería.

He aquí las fórmulas generalmente empleadas, en las que e y d vienen expresados en milímetros y n en número de atmósferas:

Fundición..	{ Molde horizontal.....	$e = 0,002$	$d n + 10$	} (3)
	{ Molde vertical.....	$e = 0,0016$	$d n + 8$	
Hierro.....		$e = 0,0008$	$d n + 3$	
Cobre laminado.....		$e = 0,00147$	$d n + 4$	
Plomo.....		$e = 0,0129$	$d n + 3$	
Zinc.....		$e = 0,0062$	$d n + 4$	
Encina ú olmo.....		$e = 0,0323$	$d n + 27$	
Hormigón comprimido.....		$e = 0,0054$	$d n + 40$	
Piedra natural.....		$e = 0,00363$	$d n + 30$	

Dupuit ha dado la siguiente fórmula relativa á tubos de fundición:

$$e = 8 + 0,0016 d n + 0,0128 d (4);$$

e y d representan milímetros y n atmósferas. El segundo término es el espesor teórico dado por la fórmula (2) y corresponde á un coeficiente de trabajo por extensión $R = 3$ kilogramos por mm.²

El primer término, es la compensación debida á las diferencias de espesor del tubo producidas por el moldeo, y á las pérdidas de resistencia por la oxidación y otras causas.

El tercer término, función de d , concede al tubo un exceso de espesor para resistir los golpes de ariete que se producen al interrumpir la circulación del líquido.

La cantidad n puede ser sustituida por $\frac{h}{10}$, siendo h la altura efectiva de carga expresada en metros.

En las fórmulas anteriores puede observarse que los términos función de n d son muy pequeños; así es que suelen despreciarse, á no ser para valores de n considerablemente grandes. Se aplica, por tanto, la fórmula siguiente, para tubos de fundición, en la conducción de aguas:

$$e = 8 + 0,0125 d (5).$$

219. Las proporciones del manguito, en los tubos que lo tienen para el enchufe (fig. 9.^a, lám. 4.^a), son las siguientes, expresadas en milímetros:

$$(6) \begin{cases} a = 18 + 0,0025 d \\ b = 5 + 0,007 d \\ g = 10 + 0,0135 d \\ h = 67 + 0,11 d \\ l = 49 + 0,09 d \\ r = 1,2 e \\ m = e + b - 2 \end{cases}$$

Cuando terminan en orejas ó rebordes (fig. 10, lám. 4.^a), se hace

$$s = 1,5 e \quad t = 10 + 2,5 e.$$

220. TABLA DE PESOS DE LOS TUBOS DE FUNDICIÓN

DIÁMETRO de los tubos d milímetros.	PESO POR METRO LINEAL EN KGS. DE LOS TUBOS CUYO ESPESOR e ES						
	8	10	12	14	16	18	20
	milímetros.	milímetros.	milímetros.	milímetros.	milímetros.	milímetros.	milímetros.
60	12,40	15,93	19,66	23,57	27,67	31,94	36,41
70	14,19	18,20	22,39	26,76	31,33	36,04	40,96
80	15,99	20,48	25,12	29,94	34,95	40,14	45,51
90	17,85	22,75	27,85	33,13	38,59	44,23	50,06
100	19,64	25,79	30,59	36,32	42,23	48,33	54,61
110	21,40	28,30	33,33	39,50	45,87	52,42	59,16
120	23,06	29,58	36,05	42,69	49,52	56,31	63,71
130	25,15	31,85	38,78	45,87	53,16	60,62	68,26
140	26,94	34,13	41,50	49,06	56,79	64,72	72,81
150	28,74	36,41	44,24	52,24	60,44	68,81	77,37
160	30,59	38,68	46,97	55,43	64,08	72,90	81,92
180	34,18	43,24	52,43	61,80	71,37	81,10	91,02
200	37,33	47,78	57,89	68,17	78,64	89,29	100,12
220	41,49	52,34	63,35	74,54	85,92	97,48	109,22
240	45,14	56,86	68,81	80,92	93,20	105,66	118,32
260	48,79	61,44	74,27	87,29	100,48	113,86	127,42
300	56,09	70,55	85,19	100,03	115,04	130,24	145,63
350	65,21	81,92	98,85	115,95	133,25	150,72	168,39
400	74,33	93,29	112,47	131,88	151,46	171,20	191,14
500	92,43	116,05	139,51	163,74	187,86	211,33	236,64
600	110,67	138,78	167,11	194,00	224,27	253,11	282,16
700	128,91	161,56	194,41	225,82	260,68	294,08	327,66
800	147,15	184,31	221,73	257,72	297,08	335,02	373,16
900	165,40	207,06	249,02	289,57	333,50	375,96	418,66
1000	183,63	229,82	276,34	323,03	369,90	416,93	464,16

Esta tabla da los pesos del cuerpo cilíndrico del tubo, sin contar las bridas ni los manguitos de enchufe. Para determinar el peso de estos accesorios se les considerará como cilindros huecos también, y se buscará la relación de su longitud al metro, pudiendo, por tanto, utilizarse también esta tabla.

221. Calderas y tubos de conducción de vapor de agua, aire comprimido, gases, etc.

Fundición...	{	Tubos para conducción de gases...	$e = 8 + 0,0125 d.$
		Id. de vapor y cilindros de bomba de aire.....	$e = 12 + 0,02 d$
		Cilindros de vapor y cuerpos de bomba.....	$e = 20 + 0,01 d$

Tubos y calderas de vapor de palastro:

Fórmula oficial en Francia.....	$e = 0,0018 n d + 3$
Id. id. en Alemania.....	$e = 0,00154 n d + 2,6$

En todas estas fórmulas, e y d están expresados en milímetros.

222. Tubos de caldera de vapor sometidos á presiones exteriores.—En este caso se encuentran los de calefacción indirecta de las locomotoras y otras máquinas. Las presiones producidas por el vapor, obran del exterior al interior y tienden á aplastar el tubo.

Fairbairn ha deducido de sus experiencias la siguiente fórmula:

$$p = 367937 \frac{e^{2,11}}{l d}$$

siendo p la presión en kilogramos por mm.², y e , d , l , el espesor, diámetro y longitud del tubo expresados en milímetros.

223. Tubos cilíndricos gruesos.—En las envolventes cilíndricas delgadas se ha supuesto que la fuerza de extensión se repartía uniformemente en todo el espesor del tubo. Esta hipótesis es inadmisibile para cilindros gruesos, como los de las prensas hidráulicas y las piezas de artillería; suponiéndolos divididos en anillos concéntricos, la presión interior producida por los gases ó el agua, es equilibrada en gran parte por las tensiones del anillo interior, de modo que el anillo inmediato soporta presiones normales más débiles, y en él se desarrollan por tanto tensiones de menor intensidad, continuando estas disminuciones hasta el anillo exterior.

Para los cálculos de resistencia, necesitamos conocer la tensión mayor, que es la de la superficie interior del cilindro.

Llamemos (fig. 11, lám. 4.^a):

D = diámetro exterior.

d = id. interior.

$$e = \frac{D - d}{2} = \text{espesor.}$$

R = coeficiente de trabajo por extensión.

R' = id. id. por compresión.

p = presión por unidad superficial ejercida del interior al exterior por los gases ó fluido cualquiera.

p' = presión por unidad superficial que se ejerce del exterior al interior sobre la superficie exterior del cilindro.

Mr. Lamé, en su *Tratado de la elasticidad*, ha deducido la siguiente fórmula (*):

$$e = \frac{d}{2} \left(\sqrt{\frac{R + p}{R + 2 p' - p}} - 1 \right) \quad (7)$$

Para los tubos colocados al aire libre, que es el caso ordinario, no hay más presión que la atmosférica, de modo que $p' = 1$ kilogramo por cm.²

El espesor e aumenta con p . Para que e tenga un valor real es preciso se verifique

$$\left. \begin{array}{l} R + 2 p' - p > 0 \\ \text{ó} \\ R + 2 p' > p \end{array} \right\} (8)$$

Si $R + 2 p' = p$, resulta e infinito, lo cual equivale á decir que no hay espesor suficiente que pueda resistir á la presión interior p .

224. Cilindros de prensa hidráulica.—Generalmente son de fundición; y como por el modo de funcionar de las prensas la presión es gradual y no instantánea, se puede hacer $R = 300$ kilogramos por cm.² (ó sea 3 kilogramos por mm.²). Refiriendo todas las cantidades que entran en la fórmula (7) al centímetro, se deduce de las desigualdades (8) que $p' = 1$, y $p < 302$. El límite superior de p es de 302 kilogramos por cm.², ó de 302 atmósferas.

La fórmula (7) se convierte en

$$e = \frac{1}{2} d \left(\sqrt{\frac{300 + p}{302 - p}} - 1 \right)$$

para $p = 50$ kilogramos por cm.² ó sea 50 atmósferas..... $e = 0,089 d$

$p = 100$ $e = 0,205 d$

$p = 150$ $e = 0,360 d$

* R representa también, en esta fórmula, la fuerza de extensión por unidad superficial desarrollada en el anillo interior.

Mr. Lamé deduce esta otra fórmula para determinar la fuerza de extensión R_1 por unidad superficial, que se produce en el anillo exterior por efecto de la presión interior p

$$R_1 = \frac{(p - p') d^2}{2 (d e + e^2)} - p'$$

Seguiremos expresando e y d en centímetros. Cuando p es mayor de 150 atmósferas, resultan espesores muy grandes y se ha de emplear entonces fundición de excelente calidad, ó metales en que R sea mayor, como, por ejemplo, el acero y el bronce.

225. Hemos determinado el límite del valor de p , presión interior, por la consideración de que los espesores e sean suficientes para resistir á las fuerzas de extensión que se desarrollan. Pero es preciso tener en cuenta que el tubo se puede romper también por aplastamiento de su superficie interior, al recibir directamente las compresiones del fluido; de aquí se deduce otro límite superior de p , que es R' , coeficiente de trabajo por aplastamiento.

Resulta en definitiva:

$$p < R + 2 p' \quad [\text{desigualdad (8)}]$$

$$p \leq R'$$

Y para los tubos libres, en que $p' = 1$,

$$p < R + 2$$

$$p \leq R'$$

Claro es que se ha de tomar como máximo de p el menor de estos límites. Fácil es determinar, para los diversos metales, el límite admisible de p (*).

	$R + 2$ en kilogramos por cm. ²	R' en kilogramos por cm. ²
Fundición	302	1400
Acero dulce.....	1202	2000
Hierro.....	802	800
Bronce	382	380

El bronce y el hierro se deformarán y romperán antes por compresión que por extensión, y lo contrario sucede al acero y á la fundición.

Para que p alcance grandes valores, interesa que $R + 2$ y R' sean próximamente iguales y muy grandes.

(*) Para formar la tabla, hemos aceptado los valores límite superior de los coeficientes de trabajo. Se ha tenido en cuenta también, por lo que respecta al acero, su mayor aptitud para resistir compresiones, la cual aumenta con la proporción de carbono.

226. **Piezas de artillería.** — Cuanto queda dicho es aplicable á las piezas de artillería, si bien se encuentran en condiciones más desfavorables que los cilindros de prensa hidráulica, porque como la combustión de la pólvora es rapidísima, las presiones y extensiones producidas lo son también.

Cuando R' es pequeño, se entuban las piezas con metales más resistentes á la compresión.

Cuando $R + 2$ es pequeño, se crea una presión exterior p' distinta de la atmosférica; entonces el límite superior de p crece, y de $R + 2$ se convierte en $R + 2 p'$. Aumentando convenientemente p' , se puede hacer que p tenga grandes valores sin que el espesor e aumente mucho (fórmula 7).

El aumento de p' se consigue sunchando el cañón por el exterior, ó bien formándolo de anillos concéntricos colocados de manera que los exteriores ejerzan presiones fuertes sobre los interiores.

Construída así la pieza, cuando no funciona resultan comprimidos los anillos interiores y extendidos los exteriores. Y cuando la deflagración de la pólvora tiene lugar, como la tensión máxima corresponde á los anillos interiores, y estos estaban comprimidos, quedan en definitiva sometidos á extensiones menos grandes, sin que sea por esto excesivo el trabajo por extensión de los anillos exteriores, más favorecidos en cuanto á las tensiones producidas por los gases.

227. **Envolventes esféricas delgadas. Caso de presiones uniformes.** — Sea p la presión por unidad superficial, r el radio de la esfera y e el espesor (fig. 12, lám. 4.^a).

Las presiones normales al plano diametral MN , tienen por valor $p \pi r^2$ (núm. 217), y la corona circular, sección causada por dicho plano, tiene por área aproximada, $2 \pi r e$.

La fórmula $P = R \omega$ se convierte en

$$p \pi r^2 = 2 R \pi r e$$

de donde

$$e = \frac{p r}{2 R} + K \quad (9)$$

siendo K una cantidad que se agrega al espesor teórico para tener en cuenta los defectos de fabricación, diferencias de espesor, oxidación, etc.

228. En el casquete esférico ACB , de radio r' en la base, la suma de presiones normales á AB es $p \pi r'^2$. Las tensiones en AB dirigidas según OA , OB , etc., siendo R la correspondiente á la unidad superficial, va-

len $2\pi r' e R$; y sus componentes normales á AB , son $2\pi r' e R \cos a$.

Resulta, pues,

$$p \pi r'^2 = 2 \pi r' e R \cos a$$

de donde, teniendo en cuenta que $\frac{r'}{\cos a} = r$, y añadiendo el sumando K por las razones anteriores,

$$e = \frac{p r}{2 R} + K$$

que es la misma fórmula del número anterior.

229. Depósitos de agua con palastro. — Los depósitos constan generalmente de un cuerpo cilíndrico formado de anillos enchufados y roblonados, y de un fondo en forma de casquete esférico.

El espesor de cada anillo es uniforme y se calcula teniendo en cuenta la altura de agua z desde el nivel superior hasta el borde inferior del anillo, en el cual las presiones tienen por valor $p = 1000 z$ por metro cuadrado.

Suele darse á R un valor pequeño; aceptaremos el de 4 kilogramos por mm.². Llamando d al diámetro de los anillos, aplicando la fórmula (1) relativa á tubos cilíndricos, y añadiendo 2 milímetros al espesor teórico e , se obtiene la fórmula

$$e = 0,125 d z + 2 \quad (10);$$

e viene dado en milímetros; d y z en metros.

Si todos los anillos se hacen con palastro de igual espesor, se dará á z el máximo valor.

Para el casquete esférico se empleará la fórmula (9); pues si bien las presiones p no son constantes, por deberse á cargas de agua distintas, las diferencias son despreciables. Llamando h á la altura del depósito, en el eje, $p = 1000 h$ por metro cuadrado; y será, haciendo $R = 3$ kilogramos por mm.² (*)

$$e = 0,166 h r + 2 \quad (11)$$

e viene expresado en milímetros; h y r en metros.

Si se quiere que el fondo tenga el mismo espesor que el anillo inferior del cilindro, igualense los valores de e (10) y (11), haciendo en (10) $z = h$; entonces resulta que es preciso que $r = 0,753 d$.

(*) Es prudente no rebasar este valor, por la dificultad de hacer perfectamente esférico el casquete; y de no serlo, cambian las condiciones, pues asemejándose á un plano resulta sometido á flexión.

PERNOS

230. Determinación de la fuerza P de extensión. — Debe procurarse, cuando sea posible, que los pernos trabajen exclusivamente por extensión, y no por esfuerzo cortante. Para que esto suceda, la fuerza de extensión P á que se halla sometido el perno se determinará del siguiente modo (fig. 13, lámina 4.^a):

1.º caso. El perno une dos piezas que tienden á separarse por efecto de la fuerza A .

$$P = A.$$

2.º La fuerza B es tangencial á las dos piezas. Si el perno no ha de trabajar por esfuerzo cortante, es preciso que oprima fuertemente las piezas para desarrollar una fuerza de rozamiento que equilibre á la fuerza B . La presión producida por el perno en las dos piezas, se traduce en extensiones. Llamando f al coeficiente de rozamiento de resbalamiento, y P á la fuerza de extensión del perno, igual á la compresión que produce,

$$P f = m B$$

siendo m un número arbitrario que medirá el grado de seguridad para evitar el resbalamiento. Se deduce que $P = \frac{m B}{f}$.

3.º La fuerza H es oblicua. Sea X la componente normal é Y la tangencial;

$$P = X + \frac{m Y}{f}.$$

231. Cálculo de las dimensiones. — Sea P la fuerza de extensión, d el diámetro del perno contado en la parte exterior de los filetes, y d_1 el diámetro del núcleo ó alma de la parte terrajada (fig. 14, lám. 4.^a).

Sean además:

s = paso de la hélice del filete.

a' = altura de la tuerca.

n = número de filetes inscritos en la tuerca.

t = profundidad del filete.

D = diámetro del círculo inscrito á la tuerca.

a = altura de la cabeza.

R = coeficiente de trabajo empleado en el cálculo del núcleo ó alma del perno.

Según el tipo de perno y sus dimensiones, varía la relación $\frac{d_1}{d}$; pero en general fluctúa entre 0,80 y 0,84.

Aceptando el caso más desfavorable, supondremos que $d_1 = 0,80 d$; la sección resistente á la extensión, es $\frac{\pi d_1^2}{4}$, de modo que

$$P = R \pi \frac{0,8 d^2}{4}$$

de donde

$$d = 1,41 \sqrt{\frac{P}{R}} \quad (1)$$

El valor de R depende de la calidad del material y del método de fabricación del perno.

Si los filetes están labrados con terraja, las fibras del cuerpo del perno habrán sufrido una cierta torsión, por lo cual convendrá disminuir R . Si están labrados al torno, puede ser R mayor.

En general, se da á R valores pequeños, de 2,5 á 4 kilogramos por milímetro cuadrado para los hierros, y de 6 á 8 para el acero.

232. La cabeza del perno puede romperse por desgarramiento, según la superficie cilíndrica ce señalada de puntos en la figura. No es prudente, por las dificultades de fabricación de la cabeza, que el coeficiente de trabajo de desgarramiento sea mayor que 1 kilogramo por mm.².

Será, pues,

$$\pi d a = P \quad \text{ó} \quad a = \frac{P}{\pi d} = 0,16 R d,$$

siendo R el coeficiente de trabajo por extensión aceptado para el alma del perno, é igual á 2,5 á 8 kilogramos por mm.²; a estará dado en milímetros.

Cuanto al diámetro D de la circunferencia inscrita á la cabeza, se determina por la condición de que la presión ejercida por la parte anular $bcef$ no llegue á 2 kilogramos por mm.².

Se hace generalmente $D \geq 1,4 d$.

233. La tuerca ha de tener altura suficiente para que el número de filetes satisfaga las siguientes condiciones: que los filetes del perno ó de la tuerca no se rompan por desgarramiento á causa de la tracción P , y que la presión entre unos y otros no llegue nunca á 1 kilogramo por mm.², para que la materia lubricante no sea expulsada. Puede emplearse la fórmula $a' = 0,27 R d$, en que a' y d representan milímetros; y R , kilogramos por mm.², es el coeficiente de trabajo empleado en el cálculo del alma del perno.

Dando á R los valores 2,5 á 8 resulta a' comprendido entre 0,68 d y 2,16 d . En general puede hacerse con completa seguridad $a' = d$ (*).

Cuando se quiera determinar la presión p por unidad superficial en los filetes de la tuerca y del perno producida por la fuerza de tracción P , se aplicará la fórmula

$$p = \frac{P d}{d_1 n t} \left[0,32 - \frac{t}{d} + 0,16 \left(\frac{t}{d} \right)^2 \right].$$

El tercer término del paréntesis puede suprimirse, sin error notable. P expresa kilogramos; y las demás cantidades, milímetros. Las tuercas son generalmente de forma exagonal.

El diámetro de la circunferencia inscrita varía de 1,5 d á 2,5 d ; puede ser dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} D &= 1 + d + 5s \dots \dots \dots \text{ para tuercas limadas.} \\ D &= 4 + d + 5s \dots \dots \dots \text{ para íd. sin limar.} \end{aligned}$$

D , d y s están expresados en milímetros.

Cuando D es muy pequeño, resultan de poco espesor las paredes de la tuerca, y se corre el riesgo de que se abran al terrajarlas.

Si las tuercas no están limadas ni ajustadas, se suelen emplear, para mejor repartir las presiones, rodajas ú ovalillos C (fig. 14), cuyo diámetro D' y espesor e se calculan por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} D' &= d + 10s \\ e &= 1,25s. \end{aligned}$$

(*) En los centenares de pernos que he tenido ocasión de romper por medio de la máquina Thomasset que posee la Academia de Ingenieros, empleando tuercas de altura $a' = d$, no solamente no se ha roto nunca el perno ó varilla por la tuerca, sino que ésta funcionaba perfectamente, y se movía á mano después de roto el cuerpo del perno, á pesar de las presiones sufridas por los filetes de perno y tuerca por efecto de la fuerza tractora de fractura.

Las experiencias hechas en el Instituto Stevens (Hoboken), acreditan que con la altura $a' = 0,4 d$ á $0,45 d$ hay suficiente para la resistencia; pero nos parece demasiado pequeña.

Las tuercas finas (para máquinas) se terminan por su parte exterior en una parte cónica ó esférica, conservando plana la base que se ajusta á la pieza á que va unida (fig. 14). En las que no están ajustadas (para construcciones) se achatañan los ángulos vivos de las dos bases (fig. 15, lám. 4.^a).

234. Diversos sistemas de pernos.— Se ha tratado de formar colecciones ó *escalas* de pernos, de dimensiones variadas que respondan á las necesidades de la construcción y de la industria, y en las cuales exista una cierta proporcionalidad entre el paso de la hélice, profundidad de los filetes, diámetro del perno, etc. Con arreglo á estas bases se construyen las terrajas ó matrices que sirven para la fabricación de los pernos que se expenden en el comercio, y por esta razón es interesante su conocimiento.

Los sistemas, ó *escalas*, más generalizados son el Whitworth (inglés) y Sellers (americano), tienen el inconveniente de que las dimensiones de todos los elementos de la colección de pernos vienen expresadas en pulgadas, ó en múltiplos ó divisores de pulgadas.

Hay otros varios sistemas de *filetes métricos*, fundados en medidas métricas, pero son menos empleados (*).

235. En el sistema Whitworth, el filete es un triángulo isósceles (fig. 16, lám. 4.^a), de vértice y base redondeados. He aquí las dimensiones de los elementos del filete:

Base del filete.....	= paso = s.
Angulo en el vértice del filete.....	= 55°.
Altura t_0 del filete, antes de redondear el vértice y los ángulos de las bases.....	= 0,96 s.
Altura t definitiva del filete.....	= 0,64 s.
Parte del vértice y base redondeados.....	= 0,166 s.

La escala completa Whitworth presenta los tipos de perno siguientes, definidos por su diámetro exterior d en pulgadas ó fracciones de pulgada. Debajo hemos puesto la equivalencia en milímetros.

(*) Sistemas de Delisle, Redtenbacher, Cail, etc., etc.

d en pulgadas inglesas...	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{7}{8}$	1				
d en milímetros.....	1,58	2,37	3,17	3,97	6,35	7,94	9,52	11,11	12,7	15,87	19,05	22,22	25,40
Valor de $\frac{1}{s}$ en pulgadas			40	32	20	18	16	14	12	11	10	9	8
d en pulgadas inglesas...	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$
d en milímetros.....	28,57	31,75	34,92	38,10	41,27	44,45	47,62	50,80	57,15	63,50	69,85	76,20	82,55
Valor de $\frac{1}{s}$ en pulgadas	7	7	6	6	5	5	4,5	4,5	4	4	3,5	3,5	3,25
d en pulgadas inglesas...	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	$4\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	5	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	6		
d en milímetros.....	88,90	95,25	101,60	107,95	114,30	120,65	127,0	133,35	139,70	146,05	152,40		
Valor de $\frac{1}{s}$ en pulgadas	3,50	3	3	2,87	2,87	2,75	2,75	2,62	2,62	2,50	2,50		

En cada caso particular se acomodará el diámetro que se necesite á los valores de esta tabla, redondeando las cifras en milímetros, por exceso ó por defecto.

En toda la serie, los diámetros d y los pasos s están ligados por la relación

$$s = 0,08 d + 0,04$$

en pulgadas inglesas. Los demás elementos, á su vez, se relacionan con s , como ya hemos visto anteriormente.

Las dimensiones en milímetros de las cabezas y tuercas de estos pernos, vienen dadas por las fórmulas empíricas siguientes:

$$\text{Altura de la cabeza } a = 0,7 d + 2,5$$

Tuercas:

Diámetro del círculo inscrito. (Tuercas hexagonales ó cuadradas)..... $D = 1,4 d + 5$

Altura de la tuerca..... $a' = 1,2 d \text{ á } 1,4 d$

236. En el sistema Sellers los filetes están achafanados, en vez de redondearse como en el sistema anterior (fig. 17, lám. 4.^a). Sin embargo, hoy se redondean un poco los ángulos entrantes que quedan formados en la base de los filetes, para evitar los inconvenientes, en punto á facilidad de rotura, que acarrearán.

He aquí las relaciones principales:

Angulo del filete..... 60°

Altura t_0 del triángulo del filete, antes de achafanar..... $0,866 s$

Altura t efectiva..... $0,65 s$

Fórmula para calcular el paso, en pulgadas..... $s = 0,24 \sqrt{d+0,625} - 0,175$.

La serie adoptada por el Instituto Franklin, es la siguiente:

d		1/2 En pulgadas.	d		1/2 En pulgadas.	d		1/2 En pulgadas.	d		1/2 En pulgadas.	d		1/2 En pulgadas.	d		1/2 En pulgadas.										
En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.		En pulgadas.	En milímetros.								
4/16	6,35	20	19,04	10	15/8	41,27	5,5	3	76,20	3,5	3/4	120,65	2,6	4/16	6,35	20	19,04	10	15/8	41,27	5,5	3	76,20	3,5	3/4	120,65	2,6
5/16	7,94	18	22,22	9	16/8	44,45	5	3 1/4	82,55	3,5	3 1/4	127,00	2,5	5/16	7,94	18	22,22	9	16/8	44,45	5	3 1/4	82,55	3,5	3 1/4	127,00	2,5
6/16	9,52	16	25,40	8	17/8	47,62	5	3 1/2	88,90	3,2	3 1/2	133,35	2,5	6/16	9,52	16	25,40	8	17/8	47,62	5	3 1/2	88,90	3,2	3 1/2	133,35	2,5
7/16	11,11	14	28,57	7	2	50,80	4,5	3 3/4	95,25	3	3 3/4	139,70	2,4	7/16	11,11	14	28,57	7	2	50,80	4,5	3 3/4	95,25	3	3 3/4	139,70	2,4
1/2	12,70	13	31,75	7	2 1/4	57,15	4,5	4	101,60	3	4	165,05	2,4	1/2	12,70	13	31,75	7	2 1/4	57,15	4,5	4	101,60	3	4	165,05	2,4
9/16	14,29	12	34,92	6	1 1/2	63,50	4	4 1/4	107,95	2,9	4 1/4	152,40	2,2	9/16	14,29	12	34,92	6	1 1/2	63,50	4	4 1/4	107,95	2,9	4 1/4	152,40	2,2
10/16	15,80	11	38,10	6	2 3/4	69,85	4	4 1/2	114,30	2,7	4 1/2			10/16	15,80	11	38,10	6	2 3/4	69,85	4	4 1/2	114,30	2,7	4 1/2		

El sistema Sellers es muy semejante al Whitworth.

237. Sistemas métricos.—Como ejemplo presentaremos el de Delisle núm. 2; el perfil es como el Sellers, con la diferencia de que el ángulo en el vértice del filete es de 53°, 8'.

La escala se determina por la fórmula

- $s = 0,2 d$ para los diámetros comprendidos entre 4 y 8 milímetros.
- $s = 0,8 + 0,1 d$ 8 y 40 »
- $s = 2,8 + 0,05 d$ 40 y 80 »

Diámetros d en mm.	6	8	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40	48	56	64	72	80
Pasos s en mm.	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4

EXTENSIONES Y COMPRESIONES
PRODUCIDAS POR LOS CAMBIOS DE TEMPERATURA

238. Supongamos, para fijar las ideas, que se trata de una barra AB (fig. 18, lám. 4.^a), de longitud unidad, cuya temperatura desciende t grados. En estado libre, la barra se contrae hasta quedar de longitud $Ab = AC$; pero si estuyese sujeta en sus extremos, de modo que la contracción no pudiera tener lugar, la barra quedaría en tensión, como si AC estuviera sometida á un esfuerzo tractor capaz de alargar su longitud la cantidad CD . La contracción no verificada equivale, pues, á una extensión, y el coeficiente de trabajo R debido á esta causa puede alcanzar gran valor, y se determina del modo siguiente:

Sea t el decrecimiento de temperatura y r el coeficiente de dilatación (núm. 172); la contracción no verificada es, por metro lineal, $i = tr$; y por la fórmula $E = \frac{P}{i}$, en que $P = R$ representa la fuerza por unidad superficial de sección transversal que produce la deformación lineal i , tendremos

$$R = E t r.$$

Si se tratase de elevaciones de temperatura y de dilataciones no verificadas, resultarían compresiones R dadas por la misma fórmula.

La diferencia de temperaturas extremas en nuestro clima, puede llegar á 60° para materiales expuestos á la intemperie; pero para los colocados á cubierto es suficiente contar con 30°. Si se coloca en obra un prisma ó barra á una temperatura límite y se ancla ó sujeta por sus extremos, habrá que añadir al coeficiente de trabajo por extensión ó compresión debido á las cargas ó fuerzas exteriores, el correspondiente á la temperatura, que tiene los valores siguientes deducidos de la fórmula anterior.

MATERIALES	COEFICIENTE DE TRABAJO R EN KILOGRAMOS por mm. ² debido á diferencias de temperatura de		
	± 1° Kilogramos.	± 30° Kilogramos.	± 60° Kilogramos.
Hierro.	± 0,230	± 6,90	± 13,80
Alambre de hierro.	± 0,280	± 8,40	± 16,80
Acero.	± 0,264	± 7,92	± 15,84
Fundición	± 0,104	± 3,12	± 6,24
Cobre.	± 0,221	± 6,63	± 13,26
Plomo.	± 0,014	± 0,42	± 0,84

De los grandes valores que para R da esta tabla, se deduce lo importante que es asegurar en las construcciones la facilidad de las dilataciones y contracciones, de modo libre, en las piezas de hierro, para evitar el gran trabajo que en otro caso resulta al material.

ENLACE DE BARRAS PLANAS Y DE VARILLAS POR MEDIO DE PASADORES

239. Barras planas unidas con pasadores. — Consideremos el caso de una barra (cuya sección transversal es rectangular de altura l y de espesor e), terminada en una cabeza cilíndrica del mismo grueso y provista de un orificio circular en donde se aloja el pasador N de diámetro d (fig. 19, lámina 4.^a). El esfuerzo de tracción P de la barra se convierte en esfuerzo constante para el pasador, según la sección $s s$.

Veamos el modo de calcular las dimensiones de la barra y pasador.

Parece á primera vista que las cantidades l , e y d estarán bien determinadas por las ecuaciones de resistencia empleadas en la tracción y esfuerzo cortante,

$$P = R l e \quad P = R \frac{\pi d^2}{4};$$

y que haciendo $ab = mn = \frac{1}{2} l$, y $ch = \frac{1}{2} l$, la cabeza de la barra se encontrará en idénticas condiciones resistentes que el cuerpo de la barra y el pasador. No es así, sin embargo, y la experiencia acredita que las dimensiones calculadas por las fórmulas anteriores son deficientes en lo que se refiere á la cabeza de la barra y al pasador, los cuales pueden romperse de los modos siguientes:

1.º El pasador ó clavija N es cortado por la barra, especialmente cuando ésta es de metal más duro que aquél.

2.º El ojo cilíndrico se desgarrar y alarga sin agrietarse, cuando el metal es muy dulce (*) (fig. 20, lám. 4.ª), ó bien se aplasta en c (fig. 19); ambos fenómenos se manifiestan muy enérgicamente cuando el pasador es de metal más duro que la barra, pero ocurren también aun en el caso de que tengan la misma dureza.

3.º La cabeza se abre interiormente en b y m , y exteriormente en h (figura 1.ª, lám. 5.ª), rompiéndose la semicabeza bhm , como si se tratase de una pieza empotrada en sus extremos b y m y sometida á flexión por una fuerza P aplicada á su punto medio.

Los modos de fractura 1.º y 2.º se explican observando que la presión en el semicírculo bcm (fig. 19, lám. 4.ª), no se reparte de modo uniforme, sino que varía desde el valor cero que tiene en b y en m , hasta el máximo que existe en c ; de modo que en este punto hay gran presión sobre pequeña superficie, y puede quedar cortado el pasador si su diámetro es pequeño, ó puede quedar aplastada la cabeza en c , ó desgarrado el ojo.

Es fácil dar explicación de los desgarramientos característicos del tercer modo de fractura. La fuerza P no se reparte de modo uniforme en la sección ab, mn , como sucede en el cuerpo de la barra, sino que en b y m la

(*) En experiencias que hemos practicado con palastros gruesos de acero dulce de Bilbao, se deformaba el ojo hasta adquirir una longitud doble del diámetro primitivo sin que apareciera la menor grieta, lo cual demuestra la gran ductilidad del material.

tracción por unidad superficial es mucho mayor que en a y n . En efecto; si en una barra de caucho se trazan las líneas $abmn, a'b'm'n'$ (fig. 2.ª, lám. 5.ª), y se ejecuta una tracción, éstas toman la posición $am n, a' m' n'$; y si las deformaciones $b'b' m m'$ son mayores que las aa', nn' , es prueba de que las fuerzas de extensión correspondientes por unidad superficial siguen la misma ley y explica las grietas b y m de la fig. 1.ª; la h es una consecuencia de ellas.

De cuanto antecede, se deduce que no basta el diámetro d concedido al pasador por la fórmula $P = \frac{\pi d^2}{4} R''$, ni la anchura $ab + mn = l$ dada á la sección resistente de la cabeza (fig. 19, lám. 4.ª), y que hay que reforzar también la dimensión ch .

Como se desconoce la ley de repartición de presiones en el semicilindro bcm (fig. 19, lám. 4.ª), no es posible resolver el problema por el cálculo, y hay que recurrir al método experimental.

Las experiencias más notables se han realizado en los Estados-Unidos, primero por el ingeniero S. Smith (1857 á 1866) en 57 barras destinadas al puente de San Carlos, y cuyas cabezas, forjadas á martillo, tenían la forma típica de este procedimiento de fabricación que representa la fig. 3.ª (lámina 5.ª); y más tarde (1875), en la fábrica de Edgemoor, con 54 barras, de un puente de Kentucky, de cabeza perfectamente circular (fig. 19, lám. 4.ª), forjadas con prensa hidráulica.

En las segundas, el radio es igual á la dimensión mayor oh de las primeras (fig. 3.ª, lám. 5.ª).

En las dos series de experiencias se trató de determinar la relación más conveniente entre la anchura l del cuerpo de la barra, su grueso e , el ancho resistente de la cabeza $l' = ab + mn$ (fig. 19, lám. 4.ª), y el diámetro d del pasador, para que la fractura por tracción tuviese lugar por el cuerpo de la barra y no por la cabeza ni por el pasador. A este efecto se sometieron á la fractura por extensión diversas barras, á las que se proveía de cabezas y pasadores de dimensiones variables, y no se aceptaban como convenientes las relaciones entre l, d, l' y e , hasta que por lo menos tres barras semejantes se rompían por el cuerpo sin manifestar la menor apariencia de fisura ó grieta en el ojo ni alteración en el pasador.

En la tabla siguiente, que consigna las relaciones deducidas de los resultados de experiencia, el ancho l de la barra está representado por el número 1.

Ancho de la barra <i>l</i>	Diámetro del pasador <i>d</i>	NÚMERO 1 Cabezas alargadas forjadas con martillo.		NÚMERO 2 Cabezas circulares forjadas con prensa hidráulica.	
		Ancho total en la cabeza <i>l'</i>	Grueso máximo de las barras <i>e</i>	Ancho total en la cabeza <i>l'</i>	Grueso máximo de las barras <i>e</i>
1,00	0,67	1,33	0,21	1,50	0,21
1,00	0,75	1,33	0,25	1,50	0,25
1,00	1,00	1,50	0,38	1,50	0,38
1,00	1,25	1,50	0,54	1,60	0,54
1,00	1,33	»	»	1,70	0,59
1,00	1,50	1,67	0,70	1,85	0,70
1,00	1,75	1,67	0,88	2,00	0,88
1,00	2,00	1,75	1,08	2,25	1,08

De esta tabla se deduce:

1.º El menor valor que puede darse á *d*, es $d = 0,66 l$, si se quiere evitar la fractura por el pasador. Claro es que ha de quedar satisfecha, en primer término, la ecuación de resistencia $P = \frac{\pi d^2}{4} R''$; pero si de esta ecuación resultase $d < 0,66 l$, se aumentará el diámetro hasta que $d \geq 0,66 l$.

Algunos ingenieros, para ponerse más en guardia contra las fracturas del pasador, aceptan para *d* un límite inferior $d = l$. Seguiremos esta opinión.

2.º *l'* ha de aumentar con la relación $\frac{d}{l}$.

Las relaciones entre *d*, *l*, *l'* y *e* que resultan de la tabla anterior, están bien representadas por las fórmulas empíricas siguientes:

$$(1) d = 1,9 \sqrt[3]{l e^2}$$

$$(2) \begin{cases} l' = \left(1,25 + 0,25 \frac{d}{l} \right) l & \text{Barras de cabeza alargada forjada con martillo.} \\ l' = \left(1,13 + 0,5 \frac{d}{l} \right) l & \text{Cabezas circulares forjadas con prensa hidráulica.} \end{cases}$$

Al mínimo valor de $d = l$ corresponde en la fórmula (1) un valor de $e = 0,4 l$; si *e* aumenta, el valor de *d* correspondiente, dado por dicha fórmula, será mayor que *l*.

240. Resumiendo; he aquí el cuadro de operaciones necesarias para calcular las dimensiones de la barra y del pasador:

(a) Por la fórmula $P = R l e$, en que *R* es el coeficiente de trabajo por extensión, se determinan las dimensiones *l* y *e* del cuerpo de la barra. Como el problema es indeterminado, puesto que hay dos incógnitas *l* y *e*, se dará á una de ellas valor arbitrario, ó el que convenga á las demás circunstancias de la obra, cuidando siempre de que $e < l$ (*).

(b) Si *e* es menor que $0,4 l$, se hará $d = l$.

Si $e > 0,4 l$, se determinará *d* por la fórmula (1) del párrafo anterior.

En ambos casos ha de verificarse

$$R'' \frac{\pi d^2}{4} \geq P$$

y de lo contrario se dará á *d* el valor que de esta condición resulte. *R''* es el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante.

(c) Se calculará *l'* por las formulas (2) anteriores.

(f) Se tomará para dimensión *ch* (fig. 3.ª, lám. 5.ª), en las cabezas forjadas con martillo, el valor *l'* de la fórmula (2) correspondiente á cabezas forjadas con prensa hidráulica.

241. Casos particulares.—En el caso representado en la fig. 4.ª (lám. 5.ª), las barras *A* y *B* están, con respecto á las *a* y *b*, en el mismo caso que las dos barras de la fig. 19, lám. 4.ª. Se seguirá, pues, el mismo procedimiento sin más diferencia que la de sustituir *P* por $\frac{1}{2} P$, porque la fuerza total de tracción se divide en dos partes iguales que obran en cada una de las ramas de la horquilla.

En el caso de que la horquilla *AB* fuese muy ancha, ó se temiese por cualquier concepto que la repartición de la fuerza *P* no se hiciese del modo uniforme que hemos dicho, se supondrá cada rama sometida á una tracción $\frac{3}{4} P$.

242. El enlace representado en la fig. 5.ª (lám. 5.ª) es el mismo caso anterior. Se puede suponer que el espesor *e* de la barra central *C* consta de dos semiespesores *a*, *b*, iguales á $\frac{1}{2} e$. Se calcularán las dimensiones del cuerpo de barra *C* por la fórmula $P = R l e$; y para el cálculo de las dimensiones

(*) Es conveniente que $e < l$, no solamente porque las experiencias en que se fundamenta esta teoría se hicieron con barras cuyo ancho era igual á lo más al grueso, sino también porque cuanto mayor sea *e* más peligrosa es la flexión del pasador.

de la cabeza y pasador, se hará uso de las fórmulas (1) y (2), pero sustituyendo, no el valor de e encontrado, sino $\frac{1}{2} e$; y considerando como fuerza tractora, en cada una de las ramas A y B , el valor $\frac{1}{2} P$.

243. Si hay varias barras A, B, C , yustapuestas (fig. 6.^a, lám. 5.^a), obrando en el mismo sentido (lo cual debe evitarse siempre que se pueda, siendo preferible emplear una barra única), se hará el cálculo de los espesores parciales e', e'', e''' y de los anchos l', l'', l''' , de cada barra por la fórmula $P = R l e$, teniendo en cuenta la fuerza de extensión á que cada una se halla sometida; y para la determinación de las dimensiones de las cabezas y del pasador, se emplearán las fórmulas (1) y (2), tomando como valor de l un término medio de los de las barras, y para e la suma $e' + e'' + e'''$.

El caso representado en la fig. 10 de la lám. 13, se resolverá como si existiesen tan sólo las barras a, b, c , estando sometida la a á la fracción de fuerza P correspondiente, que aquí es $\frac{1}{2} P$.

Finalmente; cuando varias barras diferentes A, B, C , dirigidas en distintas direcciones (fig. 7.^a, lám. 5.^a), están atravesadas por un mismo pasador, se calculará cada una separadamente, se verá cuál es el valor de d que les corresponde y se tomará el mayor de estos valores para diámetro del pasador. Con este valor de d común á las barras, y con cada uno de los valores particulares de l , se determinarán por las fórmulas (2) los de l' correspondientes á cada una de ellas.

244. Las fórmulas del núm. 240 deben aplicarse fielmente, con especialidad en los casos de valores grandes de P , y tratándose de cargas en movimiento, como sucede en los puentes. Este modo de enlace, por pasadores, es de gran aplicación en toda clase de entramados de hierro, é interesa calcular bien su resistencia, pues que de ella depende la del conjunto.

Solamente en el caso de que los valores de P sean estáticos y no muy grandes, como acontece en las armaduras de no excesiva luz, y de que resulte para $d = l$ valor demasiado grande en relación con el ancho de la pieza que lleva el pasador, y en la cual hay que practicar el orificio correspondiente, podrá descenderse al límite inferior $d = 0,66 l$, y entonces las ecuaciones que resuelven el problema son:

$$\begin{aligned} P &= R l e \\ \text{para determinar } l \text{ y } e. \quad d &= 0,66 l, \end{aligned}$$

y se comprobará que $R'' \frac{\pi d^2}{4} \geq P$; de lo contrario se dará á d el valor que resulte del cumplimiento de esta condición.

l' se calculará por las fórmulas (2) del núm. 239.

245. Varillas y barras cilíndricas unidas con pasadores ó pernos. — A continuación presentamos algunas disposiciones:

1.^a (Fig. 9.^a, lám. 5.^a). El peligro de ser cortado el pasador lo dan las ramas de la horquilla con que termina la barra inferior. Las dimensiones de los extremos de cada una de las ramas de la horquilla y el valor del diámetro d del pasador, se calcularán como en el caso de la fig. 19, de la lám. 4.^a, tomando como fuerza tractora $\frac{1}{2} P$.

El diámetro exterior d'' del ojo cilíndrico con que termina la varilla, se hará $d'' = 2 d$.

2.^a (Fig. 8.^a, lám. 5.^a). Las planchas A y B pueden cortar al pasador; cada una de ellas, ejerciendo una tracción $\frac{1}{2} P$, se halla en el caso de la figura 19, de la lám. 4.^a.

Como las planchas A y B se ensanchan á partir de los extremos, no puede fijarse con rigor el valor de l , anchura, y por tanto el espesor e que está relacionado con l por la ecuación $R l e = \frac{1}{2} P$. En este caso, que se presenta en las articulaciones de armaduras y entramados (fig. 5.^a, lám. 13), puede suponerse dibujado en la plancha el cuerpo de una barra (línea de puntos), de ancho arbitrario l , que tuviese la misma cabeza con que se termina la plancha. Se aceptará la relación $l = d$ para esta barra imaginaria (número 240 b), en cuyo caso debe verificarse $e \leq 0,4 l$; admitiendo el signo igual y sustituyendo este valor en la fórmula $R l e = \frac{1}{2} P$, se obtendrá

$$e = \sqrt{\frac{P}{5 R}},$$

que servirá para determinar el espesor e de la plancha.

Fijado el valor de e lo estará el imaginario l , y, por tanto, el diámetro d del pasador, que es igual á l . Habrá, no obstante, de comprobarse que

$R'' = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{1}{2} P$, y de lo contrario, dar á d el valor que le resulta de esta igualdad.

Resumiendo, las fórmulas son :

$$\begin{array}{l} \text{Espesor de cada plancha.....} \quad e = \sqrt{\frac{P}{5R}} \\ \text{Diámetro del pasador.....} \quad d = 2,5 e \\ \text{Diámetro } d'' \text{ del ojo de la barra.....} \quad d'' = 2 d \end{array} \quad (1)$$

El valor de $l' = m + n$, se determinará por la fórmula (2) del número 239 (*), haciendo $d = l$.

3.^a (Fig. 10, lám. 5.^a). Está en el mismo caso que la fig. 8.^a

4.^a (Fig. 11, lám. 5.^a). Las ramas a y b se calculan por la fórmula $\frac{1}{2} P = R l e$; la dimensión m se hace igual á $1,5 d$, siendo d el diámetro de las varillas.

RODILLOS

246. Soportes cilíndricos.—Sea O (fig. 12, lám. 5.^a), un rodillo cilíndrico de longitud de eje igual á l , comprimido por una fuerza P' entre dos planos $B B'$, $A A'$. Por cada metro lineal de cilindro, la fuerza de compresión será $\frac{P'}{l} = P$. El plano $A A'$, el $B B'$ y el rodillo, se deforman, y el contacto geométrico que se operaba según generatrices del cilindro, tendrá lugar según superficies que vamos á determinar, siquiera sea hipotéticamente.

Si el cilindro fuese indeformable, la deformación se produciría únicamente en el plano $A A'$, por ejemplo (considerando tan sólo, por razón de simetría, el semicilindro inferior), y sería $A D A'$ (fig. 13, lám. 5.^a); si, por el contrario, el plano fuese indeformable, el cilindro se aplastaría á lo largo de $A A'$. Puesto que la deformación definitiva se debe al cilindro y al plano, supondremos que ésta tiene lugar según $A C A'$, línea que se obtiene dividiendo en dos partes iguales las ordenadas del arco $A D A'$.

Observaremos que $A A'$ es muy pequeño, es decir, que la superficie de contacto que se establece, común al cilindro y plano, está comprendida entre planos $a b$, $c d$, muy próximos (fig. 12, lám. 5.^a); de modo que $m b$, $n d$, tienen longitud sensiblemente igual al radio r del cilindro.

(*) Si son dos ó más las barras que se articulan á unas mismas planchas (fig. 5.^a, lám. 1.^a), se resuelve el problema para cada una de las barras, y se asigna para espesor de las planchas el mayor de los valores de e que hayamos hallado.

$B D$ (fig. 13, lám. 5.^a), es sensiblemente igual á $\frac{\overline{A B}^2}{2r}$, despreciando el cuadrado $\overline{B D}^2$ que es cantidad muy pequeña.

Las fibras $O D$, han experimentado un acortamiento total $C D$, ó sea por unidad de longitud, $i = \frac{C D}{r}$. A este acortamiento corresponde una compresión por unidad superficial de fibra $p = E \frac{C D}{r}$, deducida de la fórmula conocida $E = \frac{p}{i}$, ó, puesto que $C D = C B$, $p = E \frac{B C}{r}$.

En las demás fibras paralelas á $O D$, las deformaciones totales estarán medidas por las ordenadas de la curva $A C A'$, y las deformaciones i por unidad de longitud, se obtendrán dividiendo los valores anteriores por r , que es sensiblemente la longitud de las fibras, según antes hemos dicho. Como las fuerzas p correspondientes se obtienen multiplicando las deformaciones i por el valor de E , resulta en definitiva que la suma de todos los valores de p , es decir, la fuerza total P , se obtendrá multiplicando por $\frac{E}{r}$ el área del segmento $A C A'$, y será

$$P = \frac{E}{r} \times (\text{área de } A C A')$$

$$\text{ó} \quad P = \frac{E}{r} \times \frac{2}{3} B C \times A A' \quad (1).$$

Además, la resistencia exige que $p \leq R'$, siendo R' el coeficiente de trabajo por compresión del material con que se ha fabricado el rodillo, ó lo que es lo mismo,

$$E \frac{B C}{r} \leq R' \quad (2).$$

Y puesto que $B C = \frac{1}{2} B D = \frac{\overline{A B}^2}{4r}$ y $A A' = 2 B A$, las expresiones (1)

y (2) se convierten en

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{E}{3} \frac{\overline{A B}^2}{r^2} \\ E \frac{\overline{A B}^2}{4r^2} \leq R' \end{array} \right\} \quad (3)$$

y eliminando AB ,

$$\left. \begin{aligned} P &\leq \frac{8}{3} R' r \sqrt{\frac{R'}{E}} \\ r &\geq \frac{3}{8} \frac{P}{R'} \sqrt{\frac{E}{R'}} \end{aligned} \right\} (4)$$

Estas fórmulas resuelven el problema, pues sirven para determinar r conociendo P , ó la inversa, no olvidando que P representa la fuerza de compresión por unidad de longitud de cilindro. Si hubiese n rodillos, y entre ellos se distribuyese P de modo uniforme, en las fórmulas anteriores se sustituiría P por $\frac{1}{n} P$.

La segunda de las fórmulas (4) pone de manifiesto:

1.º Que el radio r del rodillo ha de ser directamente proporcional á la carga P .

2.º Que á igual valor de P , el radio r aumenta cuando crece E (coeficiente de elasticidad). Esto quiere decir que r será tanto menor cuanto más elástico sea el material, porque entonces E tendrá pequeño valor.

3.º El valor de r es menor cuando R' es grande.

Se deduce que el material más apto para rodillos, y el que exigiría menor valor del radio r , es aquel que tenga E pequeño y R' grande. El tipo es la fundición de hierro.

247. En el caso en que el rodillo se apoye sobre una superficie cilíndrica convexa (fig. 14, lám. 5.^a) de radio r_1 , M. Résal propone la fórmula siguiente:

$$P \leq \frac{8}{3} R' r \sqrt{\frac{R'}{E}} \sqrt{\frac{r_1}{r+r_1}} \quad (5)$$

Y cuando la superficie cilíndrica es cóncava, de radio r' (fig. 15, lám. 5.^a):

$$P \leq \frac{8}{3} R' r \sqrt{\frac{R'}{E}} \sqrt{\frac{r'}{r'-r}} \quad (6)$$

Esta fórmula no es aplicable más que á valores finitos de r' , y no muy grandes.

Como en los casos anteriores, téngase presente que $P = \frac{P'}{l}$, ó $P' = P l$.

Pueden aplicarse las fórmulas anteriores, con bastante aproximación,

cuando los rodillos son de la forma dibujada en la fig. 16 (lám. 5.^a). El radio r es en este caso el de curvatura de la superficie cilíndrica.

Todas las fórmulas precedentes son semiempíricas, porque se fundan en una hipótesis arbitraria de deformación del cilindro y plano; sin embargo, en la práctica dan resultados aceptables.

248. Soportes esféricos.— Para los soportes esféricos se repetirían los razonamientos y cálculos precedentes, sin más diferencia que la de sustituir el volumen del segmento cilíndrico de base $ACA'A$ y longitud unidad (figura 13, lám. 5.^a), por el del casquete esférico ACA' que vale aproximadamente $\frac{1}{2} BC \pi \overline{AB}^2$, y se deduciría, llamando P' á la fuerza total de compresión,

$$\left. \begin{aligned} P' &\leq \pi r^2 \frac{2R'^2}{E} \\ r &\geq \sqrt{\frac{EP'}{2\pi R'^2}} \end{aligned} \right\} (7)$$

En estas fórmulas, r representa el radio de la esfera.

Para el caso de la fig. 14, se multiplicaría el segundo miembro de la primera desigualdad por el factor $\frac{r_1}{r+r_1}$; y si el caso fuese el representado en la fig. 15, por el factor $\frac{r'}{r'-r}$.

249. Ejercicios.—1.º (Fig. 8.^a, lám. 13). Tirante A de madera de pino, sometido á una fuerza de extensión $P = 6000$ kilogramos, engendrada por la fuerza T que le comunica el par B ensamblado á espera.

La ensambladura puede romperse de uno de los tres modos siguientes:

1.º Por extensión en la sección c , que es la más debilitada. Área resistente $\omega = ca$, siendo a el grueso del tirante, contado perpendicularmente al plano de la figura.

2.º Por compresión en m . Área resistente $\omega = ma$.

3.º Por desgarramiento longitudinal de las fibras á lo largo de b . Área resistente $\omega = ba$.

Es principio mecánico, de conveniente cumplimiento, que todos los elementos de la construcción contribuyan de igual modo á la resistencia del conjunto, en obsequio á la economía. Deberemos tener, llamando R , R' y R'' á los coeficientes de trabajo por extensión, compresión y desgarramiento,

$$P = Rca \quad P = R'ma \quad P = R''ba.$$

De modo que

$$\frac{c}{m} = \frac{R'}{R} \quad \text{y} \quad \frac{c}{b} = \frac{R'''}{R} \quad (1).$$

Supongamos que por la calidad de la madera podamos hacer:

$$R = 40 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

$$R' = 80 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

$$R''' = 10 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

La fórmula de la extensión $P = R \omega$, da

$$6000 = 40 c a \quad \text{y} \quad c a = 150 \text{ cm.}^2$$

Fijando a , por ejemplo, teniendo en cuenta las escuadrías de que se puede disponer, se hallará c :

$$a = 10 \text{ cm.}$$

$$c = \frac{150}{10} = 15 \text{ cm.}$$

m y b se calcularán por las relaciones (1), y se obtendrá:

$$m = 7,5 \text{ cm.}$$

$$b = 60 \text{ cm.}$$

La altura total de escuadría es $15 + 7,5 = 22,5 \text{ cm.}$, y el canto $a = 10 \text{ cm.}$ Generalmente se da á m menos valor, forzando al efecto el de R' .

Como el coeficiente de trabajo por desgarramiento R''' es pequeño con respecto al de tracción R , de aquí que la dimensión b resulta algo grande siempre. Cuando por circunstancias especiales no puede darse á b la magnitud que exige el cálculo, se toma una de las disposiciones que señalan las figs. 11 y 12 de la lám. 13.

En la 11, por ejemplo, cada una de las ramas de la horquilla de hierro, se calculará por la fórmula

$$\frac{1}{2} P = R \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = 375 \text{ mm.}^2 \\ R = 8 \text{ kilogramos por mm.}^2 \end{array} \right.$$

Cada uno de los dos pasadores de hierro presenta dos secciones resistentes

al esfuerzo cortante, en total cuatro; de modo que llamando d al diámetro y $R'' = 6$ al coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante, será:

$$\left. \begin{array}{l} 4 R'' \omega = P \\ 4 \times \frac{\pi d^2}{4} \times 6 = 6000 \end{array} \right\} d = 17 \text{ mm.}$$

El tirante puede romperse por desgarramiento en la parte ocupada por los pernos; llamando b á la distancia del último perno al extremo de la pieza, las superficies resistentes al desgarramiento son dos rectángulos de lados b y a . Será, pues,

$$\left. \begin{array}{l} 2ba \times R''' = 6000 \\ R''' = 10 \text{ kilogs. por cm.}^2 \\ a = 10 \text{ cm.} \end{array} \right\} b = 30 \text{ cm.}$$

2.º Enlace de un tirante inclinado a (fig. 6.º, lám. 13), con un par D , por medio de barras planas E y pasadores. Todo de hierro.

$$P = 4000 \text{ kilogramos.}$$

$$R = 8 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ para tracción.}$$

$$R'' = 6 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ para esfuerzo cortante.}$$

A cada rama E le corresponde un esfuerzo tractor de

$$\frac{1}{2} P = 2000 \text{ kilogramos} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} P = R \omega$$

$$\left. \begin{array}{l} l = \text{ancho} \\ e = \text{espesor} \end{array} \right\} \omega = l e = \frac{2000}{8} = 250 \text{ mm.}^2$$

$$\text{haremos } e = 0,2 l \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 36 \text{ mm.} \\ e = 7 \text{ mm.} \end{array} \right.$$

Aplicando las fórmulas del núm. 244, se obtiene: diámetro de los pasadores $= d = 0,66 l = 24 \text{ milímetros.}$

Comprobación:

$$2713 = R'' \frac{\pi d^2}{4} > \frac{1}{2} P = 2000.$$

El valor de $d = 0,66 l$ es, pues, aceptable; si fuera menor lo deduciríamos de la ecuación

$$R'' \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} P.$$

Para determinar la sección transversal en las cabezas, que supondremos circulares, ó lo que es lo mismo, la dimensión $l' = m + n$ (fig. 6.^a, lám. 13), emplearemos la segunda de las fórmulas (2) del núm. 239, y resulta

$$l' = \left(1,13 + 0,5 \frac{d}{l}\right) l = 52.$$

El diámetro total de la cabeza, será $l' + d = 52 + 24 = 76$ milímetros.

El diámetro d'' del ojo conque termina la barra a , es $d'' = 2 d = 48$ milímetros.

El diámetro de la varilla a , obtenido por la fórmula $P = R \omega$, que es en este caso

$$4000 = 8 \frac{\pi d^2}{4},$$

es de $= 26$ milímetros.

Todos estos valores se toman en número entero de milímetros, por exceso, en beneficio de la resistencia.

La placa B se une al par D con pernos c que trabajarán en dos secciones transversales por esfuerzo cortante. Si es n su número y d' su diámetro, tendremos:

$$2 n \frac{\pi d'^2}{4} R'' = P$$

que servirá para determinar d' ó n .

3.º *Articulación de una armadura* (fig. 5.^a, lám. 13).

Tirante A ,	$P = 4000$	kilogramos de extensión.	
» B ,	$P'' = 6000$	»	»
» C ,	$P' = 1200$	»	»

Seguiremos el procedimiento explicado para la disposición segunda del núm. 245, adoptando $R = 7$ kilogramos por mm.² para la tracción, y $R'' = 6$ kilogramos por mm.² para el esfuerzo cortante.

Fuerza $P = 4000$ kilogramos.

$d =$ diámetro del pasador.

$e =$ espesor de las planchas.

$$e = \sqrt{\frac{P}{5 R}} = 11 \text{ mm. } \text{ } d = 2,5 e = 28 \text{ mm.}$$

Comprobación del valor de d :

$$3692 = R'' \frac{\pi d^2}{4} > \frac{1}{2} P = 2000$$

$l' = m + n.$

$$l' = \left(1,13 + 0,5 \frac{d}{l}\right) l \text{ [núm. 239 (2)],}$$

y puesto que estos cálculos parten de la hipótesis $d = l$ (núm. 245, 2.^a), substituyendo, tendremos

$$l' = 46 \text{ milímetros.}$$

El diámetro total de la parte circular de las planchas para recibir la barra A será

$$l' + d = 74 \text{ milímetros:}$$

diámetro del ojo de la barra $= d'' = 2 d = 56$ milímetros.

$$\text{Fuerza } P'' = 6000 \text{ kilogramos}$$

$e = 14 \text{ } d = 35.$

Comprobación de d :

$$5769 = R'' \frac{\pi d^2}{4} > \frac{1}{2} P = 3000$$

$l' = m + n = 58$ milímetros.

Diámetro total de la parte circular $= l' + d = 93$ milímetros.

$$d'' = 2 d = 70 \text{ milímetros.}$$

$$\text{Fuerza } P' = 1200 \text{ kilogramos.}$$

$e = 6 \text{ } d = 15.$

Comprobación de d :

$$1059 = R'' \frac{\pi d^2}{4} < \frac{1}{2} P = 600,$$

$l' = 25.$ Diámetro del extremo de la plancha $= l' + d = 40$ milímetros

$$d'' = 2 d = 30 \text{ milímetros.}$$

De todos los espesores diferentes que resultan para cada una de las dos planchas ó bridas, por los esfuerzos que les transmiten las barras, tomaremos el mayor, que es $e = 14$ milímetros.

Todas las dimensiones obtenidas podrán modificarse, por exceso, si se creyese conveniente por razones de construcción.

4.º Tirante A , de varilla de hierro, unido al par B de madera por medio de rosca y tuerca (fig. 7.ª, lám. 13).—Extensión $P = 4000$ kilogramos.

El diámetro d de la varilla, que ha de estar terrajada en su extremo, se calculará por la fórmula (1) del núm. 231,

$$d = 1,41 \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Haciendo $R = 4$, se obtiene $d = 44$ milímetros.

Si se emplea la terraja Whitworth, será:

Altura de la tuerca..... $a' = 1,2 d = 53$ mm. (núm. 235).

Diámetro de la circunferencia inscrita..... $D = 1,4 d + 5 = 68$ mm.

Si el par estuviese asegurado fuertemente al apoyo, de modo que el tirante no tuviese libertad para dilatarse y contraerse libremente, como sucedería si hubiese rodillos ú otras disposiciones convenientes, el coeficiente de trabajo R del hierro experimentaría aumento tanto más considerable, cuanto mayor fuese la diferencia de temperaturas entre la extrema inferior y la media en el momento de montar la armadura y templar el tirante (véase número 238). Para una diferencia de temperaturas de 30° , el crecimiento de R es de 6,9 kilogramos por mm.^2 , de modo que el valor total del coeficiente de trabajo podrá llegar á ser $R = 4 + 6,9 = 10,9$ kilogramos por mm.^2 , número aceptable si se tiene en cuenta que es excepcional y no permanente. Por esta razón, y contando con hierro de buena calidad, cuando haya que sumar al efecto de las cargas el de las temperaturas, se podrá llegar á dar á R valores de 11 á 12 kilogramos por milímetro cuadrado.

VIGAS DE HIERRO ENSAMBLADAS Y EMPALMADAS.

CÁLCULO DE LAS ROBLONADURAS

250. Los empalmes y roblonaduras de los palastros y hierros que entran en la composición de vigas y entramados metálicos, se hacen por medio de roblones.

Un roblón no es otra cosa que un clavo de forma cilíndrica (fig. 6.ª, lámina 16), de longitud mayor que la suma de espesores de los palastros ó hierros que une. La parte saliente se remacha y recibe la forma de una segunda cabeza.

El remache puede hacerse en frío, estando el roblón á la temperatura ordinaria, ó en caliente, introduciéndolo preliminarmente en la fragua hasta que esté al rojo cereza (900° á 1.000°) y llevándolo inmediatamente á su sitio para remacharlo. El remache en frío sólo es posible, aun en hierros dulces, para roblones de pequeño diámetro; los remaches en caliente, especialmente para roblones gruesos, se hacen mejor á máquina que con el martillo, sobre todo empleando remachadoras hidráulicas.

La cabeza primera del roblón, que es la que tiene cuando se le emplea, es generalmente de forma de casquete esférico (A , figs. 6.ª y 7.ª, lám. 16); también se hacen de cabeza avellanada, plana ó ligeramente convexa (A' y A'' , fig. 7.ª) ó mixtas (A_1 , fig. 7.ª).

Los roblones de cabeza avellanada no ofrecen tantas garantías de resistencia como los mixtos ó los de cabeza esférica.

Cuando los roblones se ponen en caliente, el diámetro de los taladros abiertos en los palastros debe exceder, en un milímetro, al del cuerpo del roblón. Este se recalca, primeramente, para que llene exactamente el hueco, antes de formar la segunda cabeza.

A la segunda cabeza se le da la forma cónica cuando el remache se hace simplemente con el martillo (B , fig. 7.ª), y la esférica (B') ó de conoide (B'') cuando se emplea estampa ó máquina.

Todas las dimensiones del roblón se hacen depender de d , diámetro del cuerpo. La parte saliente a (fig. 6.ª, lám. 16), suele ser de $1,3 d$ á $1,7 d$, y esta diferencia se debe á la menor ó mayor holgura con que el roblón entra en los orificios, puesto que ha de llenarlos después por completo al aplastarlo para formar la segunda cabeza.

Las cabezas esféricas tienen $1,7 d$ á $1,8 d$ de diámetro en la base, y $0,6 d$

de altura. A las de forma de cono (*B*) ó de conoide (*B''*), se les da $2d$ de base y $0,8d$ de altura.

251. Modo de perforar los hierros.— Los palastros se perforan por medio del punzón de acero, que obra como sacabocados, ó con el taladro, que hace el trabajo de la barrena.

El punzón es más económico, y los orificios que produce son favorables á la resistencia de la roblonadura, porque son causa de que se aumente la adherencia entre los hierros (núm. 257) y la resistencia al esfuerzo cortante del cuerpo del roblón (núm. 258). Además, los orificios abiertos á punzón son algo cónicos; el roblón toma esta forma por el recalado, y al contraerse por el enfriamiento, causa una compresión lateral que aumenta la adherencia de las planchas y las mantiene unidas aun cuando salte la cabeza.

El punzón tiene, en cambio, el inconveniente de alterar el metal en las inmediaciones de los orificios, de modo desventajoso para la resistencia (número 259).

El taladro hace con más perfección el trabajo de perforación de los hierros, de modo que se obtiene más exactitud en la coincidencia de los orificios de las piezas que hay que superponer para hacer la roblonadura; circunstancia muy importante, pues interesa que el cuerpo del roblón, siendo normal á los hierros ó palastros que une, pueda pasar por todos los orificios sin grandes holguras, á fin de que las que inevitablemente han de existir, desaparezcan con el recalado que se produce al aplastarlo para formar la segunda cabeza.

La perfecta coincidencia de los orificios no se obtienen nunca; en trabajos esmerados, ejecutados con taladro, se suele encontrar desviaciones de medio milímetro. Cuando se emplea el punzón, los errores son mucho mayores.

El taladro permite perforar un espesor cualquiera de hierro; de modo que con él se podrán abrir á un tiempo orificios en planchas superpuestas, en cuyo caso se obtiene la coincidencia más perfecta. Pero cuando se emplea el punzón, no es posible hacer lo mismo, porque la relación entre el diámetro del orificio y el espesor de los hierros tiene un límite inferior que no es posible rebasar.

En efecto (fig. 8.^a, lám. 16), siendo d el diámetro del orificio, y por tanto del punzón, e el espesor del palastro, \bar{R}''' el coeficiente de fractura por desgarramiento del hierro, y R' la compresión límite por unidad superficial que puede sufrir el metal del punzón sin romperse, claro es que ha de verificarse

$$\frac{\pi d^2}{4} R' > \pi d e \bar{R}'''$$

es decir, que la compresión límite que puede sufrir el punzón sea mayor que la resistencia al desgarramiento, para que éste tenga lugar sin fractura de aquél. Se deduce que $d > 4e \frac{\bar{R}'''}{R'}$; el punzón se hace de acero muy duro

bien templado, para el cual $R' = 80$ kilogramos por mm.², y como para el hierro $\bar{R}''' = 30$ kilogramos por mm.², término medio, se obtiene en definitiva $d > 1,5e$, es decir, que el diámetro del orificio no puede ser menor de vez y media el espesor del hierro, sin peligro de fractura del punzón por aplastamiento.

252. Comparación de los procedimientos de remache de las cabezas.— Según ya hemos dicho, para que el roblonado esté bien hecho, es preciso, no solamente que la segunda cabeza del roblón quede bien formada, sino que el cuerpo, que ha sido recalado (martillado ó prensado á lo largo del eje), se ensanche transversalmente y llene por completo la cavidad formada por la superposición de orificios de los hierros, con todas las irregularidades que pueden resultar de la imperfección de coincidencia.

Cuando los hierros son de pequeño espesor, y por lo tanto, el cuerpo del roblón tiene escasa longitud, el objeto anterior se consigue (en las roblonaduras en caliente), empleando el martillo, y todavía mejor si los roblones son de pequeño diámetro. Pero si el roblón es de longitud y diámetro grandes, el recalado con martillo es imperfecto, y el cuerpo del roblón no queda en contacto con las paredes de los orificios.

La fig. 9.^a, lám. 16 (*), representa un corte longitudinal de una roblonadura, hecho con una acepilladora, para demostrar lo que dejamos indicado. Mr. Considère, autor de esta experiencia, hizo coser seis palastros de hierro, que sumaban 72 milímetros de espesor, empleando roblones de 25 milímetros de diámetro, remachados con martillo.

Para colocar el primer roblón se hicieron coincidir, en cuanto fué posible, los orificios de los palastros. A pesar de esto, el cuerpo del roblón no estaba en contacto perfecto sino en los palastros exteriores, quedando en los centrales huelgos hasta de dos diez milímetros.

Los orificios para el segundo roblón, se hicieron excéntricos, de intento, produciendo resaltos y huecos alternativos de $\frac{3}{4}$ de milímetro, muy comunes en obras bien ejecutadas. El recalado sólo consiguió el relleno de los orificios correspondientes á los palastros extremos, resultando holguras de medio milímetro en los centrales.

(*) Los palastros y roblones están dibujados en escala $\frac{1}{4}$; y las cavidades ó huelgos del roblón y orificios, en escala $\frac{1}{2}$, para hacerlos más perceptibles.

Finalmente, en el tercer roblón, en cuyos orificios se crearon resal-
tos de 2 milímetros á uno y otro lado, quedaron huecos de 1 á 1,5 milí-
metros.

Como vemos, los roblones no se ensanchan y ocupan perfectamente el
hueco sino cerca de las cabezas, en los palastros extremos.

Empleando máquinas, el contacto es mucho mayor; y especialmente con
las remachadoras hidráulicas, el roblón se aplasta y llena perfectamente
todo el hueco de los orificios. Cierto es que al enfriarse hay una pequeña
contracción, pero la holgura que por esta causa se forma, es poco apre-
ciable.

Tanto por esta razón como por las ventajas que resultan de la rapidez en
el remachado (núm. 257), el trabajo de las máquinas hidráulicas es supe-
rior al de las ordinarias, y sobre todo al trabajo hecho con el martillo.

253. De qué modo resisten los roblones.— En hierros empalmados so-
metidos á extensión ó compresión, los roblones puestos en frío trabajan por
esfuerzo cortante (figs. 10, 21, 23 y 24, lám. 16), ya en una sección, ya en
dos ó más.

Cuando los roblones se remachan en caliente de la manera antes explica-
da, ofrecen dos especies de resistencias muy diferentes: una es la resisten-
cia al esfuerzo cortante que acabamos de mencionar, y otra es la resistencia
al resbalamiento que oponen las planchas por efecto de la presión que sobre
ellas ejerce el roblón. Esta presión es grande; cuando se ha formado la se-
gunda cabeza con el martillo ó con la máquina, el metal conserva una tem-
peratura muy elevada, y la contracción que tiende á operarse se traduce en
presiones enérgicas de los hierros roblonados, en tanto que el cuerpo del ro-
blón, no habiéndose podido contraer sino en la pequeñísima cantidad que la
deformabilidad de los hierros ó palastros le concede, queda en condiciones
idénticas á las de una varilla que hubiese sufrido una deformación por ex-
tensión equivalente á la contracción no operada.

En una palabra: estamos en el caso explicado en el núm. 238, y se-
gún vimos allí, la presión p que se produce en las planchas roblonadas por
cada unidad superficial de sección de roblón es $p = E t r$, siendo t el decre-
cimiento de temperatura (desde que se empezó á formar la segunda cabeza
del roblón hasta que toma la temperatura ambiente) y r el coeficiente de di-
latación del hierro. La presión total que comunicará á las planchas el ro-
blón, llamando ω á su sección transversal, será $P = p \omega$, y multiplicando por
el coeficiente f de rozamiento de resbalamiento de hierro sobre hierro, se
tendrá la resistencia F' al resbalamiento de las planchas ó hierros, ó sea la

fuerza de tracción necesaria para que el resbalamiento se inicie. Así, te-
nemos:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia por cada roblón} \dots \dots \dots & F = p \omega f \\ \text{Resistencia por cada unidad superficial de sec-} \\ \text{ción transversal de roblón} \dots \dots \dots & F' = p f \end{aligned}$$

El cuerpo de roblón trabaja á p kilogramos de extensión por unidad su-
perficial de sección transversal.

La fuerza P ejecuta la compresión de los palastros roblonados, por in-
termedio de la corona circular base de la cabeza del roblón. Si esta base es
muy grande, la compresión por unidad superficial en los palastros y cabeza
será pequeña, y recíprocamente; por otra parte, es preciso que la cabeza no
se desgarre ni que los palastros padezcan por la compresión. Después de va-
rios tanteos, la experiencia ha formulado las proporciones que hemos indica-
do en el núm. 250.

254. Resistencia al resbalamiento y al esfuerzo cortante.—No se pueden
determinar con exactitud por el cálculo los valores de F , F' y p , por las
numerosas causas de error que hay (*); por esta razón se ha tratado de
hallar dichos valores por experiencias directas, y así lo han verificado mu-
chos ingenieros notables, entre ellos D. K. Clark, Fairbairn, Lavalley,
Gouin, etc.

Unidas tres planchas (fig. 11, lám. 16) con un roblón, y ovalado el orifi-
cio correspondiente á la plancha C del medio para que pueda resbalar entre
las laterales A y B , se ha cargado la C gradualmente hasta llegar á un peso
 F' productor del resbalamiento. Dividiendo F' por $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$, sección del ro-
blón, se obtiene la resistencia al resbalamiento, ó mejor dicho, la adherencia
por unidad superficial de sección de roblón.

Las experiencias antes citadas, realizadas en las condiciones que acaba-
mos de indicar, han dado, como término medio, $F' = 15$ kilogramos por mm.^2
de sección de roblón; es decir, que por cada mm.^2 de sección de roblón se nece-
sitan 15 kilogramos de esfuerzo tractor para vencer la adherencia de los hie-
rros roblonados y que se inicie el resbalamiento.

Teniendo en cuenta que en las experiencias anteriores (fig. 11, lám. 16)

(*) Según M. Rézal, la adherencia entre cada dos planchas por cada mm.^2 de sección de roblón,
es $0,03 t f$. En el caso de la fig. 11 (lám. 16) habría que multiplicar por 2, puesto que hay doble
rozamiento.

hay que vencer una doble adherencia, pues que son dos las superficies de resbalamiento, se obtiene para resistencia entre cada dos planchas, ó sea por cada dos superficies en contacto, la mitad del valor anterior, es decir, 7,50 kilogramos por mm.² de sección de roblón. Si aceptamos para coeficiente de rozamiento f , de 0,50 á 0,60, se halla que p está comprendido entre $\frac{7,50}{0,60} = 12,5$ y $\frac{7,50}{0,50} = 15$; es decir, que el cuerpo del roblón sufre una extensión de 12,5 á 15 kilogramos por mm.², valores considerables muy próximos al límite de elasticidad del metal.

De lo que precede, parece deducirse que en dos palastros dispuestos del modo representado en la fig. 12 (lám. 16), la resistencia al resbalamiento ó adherencia, había de ser de 7,5 kilogramos por mm.² de sección de roblón; pero no es así, (*) porque la cabeza C del roblón hace las veces de la plancha B de la fig. 11 y hay doble rozamiento. Por esta razón, la fuerza F' , y lo mismo la $F' = \frac{F}{\omega}$, tienen el mismo valor en ambos casos. Es más, en algunos

casos ha resultado mayor la fuerza total F en la experiencia representada en la fig. 12, debido á que al hacer el remache de la cabeza C (fig. 12) se incrusta una pequeña parte del metal en la ranura ú orificio alargado de la plancha A ; por esto es conveniente que sea la cabeza E la que se remache.

Resumiendo: la adherencia producida por los roblones remachados en caliente puede estimarse, como término medio, en 7,5 kilogramos por mm.² de sección de roblón, *por cada dos superficies en contacto*: si hay n planchas, las superficies en contacto serán $n - 1$ (fig. 10, lám. 16), y el roblón presentará también $n - 1$ secciones al esfuerzo cortante. Puede, por tanto, decirse que la adherencia es de 7,5 kilogramos por mm.², *por cada sección de roblón expuesta al esfuerzo cortante*, exceptuando el caso de dos palastros (fig. 12), que debe considerarse idéntico al de tres (fig. 11), porque las cabezas del roblón hacen las veces de tercer palastro.

255. Por lo que respecta á la resistencia que ofrece un roblón al esfuerzo cortante, las experiencias demuestran que el coeficiente de fractura \bar{R}'' es el mismo que si se tratara de un pasador del mismo metal. Parece que debiera ser aquél algo mayor, porque la adherencia de los palastros ó hierros roblonados subsiste, aunque en pequeña cantidad, hasta el último mo-

(*) M. Cuche, en su excelente obra *Voit: matériel roulant* (tomo III, pág. 131), cita experiencias hechas con palastros de acero y roblones (de acero de la fábrica Petin y Gaudet) dispuestos del modo señalado en la fig. 12 (lám. 16), que han dado por resultado una adherencia de las dos planchas, de 17 á 17,5 kilogramos por mm.² de sección de roblón, cantidad mayor que el promedio que hemos aceptado para el caso de la fig. 11 (lám. 16).

mento; de modo que la fuerza exterior, productora de la fractura del roblón por esfuerzo cortante, tiene también que vencer esta nueva resistencia. Pero observaremos que, para que la adherencia subsista, es preciso que las cabezas del roblón se apoyen bien en los palastros, y esto no sucede en los últimos momentos, porque obedeciendo á la fuerza de tracción, los palastros ó hierros se alargan, y su sección transversal se contrae (núm. 57) y disminuye de espesor.

La adherencia, y por tanto el exceso de resistencia al esfuerzo cortante, sólo tendrá lugar cuando los palastros ó hierros roblonados tengan exceso de espesores ó de resistencia al esfuerzo tractor, y no se produzcan las contracciones de sección transversal.

256. De qué modo resiste una roblonadura.—Supongamos dos palastros empalmados, sometidos á extensión (A y B , figs. 13, 14 y 15, lám. 16), producida por fuerzas crecientes graduales. Si las dimensiones de todas las partes del empalme están bien proporcionadas, se iniciará primeramente el resbalamiento de las planchas, una vez vencida la adherencia; y entonces, apoyándose las paredes interiores de los orificios sobre el cuerpo de los roblones, empezarán éstos á trabajar por esfuerzo cortante. Continuando la progresión de fuerzas fractoras, el empalme se romperá, ya por fractura de todos los roblones por esfuerzo cortante, quedando intactos los dos palastros, ya por fractura por extensión de la plancha, según una sección transversal que pase por los centros de uno de los orificios de una fila de roblones (fig. 14), que es en donde la sección resistente es menor (*).

Depende, pues, la resistencia de la roblonadura de la adherencia de las planchas, de la resistencia al esfuerzo cortante de los roblones y de la resistencia de las planchas al esfuerzo fractor. Es de la mayor importancia, por lo tanto, el conocimiento de todas las causas que ejercen influencia en estas resistencias.

257. Circunstancias que influyen en la adherencia.—La adherencia de las planchas roblonadas, ó lo que es lo mismo, la resistencia al resbalamiento que proporciona cada milímetro cuadrado de sección de roblón, es muy variable, como que intervienen en el resultado final un gran número de causas que es conveniente conocer, no solamente para hacer bien una roblona-

(*) El objeto de la roblonadura puede ser también el de obtener impermeabilidad en las uniones (depósitos de agua, gasómetros, carenas de los barcos, y, en general, recipientes sometidos á débil presión), ó bien impermeabilidad y gran resistencia á un tiempo (calderas de vapor). Cuando se quiere obtener impermeabilidad, ha de regularse la separación de roblones para que los hierros estén en íntimo contacto por todas partes.

dura, sino también para calcular su resistencia. He aquí las principales circunstancias que ejercen influencia en la adherencia:

1.^a *Estado de las superficies de contacto de los hierros roblonados.*— Cuanto más lisas sean estas superficies, menor es el coeficiente de rozamiento y la adherencia será menor. En este punto, debe darse la preferencia á las robladuras hechas con palastros perforados con punzón, pues sabido es que los bordes del orificio próximos á éste (*A*, fig. 16, lám. 16), quedan algo redondeados, mientras que en *B*, del lado de la matriz, se forman pequeñas rebabas, y estas irregularidades son favorables á la resistencia al resbalamiento; con el taladro no se crean rebabas.

Experiencias cuidadosas de Mr. Considère han dado por resultado:

	FUERZA DE TRACCIÓN necesaria para iniciar el resbalamiento de las planchas en kilogramos por mm. ² de sección de roblón.
Palastros perforados con taladro (promedio).	11,10
Palastros punzonados (promedio).....	13,40
Es decir, un beneficio de resistencia de 22 por 1000 para los segundos.	

2.^a *Temperatura del roblón en el momento de remacharlo.*— Las interesantes experiencias practicadas por Mr. Considère, con planchas dispuestas del modo representado en la fig. 11 (lám. 16) y provistas de un aparato multiplicador que acusaba milésimas de milímetro en el movimiento de los palastros al resbalar, han dado el siguiente resultado:

Cuando el remache se hace con el martillo, la temperatura más conveniente del roblón, en beneficio de la adherencia que después se produce, es la de 650° (rojo muy sombrío); á ella correspondió una fuerza de 14 á 15 kilogramos por milímetro cuadrado de sección de roblón. Desde el rojo muy sombrío al cereza claro (1000°) la adherencia disminuye al par que aumenta la temperatura, siendo para el roblón remachado á 1000° de 10 á 11 kilogramos por mm.² de sección; de 650° á la temperatura ordinaria, disminuye también la adherencia, siendo tan sólo de 7 kilogramos por mm.² para remaches hechos á 400°. Los orificios para los roblones habían sido abiertos con taladro, y los roblones tenían 8 milímetros de diámetro.

Empleando la remachadora hidráulica, con la cual se ejercieron presiones de 70, 90 y 105 kilogramos por mm.² de sección para aplastar el roblón y formar la segunda cabeza, se observó que el máximo de adherencia en los

palastros (14,70 kilogramos por mm.² de sección de roblón) correspondía á 90 kilogramos de presión por mm.², y 650° de temperatura al hacer el remache (rojo muy sombrío, lo mismo que cuando se empleaba el martillo). La adherencia depende á un tiempo de la presión y de la temperatura, siendo un mínimo (inferior á 6 kilogramos por mm.² de sección de roblón) para presiones de 70 kilogramos por mm.² y temperatura de 800° á 500°, es decir, para pequeñas presiones y temperaturas. Los roblones ensayados tenían de 15 á 19 milímetros de diámetro, y los orificios de la plancha habían sido abiertos con taladro.

Es fácil explicarse estas influencias; con presión suficientemente enérgica y temperatura elevada, la cabeza del roblón toma la forma *A* (fig. 17, lámina 16), con rebabas (siempre, por supuesto, que haya suficiente metal, como es debido, para llenar por completo la estampa), mientras que, si la temperatura y presión son deficientes, se obtiene la forma *B*. Además, la contracción del roblón al enfriarse, y por tanto, la presión que ejerce en los palastros, es menor en el segundo caso, y también lo es la resistencia al resbalamiento de las planchas.

Parece deducirse de aquí que la mayor adherencia corresponde á un máximo de presión y de temperatura, pero no es así; lo que conviene es presión grande, sí, para que el cuerpo del roblón se recalque, llene bien los orificios de las planchas y forme cabezas como la *A* de la figura 17 que se apoyen bien en los palastros ó hierros roblonados, pero con temperaturas inferiores al rojo cereza, porque, según hemos dicho en el núm. 97, toda deformación por percusión ó presión efectuada en el hierro á temperatura más baja que el rojo cereza, aumenta el coeficiente de fractura por extensión \bar{R} y el límite de elasticidad; de modo que el roblón adquirirá mayor aptitud para ocasionar enérgicas presiones en las planchas que une, sin que se enerve su elasticidad. Por esta razón correspondió la máxima adherencia, en las experiencias de Mr. Considère, á presiones de 90 á 100 kilogramos y temperaturas de 650° (rojo muy sombrío).

3.^a *Rapidez del remachado.*— En los primeros momentos de la operación, bien se practique con martillo ó con máquina, se recalca el roblón y en seguida empieza á formarse la cabeza, desde cuyo momento los choques ó presiones no se transmiten ya al cuerpo, porque lo impide la parte de cabeza formada. La contracción que el cuerpo del roblón experimentará al enfriarse depende, pues, de la temperatura que tenía cuando empezó á formarse la cabeza y no de la que corresponde á la terminación del remache; además, puesto que la cabeza sufre hasta el último momento, y por consecuencia á

temperaturas bajas, presiones ó percusiones, adquirirá tenacidad y límite de elasticidad superiores á las del cuerpo del roblón, pero tendrá menor ductilidad que éste (núm. 97), y estas diferencias de calidad en el metal serán tanto más sensibles cuanto más descienda la temperatura desde el momento en que empezó á formarse la cabeza hasta la terminación de ésta.

En virtud de estas diferencias, el cuerpo del roblón resulta con pequeño límite de elasticidad, es decir, con escasa aptitud para comprimir los hierros, y sometido, además, á contracciones muy enérgicas; en cambio, la cabeza se ha hecho menos dúctil, menos deformable, y salta con facilidad. Un roblón se encontrará en condiciones de resistencia muy desfavorables si ha empezado á remacharse á temperatura muy elevada, al cereza claro, por ejemplo, y se termina la operación cuando desaparece el rojo sombrío.

Conviene, pues, la mayor rapidez en el remachado, para que la diferencia de temperaturas, desde que se empezó á formar la cabeza hasta su terminación, sea pequeña; así se podrá, también, adoptar temperaturas iniciales relativamente bajas, de 650°, que hemos visto eran favorables á la adherencia.

La rapidez del remachado se obtiene con las máquinas; con el martillo no es posible. Conviene todavía más al acero que al hierro, por la mayor aptitud del primero para aumentar su tenacidad por la presión ó percusión, y por la conveniencia de terminar las presiones ó percusiones á temperatura alta (núm. 110).

4.^a *Espesor de los hierros roblonados.* — Cuanto mayor sea el espesor total y el particular de cada palastro ó hierro, mayor será su rigidez y menor su unión lateral.

5.^a *Calidad del metal.* — Claro es que á igualdad de las demás circunstancias, proporcionarán más adherencia los roblones formados de metal más resistente y de mayor límite de elasticidad.

258. Circunstancias que influyen en la resistencia á la fractura por esfuerzo cortante de los roblones. — Suponiendo iniciado el movimiento de resbalamiento de los palastros ó hierros roblonados, por efecto de las fuerzas exteriores de extensión ó de compresión que sobre ellos actúan, el cuerpo de cada roblón, una vez destruída la adherencia, empezará á trabajar por esfuerzo cortante, en una sola sección, ó en dos ó más (figs. 10, 11 y 12, lám. 16). Aumentando las fuerzas aplicadas, hasta conseguir la fractura, se observa:

1.º La resistencia es proporcional al número de secciones de roblón que soportan el esfuerzo cortante, es decir, al número de palastros ó hierros, menos uno (fig. 10). (Experiencias de Fairbairn, Clark, Gouin y Lavalley.)

2.º Depende la resistencia del modo de perforar los hierros. Si se emplea

el punzón, aumenta el coeficiente de fractura por esfuerzo cortante, sin duda por la forma redondeada de los bordes (A, fig. 16, lám. 16). En cambio, empleando el taladro quedan los bordes del orificio en arista viva y se cortan los roblones más fácilmente; la diferencia puede llegar á ser mayor del 10 por 100, según las experiencias de Fairbairn, que copiamos á continuación:

	COEFICIENTE DE FRACTURA por mm. ² de sección real de roblón. Término medio.	
	ORIFICIOS ABIERTOS	
	CON PUNZÓN — Kilogramos.	CON TALADRO — Kilogramos.
Caso de la fig. 12.	30,80	29,20
Caso de la fig. 11.	34,85	30,85

Si se redondean los bordes de los orificios, la resistencia al esfuerzo cortante es todavía mayor, sin duda porque al recalcar el cuerpo del roblón el metal se aloja en las partes redondeadas (fig. 18, lám. 16), y aumenta allí la sección transversal resistente.

3.º Influye la temperatura del roblón al remacharlo. La mayor resistencia al esfuerzo cortante, en roblones remachados con martillo, corresponde á 500°, según las experiencias de M. Considère, cuyo extracto damos á continuación:

ROBLONES REMACHADOS Á LA TEMPERATURA DE	COEFICIENTE DE FRACTURA \bar{R}' en kilogramos por mm. ² de sección efectiva.
1000° (cereza claro).....	30,11
900° (cereza).....	30,11
800° (cereza naciente).....	31,25
650° (rojo muy sombrío).....	36,92
550° (rojo próximo á desaparecer).....	38,06
500° (desaparición del rojo).....	41,25
400° (íd.).....	38,06
28° (en frío).....	32,38
Pasador sin remachar.....	30,11

Se explica esta influencia por la que tiene en la tenacidad del metal la percusión á temperaturas inferiores al rojo cereza (núm. 97); pero también la tiene, y muy grande, la adherencia, que en este caso existía hasta el último momento por el exceso de resistencia á la tracción que se dió á los palastros en estas experiencias (núm. 255). Así se explican las grandes diferencias que se encuentran de 28° á 500°.

259. Disminución de resistencia de los palastros perforados. — Los palastros ó hierros perforados, para ser cosidos por medio de roblones, experimentan una disminución de resistencia al esfuerzo tractor, que se debe, no solamente á la disminución de área resistente de sección transversal ocasionada por los orificios abiertos, sino á las siguientes causas:

1.ª Es la primera la desigual repartición de los esfuerzos moleculares en toda la anchura del palastro, contada en las filas trasversales de orificios, como lo demuestra la siguiente experiencia: perfórese una lámina de caucho y trácense las dos pequeñas rectas paralelas A (fig. 19, lám. 16); ejerciendo una tracción según el eje de la lámina, las dos rectas dejan de ser paralelas (como sucede en las láminas llenas) y se separan más del lado del orificio (B, figura anterior), que toma la forma elíptica. Como las deformaciones son proporcionales á las fuerzas que las han producido, esto demuestra que la fuerza de extensión por unidad superficial de sección transversal, es mayor cerca de estos orificios.

En una plancha de hierro ó de acero la fractura comenzará, pues, por estos puntos, y así resulta también de las experiencias de Adamson, realizadas con palastros de acero dulce Bessemer (*) (fig. 20, lám. 16). Cuadrículadas las planchas de antemano, la desigual separación de líneas después de la fractura acusa perfectamente el mayor trabajo del metal cerca de los orificios.

La ductilidad del material permite hacer estos estudios, porque las deformaciones de fractura se acentúan mucho. En los aceros duros y en hierros agrios no se hace sensible la desigualdad de esfuerzos elementales; pero no por esto deja de existir.

La explicación de los hechos citados es bien sencilla. Las fibras interrumpidas por el taladro transmiten á sus inmediatas la parte de esfuerzo tractor que les ha sido comunicada por la fuerza exterior; de modo que las fibras tangenciales al orificio experimentan tracción mayor que las restantes.

Las experiencias de Adamson ponen de manifiesto, además, que la desigualdad de repartición de esfuerzos y sus consecuencias son tanto menores,

(*) Este acero tenia 0,454 por 100 de manganeso, 0,049 de carbono y 0,033 de azufre.

á igualdad de sección interrumpida, cuanto mayor sea el número de roblones, ó lo que es lo mismo, cuanto menor sea su diámetro. Atendiendo tan sólo á esta circunstancia, convendría multiplicar los roblones de cada fila transversal y disminuir su calibre.

2.ª La experiencia acredita que únicamente los palastros de hierro *muy dúctiles* no padecen por el empleo del punzón; pero que en los más ó menos agrios, y en los aceros, por dulces que sean, el punzón altera el metal en las inmediaciones del orificio (núms. 97 y 110), y la fractura por extensión comienza por estos sitios con fuerzas menores que las que la producen en las partes de plancha en que no se han abierto agujeros.

He aquí algunos resultados de experiencias:

EXPERIMENTADORES	METAL	COEFICIENTE de fractura por extensión. Kilogramos por mm.²	
		En un punto cualquiera de la plancha.	En el intervalo de dos orificios.
M. J. Reed.....	Plancha de hierro.....	34,00	24,8 á 29,9
M. Sharp.....	Plancha de acero Bessemer.	56,20	37,00
M. Maynard.....	Plancha de hierro.....	34,00	28,50

La broca ó taladro no produce estos efectos, y es en este concepto muy superior al punzón, como lo demuestran numerosas experiencias, entre ellas las realizadas en el puerto de Lorient (Francia), que copiamos á continuación.

Barras de acero Bessemer, de 45^{mm} de ancho y 12^{mm} de grueso, con orificio de 17^{mm} de diámetro, abierto:

	\bar{R}	
Con taladro.....	54,60	kilogramos por mm.².
Con punzón.....	43,80	» »

Barras de acero Martín, del Creusot, ancho 60^{mm}:

	\bar{R}	
Con taladro.....	43,70	kilogramos por mm.².
Con punzón.....	34,50	» »

Barras de acero muy dulce (Martín), del Creusot, de 60^{mm} de ancho (experiencias de M. Barba):

	\bar{n}	
Sin taladrar.....	42,20	kilogramos por mm. ² .
Con orificio de 17 ^{mm} de diámetro, abierto con punzón.....	32,20	» «

Los efectos perjudiciales del punzón se extienden solamente á 1,5^{mm}, cuando más, del contorno del orificio; de modo que pueden corregirse abriendo agujeros de diámetro inferior en 2^{mm} al verdadero, y ensanchándolos después con el taladro (*). Las experiencias de Lorient, que cita Mr. Barba, no dejan duda en este punto.

Palastros Bessemer (de Terre-Noire) de 45^{mm} de ancho, 12^{mm} de espesor y orificio de 17^{mm} de diámetro:

	\bar{n}	
Abierto con taladro.....	54,60	kilogramos por mm. ² .
Abierto con punzón á 15 ^{mm} , y ensanchado con taladro á 17..	53,60	» «

El recocido de las planchas, es otro correctivo de los perniciosos efectos del punzonado. La influencia del grado de recocido aparece en los siguientes datos relativos á experiencias practicadas en barras de acero dulce de 60^{mm} de ancho, con orificios punzonados:

PERMANENCIA en el horno.	COLOR DEL ACERO á la salida del horno.	COEFICIENTE de fractura por extensión \bar{n} . Kilogramos por mm. ²
1'	Negro.....	42,50
1' 5	Rojo muy sombrío.....	44,80
2'	Rojo.....	48,20
2' 5	Rojo cereza.....	48,90
3'	Rojo cereza claro.....	50,20

Algunos ingenieros pretenden que hace las veces de recocido el calor comunicado á las planchas por el roblón al rojo; pero no es exacto.

(*) A pesar de esto no se ha tolerado el uso del punzón para el acero en algunas obras de importancia. (nota del núm. 110.)

A los palastros de hierro les produce idéntico efecto el punzón. Una barra de 60^{mm} de ancho, sometida á extensión, dió los siguientes resultados:

	\bar{n} Kilogramos por mm. ²
Con orificio de 19 ^{mm} , abierto con taladro.....	26,70
» » » » con punzón.....	23,40
» » » » con punzón á 17 ^{mm} , ensanchado con taladro á 19 ^{mm}	25,00
» » » » con punzón á 15 ^{mm} , ensanchado á 19 ^{mm}	27,10

La zona alterada parece ser un poco mayor que en el acero.

260. Modo de calcular una roblonadura. — Algunos ingenieros hacen el cálculo de las roblonaduras, en piezas sometidas á extensión ó compresión, fundándose en la condición de que no se produzca el resbalamiento de los palastros ó hierros roblonados. Cada milímetro cuadrado de sección trasversal de roblón da un cierto contingente de adherencia [7,5 kilogramos por cada dos superficies en contacto (núm. 254)], y si se quiere evitar el resbalamiento deberemos contar solamente con una fracción de este valor; del mismo modo que para formar el coeficiente de trabajo, para toda clase de esfuerzos, hemos tomado una fracción del coeficiente de fractura.

Así, por ejemplo, en el caso representado por las figs. 21 á 24 (lám. 16), la adherencia es de 15 kilogramos por cada mm.² de sección de roblón. Para tener una seguridad representada por los números 4 ó 5, debe contarse solamente con una adherencia permanente, ó resistencia al resbalamiento, de $\frac{15}{5}$ á $\frac{15}{4}$, es decir, de 3 á 4 kilogramos por mm.² de sección de roblón.

Otros ingenieros prescinden de la adherencia y tienen en cuenta el trabajo por esfuerzo cortante de los roblones, como si la roblonadura estuviera hecha en frío, asignando, sin embargo, un coeficiente de trabajo R'' por este concepto, de moderado valor (4 á 5 kilogramos por mm.² de sección de roblón).

Cualquiera de los dos métodos de cálculo es aceptable si la roblonadura se ha hecho regularmente, y los dos conducirán á error si está mal hecha. En efecto; por lo que respecta á la adherencia, hemos visto que podía variar

entre límites muy diferentes, en razón á las múltiples causas que influyen en el resultado (núm. 257) y obtenerse á veces valores sumamente pequeños; de modo que el coeficiente de adherencia admitido para el cálculo de la roblonadura puede llegar á ser deficiente, ó lo que es lo mismo, el enlace de los hierros débil. En cuanto al cálculo por la resistencia al esfuerzo cortante de los roblones, exige para ser exacto que todos ellos trabajen á un tiempo, para lo cual se necesita que el cuerpo de los roblones llene por completo los taladros, y esto no siempre sucede (núm. 252) por la dificultad de hacer coincidir los orificios, y porque á veces el recalado del roblón no es completo.

Esto es lo que tiene lugar en las roblonaduras hechas á martillo cuando el espesor de hierros y el diámetro de los roblones son grandes.

El trabajo á máquina es mucho mejor, pues no solamente la adherencia obtenida puede ser mayor y más uniforme que cuando se emplea el martillo, sino que el cuerpo de los roblones, enérgicamente aplastado, llena perfectamente los taladros de las planchas ó hierros, y puede contarse con que todos trabajen á un tiempo por esfuerzo cortante.

Bien se atienda á la adherencia, bien al esfuerzo cortante, los procedimientos de cálculo son los mismos; pues en ambos casos cada milímetro cuadrado de sección de roblón da un cierto contingente de resistencia.

261. Empalmes y ensambladuras de dos palastros ó hierros. Cálculo abreviado.—Dos palastros pueden empalmarse ó ensamblarse de una de las tres maneras dibujadas en las figs. 21, 23 y 24 (lám. 16). La primera disposición (fig. 21) recibe el nombre de *recubrimiento*; la segunda (fig. 23) se denomina de *simple cubrejunta*, y la tercera (fig. 24) de *doble cubrejunta*.

En la primera disposición, los palastros, situados en planos distintos, tienden á ponerse en un mismo plano, y los roblones á inclinarse (fig. 22), en cuyo caso hay una componente de la tracción en sentido del eje del roblón que trata de arrancar las cabezas. En la segunda disposición existe también este defecto, que está corregido en la tercera.

El cubrejunta único (fig. 23), ó la suma de los dobles (fig. 24), ha de tener un espesor igual por lo menos al de cada uno de los palastros.

La disposición primera (fig. 21) se encuentra principalmente en las máquinas (calderas, tubos, etc.); la segunda y la tercera (figs. 23 y 24) son más propias de los entramados metálicos (construcciones). En las disposiciones figs. 21 y 23, cada roblón no presenta más que una sección resistente al esfuerzo cortante, mientras que en la fig. 24 presenta dos.

He aquí otros ejemplos de ensambladuras y empalmes de hierro:

Figs. 25 y 26. Empalme de dos hierros en escuadra; con simple cubre-

junta angular *b* (fig. 25), ó con doble cubrejunta, uno en escuadra *a* y otro plano *b* (fig. 26).

Fig. 27. Ensambladura de dos hierros *T* sencilla, con un simple cubrejunta plano *A*.

Fig. 28. Ensambladura de dos hierros *T* (par y tirante de una armadura), con doble cubrejunta plano.

Fig. 9.^a, lám. 13. Ensambladura de hierro plano y hierro *T* sencilla, con cubrejunta sencilla.

Fig. 29, lám. 16. Ensambladura de par y tirante, formado cada uno de dos hierros en ángulo, por medio de un palastro interior.

262. Primer caso.—Empalmes ó ensambladuras, á recubrimiento ó con un simple cubrejunta (figs. 21 y 23, lám. 16).

Sean:

F = fuerza de tracción ó de compresión.

ω = área de la sección transversal resistente del palastro ó hierro extendido ó comprimido.

d = diámetro de un roblón.

N = número total de roblones, si el empalme es á recubrimiento, ó número de roblones correspondiente á cada una de las dos piezas *A* que se empalman ó ensamblan, cuando se emplee cubrejunta sencillo.

R = coeficiente de trabajo por mm.² por extensión ó compresión, para los hierros empalmados ó ensamblados.

k = coeficiente de trabajo por mm.² de sección de roblón, por adherencia ó por esfuerzo cortante.

Supongamos, para fijar las ideas, que se trata del empalme de la fig. 23.

Para cada uno de los palastros empalmados, la ecuación de resistencia á la extensión es

$$F = R \omega;$$

y para que resistan los *N* roblones,

$$F = N \frac{\pi d^2}{4} k,$$

de donde

$$N \frac{\pi d^2}{4} = \omega \frac{R}{k}.$$

El primer miembro representa la suma de secciones transversales de los roblones, que representaremos por S .

Si se atiende á la adherencia, haremos $k = 3$, y aceptando para R el valor 6, se tendrá

$$S = 2 \omega$$

que nos dice que *la suma de secciones transversales de roblones, ha de ser doble del área de la sección transversal resistente de cada palastro ó hierro*. El área resistente corresponde á la sección transversal que contenga el mayor número de orificios de roblón. Si l es la anchura del hierro ó palastro, e el grueso y n el número máximo de roblones de cada fila, será $\omega = (l - n d) e$.

Si se atiende al esfuerzo cortante, será $k = 4$ á 5, y haciendo $R = 6$, se obtiene

$$S = 1,2 \omega \text{ á } 1,5 \omega.$$

Finalmente, puede aceptarse para R valores mayores de 6, por ejemplo, 7 ú 8, y se obtendrán otras relaciones.

Resumiendo, puede darse como regla para el cálculo de roblonaduras á recubrimiento, ó con simple cubrejunta de dos palastros ó hierros, que *la suma de secciones transversales de los roblones situados de cada lado de la junta, ó el número total si es á recubrimiento, sea igual á n veces el área de la sección resistente de cada palastro ó hierro empalmado ó ensamblado, siendo n un número que varía entre 1 y 2, según el grado de solidez que se quiera dar á la roblonadura*.

Algunos ingenieros toman como sección resistente ω la total del hierro, sin descontar orificios de roblones (*); otros hacen lo mismo, pero solamente para la fuerza F de compresión. Es prudente, en todos casos, descontar los

(*) Llamando ω' al área total de sección transversal del palastro, sin descontar orificios de roblones, se pueden presentar, entre otros ejemplos, los siguientes:

Puente del Scorff, en Lorient (MM. Gouin y Lavalley) . . .	$\frac{S}{\omega'} = \frac{6}{5} = 1,2$
Puente del Louet (M. Gouin)	$\frac{S}{\omega'} = \frac{3}{2} = 1,5$

Los ingenieros que aceptan ω' como área resistente, justifican su procedimiento por las consideraciones siguientes: la disminución de resistencia que al palastro ó hierro produce cada orificio de roblón es $d e R$, siendo R el coeficiente de trabajo por tracción, ó lo que es lo mismo, haciendo $R = 6$ y $d = 2 e$, la disminución es $12 e^2$; pero en beneficio de la resistencia está la adherencia de los palastros originada por cada cabeza de roblón, y que estimándola á razón de 4 kilogramos por mm.^2 de sección es

$$4 \times \frac{\pi d^2}{4} = 12,56 e^2,$$

cantidad mayor que la primera.

orificios abiertos, de modo que ω represente, como antes hemos indicado, la sección útil para la resistencia.

Conocido el número S de milímetros cuadrados que han de sumar las secciones transversales de los roblones, se deducirá su número N si es dado el diámetro d , ó el diámetro si N fuese fijado de antemano. Generalmente es dado el diámetro de los roblones, que se determina preliminarmente en vista del espesor total de los hierros que han de unirse, contando con los cubrejuntas (véase núm. 265).

Cuanto al cubrejunta único, su espesor ha de ser igual al de los palastros.

263. Segundo caso.—Empalmes ó ensambladuras con doble cubrejunta (figs. 24 y 28, lám. 16).

Si se atiende á la adherencia, y teniendo en cuenta que en este caso, como en el de recubrimiento ó simple cubrejunta, es de 15 kilogramos por milímetro cuadrado de sección de roblón, de modo que puede aceptarse como coeficiente ordinario $k = 3$, llegaríamos por los mismos razonamientos del caso anterior á la ecuación $S = 2 \omega$.

Calculando la roblonadura por esfuerzo cortante de los roblones, observaremos que cada uno presenta dos secciones resistentes; de modo que si N es su número (de cada lado de la junta), tendremos, llamando R'' al coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante,

$$2 N \frac{\pi d^2}{4} R'' = F,$$

y como

$$\omega R = F$$

será

$$\frac{N \pi d^2}{4} = S = \frac{R}{2 R''} \omega$$

ó dando valores á R (6) y R'' (4 á 5), se tendría $S = 0,60 \omega$ ó $S = 0,75 \omega$.

El cálculo, contando solamente con la adherencia, conduce en este caso á aceptar mayor cantidad de roblones. Adoptaremos en todos los casos el procedimiento que tiene en cuenta el trabajo de los roblones por esfuerzo cortante.

A cada uno de los dos cubrejuntas se dará espesor mitad del que tienen las planchas.

La fig. 29 está en el mismo caso considerado, porque los hierros en escua-

dra hacen el papel de cubrejuntas, y cada roblón trabaja en dos secciones.

264. Empalme de varios palastros superpuestos. — Pueden adoptarse las disposiciones siguientes para el empalme de n planchas superpuestas:

1.^a (Fig. 30, lám. 16.) Dos palastros á juntas encontradas con cubrejunta simple, de espesor igual al de cada uno de los palastros.

2.^a (Fig. 31, lám. 16.) La misma disposición de palastros, pero con dobles cubrejuntas de medio espesor de palastro; es preferible, cuando pueda hacerse, á la anterior. En efecto, en la fig. 30, si llamamos F á la fuerza total de tracción, sobre cada palastro actuará $\frac{1}{2} F$; y este valor, correspondiente al palastro interrumpido A , por ejemplo, se repartirá en dos mitades, iguales cada una á $\frac{1}{4} F$, que actuarán sobre el cubrejunta y sobre el palastro B , el cual quedará así sujeto á una fuerza $\frac{1}{2} F + \frac{1}{4} F = \frac{3}{4} F$, es decir, recargado en $\frac{1}{4} F$.

Si los palastros superpuestos fuesen n , al poner un solo cubrejunta en el palastro interrumpido (fig. 32) se aumenta en $\frac{1}{2n} F$ el trabajo del palastro entero inmediato, por la misma razón anterior.

3.^a (Figuras 1.^a y 2.^a, lám. 17) n palastros, haciendo coincidir las juntas. Cubrejuntas dobles, de espesor de $\frac{n}{2}$ planchas.

4.^a (Fig. 3.^a, lám. 17) n palastros, con juntas alternadas y dobles cubrejuntas de espesor de media plancha. Se puede poner, también, cubrejuntas únicos de espesor de plancha.

5.^a (Figs. 4.^a, 6.^a y 7.^a) n palastros. Juntas escalonadas, con cubrejunta único de espesor de plancha (fig. 7.^a) ó doble cubrejunta de espesor de media plancha (figs. 4.^a y 6.^a).

Para el cálculo del número de roblones, supondremos que se colocan éstos en filas transversales de igual número (así se hace en las vigas compuestas para edificios y en los cuchillos de puentes).

Cuando las juntas de los n palastros coinciden (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 17), lo cual se evita en general, el cálculo es el mismo que hemos hecho para dos palastros (núm. 263), porque, en efecto, como los n palastros están unidos con roblones en toda su longitud, se portan como una sola pieza.

Será, pues, llamando N al número de roblones de cada lado,

$$2 N \frac{\pi d^2}{4} R'' = F \quad \text{ó} \quad N = \frac{4 F}{2 \pi d^2 R''}.$$

El total de roblones de todo el empalme será el doble del valor anterior, es decir,

$$N' = 2 N = \frac{4 F}{\pi d^2 R''}.$$

Si las juntas están escalonadas, que es la disposición más aceptada (figuras 4.^a, 6.^a y 7.^a, lám. 17), se hace el cálculo del siguiente modo: al romperse un empalme tal como el de la fig. 4.^a, porque se hayan cortado los roblones, quedará de un lado la parte rayada y del otro la blanca, llevando cada una un cubrejunta (*). Ahora bien, la fractura se realizará como se indica en la fig. 4.^a y no como manifiesta la fig. 5.^a, porque en el primer caso hay $a b + c d + e f$ secciones de roblón, y en el segundo $f a + b c + d e$, que es cantidad mayor.

Fijémonos en el empalme de tres palastros escalonados (fig. 6.^a) con doble cubrejunta. La fractura se operará según $a b c d e$; y llamando n_1 , n_2 , n_3 y n_4 al número de roblones que hay en $a b$, $b c$, $c d$, $d e$, y teniendo en cuenta que solamente trabaja una sección en cada uno, será

$$(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \frac{\pi d^2}{4} R'' = F$$

ó llamando N' al número total de roblones del empalme, que es igual á la suma $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$,

$$N' \frac{\pi d^2}{4} R'' = F,$$

de donde $N' = \frac{4 F}{\pi d^2 R''}$, que es el valor hallado para el caso de juntas reu-

(*) Suponemos, como se verifica generalmente, que los palastros están sólidamente unidos por M y N , de modo que se portan como una sola pieza, y el esfuerzo tractor F se trasmite por ellos. Así sucede en las cabezas ó largueros de las vigas de puente, en las cuales los palastros, fuera de los empalmes, están cosidos entre sí y á los hierros en escuadra.

nidas. Generalmente se hace $n_1 = n_2 = \dots = n$. En este caso, $n = \frac{1}{4} N'$.

El mismo número N' se obtiene también cuando se pone un solo cubrejunta (fig. 7.^a), sino que hay que repartirlo en un escalón menos (ab, bc, cd).

En todos los casos, en vista del número de roblones que se pueden poner en cada fila, y teniendo en cuenta la separación de las filas, se calculará sencillamente la longitud de cada escalón y la de los cubrejuntas.

Por ejemplo (fig. 6.^a, lám. 17), si cada fila tiene 4 roblones, en cada escalón habrá $\frac{n}{4} = \frac{N'}{16}$ filas; y si la distancia de éstas es h , resulta ser $\frac{nh}{4}$ la longitud de cada escalón, y nh la del cubrejunta.

Cuando los palastros no están escalonados regularmente, sino engranados (fig. 3.^a, lám. 17), ha de observarse que en algunos escalones cada roblón resiste al esfuerzo cortante por más de una sección; la fractura tendrá lugar por $ysrtux$, y si llamamos n al número de roblones que hay en cada una de las partes iguales en que, para su distribución, se ha dividido el cubrejunta, el número de secciones resistentes será:

$$\left. \begin{array}{l} ys \dots \dots \dots 2n \\ sr \dots \dots \dots n \\ tu \dots \dots \dots 2n \\ vx \dots \dots \dots n \end{array} \right\} 6n (*)$$

de modo que tendremos

$$6n \frac{\pi d^2}{4} R'' = F \qquad n = \frac{4F}{6\pi d^2 R''}$$

de donde

$$N' = 4n = \frac{8F}{3\pi d^2 R''}$$

265. Diámetro de los roblones. Distancia entre ejes. — Si se atendiese únicamente á debilitar lo menos posible los hierros empalmados, convendría adoptar grandes dimensiones para el diámetro d de los roblones. En efecto, la resistencia que da el roblón es proporcional al área de su sección trasversal, es decir, á d^2 , mientras que la debilidad que al palastro resulta por el

(*) La fractura por $ysrtux$ se opera también por $6n$ secciones. Es fácil, en todos los casos, hacer el cálculo del número de secciones resistentes.

orificio abierto, es proporcional á d ; en suma, la relación del efecto útil al perjudicial es $\frac{d^2}{d} = d$. Pero no puede aumentarse d infinitamente, porque

la presión local ejercida por la cabeza fatigaría al palastro ó hierro. Además, al aumentar d aumentaría también la distancia entre los ejes de los roblones, y en los intervalos no se unirían bien los palastros, circunstancia atendible especialmente en las juntas impermeables (calderas, depósitos, carenas, etc.), (véase también núm. 278).

El diámetro de los roblones se fija teniendo en cuenta el espesor e parcial de los palastros roblonados y el espesor total de todos ellos; lo primero, porque hay necesidad de atender á la facilidad del punzonado de los palastros (núm. 251), y lo segundo, porque con el espesor total crece la rigidez y hay que aumentar la presión local, es decir, el diámetro del roblón, para que los palastros se unan bien.

Atendiendo al espesor parcial de los palastros, y llamando e el grueso del que lo tenga mayor, se acostumbra dar á d valores cuyo límite inferior está comprendido entre $1,5e$ y $2e$ (*).

El diámetro d de los roblones varía generalmente de 2 en 2 mm.

Teniendo en cuenta el espesor total de hierros, se adoptan en la práctica los valores siguientes:

Diámetro d en milímetros.....	8	10	12	14	16	18	20	22	25
Espesor total de hierros roblonados, en milímetros.....	6 á 10	10 á 12	12 á 14	14 á 16	16 á 20	20 á 25	25 á 35	35 á 50	50 á 70
Distancia de eje á eje de roblón, en milímetros.....	50 á 60	60 á 70	70 á 80	80 á 90	90 á 100	100 á 120	100 á 120	100 á 120	100 á 120

(*) He aquí las fórmulas prácticas más en uso para fijar el límite inferior del diámetro d de los roblones, dispuestos en una fila, en función del espesor e :

AUTORES

Browne.....	$d = 2e$.
Claudel.....	$d = 2e + 3$ milímetros.
Fairbairn.....	$\left\{ \begin{array}{l} d = 2e \text{ para } e < 10 \text{ milímetros.} \\ d = 1,5e \text{ para } e > 10 \text{ milímetros.} \end{array} \right.$
Lemaître, Reuleux....	$d = 1,5e + 4$ milímetros; calderas de vapor.
Pohlig (1877).....	$\left\{ \begin{array}{l} d = 2e \text{ para calderas.} \\ d = 3e \text{ para roblonaduras muy resistentes.} \end{array} \right.$
Redtembacher (1874)...	$d = 1,5e \text{ á } 2e$.
Rankine.....	$\left\{ \begin{array}{l} d = 2e \text{ para } e < 13 \text{ milímetros.} \\ d = 1,5e \text{ para } e > 13 \text{ milímetros.} \end{array} \right.$

El cuadro siguiente, tomado del tratado de puentes de Morandière, contiene las dimensiones empleadas en los puentes de palastro correspondientes á roblones de 18, 20, 22 y 25 milímetros, que son los diámetros más usuales en esta clase de obras.

Diámetro d	milímetros...	18	20	22	25	
Sección.....	mm. ²	254	314	380	490	
Cabeza del roblón... {	Altura.....	milímetros..	10,8	12	13,2	15
	Diámetro de la base.....	ídem.....	30	33	36	41
	Radio de la esfera.....	ídem.....	15,5	17,2	18,9	21,5
Límite inferior... {	Espesor total de hierros roblonados.....	ídem.....	12	18	21	30
	Longitud total del cuerpo del roblón antes del remache.....	ídem.....	39	48	51	66
	Peso de 100 roblones....	kilogramos..	14,5	17	22,5	35
Límite superior... {	Espesor total de hierros roblonados.....	milímetros..	25	35	50	70
	Longitud total del cuerpo del roblón antes del remache.....	ídem.....	52	65	83	115
	Peso de 100 roblones....	kilogramos..	15	23	32	57
Peso de 100 cabezas de roblón.....	ídem.....	4	5,5	8	11,7	

La marina francesa emplea para las carenas de los barcos las proporciones siguientes:

Espesor total de hierros.....	3	6	8	10	12	14	16	18	20	22	26	30
Diámetro de los roblones para palastros de hierro.....	8	12	14	16	18	20	22	24	24	26	28	32
Diámetro de los roblones para palastros de acero.....	8	14	18	20	22	24	26	28	28	30	34	"

266. Método general para el cálculo de una roblonadura. — En el procedimiento explicado en los párrafos precedentes, hemos atendido á la resistencia de los roblones. Vamos á ocuparnos del cálculo completo de una roblonadura, teniendo en cuenta los diversos modos de fractura que puede tener, trabajando los roblones por esfuerzo cortante; y para resolver el problema en general, consideraremos palastros de anchura y espesor diferentes.

267. Cálculo de un empalme á recubrimiento. — Sean (figs. 13, 14 y 15, lám. 16) e y e' = espesores de los palastros A y B .

N = número total de roblones, todos de igual diámetro d , distribuídos en n filas.

$N_1, N_2, \dots, N_m, \dots, N_n$ = número de roblones de las filas 1, 2, ..., m , ..., n .

$l_1, l_2, \dots, l_m, \dots, l_n$ = anchura, variable, del palastro A , en las diversas filas.

$l'_1, l'_2, \dots, l'_m, \dots, l'_n$ = íd. íd., en el palastro B .

R = coeficiente de trabajo del palastro, por tracción.

R'' = íd. íd. de los roblones, por esfuerzo cortante.

\bar{R} = coeficiente de fractura; por tracción, del palastro.

\bar{R}'' = coeficientes de fractura, por esfuerzo cortante, de los roblones.

Supongamos, primeramente, que el palastro A es más delgado que el B , ó lo que es lo mismo, $e < e'$.

El empalme puede romperse por fractura del palastro A , ó del palastro B , ó de los roblones, ó por combinación de estas causas; y es preciso, si ha de estar bien proporcionado, que la resistencia á estos diversos modos de fractura, sea la misma ó poco diferente.

Fractura del empalme por el palastro A . — El palastro A se ha debilitado al taladrarlo y ha perdido una parte de sección resistente $N_m d e$.

Si consideramos la primera fila, y representamos por z (*) la relación de resistencia del palastro empalmado y del palastro lleno, será

$$z = \frac{l_1 - N_1 d}{l_1} \quad (1).$$

La fractura del empalme por la plancha A , se puede operar de los siguientes modos:

1.º Por extensión, según la primera línea de roblones (fig. 14).

(*) Á z se le suele llamar módulo de fuerza ó de resistencia.

La fuerza necesaria es

$$F' = (l_1 - N_1 d) e \bar{R} \quad (2).$$

2.º Por esfuerzo cortante de todos los roblones.

La fuerza necesaria vale

$$F'' = N \frac{\pi d^2}{4} \bar{R}'' \quad (3).$$

3.º Por tracción en la plancha, según la línea m de roblones, acompañada de fractura de los roblones comprendidos en las filas 1 á $m - 1$ (fig. 13).

La fuerza necesaria vale

$$F''' = (l_m - N_m d) e \bar{R} + (N_1 + \dots + N_{m-1}) \frac{\pi d^2}{4} \bar{R}'' \quad (4).$$

El empalme de la plancha B se podrá romper por fractura de esta plancha, según una fila cualquiera de roblones, la m , por ejemplo (fig. 15), acompañada de fractura trasversal de los roblones de las filas $m + 1$ á n inclusivos.

La fuerza necesaria vale

$$F^{IV} = (l'_m - N_m d) e' \bar{R} + (N_{m+1} + \dots + N_n) \frac{\pi d^2}{4} \bar{R}'' \quad (5).$$

Para que estén prevenidos todos estos medios de fractura, y haya proporcionalidad en todos los elementos del empalme, es preciso

$$F'' \geq F' \quad (6)$$

$$F''' \geq F' \quad (7)$$

$$F^{IV} \geq F'' \text{ ó } F^{IV} \geq F' \quad (8)$$

y así, la resistencia del empalme la hacemos depender de la que tiene el palastro A en la primera fila de roblones. Esta resistencia, y también el módulo z (expresión 1), será tanto mayor cuanto menor sea N_1 , ó lo que es lo mismo, cuanto menos roblones pongamos en la primera fila.

La expresión (1), y las desigualdades (6), (7) y (8), resuelven los problemas de roblonaduras; pero antes de seguir más adelante daremos nueva forma á estas desigualdades. En las (6) y (7) dividiremos todos los términos

por $e \bar{R}$, y en la (8) por $e' \bar{R}$, y llamaremos K al factor $\frac{\pi \bar{R}''}{4 \bar{R}}$.

Así resulta:

$$z = \frac{l_1 - N_1 d}{l_1} \quad (a)$$

$$N K \frac{d^2}{e} \geq l_1 - N_1 d \quad (b)$$

$$(l_m - N_m d) + (N_1 + \dots + N_{m-1}) K \frac{d^2}{e} \geq l_1 - N_1 d \quad (c)$$

$$l'_m - N_m d \geq (N_1 + \dots + N_m) K \frac{d^2}{e'} \quad (*) \quad (d)$$

De (a) deduciremos el número de roblones que ha de tener la primera fila para obtener el módulo de resistencia z dado.

La (b) nos da el número total de roblones N , una vez conocidos los espesores e y e' de los palastros que hay que unir y el diámetro de los roblones empleados.

Las (c) y (d) nos dan un límite inferior del número N_m de roblones que han de entrar en cada fila. Claro es que ha de tomarse el menor de los valores de N_m que de estas desigualdades resulte.

268. Estas fórmulas resuelven también el caso de cubrejunta sencillo (fig. 23, lám. 16), y N será el número de roblones que une cada plancha á dicho cubrejunta; de modo que el total será $N' = 2 N$, pues que el cubrejunta está con cada plancha en las mismas circunstancias que los dos palastros en el caso de empalme á recubrimiento (fig. 21, lám. 16).

En el caso de doble cubrejunta (fig. 24, lám. 16), no hay más diferencia que la de que cada roblón resiste en dos secciones trasversales; de modo que representando N el número de roblones que ligan cada una de las planchas á los cubrejuntas, habría que poner en las ecuaciones anteriores en vez de $\frac{\pi d^2}{4}$, $2 \times \frac{\pi d^2}{4}$, ó sea $2 K$ en vez de K .

269. Caso de que los palastros tengan igual espesor y anchura. — Ge-

(*) Esta desigualdad proviene de la $F^{IV} \geq F''$, recordando que $N = N_1 + N_2 + \dots + N_m + N_{m+1} + \dots + N_n$; de modo que $N - (N_{m+1} + \dots + N_n) = N_1 + \dots + N_m$.

neralmente los dos palastros son igualmente anchos en el empalme, y del mismo espesor, es decir, que $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l'_1 = \dots = l'_n$, y $e' = e$. Llamando l á la anchura común, las fórmulas (a), (b), (c) y (d) se convierten en

$$z = \frac{l - N_1 d}{l} (a') \quad \text{ó} \quad N_1 \leq \frac{l - lz}{d}$$

$$NK \frac{d^2}{e} \geq l - N_1 d \quad \text{ó} \quad N \geq \frac{l - N_1 d}{K} \frac{e}{d^2} \quad (b')$$

$$l - N_m d + (N_1 + \dots + N_m - 1) K \frac{d^2}{e} \geq l - N_1 d$$

$$\text{ó} \quad N_m < N_1 + (N_1 + \dots + N_m - 1) K \frac{d}{e} \quad (c')$$

La desigualdad (d) es aquí inútil por referirse al palastro B, que en este caso es de igual espesor que el A y se encuentra en idénticas circunstancias. Habrá simetría en el número de roblones y filas con respecto á la fila central.

270. Valores numéricos.—Ya hemos visto (núm. 259) que el punzonado de palastros trae consigo alteración del metal en las inmediaciones de los orificios y disminución de resistencia al esfuerzo tractor en el resto de la sección transversal, es decir, que el valor de \bar{R} debe ir afectado de un coeficiente α menor que la unidad.

Claro es que á igual valor de sección resistente ($V = am + nr + sb$, fig. 8.ª, lám. 17), la alteración del palastro y la disminución de resistencia á la tracción, que es su consecuencia, variará con el número de orificios abiertos, es decir, que α no ha de tener el mismo valor para un palastro en que se abra un orificio y para otro en que se abran muchos.

Según Mr. Barba (*), $\alpha = 0,88$; y según M. Reed (**), $\alpha = 0,81$, sin que ninguno de los dos tenga en cuenta la causa de variación que acabamos de citar.

A falta de experiencias exactas que determinen esta influencia, haremos α constante é igual á 0,85.

Cuando las planchas se perforan con taladro, no hay disminución de resistencia, y será $\alpha = 1$. Lo mismo haremos para la plancha de acero, aunque se use el punzón, porque ó bien se ensanchan los orificios con taladro, ó bien se somete después al recocido, en cuyos dos casos desaparece la alteración.

(*) Etude sur l'emploi de l'acier.

(**) Construction des navires en fer et en acier.

Adoptaremos los valores siguientes:

Coefficiente \bar{R} de fractura por extensión en palastros de hierro intactos ó perforados con taladro.....		32 kilogramos por mm.²	
Idem íd. en palastros de hierro perforados con punzón.	$0,85 \times 32 = 27$	»	»
Idem íd. en palastros de acero	42	»	»
Coefficiente de fractura por esfuerzo cortante \bar{R}''	30 (*)	»	»

Según esto, los valores $K = \frac{\pi \bar{R}''}{4 \bar{R}}$ serán:

Palastros de hierro....	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Perforados con punzón... } K = 0,87 \\ \text{Idem con taladro..... } 0,73 \end{array} \right.$
Palastros de acero.....	

271. Ejemplo. Empalme á recubrimiento:

$l = 350$ milímetros. $e = 12$ milímetros. $d = 22$ milímetros.
 $z = 0,8$. Orificios abiertos con punzón..... $K = 0,87$.

Según (a') (núm. 269) $N_1 \leq \frac{350(1 - 0,8)}{22} = 3,18$.

Es decir, que en la primera fila de roblones puede ponerse 1, 2 ó 3 roblones.

272. Si $N_1 = 1$, el valor de N , aplicando la fórmula (b'), es

$$N \geq \frac{350 - 22}{0,87} \times \frac{12}{22^2} \quad \text{ó} \quad N \geq 9,34,$$

es decir, que debe haber de 10 roblones en adelante.

En la segunda fila, $N_2 < 2,59$, aplicando la fórmula (c'), es decir, $N_2 = 2$.

En la tercera, $N_3 < 5,77$. Pero como ha de haber simetría, y tenemos ya

(*) Suponemos que el hierro de roblones es de $\bar{R} = 37$ á 38 kilogramos por mm.², pues siempre se emplea para fabricarlos material excelente. Tomando 0,80 de este valor (núm 99), formaremos el coeficiente $\bar{R}'' = 30$.

No tenemos en cuenta la adherencia, por las razones dichas en el núm. 255.

formada la primera fila y la última (N_1 y N_n) con un roblón cada una, en suma 2; y la segunda y penúltima con dos cada una (4), ó sea 6 para las cuatro filas, y el número total ha de ser 10 ó > 10 , nos queda para la tercera fila, que será la central, $N_3 = 4$ ó $N_3 > 4$ roblones.

Como conviene disminuir el número de éstos, pondremos 4, y resulta el empalme de la fig. 9.^a (lám. 17). De haber aceptado un roblón para la primera fila, resulta $z = \frac{350-22}{350} = 0^m,93$, es decir, que damos al empalme más resistencia que la pedida.

273. Si admitimos $N_1 = 2$, resulta $N \leq 8,71$. Haremos $N = 9$.

Entonces $N_2 \leq 5,18$; tomaremos 5, considerando esta fila como central, y tendremos la disposición de la fig. 10 (lám. 17): z resulta igual á 0,87.

274. Si admitimos $N_1 = 3$, $N \leq 8,09$. Aceptaremos también $N = 9$.

$N_2 < 7,77$. Sólo podemos hacer $N_2 = 3$ para que $N = 9$ (fig. 11, lám. 17).

275. Si el empalme se hace con una sola fila de roblones, la relación z no puede ser dada.

Entonces $N = N_1$, y la ecuación (b) (núm. 267) nos da

$$N = \frac{l}{K} \frac{N d}{e}$$

ó $N = \frac{l e}{d(K d + e)}$; y la relación z viene dada por

$$z = \frac{l - N d}{l} = 1 - \frac{N d}{l}$$

276. Si el empalme se quiere hacer con dos filas de roblones, estamos en el mismo caso; pues como ha de haber simetría, las dos filas han de tener igual número de roblones, ó sea $\frac{N}{2} = N_1 = N_2$.

Entonces

$$N = \frac{l - \frac{N}{2} d}{K \frac{d^2}{e}} \quad \text{ó} \quad N = \frac{2 l e}{d(2 K d + e)}$$

y la relación $z = \frac{l - \frac{N}{2} d}{l} = \frac{2 l - N d}{2 l} = 1 - \frac{N d}{2 l}$.

277. Empalme con cubrejuntas. — Los problemas se resuelven de igual

modo; no hay más que poner 2 K en vez de K en las fórmulas correspondientes.

278. Observaciones referentes al diámetro de los roblones. — El valor de N

$$N = \frac{l_1 - N_1 d}{K \frac{d^2}{e}}$$

dice que N será tanto menor cuanto mayor sea d , ó lo que es lo mismo, que el número de roblones, y por tanto, el de la mano de obra de apertura de agujeros, es tanto menor cuanto mayor sea el diámetro de aquellos.

El diámetro, sin embargo, tiene un límite que no se puede rebasar, como vamos á ver á continuación.

El número de roblones está calculado teniendo en cuenta su diámetro, para que el esfuerzo cortante que cada uno sufra sea $\frac{\pi d^2}{4} R''$.

El roblón apoya sobre el palastro de espesor e para transmitirle esta fuerza; y cuando d , y por lo tanto la fuerza, sea muy grande comparado con e , el palastro se aplasta por a (figs. 12 y 13, lám. 17), y en cambio disminuye de espesor según la línea $b b$; de modo que puede producirse la fractura por extensión, según esta línea, con una fuerza muy inferior á la que de otro modo debiera originarla; ó bien puede producirse la fractura que manifiesta la fig. 14 (lám. 17), como si el palastro estuviese en el caso de una pieza de longitud d y grueso e empotrada en los extremos y sometida á flexión (número 369).

La proyección, normal á la fuerza, de la superficie de apoyo del roblón sobre el palastro, es $d e$; pero la presión que llamaremos P , no se reparte por igual sobre cada unidad de superficie, de modo que pueda decirse que es $\frac{P}{d e} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{R''}{d e}$ (*), sino que en a es mucho más considerable que en m y en b ó en cualquier otro punto.

Supongamos determinado por experiencias que R_1 es la presión por unidad superficial que puede sufrir la materia en a (fig. 13, lám. 17) sin peligro de aplastamiento ni fractura por flexión (fig. 14, lám. 17), empleando un coeficiente de seguridad igual al admitido para formar el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante R'' . Claro es que $\frac{P}{d e}$, presión por unidad

(*) P es igual á $\frac{\pi d^2}{4} R''$, porque esta cantidad representa la resistencia del roblón al esfuerzo cortante.

superficial en a (fig. 12, lám. 17), no ha de ser mayor que R_1 , es decir,

$$\frac{\pi d^2}{4} R'' < R_1 \quad \text{ó} \quad \frac{d}{e} < \frac{4}{\pi} \frac{R_1}{R''}$$

Si el empalme se hace con cubrejuntas, y en general, cuando los roblones trabajan por esfuerzo cortante doble, ó sea en dos secciones transversales, la fuerza que puede resistir cada roblón es doble de la del caso anterior, y vale $2 \frac{\pi d^2}{4} R''$; de modo que la desigualdad será entonces

$$\frac{d}{e} < \frac{2}{\pi} \frac{R_1}{R''}$$

Hay, pues, un límite superior mitad del correspondiente al caso anterior, lo cual quiere decir que deberán emplearse roblones de menor diámetro.

Según experiencias, la relación $\frac{R_1}{R''}$ vale 1,85 para el palastro de hierro y 2,71 para el de acero; si admitimos estos números, tendremos:

	LÍMITE SUPERIOR de d .	
	Hierro.	Acero.
Para los empalmes á recubrimiento ó simple cubrejunta (esfuerzo cortante en una sección de cada roblón).....	2,35 e	3,45 e
Para los empalmes á doble cubrejunta (esfuerzo cortante en dos secciones de cada roblón).....	1,18 e	1,73 e

En la tabla siguiente están consignados los diámetros de los roblones que en muchas fábricas se emplean para diversos valores del espesor e parcial de los palastros empleados (*).

Teniendo en cuenta los límites anteriores, se han trazado las líneas quebradas AA , BB , y CC . Todos los números situados debajo de AA , son inferiores á 2,35, y, por tanto, los datos correspondientes de la tabla pueden servir para cosidos de palastros de hierro y de acero á recubrimiento, para los empalmes de dos palastros con cubrejunta sencilla, y en general para los casos en que los roblones tienen una sola sección sometida á esfuerzo cortante.

(*) G. Clauzel, *Etude sur le rivetage*.

Los números colocados debajo de la línea BB (menores que 1,73 todos ellos) corresponden al caso de dos palastros de acero empalmados con doble cubrejunta (fig. 24, lám. 16), y en general, en todos los casos en que cada roblón trabaje por esfuerzo cortante en dos secciones transversales.

Finalmente, los números que se hallan por debajo de la línea CC (que son menores que 1,18) corresponden al mismo caso anterior (roblones que trabajan en dos secciones), pero empleando palastros de hierro.

El diámetro de los orificios aparece superior en un milímetro al de los roblones, según práctica corriente; sin embargo, lo representamos con la misma letra d (diámetro del roblón), y lo tenemos en cuenta al hallar la relación $\frac{d}{e}$; porque si la roblonadura está bien hecha, el cuerpo del roblón debe llenar perfectamente el hueco ó taladro abierto en los hierros, y, por tanto, el diámetro de aquél para la resistencia al esfuerzo cortante, es el del orificio.

Espesor del palastro e milímetros.	DIÁMETRO DE LOS ROBLONES — Milímetros	d DIÁMETRO DE LOS ORIFICIOS EN MILÍMETROS													
		9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
		Valor de la relación $\frac{d}{e}$													
		A													
4	8	10	"	"	"	2,25	2,75								
5	10	12	14	"	"	2,20	2,60	3,00							
6	12	14	16	"	"	"	2,17	2,50	2,83						
7	12	14	16	18	"	"	1,86	2,15	2,43	2,72					
8	12	14	16	18	"	"	1,63	1,87	2,12	2,38					
9	14	16	18	20	"	"	"	1,67	1,89	2,11	2,33				
10	16	18	20	"	"	"	"	"	1,70	1,90	2,10				
11	16	18	20	22	"	"	"	"	"	1,55	1,73	1,91	2,09		
12	"	18	20	22	"	"	"	"	"	1,58	1,75	1,91			
14	18	20	22	24	"	"	"	"	"	1,33	1,50	1,64	1,78		
16	18	20	22	24	26	"	"	"	"	1,19	1,31	1,44	1,56	1,69	
18	20	22	24	26	28	"	"	"	"	1,17	1,28	1,39	1,50	1,61	
20	22	24	26	28	"	"	"	"	"	1,15	1,25	1,35	1,45		
22	24	26	28	30	"	"	"	"	"	1,14	1,23	1,32	1,41		
24	26	28	30	32	"	"	"	"	"	1,125	1,21	1,29	1,37		
26	26	28	30	32	34	"	"	"	"	1,04	1,11	1,19	1,27	1,35	
28	28	30	32	34	"	"	"	"	"	1,035	1,11	1,18	1,25		
30	30	32	34	"	"	"	"	"	"	"	1,035	1,10	1,17		

279. Agrupación de los roblones en las diversas filas. — Si en las fórmulas (*c'*) (núm. 269), damos á *K* el menor valor que puede tener, ó sea 0,56 (núm. 270), y á $\frac{d}{e}$ también el menor, que es 2,35 (núm. 278), se obtiene $K \frac{d}{e} > 1$. Para el caso de doble cubrejunta, *K* se convierte en 2 *K*, según ya hemos visto, y $\frac{d}{e}$ tiene por mínimo valor 1,18, de modo que $2 K \frac{d}{e} > 1$ también.

Haciendo *m* igual 2, 3, 4, etc., en la fórmula (*c'*) del núm. 269, y llamando *n* al factor $K \frac{d}{e}$ ó al $2 K \frac{d}{e}$, se deduce:

$$N_2 \leq N_1 + n N_1; \text{ siendo } n > 1, N_2 \text{ puede ser igual á } 2 N_1.$$

$N_3 \leq N_1 + (N_1 + N_2) n = N_1 + (N_1 + 2 N_1) n$; y puesto que $n > 1$, puede ser *N* igual á 4 *N*₁.

En resumen, el número de roblones de las filas puede distribuirse en esta forma:

$$N_1 \dots 2 N_1 \dots 4 N_1 \dots 8 N_1 \dots \text{ etc.}$$

es decir, duplicando de fila á fila; y con mayor razón podría hacerse:

$$N_1 \dots 2 N_1 \dots 3 N_1 \dots 4 N_1 \dots \text{ etc.}$$

El primer modo de distribución da lugar á combinaciones como las representadas en las figs. 15 y 16 (lám. 17). Hemos separado con líneas de puntos los grupos de roblones que siguen la ley dicha, y claro es que el total obedece á la misma ley.

La segunda distribución, es origen de las combinaciones que manifiestan las figs. 16, 17 y 18 (lám. 17).

También se pueden disponer en la relación (figs. 19 y 20, lám. 17),

$$N_1 \dots 3 N_1 \dots 5 N_1 \dots 7 N_1 \dots \text{ etc.}$$

pero ha de comprobarse si se verifica la desigualdad (*c'*) del núm. 269.

280. Para hierros de gran longitud y pequeña anchura, no se pone más que un solo grupo de roblones de los comprendidos en las líneas de puntos de las disposiciones anteriores. (Véanse las figs. 21 y 22, lám. 17).

281. Distancia entre ejes de los roblones de una misma fila. — Como límite inferior se asigna en la práctica 2,5 diámetros de roblón, ó 2,5 *d*.

Cuanto al límite superior, no hay razón para fijar uno especial para las roblonaduras en que no hay que atender á otra cosa que á la resistencia; pero no puede decirse lo mismo cuando sea preciso obtener la impermeabilidad de las juntas.

En construcciones navales se fija como máxima distancia 4,5 *d* para los roblones de la primera fila; lo mismo sucede en los depósitos de agua.

Todavía es conveniente disminuir este límite superior en las envolventes sometidas á gran presión interior, como sucede en las calderas de vapor, en las cuales se admite como máximo:

$$\begin{aligned} 2,5 d \text{ á } 3 d \dots & \text{ para los cosidos en una sola fila de roblones.} \\ 3,5 d \text{ á } 4 d \dots & \text{ para los cosidos en dos filas.} \end{aligned}$$

282. Distancia de las filas extremas al borde de la plancha. — Esta distancia, que representaremos por *h* (figs. 23 y 24, lám. 17), ha de calcularse de manera que no se produzca fractura por desgarramiento ni por flexión (figura 24, lám. 17).

El primer modo de fractura (fig. 23) queda evitado si hacemos que la resistencia al desgarramiento que ofrece el hierro ó palastro, enfrente de cada roblón, sea igual á la que éste presenta al esfuerzo cortante. El desgarramiento ha de operarse según *a b* y *a' b'*; no contando para la resistencia más que con la longitud *h*, lo cual es prudente, deberá verificarse, llamando *R'''* al coeficiente de trabajo del hierro por desgarramiento, y *R''* al relativo al esfuerzo cortante

$$2 h e R''' \geq \frac{\pi d^2}{4} R'' \quad (1).$$

Para prevenir la segunda causa de fractura, se considerará el trozo de palastro *a b b' a'* como pieza empotrada y sometida á flexión por una fuerza aplicada en su punto medio, según ya hicimos en el núm. 278.

La fórmula que resuelve este caso de flexión es $\frac{R a b^2}{6} \geq \frac{1}{8} P l$; en el

(*) Véase el núm. 501.

problema actual, las cantidades que entran en ella tienen las siguientes equivalencias:

a (dimensión normal al plano de flexión)... e = espesor del palastro.
 b (ídem paralela al plano de flexión)... h .
 l (longitud de la pieza empotrada)... d = diámetro del roblón.
 P (fuerza aplicada al punto medio)... $\frac{\pi d^2}{4} R''$ = (resistencia del roblón al esfuerzo cortante).
 de modo que será

$$\frac{R e h^2}{6} > \frac{1}{8} \frac{\pi d^2}{4} R'' d \quad (2).$$

Si hacemos $d = 2e$; y además para coeficiente de fractura,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 27 \\ \bar{R}'' = \bar{R}''' = 30 \end{array} \right\} \text{para hierro} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{R}'' = \bar{R}''' = 34 \\ \bar{R} = 42 \end{array} \right\} \text{para acero,}$$

y tomando la misma fracción $\frac{1}{m}$ de estos valores para formar los coeficientes de trabajo, se deduce de las ecuaciones (1) y (2) anteriores:

$$\begin{array}{l} \text{Palastro y roblones de hierro.....} \\ \text{Palastro y roblones de acero.....} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} h > 0,785 d \text{ (e.c.}^{\circ} 1) \\ h > 1,130 d \text{ (e.c.}^{\circ} 2) \\ h > 0,785 d \text{ (e.c.}^{\circ} 1) \\ h > 0,960 d \text{ (e.c.}^{\circ} 2) \end{array} \right.$$

En la práctica se hace $h = d$.

Lo que antecede se refiere á los empalmes por recubrimiento ó con simple cubrejunta, y en general para los casos en que los roblones trabajan por esfuerzo cortante en una sola sección trasversal.

Cuando hay doble cubrejunta (fig. 24, lám. 16), y en los casos similares, la fuerza aplicada á cada roblón es $\frac{2\pi d^2}{4} R''$ (núm. 263), y sin embargo, el palastro que la soporta es único; los cubrejuntas están en el mismo caso, pues si bien son dos y sufre cada uno solamente $\frac{\pi d^2}{4} R''$ de fuerza de desgarramiento, su espesor es mitad del de la plancha.

Habría que multiplicar por 2 los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2), y como en estos casos hay que limitar el diámetro de los roblones

para evitar el aplastamiento de los palastros (núm. 278) y los límites son:

$$\begin{array}{l} d = 1,18 e \dots\dots\dots \text{ para el hierro,} \\ d = 1,73 e \dots\dots\dots \text{ para el acero,} \end{array}$$

resultaría de las fórmulas (1) y (2):

$$\begin{array}{l} \text{Para el hierro.....} \\ \text{Para el acero.....} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1)\dots\dots\dots h > 0,43 d. \\ (2)\dots\dots\dots h > 0,77 d. \\ (1)\dots\dots\dots h > 0,68 d. \\ (2)\dots\dots\dots h > 1,01 d. \end{array} \right.$$

En la práctica, y en todos casos, se hace $h = d$.

283. Distancia entre las filas de roblones.— Si los roblones están dispuestos en dos filas, del modo representado en la fig. 25 (lám. 17), es preciso que la segunda fila esté, con respecto á la primera, en las mismas condiciones que la primera está con el borde $b b'$; de modo que debe ser

$$c h = a b \quad \text{y} \quad a' = a b + d.$$

En el caso de la fig. 26 (lám. 17) hay que comprobar que $a b + c d > u v$. Sabemos que $m' n > m s$, pero es preciso ver si

$$m' n - d > m s - \frac{1}{2} d,$$

y por tanto, si $a b + c d > u v$.

Para los casos representados en las figs. 27 y 28 (lám. 17), hay que comprobar que la distancia a' , entre los centros de las dos filas, es la exigida para el caso de la fig. 25. Además, en la fig. 27 debe ser $r s + a b > c h$; y en la 28, $a b + r s + u v > c h$.

284. Disminución de anchura en el recubrimiento.— A partir de la fila central de roblones, puede reducirse la anchura l de los palastros mediante un cálculo sencillísimo (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 18).

Si la fila central es la $m + 1$, en ella la resistencia del empalme viene representada por

$$(l_m - N_m d) e \bar{R} + (N_1 + \dots + N_{m-1}) \frac{\pi d^2}{4} \bar{R}'' \quad (\text{núm. 267})$$

$$\text{ó} \quad (l_m - N_m d) e \bar{R} + (N_1 + \dots + N_{m-1}) d^2 \bar{R} K \quad (1).$$

En la fila $m+1$, de anchura l_{m+1} , la resistencia es

$$(l_{m+1} - N_{m+1}d) e \bar{R} + (N_1 + \dots + N_m) d^2 \bar{R} K \quad (2).$$

Si queremos que estas resistencias sean iguales, igualaremos los dos valores (1) y (2), y de ellos se obtiene,

$$l' = l_m - l_{m+1} = (N_m - N_{m+1}) d + N_m K \frac{d^2}{e}.$$

El mínimo de K es 0,56 (núm. 270), y el de $\frac{d}{e}$ es, para el recubrimiento, 2,35 (núm. 278); aun para estos valores mínimos se verifica $K \frac{d}{e} > 1$, y $N_m K \frac{d^2}{e} > N_m d$; luego

$$l' > (2 N_m - N_{m+1}) d.$$

Igualdad que nos permite calcular la disminución del ancho del palastro al pasar de una fila de roblones á otra.

Por ejemplo, en la fig. 2.^a, la fila m tiene 6 roblones y la $m+1$ tiene 3. La reducción de anchura de palastros en esta última fila podrá ser $(2 \times 6 - 3) d = 9 d$; en la fila siguiente, $(2 \times 3 - 2) d = 4 d$ con respecto á la anterior, y en la última $(2 \times 2 - 1) d = 3 d$ con respecto á la precedente. Se podrá trazar estas anchuras y sustituir con líneas rectas las curvas que resulten.

VIGAS DE MADERA EMPALMADAS Y ENSAMBLADAS

SOMETIDAS Á EXTENSIÓN Ó COMPRESIÓN

285. La longitud de las piezas de madera es á veces deficiente, y entonces hay necesidad de empalmarlas. A continuación indicamos las disposiciones más generalmente admitidas y el método de cálculo que debe emplearse para conseguir la resistencia del conjunto.

286. Compresión. — Cuando la longitud del prisma es suficientemente pequeña para que no haya que temer la flexión lateral (*), el cálculo de una

(*) Véase "Piezas comprimidas según su eje", Cap. VII.

viga empalmada es idéntico al de una viga formada de una sola pieza, y se empleará la fórmula $P = R' \omega$, siendo P la fuerza de compresión, R' el coeficiente de trabajo por compresión de la madera y ω el área de la sección transversal resistente.

En realidad, para esta clase de esfuerzos el empalme podría hacerse á junta plana; pero á fin de evitar el movimiento de una de las dos partes por efecto de fuerzas laterales extrañas, se fortalece la unión con pernos, bridas de madera ó de hierro, etc., (figs. 3.^a, 4.^a, 5.^a y 6.^a, lám. 18). En cualquiera de estas disposiciones, para obtener el área de la sección resistente, ha de restarse del área de la sección transversal la parte correspondiente á los orificios abiertos para el paso de los pernos, cajas ó rebajos, de modo que ω corresponde á la sección transversal causada por un plano que pasa por el punto en que la viga está más debilitada, para colocarnos en las más desfavorables circunstancias de resistencia. Por ejemplo, en la fig. 3.^a, ω sería el área de la parte rayada, correspondiendo la parte en blanco, que no se tiene en cuenta, al taladro abierto en la madera para el paso del perno.

287. Si la longitud de la viga, por su excesiva magnitud relativamente á las dimensiones de la sección transversal, hiciese temer la posibilidad de flexión lateral, el problema estaría comprendido en los que se resuelven en el núm. 542 y siguientes.

288. Extensión. — Empléanse varias disposiciones de empalme para las piezas sometidas á extensión:

1.^a *Empalme á diente de perro* (fig. 7.^a, lám. 18). — Llamemos

a y b = lados de escuadría.

c = dimensiones $e o$ y $p u$, iguales.

d = » $p s$ y $g f$ »

h = » $t p$ y $f s'$ »

R = coeficiente de trabajo de la madera por extensión.

R' = » » » por compresión.

R'' = » » » por desgarramiento.

F = fuerza de extensión.

El empalme puede romperse de los siguientes modos:

Por tracción, según $e o$ ó $p u$. El área resistente á este esfuerzo es $a \times c$.

Por aplastamiento en $p s$ ó $g f$; área resistente = $a \times d$.

Por desgarramiento á lo largo de $t p$ ó $f s'$; área resistente = $a \times h$.

Para que la resistencia en todos sentidos sea la misma, ha de verificarse

$$F = R a c = R' a d = R'' a h,$$

de donde se deduce que

$$\frac{d}{c} = \frac{R}{R'} \quad \text{ó} \quad d = c \frac{R}{R'}$$

$$\frac{h}{c} = \frac{R}{R''} \quad \text{ó} \quad h = c \frac{R}{R''}$$

Además, el lado b es igual á $2 \times eo + ps = 2c + d$, y entre los dos lados de escuadría hay una cierta relación que generalmente es $a = \frac{2}{3}b$ (número 501). Si llamamos m á la relación $\frac{R}{R'}$, tendremos en definitiva:

$$d = m c \quad (1)$$

$$b = c(2 + m) \quad (2)$$

$$a = \frac{2}{3} c(2 + m) \quad (3)$$

$$h = c \frac{R}{R''} \quad (4)$$

$$F = R a c = \frac{2}{3} R c^2 (2 + m) \quad (5)$$

cuyo sistema de ecuaciones resuelve todos los problemas.

Si es conocida la fuerza de tracción F , se determinará c por la ecuación 5, y será $c = \sqrt{\frac{3 F}{2 R (2 + m)}}$, y en seguida los valores a, b, d y h , que son funciones de c , por las ecuaciones (1) á (4).

Cuando sean dadas las dimensiones de la viga (lados a y b de escuadría) y se desee conocer la fuerza de extensión F que podrá soportar la pieza empalmada y las dimensiones del empalme, se determinarán

c por la ecuación (2)

F por la (5)

d y h por las (1) y (4).

Al hacer uso de las ecuaciones (1) á (5) se tendrá cuidado de referir todas las cantidades á la misma unidad de medida. Para la madera se acostumbra

á expresar las dimensiones a, b, d y h en centímetros, y los coeficientes R, R', R'' en kilogramos por cm.²

289. Ejemplos. 1.º Viga empalmada á diente de perro, sometida á un esfuerzo tractor de $F = 7680$ kilogramos. Se piden las dimensiones de la viga (a y b) y las del empalme (c, d y h).

Datos:

Madera de pino fuerte:

$$F = 7680$$

$$R = R' = 60 \text{ kilogramos por cm.}^2 \quad \text{''} \quad m = \frac{R}{R'} = 1 \quad \left. \vphantom{\frac{R}{R'}} \right\} \text{(núms. 178 y 179).}$$

$$R'' = 10 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

Se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{3 F}{6 R}} = \sqrt{\frac{3 \times 7680}{6 \times 60}} = 8 \text{ cm.}$$

$$a = 16 \text{ cm.}$$

$$b = 24 \text{ cm.}$$

$$d = c = 8 \text{ cm.}$$

$$h = 48 \text{ cm.}$$

290. 2.º Viga de $a = 12$ cm. y $b = 18$ cm., empalmada á diente de perro. Se desea conocer la fuerza de tracción F que podrá aplicársele, y las dimensiones del empalme, suponiendo que por la calidad de la madera $R = R' = 40$ kilogramos por cm.² y $R'' = 6$ kilogramos por cm.²

$$m = 1$$

$$c = \frac{b}{2 + m} = 6 \text{ cm.}$$

$$F = \frac{2}{3} R c^2 (2 + m) = 2880 \text{ kilogramos.}$$

$$d = m c = 6 \text{ cm.}$$

$$h = c \frac{R}{R''} = 40 \text{ cm.}$$

291. Cuando $R = R'$, que es el caso general, resulta $m = 1$ y $d = c = \frac{1}{3}b$: esto nos dice que para trazar el empalme ha de dividirse la altura b en tres partes iguales. Así se ha hecho en la fig. 7.ª (lám. 18) por medio de las rectas de puntos tr y es'

292. Si $R = 2R'$, es decir, si la madera fuese dos veces más resistente á la extensión que á la compresión, sería $m = 2$, $c = \frac{1}{4} b$ y $d = 2 c$. Entonces habría de dividirse en cuatro partes la magnitud b (líneas de puntos fig. 9.^a) y asignar dos de ellas á la dimensión $d = p s$ que trabaja por compresión.

293. Para $R = \frac{1}{2} R'$ se obtiene

$$m = \frac{1}{2} \quad c = \frac{2}{5} b \quad d = \frac{1}{2} c = \frac{1}{5} b.$$

Se dividiría b en cinco partes para trazar el empalme, de las cuales se reservaría una para valor de d (fig. 10, lám. 18).

294. 2.^a Disposición. — Empalme á rayo de Júpiter (fig. 8.^a, lám. 18.) — Es aplicable cuanto dejamos dicho para la primera disposición, y sirven las mismas ecuaciones (1) á (5). En este caso

$$\begin{aligned} c &= e o = p u \\ d &= e p \\ h &= g s = p r. \end{aligned}$$

El trazado del empalme se haría también dividiendo la altura b en 3, 4 y 5 partes, según que m , relación $\frac{R}{R'}$, fuese igual á 1, 2, $\frac{1}{2}$, etc.

295. 3.^a Otras disposiciones. — Si en la ecuación (5) sustituimos c por su valor $\frac{b}{2+m}$ deducido de la (2), se obtiene

$$F = \frac{R a b}{2 + m}.$$

Este valor de F hace ver claramente las desfavorables condiciones resistentes de los empalmes á diente de perro ó rayo de Júpiter, y el gran desperdicio de madera que resulta, puesto que solamente se utiliza para la resistencia una fracción $\frac{1}{2+m}$ del área $a b$ de la sección trasversal. Para el caso de la fig. 7.^a ($m = 1$), la escuadría queda reducida á $\frac{1}{3}$; en la fig. 9.^a ($m = 2$) á $\frac{1}{4}$; por esta razón son preferibles las disposiciones representadas

en las figs. 11 á 22 (lám. 18) que debilitan mucho menos las vigas empalmadas.

Fig. 11. *Bridas de madera y pernos.* — Las bridas trabajan por extensión en A y B , por compresión en los rebajos y por desgarramiento en los extremos. Las vigas empalmadas trabajan por extensión en a y b , por desgarramiento en c y d y por compresión en los rebajos. Los pernos no tienen otro objeto que el de unir íntimamente las vigas y las bridas.

Figs. 14 y 15. *Bridas de hierro, lisas, y pernos.* — Las piezas de madera A, B, C , trabajan por extensión y desgarramiento, y lo mismo sucede á las bridas de hierro $a b$. Los pernos están sometidos á esfuerzo cortante.

Figs. 12, 13 y 18. *Bridas de hierro, con pestañas y pernos.* — El objeto de las pestañas (véase m, n , fig. 13) es el de traducir en desgarramiento longitudinal de las vigas de madera la extensión que sufren las bridas de hierro, para que los pernos no trabajen por esfuerzo cortante y tengan por único objeto el de comprimir y unir bridas y vigas.

La madera y el hierro trabajan por compresión, extensión y desgarramiento.

Fig. 12. Cuñas a, b , de hierro, que se alojan en pequeñas cajas abiertas en las vigas A, B, C , de madera, y traducen el esfuerzo tractor en compresiones y desgarramientos. Bridas c de hierro en los puntos en que hay solución de continuidad; su sección trasversal ha de presentar resistencia igual á la de la viga A interrumpida. Los pernos no trabajan por esfuerzo cortante, y se emplean solamente para unir sólidamente las piezas A, B, C, a, b, c .

Esta disposición es muy empleada en los casos de varias vigas yustapuestas sometidas á extensión (largueros ó cordones en los puentes de madera).

Fig. 16. Disposición semejante á la anterior, pero con bridas de madera; A es la vista perspectiva de una cuña de hierro.

Fig. 17. La extensión se lleva á varillas laterales.

Fig. 19. Las bridas de hierro se han incrustado en el espesor de la madera, de modo que están á un haz con las caras de la viga.

Figs. 20 á 22. Vigas de tablas con cubrejuntas del mismo material. La unión puede hacerse con clavos, pernos ó clavijas de madera.

Llamemos

ω_m, ω_h áreas de sección trasversal, de las piezas de madera y de hierro sometidas á tracción.
 ω'_m, ω'_h áreas de sección trasversal, de las piezas de madera y de hierro sometidas á compresión.

$\omega''_m, \omega''_h \dots$ áreas de sección transversal, de las piezas de madera y de hierro sometidas á esfuerzo cortante.
 $\omega'''_m, \omega'''_h \dots$ áreas de sección transversal, de las piezas de madera y de hierro sometidas á desgarramiento.
 $R_m, R'_m, R''_m, R'''_m \dots$
 $R_h, R'_h, R''_h, R'''_h \dots$ } coeficientes de trabajo por extensión, compresión, esfuerzo cortante y desgarramiento longitudinal, para la madera y hierro respectivamente.

Deberá verificarse, para que todas las partes del empalme resistan igualmente á la fuerza F de tracción,

$$F = R_m \omega_m = R_h \omega_h \dots = R'_m \omega'_m = R'_h \omega'_h \dots = R''_m \omega''_m = R''_h \omega''_h \dots = R'''_m \omega'''_m = R'''_h \omega'''_h$$

ó

$$\frac{\omega_m}{\omega_h} = \frac{R_h}{R_m} \quad \frac{\omega_m}{\omega'_m} = \frac{R'_m}{R_m} \quad \frac{\omega_m}{\omega_h} = \frac{R'_h}{R'_m} \text{ etc.,}$$

es decir, que las áreas han de estar en razón inversa de los coeficientes de trabajo.

La aplicación de estas fórmulas es sencilla en la resolución de los dos problemas principales que pueden presentarse, y son: dado F determinar la escuadría de las piezas empalmadas y demás elementos del empalme; y recíprocamente, conocida la escuadría, determinar F y los citados elementos.

296. Primer problema. — Supongamos que se trata del empalme representado en la fig. 15 (lám. 18). Tomaremos en consideración los diversos modos de fractura del empalme.

Fractura de los pernos por esfuerzo cortante. — De cada lado de la junta hay n pernos y $2n$ secciones resistentes al esfuerzo cortante. Si d es el diámetro del perno, será

$$F = 2n \frac{\pi d^2}{4} R''_h$$

y de esta ecuación se deduciría d .

Fractura de las vigas principales por tracción. — Si los pernos se colocan en dos filas, como en C (fig. 15), el área resistente á la tracción (véase A , parte rayada) será $\omega_m = a(b - 2d)$, y la ecuación

$$F = a(b - 2d) R_m.$$

determinará a y b , lados de escuadría.

Cuando se pongan los pernos en una sola fila (véase P y B , fig. 15), la ecuación de resistencia es

$$F = a(b - d) R_m.$$

Fractura de las vigas principales por desgarramiento. — El área que se opone al desgarramiento (D , fig. 15) es $4sa$; de la igualdad

$$\frac{\omega_m}{4sa} = \frac{R'''_m}{R_m}$$

deduciríamos s .

Si los pernos se hubiesen colocado en una fila, correspondiendo á una misma capa de fibras P , (fig. 15), el área resistente al desgarramiento sería la mitad de la anterior, á igual longitud de brida. Conviene que los pernos estén en filas distintas para que den mayor superficie de desgarramiento en las vigas principales, y á este fin, si la brida es de pequeña altura, se disponen del modo representado en la fig. 11.

Fractura de las bridas por tracción. — Llamando b' á la altura de la brida y e al espesor, tendríamos también, comparando el área resistente de las dos bridas $2e(b' - 2d)$ con la ω_m de las vigas principales,

$$\frac{\omega_m}{2e(b' - 2d)} = \frac{R_h}{R_m}$$

y de aquí deduciríamos e y b' , fijando antes el valor de una de ellas.

Fractura de las bridas por desgarramiento. — Llamando z á la distancia que hay desde el borde de los orificios exteriores al extremo de la brida y x á la intermedia de los pernos de una misma fila (vease C , fig. 15, lám. 18), será

$$\frac{8e(z + x)}{4sa} = \frac{R'''_m}{R'''_h}$$

que dará x y z .

De la misma manera se hubiera resuelto el problema en los casos representados por las figs. 12, 13, 16 y 18 de la lám. 18.

297. Segundo problema. — Supongamos que se trata del empalme dibujado en la fig. 18 (lám. 18). El área resistente á la tracción (después de descontar los rebajos hechos para el alojamiento de las pestañas ó partes salientes de las bridas de hierro) es $a'b'$ (véase A , parte rayada), de modo que de la ecuación

$$F = a'b' R_m$$

deduciremos el valor de F (*). El desgarramiento de la madera ha de efectuarse según $h s = z$ en cada brida; de modo que el área resistente es $2 z b'$, y por tanto,

$$\frac{2 z b'}{a' b'} = \frac{R_m}{R''_m}.$$

Llamando e al grueso de la pestaña, c á su altura y n al número correspondiente á cada viga en las dos bridas, el área de resistencia al desgarramiento del hierro en éstas es $n e c$; de modo que deberá verificarse

$$\frac{n e c}{a' b'} = \frac{R_m}{R''_h}.$$

La sección transversal resistente de las bridas á la tracción, ω_h , ha de cumplir con la condición $F = 2 \omega_h R_h$.

298. Ensambladura de pares, tirantes y otras piezas. — La disposición ordinaria llamada *á espera* (fig. 8.^a, lám. 13), tiene el inconveniente de debilitar mucho el tirante, y por esta razón se emplean á veces las disposiciones figs. 11 y 12 de la lám. 13, y figs. 23 y 24 de la lám. 18.

Por iguales motivos se adoptan frecuentemente las disposiciones representadas en las figs. 25, 26, 27 y 28 de la lám. 18.

En todos casos, el cálculo de resistencia es sencillísimo, é igual al que dejamos explicado en los problemas precedentes.

299. Vigas de tablas. — Las tablas se yustaponen á juntas encontradas, y se ponen bridas, de tabla también, con objeto de que todo plano ideal transversal dé una misma sección ω resistente al esfuerzo tractor (fig. 20, lám. 18). La longitud de las bridas y el número y diámetro de los pernos se calculará como en los casos anteriores.

A falta de pernos puede hacer uso de clavos ó de cabillas de madera dura, abiertas y acañadas en sus extremos. Si se emplean clavos, es preferible que sean delgados y multiplicar su número, porque de este modo se obtiene más perfecta unión de las tablas sin debilitarlas.

Para soportar compresiones, conviene formar verdaderos tubos (figs. 21 y 22, lám. 18), intercalando tarugos á cuyas cuatro caras laterales se clavan ó aseguran las tablas.

(*) La dimensión a'' (véase A) del rebajo, que no es otra cosa que la salida de la pestaña de la brida, se calcula para que la madera resista á la compresión originada en estos sitios. Será, pues, $F = n a'' b' R'_m$, siendo n el número de pestañas, que en la fig. 18 es de 4. Conocido a'' lo será $a' = a - 2 a''$.

IV

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS

SOMETIDAS Á FUERZAS ESTÁTICAS NORMALES Á SU EJE

FUERZAS ELÁSTICAS QUE SE DESARROLLAN

1.º DEFINICIONES

2.º EXPRESIONES DIVERSAS DEL MOMENTO

DE FUERZAS ELÁSTICAS

1.º DEFINICIONES

300. Consideremos un prisma $O n$ (figs. 17 y 18, lám. 5.^a), sólidamente sujeto por el extremo O y solicitado en n por la fuerza P .

Para estudiar el efecto de P en una sección transversal ideal cualquiera del prisma, tal como la $D C$, introduzcamos tangencialmente á $D C$ las dos fuerzas P' , P'' , paralelas é iguales á P , con lo cual resulta que P es equivalente al par formado por las fuerzas P' y P , y á la fuerza $P''=P$. Se engendrará por tanto en $D C$ una rotación de izquierda á derecha, debida al par $P' P$ cuyo momento es $P \times n m$, y una tendencia al resbalamiento de la parte del prisma $C D n$ á lo largo del plano ideal $C D$, por efecto de la fuerza $P''=P$.

De la suma de rotaciones de todas las secciones transversales ideales, resulta la deformación por flexión, ó encorvadura del prisma. De aquí que se denomine *momento de flexión* al momento $P \times m n$ que la ocasiona, y que es variable de una sección á otra puesto que variable es el brazo de palanca $m n$.

La fuerza $P''=P$ se llama *esfuerzo cortante* porque, en efecto, tiende á cortar transversalmente el prisma. Del esfuerzo cortante nacen también deformaciones transversales, si bien inapreciables en comparación de la curvatura.

Suponiendo formado el prisma de un haz ó conjunto de fibras unidas lateralmente, la experiencia demuestra que, por efecto de la flexión, unas fibras se alargan y otras se acortan, como si á lo largo de ellas se aplicasen directamente fuerzas de extensión y de compresión; y como consecuencia, se desarrollan en el interior del prisma, paralelamente á su eje, fuerzas elásticas, que se oponen á dichas deformaciones. Sumadas todas estas fuerzas elásticas, normalmente á una sección cualquiera $D' C'$, forman un par $h h$, cuyo momento, llamado *momento de las fuerzas elásticas*, equilibra al momento de las fuerzas exteriores P , ó sea al momento de flexión.

La extensión ó compresión que sufre una misma fibra, cualquiera, por efecto de la flexión, no tiene la misma intensidad en toda su longitud, sino que varía de un punto á otro. Por esta razón, el momento de las fuer-

zas elásticas tiene, en general, valor diferente para cada sección transversal del prisma, y así debe ser, pues que el momento de flexión $P \times m n$ también es variable de una á otra sección.

El esfuerzo cortante P'' , desarrolla también fuerzas elásticas transversales de resultante igual y contraria que recibe el nombre de *resistencia al esfuerzo cortante*.

Cuanto queda dicho puede hacerse extensivo á los prismas solicitados por más de una fuerza. Si en uno de estos (fig. 21, lám. 5.^a), consideramos la sección ideal $a' b'$ y la acción ejercida en ella por las fuerzas de uno ó de otro lado (*) por ejemplo, las de la derecha, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo cortante} \dots\dots\dots C &= D - E + B - A \\ \text{Momento de flexión} \dots\dots\dots M &= D d - E e + B b - A a \\ \text{Resistencia al esfuerzo cortante} \dots C' &= - C \\ \text{Momento de las fuerzas elásticas} \dots M' &= - M \end{aligned}$$

Para que el *problema de resistencia* quede resuelto, es necesario que en toda sección ideal transversal del prisma se verifique

$$\begin{aligned} C' &= C \\ M' &= M \end{aligned}$$

sin que las extensiones, compresiones y esfuerzos cortantes que sufren las fibras por unidad superficial de sección transversal (de valor igual y contrario á las fuerzas elásticas que se desarrollan), lleguen nunca á ser iguales á la fuerza límite de elasticidad, ni menos al coeficiente de fractura.

Esto indica la marcha que debe seguirse en la resolución del problema; hay que determinar las expresiones de los valores de M' , C' , M y C ; igualar estos valores é introducir en ellos la condición de que las presiones, extensiones, etc., por unidad superficial de sección transversal de fibras, sean iguales á los coeficientes de trabajo R , R' etc.

301. Por efecto de la flexión se desarrolla un *esfuerzo rasante ó de desgarramiento longitudinal* á lo largo de las fibras, que tiende á destruir su unión lateral y á dividir el prisma en varias partes por planos paralelos al eje. Más adelante nos ocuparemos de este esfuerzo (núm. 463).

302. De cuanto antecede se desprende que la flexión no es una deformación simple, sino una combinación de extensiones, compresiones, esfuerzos cortantes, etc.

(*) Es indiferente tomar las fuerzas de uno ó de otro lado para la determinación de C y M , porque se llega á los mismos valores absolutos. (Véase el número 311.)

2.º EXPRESIONES DIVERSAS

DEL MOMENTO DE LAS FUERZAS ELÁSTICAS

303. Tomaremos como eje de abscisas $O X$ (fig. 17, lám. 5.^a), el eje del prisma antes de ser deformado, el cual contiene los centros de gravedad de todas las secciones transversales; y como eje $O Y$, una perpendicular al primero.

En esta teoría y en todas sus aplicaciones, supondremos:

1.º Que la deformación del sólido es de simple curvatura; es decir, que la flexión se opera únicamente en el plano $X Y$, en el cual es necesario, para ello, que actúen las fuerzas exteriores.

Este caso, aunque particular, es el que con más frecuencia se presenta en las construcciones.

2.º Que las compresiones, extensiones y demás fuerzas á que resulta sometida la materia por efecto de la flexión, son inferiores al límite de elasticidad, de modo que operamos en pleno *período elástico* (núms. 25 y 51), y puede ser aplicado el principio de que *las deformaciones de las fibras elementales del prisma, por extensión, compresión, etc., son proporcionales á las fuerzas que las producen*: es decir $p = E i$.

3.º Que la deformación total ó encorvadura del prisma, es suficientemente pequeña para que las fuerzas exteriores que en un principio eran normales al eje, continúen siéndolo, sensiblemente, después de la flexión.

304. Hechos en que se funda la teoría de la flexión.—1.º Las secciones planas normales al eje del prisma antes de la deformación, continúan siendo planas y normales al eje después de flexado.

Dupin comprobó este hecho trazando rectas normales á las aristas de un prisma de madera, de modo que dibujaban secciones transversales perpendiculares al eje, y verificando que dichas líneas, después de la flexión, continuaban siendo rectas, normales á las aristas encorvadas y contenidas en un mismo plano (figs. 19 y 20, lám. 5.^a)

Duleau repitió la experiencia en una barra de hierro, encorvada expresamente en forma circular.

Duguet encontró el mismo resultado en una barra de acero dulce flexada no circularmente, sino según una curva de curvatura variable de uno á otro punto de su eje, que es el caso general en la práctica.

Otros muchos experimentadores han llegado á la misma conclusión, enunciada ya por Bernouilli.

2.º Unas fibras del prisma se comprimen por consecuencia de la flexión; otras se extienden.

Del hecho anterior resulta que dos secciones, AB , CD , primitivamente paralelas, toman la posición $A'B'$, $C'D'$ (figs. 17 y 18), después de flexado el prisma. Esto demuestra que se han alterado las dimensiones longitudinales de las fibras comprendidas entre dichas dos secciones, pero no queda determinada la naturaleza de las deformaciones, y, por tanto, de las fuerzas que las producen.

Si $A'C' \geq AC$, con mayor razón $B'D' > BD$, y entonces todas las fibras se han alargado obedeciendo á fuerzas de extensión.

Si $B'D' \leq BD$, será $A'C' < AC$, y todas las fibras se habrán comprimido.

Por último, si $A'C' < AC$ y $B'D' > BD$, será que unas fibras han sido comprimidas y otras han sufrido extensiones. Esto es lo que sucede, y así fué comprobado por Duleau en sus experiencias.

Duhamel de Monceaux había demostrado ya en 1767, que no todas las fibras del prisma trabajan por extensión. A este efecto sometió á la fractura por flexión vigas de sauce y de pino del Norte en las que había practicado un corte de sierra trasversal ab en su punto medio (figs. 19 y 20, lám. 5.ª), interrumpiendo la continuidad de las fibras en una cierta parte del espesor del prisma, y encontró que la resistencia era la misma que la de otros prismas de iguales dimensiones, intactos.

Las experiencias de Hodgkinson, Fairbairn, Clark, Morin y otros muchos, demuestran también la existencia de compresiones y extensiones en las fibras por resultado de la flexión; y á esta misma conclusión se llega por los recientes estudios teórico prácticos de Mr. Considère. En una barra de acero dulce, sometida á flexión hasta producir encorvadura permanente, la sección en MN , que era primitivamente cuadrada, se convirtió en un trapecio (figs. 19 y 20, lám. 5.ª), ensanchándose por la parte superior y adelga-

zando por la inferior, lo cual prueba que aquélla parte sufrió compresiones, y ésta extensiones.

No insistiremos más sobre este punto, demostrado hoy tan repetidamente (*); y únicamente añadiremos que todas las experiencias anteriores prueban la existencia de una capa de fibras que no sufren extensiones ni compresiones; es decir, de una capa de fibras neutras que experimenta, como las demás, variaciones de figura, pues que el prisma toma una cierta curvatura, pero no variaciones de dimensión longitudinal.

Si hacemos coincidir las secciones $A'B'$ y AB (figs. 17 y 18, lám. 5.ª), y suponemos que la distancia BD de separación es muy pequeña, también coincidirán sensiblemente $B'D'$ y BD , $A'C'$ y AC ; y en cuanto á $C'D'$, tomará la posición que señala la fig. 22 (lám. 5.ª), cortando á CD en un punto H comprendido entre C y D . La capa de fibras neutras está proyectada en NH ; veamos el modo de fijar su situación.

305. Determinación de la capa de fibras neutras. — La rotación de cada sección se hace alrededor del eje neutro H , $H'H'$.

La extensión y la compresión que sufren las fibras es proporcional á su distancia á la capa neutra, pues que esta misma proporcionalidad existe en las deformaciones (fig. 22, lám. 5.ª).

$$\frac{DD'}{DH} = \frac{be}{bH} = \dots \frac{C'C}{CH} = \frac{dh}{Hh} = \dots$$

El prisma se hubiera deformado del mismo modo entre las dos secciones AB , CD , si en vez de estar cargado normalmente al eje con la fuerza P (fig. 17), estuviesen sus diversas capas de fibras sometidas á la acción directa de las fuerzas de extensión p (fig. 23, lám. 5.ª), y á las de compresión p' , siendo p y p' fuerzas por unidad superficial que varían como las ordenadas de $D'C'$ con respecto á DC (fig. 22), y cuyas resultantes representaremos por F , F' (fig. 23). Los puntos m y n de aplicación se llaman, respectivamente, centros de tensión y de compresión.

(*) Galileo suponía que todas las fibras se extendían, y en cantidad igual, para lo cual era preciso que las secciones paralelas antes de la flexión, lo fueran también después.

Hooke (1670), creía que todas las fibras se extendían, pero siendo las extensiones proporcionales á sus distancias á la capa exterior. Esta misma hipótesis admitieron Mariotte y Leibnitz.

Barlow rechazó estas hipótesis; sentó el hecho de que había fibras que se extendían y otras que se comprimían, pero con el error de suponer iguales todas las extensiones y compresiones.

Navier y Eytelwein, admitieron ya los hechos verdaderos.

Con arreglo á la ley de variación de p y de p' , las fuerzas F , F' han de pasar por los centros de gravedad de los volúmenes HDD' y HCC' (figura 22).

A estas fuerzas p , p' , F , F' (fig. 23), corresponden otras elásticas, de valor absoluto igual y de dirección contraria, p_1 , p'_1 , F_1 , F'_1 . La suma de momentos $F_1 \times Hm + F'_1 \times Hn$ es lo que hemos llamado *momento de las fuerzas elásticas*.

Según todo cuanto queda dicho, si en una viga flexada interrumpimos la materia cortándola transversalmente (fig. 24, lám. 5.^a), y queremos, sin embargo, que la figura del conjunto continúe siendo la misma, como si no existiese solución de continuidad, será preciso introducir una fuerza $C' = -P$ equivalente á la fuerza elástica que hemos llamado *resistencia al esfuerzo cortante*, y unas fuerzas F_1 y F'_1 , cuya suma de momentos $F_1 \times Hm + F'_1 \times Hn$, con respecto al punto H , sea equivalente al momento de las fuerzas elásticas.

306. Sean (fig. 22, lám. 5.^a):

p = fuerza por unidad superficial que extiende las fibras distantes z de la capa neutra, desde NH á BD , por resultado de la flexión del prisma.

p' = fuerza análoga de compresión que obra en las fibras situadas entre NH y AC : p y p' son funciones de z .

u = anchura variable $b'b'$ de la sección transversal. Definida que sea ésta, también lo será u función de z .

$v' = HD$, $v'' = HC$, los máximos valores de z .

i = el alargamiento ó acortamiento por unidad lineal sufrido por las fibras; es la cantidad variable $\frac{be}{NH}$, $\frac{dh}{NH}$, etc.

E = coeficiente de elasticidad por extensión y por compresión.

ρ = radio NO de curvatura de la capa neutra, entre las secciones consideradas AB y CD .

Fijándonos en la capa de fibras extendidas $b'b'$, p vale, teniendo en cuenta que $i = \frac{be}{NH} = \frac{bH}{NO} = \frac{z}{\rho}$;

$$p = Ei = \frac{Ez}{\rho} \quad (1).$$

En toda la capa $b'b'$, cuya área es udz , se habrá desarrollado una fuerza de extensión

$$\frac{E}{\rho} u dz . z$$

y en la parte $H'SH'$,

$$F = F_1 = \int_0^{v'} \frac{E}{\rho} u dz . z = \frac{E}{\rho} \int_0^{v'} u dz . z \quad (2)$$

Del mismo modo se vería que la resultante F' de las compresiones p' desarrolladas en las fibras de la parte $H'TH'$, ó sea su igual y contraria F'_1 , vale

$$F' = F'_1 = \frac{E}{\rho} \int_0^{v''} u dz . z \quad (3).$$

Si ha de haber un *par de fuerzas elásticas* que equilibre al par de flexión, como desde un principio hemos admitido, es preciso que F_1 y F'_1 sean iguales, es decir, que

$$\int_0^{v'} u dz . z = \int_0^{v''} u dz . z.$$

El producto $udz . z$ es el momento del área elemental $b'b'$ con relación á la recta $H'H'$, y la igualdad anterior expresa la condición de que la suma de los momentos de las áreas elementales de la parte $H'SH'$ sea igual á la de la parte $H'TH'$, lo cual exige que la recta $H'H'$ pase por el centro de gravedad de la sección transversal $H'SH'T$.

Queda, pues, fijada la posición de la capa de fibras neutras NH , puesto que *ha de pasar por los centros de gravedad de todas las secciones transversales AB , CD , etc., y ha de ser normal al plano longitudinal de simetría del prisma que contiene las fuerzas exteriores P .*

307. Momento de las fuerzas elásticas. — Las fuerzas elásticas $p_1 = p$ que obran en la capa $b'b'$, tienen un momento, con relación al eje $H'H'$,

$$p u dz . z = \frac{E}{\rho} u dz . z^2$$

y en toda la parte $H'SH'$, la suma de momentos $F_1 \times Hm$ (figs. 23 y 24, lám. 5.^a), vale

$$F_1 \times Hm = \frac{E}{\rho} \int_0^{v'} u dz z^2 \quad (4).$$

La cantidad representada por el signo integral, no es otra que la suma de las áreas elementales de la parte $H' S H'$ multiplicadas por el cuadrado de su distancia al eje $H' H'$, es decir, el momento de inercia I' de esta parte con respecto á dicho eje. Así, pues,

$$I'_1 \times H m = \frac{E I'}{\rho} \quad (5).$$

Del mismo modo, representando por I'' el momento de inercia de la parte de área $H' T H'$ con respecto al eje $H' H'$, obtendríamos

$$I''_1 \times H n = \frac{E I''}{\rho} \quad (6).$$

Resulta, por tanto, que el momento total M' de todas las fuerzas elásticas que se desarrollan por efecto de la flexión en la sección CD , es

$$M' = \frac{E I'}{\rho} + \frac{E I''}{\rho} \quad (7),$$

ó llamando I al momento de inercia de toda la sección transversal CD , con respecto al eje $H' H'$ proyectado en H ,

$$M' = \frac{E I}{\rho} \quad (8).$$

La expresión (8) puede ponerse bajo otras formas.

Tomando como eje $O X$ el primitivo del prisma (fig. 18, lám. 5.^a), y como eje $O Y$ la recta perpendicular á $O X$ en O , sabemos por teoría de líneas que

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

y despreciando $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ por su pequeño valor respecto á la unidad, y sustituyendo en (8), tenemos

$$M' = E I \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (9).$$

Por otra parte, de la expresión (1) deducimos que $\frac{E}{\rho} = \frac{p}{z}$, y sustituyendo en (8), resulta

$$M' = \frac{p I}{z} \quad (10);$$

y si la sustitución se hace en la expresión (7), obtendremos

$$M' = \frac{p I'}{z} + \frac{p I''}{z} \quad (11).$$

308. Empleo de las diversas expresiones de M' . — Tendremos ocasión de ver que el momento de flexión M es función de las fuerzas exteriores $P, P' \dots Q' \dots$, de la longitud l del prisma y de la abscisa x de la sección que se considere, es decir, que $M = f(P, l, x)$.

Si M' ha de ser igual á M , resulta, empleando las tres expresiones (8), (9) y (10),

$$\frac{p I}{z} = f(p, l, x) \quad (12)$$

$$\frac{E I}{\rho} = f(P, l, x) \quad (13)$$

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = f(P, l, x) \quad (14).$$

La ecuación (12) resuelve los problemas de resistencia. Esta se conseguirá siempre que los mayores valores de p , fuerza de extensión ó de compresión por unidad superficial que sufren las fibras distantes z de la capa neutra, sean inferiores ó iguales á los coeficientes de trabajo admitidos para el material de que se ha formado el prisma.

Las ecuaciones (13) y (14) determinan las deformaciones de figura que experimenta el eje del prisma. La (13) da el radio de curvatura ρ de la capa neutra para un punto cualquiera de abscisa x . La (14), integrada dos veces, da la ecuación finita de la *elástica* ó curva que toma el eje por consecuencia de la flexión.

La aplicación de estas ecuaciones se verá más detalladamente en los capítulos V y VI.

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS,

SOMETIDAS Á FUERZAS ESTÁTICAS NORMALES Á SU EJE

DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN,
ESFUERZOS CORTANTES Y FLECHAS

1.º PIEZAS APOYADAS EN DOS PUNTOS.

CÁLCULO ANALÍTICO.

2.º PIEZAS EMPOTRADAS. CÁLCULO ANALÍTICO.

3.º PIEZAS APOYADAS EN VARIOS PUNTOS.

CÁLCULO ANALÍTICO.

4.º PIEZAS APOYADAS Y EMPOTRADAS.

CÁLCULO GRÁFICO.

1. DETERMINACIÓN ANALÍTICA

DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN M Y DE LOS ESFUERZOS

CORTANTES C

PRISMAS APOYADOS EN DOS PUNTOS

CARGAS AISLADAS ESTÁTICAS

309. Tomemos como origen de coordenadas uno de los extremos del eje del prisma, que servirá de eje $O X$. Consideremos como positivas las fuerzas dirigidas según el eje $+ Y$, y como negativas las de dirección opuesta.

Asignaremos cualidad positiva á los momentos de las fuerzas positivas, las cuales, de obrar aisladamente, producen en el prisma una curvatura cuya concavidad está del lado del eje $+ Y$, y daremos signo menos á los momentos de las fuerzas negativas que, en las condiciones anteriores, flexan la pieza prismática de modo que los centros de curvatura están del lado del eje $- Y$.

Según esto, las partes del prisma en que el momento de flexión sea positivo, tendrán comprimidas las fibras situadas por encima de la capa neutra y extendidas las de debajo; y cuando el momento sea negativo, sucederá lo contrario.

En la fig. 25 (lám. 5.^a) son positivas las fuerzas Q' , P'' , Q'' , y negativas las restantes. Los momentos de las primeras tendrán signo más, y los de las segundas signo menos.

Puesto que los momentos de flexión M son productos de fuerzas (representadas por pesos) por longitudes, ha de tenerse cuidado de expresar la naturaleza de M dependiente de las unidades de medida que se adopten para dichos pesos y longitudes. Así, M representará kilográmetros ó tonelámetros,

cuando los pesos sean dados en kilogramos ó en toneladas y las longitudes lo estén en metros; representará kilogramo-centímetros, kilogramo-milímetros, si estando expresados en kilogramos los pesos, las dimensiones lineales se han tomado en centímetros ó milímetros.

310. Resolución general del problema. — El prisma está representado por su eje OH (fig. 25, lám. 5.^a); O y H son los apoyos, que supondremos reducidos á dos puntos matemáticos, separados la cantidad l .

Las fuerzas exteriores señaladas con las letras P, P', P'' están aplicadas en los puntos A, B, C , etc., á las distancias d, d', d'' , del apoyo O .

La acción de los apoyos se sustituye por la de las reacciones Q', Q'' normales al prisma y de intensidad igual, y contraria, á la de las presiones que aquellos sufren por efecto de las cargas P, P', P'', etc. Podremos, por tanto, suponer que la pieza prismática está en equilibrio en el espacio, bajo la acción de las fuerzas $Q', P, P'..... Q''$.

En virtud de la condición de equilibrio, la suma algebraica de las fuerzas citadas ha de ser cero, como también la suma de sus momentos con relación al punto O .

Es decir, que

$$\begin{aligned} Q' + Q'' - P - P' + P'' - P''' &= 0 \\ Q'' l - P d - P' d' + P'' d'' - P''' d''' &= 0; \end{aligned}$$

ó englobando bajo el signo Σ la suma algebraica de fuerzas y de momentos,

$$\left. \begin{aligned} Q' + Q'' + \Sigma(P) &= 0 \\ Q'' l + \Sigma(P d) &= 0 \end{aligned} \right\} (1).$$

Las ecuaciones de equilibrio (1) sirven para determinar las reacciones incógnitas Q' y Q'' ; y una vez conocidas todas las fuerzas exteriores, se puede pasar á la determinación de los valores de M y C para una sección cualquiera a de abscisa x .

311. Puesto que los valores de Q' y Q'' han sido obtenidos por las ecuaciones (1) que imponen el equilibrio, se deduce que la suma de momentos de las fuerzas P''' y Q'' , con respecto á la sección a , ha de ser igual en valor absoluto, y de signo contrario, á la suma de momentos de las fuerzas Q', P, P' , y P'' situadas á la izquierda de dicha sección, pues de lo contrario habría un par resultante que produciría rotaciones en el prisma, lo cual es contrario á la condición de equilibrio. Del mismo modo, la suma algebraica

de las fuerzas que obran de cada lado de la sección a , ha de ser la misma en valor absoluto, aunque de distinto signo, para que no haya fuerza resultante, que imprimiría á dicha sección y al prisma un movimiento de traslación.

Resulta en definitiva que M y C , para una sección cualquiera a , tienen los mismos valores absolutos, ya se consideren las fuerzas de un lado de la sección, ya las del otro lado; y que en lo sucesivo, al tratar de la determinación de M y C , tomaremos las fuerzas del lado más conveniente para la sencillez de los cálculos.

Considerando las fuerzas que obran á la izquierda de a , tenemos:

$$\begin{aligned} M &= Q' x - P(x - d) - P'(x - d') + P''(x - d'') \\ C &= Q' - P - P' + P'' \end{aligned}$$

ó bien, en general,

$$\left. \begin{aligned} M &= Q' x + \Sigma_o^a P(x - d) \\ C &= Q' + \Sigma_o^a (P) \end{aligned} \right\} (2).$$

El valor de M puede escribirse también así:

$$M = x [Q' + \Sigma_o^a (P)] - \Sigma_o^a (P d), \quad (3)$$

y resulta de la forma $y = Ax + B$, ecuación de una recta, siempre que A y B sean constantes.

312. De las expresiones de valores de M y C , se deduce:

1.º Los momentos de flexión entre dos puntos contiguos de aplicación de fuerzas (C y D , B y C , etc.), pueden ser representados por las ordenadas de una recta (ecuación 3), y en todo el prisma por las de una línea quebrada cuyos vértices están situados en las ordenadas de los puntos A, B , etc., de aplicación de las fuerzas exteriores.

2.º Esta línea quebrada pasa por los apoyos O y H , ó, en otros términos, el momento de flexión M es cero para estos puntos. Esto se deduce de las mismas ecuaciones de equilibrio (1).

3.º El esfuerzo cortante C para las secciones comprendidas entre dos

puntos de aplicación de fuerzas cualesquiera, es constante y puede ser representado por las ordenadas de una recta paralela al eje $O X$.

Los valores de C serán positivos ó negativos según el signo que resulte á la suma algebraica de las fuerzas (expresión 2).

4.º Los máximos y mínimos valores de C y de M , se deducirán de la comparación de los correspondientes á los puntos de aplicación de las fuerzas.

5.º Si se compara el valor de C , dado por la segunda de las expresiones (2), con el de M (expresión 3), se ve que

$$C = \frac{d M}{d x};$$

luego el esfuerzo cortante, en una sección cualquiera de abscisa x , es igual á la derivada del momento de flexión en aquel punto con relación á x (ó al coeficiente diferencial de primer orden de M con relación x).

313. *Ejemplo.* — Suponiendo la distribución de fuerzas que expresa la fig. 25 (lám. 5.ª), sean:

$$\begin{array}{llll} P = -100 \text{ kilogramos} & d = 2 \text{ metros} & P d = -200 \text{ kilográmetros.} & \\ P' = -200 & \text{»} & d' = 4 & \text{»} & P' d' = -800 & \text{»} \\ P'' = +250 & \text{»} & d'' = 5 & \text{»} & P'' d'' = +1250 & \text{»} \\ P''' = -150 & \text{»} & d''' = 8 & \text{»} & P''' d''' = -1200 & \text{»} \end{array}$$

$$\Sigma(P) = -200 \text{ kilogramos} \quad l = 10 \text{ metros} \quad \Sigma(P d) = -950 \text{ kilográmetros.}$$

Las ecuaciones (1) serán, en este caso,

$$\begin{array}{l} Q' + Q'' - 200 = 0 \\ 10 Q'' - 950 = 0 \end{array}$$

de donde se deducen los valores de las reacciones de los apoyos

$$\begin{array}{l} Q' = 105 \text{ kilogramos.} \\ Q'' = 95 \text{ »} \end{array}$$

El cuadro siguiente contiene los valores generales y particulares de M y C ; cuando se deseen obtener los correspondientes á una sección cualquiera,

no habrá más que sustituir x por el valor particular de la abscisa de la sección:

SECCIONES	M EN KILOGRÁMETROS	C EN KILOGRAMOS
Entre O y A	$Q' x = 105 x$	$Q' = + 105$
Sección O ($x = 0$)..	cero.....	$Q' = + 105$
Sección A ($x = 2$)..	$+ 210$	$+ 105$
Entre A y B	$Q' x - P(x-d) = 5x + 200$..	$Q' - P = + 5$
Sección B ($x = 4$)..	$+ 220$	$+ 5$
Entre B y C	$Q' x - P(x-d) - P'(x-d')$ $= -195x + 1000$	$Q' - P - P' = -195$
Sección C ($x = 5$)..	$+ 25$	-195
Entre C y D	$Q' x - P(x-d) - P'(x-d')$ $+ P''(x-d'') = 55x - 250$..	$Q' - P - P' + P'' = +55$
Sección D ($x = 8$)..	$+ 190$	$+ 55$
Entre D y H	$Q' x - P(x-d) - P'(x-d')$ $+ P''(x-d'') - P'''(x-d''')$ $= -95x + 950$	$Q' - P - P' + P'' - P''' = -95$
Sección H ($x = 10$)..	cero.....	$-95 = Q''$

Del examen de esta tabla se desprende que el máximo momento de flexión tiene lugar para la sección B , y vale $M_0 = 220$ kilográmetros, y que el máximo esfuerzo cortante se origina entre B y C y tiene por valor $C_0 = -195$ kilogramos.

314. Pueden ser representados gráficamente los valores de M y C ; no hay más que tomar, con arreglo á una cierta escala, ordenadas en A, B , etc., iguales á los valores particulares de M y C , dibujándolas por encima ó por debajo del eje $O X$, según que el signo sea positivo ó negativo (fig. 26, lámina 5.ª)

Procediendo así, el polígono de los momentos de flexión será, en el caso actual, $O A' B' C' D' H$, y el de los esfuerzos cortantes el $O m n r s p q t u v h H$. Para obtener los valores particulares de M y C , relativos á una cierta sección, no habrá más que levantar la ordenada correspondiente y apreciar su valor en las escalas de fuerzas y de momentos que han servido para el trazado de los polígonos.

La construcción de los polígonos es muy conveniente, porque de una sola ojeada se estiman fácilmente las variaciones de M y de C .

315. Otro método, llamado de *superposición de efectos*, puede emplearse en la determinación de M y C ; está fundado en el siguiente teorema:

El momento de flexión y el esfuerzo cortante para una sección cualquiera a (fig. 25, lám. 5.^a), tienen por valor la suma algebraica de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes que en dicha sección causan las diversas fuerzas P, P', \dots etc., consideradas aisladamente.

En efecto; llamemos Q_1, Q_2, Q_3, \dots á las reacciones que en el apoyo de la izquierda corresponden á las fuerzas P, P', P'', \dots si obrasen aislada y sucesivamente; M_1, M_2, M_3, \dots C_1, C_2, C_3, \dots á los momentos de flexión y esfuerzos cortantes en la sección a en idéntica hipótesis.

Aplicando á cada una de las fuerzas P las ecuaciones (2) y (3), y recordando que $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = Q'$, se obtiene

$M_1 = x(Q_1 - P) + Pd$	$C_1 = Q_1 - P$
$M_2 = x(Q_2 - P') + P'd'$	$C_2 = Q_2 - P'$
$M_3 = x(Q_3 + P'') - P''d''$	$C_3 = Q_3 + P''$
$M_1 + M_2 + M_3 + \dots = x [Q' + \Sigma_0^a (P)]$	$C_1 + C_2 + C_3 + \dots$
$- \Sigma_0^a (Pd) = M$	$= Q' + \Sigma_0^a (P) = C.$

316. Aplicando al problema anterior este método, se obtiene para los momentos de flexión (fig. 27, lám. 5.^a):

Fuerzas.	Polígonos.
P	OA_1H
P'	OB_1H
P''	OC_1H
P'''	OD_1H

El momento total M , para una sección cualquiera a , será

$$M = aa_1 + ab_1 - ac_1 + ad_1.$$

Para evitar complicación en la figura, no aparecen los dibujos relativos al esfuerzo cortante.

317. Casos particulares: 1.º Fuerza única P distante $d = OA$ del apoyo O (fig. 1.^a, lám. 6.^a).

Llamando c á la distancia AH , y l á la longitud del prisma OH , es $d + c = l$.

$$Q' = \frac{c}{l} P \quad \text{y} \quad Q'' = \frac{d}{l} P.$$

	M	C
Entre O y A	$\frac{c}{l} P x$	$Q' = \frac{c}{l} P$
Sección A ($x = d$).	$\frac{c P d}{l}$	$-\frac{c}{l} P$
Entre A y H	$Q' x - P(x - d) = \frac{d}{l} P(l - x), \quad Q' - P = -\frac{d}{l} P.$	

El valor máximo de M (M_0) corresponde al punto A de abscisa $x = d$. El máximo de C (C_0) tiene lugar en toda la parte de viga OA .

Cuando P esté aplicada al punto medio de la viga, $d = c = \frac{1}{2} l$, y será

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} P$$

Entre O y A	$M = \frac{1}{2} P x$
Entre A y H	$M = \frac{1}{2} P (l - x)$
	$M_0 = \frac{1}{4} P l$ (para el punto medio del prisma)
	$C = \pm \frac{1}{2} P.$

318. 2.º (Fig. 2.^a, lám. 6.^a). **Pieza apoyada en A y solicitada por las fuerzas P y P' en sus extremos.**— Este caso se refiere al anterior con sólo cambiar los signos de las fuerzas y de los momentos. Desde luego ha de verificarse $Pd = P'(l - d)$ como condición de equilibrio.

La reacción $Q' = P + P'$.

	M	C
Entre O y A	$- P x$	$- P$
Punto A	$M_0 = - P d$	$C_0 = - P$
Entre A y H	$- P x + Q'(x - d)$ $= - P'(l - x)$	$- P + Q'$ $= P.$

El momento máximo corresponde al punto A , y el esfuerzo cortante máximo á la parte OA .

OA_1H es el polígono de los momentos de flexión, y
 $OabH$ el de los esfuerzos cortantes.

319. 3.º Dos fuerzas P iguales, equidistantes de los extremos (fig. 3.ª, lám. 6.ª):

$$Q' = Q'' = P.$$

	x	o
Entre O y A	Px	$Q' = P$
Sección A	Pd	P
Entre A y B	constante é igual á Pd	cero
Sección B	Pd	$-P$
Entre B y H	$P(l-x)$	$-P$

El máximo M_0 corresponde á la región AB , y el C_0 á las partes OA, BH . En la figura está indicado el procedimiento de superposición de efectos (polígonos de puntos) que conduce á idénticos resultados.

320. 4.º Las fuerzas P , iguales y equidistantes de los apoyos, están situadas exteriormente á éstos (fig. 4.ª, lám. 6.ª). — Se reduce al caso anterior, cambiando los signos de los momentos y de las fuerzas.

$$Q' = Q'' = P$$

$$M_0 = -Pd \quad C_0 = \pm P.$$

PIEZAS APOYADAS EN DOS PUNTOS. — CARGAS REPARTIDAS

321. Caso general. — La carga, á razón de p kilogramos por unidad de longitud de prisma, ocupa la parte AB de longitud l' (fig. 5.ª, lám. 6.ª); además, llamaremos:

- l = longitud del prisma entre los apoyos.
- h = distancia, al origen O , del centro de gravedad de la carga (punto medio de AB).
- c = distancia OA .
- x = abscisa general de una sección cualquiera de la viga.

Para la determinación de las reacciones de los apoyos pueden sustituirse, sin inconveniente, las fuerzas repartidas por su resultante, que en el caso actual vale $p l'$ y pasa á la distancia h .

Las fórmulas generales (1) del núm. 310, se convierten en

$$Q' + Q'' - p l' = 0$$

$$Q'' l - p l' h = 0$$

de donde

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{p l' (l-h)}{l} \\ Q'' &= \frac{p l' h}{l} \end{aligned} \right\} (1).$$

Para una sección cualquiera comprendida entre O y A (considerando las fuerzas situadas á la izquierda, que se reducen á la reacción Q'), M y C tienen los valores siguientes:

$$M = + Q' x = \frac{p l' (l-h)}{l} x \quad (2)$$

$$C = + Q' = \frac{p l' (l-h)}{l} \quad (3).$$

M es positivo, porque, suponiendo fija la parte de la derecha del prisma, la fuerza Q' , si actuase sola, daría á la viga una curvatura cuya concavidad estaría del lado del eje OY .

C es positivo, también, porque Q' lo es.

Veamos de formar los valores de M y C para una sección a comprendida entre A y B . Las fuerzas que actúan á la izquierda de esta sección, son:

- 1.º Q' , positiva, y cuyo momento $Q' x$ es también positivo.
- 2.º Las fuerzas p que existen en la longitud de viga $Aa = x - c$. La suma de sus momentos con relación al punto a es equivalente al momento de la resultante $p \times Aa = p(x - c)$, que está situada en el punto medio de Aa , es decir, á la distancia $\frac{1}{2}(x - c)$ del punto a . Estas fuerzas y su resultante, son negativas, y dan momentos negativos porque si obrasen solas (suponiendo fijo el prisma en la parte Ha) producirían curvatura de concavidad dirigida al eje $-Y$.

Se deduce en consecuencia,

$$M = Q'x - \frac{1}{2} p (x - c)^2 \quad (4)$$

$$C = Q' - p (x - c) \quad (5)$$

ó, sustituyendo el valor de Q' ,

$$M = \frac{p l' (l - h)}{l} x - \frac{1}{2} p (x - c)^2 \quad (6)$$

$$C = \frac{p l' (l - h)}{l} - p (x - c) \quad (7).$$

Entre los puntos B y H ,

$$M = + Q''(l - x) = \frac{p l' h}{l} (l - x) \quad (8)$$

$$C = - Q'' = - \frac{p l' h}{l} \quad (9).$$

322. Del examen de las expresiones que anteceden, se deduce:

1.º Los momentos de flexión entre O y A (figs. 5.ª y 6.ª, lám. 6.ª), pueden estar representados por las ordenadas de una recta OA_1 , cuya ecuación es la (2). Esta recta pasa por el origen O porque para $x = 0$, $M = 0$; el valor mayor de M en este intervalo, ó sea la ordenada AA_1 , se obtiene haciendo $x = OA = c$, y resulta $MA = \frac{p l' (l - h)}{l} c$.

2.º Entre A y B , los momentos de flexión varían como las ordenadas de una parábola A_1B_1 (ecuaciones 4 y 6). Para determinar el máximo valor M_0 y la sección del prisma á que corresponde, igualaremos á cero $\frac{dM}{dx}$ (*) y deduciremos el valor de x , el cual, sustituido en M (ecuación 6), dará M_0 . Operando así, resulta:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{p l' (l - h)}{l} - p (x - c) = 0$$

$$x = \frac{l' (l - h) + l c}{l}.$$

(*) Recordaremos que $\frac{dM}{dx}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente á la parábola con el eje OX , y que $\frac{dM}{dx} = 0$ establece, por tanto, que la tangente es paralela á dicho eje, esto es, que se trata de un punto de máxima ordenada de dicha parábola.

Esta abscisa corresponde al punto D , y sustituida en (6), se obtendría $M_0 =$ ordenada Dd' .

El procedimiento que hemos seguido para la determinación de M_0 es general.

3.º De B á H los valores de M son los de las ordenadas de una recta B_1H (ecuación 8) que pasa por H , porque para $x = l$, $M = 0$.

El máximo de M en este intervalo corresponde al punto B , y se obtendrá haciendo en la ecuación (8) $x = c + l'$.

4.º Las rectas OA_1 , HB_1 son tangentes á la parábola $A_1d'B_1$ en los puntos A_1 y B_1 . En efecto, fijándonos en OA_1 , tenemos

$$tg A_1 O A = \frac{A_1 A}{O A} = \frac{Q' \times O A}{O A} = Q'.$$

Por otra parte, la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente en A_1 á la parábola con el eje de las x , tiene por valor $\frac{dM}{dx}$, es decir, el esfuerzo cortante en A que es $C = Q'$ (núm. 312, 5.º). De modo que la recta OA_1 y la tangente á la parábola en A_1 son la misma cosa, pues ambas rectas pasan por el punto A_1 y forman con OH un ángulo cuya tangente trigonométrica es Q' .

5.º Los esfuerzos cortantes vienen dados por las ordenadas de las rectas siguientes (fig. 6.ª, lám. 6.ª):

De O á A ... recta ab paralela á OX (ecuación 3).

De B á H ... recta cd paralela á OX (ecuación 9).

De A á B ... recta bd que corta al eje OX en D (ecuación 7).

En D , el esfuerzo cortante $C = 0$. El punto D es precisamente el mismo en que el momento de flexión $M = dD'$ es un máximo. En efecto, la abscisa del punto en que M es un máximo se ha obtenido igualando á cero $\frac{dM}{dx}$, es decir, el valor de C .

323. Casos particulares. 1.º La carga p por unidad de longitud actúa en todo el prisma l (fig. 7.ª, lám. 6.ª).

En este caso, $c = 0$, $l' = l$, $h = \frac{1}{2} l$.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1), (6) y (7), resulta:

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} p l$$

$$M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \text{ (parábola } O D_1 H)$$

$$C = \frac{1}{2} p l - p x \text{ (recta } a b).$$

Momento máximo = $M_0 = \frac{1}{8} p l^2$ (10). Corresponde a $x = \frac{1}{2} l$ (punto D).

Esfuerzo cortante máximo $C_0 = \pm \frac{1}{2} p l$ (11). Corresponde a los puntos O y H .

Los puntos D y D_1 se corresponden.

324. 2.º La carga repartida, a razón de p kilogramos por unidad de longitud l del prisma, actúa únicamente en la mitad, de A a H (fig. 8.ª, lámina 6.ª).

$$c = \frac{1}{2} l \quad l' = \frac{1}{2} l \quad h = \frac{3}{4} l.$$

Sustituyendo en (1), (6) y (7),

$$Q' = \frac{1}{8} p l \quad Q'' = \frac{3}{8} p l.$$

	x	c	
En O	cero.....	$\frac{1}{8} p l$	} (recta $a b$).
De O a A	$\frac{1}{8} p l x$ (recta $O A$)...	$\frac{1}{8} p l$	
En A ($x = \frac{1}{2} l$)..	$\frac{1}{16} p l^2$	$\frac{1}{8} p l$	
De A a H ..	$\frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2$ (parábola $A_1 D_1 H$)..	$\frac{5}{8} p l - p x$ (recta $b c$).	
En H	cero.....	$-\frac{3}{8} p l$	

El máximo de M corresponde a $x = \frac{5}{8} l$, y vale

$$M_0 = \frac{9}{128} p l^2 \text{ (12).}$$

El valor de x se deduce de $\frac{dM}{dx} = C = \frac{5}{8} p l - p x = 0$.

El mínimo de M es cero en O y H .

El máximo de C es $C_0 = -\frac{3}{8} p l$ (13) (punto H) y el mínimo es cero, y corresponde al mismo punto D de abscisa $x = \frac{5}{8} l$, en que M es máximo.

325. 3.º La carga, repartida en la longitud $l' = \frac{1}{2} l$, está simétricamente colocada con respecto a la vertical $D D'$ del punto medio de la viga (fig. 9.ª, lám. 6.ª).

$$c = \frac{1}{4} l \quad l' = \frac{1}{2} l \quad h = \frac{1}{2} l.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) a (9), obtendremos

$$Q' = Q'' = \frac{1}{4} p l.$$

	x	c	
En O	cero.....	$\frac{1}{4} p l$	} (recta $a b$).
De O a A	$\frac{1}{4} p l x$ (recta $O A'$).....	$\frac{1}{4} p l$	
En A ($x = \frac{1}{4} l$)..	$\frac{1}{16} p l^2$	$\frac{1}{4} p l$	
De A a B	$\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{32} p l^2$ (parábola $A' D' B'$).....	$\frac{1}{2} p l - p x$ (recta $b c$).	
En B ($x = \frac{3}{4} l$)..	$\frac{1}{16} p l^2$	$-\frac{1}{4} p l$	} (recta $c e$).
De B a H	$\frac{1}{4} p l (l - x)$ (recta $B' H$)..	$-\frac{1}{4} p l$	
En H ($x = l$)....	cero.....	$-\frac{1}{4} p l$	

$M_0 = \frac{3}{32} p l^2$ (14) para el punto medio D .

$C_0 = \pm \frac{1}{4} p l$ (15) en los puntos O y H .

326. En general, cualquiera que sea el valor de l' , será

$$c = \frac{1}{2}(l - l') \quad \text{,,} \quad h = \frac{1}{2}l.$$

$$Q' = Q'' = \frac{pl'}{2}.$$

Entre A y B $M = \frac{pl'}{2}x - \frac{1}{2}p\left(x - \frac{l-l'}{2}\right)^2$

$$C = \frac{pl'}{2} - p\left(x - \frac{l-l'}{2}\right).$$

El máximo de M corresponde á $x = \frac{1}{2}l$, y vale

$$M_0 = \frac{pll'}{4} - \frac{1}{8}pl'^2 \quad (16).$$

El máximo de C corresponde á las partes OA , BH , y vale

$$C_0 = \pm \frac{1}{2}pl' \quad (17).$$

327. 4.º Cargas p en una longitud l' á partir de cada uno de los extremos (fig. 10, lám. 6.ª).

$$Q' = Q'' = pl'.$$

	M	C
Entre O y A	$pl'x - \frac{1}{2}px^2$ (parábola)...	$pl' - px$ (recta aA).
Punto A ($x = l'$).	$\frac{1}{2}pl'^2$	cero.
Entre A y B	$\frac{1}{2}pl'^2$ (constante) (recta paralela á OH).....	cero.
Entre B y H ...	$pl'(l-x) - \frac{1}{2}p(l-x)^2$ (parábola).....	$-pl' - p(x-l)$ (recta Bb).

$$M_0 = \frac{1}{2}pl'^2 \text{ (parte } AB) \quad (18).$$

$$C_0 = \pm pl' \text{ (19) (puntos } O \text{ y } H).$$

328. 5.º Carga p por unidad lineal en toda la viga. La longitud de ésta (l') es mayor que la separación de los apoyos (l) (fig. 18, lám. 6.ª).

Tomando como origen de coordenadas el extremo O , resulta:

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2}pl'.$$

	M	C
De O al apoyo izquierdo.....	$-\frac{1}{2}px^2$ (parábola Oc).	$-px$ (recta Oa).
Entre los dos apoyos	$\frac{1}{2}pl'(x-h) - \frac{1}{2}px^2$ (parábola csd).....	$-px + \frac{1}{2}pl'$ (recta no).
Entre el apoyo derecho y el extremo H .	$-\frac{1}{2}p(l-x)^2$ (parábola $laHd$).....	$-px + pl'$ (recta zH).

La parábola csd corta al eje en dos puntos m y t , en que M es, por tanto, cero; las abscisas Om y ot de estos puntos se deducen de la ecuación $\frac{1}{2}pl'(x-h) - \frac{1}{2}px^2 = 0$. Los momentos de flexión son negativos entre los puntos O y m , t y H , lo cual dice que en estas partes se extienden las fibras situadas por encima de la capa neutra y se comprimen las de debajo. Lo inverso sucede en la parte mt , en que los momentos M son positivos, como indica la curva mst , que está por encima del eje OH que hace de eje de las x .

Se deduce de aquí que las partes de prisma Om y tH presentarán su concavidad á la parte inferior y la mt á la superior; los puntos m y t son, por tanto, puntos de inflexión del eje deformado.

PRISMAS APOYADOS EN DOS PUNTOS

COMBINACIÓN DE CARGAS AISLADAS Y CARGAS REPARTIDAS

329. Primer método.—Se sigue el procedimiento general del núm. 310.

Ejemplo 1.º (Fig. 11, lám. 6.ª).—Fuerza repartida p por unidad lineal,

en $OA' = l'$; fuerza repartida p' por unidad lineal, en $A'H = l'' = l - l'$; además, las fuerzas aisladas P, P', P'' , situadas á las distancias d, d', d'' del apoyo O .

Las reacciones Q' y Q'' se determinarán por las ecuaciones:

$$Q' + Q'' = P + P' + P'' + p l' + p' l''$$

$$Q'' l = P d + P' d' + P'' d'' + \frac{1}{2} p l'^2 + p' l'' \left(l' + \frac{l''}{2} \right).$$

He aquí los valores de M y C :

	M	C
Sección a entre O y A .	$Q' x - \frac{1}{2} p x^2$	$Q' - p x$
Sección A .	$Q' d - \frac{1}{2} p d^2$	$Q' - p d$
Entre A y A' (sección b).	$Q' x - P(x-d) - \frac{1}{2} p x^2$	$Q' - P - p x$
Sección A' .	$Q' d' - P(d'-d) - \frac{1}{2} p d'^2$	$Q' - P - p d'$
Entre A' y C (sección c).	$\left\{ \begin{array}{l} Q' x - P(x-d) - P'(x-d') \\ - p l' \left(x - \frac{1}{2} l' \right) - \frac{1}{2} p' (x-l')^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} Q' - P - P' \\ - p l' \\ - p' (x-l') \end{array} \right\}$
Sección C .	$\left\{ \begin{array}{l} Q' d'' - P(d''-d) - P'(d''-d') \\ - p l' \left(d'' - \frac{1}{2} l' \right) - \frac{1}{2} p' (d''-l')^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} Q' - P - P' \\ - p l' \\ - p' (d''-l') \end{array} \right\}$
Entre C y H (sección h).	$\left\{ \begin{array}{l} Q x - P(x-d) - P'(x-d') \\ - P''(x-d'') - p l' \left(x - \frac{1}{2} l' \right) \\ - \frac{1}{2} p' (x-l')^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} Q' - P - P' \\ - P'' - p l' \\ - p' (x-l') \end{array} \right\}$

Los máximos de M y C se determinan por la regla general del número 322 (2.º).

330. Segundo método.—Se emplea el procedimiento de *superposición de efectos* (núm. 315).

Ejemplo 1.º (fig. 12, lám 6.ª).

Fuerza P en el punto medio.

Fuerzas p por unidad de longitud en la mitad AH del prisma $O H$.

Considerando sucesivamente las fuerzas P y las p , se forma el cuadro siguiente:

	FUERZA P	FUERZAS p	FUERZAS COMBINADAS
Reacción en O ...	$\frac{1}{2} P$	$\frac{1}{8} p l$	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{1}{4} p l \right)$
Idem en H	$\frac{1}{2} P$	$\frac{3}{8} p l$	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{3}{4} p l \right)$
VALORES DE M			
De O á A	$\frac{1}{2} P x$	$\frac{1}{8} p l x$	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{1}{4} p l \right) x$
En A ($x = \frac{1}{2} l$).	$\frac{1}{4} P l$	$\frac{1}{16} p l^2$	$\frac{1}{4} l \left(P + \frac{1}{4} p l \right)$
De A á H	$\frac{1}{2} P(l-x)$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \\ - \frac{1}{8} p l^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x \left(\frac{5}{4} p l - P \right) - \frac{1}{2} p x^2 \\ + \frac{1}{2} l \left(P - \frac{1}{4} p l \right) \end{array} \right\}$
VALORES DE C			
En O	$\frac{1}{2} P$	$\frac{1}{8} p l$	$\frac{1}{2} \left(P + \frac{1}{4} p l \right)$
De O á A	Id.	Id.	Id.
De A á H	$-\frac{1}{2} P$	$\frac{5}{8} p(l-x)$	$-\frac{1}{2} P + \frac{5}{8} p(l-x)$
En H	$-\frac{1}{2} P$	$-\frac{3}{8} p l$	$-\frac{1}{2} \left(P + \frac{3}{4} p l \right)$

Los máximos de M y C se obtendrán por la regla general del número 322 (2.º)

Estas operaciones pueden hacerse gráficamente. De un lado del eje del prisma, dibújese la línea $OA_1 H$ correspondiente á los momentos de flexión producidos por las cargas p ; del otro lado la $OA_2 H$ correspondiente á la carga P ; para una sección D , el valor de M será $D_1 D_2$.

Tampoco ofrece dificultad la suma gráfica de los esfuerzos cortantes.

Si $a b c d$ corresponde á P , y $m n r u$ á p , tómesese $b t = A n$, $c e = A n$, y trácense $t z$ paralela á $O A$ y $e h$ paralela á $n u$. El polígono de los esfuerzos cortantes será el $O z t e h H$.

331. *Ejemplo 2.º* (fig. 13, lám. 6.ª)

Fuerzas p por unidad lineal, de A á B .

Fuerzas p' por unidad lineal, de B á C .

Para cada una de estas fuerzas se aplicarían las fórmulas del núm. 321 y se formaría una tabla análoga á la del ejemplo 1.º

Las figs. 13 contienen las líneas definitivas relativas á los valores totales de M y C ; la línea $O B_1 C_1 H$ corresponde á los valores de M debidos á las fuerzas p' ; la $O A_2 B_2 H$ se refiere á las fuerzas p . En cuanto á los esfuerzos cortantes, el polígono $m n r d' t$ pertenece á las fuerzas p y el $a b c d$ á las p' . Para hallar la suma trácense las ordenadas $r h'$, $e f$, y por h' y f las rectas $b' c'$, $f e'$, paralelas respectivamente á $n s$ y $b c$, y las $a' b'$, $e' f'$ paralelas al eje $O H$. La figura definitiva es $a' b' c' e' f'$.

PIEZAS APOYADAS EN DOS PUNTOS.

FUERZAS REPARTIDAS QUE VARIAN DE MODO UNIFORME

332. *Primer caso.* — El peso P' , representado por el área del triángulo $O A B$ (fig. 14, lám. 6.ª), está distribuido como representa la figura. (Caso de puertas de exclusiva, agujas de compuerta, etc.)

$$P' = \frac{1}{2} a b \left\{ \begin{array}{l} Q' = \frac{a b (3 l - a)}{6 l} \\ Q'' = \frac{a^2 b}{6 l} \end{array} \right.$$

Momento general de flexión entre O y B ;

$$M = Q' x - \text{superficie } O A C D \times z$$

z es la distancia á la ordenada $C D = m$ del centro de gravedad G del trapecio $O A C D$.

$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{x}{3} \frac{m + 2 b}{m + b} \\ m = \frac{b (a - x)}{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} M = \frac{a b (3 l - a)}{6 l} x - \frac{b (3 a - x)}{6 a} x^2 \\ C = \frac{a b (3 l - a)}{6 l} - \frac{b (2 a - x)}{2 a} x. \end{array}$$

Igualando á cero $C' = \frac{d M}{d x}$ se obtendrá el valor de x que hace á M un máximo; y sustituyendo en M , tendremos M_0 .

Momento general de flexión entre B y H :

$$\begin{aligned} M &= Q' x - \text{superficie } O A B \times \left(x - \frac{a}{3}\right) \\ \text{ó } M &= \frac{a^2 b}{6} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ C &= -\frac{b a^2}{6 l}. \end{aligned}$$

333. Todas estas fórmulas se pueden obtener en función del peso total P' , haciendo $P' = \frac{1}{2} a b$, ó $b = \frac{2 P'}{a}$.

Así resulta:

$$Q' = \frac{2 P' (3 l - a)}{6 l} \quad \text{“} \quad Q'' = \frac{2 P' a}{6 l}.$$

Entre O y B ,

$$\begin{aligned} M &= \frac{P' (3 l - a)}{3 l} x - \frac{P' (3 a - x)}{3 a^2} x^2 \\ C &= \frac{P' (3 l - a)}{3 l} - \frac{P' (2 a - x)}{a^2} x. \end{aligned}$$

Entre B y H ,

$$\begin{aligned} M &= \frac{P' a}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ C &= -\frac{P' a}{3 l}. \end{aligned}$$

334. En el caso de que $a = \frac{1}{2} l$

$$Q' = \frac{5}{6} P' \quad \text{“} \quad Q'' = \frac{1}{6} P'.$$

Entre O y B ,

$$\begin{aligned} M &= P' x \left(\frac{5}{6} - \frac{2 x}{l} + \frac{4 x^2}{3 l^2}\right) \\ C &= P' \left(\frac{5}{6} - \frac{4 x}{l} + \frac{4 x^2}{l^2}\right) \end{aligned}$$

El valor de x correspondiente á M_o es $x=0,3l$, y $M_o=0,088 P' l$.
Entre B y H ,

$$M = \frac{P' l}{6} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$C = -\frac{P'}{6}.$$

335. Si $a=l$,

$$Q' = \frac{2}{3} P' \quad \text{,,} \quad Q'' = \frac{1}{3} P'$$

$$M = \frac{2}{3} P' x - \frac{P' (3l-x)}{3l^2} x^2$$

$$C = \frac{2P'}{3} - \frac{P' (2l-x)}{l^2} x.$$

El máximo de M corresponde á $x=0,423l$, y $M_o=0,128 P' l$.

336. Segundo caso. Repartición de pesos como indica la fig. 15 (lám. 6.ª)

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} P'$$

Entre O y B ,

$$M = P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$C = P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}\right).$$

Entre B y H ,

$$M = \frac{P' l}{6} - P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right)$$

$$C = -P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}\right).$$

El máximo de M tiene lugar para $x = \frac{1}{2} l$, y vale

$$M_o = \frac{1}{12} P' l = 0,083 P' l.$$

337. Tercer caso. (Fig. 16, lám. 6.ª).

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} P'$$

Entre O y B ,

$$M = P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$C = P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{l^2}\right).$$

Entre B y H ,

$$M = -\frac{1}{6} P' l + P' x \left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$C = -P' \left(\frac{3}{2} - \frac{4x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}\right).$$

El máximo de M corresponde al punto medio $x = \frac{1}{2} l$, y vale

$$M_o = \frac{1}{6} P' l = 0,166 P' l.$$

Tanto en este caso como en el anterior y en el siguiente, por la simetría de cargas con respecto al punto medio de la viga, resulta igualdad de valores de M y C para secciones equidistantes de dicho punto medio.

338. Cuarto caso (fig. 17, lám. 6.ª).

Empleando el método de superposición de efectos, resulta

$$M_o = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) P' l = \frac{1}{4} P' l,$$

lo mismo que si la carga hubiese estado representada por el rectángulo $OABH$.

PIEZAS APOYADAS EN DOS PUNTOS

ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES EN LA FLEXIÓN

339. En los núms. **304** y **305** hemos dicho que el eje del prisma (así como toda la capa de fibras neutras) experimentaba por efecto de la flexión

modificaciones en su forma, tomando la de una curva que se llama *elástica* (fig. 23, lám. 6.^a; figs. 10 á 18, lám. 7.^a).

A la deformación longitudinal acompaña otra transversal. Pues que unas fibras del prisma se extienden y otras se comprimen, las primeras se contraerán lateralmente y las segundas se dilatarán (núms. 52 y 83). Estas contracciones y dilataciones son proporcionales á las fuerzas que las producen, y por tanto, á las distancias de las fibras á la capa neutra. Así, pues, si suponemos dividida la sección transversal del prisma en elementos de forma cuadrada (fig. 19, lám. 6.^a), cada uno de estos elementos aumentará ó disminuirá de área, conservando su figura; y todos los que disten igualmente de la capa neutra experimentarán alteración igual, tomando el conjunto la forma $A' B' C' D'$ que representa la figura, y que supone una sección hecha en el prisma encorvado $O B H$ de la fig. 23. El centro de gravedad de $A B C D$ se habrá movido al tomar la forma $A' B' C' D'$, acercándose á $A' C'$, y lo mismo sucede á la capa de fibras neutras.

Esta deformación transversal es casi inapreciable (aun para los materiales más elásticos) dentro del período elástico, que es el que estamos considerando, y no la tendremos en cuenta.

Pero en cambio es muy notable la curvatura del eje é interesa conocerla. Este es el objeto de los párrafos siguientes, en los cuales se dan los medios para determinar la ecuación de la elástica y, en una palabra, el movimiento ó cambio de posición de un punto cualquiera del eje de la viga sometida á flexión.

La mayor de las ordenadas de la elástica ($m n$, fig. 23, lám. 6.^a) recibe el nombre de *flecha de curvatura*, ó simplemente *flecha*.

340. Ecuaciones generales. — Representemos por s la longitud del eje de la pieza, y consideremos dos secciones $A B$ y $C D$ (fig. 20, lám. 6.^a) infinitamente próximas; de modo que $N H = d s$ (*).

El ángulo $N O H$ (fig. 22, lám. 5.^a) mide la rotación que ha experimentado la sección $C D$ con respecto á la $A B$. Llamando $d \alpha$ á la tangente de este ángulo

$$d \alpha = \frac{N H}{N O} = \frac{d s}{\rho}.$$

Sea M el momento de flexión en la sección $A B$ (fig. 20, lám. 6.^a); ha de

(*) Como el volumen comprendido por dos secciones normales al eje, infinitamente próximas, puede ser considerado como prismático, esta teoría es aplicable á los sólidos de forma curva (arcos, etcétera), solicitados por fuerzas situadas en un plano longitudinal de simetría.

ser igual al momento de las fuerzas elásticas que vale $\frac{E I}{\rho}$ (valor (8), número 307,) y por tanto,

$$d \alpha = M \frac{d s}{E I} \quad (1);$$

$d \alpha$ mide también la variación de posición que por efecto del movimiento de la sección $C D$ experimentan todas las demás de su derecha.

Supondremos primero que la sección $A B$ (fig. 20, lám. 6.^a) es invariable de posición, como si estuviese empotrada; la nueva posición $C' D'$ que ha tomado la sección $C D$, ha hecho que la sección T se traslade á T' , siendo $T H T' = C H C'$, y $t g T H T' = d \alpha$.

El arco descrito por el punto T de la fibra neutra, desde H como centro, puede ser sustituido por la recta $T' T$ normal á $H T$; la sección T ha sufrido, pues, un movimiento vertical $T L$ y otro horizontal $T' L$.

$H T$ es la posición del eje del prisma antes de la deformación. Llamemos h á la distancia variable, contada paralelamente al eje de las x , que separa una sección cualquiera $C D$ de la T ; y f la distancia, también variable, contada paralelamente al eje de las y .

Por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{T' L}{f} = \frac{T T'}{H T} = d \alpha. \quad T' L = f d \alpha = f \frac{M d s}{E I} \quad (2).$$

$$\frac{T L}{h} = \frac{T T'}{H T} = d \alpha. \quad T L = h d \alpha = h \frac{M d s}{E I} \quad (3).$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) miden los movimientos del punto T , ocasionados por la rotación de la sección $C D$, infinitamente próxima á la $A B$ que hemos supuesto fija.

Representemos por s_0 y s_1 las longitudes de fibra neutra contadas desde el extremo izquierdo del prisma hasta los puntos N y T , respectivamente.

Si en vez de considerar únicamente la rotación de la sección $C D$ tenemos en cuenta las de todas las secciones comprendidas entre N y T , resultará para esta última una traslación total medida por las cantidades siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \text{Traslación horizontal.....} & H' = \int_{s_0}^{s_1} f \frac{M ds}{EI} \\ \text{Traslación vertical.....} & F' = \int_{s_0}^{s_1} h \frac{M ds}{EI} \\ \text{Tangente de la variación angular} & \\ \text{de las secciones } AB \text{ y } T \text{.....} & A = \int_{s_0}^{s_1} \frac{M ds}{EI} \end{aligned} \right\} (4).$$

En estas fórmulas, las cantidades M , f y h son variables para cada una de las secciones comprendidas entre T y N . Si la sección de la viga no es constante, variará también el momento de inercia I ; hasta E , coeficiente de elasticidad, puede variar de una á otra sección si el material varía, lo cual no ocurre en general.

341. Hemos supuesto que la sección AB era invariable de posición. Si no lo es y verifica un cierto giro de ángulo δ , el punto T habrá sufrido por este concepto movimientos parecidos á los que hemos considerado relativos á la rotación de la sección CD . La misma fig. 20 (lám. 6.^a) podrá servir para calcular dichos movimientos, suponiendo que el eje NT ha venido á parar á NT' , de modo que el ángulo TNT' será igual á δ . Repitiendo los cálculos del núm. 340, y llamando:

$$\begin{aligned} f' &= \text{distancia, medida paralelamente al eje de las } y, \text{ de las secciones } T \\ &\quad \text{y } N \text{ antes de la rotación de } N. \\ h' &= \text{distancia, medida paralelamente al eje de las } x, \text{ de las secciones } T \\ &\quad \text{y } N \text{ antes de la rotación de } N. \\ a &= tg \delta; \end{aligned}$$

los movimientos de T , originados por la rotación de la sección AB (aun suponiendo rígido el prisma en el intervalo NT'), serán:

$$\begin{aligned} \text{Traslación semejante á la } T'L \text{.....} & \mp a f' \\ \text{Traslación semejante á la } TL \text{.....} & \pm a h'. \end{aligned}$$

En cuanto al ángulo que entre sí formaban las secciones AB y T antes de todo movimiento, no ha experimentado alteración por la rotación de AB .

Si á más del giro de la sección AB hubiese habido traslaciones del punto N , se transmitirían íntegras al punto T . Llamando m á la traslación paralela á $T'L$ y n á la paralela á TL , y teniendo en cuenta todas las causas que influyen en los cambios de posición del punto T , las traslaciones tota-

les de este punto, para el caso que estamos considerando de que la sección AB se mueva, son:

$$\left. \begin{aligned} H &= m \mp a f' + \int_{s_0}^{s_1} f \frac{M ds}{EI} \\ F &= n \pm a h' + \int_{s_0}^{s_1} h \frac{M ds}{EI} \\ A &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{M ds}{EI} \end{aligned} \right\} (5).$$

342. Deformaciones producidas por el esfuerzo cortante. — El esfuerzo cortante C en CD produce una deformación normal al eje, trasladándose dicha sección á la posición $C'D'$ (fig. 21, lám. 6.^a). Esta deformación es medida por la fórmula (2) del núm. 200, $l = CC' = \frac{CL}{E' \omega}$; y como $L = AC = ds$,

será $l = \frac{C ds}{E' \omega}$. Proyectándola paralelamente á los dos ejes coordenados é integrando entre s_0 y s_1 , obtendríamos nuevos sumandos para los segundos miembros de las igualdades (5); pero no se tiene en cuenta generalmente, á causa de su pequeñez, al compararla con las debidas á los momentos de flexión.

343. Deformaciones debidas á los cambios de temperatura. — Si es l' la variación de longitud de prisma por unidad lineal y t^0 de diferencia de temperatura, el alargamiento entre N y T será $l' (s_1 - s_0)$. Pero los sumandos á que da lugar la proyección, sobre los ejes de coordenadas, de esta cantidad, se desprecian también por su pequeñez, en general.

344. Piezas prismáticas. Ecuaciones generales. — Si se toma como eje de las x el del prisma antes de la deformación, y como origen el extremo O (fig. 22, lám. 6.^a), y si se tiene en cuenta que la forma de equilibrio, después de la flexión, difiere poco de la primitiva, tendremos; llamando x_0 y x_1 á las abscisas particulares de N y de T ,

$$\begin{aligned} ds &= dx \\ \text{Variable } h &= x_1 - x \\ \text{Variable } f &= y = \text{ordenada general antes de la deforma-} \\ &\quad \text{ción} = \text{cero.} \\ h' &= x_1 - x_0 \\ s_1 &= x_1 \\ s_0 &= x_0 \end{aligned}$$

y las fórmulas (4) y (5) se convierten en las siguientes, que miden la traslación total de la sección T :

$$\text{Cuando la sección } N \left\{ \begin{array}{l} F = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} (x_1 - x) dx \\ A = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M dx}{EI} \end{array} \right\} \text{ (6).}$$

está fija.....

$$\text{Cuando la sección } N \left\{ \begin{array}{l} F = n + a(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} (x_1 - x) dx \\ A = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M dx}{EI} \end{array} \right\} \text{ (7).}$$

gira un ángulo de
tangente a

Si el prisma es de materia homogénea y de sección constante, puede sacarse fuera del signo de integración el factor $\frac{1}{EI}$ que es constante también.

Cuando la sección N sea la O de origen y la T la del otro extremo de una viga de longitud l , será $x_0 = 0$, $x_1 = l$, y las ecuaciones anteriores se convierten en

$$\text{Sección } O \text{ fija.....} \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{1}{EI} \int_0^l M(l-x) dx \\ A = \frac{1}{EI} \int_0^l M dx \end{array} \right\} \text{ (8).}$$

$$\text{Sección } O \text{ que gira un ángulo de tangente } a \text{.....} \left\{ \begin{array}{l} F = n + al + \frac{1}{EI} \int_0^l M(l-x) dx \\ A = \frac{1}{EI} \int_0^l M dx \end{array} \right\} \text{ (9).}$$

345. Observación sobre el empleo de las fórmulas. Aplicación á los prismas apoyados en sus extremos. — El momento general de flexión M es función de x , $M = \varphi(x)$. Puede suceder que varíe la forma de la función de T á N (fig. 22), y que, por ejemplo, sea $M' = \varphi'(x)$ desde T á un punto intermedio D de abscisa x_2 , y $M'' = \varphi''(x)$ desde D á N . Entonces,

$$\int_{x_0}^{x_1} M dx = \int_{x_2}^{x_1} M' dx + \int_{x_0}^{x_2} M'' dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x_1 - x) dx = \int_{x_2}^{x_1} M'(x_1 - x) dx + \int_{x_0}^{x_2} M''(x_1 - x) dx$$

Para las piezas apoyadas ha de aplicarse las fórmulas (7) y (9), porque todas las secciones giran una cierta cantidad.

Tomando como sección de partida, con respecto á la cual se van á medir los movimientos de las demás, la sección de origen O para la cual $x_0 = 0$ y $n = 0$, se puede formar *a priori* el valor a que es necesario para la determinación de F .

En efecto; consideremos los movimientos de la sección extrema D' correspondiente al apoyo de la derecha: $F = 0$ para esta sección, $x_1 = l$ y $x_1 - x_0 = l$, de modo que

$$F = al + \frac{1}{EI} \int_0^l M(l-x) dx = 0. \text{ (10).}$$

No hay más que hacer la integración, sustituir los límites 0 y l en vez de x , y de esta ecuación se despejará la cantidad a , que es la tangente de un ángulo δ de rotación de la sección extrema O (fig. 23, lám. 6.^a).

346. La sección B , antes de la flexión, era normal á OmH (fig. 23, lámina 6.^a); después de la flexión forma el ángulo ϵ con OD .

δ es el ángulo de rotación de la sección O , cuya tangente es a .
 α es el ángulo que forman las dos secciones O y B después de la flexión,

y cuya tangente es $A = \frac{1}{EI} \int_0^B M dx$.

Conociendo α y δ , se determinará ϵ por la ecuación

$$\delta = \alpha + \epsilon.$$

347. Ecuación de la elástica. — Si en la ecuación primera de las (7) se efectúa la integración sustituyendo en vez de x_1 la abscisa general x , y llamando y al valor general de F' , resulta una ecuación que relaciona los desplazamientos y de un punto cualquiera con su abscisa x , esto es, la ecuación de la elástica

$$y = n + a(x - x_0) + \frac{1}{EI} \int_{x_0}^x M(x_1 - x) dx \text{ (11).}$$

Por los medios conocidos se podrá hallar el máximo de y , esto es, la flecha f , y la abscisa x correspondiente.

Si M varía de forma de una á otra parte del sólido, á cada una corres-

onderá ecuación diferente, y la elástica total se compondrá de dos ó más trozos distintos de elástica que se unen tangencialmente.

348. Cuando la sección A sea fija, habrá que hacer $n = 0$, $a = 0$, y la ecuación (11) se convertirá en

$$y = \frac{1}{EI} \int_{x_0}^{x_1=x} M(x_1-x) dx \quad (12).$$

Si la sección extrema es la de origen O , la abcisa $x_0 = 0$.

349. Casos particulares. 1.º Carga P , aislada, en el punto medio (figura 1.ª, lám. 7.ª).

Los momentos de flexión, son (núm. 317):

$$M' = \frac{1}{2} P (l-x) \dots \dots \dots \text{entre } A' \text{ y } H.$$

$$M'' = \frac{1}{2} P x \dots \dots \dots \text{entre } O \text{ y } A'.$$

En el caso presente $n = 0$, pues O no tiene movimiento perpendicularmente á OH ; además, $x_1 = l$, $x_0 = 0$, $x_1 - x_0 = l$ y $x_1 - x = l - x$.

Determinación de a para la sección O :

$$\int_{\frac{1}{2}l}^l M' (l-x) dx = \frac{1}{48} P l^3 \quad (*)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}l} M'' (l-x) dx = \frac{1}{24} P l^3$$

y aplicando la ecuación (10)

$$a l + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{48} P l^3 + \frac{1}{24} P l^3 \right) = 0$$

$$a = t g \delta = - \frac{1}{16} \frac{P l^2}{EI}.$$

(*) Todas estas integraciones se hacen muy sencillamente; son integraciones inmediatas de la forma $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Ecuación de la elástica entre O y A' :

$$y = a x + \frac{1}{EI} \int_0^{x_1=x} \frac{1}{2} P x (x_1-x) dx$$

integrando y sustituyendo x_1 por x ,

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{l^2 x}{16} \right) \\ y &= \frac{P l^2}{16 EI} \left(\frac{4 x^3}{3 l^2} - \frac{x}{l} \right) \end{aligned} \right\} (13).$$

Para determinar el máximo de y , ó sea el valor de la flecha f , haremos $\frac{dy}{dx} = 0$, ó sea:

$$\frac{P x^2}{4} - \frac{P l^2}{16} = 0;$$

de donde $x = \frac{1}{2} l$, y sustituyendo en (13), $f = - \frac{1}{48} \frac{P l^3}{EI}$ (15).

La flecha tiene lugar en el punto medio de la viga.

Es inútil buscar la ecuación de la elástica entre A' y H , porque la simetría de la figura y de las cargas la exige también en aquella, de modo que resulta ser la línea $A'B$ un eje de simetría.

Tangente del ángulo de las secciones A' y O :

$$A = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{2}l} M'' dx = \frac{1}{16} \frac{P l^2}{EI}.$$

A resulta igual á a ; luego la sección A' ha permanecido perpendicular á OH y no ha tenido giro alguno.

La tangente del ángulo que forman después de la flexión las dos secciones extremas O y H , será:

$$A = \frac{1}{EI} \int_0^l M dx = \frac{1}{EI} \left(\int_{\frac{1}{2}l}^l M' dx + \int_0^{\frac{1}{2}l} M'' dx \right) = \frac{1}{8} \frac{P l^2}{EI}.$$

350. 2.º Varias fuerzas aisladas $P, P', P'',$ etc. (fig. 2.ª, lám. 7.ª). — El orden de operaciones será el siguiente (*):

I. Se determinará la tangente a del ángulo de giro de la sección O por la fórmula $a l + \frac{1}{EI} \int_0^l M(l-x) dx = 0$.

II. La ordenada de la elástica correspondiente al punto B , será

$$a b + \frac{1}{EI} \int_0^b M'(b-x) dx$$

y para la parte OB , la ecuación de la elástica será

$$y = a x + \frac{1}{EI} \int_0^{x_1=x} M'(x_1-x) dx.$$

III. El ángulo de las secciones O y B , tendrá por tangente

$$\frac{1}{EI} \int_0^b M' dx;$$

de este valor y del de a se deducirá la tangente a' del ángulo de rotación de la sección B .

IV. La ordenada de la elástica correspondiente al punto C es

$$a c + \frac{1}{EI} \int_0^c M(c-x) dx$$

ó

$$a c + \frac{1}{EI} \left(\int_0^b M'(c-x) dx + \int_b^c M''(c-x) dx \right)$$

(*) En estos cálculos, M representa el momento de flexión para una cualquiera de las secciones comprendidas entre O y H ; y $M', M'',$ etc., los momentos de flexión correspondientes á los intervalos $OB, BC,$ etc.

y en el intervalo B á C , la ordenada general, ó ecuación de la elástica, será

$$y = a x + \frac{1}{EI} \left(\int_0^{x_1=x} M'(x_1-x) dx + \int_b^{x_1=x} M''(x_1-x) dx \right)$$

V. Si se quiere determinar, en particular, el descenso del punto C con respecto al B , tendremos

$$a'(c-b) + \frac{1}{EI} \int_b^c M''(c-x) dx$$

y así sucesivamente.

351. 3.º Carga uniformemente repartida, á razón de p kilogramos por unidad lineal, en toda la longitud l de la viga.

Momento general de flexión $M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$ (núm. 323).

Determinación de a :

$$a l + \frac{1}{EI} \int_0^l M(l-x) dx = \frac{1}{24} \frac{p l^4}{EI} + a l = 0$$

$$a = t g \delta = - \frac{1}{24} \frac{p l^3}{EI} \text{ (fig. 23, lám. 6.ª)}$$

Ecuación de la elástica:

$$y = a x + \frac{1}{EI} \int_0^{x_1=x} \left(\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \right) (x_1-x) dx$$

integrando con respecto á x , substituyendo los límites x_1 y 0 , y haciendo $x_1 = x$, resulta

$$y = - \frac{p l^4}{24 EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2 x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right);$$

para determinar la flecha haremos $\frac{dy}{dx} = 0$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 x^3}{l^4} - \frac{6 x^2}{l^3} + \frac{1}{l} = 0;$$

el valor $x = \frac{1}{2} l$, substituído en la expresión de y , da

$$f = - \frac{5}{384} \frac{p l^4}{EI}$$

Esta flecha (que corresponde al punto medio de la viga), comparada con la del caso 1.º, y á igualdad de carga ($P = p l$), da la relación 5:8.

352. 4.º La carga repartida, á razón de p kilogramos por unidad de longitud del prisma, actúa únicamente en la mitad de A á H (fig. 8.ª, lámina 6.ª)

Es el caso del núm. 324.

El valor de M es, como ya vimos,

$$M' = \frac{1}{8} p l x \dots \dots \dots \text{entre } O \text{ y } A.$$

$$M'' = \frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2 \dots \dots \dots \text{entre } A \text{ y } H.$$

$$a = - \frac{7}{384} \frac{p l^5}{E I}$$

$$y = \frac{p l^4}{48 E I} \left(\frac{x^5}{l^5} - \frac{7}{8} \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots \text{ecuación}$$

de la elástica entre O y A .

Por los procedimientos ya explicados se llegaría á obtener la ecuación de la elástica entre los puntos A y H .

Para encontrar f se haría $\frac{d y}{d x} = 0$.

$$A = \frac{1}{32} \frac{p l^5}{E I}, \text{ tangente del ángulo de las secciones extremas } O \text{ y } H.$$

353. 5.º Caso representado en la fig. 14 (lám. 6.ª).

Cuando la carga ocupa toda la longitud l ,

$$a = t g \delta = - \frac{2}{45} \frac{P' l^2}{E I}$$

$$A = \frac{1}{12} \frac{P' l^2}{E I}$$

$$y = - \frac{P' l^5}{E I} \left(\frac{2 x}{45 l} - \frac{x^3}{9 l^3} + \frac{x^4}{12 l^4} - \frac{x^5}{60 l^5} \right) \text{(elástica).}$$

Cuando la carga ocupa la mitad de la viga,

$$a = - \frac{25}{288} \frac{P' l^2}{E I}$$

$$A = \frac{7}{48} \frac{P' l^2}{E I}$$

354. 6.º Caso representado en la fig. 15 (lám. 6.ª)

$$a = - \frac{1}{32} \frac{P' l^2}{E I} \quad " \quad A = \frac{1}{16} \frac{P' l^2}{E I}$$

$$y = - \frac{P' l^5}{12 E I} \left(\frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} - \frac{x^4}{l^4} + \frac{x^3}{l^3} - \frac{3}{8} \frac{x}{l} \right) \text{(elástica).}$$

$$f = - \frac{3}{320} \frac{P' l^5}{E I}, \text{ para } x = \frac{1}{2} l.$$

355. 7.º Caso representado en la fig. 16 (lám. 6.ª)

$$a = - \frac{5}{96} \frac{P' l^2}{E I} \quad " \quad A = \frac{5}{48} \frac{P' l^2}{E I}$$

Ecuación de la elástica entre O y A :

$$y = - \frac{P' l^5}{12 E I} \left(- \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} + \frac{x^3}{l^3} - \frac{5}{8} \frac{x}{l} \right)$$

$$f = - \frac{1}{60} \frac{P' l^5}{E I}, \text{ para } x = \frac{1}{2} l.$$

356. Cargas mixtas. — En el caso de que la viga esté sometida á un tiempo á la acción de cargas aisladas $P, P',$ etc., y á la de cargas repartidas, las ecuaciones (8) á (12) son igualmente aplicables, sustituyendo M , momento total general de flexión, por $M_1 + M_2$, suma de los momentos correspondientes á cada una de las especies de cargas, con arreglo al principio de superposición de efectos.

Este mismo principio es aplicable también á las deformaciones, y puede decirse que *las deformaciones producidas por fuerzas aisladas $P, P',$ y por fuerzas repartidas $p,$ y en general por fuerzas diferentes, obrando simultáneamente, son iguales á la suma de las deformaciones parciales que producirían las fuerzas si obrasen aisladamente.*

Fácilmente se demuestra esta conclusión, poniendo en las ecuaciones (8) á (12) en vez de M , primero, M_1 , luego M_2 , y finalmente $M_1 + M_2$.

Llamando $F_1, A_1, a_1,$ á los valores de F, A y a correspondientes á M_1 , y $F_2, A_2, a_2,$ los relativos á M_2 ; y finalmente, F, A, a , los totales correspondientes á $M_1 + M_2$, se encontraría

$$F = F_1 + F_2$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$a = a_1 + a_2$$

357. Ejemplo. — Viga apoyada en los dos extremos, cargada con un peso P en su punto medio, y con una carga p por unidad de longitud, siendo l la de la viga.

Distinguiendo con el subíndice 1 á las cantidades que miden deformaciones debidas á la carga P , y con el 2 á las correspondientes á las cargas repartidas p , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{16} \frac{P l^2}{E I} \text{ (valor de } a \text{ del núm. 349)} \\ a_2 &= -\frac{1}{24} \frac{p l^3}{E I} \text{ (valor de } a \text{ del núm. 351)} \end{aligned} \right\} a = \frac{-l^2}{48 E I} (3 P + 2 p l)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{8} \frac{P l^2}{E I} \text{ (núm. 349)} \\ A_2 &= \frac{1}{12} \frac{p l^3}{E I} \text{ (núm. 351)} \end{aligned} \right\} A = \frac{l^2}{24 E I} (3 P + 2 p l)$$

Ecuaciones de la elástica entre O y A :

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{P l^5}{16 E I} \left(-\frac{4 x^3}{3 l^3} + \frac{x}{l} \right) \text{ (núm. 349)} \\ y_2 &= -\frac{p l^4}{24 E I} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2 x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right) \text{ (núm. 351)} \\ y &= -\frac{1}{48 E I} [2 p x^4 - 4 (P + p l) x^3 + l^2 x (3 P + 2 p l)] \end{aligned}$$

Valor de la flecha:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{48} \frac{P l^5}{E I} \text{ (núm. 349)} \\ f_2 &= -\frac{5}{384} \frac{p l^4}{E I} \text{ (núm. 351)} \end{aligned} \right\} f = -\frac{l^5}{384 E I} (8 P + 5 p l).$$

2. PIEZAS EMPOTRADAS

CÁLCULO ANALÍTICO

TEORÍA GENERAL

358. Definición del empotramiento. — En las piezas apoyadas, las secciones extremas giran por efecto de la flexión, y forman con su posición primitiva un ángulo δ cuya tangente hemos representado por a (fig. 23, lámina 6.^a). Cuando esta rotación no puede tener lugar, la pieza está *empotrada*. Tal sucede en el prisma ABC (fig. 3.^a, lám. 7.^a), que suponemos sólidamente introducido en la mampostería por sus dos extremos. La figura de puntos representa el sólido antes de la flexión; y la de trazo continuo, el mismo, flexado. Como consecuencia del empotramiento, el eje ABC (después de la flexión), es tangente al ADC , posición primitiva, en los empotramientos.

Podría suprimirse el macizo H , siempre que se introdujeran fuerzas z (fig. 4.^a, lám. 7.^a) que impidiesen toda rotación de la sección A . La resultante Z es equivalente á una fuerza $Z' = Z$, y á un par Z, Z'' que se denomina *par de empotramiento*.

El empotramiento es *perfecto* cuando no tiene movimiento angular ninguno la sección extrema; de modo que $\delta = 0$ y $a = t g \delta = 0$. El empotramiento es *imperfecto* cuando existe alguna rotación, aunque el ángulo δ' sea menor que el δ correspondiente al caso de piezas apoyadas (fig. 5.^a, lámina 7.^a), y, por tanto

$$t g \delta' = \frac{1}{n} t g \delta,$$

$$a' = \frac{1}{n} a.$$

359. Determinación del momento general de flexión m y del esfuerzo cortante C . — Sea OH la pieza empotrada por sus extremos. La acción de los

empotramientos puede ser sustituida por la de las fuerzas Z (fig. 6.^a, lám. 7.^a) normales al prisma (supuesto apoyado en O y en H), cuyos momentos, que determinaremos *momentos de empotramiento* y representaremos por las letras m'_0, m''_0 , impiden toda rotación de las secciones O y H .

Sean F' y F'' las reacciones de los apoyos O y H .

Las ecuaciones de equilibrio de la viga son (dando signos á las fuerzas y á los momentos) (*)

$$F' + F'' - \Sigma (P) = 0. \quad (1)$$

$$F' l - m'_0 + m''_0 - \Sigma [P (l - d)] = 0. \quad (2)$$

Hemos tomado los momentos con respecto al punto H , y no con respecto al O , lo cual es indiferente.

El momento general de flexión m para una sección cualquiera D de abscisa x , será

$$m = F' x - m'_0 - \Sigma_0^x P (x - d); \quad (3)$$

y el esfuerzo cortante:

$$C = F' - \Sigma_0^x P \quad (4).$$

Vemos que la determinación de los valores de m y C , exige el conocimiento de F', F'', m'_0, m''_0 . Los dos primeros pueden encontrarse por las ecuaciones (1), pero vendrán dados en función de m'_0 y m''_0 que desconocemos. En suma, las ecuaciones de equilibrio son dos, y las incógnitas son cuatro; de modo que el problema no puede resolverse por los métodos de la mecánica racional.

360. Para resolver el problema, comparemos las ecuaciones de equilibrio de la viga empotrada (fig. 6.^a), con las correspondientes á la misma viga supuesta apoyada simplemente (fig. 7.^a).

Para este último caso, dando signo á las fuerzas P y á sus momentos, tenemos (ecuaciones 1 del núm. 310, y dos y tres del 311).

$$Q' + Q'' - \Sigma (P) = 0 \quad (5)$$

$$Q' l - \Sigma [P (l - d)] = 0 \quad (6)$$

$$M = Q' x - \Sigma_0^x P (x - d) \quad (7)$$

(*) Puesto que asignamos á m'_0 y á m''_0 los signos que deben tener, observaremos que el cálculo ha de darnos los valores absolutos, tan sólo de estos momentos.

De las ecuaciones (6) y (2) se deduce:

$$F' l - Q' l - m'_0 + m''_0 = 0$$

$$F' = Q' + \frac{m'_0 - m''_0}{l} \quad (8)$$

y substituyendo este valor en la (3) resulta

$$m = \left(Q' x - \Sigma_0^x P (x - d) \right) + \frac{m'_0 - m''_0}{l} x - m'_0$$

y, finalmente, como el primer término del segundo miembro no es otra cosa que el valor de M [ecuación (7)], será:

$$m = M - \frac{m'_0 (l - x)}{l} - m''_0 \frac{x}{l} \quad (9).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cuando } m'_0 = m''_0, \quad \text{será } m = M - m'_0 \\ \text{Si } m''_0 = 0 \dots \dots \dots m = M - \frac{m'_0 (l - x)}{l} \end{array} \right\} \quad (10).$$

Resta ahora conocer m'_0 y m''_0 ; cuando tengamos su valor, quedará determinado m [ecuaciones (9) (10) y (11)], y también F'' y F' [ecuaciones (1) y (2)]. La teoría de las deformaciones por flexión resuelve la dificultad, como vamos á ver.

De la definición de empotramiento se deduce que $\alpha = t g \delta = 0, A = 0$ y $F = 0$ (ecuaciones (6) del núm. 344), puesto que las secciones O y H (figura 6.^a) no han de tener movimiento angular ni lineal alguno; y de estas condiciones deducimos las dos ecuaciones siguientes, que necesitábamos:

$$F = \frac{1}{EI} \int_0^l m (l - x) dx = 0 \quad (11).$$

$$A = \frac{1}{EI} \int_0^l m dx = 0 \quad (12).$$

Substituyendo el valor (9) de m , se convierten respectivamente en

$$\int_0^l M (l - x) dx - (2 m'_0 + m''_0) \frac{l^2}{6} = 0 \quad (13).$$

$$\int_0^l M dx - (m'_0 + m''_0) \frac{l}{2} = 0 \quad (14),$$

ecuaciones que servirán para determinar m'_0 y m''_0 .

361. Hemos considerado el caso general de que los dos extremos de la viga estén empotrados; si no lo estuviera más que el O (fig. 14, lám. 7.^a), ya no sería $A = 0$, pues la sección extrema H que está apoyada tiene movimiento angular; pero como entonces no hay momento de empotramiento en H , es $m''_0 = 0$, y nos basta para determinar m_0 , la ecuación (13) que se convierte en

$$\int_0^l M(l-x) dx - m'_0 \frac{l^2}{3} = 0 \quad (15).$$

362. Cuando por la simetría de cargas y de líneas sean iguales m'_0 y m''_0 , las ecuaciones (13) y (14) se convierten en

$$\int_0^l M(l-x) dx - m'_0 \frac{l^2}{2} = 0 \quad (16).$$

$$\int_0^l M dx - m'_0 l = 0 \quad (17),$$

y se puede emplear cualquiera de las dos para la determinación de la incógnita m'_0 .

La función M nos es conocida (núms. 309 á 338). Las integraciones entre los límites cero y l se harán teniendo en cuenta las observaciones del núm. 345.

363. Resolución del problema en el caso de que el empotramiento sea imperfecto (figs. 5.^a, 8.^a y 9.^a, lám. 7.^a).

Supongamos que el empotramiento sea imperfecto, de modo que el ángulo ϑ' que forman las secciones extremas con su posición primitiva no sea cero, sino que tenga un valor apreciable cuya tangente llamaremos a' ; y que también el ángulo α' de las dos secciones extremas, tenga un cierto valor de tangente A' .

Hemos llamado $a = t g \vartheta$ y $A = t g \alpha$ á las cantidades similares, correspondientes á la pieza apoyada simplemente, esto es, cuando el empotramiento era nulo.

Para definir el *grado de imperfección* del empotramiento, referiremos a' y A' á los valores de a y A correspondientes al caso de prisma simplemente apoyado, y supondremos que las primeras cantidades son una fracción de las segundas, es decir, que $a' = \frac{1}{n} a$ y $A' = \frac{1}{m} A$.

Llamemos m'_1 y m''_1 á los momentos de empotramiento imperfecto en los extremos.

A ya no es cero, sino que vale $\frac{1}{m} A$; tampoco es cero a , pues tiene por valor $\frac{1}{n} a$. Las ecuaciones (13) y (14) del núm. 360 se convierten ahora en las siguientes:

$$\frac{al}{n} + \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M(l-x) dx - (2m'_1 + m''_1) \frac{l^2}{6} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{EI} \left(\int_0^l M dx - (m'_1 + m''_1) \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{m} A \quad (19)$$

ecuaciones que servirán para determinar m'_1 y m''_1 , que han de ser sustituidas en el valor del momento general m_1 , que, análogamente á la expresión de m (9 del núm. 360), vale

$$m_1 = M - \frac{m'_1(l-x)}{l} - m''_1 \frac{x}{l} \quad (20).$$

364. Concretándonos al caso en que los dos momentos de empotramiento imperfecto sean iguales, esto es, que $m'_1 = m''_1$, la ecuación (18) anterior se convierte en

$$\frac{al}{n} + \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M(l-x) dx - m'_1 \frac{l^2}{2} \right) = 0 \quad (21).$$

Si se compara esta ecuación con la (16) (núm. 362) correspondiente al caso de empotramientos perfectos é iguales en los dos extremos, se deduce la relación siguiente entre los momentos de empotramiento:

$$m'_1 = m'_0 + \frac{2 a EI}{n l} \quad (22).$$

El momento general de flexión valdrá

$$m_1 = M - m'_1 \quad (23).$$

Observaremos que m'_0 representa un valor absoluto (nota del núm. 359), y por tanto le corresponde el signo que tenga de manifiesto. Además, como a es siempre negativo, pues se deduce de la ecuación (10) (núm. 345), en la cual M , momento de flexión, es siempre positivo, resulta de la ecuación (22) que, en valor absoluto, $m'_1 < m'_0$, es decir, que en igualdad de circunstancias el momento de empotramiento imperfecto es más pequeño que el momento de empotramiento perfecto.

Lo contrario sucede con los momentos generales de flexión; para el caso de empotramiento perfecto, hemos visto (núm. 360, ecuaciones 10) que

$$m = M - m'_0.$$

Comparando este valor con el de m_1 , dado por la ecuación anterior (23), y puesto que $m'_1 < m'_0$, se deduce que

$$m_1 > m.$$

CASOS PARTICULARES

365. Pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro con un peso P (fig. 10, lám. 7.^a).—En este caso particular, m y C se deducen directamente, tomando como eje de las x el OH , como origen el punto O , y considerando las fuerzas que están situadas á la derecha de la sección A de abscisa x .

m = momento general de flexión = $-P \times AH = -P(l-x)$; es la ecuación de la recta BH .

$$\begin{aligned} \text{Para } x = l & \dots \dots \dots m = 0 \\ \text{» } x = 0 & \dots \dots \dots m = -Pl \end{aligned}$$

El momento máximo $m_0 = -Pl$, tiene lugar en O .

Si es conocida la longitud $OO' = b$, podremos establecer, representando por Q la fuerza capaz de sustituir al empotramiento, $Qb = Pl$, de donde

$$Q = \frac{Pl}{b}.$$

La reacción F' en O , será $F' = P + Q$.

Los esfuerzos cortantes C son constantes é iguales á $-P$, y están representados por las ordenadas de la recta CD paralela á OH .

366. La flecha corresponde al punto H de abscisa $x = l$. Aplicando las ecuaciones (8) del núm. 344, y llamando f á la flecha, será

$$f = \frac{1}{EI} \int_0^l m(l-x) dx,$$

y sustituyendo $m = -P(l-x)$, é integrando,

$$f = -\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}.$$

También se obtiene

$$A = \frac{1}{EI} \int_0^l m dx = \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{EI}.$$

La ecuación de la elástica (núm. 348) es

$$y = -\frac{1}{EI} \int_0^{x_1=x} P(l-x)(x_1-x) dx$$

$$y = -\frac{Pl^3}{2EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{3l^3} \right).$$

367. 2.º Pieza empotrada en un extremo y cargada en toda su longitud l con p kilogramos por unidad lineal (fig. 11, lám. 7.^a).—Para una sección cualquiera A , tenemos $AH = l-x$; las cargas en AH son $p(l-x)$, y pueden considerarse aplicadas en el punto medio del intervalo HA , que es

$$AB = \frac{1}{2}(l-x); \text{ luego}$$

$$m = -\frac{1}{2} p(l-x)^2 \text{ (parábola } RS).$$

$$\text{Para...} \begin{cases} x = l \dots \dots \dots m = 0 \text{ (punto } S). \\ x = 0 \dots \dots \dots m_c = -\frac{1}{2} p l^2 \text{ (momento máximo; punto } O). \end{cases}$$

Si $pl = P$, es decir, á carga igual en valor absoluto, el momento máximo de flexión es, para este segundo caso, la mitad del correspondiente al primero.

Esfuerzo cortante $C = -p(l - x)$ (recta TS).

368. Deformaciones (aplicación de las ecuaciones 8 y 12 de los números 344 y 348).

$$f = -\frac{pl^4}{8EI} \quad \text{y} \quad A = -\frac{1}{6} \frac{pl^3}{EI};$$

A es la tangente del ángulo que formarán las secciones H y O .

Si la carga total repartida pl es igual á la P aislada del caso anterior, y comparamos los valores de las flechas, resulta que la del segundo caso es á la del primero como 3 : 8. La flecha es, por tanto, mucho menor cuando la carga está distribuída uniformemente en toda la longitud de la viga.

Ecuación de la elástica (núm. 348):

$$y = \frac{1}{EI} \int_0^{x_1=x} m(x_1 - x) dx$$

$$y = -\frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

369. 3.º Prisma empotrado en sus dos extremos y cargado con un peso P en su punto medio (fig. 12, lám. 7.ª). — Por la simetría de líneas y pesos se deduce *á priori* que $m'_0 = m''_0$ y $F' = F''$. De la ecuación (8) (núm. 360) se obtiene entonces $F' = Q'$.

Para la determinación del momento de empotramiento $m'_0 = m''_0$, se hará uso de una cualquiera de las dos ecuaciones (16) ó (17) (núm. 362); de la última, por ejemplo, por ser más sencilla.

Llamando M' y M'' á los momentos de flexión de la pieza apoyada, entre A y H , y entre O y A , respectivamente, será

$$M' = \frac{1}{2} Pl - \frac{1}{2} Px.$$

$$M'' = \frac{1}{2} Px.$$

$$\int_0^l M dx = \int_0^{\frac{1}{2}l} M' dx + \int_{\frac{1}{2}l}^l M'' dx = \frac{1}{16} Pl^2 + \frac{1}{16} Pl^2 = \frac{1}{8} Pl^2$$

y sustituyendo en la ecuación (17),

$$\frac{1}{8} Pl^2 - m'_0 l = 0$$

$$m'_0 = \frac{1}{8} Pl.$$

El momento general de flexión será (ecuación 10 del núm. 360):

$$\text{Entre } O \text{ y } A \dots \dots m = \frac{1}{2} Px - \frac{1}{8} Pl \text{ (recta } ab \text{)}.$$

$$\text{Sección } O \text{ (} x=0 \text{)}. \quad m = -\frac{1}{8} Pl = m'_0 = Oa.$$

$$\text{Entre } A \text{ y } H \dots \dots m = \frac{1}{2} P(l-x) - \frac{1}{8} Pl \text{ (recta } bd \text{)}.$$

$$\text{Punto } H \text{ (} x=l \text{)}. \quad m = -\frac{1}{8} Pl = m''_0 = m'_0 = Hd.$$

Para el punto medio A , $x = \frac{1}{2} l$, y $m = Ab = \frac{1}{8} Pl$; según esto, $Ab = Oa$, y el momento máximo corresponde á la sección media y á las de empotramiento y es

$$m_0 = -\frac{1}{8} Pl = m'_0 = m''_0.$$

En los puntos c y e el momento de flexión es cero. Para hallar las abscisas de estos puntos, hagamos cero los valores de m entre O y A y entre A y H , y será:

$$\frac{1}{2} Px - \frac{1}{8} Pl = 0 \quad \text{y} \quad x = Oc = \frac{l}{4}$$

$$\frac{1}{2} P(l-x) - \frac{1}{8} Pl = 0 \quad \text{y} \quad x = Ae = \frac{3}{4} l,$$

es decir, que los puntos c y e están á una distancia de los apoyos más próximos, igual á la cuarta parte de la longitud l de la viga.

Resumiendo: 1.º Los momentos de flexión son negativos de O á c , y van disminuyendo desde $m = -\frac{1}{8} P l$ hasta cero; la viga se flexará volviendo su concavidad hacia el punto a . 2.º Los momentos de flexión son positivos en el intervalo $c e$; en c y e son cero, y en el punto medio A tiene m el valor $\frac{1}{8} P l$. La viga se flexará volviendo su concavidad hacia el punto b . 3.º El intervalo $e H$ está en idénticas condiciones que el $O c$; de modo que la concavidad estará dirigida al punto d .

Siendo la posición primitiva del eje la recta de puntos $O c e H$, la forma de la elástica será la línea de trazo lleno $O A H$; los puntos c y e en que m es cero, son puntos de inflexión.

En cuanto á los esfuerzos cortantes, puesto que $F' = Q'$ y $F'' = Q''$, serán los mismos que para el caso de que la pieza estuviese apoyada (número 317), es decir, $C = \pm \frac{1}{2} P$, y estarán representados gráficamente por las ordenadas de las rectas $s t$ y $u z$.

La ecuación de la elástica entre O y A es, aplicando la ecuación (12) del número 348, poniendo en vez de M su valor

$$m = \frac{1}{2} P x - \frac{1}{8} P l,$$

é integrando:

$$y = \frac{P l^5}{16 E I} \left(\frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$, resulta $x = \frac{1}{2} l$, cuyo valor corresponde el máximo

de y , ó sea la flecha $f = -\frac{P l^5}{192 E I}$.

La misma ecuación anterior en y , tomando como origen el extremo H , sirve para la elástica entre H y A , por la simetría de la figura.

370. Caso de empotramiento imperfecto. — La ecuación (22) del número 364 da, sustituyendo a por su valor correspondiente al caso de pieza

apoyada en los dos extremos y cargada en el punto medio (núm. 349),

$$a = -\frac{1}{16} \frac{P l^2}{E I}$$

$$m'_1 = m'_0 - \frac{1}{8} \frac{P l}{n}$$

y como $m'_0 = \frac{1}{8} P l$ para el caso que estamos considerando de pieza empotrada en los dos extremos y cargada en el punto medio (en el caso de empotramiento perfecto), resulta

$$m'_1 = \frac{1}{8} P l \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

El momento general de flexión es (ecuación 23: núm. 364):

$$m_1 = M - m'_1$$

de modo que entre O y A (fig. 12, lám. 7.ª)

$$m_1 = \frac{1}{2} P x - \frac{1}{8} P l \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

que para $x = \frac{1}{2} l$ da

$$m_1 = \frac{1}{8} P l \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

La ordenada $A b$ resulta con aumento, y la $O a$ con disminución. Si $n=2$, por ejemplo, el momento de flexión $A b'$ en el punto medio es

$$m_1 = \frac{3}{16} P l,$$

y el de los empotramientos $O a'$, $H d'$,

$$m'_1 = m''_1 = -\frac{1}{16} P l.$$

El empotramiento imperfecto, hace, pues, disminuir el momento de flexión en las secciones H y B ; pero en cambio aumenta el correspondiente al punto medio. El polígono correspondiente á estos momentos sería el de líneas de puntos $a' b' d'$.

371. 4.º Pieza empotrada en los dos extremos y cargada con un peso P en un punto A situado á una distancia $OA = d$ del extremo O (fig. 13, lámina 7.ª).—Sea $AH = c$ y $OA = l$.

M tiene los valores siguientes, (núm. 317).

$$M' = \frac{P d}{l} (l - x) \dots \text{entre } A \text{ y } H$$

$$M'' = \frac{P c}{l} x \dots \text{entre } O \text{ y } A$$

de modo que haciendo las sustituciones en las ecuaciones (13), (14), (8) y (9) del número 360, hallamos:

$$F' = \frac{P c^2}{l^3} (l + 2 d) \quad \text{,} \quad F'' = \frac{P d^2}{l^3} (l + 2 c)$$

$$m'_0 = Oa = \frac{P d c^2}{l^2} \quad \text{,} \quad m''_0 = Hh = \frac{P d^2 c}{l^2}$$

Momento m en el punto $A \dots \quad Ab = \frac{2 P d^2 c^2}{l^3}$

Momento general

$$m = \frac{P x}{l} \left(c + \frac{d c}{l^2} (c - d) \right) - \frac{P d c^2}{l^2} \dots \text{entre } O \text{ y } A$$

$$m = \frac{P x}{l} \left(1 + \frac{d c}{l^2} (c - d) \right) - P d \left(\frac{c^2}{l^2} - 1 \right) \dots \text{entre } A \text{ y } H$$

Igualando á cero estas expresiones, que no son otra cosa que las ecuaciones de las rectas ab y bh , se obtendrán las abscisas Oc' , Oe de los puntos de inflexión c' y e . También se pueden obtener por la comparación de los triángulos Oac' , Abc' y Hhe , Abe .

Los esfuerzos cortantes son:

$$+ F' \text{ de } O \text{ á } A$$

$$- F'' \text{ de } A \text{ á } H.$$

372. 5.º Pieza empotrada en los dos extremos y cargada con varios pesos, P, P' etc. — Se emplearía el procedimiento de superposición de efectos y el problema queda reducido al del caso anterior.

373. 6.º Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada con un peso P en el punto medio (fig. 14, lám. 7.ª).

En este caso $m'_0 = 0$. Haciendo uso de la ecuación (13) que establece que el descenso del punto H es cero, y teniendo en cuenta que, según hemos hallado en el problema del núm. (349),

resulta
$$\int_0^l M (l - x) dx = \frac{1}{24} P l^3 + \frac{1}{48} P l^3 = \frac{3}{48} P l^3,$$

$$m'_0 = \frac{3}{16} P l.$$

Aplicando las ecuaciones de los núms. (359) y (360) se obtiene:

$$F' = \frac{11}{16} P$$

$$F'' = \frac{5}{16} P.$$

	m	c
De O á $A \dots \dots \dots$	$m' = \frac{11}{16} P x - \frac{3}{16} P l \dots \dots \dots$	$+ \frac{11}{16} P.$
De A á $H \dots \dots \dots$	$m'' = \frac{5}{16} P (l - x) \dots \dots \dots$	$- \frac{5}{16} P.$

La línea de los momentos de flexión es abH ; y la de los esfuerzos cortantes es sz .

El momento máximo de flexión tiene lugar en el empotramiento O , y vale $Oa = m_0 = - \frac{3}{16} P l = m'_0$.

Para $x = \frac{1}{2} l$ (punto A), $m = + \frac{5}{32} P l = Ab$: se ve que $Ab < Oa$.

Entre O y A hay un punto de $m = 0$, que se obtiene por la ecuación

$$\frac{11}{16} P x - \frac{3}{16} P l = 0,$$

Lo cual da

$$x = Oc = \frac{3}{11} l.$$

Las ecuaciones de la elástica son (ecuación 12 del núm. 348):

Entre A y H ,

$$y = \frac{1}{EI} \left(\int_{\frac{1}{2}l}^{x_1} m''(x_1 - x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}l} m'(x_1 - x) dx \right)$$

$$\text{ó } y = -\frac{Pl^3}{96EI} \left(2 - \frac{12x}{l} + 15\frac{x^2}{l^2} - 5\frac{x^3}{l^3} \right)$$

haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$, se obtiene que para $x = l \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$,

ó $x = 0$, 553 l , tiene lugar la flecha, que vale

$$f = -\frac{Pl^3}{107EI}$$

Entre O y A

$$y = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{x_1=x} m'(x_1 - x) dx \right)$$

$$\text{ó } y = \frac{Pl^3}{96EI} \left(11\frac{x^3}{l^3} - 9\frac{x^2}{l^2} \right)$$

374. 7.º Pieza empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente con p kilogramos por unidad de longitud l (fig. 15, lám. 7.ª).

Haciendo uso de la ecuación (16) del núm. 362, y utilizando las integraciones hechas en el problema del núm. 351, se obtiene, para valor absoluto de los momentos de empotramiento,

$$m'_0 = m''_0 = \frac{1}{12} p l^2$$

y el valor del momento general de flexión (ecuación (10) del núm. 360),

$$m = M - \frac{1}{12} p l^2;$$

ó sustituyendo el valor de M (núm. 323),

$$m = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{12} p l^2,$$

ecuación de una parábola $d m r$, de eje vertical, cuyo parámetro es $\frac{2}{p}$.

Para $x = 0$ $m = -\frac{1}{12} p l^2$ (dimensión $O d$)

» $x = l$ $m = -\frac{1}{12} p l^2$ (dimensión $H r$)

» $x = \frac{1}{2} l$ $m = +\frac{1}{24} p l^2$ (dimensión $A m$).

El momento máximo de flexión corresponde, según vemos, á los empotramientos O y H : en A tiene un valor mitad.

Los momentos de flexión son negativos de O á a y de b á H , lo que prueba que en estas partes las fibras superiores á la capa neutra están extendidas y las inferiores comprimidas; lo contrario sucede entre a y b , por ser m positivo.

De O á H habrá dos secciones en que $m = 0$, que corresponden á los puntos de intersección a y b de la parábola de los momentos de flexión con el eje $O H$. Sus abscisas son dadas por la ecuación

$$m = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{12} p l^2 = 0$$

de donde

$$x = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left\{ \begin{array}{l} x' = O a = 0,2113 l \\ x'' = O b = 0,7887 l \end{array} \right.$$

La elástica es de la forma que señala la línea de trazo grueso de la fig. 15. Son *puntos de inflexión* los a y b .

Si el prisma hubiese estado simplemente apoyado, la parábola de los momentos hubiese sido la $O n H$ (línea de puntos), ó sea la $d m r$ trasladada paralelamente á sí misma la cantidad $O d = \frac{1}{12} p l^2$.

En efecto: $m = M - \frac{1}{12} p l^2$.

Los esfuerzos constantes valen

$$C = \frac{d m}{d x} = \frac{1}{2} p l - p x$$

ecuación de una recta $D r$ igual á la del caso de pieza apoyada. Para

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} C = \pm \frac{1}{2} p l$$

375. Hemos visto que el momento de flexión en el empotramiento (ordenada $O d$, fig. 15, lám. 7.^a), era doble del correspondiente al punto medio (ordenada $A m$). La relación es diferente cuando el empotramiento es imperfecto.

En efecto, si en las ecuaciones (22) y (23) del núm. **364** hacemos

$$m'_0 = \frac{1}{12} p l^2$$

$$a = -\frac{1}{24} \frac{p l^3}{EI} \text{ (núm. 351)}$$

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 \text{ (núm. 323),}$$

obtendremos, para valores del momento de flexión en el empotramiento (m'_1) y del correspondiente al punto medio (m_1), en el caso de empotramiento imperfecto definido por su valor $a' = \frac{1}{n} a$. (núm. **363**):

$$m'_1 = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$m_1 = \frac{1}{12} p l^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$$

La relación entre m'_1 y m_1 dependerá del valor n , es decir, del grado de imperfección del empotramiento.

Si queremos que $m'_1 = m_1$, será necesario que $1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, ó que se verifique $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$; y entonces, $m'_1 = m_1 = \frac{1}{16} p l^2$.

A partir de este valor de $\frac{1}{n}$, una de las dos cantidades m'_1 ó m_1 aumenta; deduciremos, en consecuencia, que el momento máximo de flexión de una pieza empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente, tiene un valor mínimo cuando el empotramiento es imperfecto y se dispone de modo que $a' = \frac{1}{4} a$; ó lo que es lo mismo (figs. 5.^a, 8.^a y 9.^a, lám. 7.^a), cuando $t g \delta' = \frac{1}{4} t g \delta$, siendo δ el ángulo de rotación de la sección extrema

en el caso en que la pieza esté simplemente apoyada en sus extremos.

Si hiciéramos $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ resultaría

$$m'_1 = \frac{1}{24} p l^2$$

$$m_1 = \frac{1}{12} p l^2$$

Este caso es equivalente al del empotramiento perfecto en cuanto al valor máximo del momento de flexión, que es $\frac{1}{12} p l^2$, pero éste tiene lugar en el punto medio de la viga. Las ordenadas $O d$ y $A m$ han cambiado de valor.

376. Para el estudio de las deformaciones, emplearemos la ecuación (12) del núm. **348**, teniendo en cuenta que $x_0 = 0$. Así obtendremos, sustituyendo m por su valor (núm. **374**) y haciendo $x_1 = x$,

$$y = -\frac{p x^2}{24 EI} (x^2 - 2 l x + l^2):$$

ó, bajo otra forma,

$$y = -\frac{p l^4}{24 EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Para determinar la flecha f , haremos $\frac{dy}{dx} = 0$, ecuación que se satisface con $x = \frac{l}{2}$; y sustituyendo en el valor de y se obtiene:

$$f = -\frac{p l^4}{384 EI}.$$

377. 8.^o Pieza empotrada en un extremo y apoyada en el otro, cargada uniformemente con p kilogramos por unidad de longitud (fig. 16, lám. 7.^a).

Haciendo uso de la ecuación (15) del núm. **361**, y utilizando las integrações hechas en el problema del núm. **351**, se obtiene para valor absoluto del momento de empotramiento

$$m'_0 = \frac{1}{8} p l^2:$$

este momento es negativo.

La reacción F' del apoyo en el empotramiento, dada por la ecuación (8) del núm. 360, es

$$F' = Q' + \frac{m'_0}{l} = \frac{1}{2} p l + \frac{1}{8} p l = \frac{5}{8} p l.$$

La otra reacción, será

$$F'' = p l - \frac{5}{8} p l = \frac{3}{8} p l.$$

El momento general de flexión tendrá por expresión (segunda ecuación (10) del núm. 360):

$$m = M - \frac{m'_0 (l - x)}{l},$$

ó, sustituyendo el valor de M (núm. 323) y el de m'_0 ,

$$m = \frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2;$$

ecuación de la parábola $a b H$ (fig. 15).

Para $x = 0$ $m = -\frac{1}{8} p l^2$.
 » $x = l$ $m = 0$.
 » $x = \frac{1}{2} l$ (punto g)..... $m = +\frac{1}{16} p l^2$.

El punto de máxima ordenada, de los comprendidos entre c y H , es dado por la ecuación

$$\frac{d m}{d x} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{5}{8} p l - p x = 0;$$

es el punto h de abscisa $x = \frac{5}{8} l$. También el esfuerzo cortante es cero en este punto, como veremos.

El momento máximo de flexión ($m_0 = -\frac{1}{8} p l^2$) corresponde, según acabamos de ver, al empotramiento O . En el punto medio g , tiene un valor mitad.

Los momentos de flexión son negativos en el intervalo $O c$, lo que de-

muestra que las fibras situadas por encima de la capa neutra se extienden, y las inferiores se comprimen, presentando la elástica su concavidad á la parte inferior; además, el valor absoluto va disminuyendo de O á c , hasta llegar á ser cero en este último punto.

De c á H los momentos de flexión son positivos, alcanzando su máximo valor en el punto h ; resultarán, por tanto, comprimidas las fibras superiores y extendidas las inferiores, y la concavidad de la elástica estará por la parte superior.

Dedúcese de todo esto que la elástica tiene un punto de inflexión en c , intersección de la parábola $a b H$ con el eje $O H$. En este punto el momento m de flexión es cero, de modo que la ecuación

$$m = \frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2 = 0$$

dará la abscisa de dicho punto c .

La ecuación tiene dos raíces;

$$\frac{l(5 \pm \sqrt{9})}{8} \left\{ \begin{array}{l} x' = l \\ x'' = \frac{1}{4} l. \end{array} \right.$$

El valor de $x'' = \frac{1}{4} l$ es el de $O c$.

Los esfuerzos cortantes son:

$$C = \frac{d m}{d x} = \frac{5}{8} p l - p x,$$

ecuación de la recta $A B$.

Para $x = 0$ $C = \frac{5}{8} p l = + F'$.
 » $x = l$ $C = -\frac{3}{8} p l = - F''$.
 » $x = \frac{1}{2} l$ (punto g)..... $C = +\frac{1}{8} p l$.

C es cero para $x = \frac{5}{8} l = 0,625 l$ (punto h).

378. Si se compara este caso de flexión con el del núm. 324 (fig. 8.^a, lá-

mina 6.^a), se observa que en la segunda mitad de la pieza (*hH*, fig. 16, lámina 7.^a; *AH*, fig. 8.^a, lám. 6.^a) los momentos de flexión y esfuerzos cortantes tienen idéntico valor; de modo que, en ambos casos de flexión, esta parte se encuentra en iguales condiciones.

379. El momento máximo de flexión en una pieza apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente es $\frac{1}{8} p l^2$ (núm. 323), como en el caso actual, sin más diferencia que la de que en el primero el momento máximo corresponde al punto medio de la pieza, y en el segundo al empotramiento.

380. Empleando el método del núm. 375, deduciríamos que en el caso de empotramiento imperfecto la reacción F'_1 del extremo empotrado y el momento m'_1 de empotramiento valen

$$F'_1 = \frac{1}{8} p l \left(5 - \frac{1}{n} \right)$$

$$m'_1 = \frac{1}{8} p l^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

La investigación del valor más conveniente de n se haría por el procedimiento ya indicado, que no repetimos por carecer de interés práctico el resultado.

381. La ecuación de la elástica se hallará empleando la ecuación (12) del núm. 348, y haciendo $x_1 = x$, según hemos visto en el caso del núm. 376. Así obtendremos:

$$y = - \frac{p l^4}{48 E I} \left(\frac{2 x^4}{l^4} - \frac{5 x^5}{l^5} + \frac{3 x^2}{l^2} \right).$$

El punto de máxima ordenada, ó sea el correspondiente á la flecha f , se encontrará haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$8 x^2 - 15 l x + 6 l^2 = 0$$

$$x = 0,578 l.$$

Es el punto n (fig. 16, lám. 7.^a) comprendido entre h y g . Sustituyendo x en el valor de y , se obtiene

$$f = - \frac{p l^4}{185 E I}.$$

La tangente del ángulo de rotación de la sección extrema apoyada, es

$$A = \frac{1}{E I} \int_0^l m dx = \frac{1}{48} \frac{p l^5}{E I}.$$

382. 9.º Pieza empotrada en los dos extremos y cargada en la mitad *AH* con p kilogramos por unidad de longitud (fig. 17, lám. 7.^a).

Aplicando las ecuaciones (13) y (14) del núm. 360, y tomando los valores de las integrales del núm. 352, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} 2 m'_0 + m''_0 &= \frac{42}{384} p l^2 \\ m'_0 + m''_0 &= \frac{32}{384} p l^2 \end{aligned} \right\} (24).$$

Momentos de empotramiento:

$$m'_0 = \frac{5}{192} p l^2$$

$$m''_0 = \frac{11}{192} p l^2$$

Reacciones

$$F' = Q' + \frac{m'_0 - m''_0}{l} = \frac{3}{32} p l$$

$$F'' = \frac{1}{2} p l - F' = \frac{13}{32} p l.$$

Momentos de flexión y esfuerzos cortantes.

Aplicando la expresión (9) del núm. 360, resulta:

	<i>m</i>	<i>c</i>
Entre <i>O</i> y <i>A</i>	$\frac{3}{32} p l x$	$\frac{5}{192} p l^2$
Entre <i>A</i> y <i>H</i>	$\frac{19}{32} p l x - \frac{p x^2}{2} - \frac{29}{192} p l^2$...	$\frac{3}{32} p l - p x$.

La línea de los momentos de flexión se compone de una recta *cs* y una parábola *shh* tangentes en *s*, siendo $Oc = m'_0$ y $Hh = m''_0$.

La línea $O' d e$ de los esfuerzos cortantes se compone de dos rectas: la $O d$ paralela al eje $O H$, y la $d e$ que corta á éste en el punto a .

Los momentos de flexión son negativos entre O y B y entre D y H , de modo que en estos intervalos la elástica presentará la concavidad á la parte inferior, verificándose lo contrario en la parte $B D$ que tiene momentos positivos. B y D son, por tanto, puntos de inflexión de la elástica, y en ellos $m = 0$.

El momento máximo en el intervalo $B D$, corresponde á un punto cuya abscisa se obtendrá por $\frac{d m}{d x} = 0$; que da

$$\frac{19}{32} p l - p x = 0 \quad \text{,,} \quad x = O a = 0,593 l.$$

Este valor, sustituido en el de m , dará el máximo entre B y D .

Como $\frac{d m}{d x}$ no es otra cosa que el esfuerzo cortante C , resulta $C = 0$ para el punto a , es decir, que por a pasará la recta $d e$.

Los puntos de inflexión B y D corresponden á valores cero del momento m .

Tendremos, pues, igualando á cero los valores de m ,

Entre O y A (punto B)..... $x = 0,277 l$

Entre A y H (punto D),

$$x = \frac{l \left(114 \pm \sqrt{114^2 - 4 \times 29 \times 96} \right)}{192}$$

$$x' = 0,8 l \quad \text{,,} \quad x'' = 0,38 l.$$

Se acepta la primera raíz, que es la que corresponde al signo + del numerador, porque $x'' < \frac{1}{2} l$ es inadmisibile.

La ecuación de la elástica se obtendría por el procedimiento general empleado en los casos anteriores.

Entre O y A ,

$$y = - \frac{p l^4}{64 E I} \left(\frac{5 x^2}{6 l^2} + \frac{x^5}{l^5} \right)$$

El valor de x correspondiente á la flecha se obtendrá por la ecuación $\frac{d y}{d x} = 0$; y sustituyéndolo en y se hallaría f .

383. 10.º Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada uniformemente en la mitad $A H$ con p kilogramos por unidad de longitud (fig. 18, lám. 7.ª).

En este caso, $m''_o = 0$, y la primera ecuación de las (24) (núm. 382), que establece la condición de que el punto H no desciende, se convierte en

$$2 m'_o = \frac{42}{384} p l^2 \quad \text{,,} \quad m'_o = \frac{7}{128} p l^2.$$

Se encuentra, además,

$$F'' = Q' + \frac{m'_o}{l} = \frac{23}{128} p l$$

$$F'' = \frac{1}{2} p l - F' = \frac{41}{128} p l.$$

Los valores de m y C son:

	m	c
Entre O y A	$\frac{23}{128} p l x - \frac{7}{128} p l^2$	$\frac{23}{128} p l$
Entre A y H	$\frac{87}{128} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{23}{128} p l^2$..	$\frac{87}{128} p l - p x$.

El máximo de m entre A y H corresponde al punto a cuya abscisa es $x = 0,679 l$.

384. El punto de inflexión de la elástica, correspondiente á $m = 0$, tiene por abscisa $x = 0,304 l$.

La ecuación de la elástica entre O y A es:

$$y = - \frac{p l^4}{128 E I} \left(\frac{7 x^2}{2 l^2} - \frac{23 x^5}{6 l^5} \right).$$

385. 11.º Fuerzas repartidas que varían de modo uniforme.

(a) El peso P' está distribuido como representa la fig. 1.^a (lám. 8.^a). La pieza está empotrada en sus dos extremos.

$$\begin{cases} \text{Momentos de empotramiento...} \\ \text{Reacciones...} \end{cases} \begin{cases} m'_0 = \frac{1}{10} P' l.. \text{ (sección A)} \\ m''_0 = \frac{1}{15} P' l.. \text{ (sección B)} \\ F' = \frac{21}{30} P' \dots \text{ (punto A)} \\ F'' = \frac{9}{30} P' \dots \text{ (punto B).} \end{cases}$$

Momento general de flexión:

$$m = \frac{21}{30} P' x - \frac{P'}{l} x^2 + \frac{P'}{3 l^2} x^3 - \frac{1}{10} P' l.$$

Esfuerzo cortante:

$$C = \frac{21}{30} P' - \frac{2 P' x}{l} + \frac{P' x^2}{l^2}.$$

Ecuación de la elástica:

$$y = -\frac{P' l^3}{60 EI} \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 7 \frac{x^3}{l^3} + 5 \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^5}{l^5} \right).$$

(b) Caso anterior, estando el extremo H apoyado (fig. 2.^a, lám. 8.^a).

Momento de empotramiento $m'_0 = \frac{2}{15} P' l.$

$$\begin{cases} \text{Reacciones...} \end{cases} \begin{cases} F' = \frac{4}{5} P' \dots \text{ (punto A)} \\ F'' = \frac{1}{5} P' \dots \text{ (punto H)} \end{cases}$$

Momento general de flexión:

$$m = \frac{4}{5} P' x - \frac{P' x^2}{l} + \frac{P' x^3}{3 l^2} - \frac{2}{15} P' l.$$

Esfuerzo cortante:

$$C = \frac{4}{5} P' - \frac{2 P' x}{l} + \frac{P' x^2}{l^2}.$$

Ecuación de la elástica:

$$y = -\frac{P' l^3}{60 EI} \left(4 \frac{x^2}{l^2} - 8 \frac{x^3}{l^3} + 5 \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^5}{l^5} \right)$$

(c) Caso representado en la fig. 3.^a, lám. 8.^a

P' = Peso total. Pieza empotrada en los dos extremos.

Momentos de empotramiento..... $m'_0 = m''_0 = \frac{1}{16} P' l$

Reacciones..... $F' = F'' = \frac{1}{2} P'.$

Momentos de flexión m y esfuerzos cortantes C :

Entre O y A ,

$$\begin{array}{c} m \\ \hline P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2 x^2}{3 l^2} \right) - \frac{1}{16} P' l. \end{array} \quad \begin{array}{c} c \\ \hline P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2 x}{l} + \frac{2 x^2}{l^2} \right) \end{array}$$

Entre A y H ,

$$\frac{5}{48} P' l - P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2 x^2}{3 l^2} \right) \dots - P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2 x}{l} + \frac{2 x^2}{l^2} \right)$$

Ecuación de la elástica:

Entre O y A ,

$$y = -\frac{P' l^3}{12 EI} \left(-\frac{2 x^3}{5 l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^5}{l^5} + \frac{3 x^2}{8 l^2} \right).$$

La otra mitad es simétrica con respecto á la vertical que pasa por A .

Flecha para $x = \frac{1}{2} l$:

$$f = -\frac{1}{640} \frac{P' l^3}{EI}.$$

(d) Caso representado en la fig. 4.^a, lám. 8.^a

Peso total = P' . Pieza empotrada en O y apoyada en H .

Momento de empotramiento: $m'_0 = \frac{3}{32} P' l$.

$$\text{Reacción de los apoyos...} \left\{ \begin{array}{l} F' = \frac{19}{32} P' \text{ (punto } O\text{)} \\ F'' = \frac{13}{32} P' \text{ (punto } H\text{)} \end{array} \right.$$

Momentos de flexión y esfuerzos cortantes:

Entre O y A ,

m	c
$P' x \left(\frac{19}{32} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2} \right) - \frac{3}{32} P' l \dots$	$P' \left(\frac{19}{32} - \frac{2x}{l} + \frac{2x^2}{l^2} \right)$

Entre A y H ,

$$\frac{7}{96} P' l - P' x \left(\frac{13}{32} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2} \right) \dots \dots - P' \left(\frac{13}{32} - \frac{2x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2} \right)$$

Ecuación de la elástica entre O y A ,

$$y = - \frac{P' l^5}{12 EI} \left(- \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{19}{16} \frac{x^3}{l^3} + \frac{9}{16} \frac{x^2}{l^2} \right).$$

(e) Caso representado en la fig. 5.^a, lám. 8.^a

Peso total = P' . Pieza empotrada en los dos extremos.

Momentos de empotramiento: $m'_0 = m''_0 = \frac{5}{48} P' l$.

Reacciones: $F' = F'' = \frac{1}{2} P'$.

Momento de flexión m y esfuerzos cortantes C .

Entre O y A ,

m	c
$P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{5}{48} P' l \dots \dots$	$P' \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{l^2} \right)$

Entre A y H ,

$$P' x \left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{13}{48} P' l \dots - P' \left(\frac{3}{2} - \frac{4x}{l} + \frac{2x^2}{l^2} \right)$$

(f) Caso representado en la fig. 6.^a, lám. 8.^a:

Peso total = P' . Pieza empotrada en O y apoyada en H .

Momento de empotramiento: $m'_0 = \frac{5}{32} P' l$.

$$\text{Reacciones...} \left\{ \begin{array}{l} F' = \frac{21}{32} P' \text{ (punto } O\text{)} \\ F'' = \frac{11}{32} P' \text{ (punto } H\text{)} \end{array} \right.$$

Momentos de flexión m y esfuerzos cortantes C .

Entre O y A ,

m	c
$P' x \left(\frac{21}{32} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{5}{32} P' l \dots \dots$	$P' \left(\frac{21}{32} - \frac{2x^2}{l^2} \right)$

Entre A y H ,

$$P' x \left(\frac{53}{32} - \frac{2x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{31}{96} P' l \dots P' \left(\frac{53}{32} - \frac{4x}{l} + \frac{2x^2}{l^2} \right)$$

3. PIEZAS APOYADAS EN VARIOS PUNTOS

CÁLCULO ANALÍTICO

TEORÍA GENERAL

386. Sea una pieza AB (fig. 4.^a, lám. 12), apoyada no solamente en sus extremos A y B , sino también en un número cualquiera de puntos intermedios C, D, E , todos de nivel, que la dividen en tramos AC, CD, DE, EB , y supongámosla cargada de pesos aislados, ó repartidos uniformemente, y distribuidos de modo cualquiera. Se trata de determinar los valores de los momentos de flexión, esfuerzos cortantes, reacciones de los apoyos y demás cantidades incógnitas, á semejanza de lo practicado en los problemas hasta aquí resueltos relativos á piezas apoyadas en dos puntos ó empotradas en sus extremos.

Si la viga estuviese cortada ó interrumpida en cada uno de los apoyos (fig. 5.^a, lám. 12), se haría fácilmente el cálculo, independientemente, de cada tramo, considerándolo como pieza apoyada en sus dos extremos, y tan sólo observaríamos que la reacción de cada apoyo es la suma de las dos reacciones $Q'_1 + Q_1, Q'_2 + Q_2$, etc., correspondientes á cada uno de los tramos que en él insisten. Pero la viga es continua, y la hipótesis de la continuidad equivale, partiendo de la pieza dividida en trozos, á la introducción de unos pares (á cuyos momentos llamaremos *momentos de flexión en los apoyos*) que aplicados á los extremos de cada uno de los segmentos de prisma (fig. 6.^a, lámina 12) establezcan su unión, á semejanza de los pares que aplicábamos á las extremidades de las vigas empotradas (núms. 358 y 359) para mantenerlas en posición invariable cuando se suprimía la parte de muro situado por encima de los apoyos.

Hay, pues, en cada apoyo un *momento de flexión*, del mismo modo que en los extremos de las vigas empotradas existen los momentos de empotra-

miento; y los valores de las reacciones Q'_1 y Q_1, Q'_2 y Q_2 , etc., de la fig. 5.^a habrán experimentado variación, convirtiéndose en A_1 y B_1, A_2, B_2 , etc., si bien debiendo considerarse siempre como reacciones totales en cada apoyo las sumas $A_1 + B_1, A_2 + B_2$, etc.

Supongamos (fig. 7.^a, lám. 12) que hay $k + 1$, puntos de apoyo, numerados $0, 1, \dots, k + 1$, y por lo tanto k tramos, que llevarán también la numeración $0, 1, \dots, k$, de izquierda á derecha.

Llamemos:

- $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots, l_k$: longitud de los tramos parciales.
- $m'_0, m'_1, \dots, m'_{n-1}, m'_n, \dots, m'_{k+1}$: momentos de flexión en los apoyos.
- $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}, m_n, \dots, m_k$: momentos generales de flexión en los diversos tramos.
- $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n, \dots, M_k$: momentos generales de flexión en dichos tramos, suponiendo cortada la viga en los apoyos (fig. 5.^a, lám. 12).
- $A_0 \dots B_1, A_1 \dots B_2, A_2 \dots B_n, A_n \dots B_{k+1}$: reacciones parciales de cada apoyo correspondientes á los dos tramos contiguos, en la viga continua.
- $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, F_{k+1}$: reacciones totales de los apoyos.

Observaremos que los momentos de flexión m'_0 y m'_{k+1} , correspondientes á los apoyos primero y último, son cero, pues en estos puntos la viga es libre al girar, al flexarse.

Consideremos los tramos $n - 1$ y n , de longitud l_{n-1} y l_n , que insisten sobre los apoyos $n - 1, n$, y $n + 1$ (figs. 7.^a y 8.^a, lám. 12); tomemos como eje X el de la viga antes de deformarse y como origen el apoyo intermedio n .

Sean A_n y B_n las dos reacciones parciales del apoyo n , correspondientes á los dos tramos contiguos l_n y l_{n-1} , cuya suma $A_n + B_n$ da la total F_n del apoyo.

En el tramo l_n , el momento general de flexión para una sección cualquiera s , es

$$m_n = A_n x - \sum_s^0 P(x-d) + m'_n \quad (1),$$

llamando d, d' etc., las distancias al origen O de las fuerzas P, P', P'' .

Damos signo positivo al momento incógnito m'_n del apoyo n ; el cálculo dará á conocer cuál es el verdadero.

Como se ve, el conocimiento de los valores de m_n en cada tramo exige la determinación preliminar de las reacciones A_n y momentos de flexión en los apoyos m'_n .

387. Determinación de los momentos de flexión en los apoyos. Teorema de los tres momentos (*).— Para $x = l_n$, se convierte m_n en m'_{n+1} ; tendremos, por tanto de la ecuación (1).

$$m'_{n+1} = A_n l_n - \Sigma_0^D P (l_n - d) + m'_n$$

de donde

$$A_n = \frac{m'_{n+1} - m'_n}{l_n} + \frac{\Sigma_0^D P (l_n - d)}{l_n}$$

y como $\frac{\Sigma_0^D P (l_n - d)}{l_n}$ es igual á la reacción Q_n del apoyo O , en el caso de que la pieza estuviese cortada en O y en D (**), se tiene

$$A_n = Q_n + \frac{m'_{n+1} - m'_n}{l_n} \quad (2),$$

y sustituyendo en (1) resulta

$$m_n = Q_n x - \Sigma_0^s P (x - d) + \frac{m'_n (l_n - x)}{l_n} + \frac{m'_{n+1}}{l_n} x \quad (3).$$

Pero la suma de los dos primeros términos del segundo miembro de esta ecuación representa el momento de flexión de la viga OD supuesta apoyada en O y D ; según esto

$$m_n = M_n + \frac{m'_n (l_n - x)}{l_n} + \frac{m'_{n+1}}{l_n} x \quad (4).$$

(*) El teorema de los tres momentos, cuya demostración sencilla y general damos á continuación, fué descubierto por Bertot en 1855.

(**) Tendríamos, en efecto, tomando los momentos de las fuerzas del tramo n , ésimo con relación al punto n ,

$$Q_n l_n - \Sigma P (l - d) = 0.$$

La tangente a del ángulo δ de rotación de la sección O (fig. 8.^a, lám. 12) se determinará por la ecuación 10 del núm. 345, que en el caso actual es

$$a l_n + \frac{1}{EI} \int_0^{l_n} m_n (l_n - x) dx = 0.$$

Hecha esta integración, después de sustituir m_n por su valor (véase ecuación 13 del núm. 360 y cálculos anteriores), tendremos

$$a = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} M_n (l_n - x) dx + (2m'_n + m'_{n+1}) \frac{l_n}{6} \right) \quad (5).$$

Si aplicamos el cálculo anterior al tramo HO , tomando O como origen y contando las abscisas negativas, no hay más que sustituir $Q_n, l_n, m'_{n+1}, m_n, M_n$ por sus correspondientes $Q'_{n-1}, l_{n-1}, m'_{n-1}, m_{n-1}, M_{n-1}$, y cambiar de signo los resultados finales; así obtendremos

$$B_n = - \left(Q'_{n-1} + \frac{m'_{n-1} - m'_n}{l_{n-1}} \right) \quad (6)$$

$$m_{n-1} = - \left(M_{n-1} + \frac{m'_n (l_{n-1} - x)}{l_n} + \frac{m'_{n-1}}{l_{n-1}} x \right)$$

$$a = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{l_{n-1}} \int_0^{l_{n-1}} M_{n-1} (l_{n-1} - x) dx + (2m'_{n-1} + m'_n) \frac{l_{n-1}}{6} \right) \quad (7)$$

Los valores de a dados por (5) y (7) han de ser iguales, porque corresponden al mismo ángulo δ ; igualándolos resulta

$$\frac{6}{l_n} \int_0^{l_n} M_n (l_n - x) dx + \frac{6}{l_{n-1}} \int_0^{l_{n-1}} M_{n-1} (l_{n-1} - x) dx + m'_{n-1} l_{n-1} + 2m'_n (l_n + l_{n-1}) + m'_{n+1} l_n = 0. \quad (8)$$

ecuación que liga ó relaciona los valores de los momentos de flexión en tres apoyos consecutivos (m'_{n-1}, m'_n, m'_{n+1}) cualesquiera que sean las cargas y su colocación, á cuyo efecto no hay más que hacer en cada caso las integraciones indicadas en los dos primeros términos, correspondientes á los tra-

mos l_n y l_{n-1} considerados aisladamente como si fuesen piezas apoyadas en los extremos (*).

Esta es, en forma general, la ecuación de los tres momentos.

Si las cargas, en todos los tramos, fuesen uniformemente repartidas y á razón de p_{n-1} , p_n , etc., kilogramos por unidad de longitud en los tramos $n-1$, n , etc., las integrales de la ecuación (8) ya resueltas en el número 351 valen respectivamente $\frac{1}{24} p_n l_n^3$, $\frac{1}{24} p_{n-1} l_{n-1}^3$, y la ecuación (8) se convierte en

$$\frac{1}{4} p_{n-1} l_{n-1}^3 + \frac{1}{4} p_n l_n^3 + m'_{n-1} l_{n-1} + 2 m'_n (l_n + l_{n-1}) + m'_{n+1} l_n = 0 \quad (9).$$

Si las cargas fuesen aisladas, aplicadas en el punto medio de cada tramo y de valor $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n, \dots$ sería (núm. 349).

$$\frac{6}{16} P_{n-1} l_{n-1}^2 + \frac{6}{16} P_n l_n^2 + m'_{n-1} l_{n-1} + 2 m'_n (l_n + l_{n-1}) + m'_{n+1} l_n = 0 \quad (10).$$

Con igual facilidad se obtendrían las ecuaciones correspondientes á los demás casos de disposición de cargas.

388. Aplicación del teorema de los tres momentos.—Aplicando la ecuación (8) á los apoyos 1.º, 2.º y 3.º, obtendremos una ecuación para la determinación de los momentos de flexión en los apoyos; otras nos darán los apoyos 2.º, 3.º y 4.º, los 3.º, 4.º y 5.º, y así sucesivamente.

Si hay $k+1$ apoyos, obtendremos $k-1$ ecuaciones; y como los momentos incógnitos son en realidad $k-1$, pues los correspondientes á los apoyos primero y último son cero, el problema es determinado. Al resolver estos sistemas de ecuaciones, de la forma general (8), resultan valores negativos para los momentos m'_1, \dots, m'_k , y se concibe que así sea, pues las integrales tienen valor positivo, según ya hemos visto (núms. 349 á 357).

Conocidos los momentos de flexión en los apoyos $m'_1, m'_2, \dots, m'_{n-1}, m'_n, \dots, m'_k$, lo serán también las reacciones $A_0, \dots, A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, \dots$ [ecuaciones (2) y (6)] y los momentos generales de flexión (ecuación 4).

389. Discusión de los valores de las reacciones de los apoyos y de

(*) Las integraciones $\int_0^l M(l-x) dx$ ya las hemos hecho en los núms. 349 á 357 para los casos principales de disposición de cargas, y á ellas nos referiremos.

los momentos generales de flexión.—Sumando los valores absolutos de A_n y B_n (2 y 6) encontramos para reacción total F_n del apoyo n .ºsimo,

$$F_n = (Q_n + Q'_n) + \frac{m'_{n+1} - m'_n}{l_n} + \frac{m'_n - m'_{n-1}}{l_{n-1}} \quad (11).$$

El primer término del segundo miembro es la reacción que correspondería á los apoyos si la viga en vez de ser continua estuviese cortada ó interrumpida en ellos (fig. 8.ª, lám. 12); el segundo término es la variación que experimenta por efecto de la continuidad. Resultará F_n mayor ó menor que $Q_n + Q'_n$, según los valores de m'_n, m'_{n-1} y m'_{n+1} .

Conviene fijar la atención en lo que representa Q_n y Q'_n , á fin de no cometer errores en las aplicaciones al formar los valores de A_n (2) y F_n (11). Suponiendo cortada la viga en los apoyos, Q_n representa la reacción del apoyo izquierdo en el tramo de orden n , y Q'_n la reacción del apoyo derecho en el tramo de orden $n-1$ (fig. 8.ª, lám. 12).

En cuanto á los momentos generales de flexión, su expresión general m_n se obtiene por la ecuación (4), que puede escribirse así:

$$m_n = M_n - \left(\frac{m'_n - m'_{n+1}}{l_n} x - m'_n \right) \quad (12).$$

Es decir, que de los momentos de flexión M_n correspondientes al tramo que se considera, cortado en sus extremos como si estuviera simplemente apoyado en ellos, cuyos valores se representan como sabemos (núm. 314) por las ordenadas de un polígono ó curva, hemos de restar el valor del binomio comprendido en el paréntesis, que representa las ordenadas de una recta, cuya ecuación es

$$y = \frac{m'_n - m'_{n+1}}{l_n} x - m'_n.$$

En esta recta, la ordenada en el origen $OH = -m'_n$ (fig. 9.ª, lám. 12) correspondiente al valor $x = 0$ es positiva, puesto que m'_n es negativo, y esto indica que corta al eje OY en un punto H situado por encima del origen. El coeficiente de x , ó sea la tangente angular, será positiva ó negativa según que m'_{n+1} sea mayor ó menor que m'_n , y la inclinación de la recta será diferente en los dos casos. La recta es fácil de trazar, pues

$$\begin{aligned} \text{para } x = l_n \text{ (punto } D) \dots\dots\dots y &= -m'_{n+1} = +DL \\ \text{para } x = 0 \text{ (punto } O) \dots\dots\dots y &= -m'_n = +OH \end{aligned}$$

No hay, pues, más que tomar sobre las perpendiculares á la viga en cada apoyo, magnitudes OH, DL , etc., iguales á los valores absolutos de los momentos en estos apoyos, y unir por medio de rectas los extremos O, L , etc.

Así, una vez dibujado el polígono $OabD$ de los momentos M_n de flexión correspondientes al tramo OD supuesto cortado en O y D , y trazada la recta HL , es fácil obtener el polígono definitivo $H'c'b'd'L'$ de los momentos de flexión m_n , cuyas ordenadas son la diferencia de las del polígono $OabD$ y recta HL . Los puntos c' y d' de intersección con el eje OD son las proyecciones de c y d .

Los momentos de flexión son negativos en los intervalos Oc' y $d'D$, y positivos en la parte central $c'd'$, lo cual indica que la viga al flexarse presentará su concavidad hacia la parte inferior en los trozos OC, ED (fig. 10, lám. 12), y hacia la parte superior en el CE . Las fibras superiores á la capa de fibras neutras, trabajarán por extensión en los intervalos OC y ED , y las inferiores por compresión; lo contrario ocurrirá en la parte CE .

En los puntos de inflexión C y E , distantes de los apoyos las cantidades Oc', Dd' , el momento de flexión es cero (fig. 9.^a, lám. 12). Los momentos de flexión en los apoyos, OH' y DL' , no son otra que m'_n y m'_{n+1} .

Por lo que antecede se verá que un tramo intermedio de la viga se porta de modo parecido á una pieza empotrada en sus dos extremos.

Las abscisas Oc' y Od' de los puntos de inflexión, se obtienen igualando á cero la expresión general (12) del momento de flexión m_n y deduciendo los valores de x , como hicimos para las piezas empotradas.

390. Pudiera suceder que la recta HL , por valores convenientes de $-m'_n = OH_1, -m'_{n+1} = DL_1$, estuviese situada por encima del polígono $OabD$ (recta H_1L_1 , fig. 9.^a, lám. 12), y entonces el polígono definitivo de los momentos m_n de flexión sería el $H'_1b_1L'_1$, todo él situado debajo de OD . Siendo todas las ordenadas negativas, esto quiere decir que habrá una sola curvatura en la elástica, de O á D (fig. 11, lám. 12), con concavidad hacia la parte inferior. Todas las fibras superiores á la capa neutra trabajarán por extensión en el tramo OD , y las inferiores por compresión.

En el caso de cargas uniformemente repartidas, á razón de p kilogramos por metro lineal, resulta para curva de momentos de flexión la $H'b'L'$ (fig. 12, lám. 12), que se obtiene restando de las ordenadas de la parábola $OabD$ (valores de M_n) las de la recta HL .

391. Esfuerzos cortantes. — El esfuerzo cortante en una sección cualquiera s (fig. 8.^a, lám. 12) del tramo n .^{ésimo} es $C_n = A_n - \sum_0^n P$ (13) que com-

parado con el valor (1) del momento de flexión m_n da, como ya sabíamos (deducción 5.^a del núm. 312),

$$C = \frac{dm_n}{dx}.$$

Si las cargas están uniformemente repartidas,

$$\sum_0^n P = p_n x$$

y $C_n = A_n - p_n x$, ecuación de una recta fácil de trazar, pues para

$$\begin{aligned} x = 0 \dots\dots\dots C_n &= A_n \\ x = l_n \dots\dots\dots C_n &= A_n - p_n l_n = B_{n+1} \end{aligned} \quad (14)$$

(recta RS , fig. 12, lám. 12).

De la ecuación (14) se deduce que la diferencia de las reacciones A_n y B_{n+1} correspondientes al tramo n .^{ésimo}, es igual á las fuerzas totales $p_n l_n$ que obran en dicho tramo.

En caso de fuerzas aisladas, aplicadas á los puntos medios, el esfuerzo cortante sería (fig. 13, lám. 12).

Entre O y H ,

$$C_n = A_n.$$

Entre H y D ,

$$C_n = A_n - P_n;$$

de modo que los esfuerzos cortantes vendrán representados por las ordenadas de las rectas ab y cd .

La fig. 14 (lám. 12) representa las curvas de los momentos de flexión y rectas de esfuerzos cortantes, correspondientes á n tramos cargados con pesos $p_0, p_1 \dots p_n$ kilogramos por metro lineal, y la fig. 15 se refiere al caso de fuerzas aisladas $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$, aplicadas en los puntos medios de los tramos.

392. Deformaciones. — La ecuación (11) del núm. 347 es aplicable al caso presente para cada uno de los tramos, y se obtendrá la de la elástica sin más que hacer $n = 0$ y sustituir el valor de a que hemos hallado (expresión 5 del núm. 387).

Haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$, y sustituyendo en la ecuación de la elástica el valor de x que se deduzca, se obtendrá el valor de la flecha f .

CASOS PARTICULARES

393. 1.º Pieza apoyada en tres puntos, siendo los dos tramos l_0 y l_1 de desigual longitud, y cargados los dos con p kilogramos por metro lineal (fig. 1.ª, lám. 13).

Haciendo $n = 1$ y $\rho_0 = \rho_1 = \rho$ en la ecuación (9) (núm. 387), se obtiene:

$$\frac{1}{4} p l_0^3 + \frac{1}{4} p l_1^3 + 2 m'_1 (l_0 + l_1) = 0$$

de donde se deducirá m'_1 , que es el momento de flexión en el apoyo intermedio D .

Los momentos $m'_{n-1} = m'_0$ y $m'_{n+1} = m'_2$ correspondientes á los apoyos extremos O y E son cero, como ya hemos dicho.

La expresión general del momento de flexión (sección cualquiera de abscisa x), será, aplicando la ecuación 12:

Tramo OD ,

$$n = 0, m'_n = m'_0 = 0$$

$$m_0 = M_0 + \frac{m'_1 x}{l_0}$$

No hay más que sustituir m'_1 por su valor deducido de la ecuación anterior, y poner en vez de M_0 , que es el momento general de flexión correspondiente á la pieza de longitud l_0 , apoyada en los dos extremos, su igual $\frac{1}{2} p l_0 x - \frac{1}{2} p x^2$ (núm. 323).

Tramo DE : Se obtendría de igual modo, teniendo en cuenta que $n = 1$, $m'_{n+1} = m'_2 = 0$ (apoyo E),

$$m_1 = M_1 - \frac{m'_1 (x - l_1)}{l_1}$$

Se sustituirá M_1 por su valor $\frac{1}{2} p l_1 x - \frac{1}{2} p x^2$.

Para obtener las reacciones de los apoyos, se haría aplicación de la ecuación 11 (núm. 389), y resultaría F_0 (reacción del apoyo O).

$$n = 0 \quad \left. \begin{array}{l} Q'_n = Q'_0 \\ m'_{n-1} \end{array} \right\} \text{no existen.}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} p l_0$$

$$m'_n = m'_0 = 0 \text{ (apoyo } O)$$

$$F_0 = \frac{1}{2} p l_0 + \frac{m'_1}{l_0}$$

F_1 (apoyo central D)

$$n = 1, Q_1 = \frac{1}{2} p l_1 \quad m'_{n-1} = m'_0 = 0 \text{ (apoyo } O)$$

$$Q'_1 = \frac{1}{2} p l_0 \quad m'_{n+1} = m'_2 = 0 \text{ (apoyo } E)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} p l_0 + \frac{1}{2} p l_1 - m'_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} \right)$$

F_2 (apoyo E)

$$n = 2, \left. \begin{array}{l} Q'_n = Q'_2 = \frac{1}{2} p l_1 \\ m'_n = m'_2 = 0 \dots \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} Q_n = Q_2 \\ m'_{n+1} = m'_3 \end{array} \right\} \text{no existen.}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} p l_1 + \frac{m'_1}{l_1}$$

Los esfuerzos cortantes se obtendrán por medio de la ecuación (13) (número 391), formando preliminarmente el valor de A_n dado por la fórmula (2) (núm. 387).

Tramo OD ,

$$A_n = A_0 = F_0 = \frac{1}{2} p l_0 + \frac{m'_1}{l_0} \quad \Sigma P = p x$$

$$\text{Esfuerzo cortante } C_0 = \frac{1}{2} p l_0 + \frac{m'_1}{l_0} - p x$$

Tramo $D E$,

$$Q_n = Q_1 = \frac{1}{2} p l_1 \quad \text{y} \quad A_n = \frac{1}{2} p l_1 - \frac{m'_1}{l_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} p l_1 - \frac{m'_1}{l_1} - p x.$$

394. 2.º Pieza apoyada en tres puntos, siendo los dos tramos l_0 y l_1 de desigual longitud, y cargados en sus puntos medios con fuerzas P_0 y P_1 (fig. 2.ª, lám. 13).

Determinación del momento de flexión m'_1 en el apoyo intermedio D (ecuación 10 del núm. 387).

$$n = 1, \begin{cases} m'_{n-1} = m'_0 = 0 \text{ (momento de flexión en } O) \\ m'_{n+1} = m'_2 = 0 \text{ (momento de flexión en } E) \end{cases}$$

$$\frac{6}{16} P_0 l_0^2 + \frac{6}{16} P_1 l_1^2 + 2 m'_1 (l_0 + l_1) = 0$$

$$m'_1 = - \frac{3(P_0 l_0^2 + P_1 l_1^2)}{16(l_0 + l_1)}.$$

Momento general de flexión (ecuación 12):

$$\begin{cases} \text{Tramo } O D. \begin{cases} n = 0 \text{ y } m'_n = m'_0 = 0 \text{ (apoyo } O) \\ m_0 = M_0 + \frac{m'_1}{l_0} x \\ \text{Hay que sustituir } M_0 \text{ por su valor.} \begin{cases} \text{Entre } O \text{ y } H. & M_0 = \frac{1}{2} P_0 x \\ \text{Entre } H \text{ y } D. & M_0 = -\frac{1}{2} P_0 x + \frac{1}{2} P_0 l_0. \end{cases} \end{cases} \\ \text{Tramo } D E. \begin{cases} n = 1, m'_{n+1} = m'_2 = 0 \text{ (apoyo } E) \\ m_1 = M_1 - \frac{m'_1(x-l_1)}{l_1} \\ \text{Hay que sustituir } M_1 \text{ por su valor.} \begin{cases} \text{Entre } D \text{ y } T. & M_1 = \frac{1}{2} P_1 x \\ \text{Entre } T \text{ y } E. & M_1 = -\frac{1}{2} P_1 x + \frac{1}{2} P_1 l_1. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

395. No debe olvidarse que en cada tramo se toma como origen de abscisas x el apoyo izquierdo correspondiente (núm. 386), de modo que las ex-

presiones generales de los momentos de flexión de los diversos tramos son completamente independientes.

396. Reacciones de los apoyos (aplicación de la fórmula 11):

F_0 (apoyo O)

$$n = 0 \text{ y } \left. \begin{cases} Q_0 = \frac{1}{2} P_0 \\ m'_n = m'_0 = 0 \end{cases} \right\} \text{ no existen.}$$

$$F = \frac{1}{2} P_0 + \frac{m'_1}{l_0}$$

F_1 (apoyo central D)

$$n = 1, \quad Q_1 = \frac{1}{2} P_1 \text{ y } m'_{n-1} = m'_0 = 0$$

$$Q'_1 = \frac{1}{2} P_0 \text{ y } m'_{n+1} = m'_2 = 0$$

$$F_1 = \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2} P_1 - m'_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} \right).$$

F_2 (apoyo E)

$$n = 2, \quad \left. \begin{cases} Q'_n = Q'_2 = \frac{1}{2} P_1 \\ m'_n = m'_2 = 0 \end{cases} \right\} \text{ no existen.}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{m'_1}{l_1}.$$

Esfuerzos cortantes (fórmulas 2 y 13):

$$\begin{cases} \text{Tramo } O D. \begin{cases} A_n = A_0 = F_0 = \frac{1}{2} P_0 + \frac{m'_1}{l_0} \\ \text{De } O \text{ á } H. \dots \dots C_0 = \frac{1}{2} P_0 + \frac{m'_1}{l_0} \\ \text{De } H \text{ á } D. \dots \dots C_0 = -\frac{1}{2} P_0 + \frac{m'_1}{l_0} \end{cases} \end{cases}$$

Formación de A_n :

$$n = 1, \quad Q_n = Q_1 = \frac{1}{2} P_1, \quad m'_{n+1} = m'_2 = 0, \quad m'_n = m'_1$$

Tramo DE $A_n = A_1 = \frac{1}{2} P_1 - \frac{m'_1}{l_1}$

De D á T $C_1 = \frac{1}{2} P_1 - \frac{m'_1}{l_1}$

De T á E $C_1 = -\frac{1}{2} P_1 - \frac{m'_1}{l_1}$

Más frecuentes son los casos en que no solamente las cargas p son iguales en todos los tramos, sino también las longitudes de éstos, $l_0 = l_1 = \dots l_n$. Consideraremos estos casos á continuación.

377. 3.º Pieza apoyada en tres puntos y cargada con p kilogramos por unidad lineal (fig. 3.ª, lám. 13). — Los tramos son de longitud igual.

$$p_0 = p_1 = p, \quad l_0 = l_1 = l.$$

La ecuación (9) de los tres momentos da:

$$\frac{1}{4} p l^3 + \frac{1}{4} p l^3 + 2m'_1 \cdot 2l = 0$$

de donde se obtiene el momento de flexión en el apoyo central

$$m'_1 = -\frac{1}{8} p l^2$$

que es el mismo valor que tendría el momento de empotramiento de una pieza ca apoyada en c y empotrada en a . Luego en el caso que estamos considerando, el apoyo central hace las veces de un empotramiento.

Si llamamos L á la longitud total cd , será $L = 2l$, y entonces

$$m'_1 = -\frac{1}{32} p L^2 \quad (15).$$

El momento general de flexión es (aplicando la fórmula 12 del número 389):

Tramo ac $m_0 = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 + m'_1 \frac{x}{l} \quad (16)$

$$m_0 = \frac{3}{8} p l x + \frac{1}{2} p x^2$$

Tramo ad $m_1 = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 + m'_1 \frac{l-x}{l} \quad (17)$

$$m_1 = \frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2$$

Como el origen de abscisas es c para la ecuación (16) y a para la ecuación (17) (núm. 395), se deduce que los valores de m_0 y m_1 son iguales para puntos de la viga colocados simétricamente con respecto al apoyo central a . En efecto; si tomamos a como origen para el tramo ca , habrá que sustituir x por $l-x$ en la ecuación (16), y entonces se convierte en la (17).

El momento máximo de flexión corresponde al apoyo central a , y vale, según hemos visto,

$$m'_1 = -\frac{1}{8} p l^2 = -\frac{1}{32} p L^2 = -\frac{1}{32} P L,$$

Llamando P á la carga total pL .

Los dos puntos de inflexión e y h se obtendrán igualando á cero las ecuaciones (16) y (17) y deduciendo el valor de x .

Para el tramo ca , por ejemplo, será

$$\frac{3}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 = 0.$$

de donde $x = ce = \frac{3}{4} l$; es decir, que $ae = \frac{1}{4} l$.

Para el tramo ad se tiene

$$\frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2 = 0$$

que nos da dos valores

$$x = \frac{l(5 \pm \sqrt{9})}{8} \begin{cases} x' = l \\ x'' = ah = \frac{1}{4} l \end{cases}$$

Lo mismo que en el núm. 377.

Claro es que el valor de x aceptable es $x'' = \frac{1}{4} l$. Los dos puntos de flexión e y h equidistan de a .

Los esfuerzos cortantes son:

$$\text{Tramo } ca \dots\dots\dots C_0 = \frac{3}{8} p l - p x$$

$$\text{Tramo } ad \dots\dots\dots C_1 = \frac{5}{8} p l - p x$$

Aplicando la fórmula (11) del núm. 389 se obtienen las reacciones siguientes:

$$R_0 = R_2 (\text{apoyos } c \text{ y } d) = \frac{3}{8} p l$$

$$R_1 (\text{apoyo } a) = \frac{10}{8} p l$$

La reacción R_1 se puede descomponer en dos sumandos, iguales cada uno a $\frac{5}{8}$; y vemos que, tanto en estos valores como en los de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes, cada uno de los tramos ca y ad se porta como si estuviese empotrado en a (caso del núm. 377).

398. 4.º Pieza apoyada en tres puntos y cargada en el medio de cada tramo con una fuerza aislada P (fig. 4.ª, lám. 13). — Tramos de igual longitud.

No hay más que hacer $P_0 = P_1$ y $l_0 = l_1$ en los resultados obtenidos en el problema segundo (núm. 394).

Momento de flexión en el apoyo central a :

$$m'_1 = -\frac{3}{16} P l$$

Momentos generales de flexión:

Tramo ad (el ac es simétrico del ad).

De a á r ,

$$m_1 = \frac{1}{2} P x + \frac{3}{16} P x - \frac{3}{16} P l$$

ó

$$m_1 = \frac{11}{16} P x - \frac{3}{16} P l$$

De r á d ,

$$m_1 = -\frac{1}{2} P x + \frac{1}{2} P l + \frac{3}{16} P l \left(\frac{x-l}{l} \right)$$

ó

$$m_1 = -\frac{5}{16} P (l-x)$$

Los valores de m_1 , son los mismos ya encontrados en el núm. 353 correspondientes al caso de pieza empotrada en un extremo (a) y apoyada en el otro (d), de modo que el apoyo intermedio a hace las veces de empotramiento para los tramos ac , ad .

Los valores de m_1 (binomio de primer grado en x) pueden estar representados por las ordenadas de las dos rectas inclinadas que parten de t . El valor de m_1 para $x=0$ (punto a) es $m'_1 = -\frac{3}{16} P l$; este es el valor máximo del momento de flexión. La elástica tiene la curvatura que representa la figura, con un punto h de inflexión cuya abscisa $x = ah = \frac{3}{11} l$ se obtiene igualando á cero m_1 ;

$$m_1 = \frac{11}{16} P x - \frac{3}{16} P l = 0$$

Los esfuerzos cortantes se determinarán por la fórmula general (13), ó por las del núm. 396, haciendo $m'_1 = -\frac{3}{16} Pl$ y $P_1 = P$, $l_1 = l$; se obtiene para el tramo primero (fig. 4.^a lám. 13):

$$\begin{aligned} \text{De } c \text{ á } s \dots\dots\dots C_0 &= cz = +\frac{5}{16} P \\ \text{» } s \text{ á } a \dots\dots\dots C_0 &= sk = -\frac{11}{16} P \end{aligned}$$

Y en el tramo ad ,

$$\begin{aligned} \text{De } a \text{ á } r \dots\dots\dots C_1 &= af = +\frac{11}{16} P \\ \text{» } r \text{ á } d \dots\dots\dots C_1 &= ru = -\frac{5}{16} P. \end{aligned}$$

Las reacciones de los apoyos son:

$$\begin{aligned} F_0 = F_2 &= \frac{5}{16} P \text{ (apoyos } c \text{ y } d) \\ F_1 &= \frac{22}{16} P \text{ (apoyo } a). \end{aligned}$$

En todos los problemas que á continuación presentamos, supondremos también que los tramos son de igual longitud ($l_0 = l_1 \dots = l_k$) y que las cargas p ó P son iguales. Atenderemos especialmente á los valores de las reacciones y de los momentos de flexión en los apoyos (que son los máximos), como cantidades más interesantes para los cálculos, pudiéndose determinar tanto éstas como las restantes con toda facilidad por medio de las fórmulas generales de los números anteriores.

399. 5.º Pieza apoyada en cuatro puntos. Cargas repartidas.

l = longitud de un tramo.
 $L = 3l$ = longitud total de la pieza.
 p = carga por unidad lineal.
 $pL = P$ = carga total.

Ecuaciones de los tres momentos.

$$\begin{aligned} +\frac{1}{2} p l^3 + 4 m'_1 l + m'_2 l &= 0 \text{ (apoyos 0,1 y 2)} \\ +\frac{1}{2} p l^3 + m'_1 l + 4 m'_2 l &= 0 \text{ (apoyos 1,2 y 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momentos de flexión} \left\{ \begin{aligned} m'_0 = m'_3 &= 0 \\ \text{en los apoyos } \dots \left\{ \begin{aligned} m'_1 = m'_2 &= -\frac{1}{10} p l^2 = -\frac{1}{90} p L^2 = -\frac{1}{90} P l. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Reacciones } \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} F_0 = F_3 &= \frac{4}{10} p l = \frac{4}{30} p L = \frac{4}{30} P \\ F_1 = F_2 &= \frac{11}{10} p l = \frac{11}{30} p L = \frac{11}{30} P. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

400. 6.º Pieza apoyada en cuatro puntos, cargada en el punto medio de cada tramo con un peso aislado P .

$$\begin{aligned} \text{Momentos de flexión} \left\{ \begin{aligned} m'_0 = m'_3 &= 0 \\ \text{en los apoyos } \dots \left\{ \begin{aligned} m'_1 = m'_2 &= -\frac{3}{20} P l = -\frac{3}{60} P L. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Reacciones } \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} F_0 = F_3 &= \frac{7}{20} P \\ F_1 = F_2 &= \frac{23}{20} P. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

401. 7.º Pieza apoyada en cinco puntos. Cargas uniformemente repartidas; p kilogramos por metro lineal.

$$\begin{aligned} \text{Momentos de flexión} \left\{ \begin{aligned} m'_0 = m'_4 &= 0. \\ \text{en los apoyos } \dots \left\{ \begin{aligned} m'_1 = m'_3 &= -\frac{3 p l^2}{28} = -\frac{3 p L^2}{448} = -\frac{3}{448} P L. \\ m'_2 &= -\frac{2 p l^2}{28} = -\frac{2 p L^2}{448} = -\frac{2}{448} P L. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Reacciones.....} \left\{ \begin{array}{l} F_0 = F_4 = \frac{11}{28} p l = \frac{11}{112} P. \\ F_1 = F_3 = \frac{32}{28} p l = \frac{32}{112} P. \\ F_2 = \frac{26}{28} p l = \frac{26}{112} P. \end{array} \right.$$

402. 8.º Pieza apoyada en seis puntos. Carga uniformemente repartida; p kilogramos por metro lineal.

$$\text{Momentos de flexión en los apoyos.....} \left\{ \begin{array}{l} m'_0 = m'_5 = 0 \\ m'_1 = m'_4 = -\frac{4 p l^2}{38} = -\frac{4 p L^2}{950} = -\frac{4}{950} P L. \\ m'_2 = -\frac{3 p l^2}{38} = -\frac{3 p L^2}{950} = -\frac{3}{950} P L. \end{array} \right.$$

$$\text{Reacciones.....} \left\{ \begin{array}{l} F_0 = F_5 = \frac{15}{38} p l = \frac{15}{190} P \\ F_1 = F_4 = \frac{43}{38} p l = \frac{43}{190} P \\ F_2 = F_3 = \frac{37}{38} = \frac{73}{190} P. \end{array} \right.$$

403. 9.º Pieza apoyada en siete puntos.

$$\text{Momentos de flexión en los apoyos.....} \left\{ \begin{array}{l} m'_0 = m'_6 = 0 \\ m'_1 = m'_5 = -\frac{11 p l^2}{104} = -\frac{11 p L^2}{3744} = -\frac{11}{3744} P L \\ m'_2 = m'_4 = -\frac{8 p l^2}{104} = -\frac{8 p L^2}{3744} = -\frac{8}{3744} P L \\ m'_3 = -\frac{9 p l^2}{104} = -\frac{9 p L^2}{3744} = -\frac{9}{3744} P L \end{array} \right.$$

$$\text{Reacciones.....} \left\{ \begin{array}{l} F_0 = F_6 = \frac{41}{104} p l = \frac{41}{624} P \\ F_1 = F_5 = \frac{118}{104} p l = \frac{118}{624} P \\ F_2 = F_4 = \frac{100}{104} p l = \frac{100}{624} P \\ F_3 = \frac{106}{104} p l = \frac{106}{624} P. \end{array} \right.$$

RESUMEN

404. Á continuación damos una tabla que contiene, en resumen, los momentos de flexión, esfuerzos cortantes, reacciones de los apoyos, etc., concernientes á los principales casos de flexión.

CASO DE FLEXIÓN (I)	REACCIONES de los apoyos. (II)	MOMENTO DE FLEXIÓN		ESFUERZO CORTANTE			ELÁSTICA			
		MOMENTO GENERAL M (III)	MOMENTO máximo. M ₀ (IV)	SECCIÓN de la viga que responde (V)	EXPRESIÓN GENERAL d (VI)	VALOR máximo. C ₀ (VII)	SECCIONES de la viga á que co- rresponde. (VIII)	ECUACIÓN GENERAL y = f(x) (IX)	FLECHA f (X)	SECCIÓN de la viga á que corresponde. (XI)
PIEZAS DE LONGITUD l APOYADAS EN SUS DOS EXTREMOS.										
1. Fuerza P distante d del apoyo O (figura 1. ^a , lám. 6. ^a) (núm. 317)	H... $\frac{d}{l} P$ O... $\frac{l-d}{l} P$	Entre O y A, $\frac{l-d}{l} P x$ Entre A y H, $\frac{P d}{l} (l-x)$	$\frac{P d (l-d)}{l}$	A	Entre O y A, $\frac{l-d}{l} P$ Entre A y H, $-\frac{P d}{l}$	$\frac{P (l-d)}{l}$	De O á A			
2. Fuerza P en el punto medio (fig. 1. ^a lám. 7. ^a) (núms. 317 y 349)	$\frac{1}{2} P$	Entre O y A', $\frac{1}{2} P x$ Entre A' y H, $\frac{1}{2} P (l-x)$	$\frac{1}{4} P l$	Med	$\pm \frac{1}{2} P$	$\pm \frac{1}{2} P$	De O á	Entre O y A' $y = \frac{P l^3}{16 E I} \left(\frac{4 x^5}{3 l^5} - \frac{x}{l} \right)$	$-\frac{1}{48} \frac{P l^3}{E I}$	Media.
3. Carga repartida uniformemente: p por unidad lineal (fig. 7. ^a , lám. 6. ^a) (núms. 323 y 351)	$\frac{1}{2} p l$	$\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$	$\frac{1}{8} p l^2$	Med	$\frac{1}{2} p l - p x$	$\pm \frac{1}{2} p l$	O y H	$y = -\frac{p l^4}{24 E I} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2 x^5}{l^5} + \frac{x}{l} \right)$	$-\frac{5}{384} \frac{p l^4}{E I}$	Media. D.
4. Carga p por unidad lineal en la mitad de la viga (fig. 8. ^a , lám. 6. ^a) (números 324 y 352)	O... $\frac{1}{8} p l$ H... $\frac{3}{8} p l$	Entre O y A, $\frac{1}{8} p l x$ Entre A y H, $\frac{5}{8} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{8} p l^2$	$\frac{9}{128} p l^2$	O B =	Entre O y A, $\frac{1}{8} p l$ Entre O y H, $\frac{1}{8} p l - p x$	$-\frac{3}{8} p l$	H	Entre O y A, $y = \frac{p l^4}{48 E I} \left(\frac{x^5}{l^5} - \frac{7}{8} \frac{x}{l} \right)$	"	"
5. Carga total P' repartida de modo variable (fig. 14, lám. 6. ^a), pero ocupando toda la longitud l de la viga (núms. 335 y 353)	O... $\frac{2}{3} P'$ H... $\frac{1}{3} P'$	$\frac{2}{3} P' x - \frac{P' (3l-x)}{3 l^2} x^2$	$0,128 P' l$	Sección de abscisa x = 6,4	$\frac{P' (l-x)}{l^2} x + \frac{2 P'}{3}$	$\frac{2 P'}{3}$	O	$y = \frac{-P' l^5}{E I} \left(\frac{2 x}{45 l} - \frac{x^5}{9 l^5} + \frac{x^4}{12 l^4} - \frac{x^5}{60 l^5} \right)$	"	"
6. Caso de la fig. 15, lám. 6. ^a (números 336 y 354)	$\frac{1}{2} P'$	Entre O y B, $\frac{1}{2} P' x - \frac{2 x^2}{3 l^2}$ Entre B y H, $\frac{P' l}{6} - P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2 x^2}{3 l^2} \right)$	$0,083 P' l$	Sección de abscisa x = 2 (Punto)	Entre O y B, $\frac{1}{2} P' - \frac{2 x}{l^2}$ Entre B y H, $\frac{1}{2} P' - \frac{2 x}{l^2}$	$\pm \frac{1}{2} P'$	O y H	$y = \frac{-P' l^5}{12 E I} \left(\frac{2 x^5}{5 l^5} - \frac{x^4}{l^4} + \frac{x^5}{l^5} - \frac{3 x}{8 l} \right)$	$-\frac{3}{80} \frac{P' l^5}{E I}$	Media. B.
7. Caso de la fig. 16, lám. 6. ^a (números 337 y 355)	$\frac{1}{2} P'$	Entre O y B, $P' x \left(\frac{1}{2} - \frac{2 x^2}{3 l^2} \right)$ Entre B y H, $-\frac{P' l}{6} + P' x \left(\frac{3}{2} - \frac{2 x}{l} + \frac{2 x^2}{3 l^2} \right)$	$0,166 P' l$		Entre O y B, $\frac{1}{2} P' - \frac{2 x^2}{l^2}$ Entre B y H, $\frac{1}{2} P' - \frac{2 x^2}{l^2}$	$\pm \frac{1}{2} P'$	O y H	$y = \frac{-P' l^5}{12 E I} \left(\frac{-2 x^5}{5 l^5} + \frac{x^5}{l^5} - \frac{5 x}{8 l} \right)$	$-\frac{1}{60} \frac{P' l^5}{E I}$	Media. B.

CASO DE FLEXIÓN (I)	REACCIONES de los apoyos. (II)	MOMENTO DE FLEXIÓN		ESFUERZO CORTANTE			ELÁSTICA		
		MOMENTO GENERAL M (III)	MOMENTO máximo. M_0 (IV)	FLEXIÓN GENERAL C (VI)	VALOR máximo. C_0 (VII)	SECCIONES de la viga á que co- rresponde. (VIII)	ECUACIÓN GENERAL $y = f(x)$ (IX)	FLECHA f (X)	SECCIÓN de la viga á que corresponde (XI)
PIEZAS EMPOTRADAS									
8. Pieza empotrada en un extremo, de longitud l , y cargada en el otro con un peso P (fig. 10, lám. 7ª) (números 365 y 366)	$O \dots P + \frac{Pl}{b}$	$-P(l-x)$	$-Pl$	$-P$	$-P$	De O & H	$y = -\frac{Pl^5}{2EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^5}{3l^5} \right)$	$-\frac{1}{3} \frac{Pl^5}{EI}$	H
9. Pieza empotrada en un extremo y cargada en toda su longitud l con p kilogramos por unidad lineal (fig. 11, lám. 7ª) (núms. 367 y 368)	$O \dots pl + \frac{pl^2}{b}$	$-\frac{1}{2} p(l-x)^2$	$-\frac{1}{2} pl^2$	$-p(l-x)$	$-pl$	O	$y = -\frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$	$-\frac{1}{8} \frac{pl^4}{EI}$	H
10. Pieza empotrada en sus dos extremos y cargada con un peso P en su punto medio (fig. 12, lám. 7ª) (núm. 369) ..	$\frac{1}{2} P$	Entre O y A , $\frac{1}{2} Px - \frac{1}{8} Pl$ Entre A y H , $\frac{1}{2} P(l-x) - \frac{1}{8} Pl$	$-\frac{1}{8} Pl$	$\pm \frac{1}{2} P$	$\pm \frac{1}{2} P$	De O & H	Entre O y A , $y = \frac{Pl^5}{16EI} \left(\frac{4}{3} \frac{x^5}{l^3} - \frac{x^2}{l^2} \right)$	$-\frac{1}{192} \frac{Pl^5}{EI}$	Media. A
11. Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada con un peso P en el punto medio (fig. 14, lámina 7ª) (núm. 373) ..	$O \dots \frac{11}{16} P$ $H \dots \frac{5}{16} P$	Entre O y A , $\frac{11}{16} Px - \frac{3}{16} Pl$ Entre A y H , $\frac{5}{16} P(l-x)$	$-\frac{3}{16} Pl$	Entre O y A , $+\frac{11}{16} P$ Entre A y H , $-\frac{5}{16} P$	$+\frac{11}{16} P$	De O & A	Entre O y A , $y = \frac{Pl^5}{96EI} \left(\frac{11x^5}{l^3} - \frac{9x^2}{l^2} \right)$	$-\frac{1}{107} \frac{Pl^5}{EI}$	Sección de abscisa $x = 0,563 l$
12. Pieza empotrada en los dos extremos y cargada con p kilogramos por unidad de longitud l (fig. 15, lám. 7ª) (núms. 374 y 376)	$\frac{1}{2} pl$	$\frac{1}{2} plx - \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{12} pl^2$	$-\frac{1}{12} pl^2$	$\frac{1}{2} pl - px$	$\pm \frac{1}{2} pl$	O y H	$y = -\frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2} \right)$	$-\frac{1}{984} \frac{pl^4}{EI}$	Media. A
13. Pieza empotrada en un extremo y apoyada en el otro, cargada con p kilogramos por unidad de longitud (fig. 16, lám. 7ª) (núms. 377 y 381) ..	$O \dots \frac{5}{8} pl$ $H \dots \frac{3}{8} pl$	$\frac{5}{8} plx - \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{8} pl^2$	$-\frac{1}{8} pl^2$	$\frac{5}{8} pl - px$	$+\frac{5}{8} pl$	O	$y = -\frac{pl^4}{48EI} \left(\frac{2x^4}{l^4} - \frac{5x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right)$	$-\frac{1}{185} \frac{pl^4}{EI}$	Sección de abscisa $x = 0,578 l$
14. Pieza apoyada en tres puntos y cargada uniformemente con p kilogramos por metro lineal	$c \frac{3}{8} pl$ $d \frac{3}{8} pl$	Tramo ac , $\frac{3}{8} plx - \frac{1}{2} px^2$	$-\frac{1}{8} pl^2$	Tramo ca , $\frac{3}{8} pl - px$	$\pm \frac{5}{8} pl$	a	"	"	"
$l =$ longitud de cada tramo	$a \dots \frac{10}{8} pl$	Tramo ad , $\frac{5}{8} plx - \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{8} pl^2$		Tramo ad , $\frac{5}{8} pl - px$			"	"	"
$L =$ longitud total (fig. 3ª, lám. 13) (núm. 397)									
15. Pieza apoyada en tres puntos y cargada con un peso P en el punto medio de cada uno de los dos tramos de igual longitud en que se divide (figura 4ª, lám. 13) (núm. 398)	$c \frac{5}{16} P$ $d \frac{5}{16} P$ $a \dots \frac{2l}{16} P$	Entre a y r , $\frac{11}{16} Px - \frac{3}{16} Pl$ Entre r y d , $\frac{5}{16} P(l-x)$	$-\frac{3}{16} Pl$	Tramos ca , $+\frac{5}{16} P$ $ca \dots -\frac{11}{16} P$ Tramos ad , $+\frac{11}{16} P$ $ad \dots -\frac{5}{16} P$	$\pm \frac{11}{16} P$	a	"	"	x

405. Observación relativa á los momentos de flexión y á las flechas.
 Si se examinan los valores de los momentos de flexión, obtenidos en todos los casos que hemos considerado hasta aquí relativos á piezas apoyadas y empotradas, y en todos los demás que hemos de estudiar más adelante, se encuentra que el momento general de flexión M , esto es, la expresión del momento de flexión para una sección cualquiera de abscisa x , es una función de las cargas aisladas P , ó repartidas p por unidad de longitud l de la pieza contada entre los apoyos ó empotramientos, y de la variable x , de modo que puede establecerse

$$M = f(P, l, x) \quad (1)$$

como ya anunciamos en el núm. 308. Cuando se quiera obtener el valor particular del momento de flexión correspondiente á una cierta sección definida por su abscisa $x = d$, no habrá más que sustituir este valor de x en el de M .

Comparando también los valores M_0 de los momentos máximos de flexión en todos los casos, se deduce que todos ellos pueden ponerse bajo la forma

$$M_0 = \frac{1}{n} P l \quad (2)$$

siendo P la carga total, ya aislada, ya repartida, en cuyo último caso P sustituye á $p l$. El coeficiente fraccionario $\frac{1}{n}$ depende del caso de flexión, es decir, la disposición de los apoyos ó empotramientos y de la situación de las cargas.

Para los casos más frecuentes en la práctica, es fácil recordar el valor de n . En efecto, resumiendo los resultados de la tabla anterior, hallamos, llamando P á la carga total, ya sea aislada ó esté repartida:

CASO DE FLEXIÓN	M_0	n
1. Pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro con P	$P l$	1
2. Pieza empotrada en un extremo y cargada uniformemente con p por unidad de longitud l	$\frac{1}{2} p l^2 = \frac{1}{2} P l$	2

CASO DE FLEXIÓN	M_0	n
3. Pieza apoyada en los dos extremos y cargada en el punto medio con P	$\frac{1}{4} P l$	4
4. Pieza apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente con p por unidad de longitud l	$\frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} P l$	8
4. Pieza empotrada en sus dos extremos y cargada en el punto medio con P		
4. Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada con p por unidad de longitud l		
5. Pieza empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente con p por unidad de longitud l	$\frac{1}{12} p l^2 = \frac{1}{12} P l$	12
6. Pieza apoyada en tres puntos y cargada uniformemente con p por unidad de longitud total l	$\frac{1}{32} p l^2 = \frac{1}{32} P l$	32

A excepción del caso 5, todos los demás valores de n forman una progresión aritmética cuya razón es 2.

En cuanto á los valores de las flechas f correspondientes á los diversos casos de flexión, observaremos que todos ellos pueden comprenderse en una de estas fórmulas:

$$f = k \frac{P l^3}{E I} \quad (3) \text{ para las piezas cargadas con fuerzas aisladas.}$$

$$f = k \frac{p l^4}{E I} \text{ para el caso de cargas repartidas, siendo } k \text{ un factor fraccionario dependiente del caso de flexión.}$$

En realidad, las dos fórmulas anteriores se reducen á la (3), puesto que en la segunda se puede sustituir el producto $p l$, de la carga p correspondiente á la unidad lineal y la longitud l , por su equivalente P , carga total.

Como era de suponer, á igualdad de cargas, longitudes y caso de flexión, la flecha es tanto mayor cuanto menor es E , coeficiente de elasticidad, es decir, cuanto menos rígida sea la materia.

A igual valor de E , esto es, para una misma clase de material, los valores de f son proporcionales á las primeras potencias de P y á los cubos de l , de donde se deduce la influencia que ejerce en la rigidez la longitud de la viga.

4. DETERMINACIÓN,

POR EL CÁLCULO GRÁFICO, DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN M ,
Y DE LOS ESFUERZOS CORTANTES C .

PIEZAS APOYADAS.—CARGAS AISLADAS Y REPARTIDAS

406. El procedimiento analítico para la determinación de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes es, á veces, algo complicado y laborioso, aunque nunca difícil. El problema es sencillísimo y de solución rápida y expedita cuando se hace uso de los métodos de la estática gráfica.

Recordaremos los principios fundamentales de los procedimientos gráficos que vamos á emplear.

407. Fuerzas concurrentes.—Cuando varias fuerzas **1, 2, 3, 4** y **5**, concurren en un punto (fig. 7.^a, lám. 8.^a), el polígono de las fuerzas da á conocer la resultante en magnitud y en dirección; esto es, en cantidad y en cualidad. La resultante puede ser cero, ó lo que es lo mismo, las fuerzas pueden estar en equilibrio.

Fórmase el polígono trazando, á partir de un punto cualquiera A , Aa igual y paralela á la fuerza **1**; ab igual y paralela á la fuerza **2**; bc , cd y de iguales y paralelas á las **3, 4** y **5**. Si existiese la fuerza eA , en la dirección e, A , el polígono quedaría cerrado y habría equilibrio; luego la Ae , en la dirección Ae , es la resultante del sistema.

En todos los casos, recorriendo el polígono á partir del origen en el sentido cíclico que señalan las fuerzas conocidas, se obtendrá la dirección ó sentido cíclico de las desconocidas.

Si n fuerzas concurrentes han de estar en equilibrio, el trazado del polígono correspondiente, que ha de ser cerrado, permite resolver uno de los tres problemas siguientes:

1.º *Se conocen las direcciones de las n fuerzas y la magnitud de $n - 2$, y se desea conocer la de las dos fuerzas restantes* (fig. 7.^a, lám. 8.^a).

Se forma el polígono en la parte $abcd$ correspondiente á las $n - 2$ fuerzas totalmente conocidas. Por el penúltimo vértice d y por el origen A se trazan paralelas de y Ae á las direcciones de las dos fuerzas incógnitas en magnitud; las longitudes de , Ae , representan los valores de estas fuerzas.

Permutando las direcciones, obtenemos otra solución en $Ae'd$, idéntica á la anterior, porque $Aede'$ es un paralelogramo.

2.º *Se conocen las magnitudes de las n fuerzas y las direcciones de $n - 2$ y se quiere determinar la dirección de las dos fuerzas últimas.*

Desde los puntos d y A y con radios iguales á las magnitudes de las dos últimas fuerzas, se trazan los arcos $e'he$, $e'se$, que se cortan en los puntos e y e' . Las direcciones buscadas son de y eA ó de' , $e'A$.

3.º *Se conocen la dirección de una de las dos fuerzas incógnitas y la magnitud de la otra y se trata de determinar la magnitud y dirección desconocidas* (fig. 7.^a, lám. 8.^a).

Se trata de'' paralela á la dirección conocida, y haciendo centro en el origen A , con radio igual á la magnitud de la n .ésima fuerza, se describe el arco $e''e$. Preséntanse dos soluciones: la deA y la $de''A$.

408. Fuerzas no concurrentes situadas en un plano.—A este caso, que es el más general, porque n fuerzas pueden cortarse en $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos, no son aplicables los métodos anteriores.

Supongamos sustituido el cuerpo sobre el cual actúan las fuerzas (fig. 8.^a, lám. 8.^a) por un sistema de varillas que forman un polígono $mnpqrs$, cuyos vértices estén situados en puntos de las líneas de acción de las fuerzas dadas **1, 2, 3, 4, 5** y **6**. Estas varillas son susceptibles (supongámoslo así) de resistir á los esfuerzos de extensión y compresión que obran según sus ejes (y á que llamaremos fuerzas interiores) y tienen direcciones y posiciones tales, que cada una de las fuerzas parciales **1, 2**, etc., está en equilibrio con las fuerzas interiores desarrolladas en las dos barras contiguas.

El polígono $mnpqrs$ así formado, es el llamado *polígono funicular* ó *polígono articulado*. Los vértices son las *articulaciones* ó *nudos*.

El equilibrio del sistema exige:

1.º Que haya equilibrio entre las fuerzas exteriores **1, 2..... 6**.

2.º Que se equilibren en cada articulación las tres fuerzas concurrentes.

Para que se satisfaga la primera condición, es preciso que, componiendo las fuerzas **1** y **2**, su resultante con la **3**, la resultante con la **4**, y así sucesi-

vamente, obtengamos una resultante final igual á cero, ó en otros términos, que el polígono de las fuerzas $A a b c d e$, formado á partir de un punto cualquiera A , sea cerrado.

Veamos el modo de que la segunda condición sea satisfecha. Escojamos un vértice cualquiera, el n , por ejemplo. Si las fuerzas 2 , $n m$ y $n p$ que en este vértice concurren han de estar en equilibrio, es preciso que formando el triángulo $O a b$ de las fuerzas, sea éste cerrado. $O a$ y $b O$, representarán la magnitud y sentido de las fuerzas $n m$ y $n p$.

Pasando á la articulación ó nudo p , observemos que las fuerzas $n p$ y 3 , están representadas por $c b$ y $b O$; luego $O c$ debe ser igual y paralela á la fuerza $p q$.

Resumiendo: si se une O con los vértices c, d, e , etc., los radios polares $O c, O d$, etc., han de ser paralelos á los lados del polígono funicular, é iguales en magnitud á las fuerzas interiores.

Si del polígono funicular conocemos tan sólo las direcciones de dos lados contiguos, $m n$ y $n p$, por ejemplo, estas serán suficientes para la formación del triángulo $O a b$ de las fuerzas, correspondiente al nudo n , y para la determinación del polo O que, unido á los vértices restantes del polígono $A b c d e$ de las fuerzas, darán los radios polares, y por tanto las direcciones de los lados del polígono funicular, y las magnitudes de las fuerzas interiores. Se trazaría, pues, $p q, q r, r s$ y $s m$, paralelas $O c, O d, O e, O a$, debiendo como comprobación resultar cerrado el polígono funicular, es decir, que $s m$ debe cortar en m á la fuerza 1 .

Según que el primer triángulo $O a b$ se forme de uno ó de otro lado de la fuerza $a b$, así resultará uno ú otro polo, dando cada uno de ellos lugar á un polígono funicular distinto.

Si no se da la dirección de ninguno de los lados del polígono funicular, puede tomarse como polo un punto cualquiera, y habrá entonces infinito número de polígonos funiculares. Este es el caso más general.

409. Modo de determinar la resultante del sistema. — Cuando las fuerzas están en equilibrio, una cualquiera, la 6 , por ejemplo, es igual y contraria á la resultante de las otras. Si, pues, la incógnita es dicha resultante, ó sea la fuerza 6 en sentido contrario, el polígono de las fuerzas y el funicular permiten resolver con facilidad el problema como vamos á ver.

Formando el polígono de las fuerzas con las cinco conocidas, $A a b c d e$, y uniendo e con el origen A , será $A e$ la magnitud y sentido de la resultante.

Para encontrar un punto de paso de dicha resultante, tómesese un polo O arbitrario, y trácense los radios polares $O A, O a$, etc. Trácense también $s m$

paralela al segundo radio polar que va al origen A ; por el punto de encuentro m con la fuerza 1 , dibújese $m n$ paralela al segundo radio polar $O a$, hasta que corte á la fuerza 2 , y así sucesivamente $n p, p q, q r$ y $r s$. La intersección s de los lados $m s$ y $r s$, primero y último del polígono funicular, es un punto de la fuerza 6 , y por lo tanto, de la resultante de las cinco fuerzas dadas; el sentido de la resultante R (línea de puntos), sería el opuesto á 6 .

410. Cuanto queda dicho es aplicable al caso en que las fuerzas son paralelas.

Sean las fuerzas $1, 2, 3$ y 4 (fig. 9.^a, lám. 8.^a) cuya resultante se busca.

En $A a b c d$ están sumadas las fuerzas; la resultante será $A d$.

Tomando O como polo y dibujando los radios polares $O A, O a, O b, O c, O d$, trácese $M m$ paralela al radio 1 ($O A$) hasta que corte á la fuerza 1 , por el punto m de intersección, la recta $m n$ paralela al radio polar segundo ($O a$) hasta su encuentro en n con la fuerza 2 ; y, sucesivamente, $n p, p r$, y $r S$ paralelas respectivamente á $O b, O c$ y $O d$. Prolongando la primera y última rectas, $M m$ y $S r$, su punto de intersección S será un punto de la resultante R , cuya magnitud $A d$ es dada por el polígono $A a b c d$ de las fuerzas.

411. Determinación gráfica del centro de gravedad de figuras planas. El procedimiento del número anterior, tiene aplicación á la determinación gráfica del centro de gravedad de una superficie plana.

Primer caso. — La superficie (fig. 10, lám. 8.^a), tiene un eje de simetría XX . En él estará el centro de gravedad.

Descompóngase la figura en tres rectángulos cuyas áreas se considerarán como fuerzas paralelas que pasan por los centros de gravedad de aquéllos, y háganse las construcciones necesarias para la determinación de la posición de la resultante. El punto r de encuentro con el eje XX , será el centro de gravedad buscado.

Otro ejemplo presentamos en la fig. 11 (lám. 8.^a), que no detallamos por considerarlo innecesario.

412. Segundo caso. — Si la superficie no tiene eje alguno de simetría, repítase el trazado en otra dirección (véase fig. 12, lám. 8.^a), y así obtendremos dos resultantes R y R' cuya intersección r dará el centro de gravedad que se pide.

413. Determinación de la magnitud y sentido de dos fuerzas incógnitas en un sistema de n fuerzas paralelas en equilibrio. — Cuando se conoce la

posición de n fuerzas paralelas que han de estar en equilibrio, y la magnitud y sentido de $n - 2$, puede determinarse fácilmente la magnitud y sentido de las dos fuerzas restantes.

En efecto (fig. 13, lám 8.^a), si sumamos las fuerzas conocidas ($Aa = 1$, $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$,) ha de ser igual esta suma á la de las dos incógnitas **5** y **6**, si ha de cerrar el polígono, como es necesario para que el equilibrio exista. Falta conocer el punto e de separación de las fuerzas **5** y **6**, que ha de dar á conocer sus magnitudes.

Tómese al efecto un polo arbitrario O y dibújense los radios polares 1 á 5. El radio polar $6 = Oe$, nos es desconocido: él es el que ha de determinar el punto e .

Trácese Sm paralela al radio polar 1, prolongándola hasta que encuentre en m á la fuerza 1; mn , np , pq y qr paralelas á los radios 2, 3, 4 y 5.

Como el polígono funicular, de que tenemos ya trazada la parte $Smnpqr$, ha de ser cerrado por estar las fuerzas en equilibrio, únense los puntos r y S de intersección del primero y penúltimo lados con las fuerzas desconocidas **5** y 6 , y obtendremos el último lado. El radio polar 6 debe ser paralelo á este último lado del polígono funicular; luego trazando Oe paralela á rS , las fuerzas incógnitas **5** y **6** estarán representadas, respectivamente, por la recta de y la comprendida entre e y el extremo superior, origen del polígono de las fuerzas.

414. Pares. — Dos pares **1, 3, 2, 4** (fig. 14, lám. 8.^a) harán girar la figura alrededor de uno de sus puntos con un momento estático igual á la suma algebraica de momentos de aquéllos, y, sin embargo, si se construye el polígono de las fuerzas $Aabc$ resulta cerrado.

Para establecer el equilibrio es preciso introducir un par **5, 6**, cuyo momento sea igual y de signo contrario á la suma de momentos de los pares dados.

Conocida la posición del par **5, 6**, se puede determinar el valor de las fuerzas. Trazando por el origen A la recta AH paralela á las **5** y **6**, el polígono será ahora $AabcAHA$; falta determinar el punto H , es decir, la magnitud AH de las fuerzas **5** y **6**.

Para ello se emplea el procedimiento del número anterior. Elegido el polo O y dibujados los radios polares, fórmese el polígono funicular $smnpqr$, únase s y r y trácese OH paralela á sr .

415. Método gráfico general para la determinación de los momentos de flexión y esfuerzos cortantes. — Sea una pieza representada por su eje HS

(fig. 1.^a, lám. 9.^a), apoyada en sus dos extremos y sometida á la acción de las fuerzas paralelas **1, 2, 3, 4** y **5**.

Las reacciones de los apoyos, que representaremos por los núms. **6** y **7**, serán paralelas á las fuerzas **1** á **5** y se determinarán por el procedimiento gráfico explicado en el núm. **413**.

Al efecto se sumarán en DC las fuerzas dadas, elegido el polo O , y trazados los radios polares, se formará la parte de polígono funicular $ahfedcb$; se unirán b y a , y trazando On' paralela á ab obtendremos $On' = 6$ y $n'D = 7$.

416. El polígono funicular así formado sirve también para determinar los valores de los momentos de flexión, y por esto se le denomina *polígono de los momentos de flexión*. Demostraremos, al efecto, que si se toma el polo O á una distancia del polígono de fuerzas DC igual á la unidad lineal (con arreglo á la escala de longitudes que ha servido para dibujar la pieza HS), el momento de flexión en una sección cualquiera A de la viga está representado por la ordenada mn inscrita en el polígono funicular (tomada en la escala de fuerzas que ha servido para formar el polígono DC).

Spongamos, por ejemplo, que las fuerzas sean dadas en kilogramos y las longitudes en metros, y que aplicada la dimensión mn en la escala de fuerzas se lee $mn = 850$. Diremos que el momento de flexión para la sección transversal A de la viga, es de *850 kilográmetros* (kgs. ms.). Si las fuerzas fuesen dadas en toneladas, serían *tonelámetros* (t. ms.); si lo fuesen en kilogramos y las longitudes en centímetros, serían *kilogramos-centímetros* (kg. cms.).

En efecto; el momento de flexión para la sección A es igual á la suma algebraica de los momentos, con respecto á este punto, de la reacción **7** y fuerzas **1** y **2**, ó, lo que es lo mismo, al momento de la resultante de estas fuerzas.

El polígono DC de fuerzas, da para valor de la resultante R de las **7, 1** y **2**, la cantidad $n'm'$. Para determinar su posición, aplíquese el procedimiento del núm. **410**; On' es el primer radio polar y Om' el último. Las rectas paralelas á los diversos radios polares están ya trazadas en ma , ah , hf y fe ; la intersección F de la primera y última, prolongadas, da el punto buscado de la resultante que tiene por magnitud $n'm'$, según acabamos de ver. FB , paralela á HA , es el brazo de palanca, y el momento de flexión para la sección A será

$$M = R \times FB = n'm' \times FB.$$

Pero la semejanza de los triángulos Fmn y $Om'n'$ conduce á la siguiente proporción entre bases y alturas:

$$\frac{mn}{m'n'} = \frac{FB}{OB''}$$

de donde

$$mn = \frac{m'n' \times FB}{OB''} \quad (1)$$

y como según construcción es OB'' igual á la unidad y el producto $m'n' \times FB$ no es otra cosa que el momento de flexión M , resulta

$$mn = M.$$

El momento de flexión $M = m'n' \times FB$, según acabamos de ver, es equivalente al $mn \times OB''$, ó $mn \times 1$, de un par en que el brazo de palanca OB'' es igual á la unidad, y por esto el momento viene expresado por la fuerza mn . Por esta razón se lleva la dimensión mn á la escala de fuerzas para apreciar su valor, pero el número que se obtiene no representa ya kilogramos, toneladas, etc., sino kilográmetros, tonelámetros, etc.

Si el polo se hubiese tomado á k unidades de distancia del polígono de fuerzas DC , sería

$$mn = \frac{M}{k} \quad \text{ó} \quad M = mn \times k. \quad (2)$$

La recta ab se llama *línea final* del polígono funicular, y sirve de base ó partida para contar los momentos de flexión M . Estos serán *positivos* si las ordenadas mn se encuentran por debajo de dicha línea final ab , como sucede con todas las de la fig. 1.^a que estamos considerando, y se conceptuarán *negativos* cuando las ordenadas estén situadas por encima. Por ejemplo, en la figura 3.^a, lám. 11, la línea final es ED ; serán positivos los momentos para todas las secciones de la viga comprendidas entre N y T , y negativos los de la parte NF . En la fig. 5.^a de la misma lámina, son positivos los momentos de flexión para las secciones comprendidas entre M y C , y negativos los correspondientes al intervalo MA , porque es RH la línea final. La demostración es bien sencilla, como vamos á ver á continuación.

El momento de la reacción 7 (fig. 1.^a, lám. 9.^a) con respecto á una sección

cualquiera T , está representado por la ordenada tp comprendida por la línea final ab y la prolongación del lado ah del polígono funicular. En efecto, la comparación de los triángulos semejantes atp y Don' , da

$$\frac{tp}{HT} = \frac{Dn' = 7}{OB''}$$

ó

$$tp = \frac{7 \times HT}{OB''}$$

pero $7 \times HT$ es el momento de la fuerza 7 con relación al punto T , de que según que OB'' valga una unidad ó k unidades, tp representa el momento de la fuerza 7 , ó $\frac{1}{k}$ de su valor, como sucedía con los momentos de flexión mn .

El momento de la fuerza 1 con respecto á la misma sección T , será la parte ps de ordenada interceptada por las prolongaciones de los lados ah , nh del polígono funicular que concurren en h . También lo demuestra así la comparación de los triángulos semejantes hps y Don' , porque se tiene

$$\frac{ps}{hh'} = \frac{Dr = 1}{OB''}$$

de modo que

$$ps = \frac{1 \times hh'}{OB''}$$

y $1 \times hh'$ no es otra cosa que el momento de la fuerza 1 con relación al punto T .

Del mismo modo se vería que el momento de la fuerza 2 con respecto á T es sz ; y en general, *el momento de una fuerza con relación á una sección cualquiera, T está representado por la parte de ordenada trazada por T , que interceptan las prolongaciones de los lados del polígono funicular que se cortan en un punto de dicha fuerza.*

Ahora bien; el momento de flexión en T es igual al momento de la reacción 7 con respecto á este punto, menos la suma de momentos de las fuerzas 1 , 2 y 3 , es decir, según lo que antecede,

$$M = tp - (ps + sz + zd) = td.$$

Cuando M sea positivo, el sustraendo será menor que el minuendo; y como el origen es t , el punto d queda por debajo de la línea final ab , y lo mismo le sucede á la ordenada td representación de dicho momento. Por el contrario, si M es negativo, es porque la suma de momentos de **1**, **2** y **3** tiene valor mayor que el momento de la reacción **7**, ó lo que es lo mismo, porque la suma $ps + sz + zd > tp$, y entonces el punto d , y por tanto la ordenada td estarán situados por encima de la línea final ab .

417. El esfuerzo cortante C en un punto cualquiera A , no es más que la resultante ó suma algebraica de las fuerzas **7**, **1**, **2**, etc.; esta suma es dada inmediatamente por el polígono de fuerzas DC .

Desde el extremo H hasta el punto de aplicación de la fuerza **1**, es $C = 7 = n'D$; entre las fuerzas **1** y **2**, $C = 7 - 1 = n'D - Dr = n'r$, y así sucesivamente. Trazando, pues, por los puntos D , r , m' , etc., paralelas á HS hasta su encuentro con las prolongaciones de las fuerzas **1**, **2**, etc., se obtiene un polígono cuyas ordenadas representan los valores del esfuerzo cortante en las diversas secciones del prisma HS . A la sección A , corresponde un esfuerzo cortante $a'b'$.

418. Véase cuán fácilmente se pueden resolver gráficamente los problemas de flexión relativos á piezas apoyadas en dos puntos.

Son necesarias dos escalas: una de longitudes (x milímetros por metro) que servirá para dibujar el eje HS del prisma, y para situar el polo O ; y otra de fuerzas (z kilogramos por milímetro) para formar el polígono DC y evaluar los momentos de flexión y esfuerzos cortantes.

419. Pudiera suceder que la colocación del polo O á la unidad de distancia de DC diera lugar á una excesiva inclinación de los radios polares con respecto á la horizontal, y como consecuencia, á que el polígono de los momentos de flexión resultase muy alargado, y aun á que saliese fuera de los límites del papel.

Entonces se sitúa dicho polo á k unidades de distancia, y los valores de las ordenadas inscritas en el polígono, tomadas en la escala de fuerzas, deberán ser multiplicadas por k (expresión (2) del núm. **416**).

420. Ejemplos: 1.º Pieza apoyada en sus extremos y cargada con las fuerzas **1**, **2** y **3** (fig. 2.ª, lám. 9.ª), aplicadas respectivamente á los puntos m , n y r .

Fuerza 1	= 200 kilogramos.....	$Hm = 0,50$ metros.
» 2	= 350 kilogramos.....	$HN = 1,75$ »
» 3	= 120 kilogramos.....	$HR = 2,00$ »

Longitud de la pieza, $l = 3$ metros.

Escala de longitudes = 10 milímetros por metro.

Escala de fuerzas = 25 kilogramos por milímetro.

La fuerza **1** estará representada por 8 milímetros; la **2** por 14 milímetros, y la **3** por 4,80 milímetros.

Sumadas las fuerzas $ab = 1$, $bc = 2$ y $cd = 3$, se toma el polo O á una distancia de 1 metro (10 milímetros) de ad y se construye el polígono CBD de los momentos de flexión; y trazando por O una paralela Oh al último lado CD se encuentra:

$$dh = \text{Reacción } 4 \text{ (12,7 milímetros)} = 12,7 \times 25 = 317,5 \text{ kilogramos.}$$

$$ha = \text{Reacción } 5 \text{ (14,1 milímetros)} = 14,1 \times 25 = 352,5 \text{ »}$$

El momento máximo de flexión AB corresponde al punto n ; llevando la ordenada AB á la escala de fuerzas, se encuentra que $M_0 = AB$ (14,67 milímetros) = 366,87 kilogrametros (kgs. ms.).

El esfuerzo cortante mínimo es $r's$, y actúa en el intervalo mn . Llevando $r's$ á la escala de fuerzas se obtiene un valor de 152,5 kilogramos (kgs.). El máximo corresponde á los extremos y es igual á las reacciones **4** y **5** correspondientes.

2.º Pieza de 3 metros de longitud apoyada en sus extremos, sometida á la fuerza **1** de 1000 kilogramos, aplicada á un metro del apoyo izquierdo (figura 3.ª, lám. 9.ª).

Aceptando las mismas escalas del problema anterior, si tomamos el polo O' á la unidad de distancia, resulta un polígono ACn' de momentos, demasiado alargado. Colocando el polo O á dos unidades de distancia, se obtiene el polígono ABn , y la ordenada máxima mn habrá de multiplicarse por 2. Así se obtiene $2 \times mn$ ($2 \times 13,33$) = 666,6 kilogrametros; y las reacciones **2** y **3** valen:

$$2 = 333,3 \text{ kilog.} \quad \text{''} \quad 3 = 666,6 \text{ kilog.}$$

Observemos que $mn = 2 \times m'n'$, y que las paralelas $O'r$ y Or á los lados AB , AC , cortan á ab en el mismo punto r , como tiene que suceder para que siempre se obtenga el mismo valor para las reacciones **2** y **3**.

421. Casos particulares. 1.º Fuerza única P fig. 15, lám. 8.ª).—El momento máximo corresponde al punto N de aplicación de la fuerza P y tiene por valor EL .

Comparando los triángulos semejantes ELD y eAO resulta:

$$\frac{LE}{Ae} = \frac{LD}{AO}$$

ó llamando M_0 al momento máximo de flexión, y l á la longitud de la pieza entre apoyos,

$$\frac{M_0}{\frac{1}{2}P} = \frac{\frac{1}{2}l}{1}$$

de donde

$$M_0 = \frac{1}{4}Pl$$

que es el valor encontrado por procedimientos analíticos en el núm 317.

422. 2.º Fuerzas iguales P equidistantes de los extremos.

Veáse la fig. 4.ª de la lám. 9.ª

423. 3.º Fuerzas uniformemente repartidas á razón de p por unidad lineal (fig. 5.ª, lám. 9.ª)

Suponiendo dividida la viga en partes iguales á la unidad lineal y aplicadas en sus puntos medios las cargas p , resulta el polígono de momentos de flexión $AabcdeB$. Aumentando el número de divisiones, y disminuyendo por tanto las fuerzas resultantes parciales, aumentará el número de lados del polígono, el cual se convertirá, en el límite, en una curva parabólica, como demostraremos á continuación, cuya ordenada máxima $hc = \frac{1}{2}ht$, siendo A y B puntos de tangencia con las rectas At y Bt paralelas á los radios polares extremos OK y OII .

Llamando l á la longitud AB entre apoyos, claro es que $KH = pl$.

El polígono de los esfuerzos cortantes (parte rayada), se convierte también, en el límite, en $DRSF$.

La construcción del polígono de momentos de flexión $AabcdeB$ por el procedimiento anterior, que es el general del núm. 415, puede dar lugar á errores de consideración, por no ser los lados exactamente paralelos á los radios polares. Es preferible el trazado siguiente:

Siendo AB la suma de las cargas repartidas, es decir, pL , (fig. 6.ª, lámina 9.ª), trácese el triángulo funicular $A'O'B'$ cual si todas ellas estuviesen

sustituídas por su resultante $P = pl$. Por los puntos medios L y S de los intervalos HN , NQ , hágase pasar las rectas LP' , SP'_1 y únense los puntos m y n en que cortan á los lados del triángulo $A'O'B'$, con lo cual obtendremos un nuevo polígono funicular $A'mnB'$. Divídase á su vez los intervalos HL , LN , etc., en dos partes iguales, y únense los puntos b , z , etc., en que cortan á los lados del polígono anterior. Obtendremos un nuevo polígono $A'bz n.....B'$, y operando sucesivamente del mismo modo, llegaremos á la parábola $A'tut'B'$, que con la recta $A'B'$ forma el polígono de momentos de flexión $A'tut'B'A'$.

En efecto: las fuerzas P' y P'_1 iguales cada una á $\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}pl$, han de producir en los apoyos las mismas reacciones que su resultante $P = pl$. El polígono de las fuerzas es, para aquellas, ACB , en el cual $AC = CB = \frac{1}{2}pl$; y si al construir el polígono funicular correspondiente partimos del mismo punto A' del plano, tendrá que ser B' el último vértice, porque de otro modo, el último lado $A'B'$ del polígono funicular variaría de dirección; así como su paralela OC trazada desde O para determinar las reacciones, y como consecuencia, variarían también los valores de éstas, lo cual no es posible.

Según esto, la paralela mn al segundo radio polar OC , tiene forzosamente que cortar á la fuerza P'_1 en el punto n de la recta $O'B'$, para que la paralela al tercer radio polar OB coincida con $B'n$.

Si sustituímos la fuerza $P' = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}pl$, por sus componentes $b = z = \frac{1}{2}P'$ el momento de flexión no habrá variado desde z á u ; y como la recta $A'B'$ no cambia de posición, deberá ser lado del nuevo polígono funicular la recta zu que lo era del antiguo. Dividiendo, pues, AC en dos partes iguales $Ad = dC$, al trazar bz paralela al nuevo radio polar Od , el punto z de intersección con la fuerza z debe pertenecer al lado mu del anterior polígono funicular $A'mu$.

Habrá podido observarse que cada polígono se forma uniendo los puntos medios de los lados del polígono anterior; pues siendo L el punto medio de HN , m divide en dos partes iguales á $A'O'$; y por la misma razón, b y z son puntos medios de $A'm$ y mu . Continuando la construcción, los puntos análogos al u y al t son puntos de la curva, puesto que uq , momento de flexión de la sección N , no ha de cambiar aun cuando las fuerzas b y z que están

á su izquierda sean sustituidas por sus componentes á razón de p por unidad lineal, y lo mismo puede decirse de rt con respecto á las fuerzas que obran entre H y L .

Puesto que m y n son los puntos medios de las rectas $O'A'$, $A'B'$, será mn paralela á $A'B'$ y además $O'u = \frac{1}{2} O'q$, del mismo modo, y siendo b y z los puntos medios de $A'm$ y mu resulta bz paralela á $A'u$, y $mt = \frac{1}{2} mh$. La curva $A'tut'B'$ que así puede construirse es, según se demuestra en Geometría analítica, una parábola de la cual son dos tangentes las rectas $O'A'$, $O'B'$ (*).

424. Los puntos de tangencia, extremos A' , B' y el punto medio u de la parábola, se obtienen por la construcción siguiente:

Hágase $AB = pl$, tómese un polo O y dibújense los radios polares extremos OA , OB . Trácese por un punto O' de la línea media NO' las rectas $O'A'$, $O'B'$ paralelas á dichos radios polares; únense los puntos A' y B'

(*) Puede llegarse á las conclusiones anteriores por razonamientos analíticos.

Tomemos el polo O (fig. 7.^a lám. 9.^a) en la perpendicular levantada al polígono de las fuerzas en su punto medio, con lo cual resultará $O'X'$ paralela á SN y á OC , y como ejes coordenados las rectas O_1X y O_1Y .

La tangente Hx á la curva $O'O_1X'$ en un punto cualquiera z , no es otra cosa que la prolongación de uno de los lados infinitamente pequeños del polígono funicular límite, y por tanto, según hemos visto en el número 416, su intersección H con $O'X'$ dará un punto de la resultante px de las fuerzas que obran en el intervalo $ST = x$.

Si por el polo O trazamos un radio polar paralelo á Hx (línea de trazo seguido) interceptará, en AC , juntamente con la OC , una parte igual á $-px$; y el triángulo rectángulo formado por estas líneas, que es semejante al abc dará, comparando los catetos y recordando que $OC = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ab}{ac} = px;$$

é integrando y observando que la constante de la integración es cero por ser $y = 0$ para $x = 0$

$$y = \frac{1}{2} px^2 \quad (1)$$

que es ecuación de una parábola de eje O_1Y .

Pasando de los ejes, O_1X , O_1Y , á los $O'X'$, $O'Y'$, empleando las ecuaciones de transformación

$$y = O_1Y - y' = \frac{1}{2} pl^2 - y'$$

$$x = x' - \frac{1}{2} l$$

la ecuación (1) de la parábola se convierte en

$$y' = \frac{1}{2} plx' - \frac{1}{2} px'^2$$

que es precisamente la expresión del momento de flexión encontrada analíticamente (núm. 323) ó sea la ecuación de la parábola SFN referida al eje SN , y origen S . Queda comprobado que las ordenadas de la parábola $O'O_1X$ representan los valores de los momentos de flexión.

de intersección con las reacciones Q' y Q y tómese el punto medio u de la recta $O'q$.

425. Hemos visto que $uq = \frac{1}{2} O'q$; y como $O'q$, momento de flexión para el caso en que toda la carga $pl = P$ estuviese concentrada en el punto medio, vale $\frac{1}{4} Pl$ (núm. 421), resulta que el momento máximo de flexión uq es igual á $\frac{1}{8} Pl$ ó á $\frac{1}{8} pl^2$.

426. 4.^o Carga uniformemente repartida en una longitud l' (fracción de la longitud total l) á razón de p kilogramos por unidad lineal (fig. 1.^a, lámina 10.)

Se hará $AB = pl' = P$; las reacciones Q y Q' serán las mismas que las del caso en que la carga total $pl' = P$ estuviese concentrada y aplicada en el centro de gravedad k ; de modo que formando el triángulo funicular $C'cD'$ y trazando OS paralela á $C'D'$, se obtendrá $Q' = BS$, $Q = SA$.

Ahora bien: si en lugar de la resultante P consideramos sus dos componentes $P' = AC = \frac{1}{2} P$, $P'_1 = BC = \frac{1}{2} P$, el polígono funicular será

$C'deD'$; y sustituyendo á su vez P' y P'_1 por dos componentes y repitiendo los razonamientos del núm. 423, llegaríamos en el límite á una parábola fag tangente á $C'c$ en f , á $D'c$ en g y á de en a , siendo de paralela á fg , y $ab = ac = \frac{1}{2} bc$.

El polígono de los momentos de flexión es $C'fagD'$, y los puntos f , g y a se obtienen formando el triángulo $C'cD'$ correspondiente á la carga total $P = pl'$ concentrada en su centro de gravedad, bajando desde los extremos de l' las ordenadas Ff , $G'g$, uniendo f y g y tomando el punto medio de la recta bc .

427. Observaremos que el polígono $fagf$ es el de los momentos de flexión para el caso de pieza de longitud l' , apoyada en F y G' y cargada con p por unidad lineal, de modo que $ab = ac$ valen $\frac{1}{8} pl'^2$.

Si, en el caso de que los apoyos sean D y N' , y la longitud $DN' = l$ que es el que estábamos considerando, se concentrase la carga $pl' = P$ en el punto k , el momento máximo de flexión sería $M_o = tc$. De estar repartida en el intervalo l' , el valor de $M_o = ta$ es

$$M_o = ta = tc - \frac{1}{8} pl'^2.$$

Esta relación es conveniente porque simplifica en algunos casos la determinación de M_0 . Si, por ejemplo, $l' = \frac{1}{n} l$ y la carga esta simétricamente colocada con respecto al punto medio de la pieza, de modo que éste coincida con k , será $P = \frac{1}{n} p l'$ y $t c = \frac{1}{4} P l = \frac{1}{4 n} p l'$, de modo que

$$M_0 = \frac{1}{4 n} p l' - \frac{1}{8} p l'^2 = p l' \left(\frac{1}{4 n} - \frac{l'}{8} \right).$$

428. La construcción del polígono mnr de los esfuerzos cortantes no ofrece dificultad alguna. Entre D y F el esfuerzo cortante es constante é igual á la reacción $Q = SA$, y entre G' y N' es igual á la reacción $Q' = BS$; de modo que las rectas mm' , rr' han de ser paralelas al eje trazado por el punto S , y sólo restará unir los puntos m' y r' .

429. 5.º Fuerzas variables de modo uniforme.

(a) Caso representado en la fig. 2.ª, lám. 10. Repitiendo los razonamientos del núm. 423, tomemos $A'B' = P =$ carga total, y construyamos el polígono $LN'S$ que corresponde al caso en que dicha carga esté concentrada en el punto medio C de la pieza. Sustituyendo P por las fuerzas $P' = P'_1 = \frac{1}{2} P$ aplicadas á los centros de gravedad E y F , obtendremos el polígono $LabS$, siendo ab paralela á LS por serlo ambas á OC' .

Del mismo modo, sustituyendo la fuerza P' por las componentes n y m aplicadas á los centros de gravedad del triángulo $A'E'H$ y trapecio $E'HCD'$, obtendremos el lado ed que como comprobación ha de resultar paralelo al radio polar OF' siendo $A'F'$ igual á la fuerza n y $F'C'$ igual á la m .

La curva definitiva $LhcS$ ha de ser tangente en h y c á ed y db ; y la máxima ordenada, representante del momento máximo de flexión M_0 es tc ; como ab es paralela á LS , la ordenada ct es igual á ar , y ar vale $\frac{2}{3}$ de $N'T$, por ser $AH = \frac{2}{3} AC$; luego $M_0 = tc = \frac{2}{3} N't$; y como $N't$, que es el momento máximo para el caso de concentración de carga P en el punto medio, vale $\frac{1}{4} Pl$ (núm. 421) será, para el caso que nos ocupa,

$$M_0 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} Pl = \frac{1}{6} Pl$$

que es el valor hallado en el núm. 337 por procedimientos analíticos.

Para trazar el polígono de los esfuerzos cortantes habrá de dividirse la carga P en un cierto número de partes, y sustituirlas por sus resultantes, siguiendo después el procedimiento correspondiente al caso de fuerzas aisladas (núm. 415).

(b) Caso representado en la fig. 3.ª, lám. 10. Se seguirá el procedimiento del caso anterior.

El momento máximo ab es igual á $\frac{1}{3} ac$, siendo ac el correspondiente al caso en que la carga total P estuviese concentrada en el punto medio.

En efecto:

$$\frac{A'd}{A'a} = \frac{de = ab}{ac} = \frac{1}{3}$$

por ser D el centro de gravedad del triángulo mnr . Resulta, por tanto,

$$M_0 = ab = \frac{1}{3} \times ac = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} Pl = \frac{1}{12} Pl$$

que es el valor hallado ya en el núm. 336.

430. 6.º Fuerzas variables de modo cualquiera (fig. 8.ª, lám. 9.ª).—Se divide en un cierto número de partes la longitud de la pieza y se substituyen las cargas que sobre ellas actúan por sus resultantes 1, 2, 3,..... etc., con lo cual se refiere el problema al caso general de fuerzas aisladas (núm. 415). La solución será tanto más exacta cuanto mayor sea el número de divisiones.

431. 7.º Cargas mixtas. Pieza de longitud l , sometida á fuerzas p por unidad lineal en la longitud $l' = tf$ y por otras p' por unidad lineal en la longitud $l'' = fu$ (fig. 4.ª, lám. 10).—Se formará el polígono de fuerzas MH , haciendo $MR = pl'$, $RH = p'l''$, y se dibujarán los radios polares OM , OR , OH , tomando el polo O á 1 ó n unidades de distancia de MH según convenga (núm. 419); hecho lo cual, se dibujará el polígono funicular $AcrB$ como si las cargas p' , $p'l''$ estuviesen concentradas en los centros de gravedad C y D . La paralela OE á la recta AB dará las reacciones HE del apoyo N , y EM del S .

Desde los extremos t , u , y punto de separación f de las cargas, se bajarán las ordenadas ta , fd , us , hasta su encuentro con los lados del polígono; se trazarán ad , ds , se tomarán los puntos medios e , n de las rectas bc , mr , y se sustituirán las líneas quebradas ac , cr , rs , por los arcos de parábola

acd, dns. Estas parábolas son tangentes entre sí, y á las rectas *ac*, *cr*, y *rs*.

El polígono de los momentos de flexión es *AaednsB*.

El de los esfuerzos cortantes es *FL*, trazado como indica la figura.

432. 8.º Cargas mixtas. Fuerza *P* y carga *p*l uniformemente repartida (fig. 5.ª, lám. 10).—Se aplica el procedimiento de superposición de efectos.

El polígono funicular para la carga repartida es *ALB*, y para la fuerza *P* el *ACB'*. El momento de flexión en una sección cualquiera de la viga, será la suma de las ordenadas inscritas en cada uno de los dos polígonos funiculares.

Para obtener directamente la suma de ordenadas, tómesese *DP = CD'*, y únase *P* con *A* y *B*; resultará *H' T' = HI*, y así el momento de flexión para una sección cualquiera *Z* vendrá representado directamente por *H' R*.

En efecto; tómesese *D' C' = DC* y únase *C'* con *A* y *B'*; serán iguales las ordenadas inscritas en los dos triángulos *ACB'* y *AC'B'*: haremos ver que también son iguales las de los triángulos *AC'B'* y *APB*.

Para no hacer confuso el dibujo lo repetimos en la fig. 6.ª Se trata de demostrar que siendo *DP = D' C'*, en una ordenada cualquiera se verifica *de = d' e'*.

La semejanza de los triángulos *B' D' C'* y *B' e' d'* y la de los *BPD* y *Bed* conduce á las siguientes proporciones:

$$\frac{B'm}{C'D'} = \frac{B'd}{d'e'} \quad " \quad \frac{BD}{DP} = \frac{Be}{de}$$

y como los tres primeros términos de estas relaciones son iguales, lo serán los últimos, y será *d' e' = de*.

433. La fig. 5.ª pone de manifiesto el modo de sumar los esfuerzos cortantes correspondientes á cada clase de fuerzas; *abcdefh* es el polígono correspondiente á la fuerza *P*; *aSTh* el relativo á las cargas repartidas, y *aEnzFh* el definitivo, suma de los dos anteriores.

434. 9.º Cargas mixtas. Fuerzas aisladas *P* y *P'* y carga *p*l uniformemente repartida (fig. 7.ª, lám. 10).

El polígono funicular *QSD'* correspondiente á las cargas aisladas *P* y *P'*, se transforma en su equivalente *CLR D* tomando *HL = TQ* y *NR = VS*; de este modo podrán sumarse sus ordenadas con las del polígono *CDE* correspondiente á la carga repartida *p*l, que esta vez hemos trazado por encima de la recta *CD*, y obtener en definitiva el polígono de los momentos de flexión *CLRDE*.

435. El momento máximo, así como la sección de la pieza á que corres-

ponde, se obtendrán trazando la tangente *Ea'* paralela á *LR*: resulta valer *a' b'* y pertenecer al punto *Z*.

436. Otro modo de resolver el problema en el caso de cargas mixtas (fig. 8.ª, lám. 10). — Se divide la longitud ocupada por la carga repartida en partes de un metro, con arreglo á la escala de longitudes, y por los puntos medios de las divisiones obtenidas así, se trazan las fuerzas *a, b, c, ..., m*, que serán iguales á *p*. La última división podrá ser menor de 1 metro y dar lugar á una resultante menor que *p*.

Una vez sustituida la fuerza repartida por las aisladas *a, b, ..., m*, se considerarán estas últimas juntamente con las *P* y *P'*; y siguiendo el procedimiento del núm. 415, se obtendrá un sólo polígono de momentos de flexión y otro de esfuerzos cortantes.

437. 10.º Aguja de compuerta (fig. 9.ª, lám. 10). — Considérese que la anchura de la aguja, ó sea la dimensión normal al plano del dibujo, es igual á la unidad. Si tuviese un valor diferente *k*, se multiplicarán por *k* los resultados que obtengamos.

Sabido es que la presión del líquido en un trozo cualquiera *AH*, contado á partir de *A*, es igual al peso del prisma de agua, cuya base es *AHH'* (siendo *AH = HH'*) y cuya altura (normal al plano de la figura) es la unidad.

Según esto, dividiendo *AB* en partes iguales *AE, EF, ...,* y trazando *AC* de modo que *CAB = 45º*, las presiones sobre las partes *AE, EF, FH*, etc., podrán ser representadas por las áreas *AE E' // AF F' — AE E' = EF F' E' // AH H' — AF F' = FH H' F'*, etc., y podrá suponerse que están aplicadas en los puntos medios *a, c, e*, etc.

A su vez, el triángulo *AE E'* y los trapecios *EF F' E' // FH H' F'*, etc., pueden ser sustituidos por las líneas medias *aa', cc', dd'*, etc., ó por sus mitades *a b, c d, e f*, etc.

Sumando estas fuerzas en *RS* y aplicando el procedimiento gráfico, obtiéndose muy fácilmente las reacciones de los apoyos y los polígonos de los momentos de flexión y de los esfuerzos cortantes.

438. Si hubiese dos cargas de agua, una de cada lado, cuyos niveles fuesen *N* y *N'* (fig. 1.ª, lám. 11), de *A* á *h* se considerarán las fuerzas *a b, c d* y *e f* correspondientes al nivel *N*; y de *h* á *B* las *m m', n n'* diferencias entre las *r m', s n'* y las *r m, s m*.

La resolución analítica de estos problemas (núm. 332) es mucho más laboriosa.

439. 11.º Fuerzas que actúan en planos diferentes pasando por el eje

del prisma (fig. 2.^a, lám. 11). — Sean ACB y $A'D'B$ los polígonos de los momentos de flexión parciales, abatidos sobre el plano de la figura, y a' el ángulo que forman los planos en que actúan los dos sistemas de fuerzas.

Por los puntos t, c, e, \dots trácense las rectas th, cb, ed, \dots que formen el ángulo a' con las Ct, Dc, Ee y tómese $th = Ct, cb = Dc$, etc. Los puntos h, b, d y A estarán en línea recta; hh', bb', dd' , etc., serán las ordenadas del polígono de momentos de flexión definitivo, suma de los dos parciales.

Resta, pues, tomar $ee' = dd', cc' = bb', tt' = hh'$ etc., y obtendremos dicho polígono, que es el $Ae'e't'B$. El lado $e'e't'$ se confunde sensiblemente con la recta que une los puntos extremos e' y t' .

Los lados Ae' y Bt' son rectilíneos.

En efecto:

$$\frac{Ag}{Ae} = \frac{E'g}{Ee} = \frac{gf}{ed}$$

$$\frac{Ag}{Ae} = \frac{gd''}{ed'}$$

luego los triángulos gfd'' y $ed'd'$ son semejantes, y resulta

$$\frac{Ag}{Ae} = \frac{fd''}{dd'} = \frac{gg'}{ee'}$$

440. Otros casos de flexión de piezas apoyadas. — Puede suceder que uno de los puntos de apoyo, ó los dos, estén situados entre las partes extremas de la pieza. El procedimiento que debe de seguirse y los razonamientos que lo justifican, son los correspondientes al caso general tratado en el número 415.

441. 1.^o Caso de la fig. 3.^a, lám. 11. Los apoyos son S y T . Se formará el polígono de las fuerzas con $ab = 1$, $bc = 2$ y $cd = 3$. Para determinar las reacciones 4 y 5, se dibujarán los radios polares Oa, Ob, Oc y Od ; se trazará AE paralela al primer radio polar Oa , prolongándola hasta que encuentre á la fuerza 1; por el punto de intersección A se trazará AB , paralela al segundo radio polar, hasta su encuentro con la fuerza 2, y BC y CD paralelas respectivamente á Oc, Od ; se unirán los puntos E y D en que las paralelas á los radios polares extremos Oa y Od cortan á las fuerzas 5 y 4, y trazando Oe paralela á ED resultará $de = 4$, $ea = 5$. Además, tenemos en $AEMDCB$ el polígono de los momentos de flexión.

Las ordenadas inscritas en este polígono se cuentan por debajo de la

línea ED desde m á D (como en los casos anteriores), y por encima de esta línea desde m hacia la izquierda. Esto indica que los momentos de flexión son de signo contrario en las partes FN y NT , lo cual equivale á decir que la concavidad de la elástica y el trabajo de las fibras están invertidos en dichas partes, y que el punto m , de momento de flexión cero, es punto de inflexión de la elástica.

El polígono rn de esfuerzos cortantes se forma fácilmente sobre la línea re como base; rs es igual á la fuerza 1; tu igual á $1 - 5$, y así sucesivamente.

442. 2.^o Caso de la fig. 4.^a lám. 11. Se emplea el procedimiento del caso anterior. Uniendo los puntos r y s , de intersección de las paralelas Ar y Ds á los radios polares extremos con las reacciones 6 y 5, y trazando Ox paralela á rs , obtendremos $ex = 5$, $xa = 6$.

El polígono de los momentos de flexión es el AD ; entre m y n los momentos de flexión son positivos, y negativos de A á m y de n á D . m y n corresponden á puntos de inflexión de la elástica.

Puede suceder que todo el polígono resulte por encima de la recta rs (cuando sean muy grandes los momentos de las fuerzas exteriores á los apoyos con respecto á éstos), y entonces no hay puntos de inflexión. La elástica presentará una sola curvatura con la concavidad hacia la parte inferior.

El trazado del polígono lo de los esfuerzos cortantes, no ofrece tampoco dificultad alguna. hl es igual á $ab = 1$, y además,

$$st = 6 - 1, po = 4.$$

443. 3.^o Cargas repartidas uniformemente. Caso de la fig. 5.^a, lám. 11. Sea p la carga por unidad lineal y l la longitud total de la viga. Hágase $ac = pl$, tómese O como polo, trácense los radios polares extremos Oa, Oc y las paralelas FE y FH y únense los puntos E y H de intersección de estas rectas con las perpendiculares al eje de la pieza bajadas desde sus extremos. Dibújese la parábola ENH como si se tratase de la flexión de la pieza AC apoyada en A y en C : claro es que $PN = NF$.

Únense también los puntos R y H de intersección de FE y FH con las reacciones de los apoyos: el polígono de los momentos de flexión es $ERmHNE$, y M es un punto de inflexión de la elástica, la cual presentará su concavidad hacia la parte superior desde M á C , y hacia la parte inferior desde M á A . El momento de flexión es cero en M , positivo en el intervalo MC y negativo en el MA .

Tanto en este caso como en los anteriores, es bien fácil determinar el valor

máximo del momento de flexión y la sección á que corresponde (núm. 435).

El polígono de los esfuerzos cortantes es ST , siendo $nd' = p \times AB$, $d'd = ab - dn'$ y $Tr = bc =$ reacción del apoyo C .

444. 4.º Caso de la fig. 6.^a, lám. 11. Se formará la parábola EPM como si se tratase de la pieza AB apoyada en A y en B , se unirán los puntos de intersección F y L de las rectas EK , KM con las CF , DL y se trazará Ob paralela á FL ; hay dos puntos de inflexión de la elástica, correspondientes á los m y n . Las reacciones D y C son, respectivamente, cb y ba .

En el polígono de los esfuerzos cortantes, $rl = p \times AC$, $rs = ab - r'l$, $xu = p \times BD$ y $ut = bc - xu$.

445. Estudio gráfico de las deformaciones. Trazado de la elástica o fibra neutra.—Ya hemos visto en otro lugar (núm. 340) que dos secciones AB y CD inmediatas, distantes la cantidad ds (fig. 1.^a, lám. 19), forman, por efecto de la flexión, un ángulo z , cuyo tangente hemos representado por $d\alpha$.

El valor de $tgz = d\alpha$ es $\frac{Mds}{EI}$, siendo M el momento de flexión para la sección que se considere.

Conociendo los ángulos z , z' , z'' , etc., se podría trazar la fibra neutra $abcd$ Para esto dividiríamos la longitud FR del prisma (fig. 2.^a, lám. 19) en un cierto número de partes iguales FN , NS ,.... cada una de las cuales represente la longitud ds de eje; cuanto mayor sea el número de estas partes, el polígono que obtendremos como eje del prisma deformado se acercará más á la verdadera curva elástica. Por el extremo A trazaremos una recta AB , de inclinación cualquiera, y supondremos que representa la posición que ha tomado el elemento FN por efecto de la flexión; trazando $CBc = z$, $DCe = z'$, etc., obtendremos el polígono $ABCDL$, cuyas ordenadas Bb , Ca , Dh , representan las ordenadas verdaderas de la elástica, á pesar de la oblicuidad arbitraria asignada al elemento AB de origen, es decir, que si $A'B'C'D'L'$ fuese la verdadera elástica, se tendría sencillamente $Bb = B'b'$, $Ca = C'a'$, etc.

Efectivamente, siendo $C'B'e' = CBc = z$, $DCe = D'C'e' = z'$, etc., son sensiblemente iguales las magnitudes Bb y $B'b'$, Ca y $C'a'$,.... y por tanto lo serán también las diferencias Ca y $C'a'$, etc. Observemos que los ángulos z , z' , z'' , etc., son muy pequeños.

El polígono $ABCDL$ que nos da las ordenadas de la elástica, tiene la forma de un polígono funicular ó de momentos de flexión que correspondiese á la viga FR sometida á fuerzas aisladas en los puntos N , S y T . Se podría, pues, dibujar, tomando un punto O' como polo, á la distancia H de una

cierta recta rt que hiciera las veces de polígono de fuerzas, y trazando AB , BC , etc., paralelas á los radios polares, y la cuerda AL (*); pero para esto es necesario conocer qué magnitudes han de representar las rectas rs , su , ut .

Comparando los triángulos semejantes BcC y $O'rs$, se obtiene:

$$rs : Cc :: H : NS;$$

pero Cc es sensiblemente igual á $BC \times tgz$ ó á $NS \times tgz$; y como

$$tgz = d\alpha = \frac{Mds}{EI}, \text{ será}$$

$$rs = \frac{MdsH}{EI};$$

el factor ds representa el elemento AB , BC , de eje neutro, y es sensiblemente igual á dx , esto es, á FN , NS , ST , etc. En definitiva los valores de rs , su y ut , son $\frac{MdxH}{EI}$, siendo M ó I respectivamente el momento de flexión y el momento de inercia de la sección transversal de la viga en los puntos N , S , T , que dividen su longitud en un número arbitrario de partes iguales ó desiguales, y E el coeficiente de elasticidad del material.

Los valores de M se han obtenido gráficamente; son (fig. 3.^a, lám. 19) los M' de las ordenadas Bc , de , etc., del polígono funicular, multiplicados por el factor k , siendo k el número de unidades lineales que tiene NO (núm. 416); de modo que rs , su , etc., (fig. 2.^a, lám. 19) valen $\frac{M'dxHk}{EI}$.

Este valor lo pondremos bajo una de las formas siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Piezas prismáticas: } I \text{ constante.} \dots\dots\dots \\ \text{Piezas de sección variable: } I \text{ variable.} \end{array} \right\} M' \times \left(\frac{dxHk}{EI} \right) \quad (1).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Piezas de sección variable: } I \text{ variable.} \end{array} \right\} M' dx \times \left(\frac{Hk}{EI} \right) \quad (2).$$

$$\text{Piezas de sección variable: } I \text{ variable.} \quad \frac{M' dx}{I} \times \left(\frac{Hk}{E} \right) \quad (3).$$

Ya hemos dicho que dx representa las magnitudes de FN , NS , etcétera (fig. 2.^a).

* La cuerda AL pasa por los puntos de intersección de los lados AB y DL del polígono con las líneas FA y RL correspondientes á los apoyos, porque en estos la ordenada de la elástica es cero.

Veamos de qué modo puede hacerse aplicación de las expresiones (1), (2) y (3). Supongamos una pieza prismática (fig. 3.^a) apoyada en los extremos F y D y sometida á las fuerzas P y P' .

Formaremos el polígono de las fuerzas $A N R$, tomaremos un polo O á k unidades de distancia y se dibujará el polígono funicular $A B C D$; las ordenadas inscritas $a b$, $c B$, etc., son lo que hemos llamado M' anteriormente.

Dividiremos la viga $F D$ en un cierto número de partes $F m' = m' n' \dots = d x$; las magnitudes $a b$, $c B$, $d e$, etc., se llevarán de a' á b' , b' á c' , etc., se tomará el polo O' y se dibujará el polígono funicular $p q s t z$.

Las ordenadas de este polígono, $s s'$, $t t'$, etc., multiplicadas por

$$\frac{d x H k}{E I} = \frac{F m' \times H \times k}{E I},$$

serán los valores de las ordenadas de la elástica (*); el máximo valor, ó sea la flecha, será $t t'$ (tomado en la escala que ha servido para formar los polígonos $a' h'$ y $A R$) multiplicado por el factor anterior.

Para formar el polígono $a' h'$, hemos tomado como origen el punto a' y contado hacia la parte inferior las magnitudes $a' b'$, $b' c'$, etc., porque los valores de M' ($a b$, $c B$, $d e$, etc.), son positivos todos, por estar por debajo de la línea final $A D$ del polígono funicular. Si alguno de los valores de M' fuese negativo, como sucede con $B c$, $b a$, etc. (fig. 4.^a, lám. 19), se contaría de abajo á arriba al hacer la suma.

446. Otro método puede seguirse, aplicando la expresión (2) del número **445**. Sea una pieza apoyada en N y R (fig. 4.^a, lám. 19) y cargada con P y P' . Formaremos el polígono funicular $A B C F D$; los momentos de flexión, y por tanto los valores de M' , son positivos de L á R , por contarse por debajo de la línea final $B F$, y negativos desde L á S .

Dividiremos la longitud de la viga en un cierto número de partes $S H$, $H N$, $N L$, $L T$, $T R$, haciendo puntos de división el apoyo N , y el L correspondiente al C del polígono funicular, y dividiremos el área de éste por medio de las rectas $H b$, $L C$, etc.

Puesto que $S H$, $N N$, etc., hacen el papal de $d x$, las áreas $A a b$, $a c B b$, $B C c$, etc., representan el producto $M' d x$, y esto con tanta más exactitud cuanto más pequeñas sean las divisiones $S H$, $H N$, etc. Representemos

(*) Como $a' b'$, $b' c'$, etc., han sido divididos por $\frac{d x H k}{E I}$, pues que los hemos hecho iguales tan sólo á M' , resultarán las ordenadas inscritas en el polígono $p s z$ divididas por dicha cantidad también.

por I , II , III , IV , V , dichas áreas, como si fuesen fuerzas aplicadas á sus centros de gravedad, y formemos el polígono $V X$, tomando como origen el punto V ; los valores I , II y III serán contados de abajo á arriba, porque corresponden á valores negativos de M' , y los IV y V hacia abajo, porque M' es positivo para ellos.

Tomando el polo O' á H unidades de distancia, según la escala de longitudes, se trazarán los radios polares 1, 2, 3..... 6 y se formará el polígono correspondiente $e h n q s$, cuya cuerda $s t$ se obtendrá uniendo los puntos s y m correspondientes á las verticales de los apoyos (*). Las ordenadas $h h'$, $l l'$, etc., multiplicadas por el factor $\frac{H k}{E I}$ (expresión (2) del núm. **445**), serán las verdaderas ordenadas de la elástica. La flecha ú ordenada máxima será $e t \times \frac{H k}{E I}$.

Las ordenadas $h h'$, $n' n$, etc., se pueden tomar sobre un eje horizontal $t' s'$ y obtendremos la línea poligonal $e' h' n' s'$ representación de la elástica. Esta curva será tangente á los lados del polígono, y en cuanto á la escala en que resulta trazada, se obtendrá por la comparación de la dimensión $e' t'$ medida directamente en escala natural, y el valor $e' t' \times \frac{H k}{E I}$ que se obtiene por el cálculo.

447. Si la pieza no fuese prismática, de modo que la sección transversal y su momento de inercia I variasen de un punto á otro, se tomarían para valores de las cantidades I , II , etc., los productos $\frac{M' d x}{I}$, es decir, las áreas $A a b$, $a c B b$, etc., divididas por los valores de I en los intervalos $S H$, $H N$, etcétera, y á este efecto, la división de la longitud $S R$ de la viga se acomodaría á la ley de variaciones de I , para que esta cantidad fuese constante, ó se pudiese considerar como tal en dichos intervalos. Las ordenadas del polígono $e n s$ habrían de ser multiplicadas en este caso por el factor $\frac{H k}{E I}$ (expresión (3) del núm. **445**).

PIEZAS EMPOTRADAS

448. Pieza empotrada en un extremo T y cargada con fuerzas aisladas 1, 2, 3, y 4 (fig. 7.^a, lám. 11).

(*) Véase la nota del núm. 445.

Empleando el procedimiento general, se formará el polígono ap de las fuerzas, sumando las **1, 2, 3 y 4**; se tomará el polo O á la distancia de 1 ó n unidades de ap , conforme á la escala de longitudes, y se trazarán los radios polares correspondientes.

Se dibujará el polígono $VDRLPF$ con rectas paralelas á los radios polares Oa, \dots, Op ; y prolongando el primer lado VD hasta E , el polígono DEF es el de los momentos de flexión, es decir, que la ordenada BC , por ejemplo, contada en la escala de fuerzas, representa el momento de flexión correspondiente á la sección N de la viga, ó $\frac{1}{k}$ de este valor, según que el polo O se haya tomado á 1 ó á k unidades de distancia de ap .

En efecto; la resultante R de las fuerzas **1 y 2** vale $ab = 1 + 2$, y pasa por el punto A de intersección de las rectas RB y VD (núm. **410**). El momento de flexión para la sección N es la suma de los momentos de las fuerzas **1 y 2**, ó de su resultante R , y viene expresado, por tanto, por el producto $R \times H$, siendo H la distancia de la resultante R á BC .

Pero los triángulos semejantes ABC y Oab dan

$$\frac{BC}{ab = R} = \frac{H}{Ob = h} \quad \text{ó} \quad BC = \frac{R \times H}{h}$$

$$\text{si } \begin{cases} h = 1 \dots \dots \dots BC = R \times h \\ h = k \dots \dots \dots BC = \frac{1}{k} R \times H. \end{cases}$$

El momento máximo FE corresponde al empotramiento.

449. El polígono de los esfuerzos cortantes es mnr , y su construcción se deriva sencillamente del polígono de fuerzas ap . El máximo esfuerzo cortante es $rz = 1 + 2 + 3 + 4$, y tiene lugar en la sección de empotramiento.

450. Pieza empotrada en un extremo T y cargada en el otro H con un peso P (fig. 8.^a, lám. 11).

Emplearemos el procedimiento del número anterior, y á este efecto haremos $mn = P$, tomaremos el polo O , y trazando AC y CB paralelas respectivamente á Om y On , obtendremos en BCD el polígono de los momentos de flexión.

El máximo momento $m_0 = DB$ tiene por valor absoluto Pl , llamando l á la longitud HT , como ya hemos deducido analíticamente (núm. **365**).

En efecto; prolongando CA hasta su encuentro con SA , siendo

$ST = 2 \times HT$, y uniendo A y B , se obtiene un triángulo ACB que es el polígono de momentos de flexión correspondiente á una pieza ST de longitud $2l$, apoyada en los dos extremos y cargada en su punto medio con una fuerza P (véase núm. **421**). La ordenada CE tiene por valor $\frac{1}{4}P \times ST = \frac{1}{2}Pl$;

y como $BD = 2 \times CE$, será $BD = m_0 = Pl$.

Los esfuerzos cortantes están dados por el rectángulo ac ; son constantes é iguales á P en toda la pieza.

451. Pieza empotrada en un extremo y cargada uniformemente con un peso p por unidad de longitud l (fig. 1.^a, lám. 12. — Repitiendo los razonamientos del núm. **423** se demostraría que la curva abB es una parábola tangente en A y en B á las rectas Ac, cB que son paralelas á los radios polares Om y On correspondientes á $mu = pl$. Además, $ab = bc$.

El polígono de los momentos de flexión es, siguiendo el procedimiento general del núm. **441**, $abBD$, y el máximo valor $m_0 = BD$ tiene lugar en el empotramiento.

Es fácil demostrar que el valor absoluto de m_0 es $\frac{1}{2}pl^2$, coincidiendo así con lo hallado analíticamente (núm. **367**).

En efecto; la misma construcción gráfica hubiera conducido al polígono $abBaA$ en el caso de que la pieza HT , de longitud l , hubiese estado apoyada en los dos extremos. En este caso, $ab = bc = \frac{1}{8}pl^2$ (núm. **425**), y como $BD = 2 \times ac = 4 \times ab$, resulta $m_0 = BD = \frac{1}{2}pl^2$.

Los esfuerzos cortantes están representados por las ordenadas del triángulo def .

452. El procedimiento gráfico para la determinación del momento de flexión puede definirse así: fórmese $ab = pl$ (fig. 2.^a, lám. 12), y desde el polo O trácense los radios polares extremos Oa, Ob ; desde el punto medio m de la pieza bájese la perpendicular mr y trácense rc y rd paralelas á Oa, Ob , prolongando rc hasta h ; únense c y d , tómese $nc = \frac{1}{2}nr$ y trácese la parábola ced que ha de resultar tangente en c y d á las rectas cr y rd ; el polígono buscado será $cedh$.

453. Pieza empotrada en un extremo, cargada con un peso p por unidad lineal en una parte $HA = l'$ de su longitud (fig. 3.^a, lám. 12. — Se hará $rk = pl'$, y desde un punto r de la perpendicular mr á HA trazada

desde su punto medio m , se dibujarán rc y rD paralelas á Ox , Ok . Se trazará Ad perpendicular á HA , y uniendo c y d y tomando $ne = \frac{1}{2} nr$, se dibujará la parábola ced . El polígono de los momentos de flexión es $Ddech$, y el de los esfuerzos cortantes $szut$.

No damos la demostración de este procedimiento porque sería repetir los razonamientos de los núms. 426 y 441.

La misma fig. 3.^a corresponde al caso en que la pieza empotrada fuese $H'T$.

454. Pieza empotrada en un extremo y sometida á la acción de cargas mixtas.

(a) Una carga p por unidad lineal en la longitud l' , y otra p' en la parte l'' (fig. 9.^a, lám. 11).

Hágase $eh = pl'$, $hf = p'l''$, y dibújense los radios polares Oe , Oh , Of .

Desde los puntos medios B y C , y desde el A de separación de cargas, bájense perpendiculares á HT y trácense Hc , cr y rs paralelas á los radios polares correspondientes.

Únanse H y d , d y s , y tómese $ab = \frac{1}{2} ac$, $mn = \frac{1}{2} mr$, con lo cual se podrán trazar los dos arcos de parábola Hbd y dns tangentes entre sí y á las rectas Hc , cr y rs .

El polígono de los momentos de flexión es $Hgsndb$, y el de los esfuerzos cortantes será $xztu$.

(b) Cargas repartidas y cargas aisladas. Se empleará el procedimiento de superposición de efectos (núm. 432) ó el del núm. 436.

455. Según acabamos de ver, los problemas de piezas empotradas en un extremo solamente, se resuelven por medio de la estática gráfica con la misma sencillez que los correspondientes á piezas apoyadas en dos puntos.

Cuando la viga está empotrada en los dos extremos, ó empotrada en uno y apoyada en el otro, los problemas se pueden resolver también gráficamente, pero con menores ventajas de facilidad y sencillez. No obstante la menor utilidad del cálculo gráfico, resolveremos el problema en general.

456. Pieza empotrada en un extremo A (fig. 1.^a, lám. 20) con z^0 de inclinación respecto á la horizontal, apoyada en un punto B de su longitud, y sometida á la acción de fuerzas cualquiera 1, 2, 3, 4 y 5. — Para mayor generalidad, supondremos que el apoyo B no está á nivel del empotramiento A .

Formemos el polígono de los momentos M de flexión $DLNRN$ (figu-

ras 1.^a y 1.^{a'}) como si la pieza estuviese simplemente apoyada en los dos puntos A y B .

En A hay un momento de empotramiento m'_0 de valor negativo; si lo conociésemos, llevándolo de D á T , con arreglo á escala, y uniendo T con N , la línea final del polígono funicular sería TN , en vez de DN , y el polígono de los momentos m de flexión de la pieza empotrada en A y apoyada en B sería $DTNRSLE$. Habría momentos negativos entre los puntos de la viga correspondientes á los intervalos TP y MR , y positivos en la parte PM . Los puntos P y M corresponderían á puntos de inflexión de la pieza flexada.

En efecto; por lo que respecta á la parte BC de la viga, los momentos de flexión son los mismos, ya esté empotrada ó apoyada en el otro extremo A ; pues considerando una sección cualquiera comprendida entre B y C y las fuerzas que están á su derecha, el momento de éstas con respecto á dicha sección, ó sea el momento de flexión, es independiente de la situación del extremo A . Se deduce, en consecuencia, que la parte de polígono funicular $NN'SR$ situado á la derecha de la línea BN , formado para el caso de apoyo en A , sirve también cuando en A haya empotramiento.

Veamos lo que sucede en la parte situada á la izquierda de la línea BN , y para ello llamemos Q y Q_1 á las reacciones en A , cuando la pieza está apoyada ó empotrada en este punto, respectivamente, y Q' á la diferencia $Q - Q_1$; y sean M y m los momentos generales de flexión para los casos de que A sea apoyo ó empotramiento. Para una sección cualquiera V de abscisa x , tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Apoyo en } A \dots\dots\dots & M = Qx - \Sigma P(x-d) \\ \text{Empotramiento en } A \dots\dots & m = Q_1x - \Sigma P(x-d) - m'_0 \end{aligned}$$

representando m'_0 el valor absoluto del momento de empotramiento en A puesto que hemos puesto de manifiesto su signo negativo.

Se deduce que

$$m = M - (Q'x + m'_0)$$

lo que nos dice que los valores de m se obtienen restando de los de M el binomio $Q'x + m'_0$; pero $y = Q'x + m'_0$ es la ecuación de una recta $A'B'$ en la cual para

$$\begin{aligned} x = 0 \dots\dots\dots & y = m'_0 = AA' \\ x = AB' \dots\dots\dots & y = 0, \text{ pues en } B \text{ se tiene } m = M. \end{aligned}$$

Para los efectos de la resta, puede sustituirse la recta $A'B'$ con la TN que se forma haciendo $D T = m'_0$ y uniendo T con N .

Queda, por tanto, demostrado que el polígono de los momentos de flexión m es el $D T N R S L E$.

Falta ahora determinar gráficamente el valor de $D T = m'_0$, momento de empotramiento en A . Supongámoslo conocido, y determinemos, para el valor arbitrario $m'_0 = D T$, las ordenadas de la elástica, siguiendo el procedimiento explicado en el núm. 446; habremos de considerar las áreas $D T P$, $M N N'$ y $N N' R$ (negativas) y la $P E L M$ (positiva), ó, lo que es lo mismo, la $D E L M$ positiva (que designaremos con el número II) y las negativas $D T N (I)$, $M N N' (III)$ y $N N' R S (IV)$ aplicadas todas á los centros de gravedad respectivos.

Tomaremos el polo O (fig. 1.^a) á la distancia H del polígono de las fuerzas, y partiremos de un radio polar Oa inclinado z' con la horizontal, es decir, paralelo á la tangente en el empotramiento A . Siendo a el origen en el polígono de las fuerzas, se tomará

$$ab = I \quad bc = II \quad cd = III \quad de = IV;$$

se trazarán los radios polares y el polígono funicular correspondiente $mnrstu$, cuyas ordenadas, cerrando este polígono con la recta que une los puntos m y t correspondientes á los apoyos, representan las de la elástica.

Observemos que las áreas II , III y IV son independientes del valor que tenga $m'_0 = D T$, y que solamente la I , que es el área del triángulo $D T N$, depende del valor que atribuyamos á m'_0 . Esto equivale á decir que cualquiera que sea la situación que demos al polo O (fig. 1.^a) y la que tengan los radios polares Ob , Oc , Od , Oe , los polígonos funiculares diversos que pueden formarse serán tales, que los lados correspondientes, esto es, los similares á nr , rs , st , y tu interceptarán partes iguales en una misma vertical cualquiera, situada á la derecha de la L , del mismo modo que en un mismo caso de flexión son iguales las ordenadas inscritas en los infinitos polígonos funiculares que pueden formarse correspondientes á las infinitas posiciones distintas del polo ó inclinaciones de los radios polares.

Esta observación nos permitirá colocar el polígono $mnrstu$ en su posición verdadera, conservando al lado mn que ya lo está puesto que es paralelo á la tangente en el empotramiento A . Situemos al efecto el apoyo B_1 en la vertical BN , y á una diferencia de nivel respecto al punto m igual á la que tienen los puntos B y A .

El lado $s't'$ verdadero del polígono que envuelve á la elástica, ha de pasar por el apoyo B_1 , y también por el punto x en que corta á la vertical I su correspondiente st del polígono anterior, conforme á lo que acabamos de decir. Del mismo modo el lado $t'u'$ deberá pasar por t' y por v ; el $s'r'$, por s' y por i ; y el $r'n$ por r' y por n .

Tenemos, pues, el verdadero polígono $mnr's't'u'$ envolvente de la elástica, y de él podremos volver al verdadero polígono de fuerzas (fig. 1.^m) que nos dará el área incógnita I . Para ello no tendremos más que trazar desde el polo O' situado á la distancia H de $b'c'$, paralelas á los lados de $mnr's't'u'$. Pero no hay necesidad de hacer esta construcción, y basta trazar $f'm'$ paralela á vi y á la distancia H . La parte $f'm'$ es igual á $a'b' = I$, por la igualdad de los triángulos $O'a'b'$ y $f'm'n$.

Como I , área del triángulo $T D N$, es igual á $\frac{1}{2} T D \times A B'$ (fig. 1.^a) es decir, $\frac{1}{2} m'_0 \times l$, se deduce finalmente el valor de $m'_0 = \frac{2 \times f' m'}{l}$, que es lo que se pretendía.

457. Pieza empotrada en los dos extremos y cargada de modo cualquiera (fig. 5.^a, lám. 19). Las tangentes en los empotramientos N y R , forman ángulos z y z' con la horizontal; además, N y R están nivel á diferente.

Por procedimientos análogos á los empleados en el caso anterior, se pueden determinar los momentos de empotramiento m'_0 y m''_0 y los generales de flexión m .

Dibújese el polígono funicular $A B C D E$ como si la pieza estuviese apoyada en sus extremos. Supongamos conocidos los valores de los momentos de empotramiento, y tómese $A L = m'_0$, $E F = m''_0$ y únense los puntos L y F : $A L F E D C B$ sería el polígono de los momentos m de flexión.

Para trazar el polígono envolvente de la elástica, consideraremos el área positiva $A B C D E = II$ y la negativa $A L F E$; ó bien, en vez de esta última, las de los dos triángulos $L A F = I$ y $A F E = III$.

Supóngase formado el polígono de las fuerzas I , II y III , partiendo de dos radios polares Oa y Od respectivamente paralelos á las tangentes en N y en R . Si dibujamos los dos apoyos e y m en la misma posición relativa que N y R , y trazamos ef y mh respectivamente paralelas á las tangentes en N y R y por tanto á los radios polares Oa y Od , no faltará sino conocer una de las direcciones fg ó gh para terminar el trazado de la envolvente á la elástica.

Si se conociesen las verdaderas direcciones de los radios polares extre-

mos Ob y Oc , la parte $f''s''$ interceptada por dichos radios á una distancia de O igual á la que media entre las líneas I y II , es igual á fs ; pero para conocer esta última cantidad no hay necesidad de que esté trazado el polígono Obc ; basta, en efecto, tomar á la izquierda de P la distancia polar H , dibujar $b'c' = b''c'' = bc = II$, que es cantidad conocida, y prolongar las líneas I y III . Resulta $f's' = f''s'' = fs$. También es $h't' = ht$.

Resumiendo: por la construcción anterior se conocerá $f's'$; se hará $fs = f's'$ y se unirá s con h , y g con f . Así se obtendrá el polígono verdadero $efghm$, envolvente de la elástica, y de él, trazando por O paralelas á sus lados, deduciremos el polígono de fuerzas $abcd$, y por tanto, las incógnitas $ab = I = \frac{1}{2} m'_0 l$, y $cd = III = \frac{1}{2} m''_0 l$; es decir, que conoceremos m'_0 y m''_0 . Estos valores, tomados en AL y EF , darán el polígono definitivo de los momentos de flexión.

No es necesario construir el polígono $abcd$ para llegar al conocimiento de I y III y, por lo tanto, de m'_0 y m''_0 . En efecto, recordando que el centro de gravedad G del triángulo LAF está distante de la base AL un tercio de la altura ó $\frac{1}{3} l$, y comparando los triángulos semejantes Oab y fer , tenemos:

$$re: ab = I :: \frac{1}{3} l : H$$

de donde

$$H \times re = \frac{1}{3} I \times l = \frac{1}{6} m'_0 l^2$$

y

$$m'_0 = \frac{6 \times H \times re}{l^2} = AL.$$

Del mismo modo se vería que $m''_0 = \frac{6 \times H \times mn}{l^2} = EF.$

V I

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS

SOMETIDAS Á FUERZAS NORMALES Á SU EJE

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE RESISTENCIA Y RIGIDEZ

1. FUERZAS INTERIORES QUE SE DESARROLLAN EN LA FLEXIÓN:
SU DISTRIBUCIÓN Y MEDIDA.
2. MOMENTOS DE INERCIA.
3. CARGAS ESTÁTICAS. RESOLUCIÓN GENERAL DE LOS
PROBLEMAS DE RESISTENCIA Y RIGIDEZ,
RELATIVOS Á PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE Y SECCIÓN VARIABLE.
4. APLICACIONES DE LA FLEXIÓN PLANA.
5. CARGAS EN MOVIMIENTO. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.
6. ESTUDIO DE LA FLEXIÓN
CUANDO SE ALTERA LA ELASTICIDAD DEL MATERIAL.
EFECTO DE LAS FUERZAS REPETIDAS UN GRAN NÚMERO DE VECES.

1. FUERZAS INTERIORES

QUE SE DESARROLLAN EN LA FLEXIÓN:

SU DISTRIBUCIÓN Y MEDIDA

EXTENSIÓN Y COMPRESIÓN DE LAS FIBRAS

458. Compresión y extensión de las fibras por efecto de la flexión.— En la hipótesis, ya enunciada en el núm. **33**, de que una pieza prismática sea como un haz de fibras yustapuestas, unidas íntimamente por una especie de cemento (hipótesis muy aproximada á la realidad, en muchas maderas y metales), veamos de qué modo trabajan estas fibras por efecto de la flexión, y para fijar las ideas supondremos el caso de un prisma apoyado en sus extremos y cargado en su punto medio (fig. 13, lám. 13).

1.º Según hemos visto en los números **304** á **308**, la flexión origina compresiones en las fibras situadas en la parte superior de la capa neutra CC , y extensiones en las capas de fibras colocadas debajo.

La intensidad de estas compresiones y extensiones es de medida fácil; recordaremos que el momento de las fuerzas elásticas, en una sección cualquiera transversal de la viga, es (núm. **307**):

$$M' = \frac{p I}{z},$$

siendo I el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje HH' (fig. 14, lám. 13), normal al plano de la fig. 13, que pasa por su centro de gravedad, y p la fuerza por unidad superficial que extiende ó comprime las fibras distantes z de dicho eje.

Recordaremos también que el momento de fuerzas elásticas, en una sec-

ción cualquiera, ha de hacer equilibrio al momento M de las fuerzas exteriores ó momento de flexión en aquella sección (núm. 300); de modo que debe ser

$$\frac{p I}{z} = M \quad (1).$$

despejando p , se obtiene

$$p = \frac{M z}{I} \quad (2).$$

El valor de p , suponiendo prismática la viga, como es el caso general, y constante por tanto el momento de inercia I , depende de los de M y z . No olvidemos que M , función de x , varía de una á otra sección transversal, y que z es la cantidad que define ó determina una capa de fibras.

Se deduce de la expresión (2) lo siguiente:

Todas las fibras situadas en una capa paralela á la neutra aa , bb , $a'a'$, $b'b'$, etc., están en el mismo caso, puesto que el valor de z es constante para aquéllas.

Dentro de una misma sección transversal, es decir, para el mismo valor de M , la compresión ó extensión por unidad superficial que sufren las fibras depende exclusivamente de su distancia z al eje ó capa neutra CC , así es que los mayores valores de p corresponderán á las fibras aa , $a'a'$, y el mínimo, cero, á la capa neutra CC . De modo que si la magnitud de las compresiones y extensiones fuese representada por intensidad de tintas en el dibujo (fig. 13, lám. 13), las más oscuras corresponderían á aa , $a'a'$, é irían desvaneciéndose hasta llegar á cc .

Dentro de una misma capa de fibras, es decir, para un mismo valor de z , el de p depende de M momento de flexión. Así, también, en el caso actual de pieza apoyada en los extremos, en el cual, según sabemos (núm. 317), el momento de flexión M es un máximo en la sección media AA y va disminuyendo desde esta sección hasta los extremos en que es cero, si se representa la intensidad de presiones y extensiones que sufren las fibras por intensidad de tintas, las más oscuras corresponderán á la parte media de la capa, é irán difuminándose hacia los extremos.

Combinando las dos influencias de M y de z , se obtendrá la verdadera variación de p de una á otra capa. En dos secciones AA y BB , hay igual distribución de valores de p ; pero si se comparan las fibras correspondientes á la misma capa, se halla que en la sección AA trabajan más que en la BB (figs. 13, 14 y 15, lám. 13). Para obtener el punto de la viga en que el mate-

rial trabaja más por compresión ó extensión, hay que buscar la sección en que el momento de flexión M es un máximo M_0 ; y dentro de esa sección, la fibra más alejada de la capa neutra. En el caso que consideramos, estos puntos serán el r y el s .

459. Llamando v al valor máximo de z cuando las distancias or y os sean iguales, el máximo de p (compresión en r y extensión en s) es

$$p_0 = \frac{M_0 v}{I} \quad (3).$$

Y si or y os fuesen desiguales, y las llamamos $or = v'$, $os = v''$, tendríamos:

Máxima compresión por unidad superficial

$$\text{de sección transversal (capa } r; z_0 = v') \dots p_0 = \frac{M_0 v'}{I} \quad (4).$$

Máxima extensión por unidad superficial de

$$\text{sección transversal (capa } s; z_0 = v'') \dots p'_0 = \frac{M_0 v''}{I} \quad (5).$$

Los puntos en que el material no trabaja por extensión ni por compresión, son los extremos de todas las capas aa , bb , etc., y todos los de la capa neutra. En estos puntos, pues, deberán practicarse las ensambladuras, orificios para el paso de pernos ó roblones, y cuantas operaciones tiendan á debilitar la viga; en cambio, si lo que se desea es su destrucción, deberá atacarse por los puntos r y s . Cuando la viga se rompe por la acción de las cargas, la fractura empieza por estos puntos, confirmando así la práctica los resultados del cálculo.

Es fácil determinar los puntos análogos al r y s en todos los demás casos de flexión. En las piezas empotradas, por ejemplo, corresponderán á las secciones de empotramiento; y en general, son puntos de las capas extremas correspondientes á las secciones en que el momento M de flexión alcanza su valor máximo. En los puntos de inflexión de la elástica (caso de piezas empotradas ó apoyadas en más de dos puntos), el momento de flexión es cero, como sabemos, y también lo será el valor de p ; de modo que podrá debilitarse allí la viga con preferencia á las demás secciones.

Se deduce también de las consideraciones anteriores, que una misma fibra no está igualmente extendida ó comprimida en toda su longitud, como le

sucedería en el caso de extensión ó compresión simple producida por fuerzas aplicadas á los extremos de una pieza prismática libre.

460. Ecuación de resistencia en la flexión.—Si en las expresiones (3), (4) y (5) del número anterior sustituimos p_0 por R ó por R' , coeficientes de trabajo por extensión ó compresión correspondientes al material de que está formada la viga, habremos consignado la condición de resistencia, pues que así establecemos que la fibra que más trabaja, y en el punto en que la compresión ó extensión p_0 por unidad superficial es mayor, se encuentra en condiciones favorables de resistencia, puesto que resulta trabajando á R ó R' kilogramos por unidad superficial, que es lo que el material puede soportar. Claro es que en los demás puntos la extensión ó compresión p es menor que R ó R' , y en la capa neutra $p = 0$.

Tendremos, pues, las ecuaciones de resistencia siguientes (fig. 13, lámina 13):

$$\begin{array}{l}
 r_0 = os = v \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{M_0 v}{I} \text{ (6) fibras extendidas } s. \\ R' = \frac{M_0 v}{I} \text{ (7) fibras comprimidas } r. \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} r_0 = v' \\ so = v'' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{M_0 v''}{I} \text{ (8) fibras extendidas.} \\ R' = \frac{M_0 v'}{I} \text{ (9) fibras comprimidas.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

En general, estableceremos como ecuación de resistencia

$$R = \frac{M_0 v}{I} \text{ (10)}$$

ó

$$\frac{R I}{v} = M_0 \text{ (11),}$$

teniendo cuidado de poner R' en vez de R , y v' ó v'' en vez de v cuando convenga.

En las ecuaciones (10) y (11), R representa el coeficiente de trabajo por extensión ó compresión que ha de resultar á la materia en la flexión, en los puntos que se hallan en condiciones más desfavorables; v la mayor distancia

de las capas extremas de fibras á la capa neutra; I el momento de inercia de la sección transversal y M_0 el momento máximo de flexión.

Como M_0 es una función de las cargas totales P y longitud l de viga, de la forma $\frac{1}{n} P l$ (núm. 405), ecuación (2), se tiene

$$\frac{R I}{v} = M_0 = \frac{1}{n} P l \text{ (12),}$$

y como el momento de inercia I , y lo mismo el cociente $\frac{I}{v}$, es función de las dimensiones de la sección transversal de la viga (tabla del núm. 477), en la ecuación (12) se encuentran relacionadas la escuadría y las cargas P .

461. Observación relativa á la homogeneidad de las fórmulas.—Es necesario tener cuidado, al hacer uso de las fórmulas anteriores, de emplear las mismas unidades de medida en la valoración de las cantidades R , I , P , etcétera. Si, por ejemplo, se aprecia P en kilogramos y l en metros, el momento M_0 ha de expresarse en kilográmetros; R representa kilogramos por metro cuadrado, y v é I se formarán tomando como unidad el metro. Cuando R exprese kilogramos por milímetro cuadrado, P se valorará en kilogramos y l , v é I en milímetros.

462. Esta observación relativa á la homogeneidad, es aplicable á las fórmulas que determinan la flecha de curvatura (3) (núm. 405). Si P y l se toman en kilogramos y metros respectivamente, por ejemplo, se formará I tomando el metro como unidad, se expresará E en kilogramos por metro cuadrado, y el valor de f representará metros.

ESFUERZO RASANTE Ó DE DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL
PRODUCIDO EN LA FLEXIÓN

463. Hemos visto ya (núm. 304) que en una pieza flexada, se extienden las fibras que están de un lado de la capa neutra y se comprimen las situadas del otro lado. También hemos estudiado (núm. 458, fig. 13, lám. 13) la variación de intensidades de estas fuerzas de extensión y compresión, y hemos deducido que no solamente una misma fibra está desigualmente comprimida ó extendida en toda su longitud, sino que también lo están, en una misma sección transversal, dos capas de fibras contiguas; de modo que si consideramos la superficie común á dos capas de fibras, aa y bb por ejemplo, en un

punto cualquiera m , se desarrollarán en este punto dos compresiones distintas, paralelamente al eje de la viga, correspondientes á las dos capas de fibras á que pertenece al mismo tiempo dicha superficie común; y obedeciendo á la diferencia de compresiones, la capa superior aa tenderá á resbalar sobre la bb , separándose por desgarramiento longitudinal. Lo mismo diríamos, considerando las fibras que se extienden, para un punto cualquiera t .

Es necesario, pues, que las capas diversas de fibras estén unidas por una especie de cemento cuya cohesión se oponga al desgarramiento longitudinal; de lo contrario, se verificará este desgarramiento y las capas de fibras se separarán y se flexarán aisladamente, portándose como una serie de vigas superpuestas sin enlace alguno (fig. 13, lám. 20).

Se comprende cuán importante es el conocimiento del valor del *esfuerzo rasante* ó de *desgarramiento longitudinal*, por unidad superficial (que representaremos por S) que se desarrolla por efecto de la flexión en un punto cualquiera m de la superficie común á dos capas de fibras; ha de servir para calcular la resistencia de los enlaces en las vigas de madera ó de hierro que no son de una pieza, sino que se componen de varios pedazos ensamblados ó empalmados.

464. Causa productora del desgarramiento.—Sea $O X$ el eje de la viga (fig. 16, lám. 13) y NQ , $N' Q'$ dos planos ideales, normales al eje, infinitamente próximos. Sus abscisas serán, respectivamente, x y $x + dx$.

Consideremos dos planos mm' , nn' paralelos al de las fibras neutras, é infinitamente próximos también, que comprenden una capa de fibras; sus ordenadas (ó distancias á la superficie AB) serán z y $z + dz$. La capa elemental de fibras está proyectada en $mn n' m'$, $cdeh$.

La presión p por unidad superficial, que por efecto de la flexión se produce en el punto m , es (fórmula (2) del núm. 458):

$$p = \frac{Mz}{I}$$

y la total, en la base mn del prisma elemental, llamando u á la anchura he de la base, variable de una á otra capa de fibras,

$$P = p u dz = \frac{M}{I} u z dz.$$

En la base $m' n'$, la presión total, dirigida en sentido opuesto á la anterior, será

$$P' = p' u dz = \frac{M'}{I} u z dz.$$

Suponemos que la sección transversal es constante, y, por tanto, que I y u lo son también para el mismo valor de z .

La diferencia de presiones será:

$$P' - P = \frac{z}{I} (M' - M) u dz;$$

y como los momentos de flexión varían con x , podremos establecer

$$M' = M + \frac{dM}{dx} dx,$$

de modo que

$$P' - P = \frac{z}{I} \frac{dM}{dx} dx \cdot u dz$$

ó, puesto que $\frac{dM}{dx} = C$, esfuerzo cortante (núm. 312).

$$P' - P = \frac{Cz}{I} dx \cdot u dz \quad (1).$$

Esta es la expresión de la fuerza que engendra el resbalamiento del prisma $mm' n' n$ á lo largo de los planos m, m', n, n' .

465. Fuerza de desgarramiento por unidad superficial de sección longitudinal. — Representemos por S la fuerza de desgarramiento (ó esfuerzo rasante) por unidad superficial que se desarrolla en el plano mm' por efecto de la diferencia de presiones $P - P'$, y sea ω el área de la superficie proyectada en mm' (fig. 16, lám. 13).

El valor de ω es $u dx$, y el de la fuerza total de desgarramiento, en mm' ,

$$S \omega = S u dx.$$

En el plano nn' , y obrando en sentido contrario, se producirá una fuerza total de desgarramiento $S' u' dx$.

Siendo S' y u' funciones de z , se tiene

$$S' = S + \frac{dS}{dz} dz$$

$$u' = u + \frac{du}{dz} dz,$$

y multiplicando y despreciando los infinitamente pequeños de segundo orden,

$$S' u' = S u + \frac{S du}{dz} dz + u \frac{dS}{dz} dz = S u + \frac{d(Su)}{dz} dz.$$

La suma algebraica

$$S' u' dx - S u dx = dx \frac{d(Su)}{dz} dz$$

debe ser igual al valor de $P' - P$ de la fórmula (1), porque son expresiones de la misma cantidad. Tendremos, pues,

$$dx \frac{d(Su)}{dz} dz - \frac{Cz}{I} u dz dx$$

ó

$$\frac{d(Su)}{dz} dz = \frac{C}{I} u z dz;$$

é integrando con relación á z y teniendo en cuenta que C , que es función de x , es independiente de z ,

$$Su = \frac{C}{I} \int_0^z u z dz + K \quad (2).$$

Para determinar la constante K se tendrá presente que en las capas de fibras extremas T y V , para las cuales $z = v'$ (ó $z = v''$), no hay tendencia al desgarramiento, lo cual supone $S' = 0$ para dichos puntos; luego

$$\frac{C}{I} \int_0^{v'} u z dz + K = 0 \quad \text{ó} \quad K = - \frac{C}{I} \int_0^{v'} u z dz$$

y, finalmente, sustituyendo en (2),

$$Su = - \frac{C}{I} \left(\int_0^{v'} u z dz - \int_0^z u z dz \right)$$

ó

$$Su = - \frac{C}{I} \int_z^{v'} u z dz \quad (3).$$

Pero $udz.z$ no es otra cosa que el momento, con relación á la capa neutra, de un elemento de área de la sección transversal; de modo que el valor de la integral de $udz.z$ entre los límites z y v' , representa el momento del área $c T d$ con respecto al eje XX . Si, pues, llamamos ω el área de $a V b$, por ejemplo, y h la distancia al eje XX , de su centro de gravedad, la expresión anterior (3) se convertirá en

$$Su = - \frac{C}{I} \omega h \quad (4)$$

ó también

$$S = - \frac{C}{Iu} \omega h \quad (5)$$

que nos dice que para obtener el valor de la fuerza S de desgarramiento por unidad superficial que, por efecto de la flexión, se produce en un plano ab paralelo á la capa de fibras neutras, y en un cierto punto de la longitud de la viga, hay que formar el momento ωh del área $a V b$ de la parte de sección comprendida entre las fibras extremas V y el plano que se considera ab , con relación al eje XX , y multiplicarlo por el factor $\frac{C}{Iu}$, en el cual

C = esfuerzo cortante en la sección TV .

I = momento de inercia de la sección TV con respecto al eje XX .

u = ancho ab del prisma en el plano que se considera.

Así, pues, para hallar la fuerza de desgarramiento por unidad superficial que en el punto m se desarrolla á lo largo de la superficie bb (fig. 13, lámina 13), el valor de C sería el que corresponde á la sección transversal BB , de abscisa $x = d$, según el caso de flexión.

El valor Su de la fórmula (4) es la fuerza de desgarramiento total que se produce en la capa bb , en las inmediaciones del punto m , en una longitud fg igual á la unidad. En efecto: $Su = S.u.1$; y $u.1$ es el área del rectángulo de base $fg = 1$ y de altura u , que es la dimensión del prisma contada perpendicularmente al plano de la fig. 13 en el punto m .

En la capa de fibras neutras, $z=0$; de modo que ω será el área comprendida entre la capa de fibras neutras y las capas exteriores extremas.

En las fórmulas (4) y (5), S representará fuerza de desgarramiento por $m.^2$, $cm.^2$, $mm.^2$, etc., según que las dimensiones ω , u , h , I , se hayan obtenido tomando por unidad lineal el metro, centímetro, milímetro, etc.

466. La fórmula (5) manifiesta claramente que la fuerza de desgarramiento, á igual valor de C , esto es, en la misma sección trasversal, será tanto mayor cuanto mayor sea ω , es decir, cuanto más próxima á la capa neutra esté la capa que se considere. Así (fig. 13, lám. 13), en m tendrá S valor menor que en h . El máximo de S corresponde á la capa de fibras neutras, y el mínimo, que es cero, á las capas más alejadas, ó sea á las superficies superior é inferior.

467. Aplicaciones. 1.ª Sección rectangular (fig. 18, lám. 13):

$$u = a = \text{constante} \quad \text{,,} \quad v' = \frac{1}{2} b \quad \text{,,} \quad I = \frac{1}{12} ab^3 \quad (\text{Tabla núm. 477}).$$

Para una capa $m r$, distante z del eje,

$$\omega = \text{área del rectángulo } m r n = m r \times r n \quad \left\{ \begin{array}{l} m r = a \\ r n = \frac{1}{2} b - z \end{array} \right.$$

$$\omega = a \left(\frac{1}{2} b - z \right)$$

Además

$$h = \text{distancia del centro de gravedad al eje} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b + z \right);$$

de modo que

$$\omega h = \frac{a}{2} \left(\frac{b}{2} - z \right) \left(\frac{b}{2} + z \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

y (fórmula 5)

$$S = - \frac{C}{Ia} \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

Sustituyendo el valor de I , se tendrá:

$$S = - \frac{C}{ab} \left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{b^2} \right) \quad (6).$$

En la capa neutra, $z=0$, y

$$S = - \frac{3}{2} \frac{C}{ab} \quad (7).$$

Ejemplo: Viga de sección rectangular, $a = 0,^{m}14$, $b = 0,^{m}20$, sometida á flexión por las fuerzas que se detallan en el ejemplo del núm. **313** (fig. 25, lám. 5.ª). Se desea conocer la fuerza S de desgarramiento por unidad superficial, en A , para una capa de fibras que diste $0,^{m}04$ de la capa neutra.

Tomando las dimensiones lineales en centímetros, y puesto que el esfuerzo cortante en A vale $C = 105$ kilogramos (núm. **313**), será, aplicando la fórmula (6),

$$a = 14 \quad \text{,,} \quad b = 20 \quad \text{,,} \quad z = 4 \quad \text{,,} \quad C = 105$$

$$S = - \frac{105}{14 \times 20} \left(\frac{3}{2} - \frac{6 \times 4^2}{20^2} \right)$$

6

$$S = 0,47 \text{ kilogramos por } cm.^2$$

En la capa neutra, aplicando la fórmula (7) obtendríamos $S = 0,56$ kilogramos por $cm.^2$

468. 2.ª Sección doble T laminada (fig. 19, lám. 13). El ancho de la sección es constante é igual á c desde A hasta B , é igual á a de A á M y de B á N ; pero hay cambios bruscos de ensanchamiento en A y en B .

Para una capa de fibras tal como la $s t$, correspondiente á las tablas,

$$\omega = \text{área del rectángulo } s d = a \left(\frac{1}{2} b - z \right)$$

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b + z \right).$$

Aplicando la fórmula (5),

$$S = - \frac{C}{2I} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right) \quad (8).$$

Esta fórmula solamente es exacta para valores de z comprendidos entre $\frac{1}{2} b'$ y $\frac{1}{2} b$, pero no lo es para $z = \frac{1}{2} b'$ (capas A y B). En efecto; el ancho u de la sección varía bruscamente en A y B , pasando de $u = a$ á $u = c$, siendo así que en el cálculo que nos ha conducido á la fórmula general (5) (núm. **465**), hemos supuesto que u era una función continua de z , es decir, que u variaba de modo gradual.

Si tomamos para valor de S en A ó en B , el correspondiente á una capa st infinitamente próxima á A , podremos hacer $z = \frac{1}{2} b'$ en (8), y será

$$S = -\frac{C}{8I} (b^2 - b'^2) \quad (9).$$

469. Para una capa de fibras rn de ordenada $z < \frac{1}{2} b'$, el momento ωh se obtendrá hallando la suma de los momentos de los rectángulos Nm , y mn , siendo h y h' , respectivamente, los brazos de palanca. Tenemos, pues, para valor de estos momentos parciales, llamando c al grueso rn del alma,

$$\begin{aligned} \text{rectángulo } Nm \dots a \left(\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} b' \right) \times h & \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} b' \right) \\ \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b'^2}{4} \right) \end{array} \right. \\ \text{rectángulo } mn \dots \left\{ \begin{array}{l} rn = c \\ c \left(\frac{1}{2} b' - z \right) \end{array} \right. h' & \left\{ \begin{array}{l} h' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b' + z \right) \\ \frac{c}{2} \left(\frac{b'^2}{4} - z^2 \right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

El momento total del área Nr con respecto al eje, será:

$$\frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b'^2}{4} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{b'^2}{4} - z^2 \right)$$

y haciendo $st - rn = a - c = a'$,

$$\frac{1}{8} (a b^2 - a' b'^2) - \frac{c z^2}{2}.$$

Resulta, pues, aplicando la fórmula 5, que para valores de z comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2} b'$ (alma de la doble T),

$$S = -\frac{C}{I} \left(\frac{a b^2 - a' b'^2}{8c} - \frac{z^2}{2} \right) \quad (10).$$

Para la capa neutra, $z = 0$, y

$$S = -\frac{C}{8Ic} (a b^2 - a' b'^2) \quad (11).$$

Para una capa infinitamente próxima á la B , podremos hacer, sin error sensible $z = \frac{1}{2} b'$ en la (10), y entonces resulta, recordando que $a' + c = a$,

$$S = -\frac{C a}{8Ic} (b^2 - b'^2) \quad (12).$$

Si comparamos los valores (9) y (12), se observa que el primero se obtiene multiplicando el segundo por el factor $\frac{a}{c}$, que es mayor que la unidad.

Resulta, por tanto, que S cambia bruscamente de valor al pasar, en las inmediaciones de A ó de B , de una capa correspondiente á las tablas de la doble T , á otra infinitamente próxima pero correspondiente ya al alma.

Cuando se busque el valor de S correspondiente á las capas A y B de unión de las tablas y del alma, se tomará el valor (12), que es $\frac{a}{c}$ veces mayor que el (9), con lo cual resultará beneficiada la *resistencia* en los cálculos correspondientes.

En las caras M y N , inferior y superior de la doble T , es $z = \frac{1}{2} b$; y sustituyendo en (8) se halla $S = 0$.

Ejemplo. Viga de doble T de alas anchas, cuyas dimensiones de sección transversal son (tomando por unidad el milímetro).

$$\begin{array}{ll} a = 130 & \text{''} \quad a' = a - c = 118 \\ b = 300 & \text{''} \quad b' = 250. \\ c = 12 & \text{''} \end{array}$$

El esfuerzo cortante máximo á que se halla sometida esta viga por efecto de la flexión, supongamos es de $C = 2000$ kilogramos y que tenga lugar en las secciones extremas. Se desea conocer la fuerza de desgarramiento longitudinal S por milímetro cuadrado, en dichos extremos, para las diversas capas de fibras.

Habremos de aplicar las fórmulas (11) y (12), y á este efecto deberemos empezar por formar el valor del momento de inercia $I = \frac{a b^3 - a' b'^3}{12}$ (tabla

del núm. 477); y puesto que tomamos como unidad lineal el milímetro,

$$\begin{aligned}
 a b^3 &= 130 \times \overline{300^3} = 3\ 510\ 000\ 000 \\
 a' b'^3 &= 118 \times \overline{250^3} = 1\ 843\ 750\ 000 \\
 I &= \frac{a b^3 - a' b'^3}{12} = \frac{1\ 666\ 250\ 000}{12} = 138\ 854\ 166.
 \end{aligned}$$

En la capa neutra (fórmula 8) será, prescindiendo del signo menos,

$$S = \frac{2000}{8 \times 138\ 854\ 166 \times 12} (130 \times \overline{300^2} - 118 \times \overline{250^2})$$

6

$$S = 0,62 \text{ kilogramos por milímetro cuadrado.}$$

En la capa *B* (fig. 19, lám. 13) común al alma y á la tabla, tendremos (fórmula 12), prescindiendo también del signo,

$$S = \frac{2000 \times 130}{8 \times 138\ 854\ 166 \times 12} (\overline{300^2} - \overline{250^2}) = 0,51 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

470. 3.ª Doble *T* compuesta de un alma y cuatro escuadras (fig. 1.ª, lám. 14).

Entre $\frac{1}{2} b$ y $\frac{1}{2} b'$ (ramas horizontales de las escuadras),

$$S = -\frac{C}{I} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \quad (13).$$

Entre $\frac{1}{2} b'$ y $\frac{1}{2} b''$ (ramas verticales de las escuadras),

$$S = -\frac{C}{I a'} \left(\frac{a b^2}{8} + \frac{(a' - a) b'^2}{8} - \frac{a' z^2}{2} \right) \quad (14).$$

Para $z = \frac{1}{2} b'$,

$$S = -\frac{C a}{8 I a'} (b^2 - b'^2) \quad (15).$$

Entre 0 y $\frac{1}{2} b''$ (alma de la viga).

$$S = -\frac{C}{I a''} \left(\frac{a b^2}{8} + \frac{b'^2 (a' - a)}{8} + \frac{b''^2 (a'' - a')}{8} - \frac{a'' z^2}{2} \right) \quad (16);$$

haciendo $z = \frac{1}{2} b''$,

$$S = -\frac{C}{8 I a''} [a b^2 + b'^2 (a' - a) - a' b''^2] \quad (17).$$

471. 4.ª Doble *T* compuesta de un alma de palastro, cuatro escuadras y dos tablas (fig. 2.ª, lám. 14).

Cada una de las tablas puede estar formada de uno ó más palastros de ancho *a*, superpuestos: $\frac{b - b'}{2}$ representa la suma de espesores de estos palastros.

Entre $\frac{1}{2} b$ y $\frac{1}{2} b'$ (tablas),

$$S = -\frac{C}{I} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \quad (18).$$

Entre $\frac{1}{2} b'$ y $\frac{1}{2} b''$ (ramas horizontales de las escuadras);

$$S = -\frac{C}{I a'} \left(\frac{a b^2}{8} + \frac{(a' - a) b'^2}{8} - \frac{a' z^2}{2} \right) \quad (19).$$

Para $z = \frac{1}{2} b'$ (unión de las tablas con las ramas horizontales de las escuadras),

$$S = -\frac{C a}{8 I a'} (b^2 - b'^2) \quad (20).$$

Entre $\frac{1}{2} b''$ y $\frac{1}{2} b'''$ (ramas verticales de las escuadras),

$$S = -\frac{C}{I a''} \left(\frac{a b^2}{8} + \frac{b'^2 (a' - a)}{8} + \frac{b''^2 (a'' - a')}{8} - \frac{a'' z^2}{2} \right) \quad (21).$$

Para $z = \frac{1}{2} b''$,

$$S = -\frac{C}{8 I a''} [a b^2 - b'^2 (a' - a) - a'' b''^2] \quad (22).$$

Entre 0 y $\frac{1}{2} b'''$ (alma de la viga),

$$S = -\frac{C}{I a'''} \left(\frac{a b^2}{8} + \frac{b'^2 (a' - a)}{8} + \frac{b''^2 (a'' - a')}{8} + \frac{b'''^2 (a''' - a'')}{8} - \frac{a''' z^2}{2} \right) \quad (23)$$

Para $z = \frac{1}{2} b'''$,

$$S = -\frac{C}{8 I a'''} [a b^2 + b'^2 (a' - a) + b''^2 (a'' - a') - a''' b'''^2] \quad (24).$$

472. Distribución del esfuerzo cortante dentro de cada sección transversal (fig. 17, lám. 13). — El esfuerzo cortante C correspondiente á una sección transversal cualquiera, no se reparte uniformemente en el área ω de dicha sección; es decir, que el esfuerzo cortante por unidad superficial no será $\frac{C}{\omega}$, sino que tendrá valores mayores ó menores según la parte de sección transversal que se considere.

En efecto; representemos por c y c' los esfuerzos cortantes por unidad superficial correspondientes á las bases $mn, m'n'$, de la capa de fibras $mnn'm'$, y por k la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas al prisma en el intervalo $AB = dx$. Los esfuerzos cortantes totales en las bases $mn, m'n'$, serán, respectivamente, $cu dz$ y $c'u' dz$.

Estas fuerzas, en unión de las P, P', k (núm. 464), y de las $Sudx, S'u'dx$ (núm. 465) que actúan sobre la capa de fibras considerada, han de equilibrarse, de modo que la suma de momentos con relación á un punto cualquiera, al O por ejemplo (punto de paso de la fuerza k), ha de ser cero. Observando, además, que los momentos de P, P' y k son cero, y que las fuerzas c y c' , así como las S y S' , difieren entre sí infinitamente poco, resulta, siendo $mn = dz$,

$$Sudxdz + cudzdx = 0$$

ó

$$c = -S.$$

De donde se deduce que el esfuerzo cortante c por unidad superficial, en un punto cualquiera m de la sección transversal NQ , es igual á la fuerza de desgarramiento S por unidad superficial que corresponde á la capa de fibras mm' en la superficie mm .

Como S crece desde cero (capas más alejadas de la neutra) hasta un cierto valor máximo (capa neutra), según hemos visto ya (núm. 466), sucederá lo mismo á su igual c , y por tanto, el esfuerzo cortante por unidad superficial, en una sección transversal, se distribuye por capas paralelas de modo desigual, desde cero que es el valor que corresponde á las partes de área más alejadas del centro de gravedad, hasta un máximo (igual á la fuerza S de desgarramiento en la capa neutra) en las partes inmediatas á dicho centro.

Si las magnitudes de c se representasen por intensidades de tintas, el corte transversal de la fig. 17 pone de manifiesto la distribución del esfuerzo cortante.

FUERZAS TANGENCIAL Y DE COMPRESIÓN PRODUCIDAS POR LA FLEXIÓN
EN UN PLANO DE DIRECCIÓN CUALQUIERA

473. Hemos visto que en un punto cualquiera m de una viga flexada se produce (fig. 18, lám. 15):

- 1.º Una compresión p por unidad superficial en dirección normal al plano NQ .
- 2.º Una fuerza de desgarramiento S por unidad superficial á lo largo de la capa mm' .
- 3.º Un esfuerzo cortante c por unidad superficial (de valor igual á S), tangencial al plano NQ .

Tracemos por el punto m un plano ED , normal al plano longitudinal de simetría de la viga (ó plano de flexión), que forme un ángulo α con el de fibras neutras. Se trata de determinar la fuerza p' por unidad superficial, de compresión ó de extensión, que se desarrolla normalmente á dicho plano, y la tangencial S' por unidad de superficie en el punto m .

Consideremos dos secciones transversales infinitamente próximas (fig. 19, lám. 15), y sea mn' el plano dado, que forma el ángulo $n'mm' = \alpha$. Supongamos, también, que la dimensión del prisma, contada normalmente

al plano de la figura, sea la unidad. En el prisma $m n n'$ actúan las fuerzas siguientes (figs. 19 y 20, lám. 15).

	ÁREA	Fuerza por unidad superficial.	Fuerza total.
Cara $n n'$	$n n' \times 1 = d x$..	S (tangencial).....	$S d x$
Cara $n m$	$n m \times 1 = d z$..	p (normal)..... $c = S$ (tangencial)....	$p d z$ $c d z$
Cara $m n'$	$m n' \times 1 = d s$..	p' (normal)..... S' (tangencial).....	$p' d s$ $S' d s$

Puesto que estas fuerzas totales han de estar en equilibrio, sus proyecciones sobre $m n'$, y sobre una normal á esta recta, han de ser cero; luego

$$\begin{aligned} p' d s &= S d x \operatorname{sen} a + S d z \cos a + p d z \operatorname{sen} a \\ S' d s &= S d x \cos a - S d z \operatorname{sen} a + p d z \cos a \end{aligned}$$

y puesto que

$$\begin{aligned} d x &= d s \cos a \\ d z &= d s \operatorname{sen} a, \end{aligned}$$

dividiendo por $d s$ se tendrá,

$$p' = S \operatorname{sen} 2 a + \frac{1}{2} p (1 - \cos 2 a) \quad (1)$$

$$S' = S \cos 2 a + \frac{1}{2} p \operatorname{sen} 2 a \quad (2)$$

que resuelven el problema propuesto.

Si se quiere determinar la dirección del plano $D E$ correspondiente á un máximo de la presión ó extensión normal p' por unidad superficial, y la relativa al máximo de fuerza tangencial S' , haríamos $\frac{d p'}{d a} = 0$ y $\frac{d S'}{d a} = 0$.

La primera ecuación conduce á $\operatorname{tg} 2 a = -\frac{2 S'}{p}$ (3); y sustituyendo el

valor de a , deducido de esta ecuación, en la (1), se obtiene para máximo de p' ,

$$p'_0 = \frac{1}{2} \left(p \mp \sqrt{4 S'^2 + p^2} \right) \quad (4).$$

El ángulo a , cuyo valor obtenido por la ecuación (3) fija la posición del plano $D E$ correspondiente á p'_0 , depende de la situación del punto m , puesto que es función de S y de p .

Si el punto m está en A ó en C (fig. 21, lám. 15), caras superior é inferior del prisma, como S es entonces igual á cero (núm. 466), resulta $\operatorname{tg} 2 a = 0$, es decir, que $a = 0$, ó $a = 90^\circ$, lo cual demuestra que las direcciones de la presión ó extensión máximas, son, normal al eje de la viga en A y paralela en C . La expresión (4) se convierte tomando el signo más, que es el que corresponde al máximo, en $p'_0 = p$.

Cuando el punto m es uno de la capa neutra tal como el B , la presión p es cero (núms. 304 y 306) de modo que $\operatorname{tg} 2 a = \infty$ es decir, que $a = 45^\circ$ ó $a = 135^\circ$. Dedúcese que p'_0 se ejercerá, en los puntos de la fibra neutra, en dirección de 45° contados á uno ú otro lado del eje (puntos B y F). El valor p'_0 deducido de (4) es aquí $p'_0 = S$.

Si, por tanto, quisiéramos dibujar las líneas de mayores presiones ó extensiones normales, resultarían curvas como la $A B C D$, ó como su simétrica, con respecto al eje, $A' C' D'$ (figs. 21 y 22, lám. 15); y si se parte de otros puntos d , d' , etc. (fig. 22), tendríamos dibujada la red completa de líneas de extensiones ó presiones máximas.

La ecuación $\frac{d S'}{d a} = 0$ conduce á $\operatorname{tg} 2 a' = \frac{p'}{2 S'}$ (5), que determina las direcciones del plano $D E$ (fig. 18, lám. 15) correspondientes á los esfuerzos tangenciales S'_0 máximos.

El máximo S'_0 , correspondiente al a' anterior, deducido de la ecuación (2) es

$$S'_0 = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 4 S'^2} \quad (6).$$

Comparando los valores de a y a' deducidos de (3) y (5) se observa que se diferencian en 90° , de manera que las curvas $N M P$ y $N' M P'$ (fig. 23), según las cuales se ejercen los máximos esfuerzos tangenciales, cortan á 45° las fibras extremas (puntos N , P , $N' P'$, etc.), y son tangentes á la fibra

media (punto M); y estos mismos valores se deducen de la fórmula (5). En efecto:

$$\begin{array}{l} \text{puntos } N \text{ y } P \dots\dots\dots S = 0 \quad \text{,,} \quad \text{tg } 2 a' = \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} a' = 45^\circ \\ a' = 135^\circ \end{array} \right. \\ \text{punto } M \dots\dots\dots p = 0 \quad \text{,,} \quad \text{tg } 2 a' = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a' = 0 \\ a' = 180^\circ \end{array} \right. \end{array}$$

Para los puntos N, P, N', P' en que $S = 0$, es $S'_0 = \frac{1}{2} p$; y para el punto M , en el cual $p = 0$, se obtiene $S'_0 = S$.

474. Resumiendo cuanto queda dicho relativo á los valores de p' y S'_0 dados por las fórmulas (4) y (6) diremos que si se consideran las compresiones, extensiones y esfuerzos cortantes que por efecto de la flexión se producen en el interior del prisma, en una dirección cualquiera contenida en el plano de flexión, resulta:

1.º En las capas de fibras extremas, las presiones ó extensiones máximas p'_0 son las mismas p por unidad superficial que obran paralelamente al eje, y que tienen por valor $p = \frac{M v}{I}$ (fórmulas 6 á 9 del núm. 460).

2.º En otras capas de fibras intermedias, situadas á distancia z de la neutra, p'_0 es mayor que el valor correspondiente de p dado por $p = \frac{M z}{I}$ (fórmula 2 del núm. 458), si bien el exceso es, en general, de pequeña magnitud; de modo que en una cierta dirección (dada por la fórmula 3) diferente de la paralela al eje del prisma, la compresión ó extensión por unidad superficial puede ser mayor que la p desarrollada á lo largo de las fibras.

3.º El esfuerzo tangencial máximo por unidad superficial S'_0 en puntos de la capa neutra, es igual al S de desgarramiento longitudinal.

4.º El valor de S'_0 que se ejerce en otras capas, en dirección dada por la fórmula (5), es algo mayor que el S de desgarramiento longitudinal (ecuación 6).

Se podría trazar, en las caras laterales del prisma, la red completa de líneas correspondientes á p' y S'_0 . No lo hemos hecho por no complicar las figuras.

2. MOMENTOS DE INERCIA

475. Necesidad del conocimiento de los valores de I y de $\frac{I}{v}$. — La ecuación de resistencia en los problemas de flexión (ecuación 12 del número 460), es

$$\frac{R I}{v} = \frac{1}{n} P l$$

en la cual:

R = coeficiente de trabajo por extensión (ó por compresión), que queremos aplicar á las fibras que trabajan más.

I = momento de inercia de la sección transversal de la viga con relación al eje que pasa por su centro de gravedad, normal al plano longitudinal de simetría.

v = máxima distancia á la capa neutra, ó eje de la viga, de las fibras más alejadas.

n = número que depende del caso de flexión que se considere.

P = fuerza total, aislada ó repartida, que actúa sobre la viga.

l = longitud de la viga contada entre los apoyos ó empotramientos.

De la ecuación anterior se deduce que á igual seguridad en la obra (valor de R) é igual caso de flexión (n y l), la carga total P que se podrá aplicar á una viga sometida á flexión será proporcional al cociente $\frac{I}{v}$. Es decir, que una viga resistirá tanto más cuanto mayor sea el valor de $\frac{I}{v}$ de su sección transversal. Por esta razón dicho cociente $\frac{I}{v}$ es llamado por muchos ingenieros *momento resistente*.

La fórmula general que determina la flecha de curvatura, hallada en el

núm. 405 (3), $f = k \frac{P l^3}{E I}$, manifiesta también que para un mismo material y un mismo caso de flexión, ó lo que es lo mismo, para valores iguales de E (coeficiente de elasticidad), l (longitud de la viga) y k (factor que depende del caso de flexión), la flecha f será tanto menor cuanto mayor sea el momento de inercia I .

Si, por último, nos fijamos en el valor del esfuerzo de desgarramiento longitudinal que se produce en la flexión (núm. 465, fórmula 5), hallaremos que disminuye cuando aumenta I .

Deduciremos, en definitiva, que la resistencia y rigidez de una viga sometida á flexión dependen de $\frac{I}{v}$ y de I , y que deberá procurarse siempre que estos valores sean los mayores posibles. Además, es necesario el conocimiento del valor de I en función de las dimensiones de su sección transversal, ó de su *escuadría*, para obtener, en las fórmulas anteriores, relaciones entre dichas dimensiones, las cargas y la flecha, y poder resolver todos los problemas de flexión.

476. Principios fundamentales. — Recordaremos que el momento de inercia I de una superficie, con relación á un eje OX situado en un plano (fig. 3.^a, lám. 14), es la suma de los productos parciales de cada elemento de área $d\omega = dz dx$ por el cuadrado z^2 de su distancia al eje OX . Será, pues, $I = \Sigma z^2 d\omega$ ó $I = \int \int z^2 dx dz$.

Con arreglo á esta definición hemos introducido en el cálculo de la flexión el factor I , al formar el momento M' de las fuerzas elásticas (fórmulas 4, 5 y 10 del núm. 307).

No es de este lugar el desarrollo completo de la teoría de momentos de inercia; nos limitaremos á dar á conocer los resultados, es decir, las expresiones de I y de $\frac{I}{v}$ para las formas de sección transversal empleadas en las construcciones, pero antes recordaremos lo siguiente:

1.º El momento de inercia I es un producto de cuatro dimensiones. Si al encontrar su valor, tomando las dimensiones de la figura en una cierta unidad de medida, en metros, por ejemplo, queremos pasar al correspondiente á otra unidad, decímetros, centímetros, milímetros, habrá que multiplicar el valor de I por 10000, 10000², 10000³, etc., es decir, por una potencia de 10000 cuyo exponente señale la diferencia en el orden de unidades de medida. Para

pasar de las inferiores á las superiores, habrá necesidad de dividir por 10⁴, 100⁴, etc.

Por ejemplo, el momento de inercia I de una vigueta doble T laminada, de $\frac{80 \times 40}{5}$ es:

	I
Tomando las dimensiones de la sección transversal en metros.....	0, 000 000 710
Idem íd. íd. en decímetros.....	0, 007 100
Idem íd. íd. en centímetros.....	71. 00
Idem íd. íd. en milímetros.....	710000. 00

En cuanto á $\frac{I}{v}$, como es el producto de tres dimensiones, exigirá, para pasar de unas unidades á otras, que se multiplique ó divida por 100³.

Conviene tener muy presente esta circunstancia, porque la homogeneidad de las fórmulas en que entran I ó $\frac{I}{v}$ obliga á formar sus valores empleando la misma unidad de medida que se aplique á las demás cantidades (número 461), y habrá necesidad de pasar muchas veces de una unidad á otra.

2.º Puede hacerse $I = \omega r^2$, siendo ω el área total de la figura y r una cantidad llamada *radio de giro*.

$$\text{Se deduce que } r = \sqrt{\frac{I}{\omega}} \quad "$$

3.º En las figuras poligonales y en el círculo, son iguales los momentos de inercia con relación á todas las rectas contenidas en su plano que pasen por el centro de gravedad de la figura.

4.º Si llamamos I_x al momento de inercia de la figura A con respecto al eje XX (fig. 3.^a, lám. 14), y I_y al relativo al eje YY paralelo al anterior y que pasa por el centro de gravedad G , siendo h la distancia entre ambos ejes y ω el área de A , se obtiene

$$I_x = I_y + \omega h^2.$$

5.º De la definición de momento de inercia se deduce que siempre que no se altere el valor de las áreas elementales ni el de sus distancias al eje, po-

dremos modificar su posición, moviéndolas paralelamente á dicho eje, sin que por esto cambie el valor de I .

Así, el momento de inercia de la figura A (fig. 7.^a, lám. 15) es el mismo que el de la corona anular B (*) (fig. 6.^a). Del mismo modo, si suponemos cortada la doble T de la fig. 21 (lám. 14) por un plano $D D'$ y se traslada una de las mitades paralelamente á sí misma hasta que se una á la otra mitad por sus extremos, se encuentra el tubo rectangular B (fig. 18), cuyo momento de inercia es el mismo.

Haremos frecuente aplicación de estas equivalencias. Se encuentra que tienen el mismo momento de inercia:

Un hierro en escuadra y un hierro en T (figs. 35 y 37, lám. 14).

Una T y una U (figs. 35 y 36, lám. 14).

Una doble T acostada y una cruz (figs. 31 y 32, lám. 14).

Las figs. 23 y 24 (lám. 14).

Las figs. 26 y 27 (lám. 14).

Las figs. 28 y 29 (lám. 14).

Se facilita sobremanera la determinación de los momentos de inercia con este procedimiento.

Dedúcese de lo precedente, y de lo que dejamos dicho en el núm. 415, que las secciones equivalentes en el valor de I , lo son en el de $\frac{I}{v}$, y por tanto en la resistencia á la flexión.

6.º Puede decirse, con arreglo á la definición del núm. 476, que el momento de inercia de una corona circular, se obtendrá hallando la diferencia de los momentos de inercia de los círculos de radio exterior r é interior r' (fig. 6.^a, lám. 15); y en el tubo rectangular (fig. 18, lám. 14) I es la diferencia entre los valores correspondientes á los rectángulos exterior é interior. La misma regla puede aplicarse á las secciones figs. 17, 25, 27, 29 (lám. 14), 13 (lám. 15), etc.

En las figs. 28 y 29 (lám. 14), por ejemplo, el momento de inercia total se obtendrá resultando del momento de inercia correspondiente al rectángulo exterior $m n s r$ supuesto lleno, los momentos de inercia de las figuras siguientes:

(*) Convendrá tenerlo en cuenta cuando se quieran resolver los problemas de resistencia á la flexión, relativos á láminas ondeadas de zinc, palastro de hierro ó de acero, etc., que tan frecuentemente se emplean en las construcciones.

Rectángulo A .

Dos rectángulos B , ó sea un rectángulo doble del B .

Dos rectángulos C , ó uno de base doble.

477. Fórmulas de valores de I , v , $\frac{I}{v}$ y ω , para las secciones de vigas empleadas en las construcciones. — Á continuación damos los valores de I , v , (v' y v''), $\frac{I}{v}$ y ω para las secciones que podrán encontrarse en las construcciones.

NÚMERO	SECCIONES	MÓDULO DE SECCIÓN Ó MOMENTO RESISTENTE		SUPERFICIE ω	
		MOMENTO DE INERCIA I	DISTANCIA v		
LÁMINA 14.					
1	Rectángulo (fig. 4. ^a).....	$\frac{a b^3}{12}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{a b^2}{6}$	$a b$
2	Cuadrado (fig. 5. ^a).....	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
3	Rectángulo (fig. 6. ^a).....	$\frac{a b^3}{3}$	b	$\frac{a b^2}{3}$	$a b$
4	Cuadrado (fig. 7. ^a).....	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{b^3 \sqrt{2}}{12} = 0,118 b^3$	b^2
5	Rombo (fig. 8. ^a).....	$\frac{1}{48} a b^3$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{1}{24} a b^2$	$\frac{1}{2} a b$
6	Paralelógramo (fig. 9. ^a).....	$\frac{1}{12} a b^3$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{1}{6} a b^2$	$a b$
7	Rectángulo inclinado (fig. 10.)	$\frac{1}{6} a h^3$	h	$\frac{1}{6} a h^2$	$a h$
8	Idem (fig. 11.).....	$\frac{1}{12} (b^2 \text{sen}^2 \alpha + a^2 \text{cos}^2 \alpha) a b$	$\frac{b \text{sen} \alpha + a \text{cos} \alpha}{2}$	$\frac{(b^2 \text{sen}^2 \alpha + a^2 \text{cos}^2 \alpha) a b}{6 (b \text{sen} \alpha + a \text{cos} \alpha)}$	$a b$
9	Exágono (fig. 12.).....	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4 = 0,5413 b^4$	$\frac{\sqrt{3}}{4} b = 0,866 b$	$\frac{5}{8} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2 = 2,598 b^2$
10	Idem (fig. 13.).....	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4$	b	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2$
11	Octógono (fig. 14.).....	$\frac{1 + 2 \sqrt{2}}{6} b^4 = 0,683 b^4$	$0,924 b$	$0,6906 b^3$	$2,828 b^2$
12	Triángulo (fig. 15.).....	$\frac{a b^3}{36}$	$v' = \frac{b}{3}$ $v'' = \frac{2}{3} b$	$\frac{I}{v'} = \frac{a b^2}{12}$ $\frac{I}{v''} = \frac{a b^2}{18}$	$\frac{a b}{2}$
13	Trapezio (fig. 16.).....	$\frac{a^2 + 4 a a' + a'^2}{36 (a + a')} b^3$	$\frac{a + 2 a'}{a + a'} \cdot \frac{b}{3}$ $\frac{2 a + a'}{a + a'} \cdot \frac{b}{3}$	$\frac{I}{v'} = \frac{a^2 + 4 a a' + a'^2}{12 (a + 2 a')} b^2$ $\frac{I}{v''} = \frac{a^2 + 4 a a' + a'^2}{12 (2 a + a')} b^2$	$\frac{a + a'}{2} b$
14	Rectángulo hueco (fig. 17.).....	$\frac{a (b^3 - b'^3)}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{a (b^3 - b'^3)}{6 b}$	$a (b - b')$
15	Tubo rectangular, doble T y T' (figs. 18, 21, 22 y 34.).....	$\frac{a b^3 - a' b'^3}{12}$ " $a' = m + n + r$ (fig. 22).	$\frac{b}{2}$	$\frac{a b^3 - a' b'^3}{6 b}$	$a b - a' b'$
16	Rectángulo (fig. 19.).....	$a b h^2 + \frac{1}{12} a b^3$	$h + \frac{1}{2} b$	$a b^2 + \frac{1}{12} a b^3$	$a b$
17	Palastro (fig. 20).....	$\frac{1}{2} \omega h^2 = \frac{1}{2} a b h^2$	$\frac{1}{2} h$	$a b h$	$2 a b$
18	Doble T compuesta (figs. 23 y 24.).....	$\frac{2}{3} [a h^3 - (a - a') h'^3 - (a' - a'') h''^3 - (a'' - a''') h'''^3]$	h	$\frac{2}{3} [a h^2 - (a - a') h'^2 + (a' - a'') h''^2 - (a'' - a''') h'''^2]$	$2 a h - (a - a') h' - (a' - a'') h'' - (a'' - a''') h'''$
19	Idem otra fórmula (fig. 25) ..	$\frac{a b^3 - (a' b'^3 + a'' b''^3 + a''' b'''^3)}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{a b^3 - (a' b'^3 + a'' b''^3 + a''' b'''^3)}{6 b}$	$a b - (a' b' + a'' b'' + a''' b''')$
20	Idem (figs. 26 y 27.).....	$\frac{a b^5 - (a' b'^5 + a'' b''^5 + a''' b'''^5 + a^{IV} b^{IV^5})}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{a b^5 - (a' b'^5 + a'' b''^5 + a''' b'''^5 + a^{IV} b^{IV^5})}{6 b}$	$a b - (a' b' + a'' b'' + a''' b''' + a^{IV} b^{IV})$

NÚMERO	SECCIONES	MOMENTO DE INERCIA I	DISTANCIA	MÓDULO DE SECCIÓN Ó MOMENTO RESISTENTE	SUPERFICIE ω
			v	$\frac{I}{v}$	
21	Doble T compuesta (figs. 28 y 29)	$\frac{ab^3 - (a'b'^3 + a''b''^3)}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{ab^3 - (a'b'^3 + a''b''^3)}{6b}$	$ab - (a'b' + a''b'')$
22	T, doble T y cruz (figs. 30, 31 y 32).....	$\frac{ab^3 + a'b'^3}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{ab^3 + a'b'^3}{6b}$	$ab + a'b'$
23	Doble T (figs. 33 y 34)	$\frac{ab^3 - (a'b'^3 + a''b''^3)}{12}$	$\frac{1}{2} b$	$\frac{ab^3 - (a'b'^3 + a''b''^3)}{6b}$	"
24	T, escuadra y U (figs. 35, 36 y 37).....	$\frac{1}{3} [a(v'^3 - h^3) + a'(h^3 + v''^3)]$	$\frac{h^2 + a'b'(b+h')}{2[a^2 - (a-a')b']}$ $v' = b - v''$	$\frac{I}{v'} \quad " \quad \frac{I}{v''} \quad "$	$ak' + a'b'$
25	Tirregular (lám. 15, fig. 1. ^a)...	$\frac{1}{3} [a(v'^3 - h^3) + a'(h^3 + h''^3) + a''(v''^3 - h'^3)]$	Se determina gráficamente (lám. 341).	$\frac{I}{v'} \quad " \quad \frac{I}{v''} \quad "$	$a(v' - h) + a'(h + h') + a''(v'' - h')$
26	Idem (fig. 2. ^a)	$\frac{1}{3} [a(v'^3 - h^3) + a'(h^3 + h'^3 - c^3 - e^3) + a''(v''^3 - h'^3)]$	Se determina gráficamente (lám. 341).	$\frac{I}{v'} \quad " \quad \frac{I}{v''} \quad "$	$a(v' - h) + a'(h + h' - c - e) + a''(v'' - h')$
27	Idem (fig. 3. ^a).....	$\frac{1}{3} \left(\frac{a' - a''}{4(h + v'')} (v''^4 - h^4) + a(v'^3 - h^3) + a''(h^3 + v''^3) \right)$	Se determina gráficamente (lám. 341).	$\frac{I}{v} \quad " \quad \frac{I}{v} \quad "$	$a(v' - h) + \frac{a' + a''}{2} (h + v'')$
28	Idem (fig. 4. ^a).....	$\frac{1}{3} \left(\frac{a' - a''}{4(h + h')} (h'^4 - h^4) + a(v'^3 - h^3) + a''(h^3 + h'^3) + a'''(v''^3 - h'^3) \right)$	Se determina gráficamente (lám. 341).	$\frac{I}{v'} \quad " \quad \frac{I}{v''} \quad "$	$a(v' - h) + \frac{a' + a''}{2} (h + h') + a'''(v'' - h')$
29	Círculo (fig. 5. ^a).....	$\frac{\pi r^4}{4} = 0,785 r^4$	r	$\frac{\pi r^3}{4}$	πr^2
30	Corona circular. Chapa on-deada (figs. 6. ^a y 7. ^a).....	$\frac{\pi}{4} (r^4 - r'^4) = 0,785 (r^4 - r'^4)$	r	$\frac{\pi}{4} \frac{r^4 - r'^4}{r}$	$\pi (r^2 - r'^2)$
31	Semicírculo (fig. 8. ^a).....	0,110 r^4	r $i = 0,575 r$ $v = 0,441 r$	$\frac{I}{v} = 0,19 r^3$ $\frac{I}{v'} = 0,26 r^3$	$\frac{\pi r^2}{2}$
32	Elipse (fig. 9. ^a).....	$\frac{\pi}{4} ab^3 = 0,785 ab^3$	b	$\frac{\pi}{4} ab^2$	πab
33	Corona elíptica (fig. 10).....	$\frac{\pi}{4} (ab^3 - a'b'^3) = 0,785 (ab^3 - a'b'^3)$	b	$\frac{\pi}{4} \frac{ab^3 - a'b'^3}{b}$	$\pi (ab - a'b')$
34	Semielipse (fig. 11).....	0,0457 ab^3	b $i = \frac{3}{5} b$ $v = \frac{2}{5} b$	$\frac{I}{v} = 0,076 ab^2$ $\frac{I}{v'} = 0,114 ab^2$	$\frac{2}{3} ab$
35	Círculo con nervios (fig. 12)...	$\frac{1}{12} \left(\frac{3\pi}{16} d^4 + b'(b^3 - d^3) + b''(b - d) \right)$	b	$\frac{1}{6b} (0,589 d^4 + b'(b^3 - d^3) + b''(b - d))$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2b'(b - d)$
36	Idem hueca (fig. 13).....	El anterior menos $\frac{\pi r^4}{4}$	"	"	"
37	Doble T no simétrica (fig. 14)...	$I = A - BH \quad " \quad H = \frac{I}{b}$ siendo $\begin{cases} A = abh^2 + a'b'h'^2 + \dots + a^{VI}b^{VI} \\ B = abh + a'b'h' + \dots + a^{VI}b^{VI} \\ \omega = ab + a'b' + \dots + a^{VI}b^{VI} \end{cases}$	v, v'	$\frac{I}{v'} \quad " \quad \frac{I}{v''}$	$ab + a'b' + \dots + a^{IV}b^{IV}$
38	Superficie cualquiera (fig. 15)...	$\frac{c}{3} [h^2 a_0 + 4(h+c)^2 a_1 + 2(h+2c)^2 a_2 + 4(h+3c)^2 a_3 + \dots + 4(h+b-c)^2 a_{n-1} + (h+b)^2 a_n]$	"	$\frac{I}{c}$	$c \left(\frac{a_0 + a_n}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \right)$

477'. Secciones huecas de paredes delgadas, de grueso uniforme e , cuando este grueso es muy pequeño relativamente á las demás dimensiones. Este es el caso de las vigas tubulares de palastro. Las expresiones que á continuación damos, son de sencilla aplicación.

Círculo (fig. 24, lám. 15).

$$I = \pi r^3 e$$

$$\frac{I}{v} = \pi r^2 e$$

$$\omega = 2\pi r.$$

Círculo reforzado con una cruz interior (fig. 25, lám. 15).

$$I = 3,816 r^3 e$$

$$\frac{I}{v} = 3,816 r^2 e$$

$$\omega = (\pi + \pi^2) 2 r e.$$

En esta sección, como en las demás, e representa el espesor, uniforme, de todos los elementos que la constituyen.

Cuadrado de lado b (figs. 26 y 27, lám. 15).

	Figura 26.	Figura 27.
I	$\frac{2b^3e}{3}$	$\frac{2b^3e}{3}$
$\frac{I}{v}$	$\frac{4b^2e}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}b^2e}{3}$
ω	$4be$	$4be$

Rectángulo y hierro Zorès de almas verticales (figs. 28 y 29, lám. 15).

$$I = \frac{b^3e(3a+b)}{6}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{be(3a+b)}{2}$$

$$\omega = 2(a+b)e$$

Elipse (fig. 10, lám. 15).

$$I = \frac{\pi b^3e(3a+b)}{4}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{\pi be(3a+b)}{4}$$

$$\omega = \pi(a+b)e.$$

Cuadrado reforzado con una cruz (fig. 30, lám. 15).

$$I = \frac{3b^3e}{4}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{3b^2e}{2}$$

$$\omega = 6be.$$

Rombo (fig. 36, lám. 15).

$$I = \frac{b^3e\sqrt{a^2+b^2}}{6}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{be\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\omega = 2e\sqrt{a^2+b^2}$$

Té y escuadra de ramas desiguales (figs. 3.^a y 6.^a, lám. 21).

$$I = \frac{b^3e(4a+b)}{12(a+b)}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b^2e(4a+b)}{6(a+2b)}$$

$$\omega = (a+b)e$$

Escuadra de ramas iguales; $a = b$.

$$I = \frac{5b^3e}{24}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{5b^2e}{18}$$

$$\omega = 2be.$$

Doble T y U (figs. 4.^a y 5.^a, lám. 21).

$$I = \frac{b^2 e (6a + b)}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b e (6a + b)}{6}$$

$$\omega = (2a + b) e$$

Escuadra de ramas iguales (fig. 31, lám. 15).

$$I = \frac{b^3 e}{12}$$

$$\frac{I}{\omega} = \frac{b^2 e}{6}$$

$$\omega = 2 b e.$$

Hierro en U (fig. 32, lám. 15).

$$I = \frac{b^3 e (7a + 2b)}{12 (a + 2b)}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b^2 e (7a + 2b)}{12 (a + 2b)}$$

$$\omega = (a + 2b) e$$

T acostada (fig. 33, lám. 15).

$$I = \frac{b^3 e}{6}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b^2 e}{3}$$

$$\omega = (a + 2b) e$$

Palastro ondeado (fig. 34, lám. 15)

$$I = \frac{b^2 e (3a + 2b)}{20}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b e (3a + 2b)}{10}$$

$$\omega = 1,5 \left(\frac{a + 2b}{2} \right) e$$

Cruz de ramas iguales (fig. 35, lám. 15).

$$I = \frac{a^3 e}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{a^2 e}{12}$$

$$\omega = 2 a e$$

477" Otras expresiones de I , $\frac{I}{v}$ y ω , relativas á secciones en que son

diferentes los espesores de las tablas y almas. — En estas expresiones, la suma total de áreas de las tablas se representa por la letra A , y la de las almas por la letra B . La altura de la sección es b .

Tubo rectangular, T y U (figs. 18, 21, 22 y 38, lám. 14).

$$I = \frac{b^3 (3A + B)}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{b (3A + B)}{6}$$

$$\omega = A + B.$$

Cruz, T y doble T acostadas (figs. 30, 31 y 32, lám. 14).

$$I = \frac{(A + B) (b^3 + b'^3)}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{(A + B) (b^2 + b'^2)}{6}$$

$$\omega = A + B.$$

Escuadra T y U (figs. 35, 36 y 37, lám. 14).

$$I = \frac{B (4A + B) b^3}{12 (A + B)}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{B (4A + B) b}{6 (A + B)}$$

$$\omega = A + B.$$

T no simétrica (fórmula aproximada) (fig. 1.^a, lám. 15).

$$I = b^2 \frac{A A'}{A + A'}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{2 b A A'}{A + A'}$$

$$v = A + A' + B.$$

478. Observaciones relativas á los valores de *I*.—Para los entramados de madera, las vigas tienen generalmente sección rectangular y algunas veces cuadrada, de modo que se emplean mucho las expresiones núms. 1 á 4 y 7 y 8 de la tabla anterior de momentos de inercia.

Ejemplo. — Para una viga de sección rectangular cuyos lados *a* y *b* (figura 4.^a, lám. 14) sean *a* = 0^m,14 " *b* = 0^m,20, los valores de *I* y de $\frac{I}{v}$ (siendo $v = \frac{1}{2} b = 0^m,10$) son, aplicando las fórmulas

$$I = \frac{1}{12} a b^3 \quad " \quad \frac{I}{v} = \frac{a b^2}{6}$$

	En metros.	En centímetros.
<i>I</i> =	0,000093	9333
$\frac{I}{v}$ =	0,000933	933

Las expresiones núms. 7 y 8 de la tabla, correspondientes al rectángulo inclinado, tienen aplicación, entre otros casos, á las viguetas ó correas de las armaduras que cubren los edificios.

479. La expresión núm. 15 (figs. 18, 21, 22 y 38) se aplica mucho para vigas laminadas de hierro ó de acero, de forma de doble *T* ó de *U*, que se emplean frecuentemente en los entramados metálicos. Lo mismo decimos de la núm. 22 (figs. 30, 31 y 32).

Ejemplo. — Doble *T* laminada (fig. 21). Momento de inercia con respecto

á un eje normal al nervio de la *T* que pase por su centro de gravedad.

$$\text{Datos. } \begin{cases} a = 0^m,060 & a' = 0^m,052 \\ b = 0^m,200 & b' = 0^m,176 \end{cases}$$

$$I = \frac{a b^3 - a' b'^3}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{a b^2 - a' b'^2}{6 b}$$

Tomando como unidad de medida el metro, será

$$\begin{aligned} a b^3 &= 0,06 \times 0,2^3 = 0,000480 \\ a' b'^3 &= 0,052 \times 0,176^3 = 0,000283 \\ \hline a b^3 - a' b'^3 &= \dots\dots\dots 0,000197 \\ I &= \frac{a b^3 - a' b'^3}{12} \dots\dots\dots 0,0000164 \\ \frac{I}{v} &= \dots\dots\dots 0,000164 \end{aligned}$$

Si se hubiese tomado como unidad de medida el milímetro, como suele hacerse en los perfiles de vigas de hierro, hubiese sido

$$\begin{aligned} a b^3 &= 60 \times 200^3 = 48000000 \\ a' b'^3 &= 52 \times 176^3 = 283492352 \\ \hline I &= \frac{a b^3 - a' b'^3}{12} = \dots\dots\dots \frac{196507648}{12} = 16375637. \\ \frac{I}{v} &= \frac{I}{100} = 163375. \end{aligned}$$

480. La expresión núm. 14 (fig. 17) correspondiente al rectángulo hueco es la exacta. Empléase, no obstante, para las grandes vigas de hierro, la 17 (fig. 20), muy aproximada, que es mucho más sencilla. En general, siempre que *h* ó *b* tengan valor grande, ó que se trate de cálculos no muy rigurosos, se adopta para valor de *I* el 17 de la tabla; esto es lo que se hace para la determinación de los espesores de palastros (ó para su distribución) en el

cálculo de las cabezas de las vigas doble *T* empleadas como cuchillos de puentes.

481. Las expresiones 19, 20, 21 y 23 (figs. 23, 25, 26 á 29, 33 y 34, lám. 14) son de uso muy frecuente, por referirse á vigas de hierro compuestas, muy empleadas en edificios, puentes, etc.

Para dar idea de la manera de ordenar los cálculos, presentaremos un ejemplo, relativo á la sección fig. 26 (lám. 14), que tiene valor de *I* dado por fórmula más complicada.

Ejemplo. — Viga de hierro de la forma de la fig. 26, lám. 14, de 1 metro de altura, compuesta de

4 hierros en escuadra de $\frac{80 \times 80}{10}$ (80mm de lado y 10 mm de espesor).

2 nervios *m* de palastro, de 200×10 (200mm de altura y 10mm de espesor).

2 tablas *n* de palastro, de 300×5 (300mm de ancho y 5mm de espesor).

Haremos los cálculos tomando como unidad el milímetro; de modo que trasformando el perfil fig. 26 en el de la fig. 27, sería

$$\begin{array}{cccccc}
 a = 300 & a' = 130 & a'' = 140 & a''' = 20 & a^{iv} = 10 & \\
 b = 1000 & b' = 990 & b'' = 970 & b''' = 830 & b^{iv} = 590 & \\
 I = \frac{ab^3 - (a'b'^3 + a''b''^3 + a'''b'''^3 + a^{iv}b^{iv^3})}{12}
 \end{array}$$

$a b^3 = 300 \times 1000^3$	300	000	000	000
$a' b'^3 = 130 \times 990^3$	= 126 138 870 000				
$+ a'' b''^3 = 140 \times 970^3$	= 127 774 220 000				
$+ a''' b'''^3 = 20 \times 830^3$	= 11 435 740 000				
$+ a^{iv} b^{iv^3} = 10 \times 590^3$	= 2 053 790 000				
		267	402	620	000
		32	597	380	000

$$I = \frac{32597380000}{12} = 2\ 716\ 465\ 000$$

$$r = \frac{1}{2} b = 500\text{mm}$$

$$\frac{I}{r} = 5\ 432\ 930.$$

Del valor anterior de *I* expresado en milímetros se puede pasar al correspondiente á la unidad *metro*, dividiendo por 10000^3 (núm. 476), y se obtendría

$$I = 0,002\ 716\ 465.$$

Para obtener el nuevo valor de $\frac{I}{v}$ habría que dividir el nuevo valor de *I*

por $v = 0^m,5$, ó bien dividir el anterior valor de $\frac{I}{v}$ por 1000^3 ; así se tendría

$$\frac{I}{v} = 0,005\ 422\ 930.$$

Para todos estos cálculos son de grande utilidad las tablas de cubos de números que contienen todos los manuales.

482. También son de uso común las expresiones 22 y 24, por corresponder á hierros laminados *T* simple, escuadra y *U*, de frecuente empleo en construcciones metálicas. La aplicación de las fórmulas no ofrece dificultad ninguna.

483. Es conveniente fijar la atención en el eje respecto al cual se toma el momento de inercia de la figura, pues los resultados son muy variables de uno á otro. Solamente en el círculo y en los polígonos regulares son iguales los momentos de inercia relativos á cualquiera de los ejes que pasan por el centro de gravedad ó de figura, contenidos en su plano (núm. 476, 3.º).

Así, son muy diferentes los valores de *I* correspondientes á una misma doble *T*, según que esté derecha (fig. 21) ó acostada (fig. 31, lám. 14). Lo mismo sucede con la *T* sencilla (figs. 30 y 35) y la *U* (figs. 36 y 38).

Cuando la escuadra (fig. 37) es de lados iguales, tienen valor igual los momentos de inercia relativos á los dos ejes *AB*, *CD*, que pasan por el centro de gravedad *O*; pero no sucede lo mismo cuando las ramas son desiguales.

484. Cuando las piezas elementales que componen la viga compuesta están roblonadas, como es general, no se tiene en cuenta algunas veces, en la determinación de los valores de *I* y de $\frac{I}{v}$, lo debilitada que resulta la

sección por causa de los taladros abiertos para el paso de los roblones, como se ve en *c* (fig. 33, lám. 14). Pero si la unión se verificase por medio de pernos, cuyas tuercas y cabezas no ejecutan la presión que causan las de los roblones, ni producen la misma adherencia que éstos entre las piezas elemen-

tales se debe siempre descontar del valor de I correspondiente á la sección llena, la parte relativa á los rectángulos c (rayados de negro en la figura), cuya altura es el diámetro d del roblón y cuya base es la suma e de espesores de los hierros taladrados.

Si los dos orificios c equidistan del eje, como aparece en la fig. 33, debe aplicarse la fórmula 17 de la tabla (fig. 20, lám. 14) $\left(\frac{1}{2} \omega h^2\right)$, siendo $\omega = c \times d$, y h la distancia entre los centros de los taladros; de modo que del momento de inercia de la doble T , se restaría $\frac{1}{2} c d h^2$. Cuando los orificios se hallen á diversas distancias r del eje (fig. 33, lám. 14) se determinará por separado el momento de inercia correspondiente á cada uno, por la fórmula 16 de la tabla, en la cual se puede despreciar el segundo sumando; sería, pues, $c d r^2$, lo que debería descontarse del momento de inercia total, por cada taladro de los que corresponden á una sección trasversal, para obtener el momento de inercia definitivo.

485. La fórmula 37 de la tabla del núm. 477,

$$I = A - B H$$

$$H = \frac{B}{\omega}$$

corresponde al caso de una doble T no simétrica con respecto al eje CD del momento de inercia (fig. 14, lám. 15).

Como se indica en la tabla, se empieza por formar los valores de A , B y ω , que representan:

A = momento de inercia de la doble T con respecto al eje externo MN paralelo al CD .

B = suma de los momentos de las áreas elementales con respecto al eje MN .

ω = área de la sección trasversal.

El conocimiento de estas cantidades conduce á la determinación del centro de gravedad de la figura, pues sirve para fijar el valor $H = \frac{B}{\omega}$, que es la distancia entre el eje arbitrario MN elegido como auxiliar, y el CD que pasa por el centro de gravedad.

Una vez determinado H , es conocido I por la fórmula anterior.

Este procedimiento puede aplicarse á una figura cualquiera, aunque sea irregular. En la fig. 16 (lám. 15) aparece aplicado á un carril Vignole; no hay más que dividir su área en varias partes por medio de rectas paralelas al eje, y tomar como rectángulos los trapecios que se forman.

486. Relación entre el área ω de una figura y el momento de inercia I . Para una misma figura, el momento I varía con el eje, según ya hemos dicho en el núm. 483.

En figuras que son semejantes, geoméricamente, crece I cuando aumenta ω . (Véanse los valores de I de la tabla del núm. 477.)

Pero en general para figuras de la misma forma, pero no geoméricamente semejantes, el valor de I no depende de ω , pudiendo suceder que para iguales valores de ω resulten otros muy diferentes de I y de $\frac{I}{v}$.

Es interesante esta cuestión, especialmente para obras metálicas. En efecto; del valor de ω depende el volumen y peso de la pieza, y por tanto su coste; y del valor de I y de $\frac{I}{v}$ depende la resistencia, esto es, las cargas que se podrán aplicar á la viga sometida á flexión (núm. 475). La solución económica consiste, por tanto, en obtener á igual valor de ω un gran valor para I y para $\frac{I}{v}$.

En general, y para una misma figura é igual valor de ω , los valores de I y de $\frac{I}{v}$ serán tanto mayores cuanto mayor sea la altura, es decir, cuanto más se aleje el área del eje respecto al cual se toma el momento I .

En el rectángulo, por ejemplo,

$$I = \frac{1}{12} a b^3 \left\{ \begin{array}{l} a b = \omega \\ I = \frac{1}{12} \omega b^2 \end{array} \right.$$

I crece con el cuadrado de la altura b .

También aumenta $\frac{I}{v}$ con b ; en efecto, $\frac{I}{v} = \frac{\omega b}{6}$.

Consideremos una doble T laminada (fig. 21, lám. 14), y llamemos:

ω área de una tabla horizontal.

ω' ídem del alma.

- Ω área total = $2\omega + \omega'$.
- h distancia entre los centros de gravedad de las tablas.
- e espesor del alma.
- I' momento de inercia de las tablas.
- I'' ídem del alma.
- I ídem total = $I' + I''$.

Será, sensiblemente,

$$I' = \frac{1}{2} \omega h^2 \text{ (fórmula 17 de la tabla núm. 477).}$$

$$I'' = \frac{1}{12} e h^3 = \frac{1}{12} \omega' h^2 \text{ (1 de la tabla núm. 477).}$$

$$I = \frac{1}{2} h^2 \left(\omega + \frac{1}{6} \omega' \right)$$

ó, puesto que $\omega = \frac{\Omega - \omega'}{2}$,

$$I = \frac{1}{4} h^2 \left(\Omega - \frac{2}{3} \omega' \right) \quad \text{,} \quad \frac{I}{v} = \frac{1}{2} h \left(\Omega - \frac{2}{3} \omega' \right).$$

Resulta, por tanto, que I é $\frac{I}{v}$ aumentan con h , altura de la sección, y son mayores, á igual valor de Ω , cuando ω' es pequeño; de modo que conviene alejar la materia de la capa de fibras neutras. Lo mismo se demostraría para otras figuras.

487. Si pasamos ahora á comparar valores de I y de $\frac{I}{v}$ correspondientes á figuras diferentes, pero que tengan la misma área ω ; diremos, fundados en cuanto precede y en la definición de momentos de inercia, que los valores mayores corresponderán á las figuras en que los elementos del área se separen más del eje.

En este punto, el rectángulo es preferible al cuadrado, y entre los rectángulos se deberá elegir el más alargado.

En las vigas doble T , el alma contribuye poco á la formación de I y de $\frac{I}{v}$; el sumando mayor corresponde á las tablas.

Las vigas doble T compuestas, que tienen el alma de poco espesor y en

cambio poseen tablas de palastro anchas, dan valores de I y de $\frac{I}{v}$ muy superiores á los de las vigas doble T laminadas, á igual altura y á igual área.

En las vigas doble T laminadas, son preferibles las de alma delgada y tablas ó alas de grande anchura. Las viguetas de alas estrechas y alma gruesa tienen, á igual área, pequeños valores de I y de $\frac{I}{v}$.

488. **Determinación de I y de $\frac{I}{v}$ para una figura cualquiera.** — Las vigas de hierro, compuestas de los elementos que se llaman palastros, hierros planos y hierros especiales laminados en forma de T , escuadra, ángulo, U , etcétera, pueden tener formas muy variadas (véanse las figuras de la lámina 21). Cualquiera que sea la forma de la sección trasversal, no ofrece dificultad la determinación de I y de $\frac{I}{v}$, con el auxilio de las fórmulas que hemos dado en las tablas del núm. 477.

En efecto; si la figura puede descomponerse en elementos cuyos momentos de inercia se conozcan, el valor total de I se obtendrá por la suma de los valores elementales. Esto sucede, por ejemplo, con la fig. 17 de la lám. 15; el momento I se obtendrá sumando los correspondientes á las piezas siguientes:

- a y b (forma de U)... (fórmula 15 de la tabla del núm. 477).
- Palastro c (fórmula 1).
- Palastros m (fórmula 17).

Si el eje fuese el 2, 2 (fig. 17, lám. 15), se sumarían los momentos de inercia con relación á este eje de las figuras siguientes:

- 2 rectángulos r
- 2 íd. s
- 1 rectángulo A .

Cuando no sea fácil esta descomposición en elementos de momento de inercia conocido, se seguirá el procedimiento general del núm. 485.

489. **Tablas de momentos de inercia.** — La formación de los valores de I y de $\frac{I}{v}$ es, si no difícil, laboriosa muchas veces. De aquí la conveniencia de disponer de tablas que economicen estas operaciones.

Las tablas se refieren unas veces á secciones de la forma T sencilla ó doble, escuadras de ramas iguales ó desiguales, U , etc., correspondientes á hierros laminados, y son sin duda muy útiles. Otras veces contienen los elementos necesarios para la determinación de I en vigas compuestas, y á este efecto determinan los momentos de inercia correspondientes á cada uno de los elementos (nervios, tablas, escuadras) para valores diferentes de sus dimensiones y distancia al eje de los momentos, de modo que se puede con su auxilio componer secciones que tengan un momento de inercia determinado de antemano. Estas tablas son de necesidad absoluta para el ingeniero ó arquitecto (*).

Á continuación damos tablas de valores de I y de $\frac{I}{v}$ correspondientes á palastros y hierros laminados.

La tabla núm. 1 contiene los valores del momento resistente $\frac{I}{v}$ para hierros laminados en forma de escuadra ó de T sencilla, dispuesto como representan las figs. 35 y 37 de la lám. 14. El valor que se ha tomado para v es el mayor de los dos v' , v'' , es decir, el v'' de las figuras citadas. Acompañan los pesos por metro de longitud de viga.

La tabla núm. 2 se refiere á hierros laminados en U , en la situación representada en la fig. 2.^a de la lám. 20. Las dimensiones que se tienen en cuenta y aparecen en la tabla, son:

- b = altura.
- a = ancho de las ramas.
- e = espesor del alma.
- c = espesor medio de las ramas.

La tabla núm. 3 corresponde á valores de $\frac{I}{r}$ de viguetas laminadas de forma de Z doble (fig. 3.^a, lám. 20), siendo

- b = altura.
- a = ancho de las tablas.
- e = espesor del alma.
- c = espesor medio de las tablas.

(*) Merecen mención las siguientes:
Les moments d'inertie dans les constructions métalliques, por M. Paul Boubée.—Paris, Baudry.
Expressions analytiques et tables des moments d'inertie, por M. Maurice Huléwicz.—Paris, Baudry.

Tanto esta tabla como la anterior contienen los pesos de las viguetas por metro lineal.

La tabla núm. 4 da los momentos de inercia I de almas llenas de palastro (fig. 5.^a, lám. 20) de un milímetro de espesor y de alturas b comprendidas entre 100^{mm} y 1000^{mm} (1 metro). Para obtener los valores de I cuando el palastro sea de n milímetros, se multiplicarán por n (número entero de milímetros, los de la tabla).

También aparecen los pesos por metro lineal, y se deberán multiplicar por n cuando el palastro tenga n milímetros de espesor. Así, por ejemplo, para un alma llena de 300^{mm} de altura y 7,50^{mm} de espesor, será

$$I = 0,000\ 002\ 241 \times 7,50 = 0,000\ 016\ 807.$$

$$\text{Peso por } m.l = 2,34 \times 7,50 = 17,55 \text{ kilogramos.}$$

La tabla núm. 5 se refiere á momentos de inercia I de tablas de palastro sencillas, colocadas como lo están cuando forman parte de las vigas compuestas de hierro, esto es, en la disposición que señala la fig. 10, lám. 20. Los valores de I que la tabla contiene, y también los pesos por metro lineal, corresponden á palastros de un milímetro de espesor; cuando éste sea de n milímetros, se multiplicarán aquellos valores por n .

La tabla núm. 6 contiene los valores de I relativos á almas discontinuas de palastro de 1 milímetro de espesor (fig. 4.^a, lám. 20) de anchura a , siendo b la altura total de la sección. Habrán de multiplicarse por n cuando el espesor sea de n milímetros.

Finalmente, la tabla núm. 7 corresponde á momentos de inercia de cuatro escuadras, dispuestas como aparece en la fig. 6.^a de la lám. 20, siendo b la altura total.

Con el auxilio de estas tablas se puede obtener el momento de inercia I y el valor de $\frac{I}{v}$ de una sección cualquiera.

El área de la sección trasversal, para todos los hierros laminados ó compuestos, se obtiene, expresada en metros cuadrados, dividiendo el peso por metro lineal, en kilogramos, por el del metro cúbico (7800), también en kilogramos.

Ejemplos:

1.º Sección fig. 7.^a, lám. 20, siendo los datos:

$$\text{Alma.....} \left\{ \begin{array}{l} b = 380 \text{ mm.} \\ c = \text{espesor} = 5 \text{ mm.} \end{array} \right.$$

$$\text{Escuadras de } \frac{45 \times 45}{6}.$$

Alma de 1 mm × 380 de altura, según la tabla número 4..... $I = 0,000\,004\,554$
 Alma de 6 mm..... $I = 0,000\,004\,554 \times 6 = 0,000\,027\,324$
 Cuatro escuadras (tabla núm. 7)..... $I = 0,000\,061\,595$
 Dos escuadras $I = \frac{1}{2} \times 0,000\,061\,595 = \dots 0,000\,030\,797$

Momento de inercia = 0,000 058 121

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000\,058\,121}{0,190} = 0,000\,305$$

El peso por metro lineal de viga sería:

Por el alma. = $2,96 \times 6 = 17,76$
 Por las dos escuadras... = $\frac{1}{2} \times 15,72 = 7,86$
 Peso por m.l..... = 25,52

2.º Sección figs. 39 y 57, lám. 21.

Altura..... $b = 400 \text{ mm.}$
 Almas..... $400 \text{ mm} \times 5 \text{ mm.}$
 Tablas..... $300 \text{ mm} \times 10 \text{ mm.}$
 Escuadras. $\frac{60 \times 60}{8}$

	<i>I</i>	Peso por m l
2 almas de 400×5=2×0,000 005 312×5=0,000 053 120		2×3,12×5=31,20
2 tablas de 300×10=0,000 024×10...=0,000 240 000		4,68×10=46,80
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$=0,000 115 390		27,95
Totales.....	0,000 408 510	105,95

$$\frac{I}{v} = \frac{0,000\,408\,510}{0,200} = 0,00204\,255.$$

Si en vez de tablas sencillas hubiese tablas compuestas cada una de dos, tres ó más palastros, se considerarían como una sola tabla de espesor igual al espesor total.

TABLA NÚM. 1

VALORES DE $\frac{I}{v}$ DE HIERROS EN ESCUADRA Ó T SENCILLA, DISPUESTOS
 COMO REPRESENTAN LAS FIGS. 35 Y 37, LÁM. 14

FORMA Y DIMENSIONES DE LA SECCIÓN EN MILÍMETROS	PESO por metro lineal. — Kilogramos.	$\frac{I}{v}$ en metros.
20 × 20 × 3	0,86	0,000 000 27
× 4	1,11	0,000 000 35
× 5	1,35	0,000 000 43
× 6	1,58	0,000 000 50
24 × 24 × 4	1,34	0,000 000 52
× 5	1,65	0,000 000 64
× 6	1,96	0,000 000 75
× 7	2,19	0,000 000 85
× 8	2,50	0,000 000 95
28 × 28 × 4	1,62	0,000 000 75
× 5	1,99	0,000 000 91
× 6	2,34	0,000 001 06
× 7	2,67	0,000 001 20
× 8	3,00	0,000 001 35
30 × 30 × 4	1,74	0,000 000 87
× 5	2,11	0,000 001 06
× 6	2,49	0,000 001 29
× 7	2,86	0,000 001 41
× 8	3,24	0,000 001 54
35 × 35 × 5	2,53	0,000 001 39

FORMA Y DIMENSIONES DE LA SECCIÓN EN MILÍMETROS	PESO por metro lineal. — Kilogramos.	$\frac{I}{v}$ en metros.
35 × 35 × 6	3,00	0,000 001 58
× 7	3,43	0,000 001 79
× 8	3,87	0,000 002 18
40 × 40 × 5	2,92	0,000 001 89
× 6	3,46	0,000 002 29
× 7	3,98	0,000 002 58
× 8	4,30	0,000 002 68
× 9	4,62	0,000 003 18
44 × 44 × 5	3,24	0,000 002 39
× 6	3,83	0,000 002 79
× 7	4,42	0,000 003 18
× 8	4,98	0,000 003 37
× 9	5,55	0,000 004 00
45 × 45 × 5	3,31	0,000 002 50
× 6	3,84	0,000 002 89
× 7	4,38	0,000 003 45
× 8	5,03	0,000 003 79
× 9	5,68	0,000 004 18
48 × 48 × 5	3,55	0,000 002 68
× 6	4,20	0,000 003 18
× 7	4,86	0,000 003 68
× 8	5,48	0,000 004 08
× 9	6,10	0,000 004 58
50 × 50 × 5	3,70	0,000 003 08
× 6	4,40	0,000 003 68
× 7	5,08	0,000 004 18
× 8	5,73	0,000 004 68

TABLA NÚM. 2

VALORES DE $\frac{I}{v}$ CORRESPONDIENTES Á HIERROS EN U, DISPUESTOS COMO REPRESENTA LA FIG. 2.^a, LÁM. 20

NÚMERO de orden.	ALTURA <i>b</i> milímetros.	ANCHO de las ramas <i>a</i> milímetros.	ESPESOR del alma <i>e</i> milímetros.	ESPESOR medio de las ramas <i>c</i> milímetros.	PESO por metro lineal — Kilogramos.	$\frac{I}{v}$ en metros.
1	80	45	7	7,5	11	0, 000 027 250
2	80	48	10	7,5	14	0, 000 030 425
3	105	65	8	8	14	0, 000 057 785
4	120	51	9	10	15	0, 000 064 050
5	120	54	12	10	18	0, 000 074 375
6	145	60	8	9	16,75	0, 000 090 687
7	160	60	8	10	18	0, 000 107 350
8	145	65	13	10	22,50	0, 000 108 208
9	152	58	8	11	19	0, 000 108 363
10	160	62	10	10	22	0, 000 119 825
11	175	60	8	10	18,50	0, 000 121 056
12	152	63	13	11	25	0, 000 127 616
13	175	67	15	11	28,75	0, 000 159 377
14	200	80	10	12	29	0, 000 215 300
15	203	80	10	12	29	0, 000 219 836
16	203	80	10	14	32,12	0, 000 233 011
17	200	83	13	12	34	0, 000 235 300
18	200	85	13	12	37	0, 000 254 177
19	250	80	10	13	34,75	0, 000 291 068
20	250	80	10	13	35	0, 000 308 750

NÚMERO de orden.	ALTURA <i>b</i> milímetros.	ANCHO de las ramas <i>a</i> milímetros.	ESPESOR del alma <i>e</i> milímetros.	ESPESOR medio de las ramas <i>c</i> milímetros.	PESO por metro lineal — Kilogramos.	$\frac{I}{v}$ en metros.
21	250	86	16	13	44,25	0, 000 353 568
22	250	84	14	13	42,50	0, 000 357 750
23	250	91	11	13	39	0, 000 354 394
24	250	91	13	13	42,60	0, 000 384 394
25	300	76	11	12	38,75	0, 000 389 002
26	250	94	14	14	45	0, 000 395 644
27	300	76	12	12	41,19	0, 000 402 002
28	300	80	15	14	47,75	0, 000 449 002

TABLA NÚM. 3

VALORES DE $\frac{I}{v}$ CORRESPONDIENTES Á VIGUETAS LAMINADAS DE FORMA DE DOBLE T (FIG. 3.^a, LÁM. 20)

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA δ	ANCHO de las tablas. a	ESPESESOR del alma. e	ESPESESOR medio de las tablas. c		
1	75	31,50	3,50	6	4,50	0,000 013 972
2	75	32	4	6	4,75	0,000 014 441
3	75	33	5	6	5,37	0,000 015 378
4	75	34	6	6	6	0,000 016 316
5	75	35	7	6	6,70	0,000 017 253
6	80	40	5	5	5,85	0,000 017 660
7	80	40	4	5,50	5,58	0,000 018 022
8	75	36	8	6	7,25	0,000 018 191
9	80	41	3	6	5,43	0,000 018 840
10	80	40	4	6	6	0,000 019 084
11	75	37	9	6	7,87	0,000 019 128
12	75	38	10	6	8,50	0,000 020 066
13	80	42	5	6	6,62	0,000 020 151
14	80	42	6	6	7,37	0,000 021 217
15	80	40	8	6	7,99	0,000 021 070
16	80	43	7	6	8	0,000 022 284
17	102	38	4	5,25	6	0,000 023 333
18	80	44	8	6	8,62	0,000 023 350
19	80	45	9	6	9,37	0,000 024 417
20	102	39	5	5,25	6,75	0,000 025 067

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA δ	ANCHO de las tablas. a	ESPESESOR del alma. e	ESPESESOR medio de las tablas. c		
21	80	46	10	6	10	0,000 025 484
22	102	40	6	5,50	7,50	0,000 026 801
23	80	45	8	7,50	9,32	0,000 026 830
24	80	45	6	8	8,77	0,000 028 000
25	102	41	7	5,25	8,37	0,000 028 535
26	102	42	8	5,25	9,12	0,000 030 269
27	102	43	9	5,25	10	0,000 032 003
28	100	45	5	7	8,25	0,000 032 596
29	102	44	10	5,25	10,75	0,000 033 737
30	78,50	78,50	8	8	13,70	0,000 033 780
31	100	43	5	8	8,64	0,000 034 012
32	100	46	6	7	9	0,000 034 263
33	100	47	7	7	9,75	0,000 035 929
34	100	50	5	7,50	9,25	0,000 037 274
35	100	48	8	7	10,62	0,000 037 596
36	100	45	6	8,50	9,63	0,000 038 000
37	100	51	6	7,50	10,50	0,000 038 940
38	100	49	9	7	11,37	0,000 039 262
39	100	48	6	8,50	10,25	0,000 039 970
40	76	76	6	8	13	0,000 040 005
41	100	52	7	7,50	11,12	0,000 040 607
42	100	50	10	7	12,25	0,000 040 929
43	76	77	7	8	13,62	0,000 040 968
44	97	50	8	8,50	11,62	0,000 041 460
45	76	78	8	8	14,12	0,000 041 931
46	100	50	5	9	10,22	0,000 041 980
47	100	53	8	7,50	12,12	0,000 042 273

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
48	100	51	11	7	13	0, 000 042 595
49	76	79	9	8	14,75	0, 000 042 893
50	76	80	10	8	15,37	0, 000 043 856
51	100	54	9	7,50	13	0, 000 043 940
52	100	52	12	7	13,75	0, 000 041 263
53	76	81	11	8	15,87	0, 000 044 819
54	100	55	10	7,50	14	0, 000 045 607
55	76	82	12	8	16,50	0, 000 045 781
56	98	50	10	10	13,88	0, 000 047 760
57	120	45	6	9	11,09	0, 000 050 520
58	120	50	5,50	8,25	11	0, 000 051 475
59	120	51	6,50	8,25	11,87	0, 000 053 675
60	99	57	10	10	15,05	0, 000 054 100
61	125	48	5	9	10,91	0, 000 054 760
62	120	50	6	9	11,79	0, 000 055 150
63	120	52	7,50	8,25	12,62	0, 000 055 875
64	120	53	8,50	8,25	13,50	0, 000 058 075
65	120	50	9	9	14,18	0, 000 059 570
66	120	54	9,50	8,25	14,37	0, 000 060 275
67	104	52	13	11,50	17,54	0, 000 060 520
68	120	55	10,50	8,25	15,12	0, 000 062 475
69	125	48	10	9	15,08	0, 000 062 930
70	120	55,50	11	8,25	16	0, 000 064 675
71	140	50	6	9	12,75	0, 000 068 217
72	130	50	7	10	12,90	0, 000 068 000
73	118	53	12	10	17,44	0, 000 068 490
74	102	76	6	10	16	0, 000 068 719

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
75	102	77	7	10	16,75	0, 000 070 453
76	140	47	7	10	13,88	0, 000 071 240
77	140	51	7	9	13,87	0, 000 071 483
78	102	78	8	10	17,50	0, 000 072 187
79	102	60	17	13	22,25	0, 000 073 200
80	102	79	9	10	18,25	0, 000 073 921
81	140	52	6	10	13,73	0, 000 075 230
82	119	59	12	10	18,47	0, 000 075 380
83	140	52	8	9	14,87	0, 000 074 749
84	120	72	6	9	15	0, 000 075 523
85	102	80	10	10	19	0, 000 075 655
86	145	50	6	10	13,65	0, 000 076 430
87	102	81	11	10	19,75	0, 000 077 389
88	120	73	7	9	15,87	0, 000 077 923
89	140	53	9	9	16	0, 000 078 016
90	120	72	8	9	16,47	0, 000 078 470
91	102	82	12	10	20,50	0, 000 079 123
92	120	74	8	9	16,87	0, 000 080 323
93	102	83	13	10	21,25	0, 000 080 857
94	140	54	10	9	17	0, 000 081 282
95	136	52	11	10	18,06	0, 000 081 870
96	120	75	9	9	17,75	0, 000 082 723
97	160	50	6,50	9	14,50	0, 000 083 590
98	140	55	11	9	18,12	0, 000 084 548
99	120	76	10	9	18,75	0, 000 085 123
100	145	50	10	10	17,55	0, 000 085 410
101	120	75	7	10	17,16	0, 000 085 550

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
102	140	70	7	8	15,51	0,000 085 670
103	120	77	11	9	19,62	0,000 087 523
104	160	48	7	10	15,13	0,000 087 600
105	140	56	12	9	19,25	0,000 087 815
106	160	51	7,50	9	15,75	0,000 087 857
107	120	78	12	9	20,62	0,000 089 923
108	140	57	13	9	20,37	0,000 091 081
109	160	55	7	9	15,47	0,000 091 500
110	102	65	20	18	28,55	0,000 091 570
111	160	52	8,50	9	17	0,000 092 124
112	120	79	13	9	21,50	0,000 092 322
113	160	48	7	11	15,77	0,000 092 870
114	138	56	14	10	21,62	0,000 093 910
115	140	58	14	9	21,37	0,000 094 348
116	127	74	5,50	11	17,50	0,000 094 860
117	155	53	7	11	16,36	0,000 095 850
118	160	55	7	10	16,30	0,000 096 000
119	160	53	8,50	9	18,12	0,000 096 390
120	127	75	6,50	11	18,37	0,000 097 380
121	140	59	15	9	22,50	0,000 097 617
122	138	56	14	11	22,28	0,000 098 080
123	127	76	7,50	11	19,25	0,000 099 900
124	152	53	8	12	17,91	0,000 100 610
125	160	54	10,50	9	19,25	0,000 100 657
126	130	83	8	9,50	19,23	0,000 102 280
127	127	77	8,50	11	20,12	0,000 102 420
128	140	74	6	10,25	17,50	0,000 103 589

NÚMERO de orden.	LIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
129	180	50	7	9,50	16,50	0,000 103 841
130	163	52	8	11	17,72	0,000 104 150
131	160	55	11,50	9	20,50	0,000 104 924
132	127	78	9,50	11	21	0,000 104 940
133	139	62	12	11,50	21,98	0,000 106 070
134	140	75	7	10,25	18,62	0,000 106 855
135	127	79	10,50	11	21,87	0,000 107 460
136	160	56	12,50	9	21,75	0,000 109 190
137	180	51	8	9,50	17,87	0,000 109 241
138	130	83	8	10,50	20,40	0,000 109 260
139	152	53	12	12	21,90	0,000 109 800
140	127	80	11,50	11	22,75	0,000 109 980
141	140	76	8	10,25	19,62	0,000 110 121
142	138	77	13	9	22,98	0,000 110 160
143	119	83	12	12	24,43	0,000 110 630
144	158	57	10	11	20,39	0,000 112 450
145	127	81	12,50	11	23,62	0,000 112 500
146	180	59	6,50	9	17,25	0,000 112 660
147	140	77	9	10,25	20,75	0,000 113 388
148	160	57	13,50	9	23	0,000 113 457
149	180	52	9	9,50	19,25	0,000 114 641
150	127	81,50	13	11	24,50	0,000 115 020
151	180	60	7	9	17,87	0,000 115 360
152	163	52	12	11	22,12	0,000 115 610
153	140	78	10	10,25	21,75	0,000 116 654
154	160	58	14,50	9	24,12	0,000 117 724
155	140	79	11	10,25	22,87	0,000 119 920

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
156	180	53	10	9,50	20,50	0,000 120 041
157	180	61	8	9	19,25	0,000 120 760
158	160	59	15,50	9	25,25	0,000 121 990
159	130	89	16	9,50	27,04	0,000 122 680
160	158	57	14	11	24,63	0,000 123 000
161	180	60	7	10	18,09	0,000 123 000
162	140	80	12	10,25	23,87	0,000 123 187
163	150	80	8	10	20,59	0,000 124 240
164	180	54	11	9,50	21,87	0,000 125 441
165	180	62	9	9	20,62	0,000 126 160
166	154	62	12	12	23,77	0,000 126 180
167	160	60	16,50	9	26,50	0,000 126 257
168	140	81	13	10,25	25	0,000 126 453
169	125	92	10	12	25,10	0,000 126 930
170	152	75	8	11	21	0,000 127 398
171	180	58	8	11	19,81	0,000 130 590
172	180	55	12	9,50	23,25	0,000 130 841
173	152	76	9	11	22,12	0,000 131 249
174	180	63	10	9	21,87	0,000 131 560
175	150	75	8	12	21,90	0,000 132 330
176	180	60	8	10,50	19,88	0,000 134 000
177	152	77	10	11	23,25	0,000 135 099
178	180	56	13	9,50	24,62	0,000 136 241
179	180	64	11	9	23,25	0,000 136 960
180	152	78	11	11	24,37	0,000 138 950
181	180	57	14	9,50	26	0,000 141 641
182	180	60	8	12	20,97	0,000 141 210

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
183	125	97	16	12	30,76	0,000 141 330
184	160	80	8	10,75	22	0,000 142 077
185	180	65	12	9	24,62	0,000 142 360
186	152	79	12	11	25,62	0,000 142 800
187	200	60	8	9,50	20,50	0,000 143 044
188	160	81	9	10,75	23,25	0,000 146 344
189	152	80	13	11	26,75	0,000 146 654
190	175	80	7	9,75	21	0,000 146 922
191	180	58	15	9,50	27,25	0,000 147 041
192	180	66	13	9	25,87	0,000 147 760
193	160	80	8	11,50	22,90	0,000 148 480
194	180	64	8	12	21,69	0,000 148 750
195	160	78	8	12	24,34	0,000 149 380
196	156	82	9	12	24,62	0,000 149 380
197	152	81	14	11	27,87	0,000 150 501
198	160	82	10	10,75	24,50	0,000 150 611
199	175	81	8	9,75	22,37	0,000 152 026
200	180	59	16	9,50	28,62	0,000 152 441
201	160	80	8	12	23,46	0,000 152 670
202	180	67	14	9	27,37	0,000 153 160
203	152	82	15	11	29	0,000 154 352
204	160	83	11	10,75	25,37	0,000 154 878
205	200	62	10	9,50	23,50	0,000 156 377
206	175	82	9	9,75	23,62	0,000 157 130
207	200	61	8	11	21,57	0,000 157 580
208	180	60	17	9,50	30	0,000 157 841
209	180	68	15	9	28,62	0,000 158 560

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
210	200	65	8	11	22,64	0,000 159 000
211	160	84	12	10,75	27	0,000 159 144
212	150	82	16	12	31,07	0,000 160 670
213	175	83	10	9,75	25	0,000 162 234
214	180	64	12	12	26,58	0,000 162 810
215	200	63	11	9,50	25	0,000 163 043
216	180	66	11	12	25,74	0,000 163 060
217	160	80	12	12	27,70	0,000 163 110
218	160	85	13	10,75	28,25	0,000 163 111
219	180	69	16	9	30	0,000 163 960
220	156	80	9	14	26,46	0,000 165 400
221	165	89	7	11,50	24	0,000 166 676
222	175	84	11	9,75	26,37	0,000 167 338
223	160	86	14	10,75	29,50	0,000 167 678
224	127	114,50	9	13,50	31	0,000 169 343
225	180	70	17	9	31,25	0,000 169 360
226	200	64	12	9,50	29,50	0,000 169 711
227	127	115	9,50	13,50	31,50	0,000 170 687
228	165	90	8	11,50	25,25	0,000 171 213
229	160	87	15	10,75	30,75	0,000 171 945
230	175	85	12	9,75	27,62	0,000 172 442
231	127	116	10,50	13,50	32,50	0,000 173 375
232	145	88	11	15	30,46	0,000 173 760
233	165	91	9	11,50	26,50	0,000 175 751
234	153	76	15	15,50	32,65	0,000 175 850
235	127	117	11,50	13,50	33,50	0,000 176 063
236	160	87	16	10,75	32	0,000 176 211

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
237	200	65	13	9,50	28	0,000 166 377
238	175	86	13	9,75	29	0,000 177 547
239	127	118	12,50	12,50	34,50	0,000 178 751
240	200	65	11	11	26,43	0,000 179 540
241	165	92	10	11,50	27,75	0,000 180 288
242	127	119	13,50	12,50	35,50	0,000 181 439
243	180	67	16	12	32,01	0,000 182 520
244	178	67	15	13	31,37	0,000 182 810
245	200	66	14	9,50	29,50	0,000 183 044
246	127	120	14,50	13,50	36,50	0,000 184 128
247	165	93	11	11,50	29	0,000 184 826
248	160	88	16	12	33,45	0,000 186 810
249	178	89	8	11,50	25,50	0,000 187 550
250	220	64	10	10	25,58	0,000 188 990
251	220	65	8	11	23,51	0,000 189 140
252	165	94	12	11,50	30,50	0,000 189 363
253	151	91	11	15	31,68	0,000 189 380
254	200	67	15	9,50	31	0,000 189 710
255	145	93	16	15	36,11	0,000 191 280
256	180	90	9,50	11	27,15	0,000 192 000
257	158	89	14	13,50	33,05	0,000 192 440
258	200	65	13	10,50	30,64	0,000 192 000
259	178	90	9	11,50	26,87	0,000 192 831
260	165	95	13	11,50	31,50	0,000 193 901
261	200	68	16	9,50	32,50	0,000 196 377
262	178	91	10	11,50	28,25	0,000 198 112
263	165	96	14	11,50	32,75	0,000 198 439

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
264	220	70	5	11	24,37	0,000 200 070
265	180	90	9	12	27,80	0,000 201 270
266	180	92	8	12	26,96	0,000 201 520
267	220	68	9	11	25,50	0,000 201 578
268	165	97	15	11,50	34	0,000 202 976
269	200	69	16	9,50	32,40	0,000 203 000
270	200	69	17	9,50	34	0,000 203 430
271	178	92	11	11,50	29,62	0,000 203 393
272	178	76	16	13	34,38	0,000 204 040
273	203	65	8	15	26,00	0,000 204 120
274	151	96	16	15	37,56	0,000 208 280
275	178	93	12	11,50	31	0,000 208 674
276	220	69	10	11	27,25	0,000 209 645
277	200	70	18	9,50	35,50	0,000 209 711
278	220	65	12	11	29,69	0,000 212 660
279	178	94	13	11,50	32,37	0,000 213 955
280	220	70	11	11	29	0,000 217 712
281	178	95	14	11,50	33,75	0,000 219 236
282	220	65	12	11	29,69	0,000 212 660
283	198	70	15	13	34,32	0,000 221 800
284	225	70	9	11,50	26,83	0,000 222 000
285	180	100	10	12	30,89	0,000 223 630
286	203	82	10	12	29,31	0,000 224 150
287	178	96	15	11,50	35,12	0,000 224 517
288	220	69	9	13	27,61	0,000 224 720
289	220	71	12	11	30,62	0,000 225 778
290	178	97	16	11,50	36,50	0,000 229 796

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
291	198	76	16	12	35,94	0,000 230 520
292	220	72	13	11	32,37	0,000 233 845
293	205	100	10	10	30,03	0,000 237 150
294	220	73	14	11	34,12	0,000 241 912
295	203	82	14	12	34,90	0,000 242 990
296	178	100	11	14	34,71	0,000 244 690
297	152	126	10	14,50	38	0,000 248 495
298	220	74	15	11	35,87	0,000 249 978
299	200	100	10	11,50	31,75	0,000 250 770
300	152	127	11	14,50	39,12	0,000 252 345
301	152	128	12	14,50	40,25	0,000 256 196
302	203	101	9	11,75	31	0,000 256 883
303	220	100	10	12	32,45	0,000 257 780
304	237	92	8	10	27,89	0,000 257 850
305	220	75	16	11	37,50	0,000 558 045
306	152	129	13	14,50	41,50	0,000 260 046
307	203	102	10	11,75	32,62	0,000 263 745
308	152	130	14	14,50	42,62	0,000 263 897
309	237	92	8 9	10	88,74	0,000 263 890
310	235	89	8	11	28,50	0,000 264 028
311	220	74	17	11	39,25	0,000 266 112
312	152	131	15	14,50	43,75	0,000 267 747
313	203	105	15	10	37,79	0,000 268 310
314	203	103	11	11,75	34,12	0,000 270 607
315	202	72	14	18	38,34	0,000 270 740
316	178	107	14	14	39,75	0,000 271 140
317	200	100	10	13	33,85	0,000 271 560

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA b	ANCHO de las tablas. a	ESPESOR del alma. e	ESPESOR medio de las tablas. c		
318	152	132	16	14,50	44,87	0,000 271 598
319	220	77	18	11	41	0,000 271 718
320	235	90	9	11	30,37	0,000 273 232
321	152	132,50	16,50	14,50	45,50	0,000 273 524
322	220	78	16	12	44	0,000 274 250
323	203	104	12	11,75	35,75	0,000 277 469
324	235	90	10	11	32,06	0,000 280 080
325	237	92	8 9	11	30,04	0,000 280 230
326	235	91	10	11	32,12	0,000 282 436
327	218	74	18	13	41,96	0,000 283 100
328	203	105	13	11,75	37,37	0,000 284 331
329	235	95	9	11	31,25	0,000 284 985
330	237	88	9	12	31,43	0,000 286 940
331	203	106	14	11,75	39	0,000 291 193
332	235	92	11	11	34	0,000 291 640
333	235	96	10	11	33	0,000 294 189
334	220	95	9	13,25	33,50	0,000 294 306
335	235	90	10	12	33,31	0,000 295 380
336	228	70	10	18	34,63	0,000 296 050
337	218	80	17	13,50	42,17	0,000 298 040
338	203	107	15	11,75	40,50	0,000 298 055
339	235	93	12	11	35,87	0,000 300 844
340	220	96	11	13,25	35,37	0,000 302 372
341	205	100	10 21 14	40,56	0,000 303 250	
342	235	97	10	11	34,87	0,000 303 393
343	203	108	16	11,75	42,12	0,000 304 917
344	218	73	18	16	44,33	0,000 307 630

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA b	ANCHO de las tablas. a	ESPESOR del alma. e	ESPESOR medio de las tablas. c		
345	235	94	13	11	37,62	0,000 310 048
346	220	97	11	13,25	30,87	0,000 310 439
347	203	109	17	11,75	43,75	0,000 311 778
348	229	101	10	12	35	0,000 312 177
349	235	98	12	11	36,75	0,000 312 597
350	235	95	11	12	35,89	0,000 314 750
351	220	98	12	13,25	38,50	0,000 318 505
352	235	95	14	11	39,50	0,000 319 252
353	198	110	20	12	47,74	0,000 319 640
354	229	102	11	12	36,75	0,000 320 917
355	235	99	13	11	38,62	0,000 321 801
356	240	95	11	12	36,32	0,000 324 130
357	220	99	13	13,25	40,25	0,000 326 572
358	235	96	15	11	41,37	0,000 328 456
359	235	99	15 16	10	41,43	0,000 329 420
360	229	103	12	12	38,50	0,000 329 657
361	235	100	14	11	40,37	0,000 331 005
362	220	100	14	13,25	41,87	0,000 334 638
363	235	96	16	11	43,06	0,000 335 310
364	290	130	11,50	12,50	41,04	0,000 337 430
365	235	97	16	11	43,12	0,000 337 660
366	250	95	8	13	33,24	0,000 337 690
367	229	104	13	12	40,25	0,000 338 397
368	235	101	15	11	42,25	0,000 340 209
369	220	101	15	13,25	43,62	0,000 342 705
370	200	130	11	13	41,29	0,000 344 250
371	200	125	10	14	40,72	0,000 345 690

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
372	202	103	12	21	45,17	0,000 346 120
373	235	98	17	16	45	0,000 346 865
374	229	105	14	11	42	0,000 347 137
375	235	102	16	12	44	0,000 349 413
376	220	102	16	13,25	45,25	0,000 350 771
377	203	125	10	14	41	0,000 352 504
378	229	106	15	14	43,75	0,000 355 877
379	235	103	17	11	45,87	0,000 358 617
380	220	103	17	13,25	47	0,000 358 839
381	203	126	12	14	42,62	0,000 359 372
382	229	107	16	12	45,50	0,000 364 617
383	203	127	12	14	44,25	0,000 366 240
384	250	95	12	13	40,23	0,000 367 670
385	235	104	18	11	47,75	0,000 367 822
386	205	130	10	14	42,20	0,000 369 540
387	203	128	12	14	45,87	0,000 373 108
388	235	98	12	15	42,12	0,000 376 540
389	226	78	16	21	48,52	0,000 379 160
390	203	129	14	14	47,50	0,000 379 976
391	198	133	15,50	14	49,60	0,000 383 090
392	260	84	12	15	41,18	0,000 384 840
393	238	102	18	12	49,14	0,000 386 420
394	203	130	15	14	49,12	0,000 386 844
395	233	100	16	14	47,42	0,000 387 160
396	235	102	12	15	43,06	0,000 388 920
397	198	133	15	14,50	49,08	0,000 389 590
398	233	102	18	13	49,75	0,000 389 960

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
399	198	132	14	15	49,23	0,000 391 520
400	203	131	16	14	50,75	0,000 393 712
401	254	83	10	18	40,31	0,000 396 210
402	203	135	15	14	49,96	0,000 399 180
403	203	132	17	14	52,37	0,000 400 580
404	203	133	18	14	54	0,000 407 449
405	203	152	12	13,25	48	0,000 411 964
406	203	153	13	13,25	49,50	0,000 418 832
407	241	115	10	14,50	42,50	0,000 421 343
408	254	102	10,50	15	42,21	0,000 421 960
409	203	154	14	13,25	51,12	0,000 425 700
410	241	116	11	14,50	44,37	0,000 431 023
411	203	155	15	13,25	52,62	0,000 432 568
412	203	156	16	13,25	54,25	0,000 439 436
413	241	117	12	14,50	43,37	0,000 440 703
414	203	157	17	13,25	55,75	0,000 446 304
415	250	113,50	10	15	43,72	0,000 447 580
416	250	115	11	14,50	45	0,000 449 542
417	241	118	13	14,50	48,25	0,000 450 383
418	203	158	18	13,25	57,37	0,000 453 172
419	250	115	11	15	45,79	0,000 459 650
420	250	116	12	14,50	46,87	0,000 459 958
421	203	159	19	13,25	58,87	0,000 460 040
422	241	119	14	14,50	50,25	0,000 460 063
423	203	160	20	13,25	60,50	0,000 466 909
424	241	120	15	14,50	52,12	0,000 469 743
425	233	108	18	17	56,58	0,000 469 860

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
426	250	117	13	14,50	48,75	0,000 470 275
427	240	120	11	16	47,50	0,000 470 830
428	241	121	16	14,50	54,12	0,000 479 423
429	250	118	14	14,50	50,62	0,000 480 791
430	241	122	17	14,50	56,72	0,000 489 103
431	250	119	15	14,50	52,25	0,000 491 208
432	241	123	18	14,50	58	0,000 498 784
433	254	109	18	15	56,96	0,000 500 920
434	250	120	16	14,50	54,37	0,000 501 624
435	250	121	17	14,50	56,25	0,000 512 041
436	225	155	15	14	56,90	0,000 514 960
437	254	98	20	17	60,93	0,000 520 880
438	254	127	11	15,50	50,50	0,000 521 501
439	250	128	12	15,50	50,51	0,000 522 400
440	250	122	18	14,50	58,12	0,000 522 457
441	254	128	12	15,50	52,37	0,000 532 253
442	250	123	19	14,50	60	0,000 532 875
443	252	93	16	23	59,08	0,000 539 120
444	254	129	13	15,50	54,12	0,000 543 006
445	248	122	16	17	59,06	0,000 552 430
446	254	130	14	15,50	56	0,000 553 758
447	248	120	18	17	61,87	0,000 558 280
448	248	125	17	17	60,86	0,000 566 180
449	254	131	15	15,50	57,87	0,000 564 511
450	254	132	16	15,50	59,62	0,000 575 263
451	254	133	17	15,50	61,50	0,000 586 016
452	254	134	18	15,50	63,37	0,000 596 768

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPESOR del alma. <i>e</i>	ESPESOR medio de las tablas. <i>c</i>		
453	254	135	19	15,50	65,12	0,000 607 521
454	254	136	20	15,50	67	0,000 618 275
455	254	152	13,50	17	63,50	0,000 666 723
456	254	153	14,50	17	65,50	0,000 677 475
457	254	154	15,50	17	67,50	0,000 688 228
458	254	155	16,50	17	69,37	0,000 698 980
459	300	120	16 12	17	60,87	0,000 706 230
460	300	125	11	18	59	0,000 709 683
461	254	156	17,50	17	71,37	0,000 709 733
462	254	157	18,50	17	73,37	0,000 720 485
463	300	126	12	18	61,37	0,000 724 683
464	254	158	19,50	17	75,37	0,000 731 238
465	300	145	12	16	66,00	0,000 733 000
466	300	124	13	18	63,62	0,000 739 683
467	254	159	20,50	17	77,37	0,000 741 990
468	254	160	21,50	17	79,25	0,000 752 742
469	300	128	14	18	66	0,000 754 683
470	300	125	11	20	61,31	0,000 762 850
471	254	161	22,50	17	81,25	0,000 763 495
472	300	129	15	18	68,31	0,000 769 683
473	254	162	23,50	17	83,25	0,000 774 249
474	300	130	16	18	70,62	0,000 784 683
475	300	131	17	18	73	0,000 799 683
476	320	135	13	17	65	0,000 817 528
477	320	136	14	17	67,50	0,000 834 595
478	305	124	15 22,50	19	75,80	0,000 851 530
479	320	137	15	17	70	0,000 851 662

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
480	320	138	16	17	72,50	0,000 868 729
481	305	152	12,70	18	69,50	0,000 874 945
482	300	132	20	20	81,74	0,000 877 940
483	320	139	17	17	75	0,000 885 796
484	305	153	13,70	18	71,75	0,000 890 449
485	298	137	16	21	76,83	0,000 892 310
486	320	140	18	17	77,50	0,000 902 863
487	305	154	14,70	18	74,25	0,000 905 953
488	320	141	19	17	80	0,000 919 929
489	305	155	15,70	18	76,87	0,000 921 457
490	305	156	16,70	18	79,37	0,000 936 961
491	320	142	20	17	82,50	0,000 936 995
492	305	157	17,70	18	81,87	0,000 952 465
493	320	143	21	17	85	0,000 954 061
494	297	138	17	23	82,75	0,000 955 067
495	305	158	18,70	18	84,37	0,000 967 969
496	297	139	18	23	85	0,000 969 768
497	320	136	16	21	79,25	0,000 978 250
498	305	159	19,70	18	86,87	0,000 983 473
499	297	140	19	23	87,37	0,000 984 470
500	305	160	20,70	18	89,50	0,000 998 977
501	297	141	20	23	89,75	0,000 999 171
502	297	142	21	23	92	0,001 013 873
503	305	161	21,40	18	92	0,001 014 482
504	381	127	13,50	17,75	73	0,001 024 886
505	303	134	19 29	23	94,18	0,001 035 580
506	381	128	14,50	17,75	76,12	0,001 049 080

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas. <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
507	305	152	15	23	84,84	0,001 055 960
508	381	129	15,50	17,75	79,25	0,001 073 273
509	318	144	22	21	94,54	0,001 082 640
510	355	152	14	18	80	0,001 090 416
511	381	130	16,50	17,75	82,12	0,001 097 467
512	355	153	15	18	82,75	0,001 111 264
513	381	131	17,50	17,75	85,37	0,001 121 610
514	355	154	16	18	85,50	0,001 132 112
515	302	162	15	24,37	92	0,001 144 835
516	381	132	18,50	17,75	88,50	0,001 145 854
517	355	155	17	18	88,25	0,001 152 959
518	302	163	16	24,37	94	0,001 160 036
519	381	133	19,50	17,75	91,62	0,001 170 047
520	355	156	18	18	91	0,001 173 807
521	302	164	17	24,37	96	0,001 175 236
522	400	137	16	17	82,81	0,001 181 510
523	302	165	18	24,37	98	0,001 190 437
524	381	134	20,50	17,75	94,75	0,001 194 241
525	355	157	19	18	93,75	0,001 194 655
526	400	140	16	17	82,80	0,001 200 220
527	302	166	19	24,37	100	0,001 205 637
528	355	158	20	18	96,50	0,001 215 502
529	381	135	20,50	17,75	97,75	0,001 218 434
530	302	167	20	24,37	102	0,001 220 838
531	381	136	22,50	17,75	100,87	0,001 242 628
532	381	137	23,50	17,75	104	0,001 266 821
533	406	152	14	18	85	0,001 306 340

NÚMERO de orden.	DIMENSIONES EN MILÍMETROS				PESO en kilogramos por metro lineal.	$\frac{I}{v}$ en metros.
	ALTURA <i>b</i>	ANCHO de las tablas <i>a</i>	ESPEJOR del alma. <i>e</i>	ESPEJOR medio de las tablas. <i>c</i>		
534	406	153	15	18	88,25	0,001 335 081
535	398	148	22	17	101,71	0,001 362 570
536	406	154	16	18	91,50	0,001 363 822
537	406	155	17	18	94,75	0,001 392 563
538	406	156	18	18	98	0,001 421 304
539	406	157	19	18	101,25	0,001 450 045
540	406	158	02	18	104,50	0,001 478 787

TABLA NÚM. 4

MOMENTOS DE INERCIA DE ALMAS LLENAS DE PALASTRO,
DE 1 MILÍMETRO DE ESPEJOR (FIG. 5.^a, LÁM. 20)

Quando el espesor sea *n* milímetros, se multiplicará por *n* (número entero de milímetros) los valores de *I* y de los pesos por metro lineal.

ALTURA <i>b</i> en milímetros.	PESO por metro lineal en kilogramos.	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.	ALTURA <i>b</i> en milímetros.	PESO por metro lineal en kilogramos	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.
100	0,78	0,000 000 083	380	2,96	0,000 004 554
120	0,94	0,000 000 143	400	3,12	0,000 005 312
140	1,09	0,000 000 228	420	3,18	0,000 006 149
160	1,24	0,000 000 340	440	3,36	0,000 007 064
180	1,40	0,000 000 484	460	3,58	0,000 008 079
200	1,56	0,000 000 664	480	3,74	0,000 009 179
220	1,72	0,000 000 883	500	3,90	0,000 010 375
240	1,87	0,000 001 144	550	4,29	0,000 013 560
260	2,03	0,000 001 459	600	4,68	0,000 017 928
280	2,18	0,000 001 824	700	5,46	0,000 028 469
300	2,34	0,000 002 241	800	6,24	0,000 042 496
320	2,50	0,000 002 720	900	7,02	0,000 060 507
340	2,65	0,000 003 262	1000	7,80	0,000 083 333
360	2,80	0,000 003 872			

TABLA NÚM. 5

MOMENTOS DE INERCIA DE TABLAS SENCILLAS DE PALASTRO
(FIG. 10, LÁM. 20), DE 1 MILÍMETRO DE ESPESOR

Cuando el espesor sea n milímetros (en número entero), se multiplicarán por n los valores de I y del peso por metro lineal.

ALTURA total δ milímetros.	ANCHURA DE LAS TABLAS EN MILÍMETROS (DIMENSIONES a : FIG. 20, LÁM. 14).			
	150	200	250	300
	I en metros.	I en metros.	I en metros.	I en metros.
200	0,000 003 000	0,000 004 000	0,000 005 000	0,000 006 000
220	0,000 003 630	0,000 004 840	0,000 006 050	0,000 007 260
240	0,000 004 320	0,000 005 760	0,000 007 200	0,000 008 640
260	0,000 005 070	0,000 006 760	0,000 008 450	0,000 010 140
280	0,000 005 880	0,000 007 840	0,000 009 800	0,000 011 760
300	0,000 006 750	0,000 009 000	0,000 011 250	0,000 013 500
320	0,000 007 680	0,000 010 240	0,000 012 800	0,000 015 360
340	0,000 008 670	0,000 011 560	0,000 014 450	0,000 017 340
360	0,000 009 720	0,000 012 960	0,000 016 200	0,000 019 440
380	0,000 010 830	0,000 014 440	0,000 018 050	0,000 021 660
400	0,000 012 000	0,000 016 000	0,000 020 000	0,000 024 000
420	0,000 013 230	0,000 017 640	0,000 022 050	0,000 026 460
440	0,000 014 520	0,000 019 360	0,000 024 200	0,000 029 040
460	0,000 015 870	0,000 021 160	0,000 026 450	0,000 031 740
480	0,000 017 280	0,000 023 040	0,000 028 800	0,000 034 560
500	0,000 018 750	0,000 025 000	0,000 031 250	0,000 037 500
550	0,000 022 687	0,000 030 250	0,000 037 812	0,000 045 374

ALTURA total δ milímetros.	ANCHURA DE LAS TABLAS EN MILÍMETROS (DIMENSIONES a : FIG. 20, LÁM. 14.)			
	150	200	250	300
	I en metros.	I en metros.	I en metros.	I en metros.
600	0,000 027 000	0,000 036 000	0,000 045 000	0,000 054 000
700	0,000 036 750	0,000 049 000	0,000 061 250	0,000 073 500
800	0,000 048 000	0,000 064 000	0,000 081 000	0,000 096 000
900	0,000 060 750	0,000 081 000	0,000 101 250	0,000 121 500
1000	0,000 075 000	0,000 100 000	0,000 125 000	0,000 150 000

Peso por metro lineal de las dos tablas:

De 150 mm.....	2,34 kilogramos.
» 200 »	3,12 »
» 250 »	3,90 »
» 300 »	4,68 »

NOTA. Si las tablas tuviesen por anchura 300mm, 400mm, 500mm, 600mm, no habría más que multiplicar por 2 los números de la tabla.

TABLA NÚM. 7

MOMENTO DE INERCIA DE CUATRO ESCUADRAS DE RAMAS IGUALES DISPUESTAS COMO REPRESENTA LA FIG. 6.^a, LÁM. 20.

SECCIÓN	ALTURA δ en milímetros.	MOMENTO de inercia I en metros.
4 escuadras de $\frac{30 \times 30}{5}$. Área de la sección = 1100 mm. ² Peso de las 4 escuadras por metro lineal = 8,58 kilogramos.....	300	0, 000 021 863
	320	0, 000 025 060
	340	0, 000 028 495
	360	0, 000 032 138
	380	0, 000 035 490
	400	0, 000 040 086
	420	0, 000 044 391
	440	0, 000 048 912
	460	0, 000 053 660
	480	0, 000 058 624
500	0, 000 063 801	
4 escuadras de $\frac{35 \times 35}{5}$. Área (4 escuadras) = 1300 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 10,14 kilogramos.....	200	0, 000 009 969
	240	0, 000 015 140
	280	0, 000 021 350
	300	0, 000 024 845
	340	0, 000 032 615
	380	0, 000 041 425
	400	0, 000 046 220

TABLA NÚM. 6.

MOMENTOS DE INERCIA DE ALMAS VERTICALES DISCONTINUAS, DE PALASTRO, DE 1 MILÍMETRO DE ESPESOR (VÉASE FIG. 4.^a, LÁM. 20).

Cuando el espesor sea de n milímetros, se multiplicará por n (número entero de milímetros) los valores de I y de los pesos por metro lineal.

ALTURA total δ en milímetros	150		200		250		300		350	
	PESO por metro lineal. kilogramos.	MOMENTO de inercia I en metros.	PESO por metro lineal. kilogramos.	MOMENTO de inercia I en metros.	PESO por metro lineal. kilogramos.	MOMENTO de inercia I en metros.	PESO por metro lineal. kilogramos.	MOMENTO de inercia I en metros.	PESO por metro lineal. kilogramos.	MOMENTO de inercia I en metros.
350	2,34	0, 000 003 552	»	»	»	»	»	»	»	»
400	»	0, 000 005 229	»	»	»	»	»	»	»	»
450	»	0, 000 006 836	3,12	0, 000 007 557	»	»	»	»	»	»
500	»	0, 000 009 711	»	0, 000 010 292	»	»	»	»	»	»
550	»	0, 000 013 276	»	0, 000 013 276	3,90	0, 000 013 550	»	»	»	»
600	»	0, 000 015 687	»	0, 000 017 264	»	0, 000 017 845	»	»	»	»
700	»	0, 000 023 157	»	0, 000 026 228	»	0, 000 027 809	5,61	0, 000 028 586	»	»
800	»	0, 000 032 121	»	0, 000 037 184	»	0, 000 040 255	»	0, 000 041 832	6,55	0, 000 042 413
900	»	0, 000 042 579	»	0, 000 050 132	»	0, 000 055 195	»	0, 000 058 266	»	0, 000 059 843
1000	»	0, 000 054 864	»	0, 000 065 402	»	0, 000 072 965	»	0, 000 078 028	»	0, 000 081 099

NOTA. El peso por metro lineal que aparece en la tabla es el correspondiente a los dos trozos de alma llena.

SECCIÓN	ALTURA <i>b</i> en milímetros.	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.
4 escuadras de $\frac{40 \times 40}{5}$. Área (4 escuadras) = 150,00 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 11,70 kilogramos.....	200	0, 000 011 030
	240	0, 000 016 920
	280	0, 000 024 010
	300	0, 000 028 005
	340	0, 000 036 895
	380	0, 000 046 985
	400	0, 000 052 480
4 escuadras de $\frac{45 \times 45}{5}$. Área (4 escuadras) = 1700 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 13,26 kilogramos.....	200	0, 000 011 900
	205	0, 000 018 480
	280	0, 000 026 420
	300	0, 000 032 191
	320	0, 000 037 010
	340	0, 000 042 182
	360	0, 000 047 684
	380	0, 000 035 521
	400	0, 000 059 716
	420	0, 000 066 234
440	0, 000 073 108	
4 escuadras de $\frac{45 \times 45}{6}$. Área (4 escuadras) = 2016 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 15,72 kilogramos.....	200	0, 000 013 660
	240	0, 000 021 704
	280	0, 000 031 085
	300	0, 000 036 381

SECCIÓN	ALTURA <i>b</i> en milímetros.	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.
4 escuadras de $\frac{45 \times 45}{6}$. Área (4 escuadras) = 2016 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 15,72 kilogramos.....	340	0, 000 048 182
	380	0, 000 061 595
	400	0, 000 068 907
	440	0, 000 084 740
	480	0, 000 102 185
	500	0, 000 111 513
	4 escuadras de $\frac{50 \times 50}{5}$. Área de la sección (4 escuadras) = 1900 mm. ² Peso de las 4 escuadras por metro lineal = 14,82 kilogramos.....	200
240		0, 000 019 995
280		0, 000 028 795
300		0, 000 035 414
340		0, 000 046 460
380		0, 000 059 072
400		0, 000 065 948
440		0, 000 080 815
480		0, 000 097 201
500		0, 000 105 963
4 escuadras de $\frac{50 \times 50}{7}$. Área de la sección (4 escuadras) = 2604 mm. ² Peso de las 4 escuadras por metro lineal = 20,31 kilogramos.....	200	0, 000 017 051
	240	0, 000 026 939
	280	0, 000 038 912
	300	0, 000 045 679
	340	0, 000 060 776
	380	0, 000 077 956
	400	0, 000 087 328
450	0, 000 113 034	
500	0, 000 141 996	

SECCIÓN	ALTURA <i>b</i> en milímetros.	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{6}$. Área de la sección (4 escuadras) = 2736 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 21,34 kilogramos.	300	0,000 048 722
	350	0,000 062 258
	400	0,000 092 345
	450	0,000 119 061
	500	0,000 149 192
	550	0,000 182 750
	600	0,000 219 734
	650	0,000 260 127
	700	0,000 303 945
	750	0,000 351 514
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$. Área de la sección (4 escuadras) = 3584 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 27,95 kilogramos.	800	0,000 401 831
	850	0,000 455 906
	900	0,000 514 239
	950	0,000 574 313
	1000	0,000 638 653
	300	0,000 059 096
	350	0,000 076 043
	400	0,000 115 390
	450	0,000 150 257
	500	0,000 194 213
550	0,000 238 032	
600	0,000 287 175	
650	0,000 339 137	
700	0,000 396 404	
750	0,000 458 146	
800	0,000 524 472	

SECCIÓN	ALTURA <i>b</i> en milímetros.	MOMENTO de inerencia <i>I</i> en metros.
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$. Área de la sección (4 escuadras) = 3584 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 27,95 kilogramos.	900	0,000 673 360
	1000	0,000 846 350
	300	0,000 072 630
	350	0,000 106 043
	400	0,000 145 352
	450	0,000 190 555
	500	0,000 241 703
	600	0,000 361 535
	700	0,000 504 997
	800	0,000 672 039
4 escuadras de $\frac{70 \times 70}{9}$. Área de la sección (4 escuadras) = 4716 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 36,78 kilogramos.	900	0,000 862 661
	1000	0,000 076 861
	300	0,000 085 667
	350	0,000 127 317
	400	0,000 176 467
	450	0,000 233 117
	500	0,000 297 267
	600	0,000 448 067
	700	0,000 628 867
	800	0,000 839 667
4 escuadras de $\frac{80 \times 80}{10}$. Área de la sección (4 escuadras) = 4864 mm. ² Peso por metro lineal de las 4 escuadras = 37,94 kilogramos.	900	0,001 080 467
	1000	0,001 351 267

3. RESOLUCIÓN GENERAL

DE LOS PROBLEMAS DE RESISTENCIA Y RIGIDEZ RELATIVOS Á PIEZAS
DE SECCIÓN CONSTANTE Y DE SECCIÓN VARIABLE

SÓLIDOS DE SECCIÓN CONSTANTE. — ECUACIONES GENERALES

490. Ecuaciones de resistencia para las piezas de sección constante, sometidas á flexión. — Resumiendo cuanto dejamos dicho en los artículos anteriores, relativo á los esfuerzos diferentes á que se encuentra sometido el material en un prisma flexado, resulta:

1.º Una extensión ó compresión en las fibras, distinta para cada capa, y aun dentro de cada capa de un punto á otro, cuyo valor por unidad superficial de sección transversal es $p = \frac{Mz}{I}$; y su máximo, $p_0 = \frac{M_0v}{I}$. Haciendo $p_0 = R$ (siendo R coeficiente de trabajo por extensión ó por compresión), la ecuación de resistencia en la flexión, por este concepto, será (fórmulas (10) y (11) del núm. 460):

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{M_0v}{I} \\ \frac{RI}{v} &= M_0 \end{aligned} \right\} (1),$$

en las cuales M_0 representa el momento máximo, I el momento de inercia y v la mayor de las distancias á la capa neutra de las fibras más alejadas.

2.º Un esfuerzo de desgarramiento longitudinal de las fibras, cuyo valor por unidad de superficie, contada en las capas paralelas á la neutra, es

$S = -\frac{C}{Iu} \omega h$ (fórmula 5 del núm. 465), y su máximo en la capa neutra es $S_0 = -\frac{C_0}{Iu} \omega_0 h_0$, siendo

u = anchura de las capas de fibras.

C_0 = esfuerzo cortante máximo.

$\omega_0 h_0$ = momento, con respecto á la capa neutra, de la parte de área de sección transversal comprendida entre dicha capa y las fibras más alejadas.

Se obtendrá la resistencia conveniente en la pieza flexada si se establece que S ó S_0 son, cuando más, iguales al coeficiente de trabajo de desgarramiento R''' , admisible según la clase de material; de modo que la ecuación de resistencia correspondiente á esta manera de destrucción, será, para una capa de fibras cualquiera,

$$\left. \begin{aligned} R''' &= -\frac{C}{Iu} \omega h \\ R''' &= -\frac{C_0}{Iu} \omega_0 h_0 \end{aligned} \right\} (2),$$

y para la capa neutra

3.º Un esfuerzo cortante c por unidad superficial, derivado del total C que se distribuye de modo no uniforme en la sección transversal de área ω (núm. 472), puesto que crece desde el valor $c = 0$ en la parte más alejada de la capa neutra hasta el máximo $c_0 = -S_0$ en la capa neutra, siendo siempre igual al valor de S , fuerza de desgarramiento, en el punto que se considere.

Llamando R'' al coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante, la resistencia exige se verifique la ecuación $c = R''$; de modo que si admitimos, en obsequio á la facilidad de los cálculos, que el esfuerzo cortante total C se distribuye uniformemente en la sección transversal, y llamamos C_0 al máximo, será

$$\left. \begin{aligned} R'' &= \frac{C_0}{\omega} \\ C_0 &= R'' \omega \end{aligned} \right\} (3),$$

y si se tiene en cuenta la variación de c ;

$$\left. \begin{aligned} \text{Para una capa cualquiera.....} & c = R'' \\ \text{Para la capa neutra.....} & c_0 = -S_0 = R'' \end{aligned} \right\} (4).$$

491. Elección de las ecuaciones de resistencia. — No siempre se hace uso á un tiempo de las tres ecuaciones que tienen cuenta de los modos de ruptura por extensión ó compresión, esfuerzo cortante y desgarramiento longitudinal.

Para las *vigas de una sola pieza*, como sucede en las de madera, ó las laminadas de hierro, solamente se aprecia el modo de ruptura por extensión ó compresión, y así es que se emplea para los cálculos de resistencia una cualquiera de las ecuaciones (1), que, como ya hemos visto en el núm. 460, puede convertirse en cualquiera de las (6) á (9) de dicho número. Se funda este proceder en el pequeño valor que tienen c_0 y S_0 comparados con el p_0 .

En efecto; fijemos nuestra atención en una viga de sección rectangular de lados a y b , siendo este último lado el paralelo al plano de flexión (fig. 18, lám. 13), y supongámosla apoyada en sus extremos y cargada en su punto medio con un peso P . El momento de flexión máximo será $M_0 = \frac{1}{4} Pl$.

(núm. 317) y el esfuerzo cortante máximo $C_0 = \frac{1}{2} P$.

$$p_0 = \frac{M_0 c}{I} = \frac{\frac{1}{4} Pl \frac{1}{2} b}{\frac{1}{12} ab^3} = \frac{3 Pl}{2 ab^2}$$

$$c_0 = S_0 = -\frac{3}{2} \frac{C_0}{ab} \text{ (fórmula 7 del núm. 467)}$$

ó

$$c_0 = S_0 = -\frac{3P}{4ab};$$

de modo que

$$p_0 : c_0 = S_0 :: 2l : b$$

y el doble de la longitud de las vigas ($2l$) es mucho mayor que el lado b de escuadría. Para cualquier otro caso de flexión, la relación $\frac{p_0}{c_0 = S_0}$ es también muy grande.

Hay que añadir en justificación de este proceder:

1.º Que la extensión ó compresión máxima p_0 y el esfuerzo cortante y desgarramiento máximos $c_0 = S_0$, no se ejercen en las mismas fibras, antes

bien en aquellas en que tiene lugar la extensión ó compresión p_0 (que son las más alejadas de la capa neutra) es cero el valor del esfuerzo cortante c por unidad superficial, y el desgarramiento S , también por unidad de área; y en cambio en la capa neutra, que es donde se desarrollan c_0 y S_0 , la extensión ó compresión de fibras p por unidad superficial es cero.

2.º Que en muchos de los casos de flexión (véase la tabla del núm. 404) no coinciden en una misma sección transversal el máximo esfuerzo cortante C_0 y el máximo momento de flexión M_0 , es decir, p_0 y $c_0 = S_0$; y por el contrario á M_0 corresponde un mínimo de C y recíprocamente.

492. Para las vigas de madera formadas de trozos ensamblados (figs. 18 á 21, lám. 20) y para las vigas de hierro de pequeña altura compuestas de tablas, escuadras y almas llenas de palastro cosidas con roblones (figs. 23 y 33 de la lám. 14 y sus similares) no es posible prescindir del valor de S_0 , si se quiere que el enlace ó cosido de los elementos resista convenientemente para que el conjunto se porte como una sola viga y no como la yuxtaposición ó superposición de vigas aisladas que se flexan separadamente. Las ecuaciones de resistencia que deberán emplearse, serán para este caso las (1) y (2) del núm. 490; las primeras tienen en cuenta la resistencia por extensión y compresión de las fibras, y la segundas las de los enlaces.

Por las razones expuestas en el número anterior, se prescinde del esfuerzo cortante.

493. En las vigas compuestas de madera ó de hierro, de gran altura, ya sea el alma llena ó de celosía ó de elementos dispuestos de modo vario, se emplean las siguientes ecuaciones de resistencia, expuestas en el número 490:

Ecuaciones (1) relativas á la extensión y compresión de las fibras: se aplican al cálculo de los largueros, tablas ó cordones superior é inferior de la viga; como que, según hemos dicho repetidas veces, en las partes más alejadas de las fibras neutras no se deja sentir la influencia del esfuerzo cortante, y en cambio obran enérgicamente las extensiones y compresiones engendradas por el momento de flexión.

Ecuaciones (3) relativas al esfuerzo cortante: se emplean en el cálculo del alma de la viga, suponiendo (lo cual es algo arbitrario) que en esta parte solamente ejerce su acción dicho esfuerzo. Ya hemos visto que esto era verdad únicamente en la capa neutra (núm. 491, 1.º); pero en la parte restante del alma ejercen influencia las extensiones y compresiones de las fibras, producidas por el valor del momento de flexión M .

Ecuaciones (2) referentes al desgarramiento; úsanse para el cálculo de

los enlaces del sistema, es decir, de los pernos, roblones, bridas de unión de los diversos elementos.

494. Observación relativa al empleo de la ecuación de resistencia por extensión y compresión de fibras. — Las ecuaciones (1) del núm 490, que han de emplearse en todos los casos anteriores, deben ser aplicadas de modo conveniente, teniendo en cuenta los valores que puede tener v y la naturaleza del material, según ya se indicó en el núm. 460. Es preciso no olvidar que dichas ecuaciones proceden de la fórmula $p = \frac{Mz}{I}$ que determina la compresión ó extensión p por unidad superficial en una fibra cualquiera, y que asignando á M su valor máximo M_0 , debe ser sustituida p por el menor de los coeficientes de trabajo por extensión y por compresión R y R' correspondientes á la materia de que esté formada la viga, á fin de ponernos en las condiciones más desfavorables y asegurar, por tanto, la resistencia.

Pueden resultar los casos siguientes (véanse las ecuaciones 6 á 9 del número 460):

(a) El plano de fibras neutras lo es de simetría de la viga, de modo que $or = os = v$ (fig. 13, lám. 13).

Si el material tiene coeficientes iguales de trabajo por extensión y compresión, es decir, si $R = R'$ se emplearán las ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{M_0 v}{I} \\ \frac{R I}{v} &= M_0 \end{aligned} \right\} (5)$$

Así se hace con la madera, hierro, acero, etc.

Si la materia tuviese aptitudes distintas para las extensiones y compresiones, esto es, que $R > R'$, se sustituiría la menor de estas cantidades en las ecuaciones anteriores. Esto es lo que se practica con la piedra, fundición y otros materiales.

(b) La viga no es simétrica con respecto á la capa de fibras neutras; de modo que $ro = v'$ y $so = v''$ son diferentes (secciones de forma de T sencilla, doble T no simétrica, U acostada, cseuada, etc., figs. 35 á 37 de la lám. 14, y 1.^a á 4.^a y 14 de la lám. 15). En cuanto al material, $R = R'$.

Se tomará el mayor de los valores v' y v'' ; por ejemplo, en una T sencilla (fig. 35, lám. 14) en que $v'' > v'$ sería

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{M_0 v''}{I} \\ \frac{R I}{v''} &= M_0 \end{aligned} \right\} (6)$$

(c) Son diferentes v' y v'' y también R y R' .

Llamemos v'' á la magnitud correspondiente á las fibras extendidas y v' á la relativa á las comprimidas. Fórmese $\frac{R}{v''}$ y $\frac{R'}{v'}$ é iguálense á $\frac{M_0}{I}$ el menor de estos cocientes. Será, pues,

$$R = \frac{M_0 v''}{I} \quad (7) \quad \text{si} \quad \frac{R}{v''} < \frac{R'}{v'} \quad \text{ó} \quad \frac{v'}{v''} < \frac{R'}{R}$$

$$R' = \frac{M_0 v'}{I} \quad (8) \quad \text{si} \quad \frac{R'}{v'} < \frac{R}{v''} \quad \text{ó} \quad \frac{v'}{v''} > \frac{R'}{R}$$

Cuando $\frac{R}{v''} = \frac{R'}{v'}$ se tomará cualquiera de los dos.

En efecto; hagamos $cd = R'$ y unamos d y O (fig. 1.^a, lám. 16). Si $ab = R$, sucederá que al propio tiempo llegarán las fibras cd al trabajo R' y las ab al R ; de modo que $\frac{R'}{v'} = \frac{R''}{v''}$, y cualquiera de estos cocientes se podrá igualar á $\frac{M_0}{I}$.

Si es $am = R$, de modo que $ab < R$, quiere decir que cuando las fibras cd trabajen á R' , las ab no habrán llegado á R ; las primeras son las que se hallan en peores condiciones, y á ellas habremos de subordinar los cálculos; y en este caso $\frac{cd}{Oc} < \frac{am}{Oa}$ ó $\frac{R'}{v'} < \frac{R}{v''}$.

Si, finalmente, $an = R$, de modo que $ab > R$, antes de haber llegado las fibras cd al trabajo R' habrán rebasado las ab la extensión R . Será preciso aceptar el cociente $\frac{R}{v''}$ correspondiente á las fibras que se hallen en peores condiciones, y este caso se distingue de los demás porque $\frac{an}{Oa} < \frac{cd}{Oc}$

$$\text{ó} \quad \frac{R}{v''} < \frac{R'}{v'}$$

495. Rigidez.—En cualquiera de los tres casos anteriores, y como parte distinta del problema, se calculará la flecha que toma la viga en la flexión por medio de las fórmulas correspondientes (tabla del núm. 404) que pueden resumirse (núm. 405) en la siguiente:

$$f = k \frac{P l^3}{EI}$$

496. Semejanza de vigas en lo relativo á resistencia.—Supongamos dos vigas AB , $A'B'$ (fig. 12, lám. 20) cargadas de modo semejante, y que entre las cantidades correspondientes á las dos existen las relaciones siguientes:

	Viga AB .	Viga $A'B'$.	Relaciones.
Fuerzas.....	P, P_1, P_2 .	P', P'_1, P'_2 .	$\frac{P'}{P} = \frac{P'_1}{P_1} = \frac{P'_2}{P_2} = \dots = r$
Longitudes.....	l, d, d_1, \dots	l', d', d'_1, \dots	$\frac{l'}{l} = \frac{d'}{d} = \frac{d'_1}{d_1} = \dots = s$
Dimensiones de la sección transversal.....	a, u, \dots	a', u', \dots	$\frac{a'}{a} = \frac{u'}{u} = \dots = t$
	b, v, \dots	b', v', \dots	$\frac{b'}{b} = \frac{v'}{v} = \dots = x$
Coefficientes de elasticidad.....	E, \dots	E', \dots	$\frac{E'}{E} = z$ (1).

Llamemos, además,

	Viga AB .	Viga $A'B'$.
Momento de inercia de la sección transversal.....	I	I'
Área de la sección transversal.....	ω	ω'
Momento general de flexión.....	M	M'
Flecha de la elástica.....	f	f'
Coefficiente de trabajo.....	R	R_1

De las relaciones anteriores se deducen estas otras:

$$\text{Áreas..... } \frac{\omega'}{\omega} = tx \text{ ó } \omega' = tx\omega \text{ (2).}$$

$$\text{Momentos de inercia... } \frac{I'}{I} = txx^2 = h \text{ ó } I' = hI \text{ (3).}$$

$$\text{Momentos de flexión... } \frac{M'}{M} = rs \text{ ó } M' = rsM \text{ (4).}$$

En cuanto á las flechas, de la expresión general $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$ (número 308) se deduce $y = \frac{1}{EI} \int \int M dx$; por tanto, las ordenadas y de la elástica y las flechas, que no son sino valores particulares de y , están en la misma relación que los cocientes $\frac{M}{EI}$, es decir, que

$$\frac{f'}{f} = \frac{rs}{zh} \text{ ó } f' = \frac{rs}{zh} f \text{ (5),}$$

siendo $h = tx^3$ (relación 3).

497. Haciendo uso de las relaciones anteriores, podremos deducir de los fenómenos de flexión de la primera viga los correspondientes á la segunda.

Supongamos, por ejemplo, que las dos vigas son iguales en longitud, así como las distancias d y d' , d_1 y d'_1 , etc., de modo que $s = 1$; y además que las flechas f y f' hayan también de ser iguales, y se quiere averiguar las circunstancias que han de concurrir en la viga $A'B'$ para que esto tenga lugar.

Puesto que $f = f'$, será (relación 5):

$$rs = zh,$$

ó, puesto que $s = 1$, $r = zh$; y substituyendo las relaciones correspondientes, será:

$$r = \frac{P'}{P} = \frac{P'_1}{P_1} = \frac{P'_2}{P_2} = \dots = \frac{E' I'}{EI} = zh,$$

que dice que las fuerzas han de ser proporcionales á los productos de los momentos de inercia por los coeficientes de elasticidad.

Si se quisiera que en las dos vigas semejantes AB , $A'B'$, los coeficientes de trabajo por efecto de la flexión fuesen iguales, se tendría:

$$\text{Viga } AB \dots R = \frac{Mv}{I}$$

$$\text{Viga } A'B' \dots R_1 = \frac{M'v'}{I'}$$

y sustituyendo las relaciones (3), (4) y la $\frac{v'}{v} = x$, tendríamos:

$$\frac{R_t}{R} = \frac{rsx}{h} = 1,$$

de donde

$$rsx = h = tx^5$$

ó

$$rs = tx^2$$

ecuación de condición.

VIGAS DE UNA SOLA PIEZA (SECCIÓN CONSTANTE)

498. Problemas que pueden presentarse. — La ecuación (5) del número 494

$$\frac{RI}{v} = M_0 = \frac{1}{n} Pl \text{ (12, núm. 460)}$$

pone en relación las cargas (P) y las dimensiones de escuadría de la pieza ($\frac{I}{v}$); resuelve, pues, los siguientes problemas:

1.º (Directo.) Dadas las cargas (P), longitud de la viga (l) y caso de flexión (n), determinar la escuadría para un cierto coeficiente de trabajo R .

2.º (Recíproco.) Conocidas las dimensiones de la viga (l y $\frac{I}{v}$) y el caso de flexión (n), determinar las cargas (P) que podrán aplicársele, trabajando la materia á R por unidad superficial en los puntos más comprometidos.

3.º (Reconocimiento de obras.) Se conocen las cargas (P) y dimensiones de la viga en longitud y escuadría (l y $\frac{I}{v}$) y se quiere conocer el coeficiente de trabajo (R) para deducir el grado de seguridad de la construcción.

4.º Como segunda parte de los problemas 1.º y 2.º, se desea conocer la flecha f (una vez conocidas P , l , $\frac{I}{v}$) por la fórmula

$$f = k \frac{Pl^5}{EI}$$

499. Resolución del primer problema. Vigas de sección circular llena. —

En este caso $\frac{I}{v} = \frac{\pi r^5}{4}$ (29 de la tabla del núm. 477), y será

$$\frac{RI}{v} = \frac{R\pi r^5}{4} = M_0 \text{ (1),}$$

de donde se despejará el valor de r , radio del círculo. El problema es determinado.

Ejemplos. 1.º Viga cilíndrica de hierro ($R = R'$) de 4 metros de longitud ($l = 4^m$), apoyada en los dos extremos y cargada con $P = 1000$ kilogramos ($n = 4$).

$$M_0 = \frac{1}{4} Pl = \frac{1}{4} \times 1000 \times 4 = 1000 \text{ kilográmetros.}$$

$$R = R' = 6000000 \text{ kilogramos por metro cuadrado (*).}$$

$$v' = v'' = \frac{1}{2} r.$$

$$\frac{RI}{v} = \frac{6000000 \pi r^5}{4} = 1000.$$

$$\text{Radio del cilindro..... } r = 0,06 \text{ metros.}$$

Flecha:

$$E = \text{coeficiente de elasticidad del hierro} = 18 \times 10^9 \text{ por m.}^2 \text{ (núm. 99).}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \times 0,06^4}{4} = 0,00001017.$$

$$P = 1000 \text{ " } l = 4.$$

$$f = - \frac{Pl^5}{48EI} \text{ (tabla del núm. 404, 2).}$$

$$f = - \frac{1000 \times 4^5}{48 \times 18 \times 10^9 \times 0,00001017} = - 0,0072 \text{ metros.}$$

2.º Viga cilíndrica de fundición, de 3 metros de longitud entre apoyos, cargada uniformemente á razón de 400 kilogramos por metro lineal.

(*). Como los pesos han sido dados en kilogramos y la longitud l en metros, tiene que ser expresado R en kilogramos por m.²; y también r se obtendrá en metros.

Como ejemplo tomaremos todas las dimensiones en milímetros, y por tanto las fuerzas repartidas deberán tomarse en kilogramos por milímetro lineal y kilogramos por mm.²

Así, pues,

$$l = 3\text{m} = 3000\text{mm.}$$

$$p = 400 \text{ kilogramos por m.} \cdot l = 0,4 \text{ kilogramos por milímetro lineal.}$$

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 \text{ (tabla del núm. 404, 3) (*)}$$

$$M_0 = \frac{1}{8} 0,4 \times 3000^2 = 450000 \text{ kilogramos-milímetros.}$$

$$\text{Para la fundición. } \begin{cases} R = 3 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ por extensión.} \\ R' = 6 \text{ á } 12 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ por compresión.} \end{cases}$$

Estamos, pues, en el caso de $v' = v'' = \frac{1}{2} r$, y $R < R'$ (núm. 494, a); se elegirá R , y será:

$$\frac{R I}{v} = \frac{3 \times 3,14 \times r^5}{4} = 450000$$

de donde

$$r = 57,6\text{mm.}$$

500. Vigas de sección cuadrada de lado b .—Para esta sección, $\frac{I}{v} = \frac{b^5}{6}$ (2 de la tabla del núm. 477); de modo que la ecuación de resistencia es

$$\frac{R I}{v} = \frac{R b^5}{6} = M_0 \quad (2),$$

de donde

$$b = \sqrt[5]{\frac{6 M_0}{R}}.$$

El problema es determinado.

(*) El valor de M_0 puede ponerse también bajo la forma $\frac{1}{8} P l$, siendo $P = p l =$ carga total. Si hubiésemos elegido esta expresión, P que es la carga total $= 400 \times 3 = 0,4 \times 3000 = 1200$ kilogramos y $M_0 = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} 1200 \times 3000 = 450000$ kilogramos-milímetros, que es el mismo valor hallado por la expresión $M_0 = \frac{1}{8} p l^2$.

Ejemplo. Pieza de madera empotrada en un extremo y cargada en el otro con $P = 500$ kilogramos.

Longitud $l = 2$ metros.

$$R = 60 \text{ kilogramos por cm.}^2, \text{ ó}$$

$$R = 600000 \text{ kilogramos por m.}^2$$

$$M_0 = P l = 500 \times 2 = 1000 \text{ kilográmetros.}$$

$$b = \sqrt[5]{\frac{6 \times 1000}{600000}} = 0,1 \text{ metros.}$$

La flecha f es (8 tabla del núm. 404):

$$f = - \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E I}.$$

$E =$ coeficiente de elasticidad longitudinal de la madera $= 1000$ kilogramos por mm.² $= 10^9$ kilogramos por m.² (núm. 175).

$$I = \frac{b^4}{12} = \frac{0,1^4}{12} = 0,0000083.$$

$$f = \frac{1}{3} \times \frac{500 \times 2^3}{0,0000083 \times 10^9} = 0,16 \text{ metros.}$$

501. Vigas de sección rectangular, de lados a y b , siendo el b paralelo al plano de flexión (fig. 18, lám. 13).—Puesto que $\frac{I}{v} = \frac{a b^3}{6}$ (1, tabla del núm. 477), la ecuación de resistencia será:

$$\frac{R a b^3}{6} = M_0 \quad (3).$$

El problema es indeterminado, puesto que hay dos incógnitas a y b . Esto demuestra que hay una infinidad de vigas de la misma resistencia.

Con objeto de hacer determinado el problema, se fija *à priori* una cierta relación entre los lados de escuadría a y b .

Para la madera suele admitirse la relación $a = \frac{2}{3} b$, ó la $a = 0,71 b$. En

las vigas *enterizas*, esto es, en las que proceden de un madero en rollo al que se han quitado los *costeros* (fig. 2.^a, lám. 16); esta relación es la que conviene á la viga de mayor resistencia, entre todas las que pueden inscribirse en el tronco cilíndrico.

En efecto; á igual valor de R , el máximo de M_0 , y por tanto de las cargas que pueden ser aplicadas á una viga, corresponderá al máximo del producto $a b^2$ (ecuación anterior). Ahora bien; sean

$$\begin{aligned} d &= B D = \text{diámetro del tronco.} \\ a &= A D = \text{lado menor de escuadría.} \\ b &= A B = \text{lado mayor de } \text{íd.} \end{aligned}$$

Tendremos

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 - a^2 \quad (4) \\ a b^2 &= a d^2 - a^3. \end{aligned}$$

El valor de a que hace máximo al producto $a b^2$, se obtendrá por la ecuación

$$\frac{d \text{ i. f. } a b^2}{d \text{ i. f. } a} = d^2 - 3 a^2 = 0,$$

de donde $a = d \sqrt{\frac{1}{3}}$; y sustituyendo en (4), se halla $b = d \sqrt{\frac{2}{3}}$, y la relación entre a y b es

$$a = b \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ó

$$a = 0,71 b.$$

Para la fundición pueden aceptarse las siguientes relaciones:

Sección rectangular.....	$a = 0,20 b.$
Ídem íd. reforzada con nervios.	$a = 0,07 b \text{ á } 0,10 b.$

En el hierro la relación $\frac{a}{b}$ llega á alcanzar valores todavía más pequeños.

502. Inconvenientes de las secciones rectangulares altas y delgadas.—

Si se atiende únicamente á la flexión teórica, ya se ha demostrado en el número 486 la conveniencia de hacer muy alargadas las secciones rectangulares, porque á igualdad de área el valor de $\frac{I}{v}$, y por tanto de M_0 y de las cargas que es posible aplicar á la pieza sometida á flexión, aumentan con la altura b .

Pero estos aumentos tienen su límite; pues si se hace demasiado alto el rectángulo, á expensas del espesor, se origina un alabeo lateral de la viga que acarrea su rápida destrucción (figs. 3.^a y 4.^a, lám. 16), porque las cargas P producen un momento de flexión lateral $P a$. El alabeo es más visible en la sección A , en que el momento ordinario de flexión es un máximo, y se manifiesta en las fibras comprimidas, especialmente en las más alejadas de la fibra neutra.

Débase el alabeo á dos causas principales. Es la primera la dificultad de mantener en posición invariable las cargas y la viga, de modo que el plano longitudinal de simetría de ésta sea plano de flexión, y una pequeña desviación da origen al par $P a$ (fig. 4.^a). Consiste la segunda en que las capas de fibras 1, 2, 3, que resultan comprimidas y son de longitud grande con relación á las dimensiones de sección transversal, tienen tendencia á la flexión lateral, lo mismo que sucede á toda pieza larga comprimida (*); por esto se alabean más las fibras más alejadas de la capa neutra, que son las más comprimidas, y en el punto en que la compresión es mayor.

503. Mayor resistencia de las piezas puestas de canto. — Conviene que la dimensión de escuadría de mayor valor sea paralela al plano de flexión. En efecto; sean a y b los lados de escuadría de una viga de sección rectangular, y supongamos $b > a$.

Llamemos P el peso que puede resistir la viga puesta *de canto*, esto es, siendo b paralelo al plano de flexión, y P' el correspondiente á la misma viga colocada *de tabla*, ó con el lado a paralelo á dicho plano. Tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Pieza puesta de canto.....} & \quad \frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{n} P l. \\ \text{Ídem íd. de tabla.....} & \quad \frac{R b a^2}{6} = \frac{1}{n} P' l. \end{aligned}$$

de donde

$$P : P' :: b : a.$$

* Piezas comprimidas según su eje. Capítulo VII.

504. Modo de tener en cuenta el peso propio de la viga.—En las vigas de madera, y en las metálicas de sección rectangular, el peso propio es muy pequeño en comparación de los que pueden soportar, y por esto no se aprecia generalmente. Si se quisiera tenerlo en cuenta se seguiría el procedimiento del núm. 510.

505. Método abreviado para la resolución del primer problema, en el caso de secciones circulares, cuadradas ó rectangulares.—Para la madera puede hacerse $R = 60$ kilogramos por cm.^2 (núm. 178). Tomando las dimensiones en centímetros, la ecuación de resistencia (3 del núm. 501) será:

$$a b^2 = \frac{1}{n} P \frac{l}{10}.$$

Pero l en número entero de centímetros, dividido por 10, equivale á expresararlo en número entero de decímetros; luego tendremos

$$a b^2 = \frac{1}{n} P l,$$

representando... $\left\{ \begin{array}{l} P \dots\dots\dots \text{kilogramos.} \\ a \text{ y } b \dots\dots\dots \text{centímetros.} \\ l \dots\dots\dots \text{decímetros.} \end{array} \right.$

Admitamos la relación $a = \frac{2}{3} b$ (núm. 501); será:

$$\left. \begin{array}{l} b = 1,14 \sqrt[5]{\frac{P l}{n}} \\ a = 0,76 \sqrt[5]{\frac{P l}{n}} \end{array} \right\} (5)$$

Para las secciones cuadradas, se deduciría de la ecuación 2 (núm. 500):

$$b = \sqrt[5]{\frac{P l}{n}} (6),$$

y para las circulares (1, núm. 499) $r = 0,6 \sqrt[5]{\frac{P l}{n}}$ (7).

En las (6) y (7), b y r están expresados en centímetros y l en decímetros.

Ejemplos. 1.º Viga de madera, de sección rectangular, empotrada en los dos extremos y cargada en su punto medio con $P = 2000$ kilogramos, siendo la longitud $l = 4$ metros.

$$\begin{array}{l} n = 8 \text{ (cuadro del núm. 405).} \\ l = 40 \text{ decímetros.} \end{array}$$

$$b = 1,14 \sqrt[5]{\frac{2000 \times 40}{8}} = 24,50 \text{ centímetros.}$$

$$a = 0,76 \sqrt[5]{\frac{2000 \times 40}{8}} = 16,40 \text{ centímetros.}$$

2.º Viga de madera de sección cuadrada empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente en 200 kilogramos por metro lineal.

Datos:

$$\begin{array}{l} l = 5 \text{ metros} = 50 \text{ decímetros} \quad n = 12 \\ p = 200 \text{ kilogramos} \quad P = 200 \times 5 = 1000 \text{ kilogramos.} \end{array}$$

$$b = \sqrt[5]{\frac{1000 \times 50}{12}} = 16 \text{ centímetros.}$$

3.º Viga de madera de sección circular, empotrada en un extremo y cargada uniformemente con $p = 100$ kilogramos por metro de longitud.

Datos:

$$\begin{array}{l} l = 4 \text{ metros} = 40 \text{ decímetros} \quad n = 2 \\ p = 100 \text{ kilogramos} \quad P = 100 \times 4 = 400 \text{ kilogramos.} \end{array}$$

$$r = 0,6 \sqrt[5]{\frac{400 \times 40}{2}} = 12 \text{ centímetros.}$$

506. Para el hierro, R puede hacerse igual á 6 kilogramos por mm.^2 , ó

sea 600 kilogramos por cm.² La ecuación de resistencia sería, tomando todas las dimensiones en centímetros,

$$a b^2 = \frac{1}{n} P \frac{l}{100}$$

ó

$$a b^2 = \frac{1}{n} P l,$$

tomando a y b en centímetros y l en metros. Serán, pues, aplicables, al hierro las fórmulas (5), (6) y (7) del número anterior, representando

P kilogramos.
 a y b centímetros.
 l metros.

507. Tabla para el cálculo de escuadrías. — Haciendo uso de las fórmulas (5), (6) y (7) hemos formado la tabla siguiente, que facilita mucho la determinación de escuadrías en todos los casos. Fórmese el cociente $\frac{Pl}{n}$, en que

$n = 1, 2, 4, 8, 12$ ó 32 , según el caso de flexión (núm. **405**).

$P =$ carga total en kilogramos.

$l =$ longitud de la viga expresada. $\left\{ \begin{array}{l} \text{En decímetros para la madera,} \\ \text{En metros para el hierro,} \end{array} \right.$

y el número que resulte se busca en la primera columna, tomando, si no se encuentra, el mayor de los que se le aproximen; á la derecha se encontrarán las dimensiones de escuadría.

Ejemplos. 1.º Pieza de madera de longitud $l = 4^m,30$, de sección rectangular, apoyada en los dos extremos y cargada en su punto medio ($n = 4$) con un peso $P = 1500$ kilogramos:

$$\frac{Pl}{n} = \frac{1500 \times 43}{4} = 16125.$$

El número de la primera columna, más aproximado á éste por exceso, es 16581; á él corresponde la escuadría

$a = 19,38$ centímetros.

$b = 29,07$ centímetros.

2.º Pieza cilíndrica de hierro, de longitud $l = 4$ metros, apoyada en tres puntos equidistantes y cargada con $p = 400$ kilogramos por metro lineal:

Carga total..... $P = 400 \times 4 = 1600$.

$n = 32$.

$l = 4$ (expresado en metros).

$$\frac{Pl}{n} = \frac{1600 \times 4}{32} = 200.$$

Número inmediato mayor de las tablas..... 216

Radio en centímetros..... 3,6

3.º Pieza cilíndrica de madera, apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente con $p = 400$ kilogramos por metro de longitud, siendo ésta de valor $l = 5$ metros.

Empezaremos por formar el valor de la carga total P , tomando las dimensiones en metros, y será

$$P = p l = 400 \times 5 = 2000.$$

Para el caso de flexión enunciado, $n = 4$; de modo que $\frac{Pl}{n}$, tomando l en decímetros, tiene por valor

$$\frac{Pl}{n} = \frac{2000 \times 50}{8} = 12500.$$

El número de la columna $\frac{Pl}{n}$ en la tabla, más aproximado por exceso, es 12978; á él corresponde una sección de 14,10 centímetros de radio. Si la pieza hubiese sido de sección rectangular, encontraríamos

$a = 17,86$ centímetros.

$b = 26,79$ centímetros.

TABLA

DE ESCUADRIAS DE PRISMAS DE MADERA Y DE HIERRO, SOMETIDOS A FLEXIÓN,
PARA VALORES VARIABLES DE CARGA TOTAL P Y LONGITUD l .

$\frac{Pl}{n}$ $P = \text{kilogramos.}$ Madera: $l = \text{decímetros.}$ Hierro: $l = \text{metros.}$	SECCIÓN CUADRADA Lado de la sección en centímetros.	SECCIÓN RECTANGULAR		SECCIÓN CIRCULAR Radio en centímetros.
		Lado horizontal en centímetros.	Lado vertical en centímetros.	
1	1,00	0,76	1,14	0,60
3	1,50	0,87	1,71	0,90
8	2,00	1,52	2,28	1,20
16	2,50	1,90	2,85	1,50
27	3,00	2,28	3,42	1,80
43	3,50	2,66	3,99	2,10
64	4,00	3,04	4,56	2,40
91	4,50	3,42	5,13	2,70
125	5,00	3,80	5,70	3,00
166	5,50	4,18	6,27	3,30
216	6,00	4,56	6,84	3,60
275	6,50	4,94	7,41	3,90
343	7,00	5,32	7,98	4,20
422	7,50	5,70	8,55	4,50
512	8,00	6,08	9,12	4,80
614	8,50	6,46	9,69	5,10
729	9,00	6,84	10,26	5,40
857	9,50	7,22	10,83	5,70
1000	10,00	7,60	11,40	6,00
1158	10,50	7,98	11,97	6,30
1331	11,00	8,36	12,54	6,60
1521	11,50	8,74	13,11	6,90
1728	12,00	9,12	13,68	7,20

$\frac{Pl}{n}$ $P = \text{kilogramos.}$ Madera: $l = \text{decímetros.}$ Hierro: $l = \text{metros.}$	SECCIÓN CUADRADA Lado de la sección en centímetros.	SECCIÓN RECTANGULAR		SECCIÓN CIRCULAR Radio en centímetros.
		Lado horizontal en centímetros.	Lado vertical en centímetros.	
1953	12,50	9,50	14,25	7,50
2197	13,00	9,88	14,82	7,80
2460	13,50	10,26	15,39	8,10
2744	14,00	10,64	15,96	8,40
3048	14,50	11,02	16,53	8,70
3375	15,00	11,40	17,10	9,00
3724	15,50	11,78	17,67	9,30
4096	16,00	12,16	18,24	9,60
4492	16,50	12,74	18,81	9,90
4913	17,00	12,92	19,38	10,20
5359	17,50	13,30	19,95	10,50
5832	18,00	13,68	20,52	10,80
6332	18,50	14,06	21,09	11,10
6859	19,00	14,44	21,66	11,40
7415	19,50	14,82	22,23	11,70
8000	20,00	15,20	22,80	12,00
8615	20,50	15,58	23,37	12,30
9261	21,00	15,96	23,94	12,60
9938	21,50	16,34	24,51	12,90
10648	22,00	16,72	25,08	13,20
11391	22,50	17,10	25,65	13,50
12167	23,00	17,48	26,22	13,80
12978	23,50	17,86	26,79	14,10
13824	24,00	18,24	27,36	14,40
14706	24,50	18,62	27,93	14,70
15625	25,00	19,00	28,50	15,00
16581	25,50	19,38	29,07	15,30
17576	26,00	19,76	29,64	15,60

$\frac{Pl}{n}$ <i>P</i> = kilogramos. Madera : <i>l</i> = decímetros. Hierro : <i>l</i> = metros.	SECCIÓN CUADRADA	SECCIÓN RECTANGULAR		SECCIÓN CIRCULAR
	Lado de la sección en centímetros.	Lado hori. ontal en centímetros.	Lado vertical en centímetros.	Radio en centímetros.
18610	26,50	20,14	30,21	15,90
19683	27,00	20,52	30,78	16,20
20797	27,50	20,90	31,35	16,50
21952	28,00	21,28	31,92	16,80
23149	28,50	21,66	32,49	17,10
24389	29,00	22,04	33,06	17,40
25672	29,50	22,42	33,63	17,70
27000	30,00	22,80	34,20	18,00
28373	30,50	23,18	34,77	18,30
29791	31,00	23,56	35,34	18,60
31256	31,50	23,94	35,91	18,90
32768	32,00	24,32	36,48	19,20
34328	32,50	24,70	37,05	19,50
35937	33,00	25,08	37,62	19,80
37595	33,50	25,46	38,19	20,10
39304	34,00	25,84	38,76	20,40
41064	34,50	26,22	39,33	20,70
42875	35,00	26,60	39,90	21,00
44739	35,50	26,98	40,47	21,30
46656	36,00	27,36	41,04	21,60
48627	36,50	27,74	41,61	21,90
50653	37,00	28,12	42,18	22,20
52734	37,50	28,50	42,75	22,50
54872	38,00	28,88	43,32	22,80
57067	38,50	29,26	43,89	23,10
59319	39,00	29,64	44,46	23,40
61630	39,50	30,02	45,03	23,70
64000	40,00	30,40	45,60	24,00

508. Vigas de sección cualquiera. Vigas laminadas. — Si la forma de la sección es *T* sencilla ó doble, escuadra, tubo rectangular ó circular, cruz ó cualquiera de las formas que dan los laminadores, el problema de determinación de la escuadría es todavía más indeterminado que en el caso de secciones rectangulares; pues, según podemos ver en la tabla del núm. 477: los valores de *I* y de $\frac{I}{v}$ son función de cuatro ó más variables. Por ejemplo, la ecuación de resistencia para una doble *T* simétrica (expresión 15 de la tabla núm. 477), sería:

$$\frac{RI}{v} = \frac{R(a b^2 - a' b'^2)}{6 b} = M_0.$$

Si para quitar la indeterminación empezamos por dar valores arbitrarios á tres de las cuatro cantidades desconocidas *a*, *b*, *a'*, *b'*, puede resultar para la cantidad restante una magnitud inadmisibile prácticamente, ya por no estar en relación con las demás, ya porque el perfil que así se obtenga no sea de los tipos de fabricación corriente, y sabido es que únicamente en pedidos de muy grande consideración, puede exigirse á las fábricas perfiles especiales que obligan á modificar el tren de laminadores.

El modo de resolver el problema es el siguiente: fórmese

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R},$$

y elijase, entre las vigas laminadas del comercio, cuyos datos figuran en todos los prospectos ó catálogos de las principales fábricas, una cuyo valor de $\frac{I}{v}$ sea igual ó inmediatamente mayor que $\frac{M_0}{R}$, y cuyas circunstancias de altura, peso, etc., nos convengan. Fácilmente se comprenderá la importancia de las tablas de valores de *I* y de $\frac{I}{v}$ que hemos dado en el núm. 489.

Al proceder de este modo, debe tenerse presente las observaciones siguientes:

- 1.ª Emplear los pares de valores *R* y *v*, ó *R* y *v''* ó *R'* y *v'*, según las cir-

cunstancias del material y del perfil de la viga, con arreglo á lo prescrito en los casos (a) (b) y (c) del núm. 494.

2.^a Fijar para coeficiente de trabajo R ó R' , la cantidad que sea más conveniente conforme á la naturaleza del material y al grado de seguridad que se quiera dar á la construcción.

3.^a Se hallarán varias vigas que satisfacen al problema mecánico. Si otras condiciones de construcción no se oponen, se elegirá, en beneficio de la economía, la que tenga menor peso por metro lineal.

4.^a Como será muy difícil que el valor de $\frac{I}{v}$ en la viga elegida sea exactamente igual al de $\frac{M_0}{R}$ que debe tener, se sustituirá dicho valor $\frac{I}{v}$ en la ecuación de escuadría, y se despejará el valor de

$$R = M_0 : \frac{I}{v}$$

para presentarlo en el proyecto como comprobación de que el problema está bien resuelto. El valor de R que se encuentra finalmente, diferirá poco del primitivo; si no fuese admisible, se elegirá otro perfil de viga.

5.^a No debe nunca perderse de vista la homogeneidad de las fórmulas; por tanto, se referirán todas las cantidades M_0 , R , I , v , á las mismas unidades de medida.

Para facilitar la resolución del problema en lo relativo á vigas doble T laminadas, hemos formado la tabla que á continuación se incluye, correspondiente al caso de piezas empotradas en un extremo y cargadas en el otro con un peso P . Cuando el caso de flexión sea otro, se dividirá el peso total por el valor correspondiente de n (núm. 405), y con el cociente se acudiré á la tabla.

Por ejemplo: si la viga de 4,50 metros de luz está empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente ($n = 12$), y el peso total repartido $P = p l$ es de 1800 kilogramos, ó sea de 400 kilogramos por metro lineal, se hallará el cociente $\frac{1800}{12} = 150$, y con este número se acudiré á la casilla relativa á la longitud 4^m,50, que es la de la viga, y encontraremos, eligiendo valores de P poco diferentes de 150, las siguientes soluciones:

VALOR P de la tabla en kilogramos.	COEFICIENTE de trabajo R en kilogramos por mm ²	TIPO DE VIGA de la tabla tercera del núm 489.
158	10	76..... $\left(\frac{140 \times 47}{7 \times 10} \right)$
149	7	118..... $\left(\frac{160 \times 55}{7 \times 10} \right)$
160	6	157..... $\left(\frac{180 \times 61}{8 \times 9} \right)$

Si no se quiere hacer uso de estas tablas, se resolverá el problema siguiendo el método general antes explicado, y del cual damos algunos ejemplos en el número siguiente (509).

TABLA DE RESISTENCIAS

de vigas laminadas de hierro, de forma de doble T ,
empotradas en un extremo y cargadas en el otro
con P kilogramos.

Las vigas laminadas á que hace referencia esta tabla, son las que
contiene la tabla tercera del núm. 489.

TIPO DE VIGA de la tabla núm. 3. (Núm. 489.)	COEFICIENTE de trabajo en kilogramos por mm. ²	PESO TOTAL P EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE PARA LONGITUDES l DE VIGA DE										
		1 m	1 m,50	2 m	2 m,50	3 m	3 m,50	4 m	4 m,50	5 m	5 m,50	6 m
2	6	86	57	43	34	28	24	21	19	17	15	14
	7	100	66	50	40	33	28	25	22	20	18	16
	8	115	76	57	46	38	32	28	25	23	20	19
	10	144	95	72	57	48	41	36	22	28	31	24
6		(4,75)	(7,12)	(9,50)	(11,87)	(14,25)	(16,62)	(19,00)	(21,37)	(23,75)	(26,12)	(28,50)
	6	106	70	53	42	35	30	26	23	21	19	17
	7	123	81	61	49	41	35	30	27	24	22	20
	8	140	93	70	56	46	39	35	31	28	25	23
14	10	176	117	88	70	58	50	44	39	35	31	29
		(5,85)	(8,77)	(11,70)	(14,62)	(17,55)	(20,48)	(23,40)	(26,32)	(29,25)	(32,17)	(35,10)
	6	127	84	63	50	42	36	31	28	25	22	21
	7	148	98	74	59	49	42	37	32	29	26	24
28	8	169	112	84	67	56	48	42	37	33	30	28
	10	212	141	106	84	70	60	53	47	42	38	35
		(7,37)	(11,05)	(14,74)	(18,42)	(22,11)	(25,79)	(29,48)	(32,16)	(36,85)	(40,53)	(44,22)
	6	195	110	95	78	65	55	48	43	39	35	32
41	7	227	151	113	90	75	64	56	50	45	41	37
	8	260	173	130	104	86	74	65	57	52	47	43
	10	326	217	163	130	108	92	81	72	65	59	54
		(8,25)	(12,37)	(16,50)	(20,62)	(24,75)	(28,87)	(33,00)	(37,12)	(41,25)	(45,37)	(49,50)
41	6	241	160	120	96	80	68	60	53	48	43	40
	7	282	187	141	112	94	80	70	62	56	51	47
	8	324	215	162	129	108	92	81	71	64	58	54
	10	406	270	203	162	135	115	101	90	81	73	67
	(11,12)	(16,68)	(24,24)	(27,81)	(33,36)	(38,92)	(44,48)	(50,04)	(55,60)	(61,16)	(66,72)	

TIPO DE VIGA de la tabla núm. 3. (Núm. 489.)	COEFICIENTE de trabajo en kilogramos por mm. ²	PESO TOTAL P EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE PARA LONGITUDES l DE VIGA DE															
		1 m	1 m,50	2 m	2 m,50	3 m	3 m,50	4 m	4 m,50	5 m	5 m,50	6 m	6 m,50	7 m	7 m,50	8 m	
57	6	303	201	151	121	101	80	75	67	60	54	50	46	43	40	37	
	7	353	235	176	141	117	96	88	78	70	63	58	54	50	46	44	
	8	404	269	202	161	134	110	101	89	80	73	67	61	57	53	50	
	10	505	336	252	202	168	140	126	112	101	91	84	77	72	67	63	
			(11,09)	(16,63)	(22,18)	(27,72)	(33,27)	(38,81)	(44,36)	(49,90)	(55,45)	(60,99)	(66,54)	(72,08)	(77,63)	(83,17)	(88,72)
76	6	427	284	213	170	142	116	106	94	85	77	71	65	61	56	53	
	7	498	331	249	199	166	140	124	110	99	90	83	76	71	66	62	
	8	569	378	284	227	189	158	142	126	113	102	94	87	81	75	71	
	10	712	474	356	284	237	200	178	158	142	128	118	108	101	94	89	
			(13,88)	(20,82)	(27,76)	(34,70)	(41,64)	(48,58)	(55,52)	(62,46)	(69,40)	(76,34)	(83,28)	(90,22)	(97,16)	(104,10)	(111,04)
118	6	576	383	288	230	192	160	144	127	115	104	96	88	82	76	72	
	7	672	447	336	268	224	188	168	149	134	121	112	102	96	89	84	
	8	768	511	384	307	256	212	192	170	153	139	128	117	109	102	96	
	10	960	639	480	384	320	272	240	213	192	173	160	146	137	127	120	
			(16,30)	(24,45)	(32,60)	(40,75)	(48,90)	(57,05)	(65,20)	(73,35)	(81,50)	(89,65)	(97,80)	(105,95)	(114,10)	(122,25)	(130,40)
157	6	724	482	362	289	241	200	181	160	144	131	120	110	103	96	90	
	7	895	596	447	358	298	253	223	198	179	161	149	136	127	119	124	
	8	965	642	482	386	321	272	241	214	193	174	160	147	137	128	120	
	10	1207	803	603	482	402	340	301	267	241	218	201	184	172	160	150	
			(19,25)	(28,87)	(38,50)	(48,12)	(57,75)	(67,37)	(77,00)	(86,62)	(96,25)	(105,87)	(115,50)	(125,12)	(134,75)	(144,37)	(154)
210	6	954	635	477	381	318	270	238	211	190	172	159	145	136	126	119	
	7	1113	741	556	445	391	330	278	247	222	201	185	170	159	148	139	
	8	1272	847	636	508	424	360	318	282	254	230	212	194	181	169	159	
	10	1590	1058	795	636	530	450	397	352	318	287	265	243	227	211	198	
			(22,64)	(33,96)	(45,28)	(56,60)	(67,92)	(79,24)	(90,56)	(101,88)	(113,20)	(124,52)	(135,84)	(147,16)	(158,48)	(169,80)	(181,12)
250	6	1134	755	567	453	378	320	283	251	226	205	189	173	162	150	141	
	7	1323	881	661	529	441	378	330	293	264	239	220	202	189	175	165	
	8	1512	1006	756	604	504	438	378	335	302	273	252	231	216	201	189	
	10	1890	1258	945	756	630	540	472	419	378	342	315	289	270	251	236	
			(25,58)	(38,37)	(51,18)	(63,95)	(76,74)	(89,52)	(102,32)	(115,11)	(127,90)	(140,69)	(153,48)	(166,27)	(179,06)	(191,85)	(204,64)

TIPO DE VIGA de la tabla núm. 3. (Núm. 489.)	COEFICIENTE de trabajo en kilogramos por mm. ²	PESO TOTAL P EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE PARA LONGITUDES / DE VIGA DE														
		1 m	1 m,50	2 m	2 m,50	3 m	3 m,50	4 m	4, m50	5 m	5, m50	6 m	6, m50	7 m	7, m50	8 m
356	6	1944	1294	972	777	648	541	486	431	388	351	324	297	277	258	243
	7	2268	1510	1134	907	756	630	567	503	453	410	378	347	324	301	283
	8	2592	1726	1296	1036	864	720	648	575	518	469	432	396	370	344	324
	10	3241	2158	1620	1296	1080	920	810	719	648	586	540	495	463	431	405
			(36,32)	(54,48)	(72,64)	(90,80)	(108,96)	(127,14,28)	(145,28)	(163,44)	(181,60)	(199,76)	(217,92)	(236,08)	(254,24)	(272,40)
392	6	2305	1535	1657	922	768	630	576	512	461	417	384	352	329	306	288
	7	2680	1784	1340	1072	893	756	670	594	536	485	446	410	382	356	335
	8	3074	2047	1537	1229	1024	870	768	682	614	556	512	470	439	408	384
	10	3848	2562	1924	1539	1282	1090	962	854	769	696	641	588	549	511	481
			(41,18)	(61,77)	(82,36)	(102,95)	(123,54)	(144,14,72)	(164,72)	(185,31)	(205,90)	(226,49)	(247,08)	(267,67)	(288,26)	(308,85)
460	6	4260	2837	2130	1704	1420	1200	1065	945	852	771	710	651	608	566	532
	7	4970	3310	2485	1988	1656	1410	1242	1103	994	899	828	760	710	661	621
	8	5680	3782	2840	2272	1893	1620	1420	1260	1136	1028	946	869	811	755	710
	10	7100	4728	3550	2840	2366	2010	1775	1576	1420	1285	1183	1086	1014	944	887
			(59)	(88)	(118)	(447)	(177)	(208,236)	(265)	(295)	(324)	(354)	(383)	(413)	(442)	(472)
477	6	5007	3334	2503	2002	1669	1420	1251	1111	1001	906	834	766	715	665	625
	7	5841	3890	2920	2336	1947	1660	1440	1296	1168	1057	973	893	834	766	730
	8	6676	4446	3338	2670	2225	1880	1660	1482	1335	1208	1112	1021	953	887	834
	10	8346	5558	4173	3338	2782	2366	2066	1852	1669	1510	1391	1276	1192	1110	1043
			(67,50)	(101,25)	(135)	(168,75)	(202,50)	(236,25)	(270)	(303,75)	(337,50)	(371,25)	(405)	(438,75)	(472,50)	(506,25)
510	6	6542	4356	3271	2616	2180	1860	1635	1452	1308	1184	1090	1000	934	870	817
	7	7652	5096	3826	3060	2550	2160	1913	1698	1530	1385	1275	1170	1093	1017	956
	8	8723	5809	4361	3489	2907	2440	2180	1936	1744	1578	1453	1334	1246	1160	1090
	10	10904	7262	5452	4361	3634	3040	2626	2420	2180	1973	1817	1668	1557	1450	1363
			(80)	(120)	(160)	(200)	(240)	(280,29)	(320)	(360)	(400)	(440)	(480)	(520)	(560)	(600)
522	6	7089	4721	3544	2835	2363	2000	1772	1573	1417	1283	1181	1084	1012	942	886
	7	8270	5507	4135	3308	2756	2300	2067	1835	1654	1496	1378	1265	1181	1099	1033
	8	9452	6295	4726	3780	3150	2680	2383	2098	1890	1710	1575	1446	1350	1257	1181
	10	11815	7862	5907	4726	3938	3300	2853	2622	2363	2138	1969	1807	1687	1571	1476
			(82,01)	(123,01)	(164,02)	(205,02)	(246,03)	(287,04)	(328,04)	(369,04)	(410,05)	(451,05)	(492,06)	(533,06)	(574,07)	(615,07)

509. Ejemplos.—1.º Vigueta doble T , laminada, de acero, de 6 metros de longitud, empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente con $p = 420$ kilogramos por metro lineal.

Como la doble T es simétrica, y en el acero se puede establecer $R = R'$, estamos en el caso (a) del núm. 494, y tendremos $\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R}$.

Empezaremos por fijar el valor de R . Supongamos que conviene $R = 10$ kilogramos por mm.^2 , ó $R = 10 \times 10^6$ por m.^2

Pasando en seguida á formar el valor del momento máximo de flexión M_0 , hallamos:

$$M_0 = \frac{1}{8} Pl \dots \left\{ \begin{array}{l} P = pl = 420 \times 6 = 2520 \text{ kilogramos.} \\ M_0 = \frac{1}{8} \times 2520 \times 6. \end{array} \right.$$

ó

$$M_0 = 1890 \text{ kilográmetros (kgs. ms.);}$$

de modo que

$$\frac{M_0}{R} = \frac{1890}{10 \times 10^6} = 0,000189.$$

Acudiendo á las tablas de $\frac{I}{v}$, ó á los catálogos ó prospectos de las fábricas, supongamos que hemos encontrado lo siguiente:

NÚMERO de orden.	VIGUETAS — Dimensiones en milímetros.	$\frac{I}{v}$	PESO POR M.L en kilogramos.
1	$\frac{225 \times 70}{9}$	0,000222	26,83
2	$\frac{200 \times 65}{13}$	0,000192	30,64
3	$\frac{151 \times 91}{11}$	0,000189	31,68
4	$\frac{220 \times 64}{10}$	0,000189	25,58

No hacemos más extenso el cuadro de viguetas que resuelven el problema, en obsequio á la brevedad, pero se encontrarían otras muchas entre los perfiles de fabricación corriente.

En lo relativo á las condiciones mecánicas, es preferible la vigueta número 1, porque tiene mayor valor de $\frac{I}{v}$, y, por tanto, resultará menor coeficiente de trabajo R , ó, lo que es lo mismo, mayor coeficiente de seguridad. Si fuese elegida, sería:

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{1890}{0,000222} = 8,51 \times 10^6 \text{ por metro cuadrado,}$$

$$R = 8,51 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Como cuestión económica, debe ser preferida la vigueta núm. 4, que no pesa más que 25,58 kilogramos por $m. l.$ Para ella $R = 10$ kilogramos por mm.^2 , pues $\frac{I}{v}$ tiene el mismo valor de $\frac{M_0}{R} = 0,000189$.

Si conviene, por razones particulares, que la vigueta tenga poca altura, se escogerá la núm. 3; cuando fuese necesario, por el contrario, altura grande, se daría preferencia á la 1.

2.º Vigueta doble T , de hierro, de 3 metros de longitud, apoyada en los dos extremos y cargada en el punto medio con un peso $P = 260$ kilogramos.

Haremos $R = 7 \times 10^6$ por m.^2 (ó 7 kilogramos por mm.^2).

$$M_0 = \frac{1}{4} Pl = \frac{1}{4} \times 260 \times 3 = 195 \text{ kilográmetros.}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R} = \frac{195}{7 \times 10^6} = 0,000028.$$

Hallamos en las tablas una vigueta de $\frac{80 \times 45}{6}$, cuyo $\frac{I}{v}$ es 0,000027 y pesa 8,77 kilogramos por $m. l.$

Para esta vigueta resulta un coeficiente de trabajo definitivo

$$R = M_0 : \frac{I}{r} = \frac{195}{0,000\,028} = 7,22 \times 10^8 \text{ kilogramos por m.}^2$$

ó

$$R = 7,22 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Si se quisiera determinar la flecha f , sería

$$f = - \frac{1}{48} \frac{P l^3}{E I} \text{ (2, tabla del núm. 404),}$$

ó

$$P = 260 \text{ kilogramos } \quad l = 3 \text{ metros } \quad E = 18 \times 10^8 \text{ por m.}^2,$$

y en las tablas hallamos $I = 0,000\,001\,07$, tendremos, verificando sustituciones, $f = 0,0081$ metros.

3.º Hierro en Γ (escuadra) de 2 metros de longitud, sometido á una fuerza total de 880 kilogramos, uniformemente repartida; está apoyado en sus extremos. Se desea un coeficiente de trabajo por extensión y por compresión, de 8 kilogramos, próximamente, por milímetro cuadrado (8×10^6 por m.²).

Estamos en el caso (b) del núm. 494; puesto que $R = R'$ para el hierro, y $v'' > v'$ (fig. 37, lám. 14), tomaremos R y v'' , y así tendremos:

$$\frac{I}{r''} = \frac{M_0}{r}$$

$$\text{Como } M_0 = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} \times 880 \times 2 = 220 \text{ kilográmetros,}$$

$$\frac{M_0}{R} = \frac{220}{8 \times 10^6} = 0,000\,027\,5.$$

Elegimos, en la tabla, una escuadra de $\frac{100 \times 100}{12}$ que tiene los datos siguientes:

$$v' = 0,029\,5 \text{ metros} \dots \dots \dots v'' = 0,070\,5 \text{ metros.}$$

$$I = 0,000\,002\,1 \dots \dots \dots \frac{I}{v''} = 0,000\,029\,8;$$

peso por metro lineal = 17,60.

El coeficiente de trabajo definitivo es:

$$R = M_0 : \frac{I}{r''} = \frac{220}{0,000\,029\,8} = 7,38 \times 10^6 \text{ por m.}^2,$$

ó

$$R = 7,38 \text{ por mm.}^2.$$

Flecha:

$$f = - \frac{5}{384} \frac{P l^3}{E I} = - \frac{5 \times 880 \times 2^3}{384 \times 18 \times 10^8 \times 0,000\,002\,1} = 0,024 \text{ metros.}$$

El hierro en escuadra está en iguales condiciones de resistencia y rigidez, ya esté en la posición Γ , ya se halle colocado de modo invertido \perp .

510. Modo de tener en cuenta el peso propio de la viga.—Llamando ω al área de la sección transversal y t al peso del metro cúbico de la materia que constituye la viga, el peso por metro lineal será $p' = \omega t$; de modo que el momento máximo de flexión debido al peso será:

$$M'_0 = \frac{1}{8} p' l^2 = \frac{1}{8} \omega t l^2.$$

Empleando el método de superposición de efectos, se obtiene para máximo momento de flexión definitivo la suma del correspondiente á las cargas ($\frac{1}{n} P l$) y el producido por el peso propio ($\frac{1}{8} \omega t l^2$); de modo que la ecuación de resistencia sería:

$$\frac{R I}{v} = \frac{1}{n} P l + \frac{1}{8} \omega t l^2.$$

Las cantidades I , v y ω son funciones de las dimensiones de la sección transversal de la viga, y la ecuación anterior es de resolución difícil. Por esta razón se emplea el método siguiente: se determina la escuadría de la viga no atendiendo más que á las cargas aplicadas, y se encontrará una primera viga cuyo peso p' por metro lineal será fácil encontrar; se formará el término $\frac{1}{8} p' l^2$ correspondiente á este peso p' , y se sumará al momento máximo $\frac{1}{n} P l$ de las cargas, resolviendo después el problema por medio de la

ecuación $\frac{R I}{r} = M_0 = \frac{1}{n} P l + \frac{1}{8} p' l^2$ en que el segundo miembro es conocido por completo.

La viga que se halle tendrá un peso p'' por metro lineal poco diferente del p' ; pero si la diferencia fuese todavía apreciable, se formará

$$\frac{1}{8} p'' l^2 + \frac{1}{n} P l$$

y se encontrará una segunda viga, cuyo peso será aproximadamente igual al p'' . La mayor parte de las veces es bastante un tanteo, y en general no se tiene en cuenta el peso propio para las vigas laminadas, especialmente para las de pequeño perfil.

511. Longitud límite de una viga. — Supongamos una viga sometida tan sólo á su propio peso (p' por metro lineal). La ecuación de resistencia será

$$\frac{R I}{v} = \frac{1}{n} p' l^2.$$

De aquí se podrá deducir el valor límite de la longitud,

$$l = \sqrt{\frac{n R I}{p' v}}$$

512. Observación relativa á M_0 . — En los ejemplos precedentes hemos supuesto casos de flexión en que M_0 se podía formar directamente por la fórmula $\frac{1}{n} P l$. Cuando las cargas están dispuestas de otro modo cualquiera, se obtendrá el valor del momento máximo M_0 por los procedimientos generales, analíticos ó gráficos, explicados en los núms. **310**, **350** y **415**.

513. Cálculo de vigas que den en la flexión flechas determinadas. — Puesto que el problema primero que estamos resolviendo (dadas las cargas averiguar los escuadrías) es tan indeterminado en la casi totalidad de los casos, podremos quitar en parte esta indeterminación imponiendo la condición de rigidez, esto es, que la flecha de curvatura tenga un cierto valor fijado de antemano. De modo que en vez de determinar la escuadría por la ecuación de resistencia $\frac{R I}{v} = M_0$, y calcular después la flecha por la fór-

mula $f = k \frac{P l^3}{E I}$, consideraremos el sistema formado por estas dos ecuaciones para obtener la escuadría.

Para las secciones simétricas, en que $r' = r'' = \frac{1}{2} b$, siendo b la altura total de la sección, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 R I}{b} &= M_0 \\ f &= k \frac{P l^3}{E I} \end{aligned} \right\} (1).$$

Despejando I de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, será:

$$f = k \frac{2 R}{E b} \frac{P l^3}{M_0} (2)$$

que también puede escribirse, haciendo $M_0 = \frac{1}{n} P l$, $f = k n \frac{2 R l^2}{E b}$.

P es, como digimos en el núm **405**, la carga total, ya sea aislada, ya esté repartida.

La ecuación (2) relaciona la flecha f con una de las dimensiones de escuadría, que es la altura b de la sección; podremos, pues, obtener el valor de b . Las dimensiones restantes se obtendrán por la ecuación de resistencia $\frac{2 R I}{b} = M_0$; de modo que las ecuaciones de que haremos uso serán, en definitiva,

$$b = k \frac{2 R}{E I} \frac{P l^3}{M_0} (3)$$

$$\frac{R I}{v} = \frac{2 R I}{b} = M_0 (4).$$

El procedimiento consiste, por tanto, en buscar una viga cuyo $\frac{I}{v}$ sea igual á $\frac{M_0}{R}$ deducido de la ecuación (4), pero con la restricción de que su altura ha de ser la b obtenida por la ecuación (3).

514. Para los casos de flexión más frecuentes, sustituyendo en la ecuación (3) los valores de M_0 , y de k contenidos en las columnas IV y X de la tabla del núm. 404, se obtiene, atendiendo solamente á los valores absolutos:

CASOS DE FLEXIÓN	M_0	k	b
1. Pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro con P)	$P l$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \frac{R l^2}{E f}$
2. Pieza empotrada en un extremo. Carga repartida $P = p l$)	$\frac{1}{2} P l$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \frac{R l^2}{E f}$
3. Pieza apoyada en los dos extremos y cargada en el punto medio con un peso P)	$\frac{1}{4} P l$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6} \frac{R l^2}{E f}$
4. Pieza apoyada en los dos extremos. Carga repartida $P = p l$.)	$\frac{1}{8} P l$	$\frac{5}{384}$	$\frac{5}{24} \frac{R l^2}{E f}$
5. Pieza empotrada en sus extremos y cargada con P en su punto medio.....)	$\frac{1}{8} P l$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{12} \frac{R l^2}{E f}$
6. Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada con P en su punto medio.....)	$\frac{3}{16} P l$	$\frac{1}{106}$	$\frac{16}{159} \frac{R l^2}{E f}$
7. Pieza empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada uniformemente con $P = p l$..)	$\frac{1}{8} P l$	$\frac{1}{185}$	$\frac{16}{185} \frac{R l^2}{E f}$
8. Pieza empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente con $P = p l$)	$\frac{1}{12} P l$	$\frac{1}{384}$	$\frac{1}{16} \frac{R l^2}{E f}$

El valor generalmente admitido para f es de $\frac{1}{600}$ á $\frac{1}{2000}$ de la longitud l de la viga.

515. Ejemplo. — Supongamos que se trata del problema primero del número 509, exigiéndose además que la flecha $f = \frac{1}{800} l = 0^m,0075$.

Encontramos que para satisfacer á la ecuación de resistencia es preciso que la viga tenga un $\frac{I}{r} = 0,000189$.

Pero para que resulte una flecha $f = 0^m,0075$ al flexarse la viga, es necesario (caso 8 del número anterior) que la altura de su sección transversal sea $b = \frac{1}{16} \frac{R l^2}{E f}$, ó refiriendo todas las dimensiones al metro, y teniendo

en cuenta que al calcular $\frac{I}{r}$ en el citado problema del núm. 509, hemos aceptado para coeficiente de trabajo $R = 10 \times 10^6$ kilogramos por m.², y que para el acero el coeficiente de elasticidad $E = 20 \times 10^9$,

$$b = \frac{10 \times 10^6 \times 6^2}{16 \times 20 \times 10^9 \times 0,0075} = 0^m,150.$$

Conviene para el caso actual la viga señalada con el núm. 3 (número 509, 1.^o), que tiene 151 milímetros de altura.

516. El problema no puede resolverse para las secciones no simétricas, porque desconociendo la escuadría, se ignora qué fracciones de la altura total b son las distancias v' y v'' , y no es posible llegar, por tanto, á la ecuación equivalente á la (2) del núm. 513.

517. Resolución del segundo problema. — Conocida la viga, en escuadría y longitud, y el caso de flexión, determinar la carga que podrá soportar para un cierto coeficiente de trabajo R .

Se hará uso de una de las ecuaciones de resistencia (5) á (8) del núm. 494. El problema es determinado.

Ejemplos. 1.^o Viga de madera de sección rectangular, de longitud $l = 5$ metros, cuyos lados de escuadría son $a = 0^m,12$ y $b = 0^m,20$ (*). Está apoyada en los dos extremos, y se quiere determinar el peso total P que podrá soportar, suponiéndole uniformemente repartido, para un coeficiente de trabajo por extensión y compresión $R = R' = 800\,000$ kilogramos por metro cuadrado (80 kilogramos por cm.²).

Ecuación de resistencia:

$$\frac{R I}{r} = M_0 \text{ [(5) del núm. 494]}$$

ó, puesto que para el caso presente, $M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} P l$, y $\frac{I}{r} = \frac{a b^2}{6}$,

$$\frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{8} P l,$$

ecuación que no contiene más incógnita que P .

* Continuarémos representando por b la altura de la sección transversal, ó sea la dimensión de escuadría contada paralelamente al plano en que se verifica la flexión.

Refiriendo todas las dimensiones al metro y kilogramo, será:

$$\frac{800\,000 \times 0,12 \times 0,20^2}{6} = \frac{1}{8} P \times 5$$

$$P = 1024 \text{ kilogramos.}$$

Si se hubiesen tomado las dimensiones en centímetros, como suele hacerse para la madera, se obtendría el mismo resultado.

$$\begin{aligned} R = 80 \quad a = 12 \quad b = 20 \quad l = 500 \\ \frac{80 \times 12 \times 20^2}{6} = \frac{1}{8} P \times 500 \quad P = 1024 \text{ kilogramos.} \end{aligned}$$

Siendo la carga total $P = 1024$ kilogramos, y la longitud $l = 5$ metros, corresponde á cada metro lineal de viga $p = \frac{P}{l} = 204,80$ kilogramos.

2.º Viga doble T , de hierro, laminada, simétrica, de 6 metros de longitud y $\frac{98 \times 50}{10}$ de escuadría (*). Está empotrada en un extremo, apoyada en el otro y cargada en su punto medio con una fuerza P . Se desea que el coeficiente de trabajo $R = R' = 7$ kilogramos por mm.^2 (7×10^6 por m.^2).

Para la viga dada:

$$\frac{I}{r} = 0,000\,047\,76 \text{ expresado en metros.}$$

$$M_0 = \frac{3}{16} Pl;$$

luego

$$\frac{RI}{r} = 7 \times 10^6 \times 0,000\,047\,76 = \frac{3}{16} P \times 6$$

$$P = 297 \text{ kilogramos.}$$

La flecha de curvatura para esta viga, será (núm. 404, caso 11):

$$f = \frac{1}{106} \frac{Pl^2}{EI}$$

$$E = 18 \times 10^9 \text{ por metro cuadrado.}$$

$$I = 0,000\,002\,34 \text{ en metros.}$$

$$f = 0,095 \text{ metros.}$$

(*) 98 milímetros de altura, 50 milímetros de ancho de tabla y 10 milímetros de espesor de alma.

3.º Hierro en escuadra, de ramas desiguales, de $\frac{150 \times 90}{13}$ (*) y 3 metros de longitud, empotrado en los dos extremos y cargado uniformemente. La rama mayor de la escuadra (150 milímetros) ha de ser paralela al plano de flexión Γ . Se fija un coeficiente de trabajo por extensión y por compresión $R = R' = 8$ kilogramos por mm.^2 (8×10^6 por m.^2).

Datos:

$$\left. \begin{aligned} r' &= 0^m,052 \\ r'' &= 0^m,150 - 0^m,052 = 0^m,098 \end{aligned} \right\} \text{(fig. 37, lám. 14)}$$

$$\left. \begin{aligned} I &= 0,000\,067\,740 \\ \frac{I}{r''} &= 0,000\,069\,100 \end{aligned} \right\} \text{en metros.}$$

Estamos en el caso (b) del núm. 494; deberemos considerar la mayor de las cantidades r' y r'' , que aquí es $r'' = 0^m,098$. Será, pues, tomando como unidades de medida el kilogramo y el metro,

$$\frac{RI}{r''} = M_0 = \frac{1}{12} Pl.$$

$$8 \times 10^6 \times 0,000\,069\,100 = \frac{1}{12} P \times 3.$$

$$\text{Carga total, } P = 2208 \text{ kilogramos.}$$

Corresponden por metro lineal, $p = \frac{P}{l} = 736$ kilogramos.

Se calcularía la flecha por la fórmula correspondiente (núm. 404).

La misma escuadra, pero con la rama menor paralela al plano de flexión, resistiría:

$$\left. \begin{aligned} r' &= 0^m,022 \\ r'' &= 0^m,090 - 0^m,022 = 0^m,068 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I &= 0,000\,001\,861 \\ \frac{I}{r''} &= 0,000\,027\,300 \end{aligned}$$

$$8 \times 10^6 \times 0,000\,027\,300 = \frac{1}{12} P \times 3$$

$$P = 872 \text{ kilogramos} \quad p = 291 \text{ kilogramos.}$$

*: 150 milímetros de lado mayor, 90 milímetros de lado menor y 13 milímetros de espesor en las ramas.

4.º Vigueta *T* sencilla, de fundición de hierro, cuyos datos son:

Rama horizontal.....	0 ^m ,100
» vertical.....	0 ^m ,070
Espesor de las ramas.....	0 ^m ,012
Longitud.....	2 ^m ,40

Está apoyada en los dos extremos y situada de modo que la rama horizontal queda colocada por debajo de la capa de fibras neutras (fig. 5.ª, lámina 16), y por tanto extendida. Se va á cargar en su punto medio con un peso *P*.

Estamos en el caso (c) del núm. 494, puesto que para la fundición son desiguales *R* y *R'*, y además *v'* y *v''* son también diferentes. Llamando *v''* á la distancia que hay de la capa de fibras neutras á las más extendidas (parte inferior) y *v'* á la correspondiente á las más comprimidas (parte superior), tenemos como datos:

$$\left. \begin{array}{l} v' = 0^m,051 \\ v'' = 0^m,019 \\ I = 0,000\,000\,749 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R = 3 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ (} 3 \times 10^6 \text{ por m.}^2 \text{).} \\ R' = 10 \text{ kilogramos por mm.}^2 \text{ (} 10 \times 10^6 \text{ por m.}^2 \text{).} \end{array} \quad (*)$$

Formando los cocientes $\frac{v'}{v''} = 2,67$ y $\frac{R'}{R} = 3,33$, se ve que $\frac{v'}{v''} < \frac{R'}{R}$;

de modo que deberemos aplicar la ecuación (7) del número 494, y será:

$$\frac{R I}{v''} = M_0 = \frac{1}{4} P l.$$

$$\frac{I}{v''} = 0,000\,039\,421. \quad " \quad 3 \times 10^6 \times 0,000\,039\,421 = \frac{1}{4} P \times 2.$$

$$P = 236 \text{ kilogramos.}$$

Si esta misma *T* se pusiese invertida, con la rama horizontal por la parte

(*) Si no estuviesen contenidos estos datos en las tablas ó catálogos, se determinarían analítica ó gráficamente (núm. 411).

Para determinar *v'* y *v''* analíticamente (fig. 5.ª, lám. 16), siendo *U* el centro de gravedad, se tomarían los momentos de las áreas *c d*, *a b* y total *a d* con respecto al eje *X X*, y se despejaría *v''*.

$$a b \times s + c d \times r = a d \times v''.$$

superior de la capa neutra, y comprimida por tanto, se invertirían los valores de *v'* y *v''*, y sería:

$$v' = 0^m,019 \quad " \quad v'' = 0^m,051. \quad \frac{v'}{v''} = 0,37 \quad " \quad \frac{R'}{R} = 3,33 \quad " \quad \frac{v'}{v''} < \frac{R'}{R}$$

$$R \frac{I}{v''} = M_0$$

$$\frac{I}{v''} = \frac{0,000\,000\,749}{0,051} = 0,000\,014\,700 \quad " \quad P = 88 \text{ kilogramos.}$$

518. Método abreviado para las vigas de sección cuadrada ó rectangular. — Para la madera hemos hallado, en el núm. 505, $a b^2 = \frac{1}{n} P l$, de donde se deduce $P = n \frac{a b^2}{l}$, representando:

<i>P</i>	kilogramos.
<i>a</i> y <i>b</i>	centímetros.
<i>l</i>	decímetros.

Para hallar la carga total *P* que soportará una viga de madera de sección rectangular ó cuadrada, con un coeficiente de trabajo *R* = 60 kilogramos por cm.², *elévase al cuadrado el canto (b) expresado en centímetros, multiplíquese por la tabla (a) también en centímetros, divídase por la longitud (l) tomada en decímetros y multiplíquese el cociente por los números 1, 2, 4, 8, 12, 32 (n), según el caso de flexión (núm. 405).*

Ejemplo. Viga de 0^m,20 × 0^m,28 × 6^m, apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente.

$$\begin{array}{r} b = 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \\ \times a = 20 \\ \hline 15680 \quad 60 \\ \hline 261,3 \\ \times 8 \\ \hline P = 2090 \text{ kilogramos.} \\ P = \frac{P}{l} = 348 \text{ kilogramos.} \end{array}$$

519. Para coeficientes de trabajo R diferentes de 60 kilogramos, por cm.^2 se multiplicarían los resultados obtenidos por el cociente $\frac{R}{60}$. Así, en el ejemplo anterior, para $R = 80$ kilogramos por cm.^2 , se obtendrían:

$$P = 2090 \times \frac{80}{60} = 2786 \text{ kilogramos.}$$

520. La regla precedente es aplicable á las vigas de hierro, sin más variación que la de tomar en metros la longitud l .

521. Tercer problema. Conocida la viga y las cargas, determinar el coeficiente R de trabajo. — De la ecuación

$$R \times \frac{I}{r} = M_0$$

se deducirá también sencillamente el valor

$$R = M_0 : \frac{I}{r}$$

Ejemplos. Viga de madera de sección rectangular, empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente.

Datos:

$$a = 0^m,10 \quad b = 0^m,20. \quad l \text{ (longitud)} = 4 \text{ metros.}$$

$$P \text{ (carga total)} = 2000 \text{ kilogramos;}$$

se obtiene:

$$M_0 = \frac{1}{12} P l = \frac{1}{12} \times 2000 \times 4 = 666 \text{ kilográmetros.}$$

$$\frac{I}{r} = \frac{a b^3}{6} = \frac{0,10 \times 0,20^3}{6} = 0,000666$$

$$R = M_0 : \frac{I}{r} = \frac{666}{0,000666} = 1000000 \text{ kilogramos por metro cuadrado}$$

ó

$$R = 100 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

VIGAS COMPUESTAS, DE MADERA Ó DE HIERRO, DE PEQUEÑA ALTURA (SECCIÓN CONSTANTE)

522. Vigas compuestas de hierro. Tipos diversos. — Pueden componerse numerosos tipos de vigas de hierro combinando y uniendo por medio de re-

blonadura, hierros planos, en escuadra de ramas iguales ó desiguales, en T sencilla ó doble, en U , etc. Las láms. 14 y 21 presentan ejemplos de estas combinaciones, que se emplean, ya en vigas sometidas á flexión (suelos, cargaderos ó dinteles, viguetas de puentes, etc.), ya en piezas largas comprimidas según su eje (pies derechos de entramados, montantes, manguetas y largueros ó cordones en los cuchillos de los puentes.)

Nos concretaremos ahora al caso de vigas flexadas directamente; he aquí algunos de los tipos que contienen las citadas láminas:

Secciones que tienen dos ejes de simetría.

1.º Vigas formadas con palastros y escuadras:

Lámina 14..	Figura 33.....	Doble T : un alma llena y cuatro escuadras.
	» 23.....	Idem: un alma llena, cuatro escuadras y dos tablas.
Lámina 21..	Figura 52.....	Doble T : un alma llena, cuatro escuadras y cuatro tablas.
	» 53.....	Idem: un alma llena, cuatro escuadras y seis tablas.
	» 39 y 57.....	Tubulares: dos almas, cuatro escuadras y dos tablas (se pueden poner 4, 6 ó mas tablas).
	» 38.....	Idem: tres almas, ocho escuadras y dos ó más tablas.

2.º Vigas formadas con palastros y hierros en T , U , etc.:

Lámina 21..	Figura 18.....	Doble T : dos hierros en U .
	» 20.....	Idem: dos hierros en U y dos en T sencilla.
	» 37.....	Idem: una doble T laminada y dos tablas.
	» 55.....	Idem: dos T sencillas, un alma y cuatro cubrejuntas.
	» 56.....	Idem: cuatro hierros en U , dos tablas y un alma compuesta de dos trozos pequeños y dos grandes á guisa de cubrejuntas.

Secciones no simétricas respecto al eje contenido en la capa de fibras neutras.

3.º Vigas formadas con palastros y escuadras:

Lámina 21..	}	Figura 9.....	<i>T</i> sencilla: un alma, una tabla y dos escuadras.
		» 11.....	<i>T</i> sencilla tubular: dos almas, una tabla y dos escuadras (se podría poner cuatro escuadras y dos tablas).

4.º Vigas formadas con palastros y hierros en *T*, *U*, etc.:

Lámina 21..	}	Figura 12.....	Tubular: dos hierros en <i>U</i> y una ó más tablas.
		» 15.....	Idem: dos escuadras de ramas desiguales y una ó más tablas.
		» 19.....	Idem: íd. íd.

Son más generalmente empleadas las vigas compuestas de palastros y escuadras (grupos 1.º y 3.º).

523. Resolución del primer problema. — La resolución del primer problema (dadas las cargas, determinar la escuadría ó sección transversal de la viga) no puede hacerse directamente por la ecuación $\frac{R I}{v} = M_0$, porque el

momento de inercia *I* y el cociente $\frac{I}{v}$ son función de muchas incógnitas (véase la tabla del núm. 477); para la doble *T* de la fig. 36 (lám. 21), por ejemplo, sería:

$$\frac{I}{v} = \frac{a b^3 - (a' b'^3 + a'' b''^3 + a''' b'''^3)}{6 b}$$

Aplicaremos, por tanto, al caso presente todas las consideraciones que hemos hecho en el núm. 508 á propósito de las vigas laminadas; y como allí, el problema se resolverá del siguiente modo:

Se formará el momento máximo de flexión *M*₀, gráfica ó analíticamente, según las circunstancias de carga y apoyo ó empotramiento en que se encuentre la viga.

Obtenido el número *M*₀, se pasará á fijar el coeficiente de trabajo *R* que aproximadamente quiera adoptarse, teniendo cuidado de expresarlo en la misma especie de unidad de la empleada para formar *M*₀, de modo que si esta cantidad representa kilográmetros, tonelámetros, kilogramos-milímetros, etc., se tomará *R* en kilogramos por metro cuadrado, toneladas por metro cuadrado, kilogramos por milímetro cuadrado, etc.

Se hallará el cociente $\frac{M_0}{R}$, y éste ha de ser el valor que ha de tener $\frac{I}{v}$ en la viga que resuelve el problema, siendo *v* la semialtura de la sección transversal en las simétricas [núm. 494, (a)], y la mayor de las distancias *v'*, *v''* en las no simétricas [núm. 494, (b)]. La cuestión queda, pues, reducida á encontrar una viga cuya sección transversal tenga un valor de $\frac{I}{v}$

igual al número hallado $\left(\frac{M_0}{R}\right)$; se trata, por tanto, de resolver un problema de momentos de inercia.

Recordaremos, á este propósito, que el momento de inercia *I* de un área compuesta de varios elementos, es igual á la suma de los momentos de inercia de las áreas parciales. Por ejemplo, el momento de inercia de la doble *T* representada en la fig. 23 (lám. 14), será igual á la suma de los momentos de inercia siguientes:

Momento de inercia de las tablas, como si estuviesen aisladamente en la disposición dibujada en la fig. 20 (lám. 14).

Momento de inercia de las cuatro escuadras, como si estuviesen aisladas (fig. 28, lám. 14).

Momento de inercia del alma; rectángulo que se encuentra en la situación señalada en la fig. 4.ª (lám. 14).

Se deduce de aquí la indeterminación del problema, pues haciendo variar la altura total *b* de la sección y las dimensiones de las escuadras, alma y tablas, se podrá hallar infinito número de vigas que resuelven la cuestión. Se aceptará la que más conveniente sea al caso concreto de que se trata, ya por su poco peso por metro lineal, y por lo tanto por razón de economía, ya por su altura, anchura de las tablas ú otra circunstancia cualquiera que interese obtener por razón de construcción. La influencia de la altura en la economía es notable; á igualdad de área, los valores de *I* y de $\frac{I}{v}$ crecen con aquella (núm. 486).

Como es muy difícil componer una sección transversal cuyo valor de $\frac{I}{v}$ sea exactamente igual al cociente $\frac{M_0}{R}$, se procurará encontrar una que sea aproximada por exceso, es decir, que en ella se verifique $\frac{I}{v} = B > \frac{M_0}{R}$. Para averiguar entonces cuál es el coeficiente de trabajo que corresponde á la sección hallada, y justificar en el proyecto que la solución dada al problema es aceptable, se hará $B = \frac{M_0}{R}$, y de aquí se deducirá el coeficiente real $R = \frac{B}{M_0}$.

Así, pues, en los proyectos debe tan sólo describirse la viga en formas y dimensiones, hallar los valores del momento máximo de flexión M_0 y del cociente $\frac{I}{v}$, y presentar el coeficiente de trabajo que resulta,

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = N \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

como justificación de los cálculos.

Ejemplo. Doble T de palastro, de longitud $l = 8$ metros, compuesta de cuatro escuadras y un alma llena (fig. 33, lám. 14); está apoyada en tres puntos y cargada uniformemente con 4000 kilogramos por metro lineal.

Viga elegida entre las que resuelven el problema:

Altura.....	0m,50 = 500 milímetros	
4 escuadras de.....	$\frac{60 \times 60}{8}$ (*) (tabla 7, núm. 489)	0,000 194
1 alma de.....	500×8 (**) (tabla 4, núm. 489)	0,000 080
	$0,000 010 \times 8$	
		<hr style="width: 50%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> I = 0,000 274
Valor de $\frac{I}{v}$ en metros =	$\frac{0,000 274}{0,250}$	= 0,001 0960

(*) Lados iguales de 60 milímetros y espesor uniforme de 8 milímetros.
 (**) Altura de 500 milímetros y espesor de 8 milímetros.

Valor del momento de flexión:

$$M_0 \text{ en kilogs. ms.} \dots \frac{1}{32} l^2 = \frac{1}{32} \times 4000 \times 8^2 = 8000 \text{ kilogs. ms.}$$

Coficiente de trabajo por extensión y por compresión que resulta al metal:

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{8000}{0,001 096} = 7,29 \times 10^6 \text{ kilogramos por metro cuadrado,}$$

ó

$$R = 7,29 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

524. Vemos por cuanto precede, que el problema en que nos ocupamos no ofrece otras dificultades que las del trabajo material de hallar momentos de inercia de escuadras, tablas, almas, etc., y agrupar estos elementos de modo que el valor definitivo de $\frac{I}{v}$ sea igual ó mayor que el de $\frac{M_0}{R}$. Para estas operaciones se empieza por fijar el valor que quiere darse á b , altura total de la sección. En obsequio á la brevedad, cuando la viga se compone de tablas, escuadras y almas (figs. 38, 41, 52, 53, 57, etc., lám. 21), se supone que son iguales á b :

La distancia entre los centros de gravedad de las tablas.

La distancia entre las caras exteriores de las escuadras superiores é inferiores.

La altura de las almas.

Se facilita con esto la determinación de los valores parciales de I y de $\frac{I}{v}$ correspondientes á cada elemento de sección, y el error cometido es insignificante á causa del debil espesor de los hierros.

525. Utilidad de las tablas de valores de I y de $\frac{I}{v}$. — Se comprende cuán conveniente ha de ser al ingeniero ó arquitecto encargado de la redacción de un proyecto disponer de cuadros de valores de I y de $\frac{I}{v}$ correspondientes á hierros en escuadra, almas y tablas de palastro de diversas dimensiones, entre las que el comercio da, para alturas variables b , puesto que así se facilita sobremanera la determinación de la sección de viga cuyo valor de $\frac{I}{v}$ sea el que conviene al problema, quedando toda la dificultad reducida

á tanteos de sumas, variando el valor de los sumandos hasta llegar á la suma que se busca.

Las tablas 4 á 7 del núm. 489 son, pues, de la mayor utilidad. Según ya vimos allí, la núm. 4 contiene los valores de I correspondientes á almas llenas de palastro de alturas y espesores diferentes; la tabla núm. 7 se refiere á valores de I , concernientes á grupos de cuatro escuadras; la núm. 5 es la relativa á tablas de palastro; finalmente, la tabla núm. 6 se refiere á trozos de alma llena.

Un ejemplo pondrá de manifiesto el modo de hacer uso de estas tablas. Supongamos que se trata de una viga doble T de hierro, de 8 metros de longitud, apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente con un peso total $P = 8000$ kilogramos; de modo que corresponde á cada metro de longitud de viga $p = 1000$ kilogramos.

Se nos da (y si no se fija arbitrariamente) la altura b de la sección transversal de la viga, que es $b = 0,4$ metros (400 milímetros); de modo que

$$v = \frac{1}{2} b = 0,2 \text{ metros.}$$

El momento máximo de flexión es:

$$M_0 = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 1000 \times 8^2 = 8000 \text{ kilog. ms.}$$

Supongamos que se quiere aceptar un coeficiente de trabajo para el hierro, próximamente igual á 7 kilogramos por mm.², ó

$$R = 7 \times 10^6 \text{ kilogramos por metro cuadrado.}$$

De la fórmula

$$\frac{R I}{v} = M_0$$

Se deduce

$$I = \frac{M_0 v}{R} = \frac{8000 \times 0,2}{7 \times 10^6} = 0,000 2284 \text{ (expresado en metros).}$$

La viga que resuelve el problema ha de tener una sección transversal cuyo momento de inercia sea, en metros:

$$I = 0,000 2284.$$

Veamos el modo de componer secciones con elementos tales que se obtenga el momento I anterior, por medio de las tablas 4 á 7 del núm. 489.

Primera solución.—Doble T de la forma fig. 8.^a, lám. 20, compuesta de

$$\text{Cuatro escuadras de } \frac{80 \times 80}{10}.$$

$$\text{Un alma llena de } 400 \times 10.$$

En efecto; se tiene:

ELEMENTOS	I en metros.	PESO en kilogramos
4 escuadras de $\frac{80 \times 80}{10}$ para altura $b = 400$ milímetros (tabla núm. 7).....	0,000 176 467	37,94
1 alma de 400 milímetros de altura y 10 milímetros de espesor (tabla 4. ^a) = 0,000 053 312 $\times 10$..	0,000 053 120	3,12 $\times 10 = 31,20$
	0,000 229 587	69,14

El verdadero coeficiente de trabajo será:

$$R = \frac{M_0 v}{I} = \frac{8000 \times 0,2}{0,000 229 587} = 6,95 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2,$$

6

$$R = 6,95 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

Segunda solución.—Doble T de la forma fig. 11, lám. 20, compuesta de

$$\text{Cuatro escuadras de } \frac{60 \times 60}{8}.$$

$$\text{Un alma de } 400 \times 7 \text{ (espesor 7 milímetros).}$$

$$\text{Tablas sencillas de } 200 \times 5 \text{ (espesor 5 milímetros).}$$

En efecto:

ELEMENTOS	<i>I</i> en metros.	PESO en kilogramos.
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ (tabla núm. 7).....	0,000 115 390	27,95
1 alma de 400×7 (tabla núm. 4) = 0,000 005 312 \times 7.....	0,000 037 184	$3,12 \times 7 = 21,84$
Tablas sencillas de 200×5 (tabla núm. 5); 0,000 016 \times 5.....	0,000 080 000	$3,12 \times 5 = 15,60$
	0,000 232 574	65,39

El verdadero coeficiente de trabajo será:

$$R = \frac{M_o v}{I} = \frac{8000 \times 0,2}{0,000 232 574} = 6,89 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2$$

ó

$$R = 6,89 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Se podrían presentar otras muchas soluciones.

526. Observación relativa á la composición de vigas. — Al agrupar elementos para formar la sección de viga que tenga el valor de $\frac{I}{v}$ que se busca, conviene tener en cuenta las observaciones siguientes que interesan á la economía:

1.^a Las almas de palastro dan un pequeño contingente á la suma total del valor $\frac{I}{v}$; no es, pues, económico exagerar los espesores.

2.^a A igualdad de área de sección de palastro, las tablas proporcionan al valor total de $\frac{I}{v}$ el sumando principal; que crece con los cuadrados de la altura (fórmula 17 de la tabla del núm. 477). Las escuadras siguen en importancia.

3.^a Si se emplean escuadras de ramas desiguales, es preferible para la economía yustaponer al alma el lado menor, de modo que el mayor resulte paralelo á las tablas.

4.^a Cuando se empleen tablas de grande anchura, conviene, para evitar su alabeo y flexión, dar á la viga forma tubular (figs. 39 y 57, lám. 21), colocando dos almas.

527. Tabla de resistencias de algunas vigas compuestas. — Á continuación damos una tabla de resistencias de algunas vigas compuestas, de forma de doble *T*, para longitudes diversas. En esta tabla aparecen los pesos *P* que se les puede aplicar para coeficientes de trabajo distintos, suponiendo que las vigas están empotradas en un extremo y cargadas en el otro. Los números que están entre paréntesis expresan el peso propio de la viga por metro lineal, en kilogramos.

Cuando la disposición de las cargas y la situación de la viga sean otras, se multiplicarán los pesos que contiene dicha tabla por los núms. 2, 4, 8, 12 y 32 (véase el cuadro del núm. 405).

Ejemplo. Una viga doble *T*, de longitud *l* = 5 metros, compuesta de:

1 alma de 0^m,30 de altura y 5 milímetros de grueso.

4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$.

2 tablas de 150 milímetros de ancho y 5 milímetros de grueso.

La viga está apoyada en los dos extremos y cargada en el punto medio (*n* = 4, cuadro del núm. 405). Puede resistir:

$$\begin{aligned} P &= 4 \times 814,80 = 3259 \text{ kilogramos para } R = 6 \text{ kilogramos por mm.}^2 \\ P &= 4 \times 950,60 = 3802 \quad \text{»} \quad \text{para } R = 7 \quad \text{»} \quad \text{»} \\ P &= 4 \times 1086,40 = 4345 \quad \text{»} \quad \text{para } R = 8 \quad \text{»} \quad \text{»} \\ P &= 4 \times 1358,00 = 5432 \quad \text{»} \quad \text{para } R = 10 \quad \text{»} \quad \text{»} \end{aligned}$$

La viga pesará 274 kilogramos por metro lineal; de modo que el peso propio total será $5 \times 274 = 1370$ kilogramos.

Si se diese el peso total *P*, se dividiría por 2, 4, 8, etc. (núm. 405), y buscando en las tablas el cociente, en la casilla correspondiente á la longitud *l*, encontraríamos la viga que resuelve el problema.

TABLA DE RESISTENCIAS
de vigas compuestas, de palastro, de forma de doble Z ,
empotradas en un extremo y cargadas en el otro
con P kilogramos.

SECCIONES	Altura <i>b</i> en metros.	Coeficiente de trabajo <i>R</i> en kilogs. por mm. ²	PESO TOTAL <i>P</i> EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE, PARA LONGITUDES <i>l</i> DE VIGA DE																		
			1 m	1m,50	2 m	2m,50	3 m	3m,50	4 m	5 m	5m,50	6 m	6m,50	7 m	7m,50	8 m	8m,50	9 m	9m,50	10 m	
Fig. 8.ª lám. 20; 4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ y un alma llena de 5 mm. de grueso..	0,15	6	1141	759	570	456	380	325	253	228	206	190	174	163	151	142	134	126	120	114	
		7	1330	885	665	532	443	379	295	265	240	221	203	190	176	166	156	144	140	133	
		8	1520	1012	760	608	506	433	337	314	275	253	232	217	202	190	178	168	160	152	
		10	1900	1265	950	760	633	541	421	380	343	316	290	271	252	237	223	211	200	190	
	0,20	6	1720	1145	860	688	573	490	381	344	311	286	263	245	228	215	202	191	181	172	
		7	2006	1335	1003	802	668	571	445	401	363	334	306	294	266	250	236	222	211	200	
		8	2293	1527	1146	817	764	653	508	458	415	382	350	327	304	261	269	254	241	229	
		10	2866	1908	1433	1146	955	816	636	573	518	477	438	406	381	258	337	318	301	286	
	0,25	6	2342	1559	1171	936	780	667	519	468	423	390	358	334	311	292	275	260	244	234	
		7	2730	1818	1365	1092	910	778	606	546	494	455	417	390	363	341	321	303	287	273	
		8	3120	2077	1560	1244	1040	889	692	624	564	520	477	445	414	390	367	346	328	312	
		10	3900	2597	1950	1560	1300	1111	865	780	705	650	596	557	518	487	458	433	410	390	
	0,30	6	2998	1996	1497	1199	999	854	665	599	542	499	458	428	398	374	352	333	315	299	
		7	3497	2329	1748	1398	1165	996	776	699	632	582	535	499	465	437	411	388	368	349	
		8	3996	2661	1998	1598	1332	1138	887	799	723	666	611	570	531	499	470	444	420	399	
		10	4996	3327	2498	1998	1665	1423	1109	999	904	832	764	713	664	624	587	555	525	499	
	0,35	6	3685	2454	1842	1474	1242	1050	818	737	663	621	563	526	496	460	433	414	387	368	
		7	4296	2861	2148	1718	1432	1224	953	859	777	716	663	613	571	537	505	477	452	429	
		8	4912	3271	2456	1964	1604	1399	1090	982	889	802	751	697	653	614	577	534	517	491	
		10	6140	4089	3070	2456	2046	1749	1363	1238	1111	1023	939	877	816	765	722	682	646	614	
0,40	6	4400	2933	2200	1760	1466	1254	976	880	796	733	672	628	585	550	514	488	462	440		
	7	5131	3917	2565	2052	1710	1462	1139	1036	938	855	785	733	682	641	600	570	538	513		
	8	5864	3905	2982	2345	1954	1671	1301	1172	1061	977	897	837	779	733	686	651	615	586		
	10	7330	4881	3665	2932	2443	2089	1627	1465	1326	1221	1121	1047	974	916	857	814	769	733		

SECCIONES	Altura <i>b</i> en metros.	Coeficiente de trabajo <i>R</i> en kilogs. por mm. ²	PESO TOTAL <i>P</i> EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE, PARA LONGITUDES <i>l</i> DE VIGA DE																				
			1m	1m,50	2m	2m,50	3m	3m,50	4m	4m,50	5m	5m,50	6m	6m,50	7m	7m,50	8m	8m,50	9m	9m,50	10m		
			Fig. 8.ª lám. 20; 4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ y un alma llena de 5 mm. de grueso...	0,45	6	5142	3424	2571	2056	1714	1465	1215	1141	1028	930	857	786	734	683	642	601	571	540
		7	5999	3995	2999	2400	1999	1709	1459	1331	1199	1085	999	917	857	797	749	702	666	630	599		
		8	6856	4566	3428	2742	2285	1953	1703	1522	1371	1240	1142	1048	979	911	857	802	761	720	685		
		10	8570	5707	4285	3428	2856	2442	2103	1902	1714	1551	1428	1311	1224	1139	1021	1002	952	900	857		
			(48,7)	(73,05)	(97,4)	(121,75)	(146,1)	(148,6)	(169,15)	(219,15)	(243,5)	(267,85)	(292,2)	(316,55)	(340,9)	(365,25)	(389,6)	(413,95)	(438,3)	(462,6)	(487)		
	0,50	6	5911	3936	2955	2364	1970	1684	1434	1312	1182	1069	985	904	844	786	738	692	656	620	591		
		7	6895	4592	3447	2758	2298	1965	1715	1536	1379	1247	1149	1054	985	917	861	807	766	724	689		
		8	7880	5248	3940	3152	2626	2245	1979	1749	1576	1426	1313	1205	1125	1048	985	927	875	827	788		
		10	9850	6560	4925	3940	3283	2807	2426	2186	1970	1782	1641	1507	1407	1310	1231	1152	1094	1034	985		
			(50,7)	(76,05)	(101,4)	(126,75)	(152,1)	(117,45)	(142,85)	(168,25)	(193,65)	(219,05)	(244,45)	(270,85)	(304,2)	(329,55)	(354,9)	(380,25)	(405,6)	(430,95)	(456,3)	(481,65)	(507)
	0,14	6	1097	730	548	438	365	312	269	243	219	198	182	167	156	145	137	128	121	115	109		
		7	1279	851	639	511	426	364	312	288	255	231	213	195	182	170	159	150	142	134	127		
		8	1462	973	731	584	487	416	354	324	292	264	243	223	208	194	182	171	162	153	146		
		10	1828	1217	914	731	609	529	456	405	365	330	304	279	261	243	228	214	203	192	182		
			(36,2)	(54,3)	(72,4)	(90,5)	(108,6)	(126,7)	(144,8)	(162,9)	(181)	(199,1)	(217,2)	(235,3)	(253,4)	(271,5)	(289,6)	(307,7)	(325,8)	(343,9)	(362)		
	0,18	6	1562	1040	781	625	520	445	376	336	312	282	259	238	223	207	195	182	173	164	156		
		7	1822	1213	911	729	606	520	444	404	365	329	303	278	261	242	228	213	203	191	182		
		8	2082	1386	1041	833	694	593	502	462	416	376	346	318	298	276	261	243	232	218	208		
		10	2603	1733	1301	1041	867	741	617	577	520	471	433	398	371	346	325	304	289	273	260		
			(37,1)	(55,65)	(74,2)	(92,75)	(111,3)	(129,85)	(148,4)	(166,95)	(185,5)	(204,05)	(222,6)	(241,5)	(259,7)	(278,23)	(296,8)	(315,35)	(333,9)	(352,45)	(371)		
	0,20	6	1804	1201	902	722	601	514	430	400	360	326	300	276	257	239	225	211	200	189	180		
		7	2104	1401	1052	841	701	599	507	467	420	380	350	321	300	279	263	246	233	221	210		
		8	2404	1601	1202	961	801	685	583	533	480	435	400	367	343	319	300	281	267	252	240		
		10	3006	2001	1503	1203	1002	856	717	667	601	544	501	459	429	399	375	352	334	316	300		
			(38,5)	(57,75)	(77)	(96,25)	(115,5)	(134,75)	(154,15)	(173,55)	(192,95)	(211,75)	(231,0)	(250,25)	(269,5)	(288,75)	(308)	(327,25)	(346,5)	(365,75)	(385)		
	0,24	6	2308	1537	1154	923	769	657	557	517	461	417	384	353	329	306	288	270	256	242	230		
		7	2692	1792	1346	1077	897	767	657	597	538	487	448	411	384	358	336	315	299	283	269		
		8	3076	2048	1538	1231	1025	876	747	687	615	556	512	470	439	409	384	360	341	323	307		
		10	3846	2561	1923	1538	1282	1096	937	853	769	696	641	588	549	511	480	450	427	404	384		
			(40,1)	(60,15)	(80,2)	(100,25)	(120,3)	(140,35)	(160,45)	(180,55)	(200,5)	(220,55)	(240,6)	(260,65)	(280,7)	(300,75)	(320)	(340,85)	(360,9)	(380,95)	(401)		

SECCIONES	Altura <i>h</i> en metros.	Coeficiente de trabajo <i>R</i> en kilogs. por mm. ²	PESO TOTAL <i>P</i> EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE, PARA LONGITUDES <i>l</i> DE VIGA DE																		
			1 m	1 m,50	2 m	2 m,50	3 m	3 m,50	4 m	4 m,50	5 m	5 m,50	6 m	6 m,50	7 m	7 m,50	8 m	8 m,50	9 m	9 m,50	10 m
Fig. 11 lám. 20: 4 escuadras de $\frac{50 \times 50}{7}$; tablas de 105 mm. de ancho y 5 mm. de grueso; alma llena de 5 mm. de grueso.	0,28	6	2833	1886	1416	1133	944	807	628	566	512	472	433	404	376	354	332	314	298	283	
		7	3304	2200	1652	1322	1101	941	733	660	598	550	505	472	439	413	387	367	347	330	
		8	3776	2514	1888	1510	1258	1076	838	755	683	629	577	539	502	472	442	419	397	377	
		10	4720	3143	2365	1889	1573	1345	1047	944	854	786	722	674	627	591	553	524	496	472	
	0,30	6	3103	2036	1551	1241	1034	886	688	620	561	517	474	443	412	387	364	344	326	310	
		7	3620	2410	1800	1449	1206	1031	803	724	655	603	553	517	481	452	424	402	381	362	
		8	4136	2754	2068	1655	1378	1178	918	827	748	689	632	590	550	517	484	459	434	413	
		10	5170	3443	2585	2068	1723	1473	1147	1034	935	861	791	738	687	646	605	574	543	517	
	0,34	6	3655	2434	1827	1462	1218	1041	811	731	661	609	559	522	486	456	430	406	384	365	
		7	4263	2839	2131	1706	1421	1214	946	852	771	710	652	609	566	532	499	473	448	426	
		8	4872	3244	2436	1948	1624	1388	1081	974	881	812	745	696	647	609	571	541	512	487	
		10	6090	4055	3045	2437	2030	1735	1351	1218	1102	1015	931	870	809	761	713	676	640	609	
0,38	6	4226	2814	2113	1691	1408	1204	938	845	764	704	646	603	562	528	495	469	444	422		
	7	4930	3283	2415	1972	1643	1405	1091	981	892	821	754	704	655	603	577	544	518	493		
	8	5634	3752	2817	2253	1878	1605	1250	1128	1019	939	862	802	749	704	660	628	592	563		
	10	7043	4690	3521	2817	2347	2007	1563	1408	1274	1173	1077	1006	936	880	825	782	740	704		
0,40	6	4517	3008	2258	1807	1505	1287	1001	903	817	752	691	645	600	564	529	501	475	451		
	7	5271	3510	2635	2109	1757	1502	1170	1054	954	878	806	753	701	658	617	585	554	527		
	8	6024	4011	3012	2410	2008	1716	1337	1204	1090	1004	921	860	801	753	705	669	633	602		
	10	7530	5014	3765	3012	2510	2146	1671	1506	1362	1255	1152	1075	1001	941	882	836	791	753		
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$; tablas de 150 x 5: alma de 5 mm.	0,20	6	2376	1582	1188	951	792	677	527	475	430	396	363	338	316	287	278	264	250	237	
		7	2772	1846	1386	1109	924	790	615	554	501	462	424	396	368	346	325	308	292	277	
		8	3168	2109	1584	1268	1056	902	703	633	573	528	484	452	421	396	371	352	333	316	
		10	3960	2637	1980	1585	1320	1128	879	792	716	660	605	569	526	495	464	440	416	396	

SECCIONES	Altura <i>b</i> en metros.	Coeficiente de trabajo <i>R</i> en kilogs. por mm. ²	PESO TOTAL <i>P</i> EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE, PARA LONGITUDES <i>l</i> DE VIGA DE																			
			1 m	1 m,50	2 m	2 m,50	3 m	3 m,50	4 m	4 m,50	5 m	5 m,50	6 m	6 m,50	7 m	7 m,50	8 m	8 m,50	9 m	9 m,50	10 m	
Fig. 11 de la lámina 20; 4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$; tablas de 150 mm. de ancho por 5 milímetros de grueso; alma llena de 5 milímetros de espesor.	0,25	6	3206	2135	1653	1283	1068	913	711	641	580	534	490	458	426	410	376	356	337	320		
		7	3740	2490	1870	1497	1246	1065	830	748	676	623	572	534	497	467	438	415	393	374		
		8	4274	2846	2137	1710	1424	1218	948	854	773	712	653	610	568	531	500	474	449	427		
		10	5343	3558	2671	2138	1781	1522	1186	1068	967	890	817	763	710	667	626	593	562	534		
				(52,90)	(79,35)	(105,80)	(132,25)	(158,70)	(185,15)	(211,60)	(238,05)	(264,50)	(290,95)	(317,40)	(343,58)	(370,30)	(396,75)	(423,23)	(449,75)	(476,10)	(502,55)	(529)
	0,30	6	4074	2713	2037	1630	1358	1161	904	814	737	679	623	582	541	509	477	452	428	407		
		7	4753	3165	2376	1902	1584	1354	1053	950	860	792	727	679	632	594	556	528	499	475		
		8	5432	3617	2716	2173	1810	1548	1205	1086	983	905	831	776	722	679	636	603	571	543		
		10	6790	4522	3395	2717	2263	1935	1507	1358	1228	1131	1038	970	903	848	795	754	713	679		
				(54,8)	(82,20)	(109,6)	(137)	(164,4)	(191,80)	(219,20)	(246,60)	(274)	(301,40)	(328,80)	(356,20)	(383,60)	(411)	(438,40)	(465,80)	(493,20)	(520,60)	(548)
	0,35	6	4974	3312	2487	1990	1658	1408	1104	995	900	829	761	710	661	621	582	556	523	497		
		7	5803	3864	2901	2322	1934	1653	1288	1160	1050	967	887	829	771	725	679	644	610	580		
		8	6632	4416	3316	2653	2210	1890	1472	1320	1200	1105	1011	947	882	829	776	736	697	663		
		10	8290	5521	4145	3317	2763	2362	1840	1638	1500	1381	1228	1194	1102	1011	970	921	871	829		
				(56,8)	(85,20)	(113,6)	(142)	(170,4)	(198,8)	(227,20)	(255,60)	(284,0)	(312,40)	(340,80)	(369,20)	(397,60)	(426)	(454,40)	(482,80)	(511,20)	(539,60)	(568)
	0,40	6	5904	3932	2952	2362	1968	1652	1310	1180	1068	984	903	843	785	738	691	656	610	590		
		7	6888	4587	3444	2755	2296	1963	1520	1377	1246	1148	1053	984	916	861	806	765	723	688		
		8	7872	5242	3986	3149	2624	2243	1747	1574	1424	1312	1204	1124	1046	996	921	878	827	787		
		10	9840	6553	4920	3936	3280	2804	2184	1968	1781	1640	1505	1405	1308	1230	1152	1093	1034	984		
				(58,7)	(88,05)	(117,4)	(146,75)	(176,1)	(205,45)	(234,80)	(264,15)	(293,5)	(322,85)	(352,2)	(381,55)	(410,9)	(440,25)	(469,6)	(498,95)	(528,2)	(557,65)	(587)
0,45	6	6861	4569	3430	2745	2287	1955	1523	1372	1241	1143	1049	980	912	857	803	795	721	686			
	7	8001	5328	4000	3200	2667	2280	1776	1600	1448	1333	1224	1143	1064	1000	937	889	841	800			
	8	9144	6089	4572	3658	3048	2606	2029	1828	1655	1524	1399	1306	1216	1143	1070	1016	961	914			
	10	11430	7612	5715	4573	3810	3257	2537	2286	2068	1905	1748	1632	1520	1428	1338	1270	1201	1143			
			(60,6)	(90,90)	(120,2)	(151,50)	(181,8)	(212,10)	(242,40)	(272,70)	(303,0)	(333,30)	(363,6)	(393,90)	(424,2)	(454,50)	(480,8)	(515,10)	(545,4)	(575,70)	(606)	
0,50	6	7845	5224	3922	3139	2615	2235	1741	1569	1419	1307	1200	1120	1043	980	918	871	824	784			
	7	9156	6097	4528	3663	3052	2609	2032	1831	1657	1526	1400	1308	1217	1132	1072	1017	962	915			
	8	10464	6969	5232	4186	3488	2982	2323	2092	1893	1744	1600	1494	1391	1308	1225	1162	1099	1046			
	10	13080	8711	6540	5232	4360	3727	2963	2616	2367	2180	2001	1868	1739	1635	1531	1453,3	1374	1308			
			(62,6)	(93,90)	(125,2)	(156,50)	(187,8)	(219,10)	(250,40)	(281,70)	(313)	(344,30)	(375,6)	(406,90)	(438,2)	(469,50)	(508,8)	(532,60)	(563,4)	(594,70)	(626)	

SECCIONES	Altura δ en metros.	Coeficiente de trabajo R en kilogs. por mm. ²	PESO TOTAL P EN KILOGRAMOS QUE PUEDE CARGARSE, PARA LONGITUDES l DE VIGA DE																		
			1 m	1m,50	2 m	2m,50	3 m	3m,50	4 m	4m,50	5 m	5m,50	6 m	6m,50	7 m	7m,50	8 m	8m,50	9 m	9m,50	10 m
Fig. 8. ^a de la lámina 20; 4 escuadras de $\frac{70 \times 70}{10}$ y un alma de 8 milímetros de espesor.	0,25	6	3312	2206	1656	1325	1104	944	806	736	662	599	552	507	473	441	424	388	368	348	331
		7	3964	2640	1982	1586	1321	1130	968	880	792	718	660	607	566	527	495	464	440	417	396
		8	4416	2941	2208	1767	1472	1258	1080	980	883	799	731	676	630	588	552	517	490	464	441
		10	5520	3677	2765	2209	1873	1573	1338	1176	1076	999	936	845	788	734	691	646	624	580	552
	0,30	6	4312	2872	2156	1725	1434	1229	1060	957	864	787	717	659	616	574	539	505	478	453	431
		7	4930	3284	2465	1973	1643	1406	1210	1094	986	893	821	755	704	656	616	577	547	518	493
		8	5749	3839	2874	2300	1916	1628	1417	1232	1149	1040	958	880	821	765	718	673	635	604	574
		10	7186	4786	3523	2875	2395	2047	1765	1555	1437	1301	1197	1099	1026	956	898	841	798	755	718
	0,35	6	5500	3667	2750	2201	1833	1568	1372	1222	1090	996	916	842	785	732	687	644	611	578	550
		7	6416	4273	3208	2567	2138	1828	1594	1424	1283	1161	1069	981	916	853	802	751	712	674	641
		8	7333	4883	3666	2934	2444	2089	1807	1587	1466	1327	1222	1121	1047	975	916	858	814	770	733
		10	9166	6111	4583	3667	3055	2615	2235	1967	1833	1660	1527	1403	1309	1220	1145	1073	1015	963	916
	0,40	6	6312	4209	3156	2525	2104	1801	1550	1389	1262	1143	1052	966	901	840	789	739	701	663	631
		7	7364	4904	3682	2946	2454	2098	1807	1594	1472	1332	1227	1126	1052	979	945	862	818	774	736
		8	8416	5605	4208	3367	2805	2398	2058	1808	1683	1523	1402	1287	1202	1119	1052	985	935	884	841
		10	10520	7006	5260	4209	3506	2998	2535	2194	1904	1753	1609	1502	1399	1315	1231	1168	1105	1052	
	0,45	6	7437	4953	3718	2975	2479	2119	1811	1651	1487	1346	1239	1137	1062	989	929	871	826	781	743
		7	8670	5714	4335	3469	2890	2470	2124	1824	1734	1569	1445	1326	1238	1153	1083	1015	963	911	857
		8	9908	6598	4954	3964	3302	2823	2419	2119	1981	1793	1651	1595	1415	1317	1238	1160	1100	1041	990
		10	12385	8248	6192	4955	4128	3529	3049	2749	2477	2241	2064	1894	1769	1647	1548	1450	1379	1301	1238

528. Tablas de Riche. — Para la pronta resolución de los problemas, cuando se trata de las vigas de sección doble T como las representadas en las figs. 33 y 23 de la lám. 14, son recomendables las tablas de *Riche* (*), calculadas para un coeficiente de trabajo de $R = 6$ kilogramos por mm^2 . Se forma el momento máximo de flexión, que el autor denomina *momento de fractura*, y se va con él á las tablas; se encontrarán varias cantidades poco diferentes (por exceso) de M_0 ; á cada una corresponde un perfil de viga cuyas dimensiones aparecen en la tabla, así como su peso en kilogramos por metro lineal.

Si se quiere adoptar un coeficiente R diferente de 6, se multiplicará M_0 por el cociente $\frac{6}{R}$, y el producto se llevará á las tablas.

529. Cálculo de vigas que den al flexarse flecha determinada. — Se puede fijar *a priori* la altura b de la sección transversal para que en la flexión resulte una cierta flecha f , siguiendo el procedimiento explicado en el número 513.

530. Modo de tener en cuenta el peso propio de la viga. — No se tiene en cuenta muchas veces el peso propio de la viga; pero si se le quiere tomar en consideración, se seguirá el procedimiento explicado en el núm. 510.

531. Cálculo de las roblonaduras. — Los diversos elementos que constituyen la viga (escuadras, almas, tablas, etc.), están unidos por medio de roblones. Si se quisiese calcular su número, diámetro ó separación, se emplearía el procedimiento que explicaremos en el núm. 554 para vigas de palastro de grande altura.

532. Vigas compuestas de hierro. Resolución del segundo problema. — La resolución del problema inverso, conocida la viga y el caso de flexión, determinar la carga que puede soportar, no ofrece dificultad ninguna, como ya hemos visto en el núm. 517 para las vigas laminadas. Se formará el valor de $\frac{I}{v}$, y se tendrá:

$$\frac{RI}{v} = \frac{1}{n} Pl,$$

de donde

$$P = \frac{n}{l} \times \frac{RI}{r}$$

(*) *Tables des moments de rupture des poutres en fer en forme de double T*, por N. Riche. — Paris. — Dunod, éditeur.

Si la viga no fuese simétrica (caso c del núm. 494) se formaría $\frac{I}{r}$, poniendo en vez de c el mayor de los valores r' ó r'' .

Tampoco presenta dificultad alguna, tanto en este problema como en el primero, el cálculo de la flecha f , ni la resolución del tercer problema (conocida la viga y la carga determinar R) que se hará como se ha explicado en el núm. 521.

533. Vigas superpuestas. — Estudiemos el caso general de varias vigas A, B, C (fig. 13, lám. 20) de material diferente (hierro, madera, acero, etcétera), y de secciones de forma y magnitud diversas.

Suponiendo que nada se opone al libre resbalamiento de una viga sobre otra en las superficies comunes a, b, c, d , etc., es un hecho comprobado por la experiencia que las vigas se flexan independientemente; esto es, que dentro de cada una, las secciones transversales normales al eje antes de la deformación, continúan siéndolo después.

Partiendo de este hecho y repitiendo los razonamientos del capítulo IV (núms. 304 y 305), deduciríamos que cada viga tiene su capa de fibras neutras correspondiente, que pasa por los centros de gravedad de las secciones transversales.

Sean I', I'', I''' los momentos de inercia de las secciones transversales de las vigas A, B y C , con respecto al eje contenido en las respectivas capas de fibras neutras, y E', E'', E''' los coeficientes de elasticidad correspondientes á los materiales de que están formadas dichas vigas.

La deformación es igual para todas las piezas superpuestas; así, pues, si llamamos $P'_a, P'_b, P'_c, \dots, P''_a, P''_b, P''_c, \dots, P'''_a, P'''_b, P'''_c, \dots$ á las partes de fuerzas P', P'', P''', \dots , que aplicadas á las vigas A, B, C, \dots , supuestas aisladas, produjesen la misma flecha que adquiere cada una cuando están superpuestas, tendríamos, según lo que hemos visto en el núm. 497,

$$P'_a : P'_b : P'_c, \dots :: P''_a : P''_b : P''_c, \dots :: P'''_a : P'_b : P'''_c, \dots \\ :: E' I' : E'' I'' : E''' I''' \dots$$

siendo

$$P' = P'_a + P'_b + P'_c + \dots \\ P'' = P''_a + P''_b + P''_c + \dots \\ P''' = P'''_a + P'''_b + P'''_c + \dots$$

Luego las fuerzas se reparten, en las vigas superpuestas, proporcionalmente á los productos de los coeficientes de elasticidad y momentos de inercia.

534. Las proporciones é igualdades anteriores dan el número necesario de ecuaciones para determinar P'_a , P'_b etc, conocidos que sean las fuerzas totales, coeficientes de elasticidad y momentos de inercia.

La conclusión precedente permite resolver el problema siguiente: *dadas varias vigas superpuestas A, B, C, etc., de material y sección diferentes, averiguar la carga que podrán soportar de modo que los coeficientes de trabajo no excedan, respectivamente, de los valores R_a , R_b , R_c , etc.*

Llamemos b' , b'' , b''' , etc., las alturas de las secciones trasversales en las vigas A, B, C, etc.; para que se llegase en la flexión á los coeficientes de trabajo R_a , R_b , R_c sería preciso que cada una de ellas adquiriese la flecha siguiente (véase núm. 513), siendo l la longitud común:

$$\begin{aligned} \text{Viga A.....} & f' = k n \frac{2 R_a l^2}{E' b'} \\ \text{» B.....} & f'' = k n \frac{2 R_b l^2}{E'' b''} \\ \text{» C.....} & f''' = k n \frac{2 R_c l^2}{E''' b'''} \end{aligned}$$

Aquí se ve la dificultad, en general, de que las vigas superpuestas, de materiales diferentes, trabajen al flexarse con los coeficientes R_a , R_b , etcétera, que de ordinario se admiten para dichos materiales. En efecto; es preciso que las flechas f' , f'' , f''' , etc., sean iguales, y esto exige que

$$\frac{R_a}{E' b'} = \frac{R_b}{E'' b''} = \frac{R_c}{E''' b'''} = \dots,$$

es decir, que los coeficientes de trabajo sean proporcionales á los productos de los coeficientes de elasticidad y alturas de las secciones.

Pero, en general, esta proporcionalidad no existirá, aun cuando se debe procurar obtenerla, y los valores de f' , f'' y f''' serán diferentes. Tomemos el menor de ellos, y sea éste el $f'' = k n \frac{2 R_b l^2}{E'' b''}$; sustituyéndolo en los de f' y f''' y despejando R_a y R_c , tendremos los valores de estos coeficientes para que f' y f''' sean iguales á f'' . Así, pues, será posible flexar á un tiempo las vigas A, B, C....., siendo R_b el coeficiente de trabajo de la B; pero resultando para R_a y R_c valores menores que los ordinarios empleados en estos materiales.

Para determinar la carga total P que podrá aplicarse á las vigas superpuestas en las condiciones anteriores, observaremos que en la B se tiene (núm. 405, fórmula 3):

$$f'' = k \frac{P_b l^3}{E'' I''}$$

de donde

$$P_b = \frac{E'' I'' f''}{k l^3} \quad (1),$$

siendo P_b la parte de carga total P que actúa sobre la viga B. Llamando P_a y P_c á las correspondientes á las vigas A y C, tenemos, según el teorema del número anterior (533),

$$\begin{aligned} P_a : P_b &:: E' I' : E'' I'' \\ P_c : P_b &:: E''' I''' : E'' I'' \end{aligned}$$

De aquí deduciríamos los valores de P_a y P_c

$$\left. \begin{aligned} P_a &= P_b \frac{E' I'}{E'' I''} \\ P_c &= P_b \frac{E''' I'''}{E'' I''} \end{aligned} \right\} (2)$$

que sumados con el P_b dan la carga total P que pueden soportar las vigas superpuestas, no excediendo los coeficientes de trabajo de los valores dados R_a , R_b , R_c , y es

$$P = P_b \left(1 + \frac{E''' I'''}{E'' I''} + \frac{E' I'}{E'' I''} \right);$$

P_b se determina directamente por la ecuación (1).

535. Caso de m vigas superpuestas, del mismo material y de igual sección. — Si las m vigas superpuestas son de sección trasversal y material iguales, se tendrá:

$$I' = I'' = I''' = \dots = I \quad E' = E'' = E''' = \dots = E,$$

y por tanto (ecuaciones 2 del número anterior)

$$P_a = P_b = P_c = \dots = \frac{1}{m} P,$$

es decir, que cada una de las vigas se halla en las mismas condiciones que si estuviera aislada y sometida á una carga $\frac{1}{m} P$, dispuesta de modo semejante al de la carga P . La ecuación de resistencia será, pues, para una cualquiera,

$$\frac{R I}{r} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m} P \right) l;$$

ó bien, para todas,

$$m \frac{R I}{v} = \frac{1}{n} P l.$$

Así debía suceder; puesto que cada una de las vigas tiene un momento resistente $\frac{I}{v}$ y da lugar á un momento de fuerzas elásticas $\frac{R I}{v}$ (número 460), el correspondiente á las m vigas, que equilibra el momento de flexión $\frac{1}{n} P l$, es la suma de los m parciales, ó sea $m \frac{R I}{v}$.

536. El empleo de vigas superpuestas es más común en las de madera. Empleando m de este material, y de sección rectangular de lados a y b' (fig. 14, lám. 20), se tendrá:

$$\frac{m R a b'^2}{6} = \frac{1}{n} P l.$$

Conocidos a, b', l y m podremos deducir P , ó bien, dados l, P, a y b' , se podrá determinar m .

537. Comparación de resistencias de una viga única y de varias vigas superpuestas (fig. 14, lám. 20). — Supongamos dos vigas 1 y 2, de igual ancho $d = a$, enteriza la primera y compuesta la segunda de m vigas superpuestas de escuadría $a \times b'$. Se trata de comparar el volumen de madera en las dos vigas, en la hipótesis de que ambas han de soportar el mismo peso P con idéntico coeficiente de trabajo R .

Tenemos:

$$\text{Viga 1, de altura } b. \dots\dots\dots \frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{n} P l,$$

$$\text{Viga 2, de altura } b'' = m b'. \dots\dots m \frac{R a b'^2}{6} = \frac{1}{n} P l.$$

Se deduce que $\frac{b'^2}{b^2} = \frac{1}{m}$, y $b = b' \sqrt{m}$; ó
 $b'' = m b' = b \sqrt{m}$.

El volumen de madera para las vigas superpuestas es, pues, \sqrt{m} veces mayor que el de la viga única.

Si comparamos las cargas P y P' que pueden soportar una viga única 1 de lados $d = a$ y b , y otra 3 de lados a y $b = m b'$, compuesta de m vigas superpuestas, resulta:

$$\text{Viga 3 (} m \text{ superpuestas).} \dots\dots\dots m \frac{R a b'^2}{6} = \frac{1}{n} P' l.$$

$$\text{Viga 1 (única).} \dots\dots\dots \frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{n} P l.$$

de donde

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{m}$$

ó

$$P = m P'$$

En cuanto á las flechas, tendremos (núm. 513):

$$\text{Viga 1.} \dots\dots\dots f = k n \frac{2 R l^2}{E b}.$$

$$\text{Viga 2.} \dots\dots\dots f' = k n \frac{2 R l^2}{E b'}.$$

y como $b = b' \sqrt{m}$, será $f' = f \sqrt{m}$.

Comparando las vigas 1 y 3, en las cuales $b' = \frac{1}{m} b$, se deduciría, llamando f'' á la flecha correspondiente á la viga 3, $f'' = m f$.

538. Vigas ensambladas. — Si se evita el resbalamiento de unas vigas sobre otras, todas ellas trabajarán como una pieza única, puesto que la deformación será única también y no habrá más que una capa de fibras neutras; de modo que el momento de las fuerzas elásticas no será ahora $m \frac{R I}{v'}$

(siendo I' y v' cantidades correspondientes á cada una de las m vigas superpuestas), sino $\frac{R I}{v}$, representando I el momento de inercia de la sección total y v la semialtura.

El objeto de las *vigas ensambladas* no es otro que el de evitar el resbalamiento de las superpuestas, empleándose al efecto las conocidas disposiciones de *cinchos* ó *pernos* (fig. 18, lám. 20), de *llares* ó *cajas* (figs. 19 y 20), de *llaves* de madera dura (fig. 21) y otras.

No se consigue, sin embargo, con ninguna de las disposiciones anteriores que la viga ensamblada tenga la misma resistencia que otra de una pieza de la misma escuadría; de modo que la carga total que podrá aplicarse á la primera, se deducirá de la P correspondiente á la segunda, afectándola de un coeficiente α menor que la unidad. Es decir, que la ecuación de resistencia será

$$\frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{n} (\alpha P) l.$$

Es muy difícil, en efecto, conseguir la perfecta unión de las superficies que han de estar en contacto; y aun siendo excelente la mano de obra, se manifiestan al cabo de algún tiempo holguras en las uniones, debidas á la desecación y alabeo de las maderas. Las holguras son causa de destrucción del material y de disminución de resistencia del conjunto.

El valor del coeficiente α depende de la disposición de ensambladura que se haya adoptado. Si es la representada en la fig. 18, dice Mr. Ardant (*Resistance des matériaux*) que α debe ser á lo más igual á 0,50, según las experiencias practicadas en la Escuela de aplicación de Artillería é Ingenieros de Francia en 1838, y que en el caso de adoptar llaves ó llares y cinchos de hierro (figs. 19, 20 y 21) puede hacerse $\alpha = 0,8$.

539. Veamos ahora el modo de calcular todos los elementos de una viga ensamblada, y supongamos, para fijar las ideas, que se trata de la representada en la fig. 21 de la lám. 20, en la que se hace uso de llaves de madera dura y cinchos de hierro.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE LLAVES

Sean:

C_0 = esfuerzo cortante máximo.

S = fuerza de desgarramiento longitudinal, por unidad superficial, en el plano ANB .

- z = distancia NM del plano ANB á la capa de fibras neutras HH' .
- n = número de llaves de madera dura, por metro de longitud de viga, en el plano ANB .
- a = anchura de la viga, ó sea dimensión de escuadría normal al plano de la figura.
- b = altura de la sección transversal.
- h = semialtura de una llave, ó sea la profundidad $z f$ de la caja abierta en cada viga elemental (fig. 22).
- c = anchura eg de una llave.
- R = coeficiente de trabajo por extensión, correspondiente á la madera de que están formadas las vigas elementales.
- R' = ídem íd. de compresión para íd.
- R'' = ídem íd. de desgarramiento para íd.
- R''' = ídem íd. de desgarramiento, correspondiente á la madera de que se han hecho las cuñas ó llaves.

La fuerza S de desgarramiento tiende á destruir la ensambladura, haciendo girar las cuñas como manifiesta la fig. 23 (lám. 20); si éstas fuesen expulsadas ó rotas, ó desgarrada la madera de las cajas, las vigas elementales se portarían como las superpuestas de la fig. 13, y quedarían en la disposición que representa la fig. 24, en la cual puede observarse que los bordes de las cajas no coinciden ya á partir de la central, como debe suceder, á causa de la extensión de las fibras superiores y compresión de las inferiores, originada por la independencia de flexiones. La base de los cálculos, es, pues, el conocimiento de S , cuyo valor es, según la fórmula (6) del núm. 467,

$$S = - \frac{C}{ab} \left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{b^2} \right).$$

S viene en función de z (cantidad conocida NM , fig. 21) y del esfuerzo cortante C ; esta cantidad es variable de una á otra sección de la viga, en general; pero en obsequio de la resistencia y de la facilidad de los cálculos, la supondremos constante é igual al máximo C_0 . Resulta, en definitiva, que en una unidad de longitud de viga, contada en el plano AB (fig. 21), se desarrolla un esfuerzo rasante ó de desgarramiento

$$S \times a \times 1 = Sa.$$

Por efecto de la tendencia á la rotación de las llaves (fig. 23), no trabaja por compresión más que una semicaja de cada lado de la cuña. Si suponemos que la presión no se reparte igualmente, sino que se distribuye variando uniformemente de a á c (fig. 22) según las ordenadas de la recta cb , para que la presión sea $ab = R'$ en a habrá que contar con una presión media $\frac{R'}{2} = d$ o por unidad superficial en toda la semicaja. Por otra parte, si hay n cuñas por cada metro de longitud de plano AB , á cada una le corresponderá un esfuerzo $\frac{Sa}{n}$, que es el que causará la compresión en la semicaja; tendremos, pues, que la ecuación $P = R\omega$ es aquí

$$\frac{Sa}{n} = \frac{1}{2} R' h a \quad (1),$$

de donde

$$n = \frac{2S}{R'h} \quad (2).$$

La ensambladura puede romperse también por desgarramiento de las cuñas, según ed (fig. 25), ó de las vigas por rs ó mb , obedeciendo á la fuerza $\frac{Sa}{n}$ ó á su igual $\frac{1}{2} R' h a$. Será preciso, pues, para prevenir esta fractura, que se verifique

$$\text{(Llaves) } \dots \dots \frac{1}{2} R' h a = R''_1 c a \quad \text{ó} \quad c = \frac{1}{2} \frac{R' h}{R''_1} \quad (3).$$

$$\text{(Vigas). } \dots \dots \frac{1}{2} R' h a = R'' \times rs \times a \quad \text{ó} \quad rs = \frac{1}{2} \frac{R' h}{R''} \quad (4).$$

Si rs resultase menor, habría que disminuir el número de llaves para hacerlo mayor; pero al disminuir n habrá que aumentar h (ecuación 2), es decir, la profundidad de la caja.

Desde luego se ve que $c < rs$, y la necesidad de hacer las cuñas de madera más dura que la de las vigas.

Hay otra consideración que influye también en la anchura c de las cuñas. Supongamos que el punto de aplicación de la presión $Q = \frac{Sa}{n}$ que se ejer-

ce entre cuña y caja (fig. 22) esté á $\frac{2}{3} h$ del plano zt común á las dos piezas.

El par Q, Q que produce la rotación de la cuña, tiene por momento $\frac{4}{3} h Q$.

Es necesario introducir fuerzas q normales á la viga que se opongan á la rotación de la cuña y obliguen á sus caras horizontales á apoyarse bien en el fondo de las cajas. Supongámoslo así; no se obtendrá presión uniforme, sino que variará según las ordenadas de las rectas $ek, e'k'$, de modo que para obtener presiones R' en g y en f , habrá que contar con una presión media por unidad superficial $\frac{1}{2} R'$, estando la resultante $q = \frac{R'ca}{2}$ aplicada en puntos que distan de e y e' respectivamente las magnitudes $\frac{2}{3} e'f$; el momento del par q, q , valdrá $\frac{R'ac^2}{6}$, y el equilibrio exige que sea igual al del par Q, Q , es decir,

$$\frac{R'ac^2}{6} = \frac{4}{3} Q h$$

ó

$$c = \sqrt{\frac{8Qh}{R'a}}$$

Se comparará este valor con el (3) y se tomará el mayor de ellos.

La rotación de las cuñas se evita por medio de los cinchos de hierro A, B . Si llamamos T á la tensión que sufre cada uno de los dos brazos de un cincho y d á la distancia de dos cinchos contiguos, deberá verificarse $2Td = \frac{4}{3} Qh$, de donde se podrá despejar el valor de T y calcular después la escuadría de las ramas.

Generalmente se pone un cincho entre cada dos llaves; entonces duplica su valor el anterior de T .

Del mismo modo se calcularía otra ensambladura cualquiera; por ejemplo, la de llaves representada en las figs. 19 y 26.

540. Influencia de la disposición de las fibras en la resistencia á la fractura de piezas de pino. — El pino se compone de fibras más ó menos rojas, duras y tenaces, y de una materia blanquecina menos consistente que

las envuelve. Teniendo en cuenta la fuerza S de desgarramiento longitudinal que se produce en la flexión, se explica la mayor resistencia que presenta una misma pieza colocada en la posición B (fig. 27, lám. 20) si se compara con la que tiene en la situación A ; según Mr. Barlow, la relación de resistencias á la fractura es de $\frac{8}{7}$.

541. Vigas yustapuestas. — Cuando se flexan igualmente varias vigas yustapuestas de diversos materiales (figs. 15, 16 y 17, lám. 20), se demuestra, como en el núm. 533, que se portan como si estuviesen aisladas y sometidas á cargas, idénticamente dispuestas, que están en la relación de los productos $E' I', E'' I'',$ etc.

Dedúcese de esta proporcionalidad, como ya lo hicimos en el núm. 534 para las vigas superpuestas, la dificultad de que todas las vigas trabajen á un tiempo con los coeficientes que ordinariamente se asigna á cada uno de los materiales, para lo cual sería preciso se verificase

$$\frac{R_a}{E' b'} = \frac{R_b}{E'' b''} = \frac{R_c}{E''' b'''} = \dots$$

Si las m vigas son iguales y de igual materia (fig. 15), de modo que $E' I' = E'' I'' = \dots$, se deduce también que cada una soportará $\frac{1}{m}$ de la carga total P , y la ecuación de resistencia será:

$$\frac{R I}{v} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m} P \right) l;$$

ó, para las piezas de sección rectangular de lados a' y b ,

$$\frac{m R a' b^2}{6} = \frac{1}{n} P l.$$

Esta ecuación demuestra que, á igual valor de R , se puede cargar el mismo peso P á una viga única de ancho $a = m a'$ que á m yustapuestas de anchura a' .

Esto no es completamente exacto cuando a' es muy pequeño, porque podría sobrevenir el alabeo lateral de que hemos hablado en el núm. 502, á

no estar sólidamente ligadas las vigas por medio de pernos ó cinchos, los cuales cumplen también el importante objeto de repartir igualmente las cargas para que todas las piezas trabajen á un tiempo. Cuando se emplean tablas, es conveniente la disposición que representa la fig. 21 de la lámina 18.

542. Vigas empalmadas sometidas á flexión. — Hemos visto en la teoría general de la flexión (núm. 305, fig. 24, lám. 5.^a) que para sustituir, en una viga cortada transversalmente, la acción de las fuerzas elásticas, hay necesidad de introducir una fuerza $-P$, igual y contraria al esfuerzo cortante, y otras dos F_1, F'_1 , cuyos momentos $F_1 \times Hm$ y $F'_1 \times Hn$, sumados, equilibren el momento de flexión M . Llamaremos f y f' á las magnitudes Hm y Hn .

También vimos (núm. 307) que la suma de momentos de las fuerzas elásticas de uno y otro lado de la capa de fibras neutras, tiene por valor $\frac{E I'}{\rho} + \frac{E I''}{\rho}$, siendo

$$\begin{aligned} \frac{E I'}{\rho} &= F_1 f \\ \frac{E I''}{\rho} &= F'_1 f'. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\frac{F_1 f}{F'_1 f'} = \frac{I'}{I''}$; y recordando que $F_1 f + F'_1 f'$ debe ser equivalente á M , y que $I' + I''$ es el momento de inercia de la sección total, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{F_1 f} &= \frac{I}{I'} \\ \frac{M}{F'_1 f'} &= \frac{I}{I''} \end{aligned} \right\} \text{de donde...} \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{M I'}{I f} \\ F'_1 &= \frac{M I''}{I f'} \end{aligned} \right\} (1).$$

El método general de cálculo de una viga empalmada es el siguiente: como la escuadría es conocida, se conocerá también el momento de flexión M de que es susceptible en el empalme, por la fórmula $M = \frac{R I}{v}$; y como son

datos del problema I, I', I'' y f y f' que están determinados por la situación asignada á los enlaces que constituyen el empalme, ya sean bridas, pernos, etc., será fácil deducir los valores de las fuerzas de extensión y de compresión F_1 y F'_1 , por las fórmulas (1) anteriores, y calcular en consecuencia la resistencia ó escuadría de dichos enlaces. Lo mismo decimos del esfuerzo cortante y del enlace que ha de resistirlo.

Si la sección transversal de la viga es simétrica con respecto á la capa neutra, será $I' = I'' = \frac{1}{2} I$, y tendremos

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{M}{2f} \\ F'_1 &= \frac{M}{2f'} \end{aligned} \right\} (2).$$

543. Las figs. 1.^a á 8.^a de la lám. 22, representan las disposiciones más empleadas en los empalmes sometidos á flexión. Para suplir á las fibras interrumpidas que deben extenderse, se colocan bridas ó sopandas de hierro ó de madera, provistas de cuñas, llaves ó llares, cinchos ó pernos, casquillos, etcétera.

Supongamos que se trata del empalme representado en la fig. 1.^a (lám. 22); una plancha de hierro, provista de rebordes ó pestañas que encajan en la madera, está asegurada por medio de pernos (dibujados con líneas de puntos). La plancha trabaja por extensión en el quierpo principal y por desgarramiento en las pestañas; cuanto á la madera, está sometida á compresión en las paredes $m r$ de las cajas y á desgarramiento á lo largo del plano $p m n$.

Llamaremos:

z = á la profundidad $m r$ de las cajas.

b_1 = altura total $d e$ de la viga.

b = altura $d n = b_1 - z$.

a = anchura de la viga, utilizable para la resistencia, es decir, descontando el taladro practicado para el paso del perno.

a' = ancho de la plancha, útil para la resistencia, descontando el orificio para el perno.

a'' = ancho total de la plancha.

b' = grueso de íd.

x = grueso de las pestañas.

n = número de rebordes ó pestañas, de cada lado del empalme.

s = parte $m n$ de madera comprendida entre dos dientes.

Los coeficientes de trabajo R, R', R'' por extensión, compresión y desgarramiento, irán afectados de los subíndices m, h , según que se refieran á madera ó á hierro.

La altura útil de la viga para los efectos de la flexión es b , puesto que las fibras inferiores están interrumpidas en una profundidad z ; la capa de fibras neutras será $h c$, que pasa por los puntos medios c de las secciones transversales, y el momento de flexión M vale, puesto que se trata de una sección rectangular (núm. 501), $M = \frac{R_m a b^2}{6}$.

La madera está comprimida en la parte $c d$, y no necesita enlace longitudinal teórico. La línea de acción de la fuerza F que se opone á que se abra la junta por $c e$, es $q o$; y el brazo de palanca es $f = c n + n o = \frac{1}{2} b_1$. Aplicando las fórmulas (2) del núm. 542, y reemplazando b_1 por b , que es sensiblemente del mismo valor, tenemos:

$$F_1 = \frac{R_m a b}{6}.$$

Si suponemos una repartición de presiones en las paredes $m r$ de las cajas como la del núm. 539, contaremos con presión uniforme $\frac{1}{2} R'_m$ por unidad superficial para que en m valga R'_m ; y entonces siendo n el número de cajas de cada lado del empalme,

$$\frac{1}{2} R'_m n z a = F_1 = \frac{R_m a b}{6},$$

y si, como generalmente se hace para la madera, $R_m = R'_m$,

$$z = \frac{b}{3n} \quad (1).$$

Para que los dientes de la plancha no se rompan por desgarramiento es preciso que

$$R'''_h n x a'' = F_1 = \frac{R_m a b}{6}$$

ó

$$x = \frac{R_m}{R'''_h} \times \frac{a b}{6 n a''} \quad (2).$$

La ecuación de resistencia á la tracción de la plancha, es

$$a' b' R_h = F_1 = \frac{R_m a b}{6}$$

de donde

$$a' b' = \frac{R_m}{R_h} \times \frac{a b}{6} \quad (3).$$

Finalmente, para que la madera no se rompa por desgarramiento, según $m n$, es preciso que el área $n s a$ presente la misma resistencia que la de hierro $n x a''$, y por tanto que

$$\frac{s a}{x a''} = \frac{R'''_h}{R'''_m} \quad (4).$$

Cuanto al esfuerzo cortante, exigirá un enlace especial, por ejemplo el de las bridas A señaladas con línea de puntos, las cuales servirán también para evitar los movimientos laterales de las vigas empalmadas.

Conviene reforzar los espesores de hierros que dan las fórmulas anteriores para precaverse de los defectos de forjado y calidad de los herrajes.

Los empalmes figs. 2.^a, 3.^a y 4.^a de la lám. 22, se calcularían de idéntica manera.

Los de las figs. 5.^a y 6.^a se calcularán como piezas ensambladas y empalmadas (núms. 539 y 543).

Cuando se emplean manguitos ó casquillos de hierro (fig. 8.^a, lám. 22) se calculan las paredes horizontales superior é inferior del manguito para que resistan á la fuerza F_1 , como en el ejemplo del número anterior (ecuación 3); las paredes verticales han de resistir al esfuerzo cortante.

En el empalme representado en la fig. 7.^a, las bridas superior é inferior,

los pernos y el pasador a , han de resistir á la fuerza $F_1 = \frac{R_m a b}{6}$; fácil será calcularlo. Lo mismo decimos de la longitud $m n$ para evitar el desgarramiento de la madera.

Tienen los manguitos, cajas y bridas de hierro, una ventaja notable sobre las sopandas de madera (figs. 4.^a, 5.^a y 6.^a), y es que no aumentan la altura total de la viga como en éstas sucede.

Como observación común á todas las disposiciones de vigas empalmadas sometidas á flexión, diremos que no debe contarse con que su resistencia sea la misma que la de una viga de igual escuadría $a \times b$ y de una sola pieza.

La dificultad en el ajuste de todas las piezas del empalme, las holguras que se crean por efecto de la desecación de las maderas, deformaciones por compresión en las cajas, etc., y otras varias causas, aconsejan emplear un coeficiente de corrección de 0,60 á 0,80 para la carga total P que correspondería á la viga única, á semejanza de lo que hemos dicho para las vigas ensambladas (núm. 538).

544. Vigas hechas con tablas. — Pueden formarse vigas de gran resistencia con tablas puestas á juntas encontradas y provistas de cubrejuntas, haciendo la unión con cabillas de madera, alfileres ó pernos (figs. 20, 21 y 22, de la lám. 18).

De las numerosas experiencias que hemos practicado, cargando hasta la fractura vigas compuestas de tablas, hemos deducido las consecuencias que á continuación exponemos:

Cuando las planas se disponen como indica la fig. 20 (lám. 18), es decir, yustaponiéndolas á juntas encontradas como si se quisiese formar una sola viga, ocurre con frecuencia el alabeo lateral de que se hizo mención en el núm. 502 (figs. 3.^a y 4.^a, lám. 16), especialmente si es pequeño el espesor total de las tablas, y las vigas se rompen con cargas mucho menores de las que debieran corresponder á la escuadría total y á la calidad del material.

Se aumenta notablemente la resistencia á la fractura adoptando la disposición representada en las figs. 21 y 22 de la lám. 18, en la cual las tablas se colocan á uno y otro lado de tacos grandes de madera, uniéndolas fuertemente á éstos con pernos ó alfileres grandes. Esta especie de enzoquetado (como el de los cabios de suelo) impide el alabeo lateral de que se hizo antes mención. El resultado es más satisfactorio todavía cuando se colocan las tablas en tres filas, con otras dos intermedias de tacos.

Es del mayor interés nivelar los extremos sobre sus asientos, á fin de que

las cargas actúen paralelamente á las caras de las tablas, y colocar aquéllas convenientemente para que se distribuyan por igual en éstas.

La distancia entre las caras interiores de los tacos no debe exceder de 0^m,70; las cubrejuntas, de tabla también, han de tener 0^m,60 de longitud como mínimo.

La unión de los tacos con las tablas se hace mejor por medio de pernos delgados que con alfileres largos; pero la de las tablas entre sí, y con los cubrejuntas, se puede hacer bien con alfileres pequeños, muy repartidos para que efectúen el enlace lateral sin debilitar la madera ni rajarla.

Para establecer la comparación de resistencias de vigas formadas con tablas y vigas de una pieza de igual escuadría, elegimos, en las pruebas, vigas de la misma procedencia y calidad de madera; unas se convertían en tablas de las dimensiones ordinarias, con las cuales se formaban las vigas compuestas, y todas ellas se cargaban después, hasta la fractura, con cargas graduales crecientes, midiendo escrupulosamente las flechas observadas.

Con objeto de dar una idea del método y resultados obtenidos, damos á continuación los detalles de una de las experiencias.

Viga enteriza. — Se formó con dos tablones de pino del Norte, de 0^m,20 de ancho y 0^m,05 de grueso, clavados á tacos de madera por medio de tres alfileres de 0^m,15 de longitud y 6 milímetros de diámetro.

La distancia entre las caras interiores de los tablones era de 0^m,23; y la longitud, entre los apoyos extremos, $l = 6^m,13$; la escuadría total para los efectos de la resistencia, como la de un rectángulo único de $b = 0^m,20$ y $a = 2 \times 0,05 = 0^m,10$.

Viga de tablas. — De otros tablones del Norte, de madera idéntica, se sacaron tablas que, después de acepilladas, tenían 0^m,20 de ancho, 0^m,025 de grueso y 1^m,90 de longitud, y se formó una viga como la representada en la fig. 22 (lám. 18), con dos filas de tablas de cada lado de los tacos uniéndolas con alfileres de cabeza cónica, de 0^m,06 de longitud y 0^m,0034 de diámetro. Resulta la misma escuadría anterior, $b = 0^m,20$ y $a = 4 \times 0,025 = 0^m,10$.

En esta viga se pusieron el mismo número de tacos que en la anterior (10) y de iguales dimensiones. Cada cubrejunta (de 0^m,70 de longitud) llevaba 50 alfileres, y 10 en el intervalo de dos consecutivas para asegurar las tablas entre sí.

La distancia entre los puntos de apoyo era también $l = 6^m,13$; he aquí las cargas aplicadas al punto medio, las flechas observadas en las dos vi-

gas y las calculadas por la fórmula $f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}$, para un coeficiente de elasticidad $E = 10^9$ por m.²:

CARGAS <i>P</i> en el punto medio. Kilogramos.	FLECHAS		
	VIGA ENTERIZA	VIGA DE TABLAS	CALCULADA por la fórmula.
	Centímetros.	Centímetros.	Centímetros.
200	1,50	1,50	1,44
380	2,50	2,50	2,68
460	3,90	4,00	3,32
530	4,35	4,50	3,76
650	5,00	5,30	4,70
760	5,60	6,20	5,50
1000	7,00	8,50	7,00
1170	10,20	11,40	8,40
1270	11,70	Se rompió la viga.	9,30
1400	12,50	»	10,08
1463	13,10	»	10,50
1497	13,80	»	10,78
1547	Se rompió la viga.	»	11,14

La relación de cargas de fractura es para esta experiencia $\frac{1270}{1547} = 0,82$; en las restantes, la relación varió entre 0,70 y 0,83. Se puede, pues, decir que en vigas de tablas como las de las experiencias, la resistencia es los 0,70 á 0,80 de la de las enterizas de igual escuadría, lo cual equivale á calcularlas por la fórmula $\frac{R a b^2}{6} = M_0$, siendo a la suma de espesores de las tablas, b el ancho de éstas, y $R = 0,70 \times 60$ á $0,80 \times 60$ kilogramos por cm.², es decir, 40 á 50 kilogramos por cm.²

VIGAS COMPUESTAS DE GRAN ALTURA (SECCIÓN CONSTANTE)

545. *Vigas de palastro de alma llena.* — Tienen la forma general que representan las figs. 36, 52 y 53 de la lám. 21; se componen de dos cabezas, *larqueros* ó *cordones*, y de un alma llena.

Cada una de las *cabezas* (fig. 9.^a, lám. 22) está formada de dos hierros en escuadra y uno ó más palastros ó *tablas* cosidos á las escuadras con las filas de roblones *a*; los roblones *c* solamente tienen por objeto mantener unidas las tablas cuando son anchas. El alma, cuando es de grande altura, no puede ser de una pieza, y se forma de varios trozos empalmados con doble cubre-junta; se une á las cabezas por medio de las filas *d* de roblones.

Se acostumbra dar á los diversos elementos que componen la viga, las proporciones que se consignan en el núm. 556 para las de celosía.

546. En el cálculo de estas vigas no se puede prescindir del esfuerzo cortante, como lo hemos hecho para las de madera y las de hierro, laminadas y compuestas, de pequeña altura, fundados en los razonamientos del núm. 491. En el caso presente el esfuerzo cortante debe ser tomado en consideración; no se trata ya de secciones en que la altura es pequeña relativamente á los espesores, sino que, por el contrario, la altura de la viga es grande, y por razón de economía se asigna pequeño espesor al alma, acumulando la mayor parte del metal en las cabezas, á fin de que el valor de $\frac{I}{v}$ pueda ser considerable sin serlo el peso de la viga (núm. 486), ó, lo que es lo mismo, con objeto de que la resistencia sea grande. Puesto que el espesor del alma es pequeño con relación á las dimensiones restantes, y el esfuerzo cortante obra enérgicamente allí (núm. 472), deberá tenerse en cuenta para el cálculo de esta parte de la viga.

Esto es lo que se hace; y en la práctica se calculan las dimensiones del alma atendiendo tan sólo al esfuerzo cortante, y las de las cabezas (tablas y escuadras) como si solamente ellas hubiesen de resistir al momento de flexión, según ya indicamos en el núm. 493.

Por lo que respecta al esfuerzo cortante, ya hemos visto en el núm. 472 que no se distribuye de modo uniforme en toda la sección transversal, sino que ejerce su máxima acción en su centro de gravedad, y es cero en las extremidades ó cabezas de la viga (fig. 17, lám. 13). Cuanto á las extensiones y compresiones producidas por la flexión, su intensidad mayor corresponde á las fibras más alejadas de la capa neutra, y el mínimo á ésta (núm. 458, figs. 13 y 15, lám. 13).

Combinemos los dos efectos (fig. 1.^a, lám. 23), y para ello consideremos las deformaciones correspondientes. Sea *AB* una sección transversal del prisma antes de la flexión; obedeciendo al momento de flexión, *AB* girará alrededor de *O*, centro de gravedad, y vendrá á parar á *A'B'*, y por el esfuerzo cortante se moverá paralelamente á sí misma, y ocupará, finalmente, la posición

A''B''. Observaremos que esta segunda deformación es casi inapreciable.

Si componemos las dos clases de deformación para las fibras *A*, *a*, *a'*, etc., y tenemos en cuenta que los triángulos rectángulos *AA'A''*, *abc*, etc., tienen iguales los catetos *A'A''*, *bc*, etc., y desiguales los *AA'*, *ab*, etc., veremos:

1.º *AA''* es próximamente igual á *AA'*, lo cual demuestra que en las fibras más alejadas no modifica el esfuerzo cortante, de modo sensible, los efectos debidos al momento de flexión.

2.º La diferencia entre las hipotenusas *ac*, *a'c'* y los catetos horizontales *ab*, *a'b'*, va aumentando al aproximarse á *O*, es decir, que en las fibras correspondientes el trabajo debido al momento de flexión es modificado por el esfuerzo cortante.

3.º En el punto *O* no hay más deformación que la *OO'*, relativa al esfuerzo cortante; de modo que solamente él ejerce acción en este punto. Se deduce de cuanto queda dicho que la resistencia al momento de flexión reside principalmente en las cabezas de la viga, y la correspondiente al esfuerzo cortante en el alma, la cual tiene además la misión de reunir las dos cabezas y hacerlas solidarias para que no se flexen independientemente. Hay, pues, fundamento teórico en el procedimiento de cálculo que dijimos íbamos á emplear.

Es, sin embargo, un *método aproximado* que tiene algo de *convencional*; en el alma, las fibras más alejadas se deforman también por el par de flexión, y el esfuerzo cortante, que ejerce una pequeña influencia en las deformaciones de las cabezas, no se distribuye uniformemente en el alma, y no es, por tanto, la deformación simple que hemos estudiado en el núm. 200.

547. **Cálculo de las cabezas.**—Haremos uso de la conocida fórmula $\frac{RI}{v} = M_0$; pero aquí el momento de inercia *I* se refiere solamente, por lo que acabamos de decir, á las escuadras y tablas que componen las cabezas ó cordones de la viga (véase la parte rayada de la fig. 11, lám. 22). Después de todo, ya indicamos en el núm. 487 que en el valor de *I* contribuye el alma con pequeña cantidad, siendo las escuadras, y principalmente las tablas, las que dan sumandos más considerables.

El procedimiento para la resolución del primer problema es exactamente el mismo que hemos explicado en los núms. 523 y 524 para las vigas compuestas, de pequeña altura; y allí conducimos al lector.

Se formará una sección de 4 escuadras y un cierto número de tablas, cuyo valor de $\frac{I}{v} = B$ sea igual ó mayor que el cociente $\frac{M_0}{R}$; el verdadero valor de *R*, coeficiente de trabajo, se obtendrá dividiendo *M*₀ por *B*.

Algunos ingenieros tienen en cuenta los orificios abiertos en las cabezas para el paso de los roblones, descontando el área correspondiente al determinar $\frac{I}{v}$; pero es más general no hacer esta deducción y considerar la sección de las cabezas como llena.

También son de grande utilidad, en la resolución de este problema, las tablas de momentos de inercia 4 á 7 del núm. 489.

Ejemplo. Viga doble T de palastro, de 8 metros de longitud, apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente á razón de $p = 4000$ kilogramos por unidad de longitud. Se desea que la viga tenga 1 metro de altura y que el coeficiente de trabajo sea próximamente de $R = R' = 7 \times 10^6$ kilogramos por metro cuadrado, ó sea de 7 kilogramos por milímetro cuadrado.

El momento máximo de flexión, tomando las longitudes en metros, es

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 4000 \times 8^2 = 32000 \text{ kilográmetros.}$$

De modo que $\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R} = \frac{32000}{7 \times 10^6} = 0,004571$; y entonces, puesto

que la semialtura v de la viga es $0^m,50$, el momento de inercia I deberá tener por valor, aproximadamente,

$$I = 0,50 \times 0,004571 = 0,002285.$$

Compondremos la sección, y su aumento de inercia I , del modo siguiente (tablas 5 y 7, núm. 489):

Una tabla sencilla de 10 milímetros de espesor y 300 milímetros de ancho:

Momento de inercia correspondiente á un milímetro	= 0,000150.
Idem correspondiente á 10 milímetros	0,000150 \times 10
Cuatro escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$.	0,001500
Momento de inercia.....	0,000846

$$I = 0,002346 (*)$$

(*) Si se quisiese tener en cuenta la disminución de perfil por los orificios de los roblones (fig. 5^a, lám. 23), habría que restar del momento de inercia I el correspondiente á los taladros a y b (parte blanca de la figura), es decir, $\frac{1}{2} \omega h^2 + \frac{1}{2} \omega' h'^2$, siendo ω el área de $2 a$ y ω' la de $2 b$.

Este valor es poco diferente del que necesitamos.

El coeficiente de trabajo definitivo es

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = 32000 : \frac{0,002346}{0,50} = 6,82 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2$$

$$R = 6,82 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

548. Método abreviado para el cálculo de las cabezas.—Llamemos ω al área de la sección transversal de una de las cabezas, esto es, de dos escuadras y de la tabla ó tablas correspondientes. Si suponemos que la superficie de las escuadras se suma á la de las tablas, constituyendo un sólo rectángulo de área ω , el momento de inercia I tendrá por expresión (17 de la tabla del núm. 477, fig. 20, lám. 14) $I = \frac{1}{2} \omega h^2$, siendo h la altura de la viga. Esta hipótesis es tanto menos errónea cuanto mayor sea h , es decir, que el verdadero valor de I correspondiente á los escuadras y tablas (fig. 19, lám. 22), se aproximará á $\frac{1}{2} \omega h^2$ tanto más cuanto más alta sea la viga.

Aceptando el valor de I precedente, tendremos, teniendo en cuenta que la semialtura $v = \frac{1}{2} h$,

$$\frac{RI}{v} = R \omega h = M_0 \quad (1),$$

de donde

$$\omega = \frac{M_0}{Rh} \quad (2);$$

fórmula que nos da ω , área de la sección transversal de una cabeza de la viga; solamente faltará formar estas cabezas con hierros cuya sección transversal tenga por superficie la cantidad ω .

En el ejemplo del número anterior sería:

Para $R = 7 \times 10^6$ kilogramos

por m.² (7 kilogs. por mm.²). $\omega = \frac{32000}{7 \times 10^6 \times 1} = 0,004571.$

Para $R = 6,82 \times 10^6$ kilogramos

por m.² (6,82 kilogs. por mm.²). $\omega = \frac{32000}{6,82 \times 10^6 \times 1} = 0,004691.$

Fijándonos en este último valor, que es el definitivo de R en el problema, vemos que ha de ser $\omega = 4691 \text{ mm.}^2$; ahora bien, la solución que hallamos por el método anterior, exacto, da:

Dos escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ á 896 mm. ² .	1792 mm. ²
Tabla de 300×10	3000 »
	$\omega = 4792 \text{ mm.}^2$

El error cometido, haciendo uso del método abreviado, es solamente de $4792 - 4691 = 101 \text{ mm.}^2$, cantidad despreciable; esto á pesar de que la altura de la viga ($h = 1^m$) no es grande.

549. Otros razonamientos pueden conducir también á la sencilla ecuación (1) del número anterior. Sabido es que la flexión se traduce en compresiones para las fibras de una de las cabezas y extensiones para la otra (número 304); fuerzas que hemos representado por las letras F y F' en el núm. 305. Aquí $F = F'$, por ser la viga simétrica con respecto al eje HH' (fig. 19, lám. 22).

Siendo $A'B'$ la posición de la sección AB después de la flexión, las resultantes F de compresión y extensión pasarán por los puntos m y n , centros de gravedad de los trapecios $ACC'A'$, $BDD'B'$; de modo que el momento del par F, F' , que es igual al del par de flexión, puesto que se engendra por éste, tendrá por valor $F \times ab$, expresión en la que ab es la distancia entre los centros de tensión y de compresión a y b .

Cuando la viga es de grande altura puede tomarse como valor de ab la altura h de la sección, sin error sensible, y entonces tendremos:

$$F h = M_0 \quad (3).$$

$$F = \frac{M_0}{h} \quad (4).$$

Conocida la fuerza F de extensión ó compresión, será conocida ω , área de la sección transversal de una cabeza, por la fórmula $F = R \omega$, ó, sustituyendo F en las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones (1) y (2). La (4) da á conocer la fuerza F .

550. Modo de calcular el alma de la viga.—Como la viga es de sección constante, tendremos en cuenta el máximo valor que el esfuerzo cortante

alcanza (C_0), y por él se calculará el espesor e del alma, empleando la fórmula

$$C_0 = R'' e h \quad (5).$$

en que h es la altura y R'' el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante.

Al aplicar la fórmula (5) debe tenerse cuidado de asignar á R'' un valor pequeño, menor que el $0,80 R$ que se ha aceptado en los problemas de resistencia al esfuerzo cortante. Generalmente se hace R'' (igual á $0,50 R$), es decir, de 3 á 4 kilogramos por milímetro cuadrado.

Fúndase esta determinación en que los espesores que resultan al alma si se hace $R'' = 5$ á 6 kilogramos por mm.^2 ($R'' = 0,80 R$) son inadmisibles en la práctica por su pequeñez, como vamos á demostrar á continuación.

Sean:

$l =$ longitud de la viga.

$h =$ altura.

$a =$ ancho de las tablas.

$e' =$ espesor.

$e =$ espesor del alma.

$P =$ carga total uniformemente repartida sobre la viga.

Supongamos, para fijar las ideas, que la viga está apoyada en los dos extremos, en cuyo caso, que es el más general, $M_0 = \frac{1}{8} P l$. Aplicando la

fórmula (2) anterior, tendríamos, para espesor de las tablas $e' = \frac{P l}{8 R h a}$;

y para espesor del alma (fórmula 5), teniendo en cuenta que $C_0 = \frac{1}{2} P$

para este caso, $e = \frac{P}{2 R'' h}$.

$$\text{Resulta } \frac{e}{e'} = \frac{4 a R}{l R''}.$$

Para $R'' = 0,8 R$, sería $e = \frac{5 a}{l} e'$ y como $\frac{a}{l}$ es en la práctica, como término medio, $\frac{1}{50} l$, resulta $e = \frac{1}{10} e'$. El espesor e' es, para las mayores longitudes de vigas (cuchillos de los puentes), de 4 á 6 centímetros á lo

sumo; se deduce que e valdrá como máximo de 4 á 5 milímetros, y, en general, mucho menos, si se acepta $R'' = 0,8 R$, y este espesor es pequeño.

En efecto; el esfuerzo cortante hace que el alma de la viga trabaje, en cierto modo, como una pieza comprimida en sentido de las cargas, y si es muy alta y de pequeño espesor, podrá faltarle rigidez trasversal, aunque su área ω sea bastante para resistir el esfuerzo cortante simple, y habrá peligro de que se alabee á semejanza de lo que sucede con las piezas comprimidas de gran longitud, en las cuales es de temer la flexión lateral, como veremos más adelante.

Esta falta de rigidez del alma en las vigas altas, no se sabe expresar algebráicamente, por ser resultado de causas muy complejas é imperfectamente conocidas, y por esta razón se emplean medios arbitrarios para evitarla, cuales son el aumento de espesores y el empleo de montantes verticales rígidos.

El aumento de espesor e equivale al empleo de coeficientes R'' de pequeño valor en la ecuación (5).

Si el alma de la viga estuviese calada (fig. 9.^a, lám. 23), se calculará como las almas llenas, pero tomando por altura $h = a b + c d$.

Los montantes verticales que se cosen al alma de la viga, de uno y otro lado, son generalmente hierros en escuadra, T sencilla ó doble, U , etc. Deben ponerse, cuando se trata de cargas estáticas, en los puntos de aplicación de las fuerzas, si son aisladas, y espaciados igualmente si están repartidas, y se calcula su escuadría como si estuviesen aislados, sometidos á compresión por las fuerzas que sobre ellos insisten.

Ejemplo. En el ejemplo del núm. 547 el esfuerzo cortante máximo es

$$C_0 = \frac{1}{2} p l = \frac{1}{2} \times 4000 \times 8 = 16000 \text{ kilogramos.}$$

Haciendo $R'' = 3 \times 10^6$ kilogramos por m.² (3 kilogramos por mm.²) se deduce de la ecuación (5), puesto que $h = 1$ metro.

$$16000 = 3 \times 10^6 \times 1 \times e. \quad e = 0^m,00533,$$

valor aceptable. Si se hubiese hecho $R'' = 6$ kilogramos por mm.², resultaría $e = 0^m,0026$, espesor inadmisibile. Para mayores alturas de viga, se hace todavía más sensible esta diferencia.

551. Modo de tener en cuenta el peso propio de la viga.— En el cálculo de las grandes vigas no se puede prescindir de su peso propio, que es de consideración; se podrá seguir el método explicado en el núm. 510, empleando

la expresión $M_0 = \frac{1}{n} P' l + \frac{1}{8} p' l^2$, en que p' representa el peso de la viga por metro lineal.

Pero para disminuir el número de tanteos se determinará *à priori* el valor de p' con bastante aproximación, del siguiente modo: el volumen de las dos tablas, por metro lineal de viga, teniendo presente que la sección es constante, vale (fórmula 2 del núm. 548):

$$1 \times 2 \omega = \frac{2 M_0}{R h};$$

y el del alma, deducido de la fórmula 5 del núm. 550,

$$1 \times e h = \frac{C_0}{R''},$$

de modo que el volumen del metro de longitud de viga es $\frac{2 M_0}{R h} + \frac{C_0}{R''}$, cuya suma se multiplica por $1 + K$ para tener en cuenta los cubrejuntas de los empalmes y las cabezas de roblón. Llamando t al peso del metro cúbico de metal, se obtiene:

$$p' = t \left(\frac{2 M_0}{R h} + \frac{C_0}{R''} \right) (1 + K) \quad (6),$$

expresión fácil de formar. K se hace igual á 0,30, generalmente.

Este valor de p' difiere poco del verdadero y se toma casi siempre como definitivo.

El peso p' correspondiente á la parte comprendida entre los apoyos, es el que interesa para el cálculo; pero si se quisiese obtener el peso total, se sumaría á $p' l$ el peso de las extremidades de la viga; el volumen de cada extremo es $\omega h = \frac{Q}{R'} h$ (véase el núm. 553); y el peso de los dos, $\frac{2 Q h t}{R'}$, de modo que el peso total P' , de una viga de longitud l entre apoyos, sería:

$$P' = \frac{2 Q h t}{R'} + t \left(\frac{2 M_0}{R h} + \frac{C_0}{R''} \right) (1 + K) \quad (7).$$

552. Resolución de los problemas segundo y tercero. Cálculo de la flecha.— Se empleará el procedimiento explicado en el núm. 532; y por lo

que respecta á las deformaciones, se determinarán las flechas y las curvas elásticas por las fórmulas que contiene la tabla del núm. 404, ó por los procedimientos gráficos explicados en los núms. 445 y 446.

553. Cálculo de los extremos de la viga. — Los extremos de la viga se terminan como representa la fig. 17 ó la 16 (lám. 22), ya sea el alma llena ó de celosía. En la fig. 17, las escuadras y tabla contornean el extremo, verticalmente: la parte que descansa sobre el apoyo tiene por sección resistente á la compresión la causada por el plano AB , que aparece en S ; esto es, la tabla y escuadras verticales y el trozo de alma llena que descansa sobre el platillo superior de los rodillos. Si esto no fuera suficiente, se añaden montantes verticales, como los de la fig. 16.

La disposición de la fig. 16 se aplica solamente á las grandes vigas de los puentes. Con objeto de aumentar el área de la parte que insiste sobre el apoyo, y está expuesta al aplastamiento, se añade el trozo de viga de alma llena M ; de modo que la sección resistente á la compresión (sección por AB) es la representada en N .

La fuerza de compresión no es otra cosa que la reacción del apoyo Q , que para las cargas colocadas simétricamente vale $Q = \frac{1}{2} P$, siendo P la carga total.

La ecuación de resistencia es

$$Q = R' \omega,$$

siendo ω el área N de la fig. 16 y S de la fig. 17, y R' el coeficiente de trabajo por compresión. Se da á R' pequeño valor, 3 á 4 kilogramos por mm.².

Si se adoptase la disposición que aparece en la fig. 20, sería ω el área de la sección transversal de los elementos de viga colocados verticalmente encima del eje A .

554. Cálculo de las roblonaduras. — Las grandes vigas de palastro de alma llena, no solamente se componen de elementos variados, tales como escuadras, tablas y alma, sino que cada uno de ellos, no pudiendo ser de una sola pieza, está formado de trozos empalmados por medio de cubrejuntas. Así se ve en las figs. 9.^a, 13, 14 y 15 (lám. 22):

H	junta vertical del alma....	} fig. 9. ^a Cubrejuntas planos.
T	junta horizontal del alma..	
A	junta de una escuadra....	fig. 15. Cubrejuntas angular.
B	junta de una tabla.....	fig. 14. Cubrejuntas plano.

Los cubrejuntas, tablas, almas y escuadras, están unidos por medio de roblones. Si la viga compuesta de estos elementos ha de resistir como si fuese una viga laminada, de una sola pieza, es necesario que las roblonaduras resistan al esfuerzo rasante ó de desgarramiento longitudinal (núms. 463 á 471), que es el que en las vigas compuestas tiende á desunir los elementos citados.

La fuerza de desgarramiento por unidad de longitud de viga, tiene la forma general

$$Su = \frac{C}{I} \omega h,$$

según hemos visto en la fórmula (4) del núm. 465. Esta fuerza, que llamaremos T , es variable de un punto á otro de la viga, en longitud, porque variable es también el esfuerzo cortante C ; para abreviar, se acostumbra en la práctica á suponer C constante, é igual á su máximo valor.

El cálculo de las roblonaduras se hace del siguiente modo:

1.^o *Unión de las tablas á las escuadras.* — Las tablas se unen á las escuadras por medio de dos filas de roblones, una por cada escuadra (fig. 10; lámina 22); cada roblón presenta una sección resistente al esfuerzo cortante en el plano AB de separación.

Emplearemos la expresión $T = \frac{C}{I} \omega h$, prescindiendo del signo, y da-

remos á h el valor $\frac{b}{2}$, semialtura de la viga, con lo cual se comete un pequeño error, pero no habrá necesidad de apelar á las fórmulas del número 471, que son más complicadas. Recordaremos que ω es el área de la parte de sección comprendida entre las fibras más alejadas de la capa neutra y el plano en que se mide el esfuerzo de desgarramiento, y h es la distancia á la capa neutra del centro de gravedad de dicha área (núm. 465). En el caso presente, ω es el área de la parte rayada.

Llamando $2n$ al número total de roblones que han de colocarse por unidad lineal de viga, d á su diámetro y k al coeficiente de trabajo por adherencia ó por esfuerzo cortante correspondiente á cada unidad superficial de sección de roblón (núm. 262), deberá ser:

$$T = \frac{C}{I} \omega h \leq 2n \frac{\pi d^2}{4} k \quad (1),$$

de cuya ecuación deduciremos n si se conoce d , ó inversamente.

2.º *Unión de las escuadras al alma* (fig. 11, lám. 22). — Si es n' el número de roblones por unidad de longitud y d' su diámetro, como cada roblón presenta dos secciones resistentes, será:

$$\frac{C}{I} (\omega h + \omega' h') \leq 2 n' \frac{\pi d'^2}{4} k \quad (2),$$

llamando ω' al área de las dos escuadras, y h' á la distancia de su centro de gravedad á la capa neutra.

Si se comparan las ecuaciones (1) y (2), se observa que n' debe ser mayor que n , ó d' mayor que d . En la práctica se coloca igual número de roblones y de igual diámetro, en la unión de las escuadras y alma, y en la de cada escuadra con las tablas; n y d se harán, por tanto, iguales á los valores que se asignen á n' y d' .

3.º *Unión de los trozos de alma en sentido longitudinal* (fig. 12, lám. 22). — Llamando ω'' al área del trozo de alma (parte rayada) y h'' á su brazo de palanca, tendremos:

$$\frac{C}{I} (\omega h + \omega' h' + \omega'' h'') \leq 2 n'' \frac{\pi d''^2}{4} k \quad (3).$$

El máximo de n'' , número total de roblones, corresponde al caso en que el plano AB de separación es la misma capa neutra HH' , entonces

$$h'' = \frac{1}{2} h.$$

4.º *Unión de los trozos de alma en sentido vertical* (fig. 13, lám. 22). — Si llamamos n_1 al número de roblones que se colocan de cada lado de la junta, y d_1 su diámetro, se hará, puesto que cada uno ofrece dos secciones resistentes al esfuerzo cortante,

$$2 n_1 \frac{\pi d_1^2}{4} k \geq C \quad (4).$$

5.º *Empalmes de las tablas* (fig. 14, lám. 22). — Se hacen escalonados y se coloca un simple cubrejunta; estamos en el caso de la fig. 7.ª (lám. 17), tratado en el núm. 264, y se podrá resolver de igual modo, previo el conocimiento de la fuerza T que actúa á lo largo de las tablas.

Si llamamos ω al área de la sección transversal de una de las tablas y R al coeficiente de trabajo adoptado para su cálculo, la fuerza T tendrá por valor (no habiendo descontado los orificios para el paso de los roblones) $R\omega$; de modo que será:

$$n_2 \frac{\pi d_2^2}{4} k = T = R\omega,$$

siendo n_2 el número de roblones de diámetro d_2 que se colocan en cada escalón.

En todas las fórmulas anteriores se puede hacer k igual á 4 kilogramos por mm.², ó sea 4 000 000 kilogramos por metro cuadrado.

555. **Vigas de celosía, de hierro. Cargas estáticas y sección constante.** — Las cabezas ó cordones de las vigas y la celosía pueden disponerse de uno de los siguientes modos:

1.º (Fig. 18, lám. 22). Dos escuadras, acompañadas de una ó más tablas, ó de ninguna; las escuadras sirven de cepos á las barras de la celosía. Se aplica á las vigas de pequeña altura.

2.º La misma disposición en las cabezas, pero estando en contacto las ramas verticales de las escuadras, y colocando las barras de la celosía al exterior; en este caso hay necesidad de interponer, en los puntos de cruce de las barras, pequeños trozos de hierro, ó *gruesos*, de espesor igual al de las dos ramas verticales de las escuadras. Como en la disposición anterior, se ponen roblones en todos los puntos de cruce de las barras y en la unión de éstas con las escuadras.

3.º (Fig. 16, lám. 22). Cada cabeza está formada de dos escuadras, un pedazo de nervio ó de alma llena y una ó más tablas. Las barras de la celosía se cosen al nervio con uno ó más roblones, y entre sí en los puntos de cruzamiento, interponiendo suplementos de espesor igual al de dicho nervio ó trozo de alma llena. Esta disposición es propia de las grandes vigas para cuchillos de puentes.

Cuanto á la celosía, puede ser de mallas estrechas, numerosas, ó de anchas mallas. En el primer caso todas las barras son de hierro plano, de sección rectangular, y en el segundo se adoptan los hierros T sencilla, escuadra ó U , ya para todas las barras, ya solamente para las que están sometidas á compresión.

En la fig. 2.ª (lám. 23) están señaladas con trazo grueso las barras comprimidas, y con raya delgada las extendidas; á partir de la sección media NS , las primeras son las que se dirigen á los apoyos y las segundas las que están

inclinadas hacia el medio de la viga. Si C es el esfuerzo cortante en la sección AB , y suponemos que hay n puntos de cruzamiento en la vertical AB , y que aquél se reparte uniformemente, de modo que á cada punto a correspondía un esfuerzo cortante $\frac{C}{n}$ (fig. 3.^a, lám. 23), se puede calcular fácilmente, por procedimiento gráfico, la naturaleza é intensidad de las fuerzas que actúan á lo largo de las barras d y f ; para ello se elegirá un punto de origen O , se dibujará con arreglo á escala Ob igual á $\frac{C}{n}$, y por los puntos b y O se trazarán be , Oe , paralelas á d y f , con lo cual tendremos el triángulo de fuerzas Obe , que debe ser recorrido en el sentido que señalan las flechas, á partir de O . Trasladadas estas direcciones á d y f , se deduce que la fuerza eb , dirigida al punto fijo a , es de compresión (barra d), y de extensión la Oe (barra f).

Del mismo modo se demostraría, en la sección DE (fig. 2.^a), que la fuerza C' produce compresiones en las barras señaladas con línea gruesa, y extensiones en las demás.

556. Cálculo de las cabezas de las vigas.—Se hace exactamente lo mismo que para las de alma llena, pudiendo seguirse el procedimiento exacto (núm. 547) ó el abreviado (núm. 548). Recordaremos que cuando existe nervio a (fig. 16, lám. 22), éste forma parte de la cabeza para los efectos del cálculo.

Como existe tanta indeterminación en el problema, es conveniente conocer las proporciones que en la práctica es frecuente asignar á los elementos que constituyen la viga, para tenerlas presente en los tanteos.

ALTURA h en metros.	ANCHO de las tablas. "	ESPESOR del alma e en milímetros.	LADO de las escuadras en milímetros.
Menor que 1 m.	$\frac{h}{3}$ á $\frac{h}{2}$	5 á 8	50 á 70
1 á 2.....	$\frac{h}{4}$ á $\frac{h}{2}$	10 á 12	70 á 120
2 á 4.....	$\frac{h}{4}$ á $\frac{h}{3}$	12 á 15	120 á 150
Mayor que 4.....	$\frac{h}{5}$ á $\frac{h}{6}$	15 á 18	120 á 150

Las escuadras reciben el mismo espesor que el alma, y sus lados deben cumplir, además, con la condición de poder recibir el número de roblones necesario para el cosido con el alma y las tablas.

La altura h se hace de $\frac{1}{8} l$ á $\frac{1}{12} l$, siendo l la longitud de la viga.

557. Cálculo de las barras de la celosía.—Aunque el esfuerzo cortante tiene valor variable para el caso de viga apoyada en sus extremos y cargada uniformemente (ordenadas de la recta FL , fig. 2.^a, lám. 23) admitiremos el máximo valor C_0 para el cálculo de la celosía.

Sea α el ángulo que forman las barras con la vertical (fig. 3.^a), $F = eb$ la fuerza de compresión de la barra d , y $F' = Oe$ la de extensión de la f .

Los triángulos ebt y Oet , dan:

$$F = F' = \frac{C_0}{2n \cos \alpha} \quad (1).$$

El área ω de la sección transversal de las barras, para un coeficiente de trabajo $R = R'$, será:

$$F = R\omega, \quad \omega = \frac{C_0}{2n R \cos \alpha} \quad (2);$$

ω es la sección resistente, de modo que habrá que descontar el orificio ú orificios abiertos en la barra para el paso de los roblones que hacen el cosido en el punto de cruzamiento; n es el menor número de veces que las barras se encuentran en una misma vertical.

Cuanto á los roblones correspondientes á cada cruce de barras y á su unión con las cabezas, si llamamos n' á su número y d á su diámetro, deberá verificarse:

$$n' \frac{\pi d^2}{4} k = \frac{1}{n} C_0 \quad (3),$$

teniendo k el valor que hemos consignado en el núm. 554, es decir, 4 kilogramos por mm.²

Cuando n' es mayor que 1, se tiene cuidado de colocar los roblones de modo que á cada sección transversal de la barra no corresponda más que un orificio. Llamando c el ancho de la barra y e su espesor, en el caso de emplear hierros planos de sección rectangular, la fórmula (2) anterior se convierte en

$$(c - d) e = \frac{C_0}{2n R \cos \alpha} \quad (4).$$

Las figs. 4.^a y 5.^a de la lám. 24, representan vigas de celosía de pequeña altura, en las cuales habría que hacer $2n = 1$ al calcular las barras por la fórmula 2, porque un plano vertical AB no encuentra más que una barra. Si las barras se cruzasen una vez, como en C (fig. 4.^a, lám. 24), se haría $n = 1$.

558. Esta fórmula, que da la escuadría de todas las barras, comprimidas ó extendidas, suponiéndolas formadas de hierros planos, es aplicable solamente, por lo que respecta á las primeras, al caso de celosía de malla estrecha, porque entonces se supone que las barras pueden resistir al esfuerzo de compresión entre dos puntos de cruzamiento contiguos, considerados como puntos fijos, sin el temor de la flexión lateral que se puede producir en piezas largas comprimidas de débil escuadría (núm. 674) (*).

Si las mallas son grandes, ó, lo que es lo mismo, si es grande la distancia entre dos puntos de cruzamiento consecutivos, hay necesidad de evitar la flexión lateral de las piezas comprimidas, que entonces se hacen de forma de T sencilla, U ó escuadra, y se calculará su escuadría, una vez conocida la fuerza de compresión F por la fórmula (1), valiéndose de las fórmulas (7) del núm. 730. Así se haría, por ejemplo, para la viga representada en la fig. 4.^a (lám. 23); las piezas comprimidas A son hierros en escuadra, y las extendidas B hierros planos. Para el cálculo de las piezas A se considerará como longitud libre la distancia bc si se han colocado roblones en el cruce, ó la total ab cuando éstos no existan (núm. 685).

559. Inclinación de las barras. Ángulo más conveniente.—Consideremos (fig. 3.^a, lám. 23) una parte de longitud de viga, rb , igual á la unidad. La longitud de barra, correspondiente, es $eb = \frac{rb}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$ llamando α al ángulo que forman las barras con la vertical; el volumen, teniendo la sección transversal el área ω expresada por la fórmula (2) del núm. 557, será:

$$\frac{C_0}{2nR \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2C_0}{2nR \sin 2\alpha}$$

El volumen de las $2n$ barras que constituyen el alma de la viga, será, por metro de longitud de ésta,

$$V = \frac{2C_0}{R \sin 2\alpha}$$

(*) Aun en este caso suele suceder, en las grandes vigas, que las barras planas comprimidas se flexan, y la deformación se propaga más allá de los puntos de cruzamiento y enlace con las barras extendidas. Es preferible hacer más anchas las mallas y emplear hierros más rígidos, de escuadra, T sencilla, etc.

El mínimo de V y del peso, corresponde al máximo del denominador, es decir, á $\alpha = 45^\circ$, en cuyo caso $V = \frac{2C_0}{R}$ (5). Para la economía de metal conviene, pues, que las barras estén inclinadas á 45° , y es lo que se hace generalmente.

560. Comparación de una viga de celosía, de mallas estrechas, y de una viga de alma llena, ambas de sección constante.—El volumen del alma llena por metro de longitud, en una viga de esta clase, es (fórmula 5 del número 550):

$$V' = eh \times 1 = \frac{C_0}{R''} \quad (6)$$

Si comparamos las expresiones (5) y (6) parece ser $V > V'$, y podría llegar á ser $V = 2V'$ si hiciésemos $R'' = R$, en cuyo caso la celosía tiene doble volumen de metal que el alma llena. Pero como para evitar el alabeo se hace $R'' = 0,50R$ (núm. 550), resulta $V = V'$.

561. Peso propio de la viga.—Se tendrá en cuenta, empleando el procedimiento y fórmulas del núm. 551, puesto que, según acabamos de ver, el volumen de la celosía es igual al del alma llena, siempre por supuesto que en el cálculo de ésta se acepte $R'' = \frac{1}{2}R$, y este valor se dará á R'' en la fórmula que determina el peso p' por metro lineal.

562. Ejemplo.—Viga de celosía, de palastro, de la forma que representa la fig. 18, (lám. 22).

Datos:

Coficiente de trabajo = $R = 6 \times 10^6$ kilogramos por m.² (6 kilogramos por mm.²).

Longitud = $l = 8$ metros.

Altura = $h = 1$ metro.

Barras de las celosías inclinadas á 45° ; tres cruzamientos en una vertical ($n = 3$).

Carga por metro lineal = $p = 2000$ kilogramos.

Peso del metro cúbico de hierro = 7800 kilogramos.

Los valores de M_0 y C_0 , correspondientes á $p = 1000$ kilogramos, son:

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 2000 \times 8^2 = 16000 \text{ kilográmetros.}$$

$$C_0 = \frac{1}{2} p l = \frac{1}{2} \times 2000 \times 8 = 8000 \text{ kilogramos.}$$

Calcularemos el peso p' de la viga por la fórmula del núm. 551, tomando las dimensiones en metros y recordando que para esta fórmula debe ser $R'' = \frac{1}{2} R$,

$$p' = t \left(\frac{2 M_0}{R h} + \frac{C_0}{R''} \right) (1 + 0,30)$$

$$p' = 7800 \left(\frac{2 \times 16000}{6 \times 10^6 \times 1} + \frac{8000}{3 \times 10^6} \right) (1 + 0,30) = 81,12 \text{ kilogramos.}$$

Haremos $p' = 85$ kilogramos para evitar el empleo de números fraccionarios.

Los verdaderos valores del momento de flexión máximo y del máximo esfuerzo cortante, tomando en consideración la sobrecarga P y el peso propio p' de la viga, son:

$$M'_0 = M_0 + \frac{1}{8} p' l^2 = 16000 + 680 = 16680 \text{ kilográmetros.}$$

$$C'_0 = C_0 + \frac{1}{2} p' l = 8000 + 340 = 8340 \text{ kilogramos.}$$

Cálculo de las cabezas. — Debe verificarse

$$\frac{I}{v} = \frac{16680}{6 \times 10^6} = 0,00278;$$

y como $v = \frac{1}{2} h = 0^m,50$,

$$I = 0,00139.$$

Veamos el modo de componer las cabezas de la viga para que su momento de inercia tenga, aproximadamente, el precedente valor:

	$I =$
	en metros.
1 tabla de palastro de 200 milímetros de ancho y 5 milímetros de grueso, para $h = 1^m$ (tabla núm. 5 del núm. 489)	0,000 500
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$, para $h = 1^m$ (tabla núm. 7 del núm. 485)	0,000 846
	<hr/> I = 0,001 346

A este valor corresponde uno de $\frac{I}{v} = 0,002 692$.

El coeficiente definitivo de trabajo será:

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{16680}{0,002692} = 6,19 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2$$

$$R = 6,19 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

563. El método abreviado conduce á resultados próximamente iguales. Aplicando la fórmula (2) del núm. 548, tendríamos, para área de la sección transversal de cada una de las cabezas de la viga,

$$\omega = \frac{M'_0}{R h} = \frac{16680}{6 \times 10^6 \times 1} = 0,00278 \text{ m.}^2$$

$$\omega = 2780 \text{ mm.}^2$$

Formaríamos cada una de las cabezas de viga con hierros que dieran esta sección.

El área de la sección obtenida por el cálculo exacto es:

1 tabla de 200×5	1000 mm. ²
2 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$	1792 "
	<hr/> Total = 2792 mm. ²

valor que solamente se diferencia del encontrado por el método aproximado, en $2792 - 2780 = 12 \text{ mm.}^2$

564. Cálculo del alma. — Por la fórmula (2) del núm. 557, tenemos:

$$\omega = \frac{C'_0}{2 n R \cos \alpha} = \frac{8340}{2 \times 3 \times 6 \times 10^6 \times \cos 45^\circ} = 0,000 326 \text{ m.}^2$$

$$\omega = 326 \text{ mm.}^2$$

Si no se toma en cuenta el taladrado de las barras para el roblonado en el cruce, se podrían aceptar hierros planos de 65 milímetros de ancho y 5

milímetros de grueso, que tienen 325 milímetros de sección. Atendiendo á la debilidad que á las barras resulta por los orificios de los roblones, se determinaría primeramente el número y diámetro de éstos por la fórmula (3) del núm. 557, que da, tomando las dimensiones en milímetros,

$$n' \frac{\pi d^2}{4} \times k = \frac{8340}{3}$$

ó, haciendo $k = 4$,

$$n' \frac{\pi d^2}{4} = 695 \text{ mm.}^2$$

Puede hacerse $n' = 2$ y $d = 20$ milímetros, es decir, que se han de poner 2 roblones de 20 milímetros en cada cruce de barras. El área resistente de los dos roblones es 628 mm.², cantidad algo menor que 695; sustituyendo el núm. 628 en la primera ecuación, resulta $k = 4,45$, valor aceptable.

El ancho del hierro plano habrá de ser aumentado en 20 milímetros, y resulta ser $c = 65 + 20 = 85$ milímetros. Claro es que se pueden asignar otros valores á c y al espesor e de las barras, con tal de que el área resistente de la sección transversal sea igual á 326 mm.²

Cuando las barras no dejen espacio para colocar todos los roblones necesarios, se colocan pequeñas planchas suplementarias (fig. 6.^a, lám. 23).

Veamos de calcular el verdadero peso p' de la viga por metro lineal:

	p' en kilogramos.
Cabezas de la viga . . .	2 tablas de 200 milímetros de ancho y 5 milímetros de grueso (tabla núm. 5 del núm. 489), $3,12 \times 5$. 15,60
	4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ (tabla núm. 7 del número 489)..... 27,95
Celosía . . .	Volumen $V = \frac{2 C' a}{R}$ (fórmula 5 del núm. 559); el peso correspondiente será $7800 \times \frac{2 \times 8340}{6 \times 10^6} =$ 21,68
	Suma..... 65,23

y multiplicando por el factor 1,30 para tener en cuenta el peso de las cabezas de roblón y cubrejuntas (núm. 551), resulta:

$$p' = 65,23 \times 1,30 = 84,80 \text{ kilogramos,}$$

valor muy aproximado al que admitimos para el cálculo (85 kilogramos).

565. La flecha de curvatura se determinará por la fórmula (tabla del núm. 404):

$$f = - \frac{5}{384} \frac{p l^4}{EI} = - \frac{5}{384} \times \frac{2085 \times 8^4}{18 \times 10^9 \times 0,001346}$$

que es la correspondiente al caso de flexión que consideramos. El peso p es la suma de la sobrecarga 2000 kilogramos por metro lineal, y el peso propio de la viga, $p' = 85$ kilogramos.

El valor de I es el del momento de inercia de las cabezas de la viga, igual á 0,001346.

Efectuando las operaciones aritméticas, se halla en valor absoluto:

$$f = 0,0021 \text{ metros.}$$

566. Refuerzos de la celosía.—La celosía se refuerza por medio de montantes verticales, cosidos á las barras, de la forma empleada en las vigas de alma llena para igual objeto.

567. Resolución de los problemas segundo y tercero.—No ofrecen dificultad alguna, y se emplea el procedimiento explicado en el núm. 532.

568. Ejemplo 1.º—Viga de celosía, de la forma representada en la figura 18 de la lám. 22, y cuyos datos son:

Longitud $l = 9$ metros.

Altura $h = 0,8$ metros.

Cabezas compuestas de . . .	Tabla de 300×10 (milímetros). Escuadras de $\frac{70 \times 70}{9}$.
Alma compuesta de	Barras inclinadas á 45°. Dos cruzamientos en una vertical ($n = 2$). Sección resistente de una barra = $\omega = 500$ mm. ²

La viga está apoyada en los dos extremos.

Se desea conocer la carga que podrá resistir para un coeficiente de trabajo

$R = 7$ kilogramos por mm.^2 , ó 7×10^6 kilogramos por m.^2 , suponiéndola uniformemente repartida.

Emplearemos la conocida fórmula

$$\frac{RI}{v} = M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} P l,$$

y para ello formaremos primeramente el valor de $\frac{I}{v}$.

El momento de inercia I correspondiente á las cabezas, es:

1 tabla de 300 milímetros de ancho y 10 milímetros de espesor, para $h = 0^m,800$ (tabla 5 del núm. 489), $0,000\ 096 \times 10 \dots \dots$	0,000 960
4 escuadras de $\frac{70 \times 70}{9}$, para $h = 0^m,800$ (tabla núm. 7 del núm. 489).....	0,000 672
	$I = 0,001\ 632$

Como $v = \frac{1}{2} h = 0^m,400$ resulta $\frac{I}{v} = 0,00408$.

Para $R = 7 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 , tendremos:

$$\frac{RI}{v} = 7 \times 10^6 \times 0,00408 = \frac{1}{8} P l$$

ó

$$28560 = \frac{9}{8} P,$$

de donde

$$P = 25386 \quad \text{''} \quad p = \frac{P}{l} = \frac{1}{9} \times 25386 = 2821 \text{ kilogramos.}$$

Por lo que respecta al alma de la viga, la fórmula (2) del núm. 557

$$C_0 = \frac{1}{2} P = 2 n R \omega \cos \alpha$$

nos da, teniendo en cuenta que $n = 2$, $\omega = 500 \text{ mm.}^2$ y $\alpha = 45^\circ$, y to-

mando como unidad superficial el milímetro cuadrado, por lo cual $R = 7$,

$$P = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 500 \times 0,71 = 19880 \text{ kilogramos.}$$

$$p = \frac{P}{l} = \frac{1}{9} \times 19880 = 2209 \text{ kilogramos.}$$

Resumiendo: para un coeficiente de trabajo $R = 7 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 (7 kilogramos por mm.^2), la carga total P que puede soportar la viga es:

Teniendo en cuenta la resistencia de las cabezas..... 25386

Teniendo en cuenta la resistencia del alma..... 19880

Se tomará el menor de estos valores, esto es, $P = 19880$, para no excederse del límite $R = 7 \times 10^6$. Aceptando este valor de P , el de M_0 es:

$$M_0 = \frac{1}{8} P l = 22365 \text{ kilogramos ms.}$$

y el coeficiente de trabajo de las cabezas de la viga,

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{22365}{0,00408} = 5,48 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2$$

ó

$$R = 5,48 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Si se hubiera tomado para valor de P el de 25386 kilogramos que corresponde á la resistencia de las cabezas de la viga, el metal de las barras de celosía adquiriría un valor de R ,

$$R = \frac{\frac{1}{2} P}{2 n \omega \cos \alpha} = \frac{12693}{2 \times 2 \times 500 \times 0,71} = 8,93 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

569. Ejemplo 2.º—Viga de hierro, de celosía, cuyas dimensiones son:

Longitud $l = 10$ metros.

Altura $h = 1$ metro.

Cabezas compuestas de... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tabla de } 300 \times 8 \text{ (milímetros).} \\ \text{Dos escuadras de } \frac{60 \times 60}{8}. \\ \text{Nervio de } 150 \times 8 \text{ (milímetros).} \\ \text{Barras inclinadas á } 45^\circ. \end{array} \right.$

Alma compuesta de... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tres cruzamientos en una vertical } (n = 3). \\ \text{Sección resistente de una barra } = \omega = 500 \text{ mm.}^2 \end{array} \right.$

Peso de la viga por metro líneal = $p' = 150$ kilogramos.
 Sobrecarga por metro líneal = $p = 3000$ kilogramos.
 La viga está apoyada en sus extremos.
 Se desea conocer el coeficiente de trabajo del metal en las cabezas y en el alma.
 La carga total, $p'' = p + p' = 3150$ kilogramos; de modo que

$$M_o = \frac{1}{8} p'' l^2 = \frac{1}{8} \times 3150 \times 10^2 = 39375 \text{ kilogramos ms.}$$

$$C_o = \frac{1}{2} p'' l = \frac{1}{2} \times 3150 \times 10 = 15750 \text{ kilogramos.}$$

El momento de inercia I correspondiente á las cabezas es, expresado en metros:

1 tabla de 300 milímetros de ancho y 8 milímetros de espesor, para $h = 1^m$ (tabla núm. 5 del núm. 489), $0,00015 \times 8 =$	0,001200
4 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$, para $h = 1^m$ (tabla núm. 7 del núm. 489).....	0,000846
1 nervio de 150 milímetros de altura y 8 milímetros de espesor, para $h = 1^m$ (tabla número 6 del núm. 489), $0,0000548 \times 8 \dots$	0,000438
	$I = 0,002484$

y como $v = \frac{1}{2} h = 0^m,50$,

$$\frac{I}{v} = 0,004968.$$

Como $\frac{R I}{v} = M_o$, se deduce:

$$R = M_o : \frac{I}{v} = \frac{39375}{0,004968} = 7,92 \times 10^6 \text{ kilogramos per m.}^2,$$

ó

$$R = 7,92 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Empleando el método abreviado del núm. 548, tendríamos, por la ecuación (1):

$$R = \frac{M_o}{\omega h}.$$

El área ω tiene el valor siguiente, expresado en mm.^2 ;

1 tabla de 300×8	2400
2 escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$	1792
1 nervio de 150×8	1200
	$\omega = 5392$

y como h , en milímetros, es igual á 1000, será, refiriendo todas las cantidades al milímetro, en cuyo caso el valor anterior M_o que estaba expresado en kilogramómetros, habrá de ser multiplicado por 1000,

$$R = \frac{39375000}{5392000} = 7,30 \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

cantidad poco diferente de la $R = 7,92$ hallada por el método exacto.

Para las barras de la celosía, se deduce de la ecuación (1) del núm. 557, tomando como unidad de superficie el mm.^2 :

$$R = \frac{C_o}{2 n \omega \cos \alpha} = \frac{15750}{6 \times 0,71 \times 500} = 7,39 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

570. Vigas de celosía, de madera. — Estas vigas, llamadas también *americanas* ó de *Town*, nombre de su inventor, son las que han dado origen á las de celosía de hierro. Cada una de las cabezas está formada de maderos que hacen de cepos de las barras de la celosía (fig. 7.^a, lám. 23).

Se aplican las fórmulas (1) y (2) del núm. 548 al cálculo de las cabezas;

estas fórmulas son exactas en el caso presente, porque las cabezas tienen sección rectangular, y se verifica en ellas, por tanto, $\frac{I}{v} = \omega h$ (tabla del núm. 477, valor 17).

El alma en celosía se calculará por la fórmula (2) del núm. 557. También aquí se demostraría que el ángulo más conveniente de inclinación de las barras es el de 45°; pero se les puede dar otra cualquiera, pues la condición de economía de material no es tan influyente en la madera, tratándose de pequeñas diferencias de esquadría. Resumiendo: haremos uso de las ecuaciones

$$\omega = \frac{M_0}{R h} \text{ para determinar la sección de las cabezas.}$$

$$\omega = \frac{C_0}{2 n R \cos \alpha} \text{ para hallar la esquadría de las barras.}$$

En esta clase de vigas no interesa el peso propio del material, y por esto no se suele tener en cuenta; pero si se quisiese hacerle entrar en el cálculo, se podría utilizar la fórmula (6) del núm. 551, sustituyendo t por el peso del metro cúbico de madera. El factor $1 + K = 1,30$ correspondería al aumento de peso por herrajes y cubrejuntas.

Como los maderos que forman los cordones superior é inferior de la viga no podrán ser, en general, de una pieza, habrá necesidad de empalmarlos. En este caso se procura que estén alternadas las juntas, y se emplean cubrejuntas de hierro plano, ó cualquiera de las disposiciones de empalme representadas en las figs. 12, 13, 14, 15, 16 y 18 de la lám. 18.

Las extensiones que experimentan las barras, se traducen en desgarramientos en sus extremos, producidos por los pernos que las unen á los cordones; por esto es conveniente que las barras rebasen dichos cordones ó cabezas, como se ve en a (fig. 7.^a, lám. 23).

En los cordones y en las barras, hay que descontar de la sección resistente el orificio abierto para el paso de los pernos.

571. Ejemplo. — Viga de 20 metros de longitud, apoyada en los dos extremos, y cargada á razón de $p = 800$ kilogramos por metro de longitud. Las barras estarán inclinadas á 45° y se cruzarán cuatro veces en una vertical ($n = 4$). Coeficiente de trabajo $R = 600000$ kilogramos por m.², ó sea 60 kilogramos por cm.²

$$\text{Haremos } h = \frac{1}{10} l = 2 \text{ metros.}$$

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 800 \times 20^2 = 40000 \text{ kilogs. ms.}$$

$$C_0 = \frac{1}{2} p l = \frac{1}{2} \times 800 \times 20 = 8000 \text{ kilogramos.}$$

Pernos. — A cada cruce de barra le corresponde $\frac{1}{n} C_0 = \frac{1}{4} \times 8000 = 2000$ kilogramos de esfuerzo cortante. Admitiendo un coeficiente de trabajo $R'' = 6$ kilogramos por mm.², sería:

$$R'' \omega = 2000 = 6 \omega \quad \omega = 333 \text{ mm.}^2.$$

Se aplicarán pernos de 20 mm.² de diámetro, cuya sección transversal es de 314 mm.², valor poco menor que el de 333, necesario.

Área resistente de cada cabeza. — Tomando como unidad el metro:

$$\omega = \frac{M_0}{R h} = \frac{40000}{600000 \times 2} = 0,0333 \text{ m.}^2 = 333 \text{ cm.}^2$$

Se formará cada cabeza con dos tablones de 20 centímetros \times 10 centímetros. Descontando 2 centímetros por el orificio del perno, cada tablón proporciona $18 \times 10 = 180$ cm.², y entre los dos 360 cm.²

Barras de celosía. — La fórmula

$$\omega = \frac{C_0}{2 n R \cos \alpha} = \frac{8000}{2 \times 4 \times 600000 \times 0,71} = 0,0023 \text{ m.}^2 = 23 \text{ cm.}^2$$

Podrán formarse las barras con medias tablas de 11,50 centímetros de ancho y 2,50 centímetros de grueso, pues descontando de la anchura 2 centímetros por el orificio para el perno, resulta $\omega = 9,50 \times 2,50 = 23,75$ cm.²

572. Vigas Polignac. — Se calculan como una viga de celosía (fig. 8.^a, lám. 23).

Como el sistema de barras es doble, aunque no se cruzan más que una vez en la vertical, habrá necesidad de hacer $n = 2$ en las fórmulas anteriores.

VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE. — SÓLIDOS DE IGUAL RESISTENCIA

573. Definición. — Hemos supuesto hasta aquí que las piezas eran prismáticas, y siendo su sección constante lo era también el valor de I . En esta hipótesis las compresiones, extensiones y esfuerzos cortantes, por unidad superficial, que sufren las fibras como consecuencia de la flexión, varían según la ley explicada en los núms. 458 y 472, y representada por intensidades diversas de tintas en las figs. 13, 15 y 17 de la lám. 13.

En vista de esta distribución de fuerzas en el interior del prisma, hemos calculado la escuadría ó dimensiones de su sección transversal atendiendo á las fibras que se hallan en peores condiciones de resistencia, y haciendo que experimenten una fatiga molecular que no exceda del valor que se asigna ordinariamente á los coeficientes de trabajo. Resulta de este método de cálculo que las fibras restantes se hallan sometidas á esfuerzos menores que dichos coeficientes, y en algunas partes del prisma no sufren esfuerzo alguno.

Hay, pues, exceso de materia en estas partes, ó, mejor dicho, la materia está mal distribuída en las piezas prismáticas. Debiera estarlo de modo que las compresiones, extensiones y esfuerzos cortantes por unidad superficial, fueran de valor constante para todas las fibras en un punto cualquiera, haciendo variar al efecto convenientemente las dimensiones de la sección transversal de las piezas; así se conciliaban las condiciones de resistencia y economía de materia. Las vigas que gozasen de esta propiedad serían verdaderos *sólidos de igual resistencia*; pero semejante resultado no puede alcanzarse en la práctica por completo, y se designan con este nombre las piezas que poseen, en parte, aquellas cualidades.

Decimos que no es posible obtener un verdadero sólido de igual resistencia. En efecto: cualquiera que sea la forma que longitudinal y transversalmente se de á una pieza, siempre habrá fibras extendidas, fibras comprimidas y capa neutra; por lo tanto, las compresiones y extensiones se distribuirán en cada sección como indica la fig. 15 de la lám. 13, y los esfuerzos cortantes como manifiesta la fig. 17, esto es, de modo desigual.

574. Forma más conveniente de la sección transversal de una viga.—Del examen de la fig. 15 (lám. 13) se deduce que hay exceso de materia junto á la capa neutra, si se atiende á las fuerzas interiores de compresión y extensión, porque estas fuerzas son de pequeña intensidad en dicha parte. Mejor distribuída estaría la materia acumulándola en los extremos de la sección.

Por el contrario, la distribución del esfuerzo cortante representada en la fig. 17 (lám. 13), manifiesta que la materia debiera acumularse en el eje de la viga, si únicamente se toma en consideración aquella fuerza interior.

Pero hemos demostrado (núm. 491) que la magnitud del esfuerzo cortante, por unidad superficial de sección, es mucho menor que la de las compresiones y extensiones que experimentan las fibras, hasta el punto de desprejarse aquél en el cálculo de las vigas de pequeña altura. Atendiendo, pues, preferentemente á las compresiones y extensiones, deducimos que la forma más conveniente para la sección transversal de un sólido sometido á flexión, es aquella en que la materia se aglomera en las partes más alejadas de la capa de fibras neutras. Tal es el fundamento de las secciones en forma de T sencilla y doble, U , etc., que se da á las vigas metálicas laminadas y compuestas, y en todos los casos en que interesa la economía de material.

575. Forma longitudinal de los sólidos de igual resistencia.—La extensión ó compresión por unidad superficial p que sufren las fibras más alejadas de la capa neutra es, haciendo $z = v$ en la fórmula (2) del núm. 458,

$$p = \frac{Mv}{I} = M : \frac{I}{v}.$$

En esta fórmula, M es el momento de flexión para una sección cualquiera de abscisa x , es decir, que es función de x , de las cargas y de la longitud l de la pieza, ó lo que es lo mismo,

$$M = f(P, l, x).$$

Si p ha de ser constante é igual á R , coeficiente de trabajo, será preciso que $\frac{I}{v}$ varíe en razón directa de M ; esto es, que las dimensiones de la sección transversal varíen de un punto á otro del eje, con arreglo á las variaciones del momento de flexión, debiendo verificarse siempre la ecuación

$$R = M : \frac{I}{v}$$

$$\frac{RI}{v} = M = f(P, l, x) \quad (1).$$

El esfuerzo cortante por unidad superficial de sección transversal (c), suponiendo una distribución uniforme, es $c = \frac{C}{\omega}$, siendo ω el área de la sección y C el esfuerzo cortante en un punto cualquiera del eje, de abscisa x , ó $C = f'(P, l, x)$. Si c ha de ser constante é igual á R'' (coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante), es necesario que ω varíe en razón directa de C , y que se verifique siempre

$$R'' = \frac{C}{\omega}$$

$$R'' \omega = C = f'(P, l, x) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) resuelven los problemas de resistencia relativos á los sólidos de igual resistencia, puesto que relacionan las cargas y las dimensiones de la sección transversal, en cualquier punto del eje de abscisa $x = H$. Estas ecuaciones demuestran que los sólidos de igual resistencia no pueden ser prismáticos, ó de sección constante, sino que de un punto á otro del eje han de variar una ó algunas de las dimensiones de escuadría.

576. Sólidos de igual resistencia, de pequeña altura.—En el cálculo de las vigas de pequeña altura, se prescinde del esfuerzo cortante, por las razones expuestas en el número 491; así es, que para la resolución de los problemas de resistencia se hará uso solamente de la ecuación (1) del número anterior.

577. Aplicación á las vigas de sección rectangular.—Haciendo $\frac{I}{r} = \frac{a b^3}{6}$ (tabla del núm. 477; 1) en la ecuación (1) del núm. 575, se tiene:

$$\frac{R a b^3}{6} = M = f(P, l, x),$$

No habrá más que sustituir M por su valor, dependiente del caso de flexión que se considere.

Primer caso. Pieza apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente con p kilogramos por unidad lineal.—Sustituyendo en la ecuación anterior el valor del momento general de flexión (tabla del núm. 404; 3) resulta:

$$\frac{R a b^3}{6} = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \quad (3).$$

Esta ecuación nos da los lados a y b de escuadría para un punto cualquiera del eje de la viga definido por el valor particular de la abscisa x .

En el punto medio, ó sea para $x = \frac{1}{2} l$, se tendrá,

$$\frac{R a b^3}{6} = \frac{1}{8} p l^2 \quad (4).$$

Como el momento máximo M_0 es igual á $\frac{1}{8} p l^2$, la escuadría de la viga en el punto medio resulta ser la misma que obteníamos para las piezas prismáticas.

Para otro punto cualquiera, la ecuación (3) resuelve el problema; y como hay dos variables, a y b , será preciso dar valores á una de las dos para determinar los de la otra.

Si suponemos constante a (dimensión normal al plano de las fuerzas), la relación entre b y x , dada por la ecuación (3), no es otra cosa que la ecuación de la curva que forma el perfil longitudinal del sólido de igual resistencia.

Si se quiere que la cara inferior de la viga sea horizontal, b representará las ordenadas de la curva que forma el perfil de la cara superior (fig. 10, lámina 23): la curva es una elipse en que $OB = l$ y AD tiene el valor b deducido de la ecuación (4),

$$b = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 p}{R a}} \quad (5).$$

Si se quiere que la recta OB sea el eje neutro (fig. 11, lám. 23), habrá de tomarse $\pm \frac{1}{2} b$ por ordenadas del perfil, para que resulte $cd = b$; ó lo que es lo mismo, habrá que sustituir b por $2 b'$ en la ecuación (3), llamando b' á la mitad de cd , ó de b : tendremos entonces,

$$\frac{2 R a b'^3}{3} = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \quad (6)$$

ecuación de una elipse cuyas ordenadas son la mitad de las de la elipse de la fig. 10.

La ecuación de la elástica y la flecha, se hallarían aplicando las ecuaciones generales (11) del núm. 347 y (12) del núm. 348; pero con una modificación, la de llevar bajo el signo integral el factor $\frac{1}{I}$ que en este caso no puede ponerse fuera, porque el momento de inercia I no es constante, sino que es función de x , función que puede deducirse de la fórmula (3).

Efectuando los cálculos, encontraríamos para valor de la flecha,

$$f' = -0,57 \times \frac{R}{E} \sqrt{\frac{R a}{3 p}} \times l \quad (7).$$

En igual caso de flexión, pero correspondiendo á piezas prismáticas, hallamos para valor de la flecha f (tabla del núm. 404, (3),

$$f = -\frac{5}{384} \frac{p l^4}{E I} \quad (8)$$

siendo I el momento de inercia de la sección constante, que es la misma que la sección media del sólido de igual resistencia obtenida por la fórmula (4) anterior.

Para comparar los valores (7) y (8), haremos en la (8) $I = \frac{1}{12} a b^3$, sustituyendo b por el valor (5), y será

$$I = \frac{1}{12} a b^3 = \frac{1}{12} a \times \frac{3 p}{R a} \sqrt{\frac{3 p}{R a}} \times \frac{l}{8}$$

$$f = \frac{5 R}{12 E} \sqrt{\frac{3 p}{R a}} \times l \quad (9).$$

La comparación de f' (7) y f (9) da:

$$f' : f :: 0,57 : \frac{5}{12}$$

ó

$$f' = 1,37 f \quad (10).$$

El sólido de igual resistencia es, pues, menos rígido que el de sección constante, á igual valor del coeficiente de trabajo. Esto explica la forma de

sólidos de igual resistencia que se da á los muelles de los carruajes ordinarios y de vía férrea.

Cuando sean conocidas las dimensiones del sólido, y se desee saber la carga $P = p l$ que podrá soportar, se comprobará primeramente que la curva perfil de la viga tiene por ecuación una de las (3) ó (6), y se determinará p por la ecuación (4).

578. Puede hacerse constante la altura b en la ecuación (3), y variable por tanto a . Se obtiene entonces, para proyección horizontal del sólido (figura 12, lám. 13), la figura $A C B$, formada por la recta $A B$ y parábola $A C B$; ó bien la $A c B d$ (fig. 13), simétrica con respecto á $A B$, en la cual $c d = a$.

También se podría hacer que el área $a b$ fuese constante é igual á una cantidad dada ω ; se representaría b por las ordenadas de una parábola, y una vez conocido b se determinaría a por la ecuación $a b = \omega$. Esta distribución de la materia es defectuosa, pues en los extremos de la viga $b = 0$ y $a = \infty$.

579. Segundo caso. — **Pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro con un peso P .** En este caso, $M = -P(l-x)$ (tabla del número 404, 8). La ecuación (1) del núm. 575 será:

$$\frac{R a b^2}{6} = -P(l-x).$$

Si a es constante, esta ecuación es la de una parábola $A B$ (fig. 14, lámina 23) de tangente vertical en B . También se puede aceptar la forma $A B D$ (fig. 15), que tiene el eje de simetría $O B$, haciendo $c h = \frac{1}{2} b$.

La sección, en el empotramiento, se obtendrá por la ecuación $\frac{R a b^2}{6} = P l$,

de la cual se obtiene $b = \sqrt{\frac{6 P l}{R a}} \quad (11).$

La flecha f' vale

$$f' = \frac{4}{3} \frac{R}{E} \sqrt{\frac{R a}{6 P}} \times l \sqrt{l}.$$

La correspondiente á la pieza prismática, en idéntico caso de flexión, es:

$$f = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E I};$$

y sustituyendo en $I = \frac{1}{12} a b^3$, el valor (11) de b ,

$$f = \frac{2}{3} \frac{R}{E} \sqrt{\frac{R a}{6 p}} \times l \sqrt{l}.$$

Resulta $f' = 2 f$.

580. Otros casos. — Con igual facilidad se resolverían los problemas de resistencia en cualquiera otro caso: basta igualar $\frac{R a b^3}{6}$ á la expresión general M del momento de flexión.

Así se vería que para el caso de flexión representado en la fig. 3.^a de la lám. 6.^a (núm. 319), el perfil longitudinal del sólido de igual resistencia, en la hipótesis de a constante, es (fig. 16, lám. 23) la línea $O C D H$, compuesta de los arcos de parábola $O C$, $D H$, y de la recta $C D$; ó bien, tomando un eje de simetría $O H$ (fig. 17, lám. 23), el $O A H D$.

Para el caso representado en la fig. 2.^a de la lám. 6.^a (núm. 318) (caso en que se encuentran las ballestas ó muelles de los carruajes), el perfil sería el representado en la fig. 18 de la lám. 23, formado de dos arcos de parábola $O A$, $A H$ que tienen común el punto A ; ó el $O B H A$ de la fig. 19, compuesto de las dos parábolas $B O A$, $B H A$.

581. Aplicación á las piezas de sección circular. — En las piezas de sección circular el momento de inercia I es igual á $\frac{\pi r^4}{4}$ (tabla del número 477, 29), y el de $\frac{I}{r}$ es $\frac{\pi r^3}{4}$. La ecuación (1) del núm. 575, será:

$$\frac{R \pi r^3}{4} = M = f(P, l, x)$$

que contiene en su primer miembro solamente la variable r . Esta ecuación es la de la curva sección meridiana del sólido.

582. Aplicación á las vigas doble T . — En las vigas doble T , laminadas (fig. 21, lám. 14), si prescindimos del alma ó nervio vertical y llamamos a á la anchura de las tablas, b á su espesor y h á la altura de la sección (fig. 20, lám. 14), el valor de $\frac{I}{v}$ será (tabla del núm. 477, 17):

$$\frac{I}{v} = a b h.$$

Este es el valor que hemos de sustituir en la ecuación (1) del núm. 575. Para el caso de pieza apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente, tendríamos:

$$R a b h = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2.$$

La dimensión a se hace constante siempre; la b , espesor de las tablas, y la h , altura de la viga, son las que pueden variar.

Si hacemos constante á b , se obtiene el perfil longitudinal dibujado en la fig. 20 (lám. 23), en el que $A B H$ es una parábola, ó bien el $A B H C$.

Si h es constante, y por tanto b variable, la proyección vertical de la viga es la representada en la fig. 22 (lám. 23); $c d m$ y $n r s$ son arcos parabólicos. Como los espesores b son pequeños, si se comparan con h , especialmente en las vigas de grande altura, puede hacerse el trazado de las parábolas del lado exterior, como se ve en la fig. 23 (lám. 23); pues si bien no se cumple la condición de $h = \text{constante}$, el error es inapreciable.

583. Vigas metálicas de gran altura. Vigas de alma llena. — En estas vigas habremos de hacer uso de las dos ecuaciones 1 y 2 del núm. 575; la primera servirá para el cálculo de las cabezas ó largueros, y la segunda para el del alma, puesto que, según sabemos (núm. 546), aquellas se determinan teniendo en cuenta el momento de flexión, y las dimensiones del alma se subordinan al valor del esfuerzo cortante. Resultará, pues, en esta clase de sólidos de igual resistencia, que serán de sección variable las cabezas y el alma de la viga.

En las vigas de alma llena, no es práctico hacer variable el espesor del alma por las dificultades que se encuentran en el empalme de los palastros. Las modificaciones se limitan á los hierros que forman las cabezas, haciendo que la sección trasversal de éstas varíe, acomodándose á los valores que el momento de flexión tiene en los diversos puntos de la longitud de la viga, de modo que se satisfaga siempre la ecuación $\frac{R I}{v} = M = f(P, l, x)$, en la cual I es el momento de inercia de dichas cabezas.

Estamos, pues, en el caso del núm. 582, relativo á viguetas doble T , en el cual se prescindía del alma de la viga; y por lo tanto, el perfil longitudinal deberá ser uno cualquiera de los representados en las figs. 22 y 23 de la lám. 23; generalmente se adopta el de la fig. 23. Hay, sin embargo, una diferencia: en el caso que estamos considerando, las cabezas no están forma-

das por un sólo rectángulo, sino que se componen de escuadras y una ó más tablas (fig. 25, lám. 23), y no es posible tampoco, por tratarse de hierros cosidos con roblones, obtener la disminución gradual de dimensiones que señala el perfil longitudinal dibujado en la fig. 23 de la lám. 23. El procedimiento empleado en la construcción de las grandes vigas es otro: consiste en colocar, en toda la longitud de las cabezas, algunos de los elementos que las constituyen; por ejemplo, las escuadras y una tabla, elementos que, por otra parte, son necesarios de uno á otro extremo para asegurar la unión de las cabezas y el alma, y en hacer variar el número de palastros ó tablas de las cabezas con arreglo á los valores del momento de flexión.

Las figs. 24 y 25 de la lám. 23, ponen de manifiesto esta solución y la repartición de palastros en las cabezas, en el caso de pieza apoyada en los extremos y cargada uniformemente; la fig. 24 representa el perfil longitudinal de la viga, y la fig. 25, las secciones trasversales por 1, 1; 2, 2; etc.

584. Distribución de palastros en las cabezas de la viga. — Sean:

I = momento de inercia total de las cabezas, suponiéndolas compuestas de escuadras, nervio y $n + 1$ tablas.

I' = momento de inercia de la parte constante, esto es, de las escuadras y una tabla (sección 1, 1 de la fig. 25, lám. 23).

I'' = momento de inercia de n tablas (parte variable).

i = momento de inercia de una tabla.

ω = área de la sección transversal de una tabla.

h = altura de la viga: v es igual á $\frac{1}{2} h$.

Tendremos:

$$I = I' + I''$$

$$i = \frac{1}{2} \omega h^2$$

$$I'' = n i = \frac{1}{2} \omega h^2 n$$

$$\frac{R I}{v} = \frac{2 R I'}{h} + R \omega h n = M.$$

Asignemos, desde luego, dimensiones á la parte de cabeza que reina en toda la longitud de la viga (escuadras y una tabla), teniendo, al efecto, pre-

sente las proporciones prácticas del núm. 556, y determinemos su momento de inercia I' . Será conocido el sumando $\frac{2 R I'}{h}$ que representaremos por K ; de modo que tendremos:

$$M = K + R \omega h \times n \quad (1).$$

Esta ecuación resuelve el problema de distribución de palastros, puesto que da á conocer el número n , de área ω fijada de antemano, que habrá de colocarse en las diversas partes de la longitud de la viga, sustituyendo, al efecto, los valores correspondientes del momento de flexión M .

La distribución de palastros se puede hacer gráficamente como vamos á ver; y para fijar las ideas, supongamos que la viga está apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente, en cuyo caso

$$M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2.$$

Se hará uso de dos escalas (fig. 1.^a, lám. 24), una de longitudes (s milímetros por metro) que servirá para dibujar el eje $O A$ de la viga, y otra de momentos de flexión M (m kilogrametros por milímetro), con cuyo auxilio se dibujará la parábola $O O' A$, cuyas ordenadas representarán los valores de los momentos de flexión en un punto cualquiera de abscisa x , de la longitud de la viga.

El trazado de la parábola es sencillo: tómese la ordenada media $O' d$ (fig. 2.^a, lám. 24) igual al momento máximo de flexión ($M_0 = \frac{1}{8} p l^2$), en partes de la escala de momentos; divídanse $O' d$ y $O d$ en un mismo número de partes iguales, que se numerarán como indica la figura; en los puntos de división de $O d$ levántense perpendiculares á esta recta, y los puntos de división de $O' d$ únanse con el A . Las intersecciones de las rectas $A a$, $2 a$, $A b$, $3 b$, etc., darán puntos a , b , etc., de la parábola (*).

(*) La ecuación de la parábola de los momentos de flexión, siendo los ejes $O X$ y $O Y$ (fig. 2.^a, lám. 24), es $y = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$; refiriéndola á los ejes $O' X'$, $O' Y'$, las ecuaciones de transformación, son:

$$x = \frac{1}{2} l - x'$$

$$y = O' d - y' = \frac{1}{8} p l^2 - y'$$

y se obtiene

$$y' = \frac{1}{2} p x'^2.$$

Una vez construída la parábola $O O' A$ (fig. 1.^a, lám. 24), haremos dr igual al valor K de la ecuación (1) anterior, y llevaremos la magnitud $R \omega h$, tomada en partes de la escala de momentos, de r á s , de s á t , etc., tantas veces como sea necesario para llegar al punto O' ó para rebasarlo. Por los puntos de división r, s, t, \dots se trazarán paralelas á $O A$ hasta su encuentro con la parábola, y se proyectarán sobre $O A$ los puntos de intersección.

Queda hecha la repartición de palastros de área ω ; refiriéndonos á la fig. 1.^a, en la parte central ce de la viga (longitud que podrá medirse en la escala que ha servido para dibujar $O A$), ha de ponerse tres palastros, á más del que existe en toda la longitud de la viga, dos en las partes bc y ef y uno

Esta es, también, la ecuación de la curva $O a b O'$ construída como queda dicho. En efecto; los triángulos semejantes $A D a$ y $A d e$, dan

$$\frac{D a}{d e} = \frac{A D}{A d}$$

Pero $D a = O' d - y'$; y, por otra parte, tenemos:

$$\frac{O' e}{O' d} = \frac{D d}{O d} = \frac{r'}{\frac{1}{2} l}, \text{ de donde } O' e = O' d \frac{x'}{\frac{1}{2} l}$$

y, además,

$$d e = O' d - O' e = O' d - O' d \frac{x'}{\frac{1}{2} l}$$

$$A D = \frac{1}{2} l + x'$$

$$A d = \frac{1}{2} l.$$

Sustituyendo en la primera proporción, y dividiendo por $O' d$,

$$\frac{\frac{y'}{O' d} - 1}{\frac{x'}{\frac{1}{2} l} - 1} = \frac{\frac{1}{2} l + x'}{\frac{1}{2} l} + 1$$

ó

$$y' = O' d \frac{x'^2}{\frac{1}{4} l^2}$$

y como

$$O' d = \frac{1}{8} p l^2$$

$$y' = \frac{1}{2} p x'^2.$$

solamente en las partes extremas $O a, A h$. Efectivamente; en una sección cualquiera E , de abscisa x , la ordenada $E D$ vale

$$E D = E S + S D = K + R \omega h \times n = \frac{R I}{v}$$

y como $E H = M$, se verifica

$$E D > E H$$

ó

$$\frac{R I}{v} > M,$$

es decir, que el momento de las fuerzas elásticas es mayor que el momento de flexión; luego hay resistencia. En los puntos a, b, c, e, f, h , se verifica $\frac{R I}{v} = M$.

La escala de momentos se puede dibujar en $O I$, teniendo el cero en O , y así se apreciarán más fácilmente los valores de las ordenadas de la parábola.

Si al fijar arbitrariamente las dimensiones de los hierros en escuadra y tabla única, que forman la parte constante de las cabezas (sección 1, 1 de la fig. 25, lám. 23), se hubiesen tomado escuadrías demasiado grandes ó demasiado pequeñas, resultaría también grande ó pequeña la dimensión $r d = K$ (fig. 1.^a, lám. 24). En estos casos, el número de tablas sería ó muy pequeño ó muy grande; lo primero es contrario á la economía de metal, porque habrá exceso de material en una gran longitud de viga (partes $O a$ y $A h$), y lo segundo trae consigo mayores dificultades en la construcción de las cabezas. En ambos casos se modificarán las dimensiones de la parte constante y se operará de nuevo gráficamente, como queda explicado.

585. Vigas de celosía. — La repartición de palastros en las cabezas se hace del mismo modo que para las vigas de alma llena, sin más diferencia que la de comprender en el valor de I' el momento de inercia del nervio ó trozo de alma llena que existe en toda la longitud de la viga para recibir el extremo de las barras de la celosía (fig. 16, lám. 22), y que, por lo tanto, ha de formar parte de la sección constante. Según esto, las diversas secciones transversales de las cabezas serán las dibujadas en la fig. 26, lám. 23.

Veamos el modo de organizar la celosía:

Sea $O D$ la mitad de la viga (fig. 3.^a, lám. 24), y $S T$ la línea cuyas orde-

nadas $f b, h d, etc.$, representan los valores de los esfuerzos cortantes. Las dimensiones $O D, O' D', etc.$, se tomarán en la escala de longitudes (s milímetros por metro), y las ordenadas $f b, h d$, en la de fuerzas (r kilogramos por milímetro).

Dividiremos la longitud de la viga en un cierto número de partes iguales $O A, A B, etc.$; en cinco, por ejemplo, y sustituiremos la recta $S T$ por la línea quebrada $S a b c d$.

El área ω de una de las barras, siendo n el número de veces que se cruzan en una vertical, es (núm 557):

$$\omega = \frac{C}{2 n R \cos \alpha}.$$

Sustituyendo C por los valores $O' S, f b h d, etc.$, que tiene el esfuerzo cortante en los intervalos $O' f, f h, etc.$, se tendrá la escauadría de las barras en estas partes. La diversidad de escauadrías está representada en la fig. 3.^a por gruesos diferentes en las líneas.

Generalmente se asigna ancho igual á las barras de la celosía; de modo que lo que varía es el espesor.

PIEZAS FLEXADAS, SOMETIDAS Á EXTENSIÓN Ó Á COMPRESIÓN SIMPLES

586. Piezas flexadas y extendidas. — Puede suceder que una pieza se encuentre sometida al mismo tiempo á flexión y á extensión. Llamemos P' á la fuerza de extensión, cuya línea de acción suponemos coincide con el eje del prisma (fig. 7.^a, lám. 25), y sean:

p_0 = extensión y compresión máximas, por unidad superficial, debidas á la flexión.

p = extensión por unidad superficial de sección recta del prisma, producida por la fuerza P' .

R = coeficiente de trabajo definitivo, por extensión.

ω = área de la sección transversal de la pieza.

Por efecto de la flexión, las fibras que experimentan mayor fatiga molecular, que son las más alejadas de la capa neutra, en la sección de momento de flexión máximo M_0 , sufren extensión unas y compresión otras, representada por $p_0 = \frac{M_0 v}{I}$ kilogramos por unidad superficial (núm. 459).

tada por $p_0 = \frac{M_0 v}{I}$ kilogramos por unidad superficial (núm. 459).

La extensión directa ocasionada por la fuerza P' en todas las fibras es, por unidad superficial, $p = \frac{P'}{\omega}$.

Según esto las capas de fibras más alejadas de la fibra neutra, en la sección de momento de flexión máximo, se encontrarán sometidas á las fuerzas siguientes por unidad superficial:

Fibras extendidas..... $p_0 + p = \frac{M_0 v}{I} + \frac{P'}{\omega}$

Fibras comprimidas..... $p_0 - p = \frac{M_0 v}{I} - \frac{P'}{\omega}$

Atendiendo á las fibras extendidas, que son las que se hallan en peores condiciones, será preciso, para que haya resistencia, que $p_0 + p$ no exceda del valor que ordinariamente se da al coeficiente de trabajo por extensión R .

Tendremos, pues,

$$R = \frac{M_0 v}{I} + \frac{P'}{\omega} \quad (1),$$

ecuación que resuelve los problemas de resistencia. Las cantidades I, v y ω son funciones de las dimensiones de la sección transversal del prisma; M_0 es el momento máximo de flexión, función de las cargas, que hemos representado por la expresión general $\frac{1}{n} P l$, siendo P la carga total.

La capa de fibras neutras no es ya la media, sino aquella en la cual

$$R = \frac{M_0 v}{I} + \frac{P'}{\omega} = 0,$$

es decir, la que dista del eje del prisma la cantidad $r = -\frac{P' l}{M_0 \omega}$.

En el caso representado en la fig. 19 de la lám. 27, y prescindiendo de las alteraciones del brazo de palanca h por efecto de las deformaciones en la flexión, la viga $A B$ (fig. 20) puede suponerse sometida á la acción de un momento de flexión constante $M_0 = P h$ y de la fuerza de extensión P aplicada al eje del prisma. La ecuación (1) se convierte en

$$R = \frac{P h v}{I} + \frac{P}{\omega}.$$

El primer sumando del segundo miembro es mucho mayor que el segundo. Para comprender la influencia del brazo de palanca h en el valor de la extensión máxima R , supongamos (fig. 21, lám. 27) que se trata de un sólido de sección rectangular de lados a y b , y que la fuerza P de extensión está aplicada, no ya fuera del prisma como en la fig. 19, sino en el interior de éste (fig. 21) en un punto n de la base, distante $Bn = h$ del eje. Tendremos:

$$\omega = ab, \quad I = \frac{1}{12} ab^3, \quad v = \frac{1}{2} b$$

$$R = \frac{P}{ab} \left(1 + \frac{6h}{b} \right).$$

El factor $\frac{P}{ab}$ representa la extensión por unidad superficial que sufre el prisma en todas sus fibras en el caso de que P coincidiera con el eje; y el valor

$$R = \frac{P}{ab} \left(1 + \frac{6h}{b} \right)$$

es la extensión que experimentan las fibras es , que son las que están en peores condiciones, por efecto de la excentricidad de la fuerza P . Pues bien, R se duplica cuando $\frac{6h}{b} = 1$, ó $h = \frac{b}{6}$ y se cuadruplica en el caso que $1 + \frac{6h}{b} = 4$ ó $h = \frac{1}{2}b$, lo cual supone que n coincide con s .

Es decir, que basta que la fuerza de extensión paralela al eje del prisma esté á una distancia de éste igual á $\frac{1}{6}$ de b , lado mayor de escuadría, para que en las fibras es resulte una extensión por unidad superficial $\frac{2P}{ab}$, doble de la que sufrirían si P coincidiese con el eje, llegando á ser dicha extensión cuatro veces mayor cuando la fuerza P está situada en la cara es .

Si la pieza fuese cilíndrica, de radio r , sería:

$$R = \frac{P}{\pi r^2} \left(1 + \frac{4h}{r} \right);$$

de modo que cuando la fuerza P obra á lo largo de una generatriz ($h = r$),

resulta $R = 5 \frac{P}{\pi r^2}$ es decir, cinco veces mayor que en el caso de que actúase á lo largo del eje.

De cuanto antecede se deduce la importancia que tiene en los problemas de extensión asegurar la coincidencia del eje y de la fuerza tractora P .

Otro caso de extensión y flexión representa la fig. 22 (lám. 27). La fuerza P se descompone en dos: una $Bd = P \cos a$, de extensión, y otra $Bc = P \sin a$ que produce un momento máximo de flexión en A , que vale $M_0 = Pl \sin a$. Sustituyendo en la ecuación (1) será:

$$R = \frac{Pl \sin a \times v}{I} \times \frac{P \cos a}{\omega}.$$

Si el caso de flexión fuese el representado en la fig. 23, como la fuerza P puede ser sustituida por el par $P''P$ y la fuerza P' es igual á P , tendríamos que en A hay un momento de flexión debido al par constante Ph y á la componente $P \sin a$; de modo que

$$M_0 = Ph + Pl \sin a,$$

y

$$R = \frac{P(h + l \sin a)v}{I} + \frac{P \cos a}{\omega}.$$

De este caso se puede pasar al de la fig. 19, haciendo $a = 0$, y al de la fig. 22, si se hace $h = 0$.

587. Vigas de sección cualquiera. — El problema de más frecuente aplicación es el de determinar la escuadría de la pieza, conocidas las fuerzas P y P' . Este problema es indeterminado, á excepción de los casos de sección circular ó cuadrada, porque I , v y ω contienen dos ó más incógnitas; se resuelve por tanteos, como vamos á ver.

Se fija un coeficiente de trabajo R_1 algo menor que R , y se determina la sección transversal de la viga como si solamente estuviese sometida á flexión, según se ha explicado en los núms. 508 y 523. Tendremos, por tanto,

$$\frac{I}{c} = \frac{M_0}{R_1} \text{ y } R_1 = \frac{M_0 c}{I}.$$

Una vez determinada la sección transversal del prisma, se hallará su área ω

y el coeficiente de trabajo $R_2 = \frac{P'}{\omega}$ que resulta por la extensión directa que produce P .

Si $R_1 + R_2$ es poco diferente de R , el problema está resuelto, puesto que queda verificada la ecuación (1).

Cuando $R_1 + R_2$ sea demasiado grande, se disminuirá el valor asignado en un principio á R_1 y se hallará otra sección de viga, por la flexión, que tendrá valor mayor para ω , y menor, por lo tanto, resultarán $R_2 = \frac{P'}{\omega}$ y la suma $R_1 + R_2$.

Si, por el contrario, la suma $R_1 + R_2$ fuese mucho menor que R , nos demostraría este resultado que habíamos dado á R_1 valor demasiado pequeño: se aumentaría y se repetiría el cálculo.

En general, al segundo tanteo se encuentra la sección de viga que conviene al problema.

Ejemplo. Una vigueta doble T laminada hace el doble papel de tirante de armadura y de vigueta de piso. Por el primer concepto supongamos que experimenta una extensión $P' = 6000$ kilogramos. Sean, además:

$l =$ longitud de la vigueta $= 6$ metros.

$p' =$ peso por metro cuadrado de piso $= 600$.

$e =$ distancia entre las viguetas del suelo $= 0^m,70$.

Por metro lineal la vigueta sufrirá un peso $p = p' e = 420$ kilogramos; de modo que el momento máximo de flexión, será:

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 420 \times 6^2 = 1890 \text{ kilográmetros.}$$

Hagamos $R_1 = 4$ kilogramos por $\text{mm.}^2 = 4 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 , será:

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R_1} = \frac{1890}{4 \times 10^6} = 0,000472.$$

Elegimos la vigueta 425 de la tabla 3.^a del núm. 489, cuyas dimensiones son $\frac{233 \times 108}{18 \times 17}$, y su sección transversal tiene por área $7254 \text{ mm.}^2 = 0,007254$ metros cuadrados.

El valor de $\frac{I}{v}$ de esta vigueta es $0,000469$; de modo que el verdadero valor de R_1 será:

$$R_1 = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{1890}{0,000469} = 4,03 \times 10^6 \text{ kgs. por m.}^2 (4,03 \text{ kgs. por mm.}^2).$$

El coeficiente de trabajo por extensión directa es:

$$R^2 = \frac{P'}{\omega} = \frac{6000}{0,007254} = 0,82 \times 10^6 \text{ kilogs. por m.}^2 (0,82 \text{ kilogs. por mm.}^2).$$

Resulta entonces como coeficiente definitivo de trabajo, para las fibras más extendidas:

$$R = R_1 + R_2 = 4,03 \times 10^6 + 0,82 \times 10^6 = 4,85 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2. \\ (4,85 \text{ kilogramos por mm.}^2).$$

El valor de R es demasiado pequeño: esto prueba que lo era R_1 , y que hay que aumentarlo.

Hagamos $R_1 = 6 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 (6 kilogramos por mm.^2)

Será:

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R_1} = \frac{1890}{6 \times 10^6} = 0,000315.$$

En la tabla 3.^a del núm. 489 hallamos la viga núm. 344, de dimensiones

$$\frac{218 \times 73}{18 \times 16}, \text{ cuyo valor de } \frac{I}{v} \text{ es}$$

$$\frac{I}{v} = 0,000307;$$

de modo que el verdadero valor de R_1 es

$$R_1 = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{1890}{0,000307} = 6,15 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

Como el área de la sección transversal de la vigueta es $\omega = 5684 \text{ mm.}^2$, ó sea $0,005684 \text{ m.}^2$, tendremos:

$$R^2 = \frac{6000}{0,005684} = 1,05 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2 (1,05 \text{ kilogramos por mm.}^2)$$

El coeficiente de trabajo definitivo es:

$R = R_1 + R_2 = (6,15 + 1,05) \times 10^6$ kilogs. por $m^2 = 7,20$ kilogs. por $mm.^2$ valor aceptable. La vigueta resuelve el problema.

588. Vigas de sección rectangular. — Cuando la sección es rectangular, de lados a y b (siendo este último el paralelo al plano de las fuerzas exteriores), la ecuación (1) del núm. 586 se convierte en

$$R = \frac{6 M_0}{a b^2} + \frac{P'}{a b} \quad (2)$$

que se puede resolver directamente, fijando de antemano la relación $\frac{a}{b}$. Por

ejemplo, haciendo $a = \frac{2}{3} b$ (núm. 501), tenemos

$$R = \frac{9 M_0}{b^3} + \frac{3 P'}{2 b^2} \quad (3),$$

ecuación de tercer grado, de resolución penosa. Es más sencillo el procedimiento siguiente:

Determinese la sección de la viga como si solamente hubiese de resistir á la flexión (*), y llamemos a' y b las dimensiones del rectángulo (fig. 9.^a, lámina 25); tendremos

$$\frac{R a' b^2}{6} = M_0 \quad \text{ó} \quad R = \frac{6 M_0}{a' b^2} \quad (4).$$

Conservando el lado b como dato, encuéntrese el suplemento a'' de anchura que corresponde á la extensión directa P' por la ecuación

$$P' = R a'' b \quad \text{ó} \quad R = \frac{P'}{a'' b} \quad (5).$$

La viga que resuelve el problema, tendrá por escuadría un rectángulo cuyos lados son b y $a = a' + a''$.

(*) Se podrá utilizar, con gran ventaja, la tabla del núm. 507.

En efecto; de las ecuaciones (4) y (5) se deduce

$$\frac{R a'}{a} = \frac{6 M_0}{a b^2}$$

$$\frac{R a''}{a} = \frac{P'}{a b}.$$

Sumando y recordando que $a' + a'' = a$, se obtiene

$$\frac{R (a' + a'')}{a} = R = \frac{6 M_0}{a b^2} + \frac{P'}{a b}$$

que es la ecuación (2).

Ejemplo. Viga de madera, de 8 metros de longitud, apoyada en los dos extremos y cargada uniformemente con 125 kilogramos por metro lineal. Además sufre una extensión de $P' = 2000$ kilogramos.

La carga total de flexión es $P = 8 \times 125 = 1000$ kilogramos. Como $n = 8$, el cociente $\frac{P l}{n}$, tomando l en decímetros para poder hacer uso de la tabla del núm. 507, es

$$\frac{P l}{n} = \frac{1000 \times 80}{8} = 10000.$$

Á este número corresponde en la tabla citada

$$a' = 16,72 \text{ centímetros.}$$

$$b = 25,08 \quad \text{»}$$

Haciendo $R = 60$ kilogramos por $cm.^2$, la fórmula (5) anterior nos da, tomando las dimensiones en centímetros,

$$2000 = 60 \times a'' \times 25,08,$$

de donde

$$a'' = 1,33 \text{ centímetros.}$$

Las dimensiones de la sección trasversal serán, pues,

$$b = 25,08 \text{ centímetros.}$$

$$a = a' + a'' = 16,72 + 1,33 = 18,05 \text{ centímetros.}$$

589. Vigas flexadas y comprimidas. — Todo cuanto queda dicho en los números anteriores, es aplicable al caso en que la pieza está flexada, y comprimida, además, por una fuerza P' (fig. 8.^a, lám. 25) que pasa por el eje de figura del prisma.

Las fibras más fatigadas trabajan por la doble compresión causada por la flexión y por la fuerza P' ; de modo que llamando R' al coeficiente de trabajo por compresión, la ecuación de resistencia, análoga á la (1) del número 586, será:

$$R' = \frac{M_0 v}{I} + \frac{P'}{\omega}.$$

La capa de fibras neutras distará del eje la cantidad $v = - \frac{P' I}{M_0 \omega}$ (número 586).

A las vigas de madera de sección rectangular se les podrá aplicar el método abreviado explicado en el número anterior.

Cuando sea de temer la flexión lateral de la viga, producida por la fuerza de compresión P' , se emplearán las fórmulas (3) y (4) del núm. 736.

4. APLICACIONES DE LA FLEXIÓN PLANA

SUELOS

590. Organización de los suelos. Método general de cálculo. — Los suelos pueden construirse empleando únicamente cabios de madera ó viguetas de hierro que se colocan normalmente á los muros de la crujía (N , fig. 8.^a, lám. 24), ó bien por la combinación de *vigas maestras*, $a a$, $b b$, etc., que asientan sobre los muros de carga, y cabios ó viguetas que se apoyan sobre aquéllas, como se ve en P . Esta segunda disposición, aplicable á toda clase de plantas, se emplea con ventajosa economía en las crujías de gran luz ó tiro.

No hacemos mención de los suelos poligonales, sistema Serlio, y todos los demás suelos de vigas ensambladas, porque ha desaparecido su importancia desde el momento en que, por la aplicación del hierro á las construcciones, se pueden obtener vigas de la longitud y resistencia que se desee.

591. Viguetas. — El cálculo de los suelos es una sencilla aplicación de los problemas de flexión; si llamamos:

- l = longitud de las viguetas,
- e = distancia, entre ejes, de dos viguetas contiguas,
- p' = peso por metro cuadrado de piso que ha de soportar el suelo, incluyendo peso propio y sobre carga,
- p = peso que obra sobre cada metro lineal de viga.

Por cada metro de longitud de vigueta actuará un peso $p = p' e$, y el momento máximo de flexión es:

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} p' e l^2 (*) \quad (1).$$

Se formará el valor de M_0 , y se resolverá el problema del modo explicado en los núms. 499 á 501, 508 y 522, relativos al cálculo de piezas prismáticas de madera ó de hierro, de pequeña altura, sometidas á flexión. La ecuación general de resistencia será:

$$\frac{R I}{r} = \frac{1}{8} p' e l^2 \quad (2),$$

y con ella se podrán resolver los problemas siguientes:

1.º Conocida la carga por metro cuadrado de piso (p'), la longitud de las vigas (l) y su separación (e), determinar la escuadría ó dimensiones trasversales de estas vigas. Es el caso más general.

2.º Se conocen p' , l , y la escuadría ($\frac{I}{v}$), y se desea saber la separación (e) de las vigas.

3.º Son datos del problema la escuadría de las vigas ($\frac{I}{v}$), su longitud (l) y separación (e), y se quiere conocer el peso por metro cuadrado (p'), que podrá soportar el suelo.

4.º Conociendo la escuadría ($\frac{I}{v}$) y las demás cantidades l , e y p' , hallar el coeficiente de trabajo R correspondiente (reconocimiento de edificios).

592. Cabios cojos y brochales. — Las necesidades de la construcción obligan á emplear cabios cojos y brochales; á los primeros se les aplicarán las ecuaciones (1) y (2) anteriores, sustituyendo l por la longitud l' del cabio cojo, y los segundos se calcularán como piezas apoyadas en los extremos y

(*) Los cabios, viguetas y vigas maestras, aunque están introducidos en las mamposterías, se consideran como piezas apoyadas, para los efectos del cálculo, por la imperfección de los empotramientos y por la dificultad de medir esta imperfección para tenerla en cuenta (núm. 375).

cargadas uniformemente con un peso por unidad lineal $p = \frac{1}{2} p' l'$, de modo que la ecuación de resistencia para estos últimos será, llamando l'' á la longitud del brochal,

$$\frac{R I}{r} = \frac{1}{16} p' l' l''^2 \quad (3).$$

La fig. 7.ª de la lám. 24 representa en EF y PS la disposición de cabios cojos por uno ó por los dos extremos, y los brochales DH , $t's'$ y $z'z$ correspondientes.

593. Vigas maestras. — Cada una de las vigas maestras bb (fig. 8.ª, lámina 24) soporta por metro lineal, un peso $p = p' l$, siendo l la longitud de las viguetas; de modo que la ecuación de resistencia será, llamando l_1 á la longitud de la viga maestra.

$$\frac{R I}{r} = \frac{1}{8} p' l_1^2.$$

594. Suelos embrochados. — En estos suelos (véase X , fig. 7.ª, lám. 24) no hay más viguetas que las dos extremas uv , zk ; todas las demás piezas son cabios cojos ó brochales, siendo e la distancia constante que separa unos de otros. Cada vigueta, cabio cojo ó brochal, recibe el peso que le comunican los inmediatos, á más del que directamente le está aplicado; así, por ejemplo, la vigueta uv soporta el peso correspondiente á la mitad de los intervalos $UVvu$, $nht r$, y además el peso que comunican en n y t los brochales no , ts ; este peso es la mitad del relativo al rectángulo de puntos $A'B'$, ó, en obsequio á la resistencia y á la sencillez del cálculo, la mitad del rectángulo $uvkz$. A cada uno de los puntos n y r corresponde, pues, la cuarta parte.

En definitiva, podrá considerarse que pesan sobre la vigueta uv :

1.º Un peso uniformemente repartido que en total vale $p' e \times uv$, ó sea $p = p' e$ por metro lineal de vigueta.

2.º Dos pesos iguales, aplicados en n y t , cada uno de los cuales tiene por valor $P = \frac{1}{4} p' \times \text{área } uvkz$.

El peso repartido producirá un momento máximo de flexión igual á $\frac{1}{8} p' e l^2$,

y los pesos P otro que tendrá por valor $P e$ (núm. 319); de modo que el momento máximo total será:

$$M_o = \frac{1}{8} p' e l^2 + P e \quad (5).$$

La vigueta zk se encuentra en el mismo caso.

Del mismo modo se vería que las piezas no, ts , se podrán calcular como si cada una estuviese sometida á la carga $p' e \times no$, uniformemente repartida, y los pesos $P = \frac{1}{4} p' \times \text{área } no st$ aplicados á los puntos h, m, t y x , y así para las demás ht, cd , etc.

El sumando $P e$, del momento máximo de flexión, para todas las piezas, es de pequeño valor por la pequeña magnitud de e , y esta ventaja es uno de los fundamentos de la disposición de suelos que estamos considerando. Los suelos embrochados presentan, en cambio, gran complicación de ensambladuras.

595. Presión en los muros. — Los extremos de los cabios ó viguetas que apoyan en los muros, han de asentarse sobre base suficientemente grande para que la presión que causan en las mamposterías no exceda de 6 kilogramos por centímetro cuadrado. En los suelos de madera nunca se llega á esta cifra por la pequeña separación de los cabios y la gran superficie de asiento del marco de soleras, que distribuye las presiones á los muros; pero en las viguetas de hierro son de temer presiones excesivas, con perjuicio de la resistencia de las mamposterías, no solamente por la menor superficie de ocupación de dichas viguetas, sino también por el gran peso que sobre ellas insiste, á causa de la mayor separación que se les da y la considerable luz de las crujías. En las viguetas de hierro es de imprescindible necesidad el empleo de platinas metálicas para su asiento en los muros, á fin de que las presiones se repartan en mayor superficie.

596. Cálculo de las cargas. — El peso p' por metro cuadrado de piso es un dato necesario para el cálculo de los suelos; p' se compone de los siguientes sumandos:

- | | | |
|---------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|
| Peso propio del suelo, ó peso muerto. | } | 1.º Peso propio de los cabios ó viguetas. |
| | | 2.º Peso del forjado ó relleno de las viguetas, techos, solados, entarimados, etc. |
| | | 3.º Peso de los tabiques longitudinales ó trasversales á las viguetas. |

- | | | |
|------------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|
| Sobrecargas..... | } | 4.º Peso de las personas y de los muebles, en las habitaciones. |
| | | 5.º Peso de las mercancías en los almacenes, de los cereales en los graneros, etc. |

Á continuación damos tablas para la determinación de cada uno de estos sumandos, con cuyo auxilio se podrá formar el valor de p' en todos los casos.

La tabla núm. 1 contiene los datos relativos al peso propio de los cabios de madera y viguetas de hierro, correspondientes á cada metro cuadrado de piso para diversas luces. Claro es que á mayor luz, ó longitud de vigueta, corresponde á ésta mayor escuadría, y, por tanto, peso propio mayor; idéntica influencia tienen las cargas que ha de resistir el suelo.

La tabla núm. 2 encierra todos los datos concernientes á peso de los forjados, techos y pavimentos.

La tabla núm. 3 da el peso, por metro cuadrado, de los tabiques y tabicones que se emplean comunmente para la distribución en los edificios, y la núm. 4 el peso de las sobrecargas, según el destino de la obra.

Cuando no se quiera hacer el cálculo detallado de los valores de p' , se podrán aceptar los datos de la tabla núm. 5 que corresponden al peso, por metro cuadrado de piso, debido á los cabios ó viguetas, forjado, techos, pavimentos y á la sobrecarga, no incluyendo el peso de los tabiques, porque su efecto se calcula aparte, como veremos en los núms. 597 á 599.

TABLA NÚM. 1

PESO MÁXIMO DE CABIOS Y VIGUETAS DE HIERRO EN LOS SUELOS,
POR METRO CUADRADO DE PISO

CARGAS por m. ² de piso, kilogramos.	CABIOS DE MADERA						VIGUETAS de hierro doble T laminadas.		
	PINO Luces.			ENCINA Luces.			Luces.		
	4m	6m	8m	4m	6m	8m	4m	6m	8m
100	14	24	38	20	34	55	14	24	28
200	20	34	55	30	50	80	18	31	41
300	30	50	80	41	70	115	30	50	58
400	32	55	85	50	85	130	27	46	63
500	41	70	105	58	98	158	41	70	81
600	45	77	110	65	110	170	36	61	85
800	55	94	135	80	136	200	43	73	100
1000	65	110	170	90	153	240	48	82	108

NOTA. En el cálculo de esta tabla se ha supuesto que la separación de las vigas entre ejes, y el coeficiente de trabajo admitido en el cálculo de las escuadrías, tienen los valores siguientes:

	Cabios de madera.	Viguetas de hierro.
Distancia entre ejes.....	0 ^m ,30	0 ^m ,70
Coefficiente de trabajo....	60 kilogs. por cm. ²	7 kilogs. por mm. ²

TABLA NÚM. 2

PESO DE FORJADOS, GUARNECIDOS, SOLADOS, ETC., POR METRO CUADRADO DE PISO

FORJADOS, GUARNECIDOS, SOLADOS, ETC.	PESO POR METRO CUADRADO de piso, en kilogramos.
FORJADO EN SUELOS DE MADERA	
Suelo de sesmas (0 ^m ,207 × 0 ^m ,15 de escuadría), con botes; distancia de las sesmas, entre ejes, e = 0 ^m ,33.	119
Idem de viguetas (0 ^m ,207 × 0 ^m ,15), con ídem, para e = 0 ^m ,33.	106
Idem de maderos de á seis (0 ^m ,184 × 0 ^m ,115), con íd., para e = 0 ^m ,33.	100
Idem de maderos de á ocho (0 ^m ,149 × 0 ^m ,092), con íd., para e = 0 ^m ,28.	94
Idem de maderos de á diez (0 ^m ,115 × 0 ^m ,08), con íd., para e = 0 ^m ,20.	80
Idem de sesmas ó viguetas en las condiciones anteriores, pero con forjado de cascote ó ripio.	126
Idem íd. de maderos de á seis.	113
Idem íd. de íd. de á ocho.	98
Idem íd. de íd. de á diez.	84
Idem de tablonces del Norte (0 ^m ,23 × 10) con bovedillas (e = 0 ^m ,33).	192
FORJADO EN SUELOS DE HIERRO	
Distancia media entre los ejes de las viguetas: e = 0 ^m ,70.	Espeor de 0 ^m ,10 ... 180
Forjado macizo, de yesones, cascote ó ripio, granzas ó yeso, comprendiendo el peso del falsete y enfoscado del techo.	» de 0 ^m ,15 ... 250
	» de 0 ^m ,20 ... 300
	» de 0 ^m ,10 ... 110
Forjado con canales, en las condiciones anteriores.	» de 0 ^m ,15 ... 150
	» de 0 ^m ,20 ... 180

FORJADOS, GUARNECIDOS, SOLADOS, ETC.	PESO POR METRO CUADRADO de piso, en kilogramos.	
Forjado de botes, tomados con yeso, comprendiendo el enfoscado para enrasar techo y pavimento.....	Espesor de 0 ^m ,10 ... 136 » de 0 ^m ,15 ... 140 » de 0 ^m ,20 ... 150	
Bovedilla de rasilla, de tabicado sencillo, con relleno en los riñones hasta enrasar con el trasdós de la clave.....	» 100 á 150	
Bovedilla de ladrillo ordinario; rosca de 0 ^m ,14 de espesor, enrasada al nivel de la clave por el trasdós.....	» 300	
Bovedilla de ladrillo hueco, de 0 ^m ,11 de espesor, en las condiciones anteriores.....	» 180 á 200	
Planchas combadas, de palastro, de 5 á 10 milímetros de espesor.....	» 40 á 80	
TECHOS		
Casetones y molduras.....	Pequeños..... 40 Grandes..... 80	
Guarnecidos y maestreados, techos enlistonados.	48	
Idem íd. en íd. encañados.....	39	
Blanqueo (yeso fino tendido con llana).....	3	
PAVIMENTOS		
Tierra para el asiento de baldosa ordinaria....	32	
Pavimento de yeso.....	Espesor de 0 ^m ,025 ... 35 » de 0 ^m ,050 ... 70	
Solado de mármol blanco y negro.....	68	
Idem de pizarra y alabastro.....	46	
Idem de mosaico de baldosín Nolla.....	28	
Idem de baldosín de Ariza.....	26	
Idem de baldosa ordinaria.....	22	
Idem de azulejos.....	24	
Empedrados con cuña.....	300	
Idem con morrillo.....	150	
Entarimados. .	Tabla de pino.....	13
	Idem de encina.....	18
	Rastreles de pino.....	6

TABLA NÚM. 3

PESO DE LOS TABIQUES DE DISTRIBUCIÓN, POR METRO CUADRADO DE TABIQUE

CLASE DE TABIQUE	PESO del metro cuadrado en kilogramos.
1. Tabique de ladrillos huecos, de 8 centímetros de espesor.....	90
2. Tabiques entramados, forjados con yesones y yeso, de 8 centímetros de espesor.....	100
3. Tabiques sencillos, de ladrillo macizo, con entramado ó sin él, de 8 centímetros de espesor, guarnecidos por los dos paramentos.....	145
4. Tabique de ladrillos huecos tomados con yeso, de 12 centímetros de espesor.....	145
5. Tabicones de 12 centímetros de espesor, de yesones tomados con yeso.....	145
6. Idem de 15 centímetros de espesor.....	200
7. Tabicones de ladrillos huecos, tomados con yeso, de 16 centímetros de espesor.....	200

TABLA NÚM. 4

PESO DE LA SOBRECARGA EN LOS SUELOS

CLASES DE EDIFICIOS Y DE HABITACIONES	SOBRECARGA por metro cuadrado de piso, en kilogramos.
Habitaciones en las casas particulares.....	80
Salones de recepción (casas de lujo).....	200
Salones para audiencias, espectáculos, etc., cuarteles, hospitales, almacenes de mercancías de pequeño peso con respecto á su volumen, etc.....	300
Almacenes de forraje. Por cada metro de altura.....	100
Graneros. Por cada metro de altura.....	450

NOTAS. 1.^a En los almacenes y depósitos no comprendidos en esta tabla, se hará directamente el cálculo de la sobrecarga con conocimiento de la naturaleza de la materia que ha de almacenarse y de su colocación en el almacén.

2.^a En los datos relativos á los suelos de habitaciones, va comprendido el peso de las personas y el de los muebles que ordinariamente se emplean. Si se hiciese uso de muebles muy pesados, ó de otros objetos de gran densidad, se calcularía aparte el efecto local que producirían en las viguetas del suelo.

TABLA NÚM. 5

PESO TOTAL, POR METRO CUADRADO DE PISO, PARA EL CÁLCULO DE LOS CABIOS Y VIGUETAS DE SUELOS, NO COMPRENDIENDO EL PESO DE LOS TABIQUES

CLASE DE EDIFICIOS Y DE HABITACIONES	PESO TOTAL POR METRO CUADRADO DE PISO, SIENDO EL RELLENO DEL ESPACIO COMPRENDIDO ENTRE LAS VIGAS		
	Cascote y yeso. Roscas de ladrillo macizo, de 0, ^m 14 de espesor. Kilogramos.	Bovedilla de rasilla de simple tabicado. Palastros combados. Kilogramos.	Bovedilla de ladrillo hueco de 0, ^m 11 de espesor. Forjado de botes y yeso. Idem con canales. Kilogramos.
SUELOS DE HIERRO			
1. Casas particulares.....	400	250	300
2. Salones de recepción (casas de lujo).....	550	400	450
3. Grandes salones para audiencias, espectáculos, etcétera; cuarteles, hospitales y almacenes de mercancías de poco peso.	650	500	550
SUELOS DE MADERA			
1. Casas particulares.....	300	200	250
2. Salones de recepción (casas de lujo).	400	300	350
3. Grandes salones para audiencias, espectáculos, etcétera; cuarteles, hospitales y almacenes de mercancías de poco peso.	450	350	400

NOTAS. 1.^a Los números de esta tabla comprenden el peso propio de las viguetas ó cabios; el del forjado ó relleno, pavimento y sobrecargas.

2.^a Los números relativos á los suelos de madera, son menores que los correspondientes á viguetas de hierro, porque los cabios están menos espaciados que éstas, y la madera pesa menos que el forjado ó relleno.

597. Tabiques paralelos á las viguetas. — Algunos constructores presciden del peso de los tabiques en el cálculo de los suelos, fundados en que la adherencia del yeso hace del total como un monolito que carga principalmente sobre los muros del edificio; pero esto no es exacto, ni aun para los tabiques colocados normalmente á las crujías y apoyados por sus extremidades en muros de carga; para los demás, la hipótesis es completamente inexacta, y en todos casos debe tomarse en cuenta, para el cálculo de los suelos, el peso de toda la tabiquería, que es de consideración, como puede verse en la tabla 3.^a del número anterior. Solamente se prescindirá de él cuando se construyan tabiques colgados, cuyo peso descarga sobre los muros inmediatos merced al entramado correspondiente.

Cuando los tabiques tienen dirección paralela á la de las viguetas, como los *UV* de las figs. 7.^a y 8.^a (lám. 24), se encuentran en condiciones desfavorables de resistencia las situadas inmediatamente debajo de aquéllos, pues á más de su peso han de resistir el de la parte de suelo que les corresponde. Si llamamos *h* á la altura del tabique y *t* al peso del metro cuadrado, la vigueta que soporta el tabique tendrá un momento máximo de flexión

$$M_o = \frac{1}{8} p' e l^2 + \frac{1}{8} h t l^2 \quad (6)$$

correspondiendo el primer sumando al peso del suelo, y el segundo al del tabique.

El valor de M_o llega á ser muy grande cuando lo son la luz de la crujía (*l*) y la altura del tabique (*h*), como sucede en los grandes edificios. Entonces no se puede colocar una sola vigueta debajo del tabique, sino dos ó más, reunidas del modo que indica la fig. 13 de la lám. 24, ó bien se emplea una viga compuesta de palastro de forma de doble *T* (figs. 36 y 52, lám. 21), ó tubular (figs. 35 y 57, lám. 21).

El primer caso se resuelve como el de *m* vigas yustapuestas, iguales y de igual material (núm. 541): la ecuación de resistencia es,

$$m \frac{RI}{r} = M_o \quad (7)$$

teniendo M_o el valor (6) precedente, y siendo *m* el número de viguetas yustapuestas. Si se emplean vigas compuestas, se calcularán del modo explicado en el núm. 523.

598. Tabiques trasversales. — Llamemos (fig. 8.^a, lám. 24),

- l* = luz de la crujía,
- e* = separación de viguetas, entre ejes,
- d* = distancia *OA* á que se encuentra el tabique del muro más próximo,
- c* = distancia *AH* al otro muro,
- h* = altura del tabique,
- t* = peso del metro cuadrado de tabique,
- p''* = peso por metro cuadrado de piso, que produce en la viga *OH* el mismo momento de flexión que el peso del tabique.

La vigueta *OH* recibe en *A* el peso de una superficie de tabique representada por *e h*; es decir, $P = e h t$. Está en el caso de flexión explicado en el núm. 317 (fig. 1.^a, lám. 6.^a), de modo que el momento máximo será

$$M'_o = \frac{P c d}{l} = \frac{e h t \times c d}{l} \quad (8)$$

El valor de M'_o se sumará al momento máximo $M_o = \frac{1}{8} p l^2$ correspondiente al peso total que carga sobre el piso, y se obtendrá el momento definitivo con arreglo al cual ha de calcularse la escuadría de la viga, según se ha explicado en los núms. 591 y 597.

Estos cálculos se pueden simplificar, hallando la equivalencia de carga del tabique en peso uniformemente repartido sobre el suelo, por metro cuadrado de piso, como vamos á ver. Busquemos el peso *p''* por metro cuadrado de piso que produciría en la viga *OH* el mismo efecto, en la flexión, que el tabique.

El momento máximo de flexión correspondiente á la sobrecarga *p''*, es $\frac{1}{8} p'' e l^2$: igualándolo al valor (8) anterior, resulta:

$$\frac{1}{8} p'' e l^2 = \frac{e h t c d}{l}$$

de donde

$$p'' = \frac{8 h t c d}{l^2} \quad (9)$$

Conocido el valor de *p''*, se sumará al *p* correspondiente al peso del sue-

lo, y se hallará la escuadría de las viguetas de modo que resistan al momento máximo de flexión

$$M_o = \frac{1}{8} (p + p'') l^2.$$

599. Con objeto de abreviar estas operaciones, hemos hallado los valores de p'' correspondientes á luces diversas de $l = 3$ á $l = 8$ metros, suponiendo una altura de tabique $h = 1$ metro, y distancias del tabique al muro, $d = 1$ á 4 metros, aplicando al efecto la fórmula (9). Para obtener el verdadero valor de p'' , no habrá más que multiplicar los números de la tabla por h , altura del tabique en metros.

Si hubiese dos tabiques transversales, EF, ST (fig. 8.^a, lám. 24), se determinarían los valores de p'' correspondientes á cada uno de ellos, y se sumarían.

Ejemplo 1.º Tabique único, de 3^m,50 de altura; luz $l = 5$ metros; peso del tabique por metro cuadrado, $t = 100$ kilogramos; distancia del tabique al muro, $d = 2$ metros.

$$p'' = 38 \times 3,50 = 133 \text{ kilogramos por m.}^2$$

Ejemplo 2.º Dos tabiques paralelos, en crujía de $l = 6$ metros; siendo $t = 150$ kilogramos y la altura $h = 4$ metros. Las distancias d son de 2 metros para el primer tabique y de 3 metros para el segundo.

Por el primer tabique..... $45 \times 4 = 180$
 Por el segundo tabique.... $49 \times 4 = 196$

$$p'' = 376 \text{ kilogramos por m.}^2$$

TABLA NÚM. 6

EQUIVALENCIAS DEL PESO DE LOS TABIQUES TRASVERSALES EN SOBRECARGA p'' POR METRO CUADRADO DE PISO

LUCES l en metros.	PESO del tabique por metro cuadrado en kilogramos.	VALORES DE p'' EN KILOGRAMOS, correspondientes á 1 metro de altura de tabique para distancias d del tabique al muro más próximo.						
		1 m	1 ^m ,50	2 m	2 ^m ,50	3 m	3 ^m ,50	4 m
3	100	59	66	»	»	»	»	»
	150	88	99	»	»	»	»	»
4	200	118	132	»	»	»	»	»
	100	37	46	50	»	»	»	»
5	150	55	69	75	»	»	»	»
	200	74	92	100	»	»	»	»
6	100	25	33	38	40	»	»	»
	150	37	49	57	60	»	»	»
7	200	50	66	76	80	»	»	»
	100	18	25	30	32	33	»	»
8	150	27	37	45	48	49	»	»
	200	36	50	60	64	66	»	»
9	100	14	19	23	26	27	28	»
	150	21	28	34	39	40	47	»
10	200	28	38	46	52	54	56	»
	100	10	15	18	21	23	24	25
11	150	15	22	27	30	34	36	37
	200	20	30	36	42	46	48	50

600. Observación relativa á los coeficientes de trabajo empleados en el cálculo de los suelos. — La carga total del suelo no obra constantemente, puesto que se compone de dos sumandos que son el peso muerto y la sobrecarga, el segundo de los cuales puede variar desde cero hasta el valor que para cada caso hemos asignado. Según esto, la carga p por metro cuadrado de piso es una cantidad variable, cuyo límite inferior es el peso muerto, y cuyo límite superior es la suma de este peso y del máximo de la sobrecarga.

Estamos, pues, en el caso del núm. **669**, y se podría obtener la solución empleando las fórmulas 22 y 23 (núm. **669**). No suele hacerse, sin embargo, porque el gran valor del peso muerto es causa de que la relación $\frac{\text{mínimo}}{\text{máximo}}$ se aproxime mucho á la unidad, especialmente en los suelos de habitaciones ordinarias: más aplicable sería dicha fórmula á los cálculos de suelos de grandes salones, donde la sobrecarga, ocasionada por el peso de muchas personas reunidas, puede variar entre límites muy diferentes; y ni aun en este caso se hace así, porque difiere algo de los comprendidos en la ley de Woehler, según tendremos ocasión de ver más adelante (núms. **660** y **666**).

601. Suelos de madera. — Los cabios se colocan, generalmente, á distancias de 0^m,20 á 0^m,40 entre ejes, según las luces. Por la combustibilidad del material, y la pequeña longitud de las maderas, se emplean cada vez menos en edificios de alguna importancia.

Se admite, para el cálculo, un coeficiente de trabajo $R = 60$ kilogramos por centímetro cuadrado. La escuadría de los cabios se puede determinar muy fácilmente, y con notable economía de tiempo, utilizando la tabla del núm. **507**.

En el término $\frac{Pl}{n}$, que ha de formarse, recordaremos que

$$n = 8 \text{ y } P = p'el.$$

En la formación del producto $p'el$, valor de P , deberá tomarse e y l en metros, puesto que p' representa carga por metro cuadrado.

El valor $\frac{1}{8} p'el$, así formado, se multiplicará por la longitud l tomada en decímetros, y con este producto se irá á las primeras columnas de la tabla del núm. **507**. A la derecha se tendrá la escuadría de los cabios, ya sean cilíndricos ó de sección cuadrada ó rectangular.

Ejemplo. Suelo de $l = 5$ metros de luz, forjado con cascote y yeso, para una casa particular. No hay tabiques trasversales.

Datos:

$$p' = 300 \text{ kilogramos por m.}^2 \text{ (tabla 5).}$$

$$e = 0^m,30.$$

$$l = 5^m.$$

$$\frac{1}{8} p'el = \frac{300 \times 0,30 \times 5}{8} = 56,25 \text{ kilogramos.}$$

Producto $\frac{1}{8} Pl$ de $\frac{1}{8} P$, en kilogramos, por l en decímetros,

$$\frac{1}{8} Pl = 56,25 \times 50 = 2812.$$

El valor inmediatamente superior, en la tabla del núm. **507**, es 3048; á él corresponden las escuadrías siguientes:

Sección cuadrada..... lado = 14,50 centímetros.

Sección rectangular..... lados $\left\{ \begin{array}{l} a = 11,02 \\ b = 16,53 \end{array} \right.$ »

Sección circular..... radio = 8,70 »

A falta de cabios de longitud suficiente, se pueden construir suelos con vigas compuestas de tablas (figs. 20 y 22, lám. 18), bien enzoquetadas. Recordaremos (núm. **544**) que la resistencia de cada una debe estimarse en 0,80 de la de una viga de una pieza, de iguales dimensiones; esto equivale á suponerles, en el cálculo, una carga p por metro lineal igual á $\frac{10}{8}$ de la ordinaria $p'e$, de modo que sería

$$\frac{Rab^2}{6} = \frac{10}{64} pl^2.$$

602. Suelos de hierro. — Las viguetas de hierro, ó de acero, se colocan á distancias e , entre ejes, que varían de 0^m,50 á 1^m, según las luces (l), altura de los hierros empleados y carga de los suelos (p'). A mayores valores de l y p' corresponden viguetas de sección mayor y de mayor altura, y entonces e aumenta. Como término medio puede hacerse $e = 0^m,70$.

Se pueden emplear viguetas laminadas ó compuestas, de palastro, todas de forma de doble *T*; las primeras pueden ser de tablas, ó alas, anchas, y las segundas de tablas estrechas (*). Las viguetas laminadas de alas anchas, son más resistentes que las de alas estrechas, á igualdad de altura, porque en aquéllas el valor de $\frac{I}{v}$ es mayor; puede observarse esta diferencia examinando la tabla 3.^a del núm. 489; por ejemplo, las viguetas núms. 203 y 297, tienen la misma altura (152 milímetros), y los valores de $\frac{I}{v}$ son:

$$\text{Vigüeta núm. 203 (tablas estrechas)} \left(\frac{152 \times 82}{15} \right) \dots \frac{I}{v} = 0,000\ 154$$

$$\text{Vigüeta núm. 297 (tablas anchas)} \left(\frac{152 \times 126}{10} \right) \dots \frac{I}{v} = 0,000\ 248.$$

Las viguetas de palastro, compuestas de alma, escuadras y tablas, dan todavía mayores valores de $\frac{I}{v}$, porque el alma puede ser de pequeño espesor, y las tablas contribuyen con gran sumando á la composición de *I*.

En resumen; á igual altura de vigüeta, el orden de resistencia de mayor á menor es:

- Viguetas compuestas, de palastro.
- Viguetas laminadas, de alas anchas.
- Idem íd., de alas estrechas.

Es conveniente fijar la atención en este punto, porque la altura de las viguetas debe subordinarse al espesor de los suelos, que no siempre puede ser tan grande como fuera de desear para la resistencia.

Observaremos que las viguetas compuestas, si bien resisten más que las laminadas, á igualdad de altura y peso por metro líneal, son de mayor coste.

Cualquiera que sea la clase de viguetas que se emplee (generalmente se

(*) Esta clasificación se funda en la proporción de dimensiones de las tablas y de la altura de la doble *T*. La tabla 3.^a del núm. 489, contiene viguetas de los dos tipos.

Ejemplos:

$$\text{Núm. 203: vigüeta de tablas estrechas} \dots \frac{152 \times 82}{15} \text{ (ancho de tabla = 82 milímetros)}$$

$$\text{Núm. 297: vigüeta de tablas anchas} \dots \frac{152 \times 126}{10} \text{ (ancho de tablas = 126 milímetros)}$$

hace uso de las laminadas), es de toda necesidad que asienten sus extremos sobre platinas de hierro fijadas á los muros, para que la presión se reparta sobre mayor superficie y no exceda de 6 kilogramos por centímetro cuadrado.

603. En los suelos de gran luz ó tiro, las viguetas llegarían á tomar flechas de magnitud excesiva, perjudiciales á la resistencia y al buen aspecto de los techos y pavimentos. Esto se evita encorvando las viguetas antes de ponerlas en obra, de modo que les resulte concavidad hacia el techo de la habitación inferior, medida por una flecha igual, por lo menos, á la de flexión dada por el cálculo. Si la flecha de la elástica fuese demasiado grande, se debería á que la altura de la vigüeta era de pequeño valor, y habría que aumentarla. En los grandes suelos conviene hacer esta comprobación.

Respecto al coeficiente de trabajo *R*, recordaremos lo dicho en el número 600. Suele hacerse *R* igual á 7 ú 8 kilogramos por milímetro cuadrado; pero será conveniente disminuirlo cuando los hierros sean de mediana calidad, caso frecuente en las vigas laminadas, ó cuando el suelo esté expuesto á choques y vibraciones, como en los salones de baile, almacenes, etcétera. En las viguetas de acero los valores de *R* pueden ser de 7 á 10 kilogramos.

604. Los detalles de cálculo nos son ya conocidos (núm. 590); pueden simplificarse, no obstante, las operaciones, valiéndose de las tablas del número 508 que nos dan la resistencia de viguetas laminadas de variadas dimensiones, supuestas empotradas en uno de sus extremos y cargadas en el otro con un peso *P*.

Como las viguetas de suelo resisten un peso ocho veces mayor, por estar apoyadas en los extremos y cargadas uniformemente (*n* = 8, núm. 405), se tomará $\frac{1}{8}$ del peso que actúa sobre cada una, esto es, $P = \frac{1}{8} p' e l$, y con el valor de *P* se acudirá á las tablas, á la columna correspondiente al valor de *l*, y allí se encontrarán las viguetas que convienen al problema, para el coeficiente de trabajo *R* que se desee, comprendido entre 6 y 10 kilogramos por milímetro cuadrado.

Ejemplo. Suelo de 6 metros de luz; viguetas espaciadas 0^m,70 entre ejes; carga por metro cuadrado de piso, *p'* = 400 kilogramos.

$$P = \frac{1}{8} p' e l = \frac{1}{8} \times 400 \times 0,70 \times 6 = 210.$$

Acudiendo con este número á la tabla del núm. 508, se encuentran las soluciones siguientes:

VALOR P de la tabla del núm. 508 en kilogramos.	COEFICIENTE DE TRABAJO R en kilogramos por mm. ²	TIPO DE VIGA de la tabla 9. ^a del núm. 489.
212	8	210... $\left(\frac{200 \times 65}{8 \times 11} \right)$
220	7	250... $\left(\frac{220 \times 64}{10} \right)$

605. En los edificios de importancia, y cuando se emplean viguetas de hierro, es conveniente estudiar la disposición de suelo más económica, pues las diferencias de coste pueden alcanzar considerable valor.

El suelo de un espacio rectangular MS (fig. 9.^a, lám. 24) se podrá organizar de los siguientes modos:

1.º Con viguetas normales á los lados mayores, como se ve en N (fig. 8.^a, lám. 24).

2.º Por medio de vigas maestras AB , CD (fig. 9.^a, lám. 24) que dividen el suelo en tres partes iguales P , P' , P'' , colocando las viguetas paralelamente á los muros MD y AS . Las distancias $ca = ab = bd$ son menores que la luz AB de la crujía; de este modo las viguetas podrán ser de menos escuadría que las de la solución anterior.

3.º Dividiendo el suelo en tres partes P , N , N' , como manifiesta la figura 9.^a (lám. 24), por medio de las vigas maestras AB y CD .

Las soluciones segunda y tercera son más económicas que la primera cuando la luz de la crujía es grande, porque el aumento de peso de metal á que dan lugar las vigas maestras, queda suficientemente compensado con la economía que se obtiene en las viguetas, porque su longitud ha disminuído, y, por tanto, su escuadría se ha reducido también.

De todos modos, es fácil hacer un tanteo para elegir la solución más conveniente en el concepto económico.

Las vigas maestras son generalmente de palastro, de forma tubular ó de doble T . Para su cálculo se pueden utilizar las tablas del núm. 527, multiplicando por 8 los pesos que figuran en dicha tabla, ó bien dividiendo por 8 las cargas que actúan sobre las vigas, y acudiendo con el cociente á las tablas citadas.

DINTELES, CARGADEROS

606. Los dinteles de ladrillo y de piedra se encuentran en desfavorables condiciones de resistencia, especialmente cuando los vanos son grandes, y por esta razón se sustituyen, con ventaja, por vigas de hierro, ya de una sola pieza, de forma doble T (figs. 36 y 51, lám. 21), ó de forma tubular (figs. 35 y 57, lám. 21), ya de varias yustapuestas, como indica la fig. 13 de la lám. 24.

Preferible es la primera solución, esto es, la de vigas únicas, de palastro, no solamente porque dan mayores valores de $\frac{I}{v}$, sino también porque todos los elementos contribuyen á la resistencia de modo conveniente, mientras que en las vigas yustapuestas es muy difícil conseguir, cualquiera que sea la manera de enlazarlas, que se distribuyan la carga de modo igual.

El cálculo de los dinteles, cualquiera que sea su organización, se hace del modo explicado en los núms. 508 y 509, aplicando la ecuación de resistencia

$$\frac{RI}{v} = M_0.$$

El valor de M_0 se determinará, en cada caso particular, según la disposición y magnitud de las cargas, por los procedimientos analíticos y gráficos del capítulo V, empleando, cuando sea conveniente, el método de *superposición* de efectos. Algunos ejemplos darán más luz sobre este punto, que por lo demás no ofrece dificultades.

607. 1.º Caso de la fig. 10, lám. 24. — Sobre el dintel OH viene á cargar:

El peso del suelo, cuyas viguetas apoyan en el dintel, como se ve en el dibujo. Esta carga está uniformemente repartida; y representándola por P' , y por l la longitud del dintel, dará lugar á un momento máximo de flexión, en el punto medio, cuyo valor es:

$$M'_0 = \frac{1}{8} P' l.$$

El peso P'' de la parte de muro $cdhr$, también uniformemente repartido; el momento máximo correspondiente es:

$$M''_0 = \frac{1}{8} P'' l.$$

El peso de la parte de muro comprendido por los planos AB , CD y ef , y el de la cubierta y pisos comprendidos por AB y CD . Si el entrepaño ef fuese de pequeña anchura, se consideraría este peso como fuerza aislada P''' , aplicada al punto medio del dintel, en cuyo caso el momento máximo de flexión correspondiente sería $M'''_0 = \frac{1}{4} P''' l$; cuando ef sea grande, se supondrá, para el cálculo, que P''' está uniformemente repartido en el intervalo ef (caso 3.º, núm. 325).

Por efecto de la simetría de las cargas, todos los momentos máximos parciales corresponden al punto medio del dintel; de modo que el momento definitivo M_0 es:

$$M_0 = M'_0 + M''_0 + M'''_0.$$

El problema se resuelve con mayor facilidad si se prescinde de los vanos y se supone que el muro es lleno. Entonces la carga total, uniformemente repartida, que obra sobre el dintel, es $P = P' + P'' + P'''$, y el momento máximo vale $M_0 = \frac{1}{8} P l$.

608. 2.º Caso de la fig. 11, lám. 24. — Llamando P á la carga que actúa sobre el dintel, que es el peso de la parte de construcción comprendida entre las verticales de los puntos a y c , será:

$$M_0 = \frac{1}{8} P l.$$

Algunas veces sucede que, por efecto de la flecha que toma el dintel al flexarse, las mamposterías hacen asiento según la línea quebrada abc ; de modo que únicamente el peso P_1 de esta parte es la que carga sobre el dintel, haciendo el resto el papel de bóveda en descarga; de este modo se explica la resistencia de algunos dinteles reconocidamente débiles.

En la dificultad de apreciar el justo valor de P_1 , porque los asientos de la mampostería y las dimensiones de abc dependen del material, aparejo, mano de obra y otras muchas causas, es prudente no contar con disminución

alguna de peso, y tomar para carga del dintel el valor de P , esto es, los pesos comprendidos por las verticales de a y c .

609. 3.º Caso de la fig. 12 (lám. 24). — La carga P_2 , correspondiente al macizo $abcd$, dará un momento máximo de flexión que habría que sumar al de la carga repartida, relativa al peso del suelo; dicho momento máximo se determinará de modo semejante al del caso explicado en el núm. 324. La fuerza P_2 puede considerarse como aislada, en obsequio á la brevedad, y aplicada al punto medio de bd .

610. 4.º Caso de la fig. 1.ª (lám. 25). — Si la resultante P_3 de las cargas pasa por el punto medio de la viga, se aplicarán las fórmulas de los números 321 ó 317, según que se considere repartida ó aislada dicha fuerza P_3 . Si, además, las viguetas del suelo descansaran sobre el dintel, se tendría en cuenta también este peso en la determinación del momento máximo.

611. 5.º Dinteles con un punto de apoyo intermedio (figs. 2.ª y 3.ª, lám. 25). — Se debe evitar la disposición de la fig. 2.ª, porque la fuerza Q , presión sobre la columna, es oblicua, y tiende á hacerla girar; preferible es la disposición representada en la fig. 3.ª

En ambos casos se aplicarán las fórmulas generales de los núms. 386 y 387 y las del núm. 393. Pero es más sencillo calcular separadamente cada una de las partes AO , AH , como si estuviesen empotradas en A y apoyadas en O y en H .

612. Cargaderos en sustitución de un muro. — El muro AB (fig. 6.ª, lám. 25) se trata de sustituir por un cargadero $A, A'A''$, compuesto de una viga única de palastro, ó de dos ó más yustapuestas. Sea CD una viga maestra que descansaba sobre el muro AB suprimido, y ahora vendrá á cargar sobre la viga $A'A''$.

Sobre el cargadero $A'A''$, actúan los siguientes pesos:

1.º Peso del muro AE , y mitad de la cubierta, en la longitud $A'A''$; estas cargas, que representaremos por P' están uniformemente repartidas.

2.º Peso de la mitad del suelo $A'H$, ó sea $P'' = \frac{1}{2} p' l' \times A'A''$.

Es también una fuerza uniformemente repartida.

3.º Peso P''' que comunica en D la viga maestra CD . Tiene por valor

$$\frac{1}{4} p' l'' \times CD + \frac{1}{4} p' l''' \times CD,$$

ó

$$P''' = \frac{1}{4} p' \times CD (l'' + l''').$$

Los dos primeros pesos dan un momento de flexión máximo igual á $\frac{1}{8} P' \times A' A'' + \frac{1}{8} P'' \times A' A'' = \frac{1}{8} A' A'' (P' + P'')$, y el tercero (caso del núm. 317) ocasiona un momento en D , que tiene por valor

$$M'_0 = \frac{P''' \times A' D \times A'' D}{A' A''},$$

con el cual se podrá dibujar el triángulo $O A_1 H$ de los momentos de flexión (fig. 1.^a, lám. 6.^a). Dibujando también la parábola $O D_1 H$ (fig. 7.^a, lám. 6.^a) correspondiente á las cargas repartidas, se obtendría, por la suma de las ordenadas de las dos figuras, los momentos de flexión definitivos y el máximo absoluto.

613. En todos los problemas precedentes hay necesidad de determinar el peso de las mamposterías que cargan sobre los dinteles y vigas. Por esto interesa conocer los datos de la tabla siguiente, que son un complemento de los que contienen las de los núms. 140, 166 y tablas 2.^a, 3.^a y 5.^a del número 596.

	Kilogramos.
Mampostería ordinaria (metro cúbico).....	2200
Hormigón de almendrilla (íd.).....	2800
Idem de ladrillo santo (íd.).....	2300
Fábrica de ladrillo, en bóvedas de 0 ^m ,14 de espesor, con mortero (metro cuadrado).....	375
Cambios de pino, sin enzoquetar (metro cuadrado):	
Escuadría de sesma ($e = 0^m,33$).....	80
Idem de vigueta ($e = 0^m,33$).....	80
Idem de maderos de á seis ($e = 0^m,33$).....	50
Idem de íd. de á ocho ($e = 0^m,28$).....	40
Idem de íd. de á diez ($e = 0^m,20$).....	35
Idem de tablones del Norte ($e = 0^m,33$).....	50
Entramados verticales: pies derechos á 1 ^m ,40 de distancia, entre ejes, y dos órdenes de puentes:	
Peso de la madera (pino) por metro cuadrado de entramado de pie y cuarto (0 ^m ,327).....	100

	Kilogramos.
Peso de la madera (pino) por metro cuadrado de entramado de tercia (0 ^m ,228).....	80
Idem de íd. de sesmas ó viguetas.....	40
Idem de íd. para tabique de 0 ^m ,14 de espesor.....	18
Idem de íd. para íd. sencillo.....	8
Tabicones entramados: peso del entramado y del forjado por metro cuadrado. De pie y cuarto.....	
Idem íd. de tercia.....	560
Idem íd. de sesma ó vigueta.....	450
Idem íd. de medio pie.....	350
Idem íd. de tabique doble.....	230
Idem íd. de íd. sencillo.....	180
Idem íd. de íd. sencillo.....	80
Enfoscado (con maestras).....	30 á 40

OTRAS APLICACIONES

614. Repisas. — Las repisas ó ménsulas de piedra (fig. 6.^a, lám. 24) que sostienen balcones ó partes voladizas cualesquiera, se calculan como piezas empotradas en un extremo y cargadas uniformemente; de modo que, llamando l á su longitud, a y b á las dimensiones de la sección rectangular de empotramiento (b es el lado vertical), y P á la carga total, la ecuación de resistencia que determinará a y b , será:

$$\frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{2} P l;$$

R es el coeficiente de trabajo de la piedra por extensión; como es de pequeño valor, resultan valores grandes para a y b .

Se acostumbra á dar á la ménsula la forma de sólido de igual resistencia, en cuyo caso el perfil longitudinal sería dado por la ecuación

$$\frac{R a b^2}{6} = \frac{1}{2} p (l - x)^2,$$

según hemos visto en el núm. 575.

615. Suelos voladizos. (fig. 5.^a, lám. 25). — Los cabios OAB están en el caso de flexión resuelto en el núm. 443 (fig. 5.^a, lám. 11), siendo la carga uniformemente repartida, por metro lineal, $p = e p'$.

Para abreviar, se podrían calcular OA y AB separadamente, considerando á OA como pieza empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente, y á la AB como pieza empotrada en A y sometida también á carga uniformemente repartida.

En todos los casos, el problema no ofrece dificultad alguna.

Si se da un punto de apoyo á la parte volada, en B por ejemplo, por medio del tornapunta DB , actuará en este punto una fuerza F , mitad de la que obra en el intervalo AB , es decir, $F = \frac{1}{2} p \times AB$. Tomando, con arreglo á una cierta escala de fuerzas, la dimensión $da = F$, y trazando db y ab paralelas respectivamente á BD , BA , habremos formado el triángulo de fuerzas que expresa el equilibrio en el punto B , entre la fuerza exterior F y las interiores que se desarrollan según BA , BD ; recorriendo el triángulo en el sentido dab , y trasladando las direcciones de los lados á las piezas correspondientes, encontramos que la DB está sometida á compresión de magnitud db , y la AB á extensión representada por ab .

Se calcularían las dimensiones transversales de la viga AB considerándola como pieza empotrada en A , apoyada en B , y sometida además á una fuerza de extensión ab (núms. 586 á 588). El tornapunta DB , sometido á compresión, se calculará del modo que se explicará más adelante (número 674 y siguientes).

Las componentes horizontal y vertical de bd son ab y $ad = F$; el tornapunta BD comunica, pues, al muro una compresión F y un empuje ab .

Si el tornapunta se colocase en la posición DH , la parte AHB estaría, por lo que respecta á la flexión, en el mismo caso que la OAB cuando no había tornapunta, esto es, como apoyada en A y H , siendo HB la parte volada. El momento de flexión se determinaría analítica ó gráficamente (número 443), y formando el triángulo de fuerzas, como el dab del caso anterior, se hallaría la extensión que sufre AH ; la fuerza T que puede suponerse aplicada en H es $\frac{1}{2} p (AH + HB)$.

616. Vigas de carga común. — Supongamos dos vigas en cruz, AB y CD (fig. 4.^a, lám. 25), ya ensambladas, ya apoyándose una sobre otra, la CD , por ejemplo, sobre la AB , y que ambas soportan una misma carga P , aislada ó

repartida uniformemente en ambas vigas, de modo que se flexan á un tiempo adquiriendo una flecha común f .

Llamemos:

	Viga AB .	Viga CD .
Longitud de la viga.....	l'	l''
Peso que, obrando aisladamente sobre cada una de las vigas, produciría la misma flecha f que causa en ambas P	P'	P''
Altura de la sección transversal.....	b'	b''
Coefficiente de trabajo para las fibras más fatigadas por efecto de la flecha f común.....	R_1	R_2
Coefficiente de elasticidad.....	E'	E''
Momento de inercia de la sección transversal...	I'	I''

Según hemos visto en el núm. 405 (fórmula 3), la flecha f , común á las dos vigas, tiene por expresión:

$$\begin{aligned} \text{Viga } AB \dots\dots\dots & f = k \frac{P' l'^5}{E' I'} \\ \text{Viga } CD \dots\dots\dots & f = k \frac{P'' l''^5}{E'' I''} \end{aligned}$$

Igualando los segundos miembros, se deduce:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{E' I'}{E'' I''} \times \frac{l''^5}{l'^5}.$$

Como $P' + P'' = P$, se podrá obtener de estas dos ecuaciones el valor de las cantidades P' y P'' , y entonces se calcularán aisladamente cada una de las vigas AB y CD , como si estuviesen sometidas, respectivamente, á dichas fuerzas P' y P'' .

Si las dos vigas son del mismo material, $E' = E''$; si además tienen la misma sección transversal, de modo que $I' = I''$, tendremos:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{l''^5}{l'^5}.$$

es decir, que la carga total se reparte en fracciones inversamente proporcionales á los cubos de las longitudes. Cuando, además, $l' = l''$, será

$$P' = P'' = \frac{1}{2} P.$$

617. También tenemos

$$\frac{R_1 I'}{v'} = \frac{1}{n} P' l'$$

$$\frac{R_2 I''}{v''} = \frac{1}{n} P'' l'',$$

ó, sustituyendo v' y v'' por sus iguales $\frac{1}{2} b'$, $\frac{1}{2} b''$, dividiendo las dos ecuaciones, miembro á miembro, y sustituyendo la relación $\frac{P'}{P''}$ por su valor del número anterior,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{E'}{E''} \frac{b'}{b''} \frac{l''^2}{l'^2}.$$

Si las vigas son del mismo material,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b' l''^2}{b'' l'^2};$$

y para que los coeficientes de trabajo R_1 y R_2 sean iguales, deberá verificarse

$$b'' l'^2 = b' l''^2.$$

Cuando las vigas sean de igual longitud, será preciso que $b' = b''$; es decir, que ha de ser la misma, en ambas vigas, la dimensión paralela á las fuerzas de flexión.

617'. Planchas metálicas para pavimentos de edificios ó puentes. — Pueden ser planas, de forma rectangular (fig. 1.^a, lám. 54) ó circular, ó curvadas de sección circular ó parabólica (fig. 2.^a, lám. 54), ondeada (fig. 34, lám. 15), ó de forma de bóveda esquistada (fig. 4.^a, lám. 54). Pueden también estar apoyadas ó empotradas por dos de los lados opuestos solamente, ó por los cuatro lados.

Los problemas de resistencia relativos á las planchas apoyadas ó empotradas por dos lados opuestos AC , BD (fig. 1.^a, lám. 54), se resuelven por la fórmula (3) del núm. 501, sin más que sustituir b por e , espesor de

la plancha, y los de rigidez por la (3) del núm. 405. Tendremos, pues,

$$\frac{R a e^2}{6} = M_0 \quad (1)$$

$$f = k \frac{P l^3}{E I} \quad (2)$$

y no habrá más que sustituir M_0 , k é I por los valores correspondientes á cada caso de flexión, y consignados en las tablas de los núms. 404 y 477.

617''. Planchas apoyadas ó empotradas por dos lados opuestos:

1.º Plancha plana de grueso e , rectangular, de longitud $AC = a$ y ancho $AB = l$ entre apoyos (fig. 1.^a, lám. 54).

Apoyada en AC y BD , y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R e^2}{6} &= \frac{1}{8} p l^2 \\ f &= \frac{5}{32} \frac{p l^4}{E e^3} \end{aligned} \right\} (3).$$

Apoyada en AC y BD y cargada con P en el centro:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R a e^2}{6} &= \frac{1}{4} P l \\ f &= \frac{1}{4} \frac{P l^3}{E a e^3} \end{aligned} \right\} (4).$$

Empotrada en AC y BD y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R e^2}{6} &= \frac{1}{12} p l^2 \\ f &= \frac{1}{32} \frac{p l^4}{E e^3} \end{aligned} \right\} (5).$$

Empotrada en AC y BD y cargada en el punto central:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R a e^2}{6} &= \frac{1}{8} P l \\ f &= \frac{1}{16} \frac{P l^3}{E a e^2} \end{aligned} \right\} (6).$$

2.º Plancha ondeada de espesor e ; las generatrices de las ondas son paralelas á la dimensión AB (fig. 1.ª, lám. 54). Los valores de I é $\frac{I}{v}$, son los expresados en el núm. 477' (pág. 418). En este caso a no representa la longitud AC (fig. 1.ª, lám. 54), sino una parte de ella, que es la base de una onda (fig. 34, lám. 15); b es la altura de ésta.

Apoyada en AC y BD (fig. 1.ª, lám. 54), y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Reb^2(3a+2b)}{10} &= \frac{1}{8} pal^2 \\ f &= \frac{25}{96} \frac{pal^4}{Eb^2e(3a+2b)} \end{aligned} \right\} (7).$$

Empotrada en AC y BD y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Reb^2(3a+2b)}{10} &= \frac{1}{12} pal^2 \\ f &= \frac{5}{96} \frac{pal^4}{Eb^2e(3a+2b)} \end{aligned} \right\} (8).$$

3.º Plancha curvada de espesor e , de sección de arco circular ó parabólico de cuerda $sr = l$, y de flecha $ot = c$ (fig. 2.ª, lám. 54). La relación $\frac{c}{l}$

es, á lo más, igual á $\frac{1}{6}$. Puede colocarse en la disposición str (trazo seguido) ó en la $s't'r$ (línea de puntos) (*). Fórmula de J. Résal.

Apoyada en las generatrices s y r , y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re^2(15e^2+96c^2)}{6(15e^2+16ce)} &= \frac{1}{8} pl^2 \\ f &= \frac{5}{32} \frac{pl^4}{Ee^2} \left(\frac{15e^2}{15e^2+96c^2} \right) \end{aligned} \right\} (9).$$

(*) Este problema debe, en realidad, ser resuelto por la teoría de piezas curvas. (Véase cap. XII).

Empotradas en las generatrices s y r , y cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re^2(19e^2+16c^2)}{6(15e^2+4ce)} &= \frac{1}{12} pl^2 \\ f &= \frac{1}{3} \frac{pl^4}{Ee^2} \left(\frac{150e^2}{15e^2+192c^2} \right) \end{aligned} \right\} (10).$$

617^m. Cuando el empotramiento ó apoyo se extiende á todos los bordes de la plancha, ésta no puede asemejarse, para los efectos del cálculo, á una pieza prismática libre en todas las direcciones transversales, y el problema tiene que ser resuelto por los métodos de la teoría de la elasticidad. Nos limitaremos á dar las fórmulas más sencillas correspondientes á cada caso.

Planchas apoyadas por todos sus bordes:

1.º Planchas que cubren un espacio rectangular $ABDC$ (fig. 3.ª, lám. 54), ya sean planas (sección $A'B'$), ya de forma de arco circular ó parabólico (sección str).

Según Navier, las fórmulas correspondientes á estos casos se deducen fácilmente de las relativas al caso de planchas apoyadas en los dos bordes opuestos de longitud mayor; es decir, en AC y BD solamente, suponiendo que $BD > AB$, ó $a > l$. No hay más que multiplicar los segundos miembros de las ecuaciones (3), (4) y (9) por el factor $K = \frac{a^4}{(a^2+l^2)^2}$. Este factor

toma el valor de 1 para $a = \infty$, y es igual á $\frac{1}{4}$ cuando $a = l$, esto es, para las planchas de base cuadrada.

Por ejemplo: en el caso de plancha plana, rectangular, cargada uniformemente (ecuaciones (3)), las ecuaciones que resuelven el problema son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re^2}{6} &= \frac{1}{8} pl^2 \frac{a^4}{(a^2+l^2)^2} \\ f &= \frac{5}{32} \frac{pl^4}{Ee^2} \frac{a^4}{(a^2+l^2)^2} \end{aligned} \right\} (11).$$

Si la plancha es cuadrada, es decir, $a = l$, el espesor que da la fórmula (11), correspondiente al caso de apoyo en los cuatro lados, es la mitad del que resulta por las fórmulas (3) cuando sirven de apoyo solamente dos lados opuestos.

Por extensión, podremos, sin error sensible, aplicar las fórmulas (9), sin más que multiplicar los segundos miembros por el factor $K = \frac{a^4}{(a^2 + l^2)^2}$, á las planchas combadas, de forma de bóveda esquistada, representadas en la fig. 4.^a de la lám. 54, supuestas apoyadas por sus cuatro bordes planos. En este caso, c representa la ordenada máxima, en el centro O .

2.º Planchas circulares, de diámetro d , cargadas uniformemente con p por unidad superficial.

Fórmulas de Brune:

$$\left. \begin{aligned} R e^2 &= \frac{117}{512} p d^2 \\ f &= \frac{189}{1096} \frac{p d^4}{E e^3} \end{aligned} \right\} (12).$$

Planchas empotradas en todo su perímetro:

1.º Planchas que cubren un espacio rectangular. Se supone $a > l$. Fórmulas de Grashof.

Se multiplicarán los segundos miembros de las ecuaciones (5), (6) y (10), por el factor $K' = \frac{a^4}{a^4 + l^4}$.

2.º Plancha circular de diámetro d , cargada uniformemente con p por unidad superficial:

$$\left. \begin{aligned} R e^2 &= \frac{45}{256} p d^2 \\ f &= \frac{45}{8192} \frac{p d^4}{E e^3} \end{aligned} \right\} (13).$$

Las planchas de palastro suelen unirse por sus bordes á viguetas de hierro mediante filas de roblones. Esta unión no debe considerarse como empotramiento perfecto sino como un semiempotramiento. Cuando se trata de cargas uniformemente repartidas, M_0 no varía de valor (núm. 375), de modo que pueden emplearse las ecuaciones (5) y (10); pero si se trata de una sola carga central P ; recordaremos que el momento de flexión máximo vale entonces $\frac{3}{16} P l$, en vez de $\frac{1}{8} P l$ (núm. 370), y deberán introducirse las correspondientes variaciones en las ecuaciones (6).

5. CARGAS EN MOVIMIENTO

PIEZAS APOYADAS EN SUS EXTREMOS SUJETAS Á LA ACCIÓN DE CARGAS MÓVILES

618. En dos grandes grupos podemos dividir los problemas de flexión relativos á cargas móviles, refiriéndose el primero á las vigas de sección variable, y el segundo á las de sección constante. En ambos, una misma sección tendrá momento de flexión y esfuerzo cortante diferentes según la posición que ocupen los pesos móviles en la viga.

En las vigas de sección variable, esto es, en aquellas cuyas dimensiones transversales no son constantes, sino que se subordinan á los valores particulares que el momento de flexión M y el esfuerzo cortante C tienen en cada sección, como hemos visto sucede en las grandes vigas de los puentes (núm. 583), es de todo punto necesaria la determinación de los máximos de M y C para cada sección en particular, ó lo que es lo mismo, hay que hallar para cada sección la posición más desfavorable de los pesos móviles, es decir, la que produce momento de flexión y esfuerzo cortante mayores.

Cuando las vigas hayan de tener sección constante, interesa solamente el conocimiento del mayor de los máximos de M y C , ó valores máximos absolutos, pues con arreglo á ellos se han de determinar las dimensiones de la sección transversal constante.

Nos ocuparemos primeramente de la resolución del primer problema, que es el más complicado, y pasaremos después á la del segundo.

619. **Vigas de sección variable. Caso de carga aislada, única, móvil. Esfuerzos cortantes.** — Se demuestra que el esfuerzo cortante máximo C_0 , para una sección cualquiera de la viga de abscisa x , tiene lugar cuando el peso móvil carga sobre dicha sección.

Si el peso móvil P (fig. 1.^a, lám. 26), al moverse de H hacia O , se encuentra á la derecha de la sección A , á la distancia d , la reacción Q' del apoyo O , y por lo tanto, el esfuerzo cortante C , vale

$$C = Q' = P \frac{l - (x + d)}{l} \quad (1)$$

siendo l la longitud OH de la viga.

C alcanza su valor máximo C_0 , cuando $d = 0$; entonces,

$$C_0 = P \frac{l - x}{l} \quad (2).$$

Si P está á la izquierda de A (fig. 2.^a, lám. 26),

$$C = Q' - P = -P \frac{x - d}{l} \quad (3).$$

C es también un máximo, en valor absoluto, para $d = 0$, y tiene el valor

$$C_0 = -P \frac{x}{l} \quad (4).$$

Se deduce:

1.º El esfuerzo cortante producido en A , es positivo cuando P está á su derecha, y negativo si está á la izquierda. (Valores 1 y 3).

2.º Los máximos esfuerzos cortantes positivos para las diversas secciones de la viga (valor 2 de C_0), están representados por las ordenadas de la recta BH (fig. 1.^a, lám. 26) cuya ecuación es

$$y = P \frac{l - x}{l} :$$

la recta se construye fácilmente tomando $OB = P$ y uniendo B y H , porque

$$\text{para } \begin{cases} x = 0 \\ x = l \end{cases} \text{ se obtiene } \begin{cases} y = P \\ y = 0 \end{cases}$$

Los máximos esfuerzos cortantes negativos (valor 4), son dados por las ordenadas de la recta OB' , cuya ecuación es:

$$y = -P \frac{x}{l},$$

verificándose

$$\begin{matrix} x = 0 & x = l \\ y = 0 & y = P. \end{matrix}$$

Según esto, levantando en un punto cualquiera N la perpendicular ab á OH , las rectas Nb , Na representarán, respectivamente, los máximos esfuerzos cortantes positivos y negativos en aquella sección.

3.º Dos secciones equidistantes de los extremos (N y N') sufren esfuerzos cortantes máximos iguales y de signo contrario.

Si el peso móvil camina en dirección OH , los máximos esfuerzos cortantes positivos y negativos son dados, respectivamente, por las ordenadas de las rectas OB_1 , HB'_1 , que se construyen fácilmente haciendo $OB'_1 = HB_1 = P$.

Momentos de flexión.—El máximo momento de flexión M_0 para una sección cualquiera A de abscisa x , tiene lugar cuando el peso móvil P está aplicado á dicha sección.

Supóngase situado P á la derecha de A (fig. 1.^a, lám. 26). Llamando M al momento de flexión y Q' á la reacción del apoyo O , es $M = Q'x$.

A medida que P se acerca á A , aumenta Q' , y por consecuencia M : el máximo de M corresponde al caso en que P cargue sobre A , y tiene por valor

$$M_0 = P \frac{l - x}{l} x \quad (5).$$

Si P se encuentra á la izquierda de A (fig. 2.^a, lám. 26), llamando Q'' á la reacción del apoyo H ,

$$M = -Q''(l - x).$$

Pero Q'' aumenta en valor absoluto cuando P se aproxima á A , llegando al máximo (valor 5) cuando P está sobre A .

Los valores de M_0 para las diversas secciones de la viga, son dados por las ordenadas de la parábola

$$y = P \frac{l - x}{l} x,$$

de fácil construcción (núm. 584); pasa por los apoyos, y tiene para $x = \frac{1}{2} l$ una ordenada igual á $\frac{1}{4} P l$.

Sustitución de un peso móvil por una carga uniformemente repartida.— Si la viga se cargase en toda su longitud l , con peso p por unidad lineal, el momento de flexión para una sección cualquiera de abscisa x es (núm. 323):

$$M = \frac{1}{2} p (l - x) x.$$

El peso móvil P da un momento de flexión

$$M_0 = P \frac{l - x}{l} x.$$

De la igualación de estos valores resulta

$$p = \frac{2P}{l} \quad \text{ó} \quad P = \frac{1}{2} p l.$$

Es decir, que un peso móvil produce los mismos momentos de flexión que otro peso mitad uniformemente repartido.

No es posible encontrar equivalencia semejante en lo relativo á esfuerzos cortantes.

Para un peso móvil,

$$C_0 = P \frac{l - x}{l}.$$

Para la carga permanente p por unidad de longitud,

$$C = \frac{1}{2} p (l - 2x).$$

Igualando resulta:

$$P = \frac{pl}{2} \frac{l - 2x}{l - x},$$

valor función de x ; es decir, que para cada sección hay una equivalencia distinta, pero no una constante para toda la viga.

Combinación de un peso móvil P y cargas permanentes p' por unidad de longitud.— P equivale, para los momentos de flexión, á una carga repartida $\frac{2P}{l}$.

Puede suponerse que la viga está sometida á la acción de una carga repartida $p' + \frac{2P}{l} = p''$, y construir la parábola de los momentos, cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{2} p'' (l - x) x.$$

Para determinar gráficamente los esfuerzos cortantes, apelaremos al método de superposición de efectos.

Siendo OH la viga (fig. 3.^a, lám. 26) trazaremos la recta af , cuyas ordenadas representan los valores de los esfuerzos cortantes debidos á las cargas p' , á cuyo efecto haremos $Oa = Hf = \frac{1}{2} p' l$.

Tomando $Ob = Hh = P$, se trazarán las rectas Hb , Oh , que darán los esfuerzos cortantes correspondientes al peso móvil P .

No hay más que sumar las ordenadas de af con las de Hb y Oh , á cuyo efecto se hará $bc = Oa$, $hs = Hf$, y se trazarán mc y ns .

619'. Líneas de influencia en una viga apoyada en los dos extremos y sometida á la acción de un peso móvil.— Consideremos en la viga OH de longitud l (fig. 5.^a, lám. 54), una sección cualquiera S de abscisa x , y un peso móvil P . Se trata de determinar los diversos valores del momento de flexión que en la sección S produce el peso móvil P en sus diversas posiciones.

Hágase $OB = OS = x$; únense B y H , y también el punto O con el A intersección de BH con la perpendicular AS á OH .

Si el peso móvil está en b , punto de abscisa $Ob = z$, la reacción Q en el apoyo O es $\frac{P(l-z)}{l}$; y como $Sb = x - z$, se tendrá, para valor del momento de flexión en S :

$$M = \frac{P(l-z)}{l} x - P(x-z) = \frac{P(l-x)z}{l}.$$

Pero $y = \frac{(l-x)z}{l}$ no es otra cosa que la ecuación de la recta OA , cu-

yas coordenadas son y y z , puesto que, en efecto, para $z = 0$, $y = 0$, y para $z = x = OS$, $y = AS = \frac{(l-x)x}{l}$, y así resulta de la comparación de los triángulos semejantes OBH y SAH . Según esto, para obtener los valores de M , no habrá más que multiplicar por P las ordenadas a b , correspondientes á la abcisa $Ob = z$ que fija la posición del peso móvil.

Del mismo modo se vería que las ordenadas de AH , multiplicadas por P , dan los valores del momento de flexión en la sección S , cuando el peso móvil P recorre la parte SH .

La línea quebrada OAH , es la *línea de influencia de los momentos de flexión*, relativa á la sección S . Si la escala de longitudes que ha servido para trazar la línea OH , es $\frac{1}{m}$, diremos que los momentos de flexión que en la sección S produce el peso móvil P que recorre la viga OH , están representados, en escala $\frac{1}{P \times m}$, por las ordenadas de la línea de influencia OAH .

619^o. La línea de influencia de los esfuerzos cortantes, se obtiene también con gran sencillez.

Supongamos que el peso móvil P recorre la viga en la dirección HO (fig. 6.^a, lám. 54), y se desea conocer el esfuerzo cortante que en una sección S de abcisa x produce dicho peso al ocupar distintas posiciones en la viga, posiciones que definiremos por la distancia z del móvil al punto O .

Haciendo OB y HB' iguales á la unidad de longitud; trazando las rectas HB , OB' y la AE perpendicular á OH , obtendremos la *línea de influencia de los esfuerzos cortantes correspondientes á la sección S* , que es la $HAEO$. Las ordenadas de esta línea, estimadas en la escala de longitudes que ha servido para trazar OH , OB y HB' , y multiplicadas por P , darán los valores de los esfuerzos cortantes en S para las diversas posiciones del peso móvil. Por ejemplo; cuando el peso está en a , el esfuerzo cortante en S será $+(ab \times P)$; y si está en c , valdrá $-(cd \times P)$. Cuando el peso esté en S , habrá un esfuerzo cortante positivo $+(AS \times P)$ y otro negativo $-(SE \times P)$.

En efecto; si el peso P está en a , á la derecha de la sección S , el esfuerzo cortante en a y en S , es igual á la reacción del apoyo O ; de modo que

$$C = P \frac{(l-z)}{l};$$

pero la ecuación

$$y = \frac{l-z}{l}$$

corresponde á la recta HB , en que $OB = 1$; luego las ordenadas de HA , multiplicadas por P , dan los valores de C en el punto S , mientras P recorre HS .

Si P está en c , á la izquierda de S , el esfuerzo cortante en S vale

$$C = \frac{P(l-z)}{l} - P = -P \frac{z}{l};$$

y la ecuación

$$y = -\frac{z}{l}$$

corresponde á la recta OB' .

Si la escala de longitud es de $\frac{1}{m}$, las ordenadas de la línea de influencia

representarán los esfuerzos cortantes en S en escala $\frac{1}{P \times m}$.

Cuando el peso móvil camine en la dirección OH (fig. 7.^a, lám. 54), la línea de influencia será $OAEH$. Si unimos A y H , y trazamos DH haciendo $ED = AS$, la línea de influencia podrá ser sustituida por esta otra: $OAHDS$, recordando siempre que las ordenadas de toda línea OAH situada por encima de OH son positivas, y las de las líneas colocadas debajo, negativas. En efecto; la ordenada en el punto c , será $+cr - cs = -cd$, puesto que cr y ds son iguales en valor absoluto.

619^o. Empleo de las líneas de influencia para la determinación de los valores del momento de flexión y esfuerzo cortante que, en una sección S de una viga, producen varios pesos. —Para una cierta posición de pesos P' , P'' , P''' , P^{IV} , el momento de flexión M en S será (fig. 5.^a, lám. 54):

$$M = P' \times eh + P'' \times rn + P''' \times ts + P^{IV} \times ou.$$

Cuanto á los esfuerzos cortantes, tendremos (fig. 6.^a, lám. 54):

$$C = (P'' \times ur + P''' \times ts + P^{IV} \times ou) - P' \times eh$$

si el tren camina en la dirección HO ;

ó

$$C = +(P^{IV} \times ou) - (P' \times eh + P'' \times rn + P''' \times SE)$$

si la dirección es OH (fig. 8.^a, lám. 54). En este último caso hemos supuesto que uno de los pesos, el P''' , pisa la sección S .

620. Varias cargas aisladas. Esfuerzo cortante. — Supongamos ahora una combinación de cargas aisladas, á distancias invariables entre sí, puestas en movimiento sobre una viga apoyada en sus extremos. Es el caso de un carruaje que circula por un puente de carretera, ó de un tren compuesto de locomotora, ténder y carruajes, en una vía férrea.

Sea S (fig. 8.^a, lám. 36) la sección considerada: si el tren ingresa en la viga por la derecha, y se dirige á la izquierda, á medida que se acerca el primer peso 1 á la sección S , aumenta el valor de la reacción Q relativa al apoyo O , y, por lo tanto, el del esfuerzo cortante en S , que es positivo como Q é igual á Q , y representaremos por $+C$. El máximo de $+C$ tiene lugar cuando la fuerza 1 que va en cabeza pisa la sección S ; y esto es cierto aunque al acercarse 1 á S , ingresen nuevos pesos en la viga por el apoyo derecho H , porque con mayor razón aumentarán Q y $+C$.

Cuando, continuando el movimiento del sistema de pesos, alguno ó algunos de ellos rebasen la sección S y se sitúen entre O y H , el valor del esfuerzo cortante habrá variado. Supongamos (fig. 9.^a, lám. 36) que á la izquierda de S se encuentran los pesos 1 á n inclusivos, de resultante G' , y que á la derecha están los pesos restantes, desde el $n + 1$ hasta el último, de resultante G'' .

Sean:

Q = reacción del apoyo O , variable para cada posición diferente de pesos.

l = longitud de la viga entre apoyos

d_1, d_2, \dots, d_n , etc. = distancias al apoyo derecho H , de las fuerzas $1, 2, \dots, n$, etc.

Para la situación de pesos que está señalada en la figura, el esfuerzo cortante C en la sección S , es:

$$C = Q - G',$$

y C será positivo ó negativo, según que Q tenga mayor ó menor valor que G' .

1.^o $Q > G'$. Si el tren sigue su movimiento hacia la izquierda hasta que el peso $n + 1$ pise en la sección S , y no ha desaparecido por O ninguno de los pesos $1, 2$, etc., que van en cabeza, C aumenta de valor, porque Q aumenta y G' permanece invariable; de modo que el mayor valor de C ocurrirá cuando pise en S el peso $n + 1$.

Supongamos que cuando $n + 1$ llega á S , han desaparecido por O los pesos $1, 2, \dots, i$, que daban á la reacción Q los sumandos

$$1 \times \frac{d_1}{l} + 2 \times \frac{d_2}{l} + \dots + i \times \frac{d_i}{l}.$$

El minuendo Q habrá disminuído en esta suma, pero el sustraendo G' , resultante de las fuerzas situadas á la izquierda de la sección S , ha disminuído en $1 + 2 + \dots + i$, cantidad mayor; luego C habrá aumentado en definitiva, y su mayor valor, en este intervalo, resultará cuando el peso $n + 1$ pise en S .

Lo mismo sucederá si, en cualquiera de los dos casos anteriores, al moverse el tren de derecha á izquierda ingresan nuevos pesos por la derecha, porque aumenta por esta causa la reacción Q del apoyo O .

2.^o $Q < G'$. Podrá ponerse C bajo la forma

$$C = -(G' - Q).$$

Suponiendo ahora que el tren retrocede, de O á H , hasta que el peso n pise en la sección S , se demostraría igualmente, ya subsistan todos los pesos en la viga, ya desaparezcan algunos por la derecha ó ingresen por la izquierda, que el mayor valor absoluto de C en este intervalo, tendrá lugar cuando el peso n pise en la sección S .

Según vemos, cada uno de los pesos, al pasar por S produce un máximo relativo de esfuerzo cortante; el mayor de éstos será el máximo absoluto.

Resumiendo: *el máximo valor, positivo ó negativo, del esfuerzo cortante producido en una sección cualquiera S de abscisa x por el paso de un sistema de pesos, tiene lugar cuando uno de los pesos pisa en dicha sección.*

620'. Determinación del peso que produce esfuerzo cortante máximo en una sección S de abscisa x . — El problema puede resolverse mediante el empleo de las líneas de influencia (núms. 619'' y 619'''), situando el tren de modo que cada una de las fuerzas venga á colocarse en la sección considerada, y comparando los valores de C así obtenidos. Debe hacerse la operación suponiendo que la marcha tiene lugar en los dos sentidos opuestos. Se operará, para cada fuerza, del modo siguiente:

Supongamos que se trata de ensayar la fuerza 2 (fig. 9.^a, lám. 54), siendo HO la dirección del tren. La línea de influencia, trazada según las reglas del núm. 619'', será $HAE O$. Un momento antes de que la fuerza 2 pise la

sección S , cuando dicho peso dista de la citada sección una longitud infinitamente pequeña, el esfuerzo cortante que producen en S las fuerzas **1**, **2**, **3** y **4**, es

$$C = + (AS \times 2 + nr \times 3 + no \times 4) - eh \times 1.$$

Cuando el tren se encuentra en la posición **1'**, **2'**, **3'**, **4'**, habiendo rebasado la fuerza **2** la sección S en una longitud infinitamente pequeña, el esfuerzo cortante en S vale

$$C' = + (nr \times 3 + no \times 4) - (eh \times 1 + SE \times 2).$$

Habrà que comparar los dos valores C y C' , tomando el de mayor valor absoluto y dándole el signo que le resulte.

620°. En general, cuando los pesos más considerables van en cabeza, como sucede con un tren que lleva su locomotora delante, el esfuerzo cortante máximo en cada una de las secciones de la viga se produce cuando pisa en ella la primera rueda.

Por el contrario; si se trata de un carro ó de una fila de carros, arrastrados por caballerías, de modo que los pesos de éstas, que son los menores, van en cabeza, el mayor esfuerzo cortante en cada sección suele producirlo el último eje. Esta regla, sin embargo, puede tener sus excepciones, especialmente cerca de los apoyos.

Es fácil construir las líneas cuyas ordenadas sean representación de los máximos esfuerzos cortantes positivos y negativos para las diversas secciones de la viga, producidos al pisar en ellas el primer peso.

Sobre la viga MN de longitud l (fig. 5.ª, lám. 37), dibujemos la posición de los pesos como si, marchando de izquierda á derecha, viniese al apoyo derecho N el primer peso **1**. Construyamos el polígono de fuerzas La á partir de a como origen; y desde el polo O , tomado sobre la horizontal aO á k unidades de distancia de a , tracemos los radios polares y el polígono funicular correspondiente $DNcdfz$.

Demostraremos que las ordenadas del polígono funicular, multiplicadas por $\frac{k}{l}$ representan los valores de los máximos esfuerzos cortantes positivos de las secciones respectivas, correspondientes á una marcha del tren de derecha á izquierda, esto es, en dirección contraria á la que indica la posición supuesta á las fuerzas **1**, **2**, etc., en la construcción anterior.

Sea A una sección cualquiera; divídase AN en dos partes iguales (pun-

to X) y hágase girar 180° la viga alrededor de XX' , sin tocar á los pesos; el punto N vendrá á A , el A á N y el M á D . Hemos dibujado aparte en EF , la posición nueva de la viga; la sección A viene á A' , punto de aplicación de la fuerza **1**, y los otros pesos quedan, con respecto á **1** y á A' , en la misma situación relativa que tendrían si en la viga dada MN , y marchando el tren de derecha á izquierda, según hipótesis, el peso **1** pisa la sección A , en cuyo instante es un máximo el esfuerzo cortante en dicha sección. En una palabra; si hiciésemos girar 180° la viga EF , con los pesos **1**, **2**, etcétera, alrededor de la vertical que pasa por A' , quedaría la viga, la sección A y el tren, en la disposición conveniente para que se produjera en A el máximo esfuerzo cortante positivo. Todo lo que digamos de la viga EF marchando el tren en la dirección EF , es aplicable á NM , marchando los pesos de N á M .

El polígono funicular $DNcdf\dots$ antes trazado, sirve para la viga EF y pesos **1**, **2**, etc.: la línea final BD se obtendrá uniendo los puntos de intersección B y D de los últimos lados del polígono con las reacciones de los apoyos. Trazando por el polo O la recta Ob paralela á dicha línea final, las magnitudes $Lb = Q'$ y $ba = Q$ serán las reacciones de los apoyos E y F ; y el esfuerzo cortante máximo $+C$ en A' es igual á la reacción Q .

Pero de la comparación de los triángulos semejantes ABD , abO , se obtiene:

$$AB : AD :: ab : aO$$

$$AB : l :: Q = +C : k$$

de donde

$$+C = AB \times \frac{k}{l}.$$

Es decir, que la ordenada AB del polígono $Ncdfz$, multiplicada por $\frac{k}{l}$, representa el máximo esfuerzo cortante positivo en la sección A .

Si $k = l$, será $+C = AB$, y la construcción del polígono funicular es bien sencilla (fig. 6.ª, lám. 37). En el extremo izquierdo O levántese la perpendicular Od á la viga y tómesese en ella $Oe = 1$, $eb = 2$, etc., con arreglo á la escala de fuerzas. Dibújese con arreglo á la escala de longitudes la posición del tren, como si caminando de izquierda á derecha, pisase el peso **1** el apoyo derecho H .

Únase H con e , b , c y d ; por el punto s de intersección de He y **2**, trácese

se sn paralela á Hb ; por n , intersección de esta recta con 3 , nr paralela á Hc , y después rm paralela á Hd .

De igual manera se dibujaría el polígono OaB' de los esfuerzos cortantes negativos, correspondiente á la marcha del tren de izquierda á derecha.

En una sección cualquiera N el máximo esfuerzo cortante positivo, estimado en la escala de fuerzas, será NB , y el máximo negativo Na .

621. Momentos de flexión. — *El máximo momento de flexión, para una sección A de abscisa x , tiene lugar cuando sobre ella carga uno de los pesos móviles.* — Sea A (fig. 10, lám. 36), la sección de abscisa x , sobre la cual insiste el peso P_{n+1} ; llamemos G' á la resultante de los pesos P_1 á P_n inclusive, G'' á la resultante de los pesos P_{n+1} hasta el último, d' y d'' á sus distancias al apoyo izquierdo, Q á la reacción en este apoyo, y l á la longitud de la viga.

Tendremos:

$$Ql = G'(l - d') + G''(l - d'')$$

$$Q = \frac{1}{l} [G'(l - d') + G''(l - d'')].$$

El valor absoluto de M , momento de flexión en A , es

$$M = Qx - G'(x - d')$$

$$M = G' \frac{d'(l - x)}{l} + G'' \frac{x(l - d'')}{l}.$$

Supongamos que todo el sistema de cargas avanza hacia la derecha la cantidad s , sin que P_n llegue á A ; d' se convertirá en $d' + s$ y d'' en $d'' + s$. Llamando M_s el nuevo momento;

$$M_s = G' \frac{(d' + s)(l - x)}{l} + G'' \frac{x(l - d'' - s)}{l}$$

$$M_s - M = \frac{s}{l} [G'(l - x) - G''x].$$

Si $M_s > M$, á mayor valor de s corresponderá mayor valor para M_s ; de modo que en el intervalo de P_n y P_{n+1} el mayor momento corresponderá al caso en que P_n pise A . Esto es cierto, aun cuando en este intervalo des-

aparezcan pesos por la derecha (porque disminuirá G''), ó ingresen otros nuevos por la izquierda (porque aumenta G').

Si $M_s < M$, podremos escribir

$$M - M_s = \frac{s}{l} [G''x - G'(l - x)].$$

Esta diferencia será tanto más pequeña cuanto menor sea s ; de modo que $M_s = M$ para $s = 0$, ó, lo que es lo mismo, para el momento en que P_{n+1} carga en A .

Según esto, cuando queramos conocer la posición de cargas que produce en una cierta sección el máximo momento de flexión, habrá necesidad de situar, una á una, todas las cargas sobre esta sección, calcular el momento de flexión que en caso se produce en ella y tomar el mayor de ellos. Si se practica esta operación para varias secciones a, b, \dots de la viga (fig. 4.^a, lám. 36), y los máximos momentos en cada una se toman como ordenadas aa', bb' , etc., estimando sus valores en la correspondiente escala, tendremos un polígono de momentos máximos de flexión $Ad'B$ que se diferenciará tanto menos del verdadero cuanto mayor número de secciones a, b , etc., se tengan en cuenta.

El tanteo que exige cada sección, para determinar cuál de los pesos móviles ha de cargar en ella á fin de producir el momento máximo, es muy prolijo si se emplean los procedimientos analíticos explicados en los números 311 á 313. Es mucho más sencillo y expedito aplicar el método gráfico, y, como veremos á continuación, un solo polígono funicular puede ser suficiente para todos los tanteos.

Para las aplicaciones á los puentes de vía férrea, se suele formar la carga móvil de dos trenes compuestos de número indefinido de máquinas, cada una con su correspondiente tender, que, marchando en dirección contraria, vengán á encontrarse de modo que las dos locomotoras de cabeza se toquen por los topes de la traviesa delantera (*) (fig. 1.^a, lám. 36).

Es ésta una de las disposiciones más desfavorables para una viga, porque se hallan más concentradas las cargas. En los puentes de carretera, y en todos los demás casos, se elegirá la disposición de pesos móviles más perjudicial á la viga.

(*) Otras veces se forma la carga móvil con dos ó tres locomotoras en cabeza, de las más pesadas que puedan circular por la línea, seguidas de wágones cargados al máximo (16 á 17 toneladas de peso total por cada uno). (Véanse las tablas que se hallan al final de este número.)

Llamemos **1**, **2**, **3**, etc., los pesos del tren de la derecha, y **1'**, **2'**..., etc., los del de la izquierda (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 36). A partir de la horizontal aO , sumemos las fuerzas $1' = ab'$, $2' = b'c'$, etc., por encima de a , y las $ab = 1$, $bc = 2$, etc., por debajo; tómese el polo O , haciendo $aO = k$ unidades, y trácense los radios polares y el polígono funicular correspondiente, para lo cual la recta AA' , comprendida entre las fuerzas **1** y **1'**, será paralela al radio polar Oa ; las AB , BC , etc., han de ser paralelas á los radios Ob , Oc , etcétera, y las $A'B'$, $B'C'$, etc., paralelas á los radios Ob' , Oc' , etc., todo según las reglas que para el trazado del polígono funicular se han dado en los núms. 413 y siguientes.

Como hemos de considerar diferentes posiciones de las cargas móviles en la viga, es conveniente admitir un número de cargas tal que la longitud XZ ocupada por ellas sea mayor que la de la viga (DE , $D'E'$, etc.).

Con objeto de que el polígono funicular trazado sirva para los tanteos en todas las secciones de la viga, supondremos que los pesos están fijos, con lo cual el polígono funicular variará de posición, y que la viga se mueve á derecha ó izquierda la cantidad conveniente para que la sección sometida á tanteo venga á estar debajo de los diversos pesos.

Sea una sección distante la cantidad d del extremo izquierdo. Con arreglo á la escala de longitudes, dibujemos la recta $D'E'$, de longitud l , de modo que la sección considerada T'' esté debajo de un peso, del **1'** por ejemplo. Las perpendiculares $D'L'$, $E'F'$ á $D'E'$ representarán las direcciones de las reacciones de los apoyos, correspondientes á las cargas que pueden estar inscritas en la viga, que serán las comprendidas por las rectas RD' , PE' ; y según las reglas del núm. 416, la línea final del polígono funicular será la recta $L'F'$, y la ordenada $A'n$ correspondiente á la sección T'' multiplicada por k , representará el momento de flexión producido por el peso **1'** en la sección que dista d del extremo izquierdo.

Para encontrar el momento de flexión causado en la sección considerada por el peso **2'**, se haría $T''D'' = d$, y $D''E'' = l$, se obtendrá la línea final $L''F''$; la ordenada $B'r$, correspondiente á T'' , y limitada por dicha línea final, multiplicada por k , será el valor del momento buscado.

Del mismo modo hallaríamos que el momento de flexión engendrado en la sección distante d del extremo izquierdo de la viga, al pisar en ella los pesos **3'**, **1**, son:

$$\begin{aligned} \text{Peso } 3' & \dots\dots\dots C's \times k \\ \text{Peso } 1 & \dots\dots\dots At \times k. \end{aligned}$$

Comparando los valores anteriores, se encuentra que el máximo momento de flexión para la sección dada es producido al pisar el peso **1'**, y vale $A'n \times k$. Para hacer más fácilmente la comparación, y apreciar á simple vista las variaciones del momento de flexión, se dibujará, á guisa de ordenadas, sobre una recta $O'X'$ en que están señaladas las posiciones de los pesos **1**, **1'**, **2'**, etc., ordenadas $A''n'$, $B''r'$, iguales á las $A'n$, $B'r$, antes halladas, y se unirán los extremos por medio de rectas.

Iguales tanteos se harán para otras secciones que disten d' , d'' , etc., del apoyo izquierdo; y puesto que el tren puede moverse de derecha á izquierda y de izquierda á derecha, y los pesos que lo forman están distribuidos simétricamente con respecto á la línea $S'S''$, las secciones equidistantes de los extremos de la viga tendrán iguales momentos máximos, y bastará, por lo tanto, calcular los correspondientes á una semiviga, á la de la izquierda por ejemplo (Ad , fig. 4.^a, lám. 36).

Dividiremos, pues, Ad en dos, tres ó más partes (puntos a , b , ..., d); determinaremos para cada sección los momentos máximos, que llevaremos como ordenadas aa' , bb' , ..., dd' , y uniendo los puntos a' , b' , c' , obtendremos el polígono Ad' de los momentos máximos, cuya otra mitad ($d'B$) es simétrica de la primera, Ad' . Si además trazamos la parábola AEB de los momentos de flexión relativos al peso propio de la viga, á cuyo efecto, llamando p' al peso por metro lineal, haremos $mn = p'l$, tomaremos el polo O á las mismas k unidades de distancia empleadas en la fig. 2.^a (lám. 36) para el trazado del polígono funicular, y sumamos á las ordenadas cc' , bb' , las cc'' , bb'' , resultará el polígono definitivo ANB . El momento máximo de flexión total, en una sección R , será dado por el valor de la ordenada RP (estimada en la escala de fuerzas) multiplicada por el número k .

En estas construcciones, como en todas las de cálculo gráfico, son necesarias dos escalas, una de longitudes y otra de fuerzas.

Se facilitan mucho las operaciones gráficas que hemos descrito, dibujando en papel cuadriculado la viga DE y la sección A , y en papel trasparente el polígono funicular PF (fig. 3.^a, lám. 36) y dos rectas Pp , Tf paralelas á las ordenadas del polígono. Colocando el papel trasparente sobre el cuadriculado, se hará mover el polígono funicular, de modo que los vértices **1**, **2**, **3**, **1'**, **2'**, **3'**, que representan las posiciones relativas de los pesos **1**, **2**, **3**, **1'**, **2'**, **3'**, etc., se sitúen sobre la línea Aa . El papel trasparente dará los puntos L , F , L' , F' , de intersección de los lados del polígono funicular con las reacciones de los apoyos, y por tanto las líneas finales, que no habrá necesidad de trazar, pues basta aplicar una regla, y así se podrán medir las orde-

nadas $r s$ (momento debido á la fuerza 2), $m n$ (momento debido á la fuerza 1), etc.

Las rectas $P p$, $T f$ no tienen otro objeto que el de servir de guías en el movimiento del polígono funicular, haciéndolas coincidir con las líneas del papel cuadrículado que son normales á la viga $D E$.

621'. Otro procedimiento se emplea para determinar el polígono cuyas ordenadas representen los máximos momentos de flexión que en las diversas secciones de la viga producen las posiciones más desfavorables de cargas móviles.

Un peso cualquiera P_n , de los que componen el tren, pisa las diversas secciones de la viga, y produce en cada una, en combinación con los pesos restantes, un momento de flexión diferente. Comparados todos ellos, suponemos que el mayor, M_n , sea el que se produce en la sección A_n , que dista d_n del apoyo izquierdo: quiere esto decir que de todos los momentos de flexión que se producen en la viga por el paso del tren, debajo del peso P_n , el mayor tiene lugar en la sección A_n .

Si hallamos del mismo modo los momentos máximos de flexión M_{n+1} , M_{n+2} , etc., que se producen debajo de los pesos P_{n+1} , P_{n+2} , etc., y las secciones A_{n+1} , A_{n+2} , etc. en que tienen lugar, conoceremos, por comparación, el mayor de los máximos, ó *maximum maximorum*. Sea éste M_n , correspondiente al peso P_n , y sección de la viga A_n de abscisa d_n : sobre la viga $A B$ (fig. 6.^a, lám. 36), tomaremos $A A_n = d_n$ y $A_n E = M_n$; hecho lo cual, fijaremos la posición del tren (pesos P_{n-3} , ..., P_{n+2}) correspondiente á la del peso P_n sobre A_n en su movimiento de derecha á izquierda, y determinaremos, gráfica ó analíticamente, los momentos de flexión en los puntos a , b , c , que llevaremos como ordenadas ($a a'$, $b b'$, etc.). El polígono $A E B$ de momentos de flexión corresponde á la posición de pesos móviles más desfavorable para la viga, por cuanto produce el mayor de los momentos M_n (*).

La sección A_n no coincide con el punto medio H de la viga.

La simetría de pesos móviles hace que en el movimiento de izquierda á derecha resulte un polígono simétrico del $A a' b' c' E B$ con respecto á $X X$, que cortará á este eje medio en S ; tomando los dos semipolígonos mayores, resulta, para polígono de momentos máximos de flexión correspondientes á la sobrecarga móvil, el $A E S E' B$, cuyo eje de simetría es $X X$ que pasa por el punto medio H .

Sumando las ordenadas de la parábola $A R B$ relativa á los momentos

(*) Podría también hacerse que las ordenadas $a a'$, $b b'$ representasen los máximos momentos producidos por cada uno de los diversos ejes

causados por el peso propio de la viga (p' por metro lineal), obtendremos el polígono $A L B$ definitivo.

Réstanos exponer el modo de determinar el momento máximo causado por un eje cualquiera, fundamento del procedimiento anterior.

Construyamos el polígono funicular $F E D C B N'$ (fig. 5.^a, lám. 36) correspondiente al sistema de pesos 1, 2, ...; prolongando los dos últimos lados $B N'$, $E F$, su punto de intersección Z será un punto de la resultante $R = 1 + 2 + \dots$. Llamemos p' al peso propio de la viga, por metro lineal, y l á la longitud de ésta; el peso propio total será $p' l$. Se demuestra que el máximo momento de flexión producido en la viga por uno de los pesos móviles, el 4 por ejemplo, en combinación con los demás, y la sección A_4 en que se verifica, se obtienen por la construcción siguiente: colóquese el tren móvil de modo que la recta $X H$ que pasa por el punto medio H de la viga divida á la distancia $m t$ que hay entre la resultante (R) y el peso considerado (4) en dos partes $m n = r$ y $n t = f$ tales que se verifique la proporción

$$\frac{r}{f} = \frac{R + p' l}{R}$$

A este efecto, sobre la recta $L Z$, dirección de la resultante R , tomaremos $L T = R + p' l$ y $T V = R$; uniremos V y r , punto de aplicación de la fuerza 4, y trazaremos $T x$ paralela á $V r$. La recta $X x$ que pasa por el punto x así obtenido, será el eje de la viga; haciendo, pues, $H B = H N = \frac{1}{2} l$, y bajando las perpendiculares $N S$ y $B F'$, la recta $S F'$ será la línea final, y, por lo tanto, $E e$ multiplicado por $k = O a$, el momento máximo M_4 que la fuerza 4 producirá en la viga, al recorrerla en combinación con las demás fuerzas. La sección correspondiente A_4 dista la cantidad $N A_4 = d_4$ del extremo izquierdo.

Haciendo una construcción semejante para el peso 3, hallaríamos:

Eje medio de la viga.....	$X' X'$
Punto medio.....	H'
Longitud.....	$N' B'$
Línea final del polígono funicular.....	$N' F'$
Momento máximo producido por la fuerza 3.....	$D d$
Sección correspondiente.....	A_3
Abcisa d_3	$N' A_3$

Ejemplo. Para hacer ver el detalle de las operaciones, supongamos que se trata de un tren compuesto de locomotoras y tónderes como el dibujado en la fig. 1.^a (lám. 36), que ha de circular sobre una viga de 25 metros de longitud. Hemos dibujado los pesos en la fig. 7.^a (lám. 36), y la primera operación que ha de practicarse es la de ver, dentro de la longitud de 25 metros que tiene la viga, qué parte de tren es la que producirá momentos de flexión más desfavorables, á fin de limitar el número de tanteos y no tener que hallar los máximos correspondientes á todos los pesos. Claro es que estos momentos serán mayores cuanto más concentrada esté la carga; de modo que desde luego hemos de contar con las dos locomotoras **1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'**.

La distancia **5', 5** es de 22,58 metros y comprende dos máquinas y dos ejes de tónder, que suman 64,800 kilogramos (64,8 toneladas); la distancia **6', 4** es de 20,35 metros y comprende igual carga. Quiere decir que en esta última posición de tren los pesos están más condensados hacia el centro, y es la que convendrá adoptar para el cálculo.

Trazado el polígono funicular, á cuyo efecto se formaría el polígono de fuerzas y el polo, como en la fig. 2.^a (lám. 36), prolongaremos los dos últimos lados $S'S$, $F'F$ (fig. 7.^a, lám. 36), y dejaremos la posición de la resultante $R = 64,800$ kilogramos. Supongamos que el peso propio de la viga sea $p' = 1100$ kilogramos por metro lineal. Será $p'l = 1100 \times 25 = 27500$, y $R + p'l = 64800 + 27500 = 92300$.

Para el tanteo del peso **1'** tomaremos sobre la resultante R las magnitudes ab y bc , que tengan la relación

$$\frac{ab}{bc} = \frac{R + p'l}{R} = \frac{92300}{64800};$$

uniendo c con **1'**, y trazando bx paralela á $c1'$, xH será el eje medio y H el punto medio. Se tomará con arreglo á la escala de longitudes $HB = HN = \frac{1}{2}l = 12,50$ metros, y proyectando los puntos N y B sobre el polígono funicular, obtendremos la línea final SF' , y el momento máximo producido por el peso **1'**, que es Ee , que corresponde á la sección A_1 distante $A_1H = 0,50$ metros del punto medio de la viga.

Tanteando el peso **2'**, obtendríamos para momento máximo producido por este peso la ordenada Dd , que es menor que Ee , y lo mismo los relativos á los demás ejes. Según esto, el mayor de los máximos es Ee ; multiplicando esta longitud, estimada en la escala de fuerzas, por k , número de unidades

de distancia del polo O al polígono de fuerzas (fig. 2.^a, lám. 36), obtendremos el *maximum maximorum*, y formaríamos fácilmente el polígono ASB (figura 6.^a, lám. 36), para lo cual no habría más que medir, y multiplicar por k , las ordenadas del polígono funicular SEF' (fig. 7.^a, lám. 36) limitadas por la línea final SF' .

A las ordenadas del polígono ASB (fig. 6.^a, lám. 36) habría de sumarse, como ya sabemos, las de la parábola ARB relativa al peso propio.

Comparando el polígono $A_d'B$ (fig. 4.^a, lám. 36) formado por los momentos máximos de flexión en cada sección, y el ASB (fig. 6.^a, lám. 36) correspondiente á la posición más desfavorable de la carga (la que produce el mayor de los momentos, bajo el peso P_n), se encuentra muy poca diferencia entre ellos, y también es poco apreciable la diferencia entre los dos y la parábola que pasase por los puntos A , E y B , correspondiente á un cierto peso p por unidad lineal repartido uniformemente. Este peso p , que actuando como carga estática produce momentos de flexión próximamente iguales á los de la posición más desfavorable de la carga móvil, y da exactamente el mismo valor A_nE en la sección A_n , es fácil de calcular, siéndonos conocidos el momento máximo $M_n = A_nE$ y la abscisa $x = d_n = AA_n$ de la sección en que tiene lugar.

En efecto, la ecuación de la parábola de los momentos de flexión, cuando se trata de la carga estática repartida uniformemente á razón de p por metro lineal, es (núm. 323):

$$M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2;$$

la ordenada correspondiente á la abscisa $x = d_n$, sería:

$$\frac{1}{2} p l d_n - \frac{1}{2} p d_n^2;$$

y como ésta ha de ser la $A_nE = M_n$, será:

$$M_n = \frac{1}{2} p d_n (l - d_n),$$

$$p = \frac{2 M_n}{d_n (l - d_n)}.$$

621^o. Mediante esta fórmula se podrá encontrar la carga estática uniformemente repartida, equivalente, cuanto á los *momentos de flexión produci-*

dos, á un tren compuesto de pesos cualesquiera, equivalencia que, si se forman tablas para luces diversas, simplificará notablemente la resolución de los problemas de cálculo de vigas. Estas tablas se han formado; á continuación copiamos algunas.

TABLA DE HAUSSER Y CUNQ
PARA VÍA FÉRREA

LUZ — metros.	MOMENTOS máximos de flexión. — Toneláms.	EJE bajo el cual se produce el máximo momento.	DISTANCIA entre la sección del momento máximo y el apoyo izquierdo.	PESO equivalente uniformemente repartido por metro lineal. p Kilogramos.	PARTE del tren que hay que considerar para los cálculos.	Observaciones.
1,60	2,90	3	0,80	9063	Eje núm. 3	Los números de esta tabla se refieren á una viga única que recibe directamente una fila de ruedas del tren.
2,60	5,30	3'	0,99	6625	Ejes 3' y 2'	
3,60	10,00	3'	1,80	6173	» 4' á 2'	
4,70	15,65	3'	2,35	5667	» id.	
5,70	22,20	3'	2,55	5528	» 4' á 1'	
6,70	29,00	3'	3,05	5210	» id.	
7,70	35,70	3'	3,55	4846	» id.	
8,70	42,60	3'	4,05	4524	» id.	
9,70	49,40	3'	4,53	4218	» id.	
10,00	51,50	3'	4,70	4135	» id.	
12,00	55,50	1 ó 2	6,70 ó 8,00	3125 ó 3469	» 2' á 4'	
15,00	87,50	3	6,10	3223	» 1 á 6	
20,00	153,00	1	10,90	3085	» 4' á 5	
25,00	230,00	2'	11,60	2960	» 6' á 4	
30,00	310,00	1	13,40	2780	» 6' á 6	
35,00	425,00	3	16,00	2800	» 4' á 10	
36,00	450,00	3	17,20	2783	» 5' á 10	
40,00	545,00	3	20,00	2730	» 6' á 10	
45,00	675,00	3	22,20	2670	» 6' á 11	
50,00	830,30	1	25,80	2660	» 10' á 11	
55,00	990,00	1	30,20	2640	» 11' á 11	
60,00	1175,00	1	32,80	2630	» 12' á 12	

Esta tabla está formada para un tren de vía férrea compuesto de locomo-

toras y ténderes dispuestos como representa la fig. 1.^a (lám. 36), en la cual aparecen los pesos 1, 2... 1', 2'.... de cada rueda, ó sea la mitad de los totales, por ejes, en toneladas. Por esta razón, los pesos equivalentes *p* por unidad lineal, se refieren á la mitad del peso del tren.

TABLA DE SCHMIDT
PARA VÍA FÉRREA

LUZ ← Metros.	SOBRECARGA uniforme por metro lineal de vía. — Kilogramos.	LUZ — Metros.	SOBRECARGA uniforme por metro lineal de vía. — Kilogramos.	LUZ — Metros.	SOBRECARGA uniforme por metro lineal de vía. — Kilogramos.
1	23520	24	5170	90	3430
2	11760	27	5110	100	3250
3	9700	30	5060	110	3100
4	9410	33	4990	120	2970
5	9030	36	4880	130	2850
6	8540	40	4680	140	2740
8	7455	45	4580	150	2650
10	6770	50	4430	160	2570
12	6010	55	4250	170	2490
15	5470	60	4100	180	2420
18	5460	70	3830	190	2360
21	5300	80	3610	200	2310

Esta tabla, formada por el ingeniero austriaco M. Schmidt, da las equivalencias por metro lineal de vía para trenes compuestos de tres máquinas ténderes Engerth, seguidas de vagones cargados, cuyo peso es de 15,6 toneladas. La fig. 11, lám. 36, da la distribución de pesos de los ejes (peso total de cada uno) en toneladas.

Si, por ejemplo, se trata de una vía sencilla soportada por dos vigas, las sobrecargas *p* por metro lineal que habremos de tomar en consideración, se-

rán la mitad de las que contienen estas tablas; así para una luz l de 18 metros, será $p = \frac{1}{2} \times 5460 = 2730$ kilogramos.

El reglamento oficial francés para puentes metálicos, de 29 de Agosto de 1891, impone las siguientes cargas para el cálculo:

Puentes de vía férrea, de ancho normal. Composición del tren-tipo (figura 12, lám. 54). Dos locomotoras de ocho ruedas en cabeza, con sus ténדרes, de 56 toneladas de peso cada una de las primeras, y de 24 toneladas cada uno de los segundos, seguidas de vagones cargados de 16 toneladas de peso total. La figura pone de manifiesto la distribución de pesos; he aquí el de cada eje:

De locomotora.....	14 toneladas.
De ténדר.....	12 »
De vagón cargado.....	8 »

Para los puentes de vía férrea estrecha, de ancho l igual ó mayor que 1 metro, el tren se supondrá formado de vagones iguales á los de la vía ordinaria, y del mismo peso (16 toneladas); pero las dos locomotoras, que van en cabeza, deberán pesar $40 \times l$ toneladas cada una, y cada ténדר 16 toneladas. La fig. 13 (lám. 54), indica la distribución de pesos, teniendo en cuenta los siguientes:

Cada eje de locomotora.....	$10 \times l$ toneladas.
Idem íd. de ténדר.....	8 »
Idem íd. de vagón.....	8 »

En las vías de anchura inferior á 1 metro, se tendrán en cuenta las locomotoras y vagones más pesados que puedan circular.

En todos casos, se determinará, para cada sección de la viga, la posición más desfavorable del tren, y los valores máximos de M y C para dicha sección.

Para puentes de carreteras, el reglamento oficial francés obliga á calcular la viga, teniendo en cuenta la más desfavorable de las cargas siguientes:

1.^a Una sobrecarga uniformemente repartida (no se incluye el peso propio del puente) de 300 kilogramos por metro cuadrado de tablero de puente, comprendiendo el firme y los andenes, aceras ó pasaderas.

2.^a Una sobrecarga de carros de cualquiera de los tipos que á continuación se detallan, en el número de filas que el ancho del puente permita, á razón de 2,50 metros por fila, y estando, además, cargados los andenes con 300 kilogramos por metro cuadrado.

Primer tipo (fig. 14, lám. 35). — Carro de dos ruedas, de peso de 6 toneladas, arrastrado por dos caballerías. El peso medio de cada caballería se gradúa en 700 kilogramos. La figura demuestra la distribución de longitudes y pesos.

Segundo tipo. — Carro de cuatro ruedas (fig. 15, lám. 35), de 16 toneladas de peso, arrastrado por ocho caballerías en cuatro parejas (*).

Cualquiera que sea la clase de carros, es fácil calcular su peso y el número y peso de las caballerías que han de hacer el arrastre. Cuando los carros son de mucho peso, el de las caballerías es una fracción pequeña del total, y se puede sumar el de éstas al de aquél, con lo cual se simplifica notablemente la determinación de los máximos momentos de flexión y esfuerzos cortantes. De este modo, en el caso de la fig. 14 (lám. 35), por ejemplo, se consideraría un solo peso de $6 + 2 \times 0,7 = 7,4$ toneladas, y se aplicarían las reglas del núm. 619.

En todo caso se puede sustituir la carga de carros por una carga uniformemente repartida, según las siguientes equivalencias, calculadas por MM. Laisle y Schuebler, relativas á un ancho de firme de 5,50, que permite la colocación de dos filas de carros:

Luz l , en metros.....	7.... 10.... 15.... 20.... 30
Peso uniformemente repartido por metro lineal de puente. .	3215 — 2910 — 2470 — 2080 — 1854.

(*) El número de caballerías de tiro depende no solamente del peso del carro, sino también de las pendientes del camino y estado del firme.

La fuerza de tracción, por cada tonelada de peso, por concepto de inclinación de rampas, es de un kilogramo por milímetro; así, un peso de diez toneladas, que ha de arrastrarse en rampa de 60 milímetros, exige un esfuerzo tractor de $10 \times 60 = 600$ kilogramos para equilibrar la componente del peso en sentido de la rampa. Además, y para vencer el rozamiento de las ruedas sobre el firme, se necesita un esfuerzo de tracción por cada tonelada de carga (1000 kilogramos) igual á

24 kilogramos. — Firme de piedra machacada, en buen estado, y tiempo seco.
30 " " " de " " " húmedo.
40 " " " de " " " con lodo.
60 " " " de " " " en mal estado con carriladas.
10 " " " de " " " nueva, sin cilindrar, ó antigua con recargos.
14 " " " empedrado, en buen estado, y tiempo seco.
16 " " " " con lodo.
18 " " " Tablero de madera, en buen tiempo.

Un caballo, marchando al paso, puede desarrollar un esfuerzo tractor de 50 á 90 kilogramos; como promedio. 70.

Á estos pesos hay que agregar los correspondientes á los andenes, á razón de 300 kilogramos por metro cuadrado.

El peso de 300 kilogramos por metro cuadrado, para peatones, puede llegar á 400 kilogramos, y aun á 500, en el caso de muchedumbres compactas.

622. Peso propio de las vigas. — En todos los cálculos precedentes conviene el conocimiento preliminar del peso propio de las vigas. Si éstas estuviesen aisladas, ya hemos dado en el núm. 551 los medios para resolver el problema; cuando las vigas forman puente ó andamio, hay que aumentar á su peso propio el de las viguetas, traveseros y triangulación del tablero, es decir, toda la superestructura, y el del pavimento cuando lo haya. El peso total, por metro lineal de puente, comprendiendo el de las vigas, entramados del tablero y pavimento, es dado, para los puentes de hierro, por las fórmulas siguientes de MM. Laisle y Schuebler, que son principalmente aplicables á los puentes de vigas de celosía ó de alma llena:

Puentes de vía férrea, para una vía: peso p' por metro lineal de puente:

$$p' = 750 \text{ kilogramos} + 35 l \text{ kilogramos.}$$

El primer sumando corresponde al tablero, y el segundo á las vigas principales ó cuchillos: l es la longitud del puente, en metros.

Puentes de hierro para carretera, de 5^m,50 de anchura de firme, con andenes laterales de 1 metro de ancho. Peso del metro lineal de puente incluyendo el firme:

$$p' = 3600 + 42 l \dots \dots \text{ para firme empedrado, ó de piedra machacada, de } 0^m,20 \text{ de espesor.}$$

$$p' = 1300 + 28 l \dots \dots \text{ para pavimento de madera.}$$

Si se prescinde del peso del firme, ó pavimento, el de la parte metálica (vigas, viguetas, etc.) es por metro lineal de puente:

$$p' = 900 + 42 l \dots \dots \text{ para firmes empedrados.}$$

$$p' = 600 + 28 l \dots \dots \text{ para pavimento de madera.}$$

Mr. Croizette-Desnoyers, ingeniero francés, ha dado las fórmulas siguientes para los puentes metálicos:

Puentes de vía férrea: peso p' por metro corriente, en kilogramos, de la superestructura metálica (vigas, viguetas, triangulaciones, etc.):

$$\text{Puentes de una vía.. } p' = 51 \sqrt{50^2 + (l + 28)^2} - 2420$$

$$\text{» de dos vías.. } p' = 92,82 \sqrt{50^2 + (l + 28)^2} - 4404.$$

Peso por metro superficial:

$$p'' = 11,59 \sqrt{50^2 + (l + 28)^2} - 550.$$

Puentes para carreteras, por metro superficial:

$$\text{Palastro..... } p'' = 8,50 \sqrt{50^2 + (l + 20)^2} - 375$$

$$\text{Fundición..... } p'' = 9,20 \sqrt{50^2 + (l + 30)^2} - 410.$$

En todas estas fórmulas, l representa la luz del puente, ó sea la distancia entre los paramentos interiores de pilas ó estribos; los resultados que por ellos se obtienen no son aproximados á la verdad sino para grandes luces, mayores de 30 metros para los puentes de vía férrea y 20 metros para los de carretera.

Mr. Résal, dentro de los límites de l que acabamos de citar, ha simplificado las fórmulas anteriores, sin que por ello resulten grandes diferencias en las aplicaciones.

VÍAS FÉRREAS

	Peso por metro lineal de puente.	Peso total.
Puente de una vía.....	$p' = 47 l$	$P' = 47 l^2$
» de dos vías.....	$p' = 85 l$	$P' = 85 l^2$
Peso por metro cuadrado de tablero.....		$p'' = 16,6 l$

CARRETERAS

	Peso por metro cuadrado de tablero.	Peso total por metro de anchura de firme.
Palastro.....	$p'' = 7 l + 30$	$P'' = 7 l^2 + 30 l$
Fundición.....	$p'' = 8 l + 80$	$P'' = 8 l^2 + 80 l$

622'. Otro procedimiento para determinar los máximos valores de M y C en una sección cualquiera de una viga apoyada en sus extremos y sometida á la acción de varias cargas móviles. — Sea OH la viga (fig. 10, lámina 54); 1, 2, 3 y 4, los pesos, que supondremos se mueven en dirección OH , y S una sección de abscisa x .

Tracemos la línea de influencia OA_1H correspondiente á la fuerza 1, para cuyo efecto (núm. 619') tomaremos OB_1 igual á la unidad lineal, con lo cual, las ordenadas de OA_1H , habrán de ser multiplicadas por 1. Si hacemos $OB_2 = \frac{2}{1}$ y unimos B_2 con H , la línea OA_2H será la línea de influencia de los momentos de flexión para la fuerza 2, sin más que multiplicar las ordenadas por la fuerza 1, pues, en efecto, dichas ordenadas guardan, con las de OA_1H , la relación $\frac{2}{1}$. Del mismo modo, si hacemos OB_n igual en longitud á la relación entre las fuerzas n y 1, obtendremos la línea de influencia OA_nH , cuyas ordenadas, multiplicadas por la fuerza 1, nos darán los momentos de flexión que en la sección S producen las diversas posiciones de la fuerza n .

Sobre la línea XX' (fig. 11, lám. 54) tomemos las distancias O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 , que separan los pesos 1 á 4, quedando de este modo señalada la disposición de estos pesos, como si marchasen de derecha á izquierda. Serán, pues, dichas distancias iguales, respectivamente, á las Oa, ab, bc de la figura 10 (lám. 54).

A partir de los puntos O_1, O_2 , etc. (fig. 11, lám. 54), dibújense sobre la línea XX' las líneas de influencia $O_1A_1H_1, O_2A_2H_2, \dots, O_nA_nH_n$, iguales respectivamente á las $OA_1H, OA_2H, \dots, OA_nH$ de la fig. 10 (lám. 54). Claro es que $O_1S_1 = O_2S_2 = \dots = O_nS_n = x$, siendo x la abscisa de la sección S que se considera; y también se verifica

$$\begin{aligned} O_1H_1 &= O_2H_2 = \dots = O_nH_n = l \\ S_1S_2 &= H_1H_2 = O_1O_2 \\ S_2S_3 &= H_2H_3 = O_2O_3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Una ordenada cualquiera, tal como la bm , corta á dos ó más triángulos OA_iH_i ; la bm , por ejemplo, corta á los $O_1A_1H_1, O_2A_2H_2$ y $O_3A_3H_3$. Sumando en mb las ordenadas inscritas mc, me, mr , obtendremos un punto b ; y repitiendo la operación en las ordenadas de todos los puntos O, S y H , y uniendo los puntos análogos al b , obtendremos la línea $O_1ta_1, a_2, \dots, A_nH_n$.

cuyas ordenadas multiplicadas por la fuerza 1, y estimadas en la escala de longitudes que nos ha servido para dibujar la figura, representan los valores de los momentos de flexión que se desarrollan en la sección S de abscisa x durante el paso del tren por la viga.

Fijémonos en una ordenada cualquiera, en la bm , por ejemplo, y busquemos la posición de los pesos en la viga, que producirá en S un momento de flexión igual á $bn \times 1$. Al efecto, se buscará el punto S_n más próximo á m por la derecha, que aquí es S_3 ; y el subíndice 3 nos dirá que la posición de pesos es aquella en que el peso 3, marchando de izquierda á derecha, no ha llegado todavía á pisar la sección S , y dista de esta sección la cantidad mS_3 ; es decir, que la posición del tren es la $S'S''S'''$ de la fig. 10, en que $S'S'''$ es igual á la distancia mS_3 de la fig. 11.

En efecto; el momento de flexión en S , para esta situación de pesos, se obtendría multiplicando por 1 las ordenadas de las líneas de influencia OA_1H, OA_2H, OA_3H (fig. 10, lám. 54), y sumando los productos. Estas ordenadas, son, respectivamente (fig. 11, lám. 54), mc, mr y me , por que (figs. 10 y 11, lám. 54)

$$\begin{aligned} O_1m &= OS' \\ O_2m &= OS'' \\ O_3m &= OS''' \end{aligned}$$

La ordenada S_3a_3 (fig. 11, lám. 54), corresponderá al caso en que el peso 3 pisa en S , porque mS_3 es igual á cero.

Resumiendo; la ordenada $S_n a_n$ de la línea O_1ta_1, \dots, A_nH_n , multiplicada por 1, representa el valor de M cuando el peso n pisa en la sección S de abscisa x . Por comparación, podremos ver cuál es el peso que produce mayor momento de flexión, y el valor de éste; y repitiendo las construcciones para otras varias secciones de la viga, y llevando estos máximos parciales como ordenadas aa', bb' , etc. (fig. 4.^a, lám. 36), tendremos trazada la curva de los momentos máximos.

622''. Con igual facilidad se podrá resolver el problema por lo que respecta á los esfuerzos cortantes (fig. 11, lám. 54). No habrá más que construir las líneas de influencia $O_1A_1H_1D_1$ correspondientes á cada una de las fuerzas, según el procedimiento explicado en el núm. 619'' (fig. 7.^a, lám. 54), sin más que hacer OB'_1 igual á las relaciones $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots, \frac{n}{1}$. Las superficies $S_1D_1H_1, S_2D_2H_2$ que se superponen parcialmente (fig. 11, lám. 54),

se desdoblaron haciendo $D_2 d_2 = S_2 u$ y uniendo d_2 y t . Para la posición de pesos $S' S'' S'''$ (fig. 10, lám. 54), el esfuerzo cortante en S sería (fig. 11, lám. 54) $(m b - m b') \times 1$. Cuando el peso 2 pise la sección S , valdrá C la cantidad $(S_2 a_2 - S_2 d_2) \times 1$.

623. Cargas móviles uniformemente repartidas.—1.º La longitud $ab = l$ de la carga móvil (uniformemente repartida á razón de p por unidad lineal) es mayor que la longitud $OH = l$ de la viga (figs. 4.ª, 5.ª, 6.ª y 7.ª, lám. 26).

Esfuerzos cortantes. Consideremos la sección A de abscisa x . Si el extremo anterior a de la carga está á la derecha de A (fig. 4.ª, lám. 26), el esfuerzo cortante C para esta sección es la reacción Q' del apoyo O ; Q' es tanto mayor cuanto más se aproxima á A la carga móvil, y alcanzará su valor máximo cuando a llegue á A (fig. 5.ª, lám. 26), en cuyo caso $C_0 = Q'_1$, siendo Q'_1 la reacción del apoyo O .

Si a rebasa la sección A (fig. 6.ª, lám. 26) y llamamos K al peso de la parte comprendida entre a y A , y Q'_2 á la nueva reacción del apoyo O , el esfuerzo cortante C tendrá por valor

$$C = Q'_2 - K.$$

Q'_2 es mayor que Q'_1 , pero en una cantidad menor que K , pues este peso se reparte entre los dos apoyos; luego

$$Q'_2 - K < Q'_1 \quad \text{ó} \quad C < C_0;$$

es decir, el esfuerzo cortante máximo C_0 para una sección de abscisa x , tiene lugar cuando la parte anterior a de la carga móvil, en sentido de la marcha, llega á dicha sección.

Veamos el valor de $C_0 = Q'_1$ (fig. 5.ª, lám. 26). La carga repartida ocupa la longitud $l - x$; y su resultante, que es $p(l - x)$, dista $\frac{1}{2}(l - x)$ del apoyo H . La ecuación de momentos con respecto á este punto es

$$Q'_1 l = \frac{1}{2} p (l - x)^2;$$

de donde

$$Q'_1 = C_0 = \frac{p(l - x)^2}{2l}.$$

Esta ecuación es la de la parábola Hnm (fig. 8.ª, lám. 26), y da los siguientes pares de valores:

$$\begin{aligned} \text{Punto } O \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = C_0 = \frac{1}{2} p l = Om \end{array} \right. \\ \text{Punto medio } r \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} l \\ y = C_0 = \frac{1}{8} p l = rn \end{array} \right. \\ \text{Punto } H \dots\dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} x = l \\ y = C_0 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si la carga móvil caminase en la dirección OH , obtendríamos la parábola OaB' , que abatida en Ons , corta en n á la anterior.

Cuando la viga esté sujeta además á la acción de una carga estática uniformemente repartida, p' por unidad lineal, los esfuerzos cortantes correspondientes estarán representados por las ordenadas de zt , siendo $zO = Ht = \frac{1}{2} p' l$. Se podrán sumar con los referentes á las cargas móviles, haciendo $Ou = Oz = \frac{1}{2} p'$, y uniendo u y r ; BD será el esfuerzo

cortante para la sección N , y lo mismo se obtendría para la otra mitad HR de la viga.

624. Momentos de flexión.— El momento máximo de flexión para una sección cualquiera A de abscisa $OA = x$ (fig. 9.ª, lám. 26) tiene lugar cuando la carga ocupa toda la longitud de la viga.

Llamemos:

- z = distancia del extremo anterior de la carga móvil, al apoyo O .
- d = distancia AH de la sección considerada A al apoyo de la derecha H .
- h = distancia de la resultante de las fuerzas p al apoyo O de la izquierda.

El valor de la resultante es $p(l - z)$; y el de la reacción Q'' del apoyo H , se obtendrá por la ecuación

$$Q'' l = p(l - z) h$$

de la cual, observando que

$$h = z + \frac{l - z}{2} = \frac{l + z}{2},$$

se deduce

$$Q'' = \frac{p(l^2 - z^2)}{2l}$$

El momento de flexión para la sección A , tomando en consideración las fuerzas que están situadas entre A y H , es

$$M = Q'' d - \frac{1}{2} p d^2;$$

ó, sustituyendo el valor de Q'' ,

$$M = \frac{p d}{2l} (l^2 - z^2) - \frac{1}{2} p d^2,$$

en donde se ve que el máximo de M corresponde al mínimo de z , que es cero; es decir, al caso en que la carga repartida ocupa toda la longitud $OH = l$ de la viga. Los momentos valen entonces,

$$M = \frac{1}{2} p (l - x) x$$

y están representados por la parábola OD_1H (fig. 7.^a, lám. 6.^a) que tiene por ordenada máxima, en el punto medio D (núm. 323),

$$DD_1 = \frac{1}{8} p l^2.$$

Cuando además de la carga móvil hubiese otra permanente, estática, de p' por unidad de longitud, haríamos $p'' = p + p'$, y la parábola tendría por ordenada máxima

$$DD_1 = \frac{1}{8} p'' l^2.$$

Si la carga se mueve en opuesta dirección, de O á H (fig. 7.^a, lám. 26), se obtendrían los mismos resultados.

625. 2.º La longitud a ó $b = l'$ de la carga móvil es menor que la longitud $OH = l$ de la viga (figs. 10 á 16, lám. 26).—Esfuerzos cortantes. Las seccio-

nes comprendidas entre H y B (fig. 10, lám. 26) están en el caso anterior; de modo que para ellas el esfuerzo cortante máximo (que ocurrirá cuando la parte anterior a llegue á cada sección) tiene por valor:

$$C'_0 = \frac{p'(l-x)^2}{2l},$$

y estará representado por las ordenadas de la parábola $\dot{H}D$ (fig. 13, lám. 26). El valor particular de la ordenada BD se obtendrá haciendo $x = OB = l - l'$ en la ecuación anterior.

En las secciones comprendidas entre O y B (figs. 11 y 12, lám. 26), en la A , por ejemplo, se demostraría como lo hemos hecho para el caso primero (figs. 4.^a, 5.^a y 6.^a, lám. 26) que el esfuerzo cortante máximo tiene lugar cuando la parte anterior a de la carga móvil llega á dicha sección (fig. 12, lám. 26). Estamos entonces en el caso estudiado en el núm. 321 (fig. 5.^a, lám. 6.^a), y tendremos que el esfuerzo cortante máximo C'_0 , en una sección cualquiera de abscisa x , será:

$$C'_0 = Q' = \frac{p l' (l - h)}{l},$$

pero haciendo $h = x + \frac{1}{2} l'$, que es el valor de h cuando los puntos a y A coinciden, como sucede en la fig. 12 (lám. 26).

Tendremos, pues,

$$C'_0 = \frac{p l' \left(l - x - \frac{1}{2} l' \right)}{l}$$

ecuación de la recta DS (fig. 13, lám. 26).

$$\text{Para } x = 0, \quad C'_0 = \frac{p l' (2l - l')}{2l}.$$

Si la carga móvil caminase en el sentido OH , llegaríamos á la parábola OD' y recta $D'S'$; las líneas HDS y $OD'S'$ se cortan en m , en el punto medio de la viga; la ordenada común mn se obtendrá haciendo $x = \frac{1}{2} l$ en la ecuación correspondiente.

626. Momentos de flexión.—Cuando la carga móvil, marchando en la dirección que indica la flecha (fig. 14, lám. 26), penetra en el tramo, el momento de flexión máximo para todas las secciones comprendidas en la parte $AH = l'$, tendrá lugar cuando a llegue á A (fig. 15). Esto se demostraría con el mismo cálculo del núm. 624.

Cuanto á las secciones comprendidas entre O y A (fig. 14), su momento de flexión aumenta á medida que a se aproxima á A , porque la reacción Q' del apoyo O crece también.

Resulta de aquí que los momentos máximos de flexión, para todas las secciones de OH , desde que la carga móvil ingresa por la derecha hasta que llega á ocupar la parte $AH = l'$ (figs. 14 y 15), son los que corresponden á esta última posición de carga móvil (AH , fig. 15).

La reacción Q' del apoyo O será

$$Q' = \frac{pl'^2}{2l}$$

y los momentos de flexión serán, llamando d á la diferencia $l - l'$,

Entre O y A $M = Q'x = \frac{pl'^2}{2l}x$ (recta ON).

Entre A y H $M = Q'x - \frac{1}{2}p(x-d)^2$ }
 ó $M = \frac{pl'^2}{2l}x - \frac{1}{2}p(x-d)^2$ } (parábola NSH).

Veamos ahora cuáles serán los valores de los momentos máximos de flexión en todas las secciones de la viga, desde que la carga móvil ab pasa de la posición AH (fig. 15), hasta que llega su parte anterior a al apoyo O (figura 17), y no llevaremos más adelante las investigaciones, porque desde la posición OB (fig. 17) hasta que desaparece por la izquierda, la situación es la misma anterior á la posición AH , y se podría deducir, por simetría, los valores de M .

Consideremos una sección cualquiera A (fig. 16) de abscisa x , y veamos cuál es la posición de carga móvil que producirá en A mayor momento de flexión.

Llamemos:

z distancia de O á la parte anterior de la carga.

h distancia GH del centro de gravedad de la carga $p l'$ al apoyo H .

k relación $\frac{l-l'}{l}$

será

$$Q'l = pl'h;$$

y el momento de flexión en A ,

$$M = Q'x - \frac{1}{2}p(x-z)^2;$$

ó, substituyendo el valor de Q' , y puesto que $h = l - \frac{1}{2}l' - z$,

$$M = \frac{pl'(l-z-\frac{1}{2}l')}{l}x - \frac{1}{2}p(x-z)^2.$$

A igual valor de x , es decir, para una misma sección, M depende de z . El valor de z que convierte á M en un máximo, se obtendrá por la ecuación

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

que da

$$z = \frac{l-l'}{l}x = kx;$$

y substituyendo en M , tendremos, para expresión del momento máximo de flexión en una sección cualquiera,

$$M_0 = \frac{pl'(l-kx-\frac{1}{2}l')}{l}x - \frac{1}{2}px^2(1-k)^2$$

ó

$$M_0 = \frac{pl'(2l-l')}{2l}x - \frac{1}{2}px^2\frac{2ll'-l'^2}{l^2}.$$

Ecuación de la parábola OTH (fig. 16) que pasa por los puntos O y H , pues para $x = 0$, y para $x = l$, se obtiene $y = 0$.

La comparación de las curvas OTH (fig. 16) y OSH (fig. 15), resuelve-

rá el problema en que nos ocupamos, tomando para momento máximo en cada sección la mayor de las ordenadas correspondientes á la misma abscisa.

El máximo del valor de M_0 anterior se obtendría por la ecuación $\frac{dM_0}{dx} = 0$, que da $x = \frac{1}{2} l$; sustituyendo en M_0 se deduce, para máximo absoluto, en el punto medio de la viga

$$M_0 = \frac{p l' (2l - l')}{8}$$

627. Vigas de sección constante. Carga aislada, móvil. — La posición más desfavorable de un peso móvil P , en lo que se refiere al momento máximo absoluto de flexión, es el punto medio de la viga.

En efecto, llamando d y c á las distancias del peso P á los apoyos O y H respectivamente (fig. 1.^a, lám. 6.^a), y l á la longitud OH , hemos visto en el núm. 317 que el mayor valor de M tiene lugar para el punto de aplicación A , y vale

$$M = \frac{c d}{l} P;$$

c y d son dos variables cuya suma es constante, $c + d = l$. El máximo del producto se obtendrá cuando sean iguales los dos factores, ó $c = d = \frac{1}{2} l$, y entonces

$$M_0 = \frac{1}{4} P l \quad (1).$$

Los esfuerzos cortantes (núm. 317) tienen por valor

$$C = Q' = \frac{c}{l} P \quad \text{y} \quad C = Q'' = -\frac{d}{l} P.$$

Los máximos valores corresponderán á $c = l$ ó $d = l$, esto es, cuando el peso móvil llegue á uno de los apoyos, y entonces

$$C_0 = P \quad (2).$$

Los valores (1) y (2) resuelven el problema.

628. Cargas uniformemente repartidas.—Si la longitud ab de la carga móvil es mayor que l (fig. 4.^a, lám. 26), ya hemos visto que los máximos de M corresponden al caso en que la viga está ocupada toda (núm. 624), y el mayor de ellos pertenece al punto medio de la viga y tiene por valor

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2.$$

Los esfuerzos cortantes máximos corresponden á los extremos y tienen por valor

$$C_0 = \frac{1}{2} p l.$$

Cuando la longitud $ab = l'$ de la carga móvil es menor que $OH = l$ (figura 15 y 16, lám. 26), el momento máximo de flexión es, según vimos en el núm. 626,

$$M_0 = \frac{p l' (2l - l')}{8},$$

y tiene lugar en el punto medio.

Para los esfuerzos cortantes (núm. 625), los valores máximos corresponden á los extremos O y H , y tienen por valor

$$C_0 = \frac{p l' (2l - l')}{2l}.$$

628' Caso en que los pesos cargan sobre la viga por el intermedio de viguetas transversales. — En los problemas de flexión relativos á una viga apoyada en sus extremos y sometida á la acción de cargas estáticas ó en movimiento, que hemos resuelto en los núms. 309 á 358 y 612 á 628, se ha supuesto que las citadas cargas insisten directamente sobre la viga, y esto no sucede siempre, entre otros casos, en los puentes. La viga OH (fig. 14, lámina 54) sostiene á las viguetas transversales a, b, \dots, e , las cuales, á su vez, soportan las viguetas longitudinales AB que forman el piso del puente. Los pesos P, P', \dots , cargan directamente sobre AB , y transmiten su acción á la viga principal OH por medio de las viguetas transversales en las secciones a, b, c, \dots .

Veamos las modificaciones que, por esta causa, sufren los valores del mo-

mento de flexión M y del esfuerzo cortante C correspondientes á una sección cualquiera S , de abscisa x , de la viga principal OH .

1.º *Momento de flexión.* Cada uno de los pesos P, P', P'', P''' , da lugar á dos componentes en los puntos a, c , etc.; y como la suma de los momentos de estas componentes, con respecto á cualquiera de los apoyos O y H es equivalente á la de los momentos de los pesos, se deduce que las reacciones Q y Q' son las mismas que en el caso en que P, P' etc., actuasen directamente sobre OH . Por iguales razones, los momentos parciales, con respecto á la sección S , de las fuerzas P, P' y P''' que están fuera del intervalo bd formado por las viguetas que comprenden la sección S citada, son los mismos que se obtendrían si dichos pesos insistiesen directamente sobre la viga.

La fuerza P'' situada en el intervalo bd , da lugar á las dos componentes P_1 y P_2 en la viga principal. Llamemos s y r á sus distancias á la sección S ; d, d' etc., á las distancias de P, P' etc., á dicha sección, y l á la longitud de la viga.

Supongamos que P'' (línea de trazo seguido) está á la izquierda de S , y consideremos las fuerzas situadas á la derecha de esta sección. Si no hubiese viguetas, M valdría $Q'(l-x) - P'''d'''$; y en el caso de haberlas el valor de M es $Q'(l-x) - (P'''d''' + P_2 \times r)$, menor que el anterior en la cantidad $P_2 \times r$. Cuando la fuerza P'' (línea de trazos) se encuentre á la derecha de la sección S , veríamos del mismo modo, considerando las fuerzas que están entre O y S , que el momento de flexión M en el caso de existir viguetas transversales es menor que el correspondiente al caso en que estas viguetas no existen, en la cantidad $P_1 \times s$.

Si la sección S coincide con b ó con d , serían cero s , ó r , y los momentos de flexión, en los dos casos de haber ó no haber viguetas, son iguales.

Resumiendo: 1.º *La presencia de las viguetas no modifica los valores de M en las secciones de la viga en que aquéllas se apoyan.* 2.º *M disminuye un poco en las secciones restantes.*

3.º *Esfuerzos cortantes.* El esfuerzo cortante en S , cuando P'' está á su izquierda, vale:

$$C = Q - (P + P' + P'') \dots \dots \dots \text{ Si no hay viguetas transversales.}$$

$$C' = Q - (P + P' + P_1) \dots \dots \dots \text{ Cuando las hay.}$$

Como $P_1 < P''$, se deduce que $C' > C$ si $C > 0$ y $C' < C$ cuando C sea negativo.

Lo contrario sucede si P'' estuviese situado á la derecha de S , dentro siempre del intervalo bd .

Las viguetas transversales modifican ligeramente los valores de C , aumentando ó disminuyendo los valores absolutos según los casos.

628.º. *Líneas de influencia en el caso de que los pesos móviles carguen sobre una viga, apoyada en los extremos, por el intermedio de viguetas transversales.* — 1.º *Momentos de flexión.* Supongamos que se trata de un peso móvil P (fig. 15, lám. 54), cuya distancia, variable, al origen O representaremos por z , y de la sección S de abscisa x . Haremos el trazado explicado en el núm. 619', tomando $OB = OS$, uniendo B y H , y A y O . En los puntos b y d correspondientes á las viguetas transversales entre las cuales se halla la sección S , se levantarán á OH las perpendiculares Db y Fd ; la línea quebrada $ODFH$ es la línea de influencia de los momentos de flexión relativa á la sección S ; es decir, que las ordenadas de esta línea multiplicadas por P representan los valores de los momentos de flexión que en S producen las diversas posiciones del peso, definidas por las abscisas correspondientes á dichas ordenadas.

En efecto: mientras el peso móvil está entre O y b , ó entre d y H , los momentos de flexión que ocasionará en S serán los mismos que se desarrollarían si cargase directamente sobre la viga OH sin el intermedio de las viguetas transversales. Si está en P' , por ejemplo, producirá dos componentes en a y en b , que darán la misma reacción Q que el peso P' , y también la suma de momentos, con respecto á S tendrá el mismo valor que el momento de P' con relación á dicha sección. Así, pues, la línea de influencia entre O y b , y entre d y H deberá ser la misma que hemos hallado en el número 619', cuando el peso P se movía directamente sobre la viga OH .

Consideremos ahora el peso móvil cuando esté entre b y d ; se descompondrá en dos fuerzas, una P_1 , en b , y otra P_2 en d . La reacción Q en el apoyo O no habrá variado de valor.

Si llamamos b' y d' á las abscisas de las viguetas b y d , tendremos:

$$P_1 = P \times \frac{cd}{bd} = P \times \frac{d' - z}{d' - b'}$$

$$Q = \frac{P(l-z)}{l}$$

$$M = Qx - P_1 \times Sb$$

$$M = \frac{P(l-z)}{l} x - \frac{P(d'-z)}{d'-b'} (x - b').$$

Pero $y = \frac{l-z}{l} x - \frac{d'-z}{d'-b'} (x-b')$, siendo variables z é y , es la ecuación de una recta, porque y es función lineal de z , y esta recta es la DF puesto que para $z=b'$ (punto b) resulta $y=Db$, y cuando $z=d'$ (vigüeta d) es $y=Fd$. Según esto, las ordenadas de DF multiplicadas por P dan los valores del momento de flexión M en el intervalo bd , y por tanto la línea de influencia es $ODFH$. Resulta comprobado lo que hemos dicho en el número anterior, esto es, que las vigüetas trasversales disminuyen en una pequeña cantidad los valores de M .

Si se trata de varios pesos $P, P', P'',$ etc., que al mismo tiempo circulen por la viga, no habrá más que multiplicar por $P, P', P'',$ etc., las ordenadas correspondientes de la línea $ODFH$, según hemos visto en el núm. 619^o.

2.º *Esfuerzos cortantes* (fig. 16, lám. 54).— Cuando no hay vigüetas trasversales, la línea de influencia de los esfuerzos cortantes, correspondiente á la sección S y peso móvil P que marcha en dirección HO , es $HAEO$, según hemos visto en el núm. 619^o. Habiendo vigüetas trasversales, la línea de influencia será $HA'E'O$, habiéndose obtenido los nuevos puntos A' y E' por las perpendiculares $A'd$ y $E'b$ á OH .

En efecto; mientras P recorre la parte Hd , el esfuerzo cortante C en S es el mismo que en el caso de no existir vigüetas, porque C es igual á la reacción Q , y Q tiene los mismos valores en ambos casos.

Cuando P recorre el intervalo bO , sucederá lo mismo, porque C es igual á $Q - P$, y no varía ninguno de los dos términos de esta resta.

Supongamos á P situado en el intervalo de las dos vigüetas b y d que comprenden á la sección S considerada, y llamemos P_1 y P_2 á las componentes de P en b y d respectivamente. Sean:

$$OH = l, \quad Ob = z, \quad Od = d', \quad Ob = b', \quad OS = x.$$

El esfuerzo cortante C en S , cuando hay vigüetas trasversales, es

$$C = Q - P_1$$

ó

$$C = P \frac{l-z}{l} - P \frac{d'-z}{d'-b'}$$

Pero

$$y = \frac{l-z}{l} - \frac{d'-z}{d'-b'}$$

es la ecuación de la recta $A'E'$; de modo que las ordenadas de $A'E'$, multiplicadas por P , dan los valores de C en S para las diversas posiciones de P en el intervalo bd .

La línea de influencia de los esfuerzos cortantes para la sección S , es, pues, $HA'E'O$; y sus ordenadas, multiplicadas por P , darán los valores de C .

Esta línea servirá para el caso de varios pesos, según hemos visto en el núm. 619^o.

629. Aumento del valor del momento máximo de flexión por efecto de la velocidad de que van animadas las cargas móviles.— Las cargas móviles, al recorrer la viga sometida á flexión, producen en ella movimientos vibratorios que se traducen en aumentos de las tensiones y compresiones interiores que desarrollarían las mismas cargas si estuviesen en reposo. Esto equivale á decir que los momentos máximos de flexión, calculados en la hipótesis de cargas estáticas, colocadas en la viga en la posición más desfavorable para la resistencia, han de ser aumentados en razón á la velocidad de que están animadas.

Sin entrar en los prolijos cálculos á que da lugar la resolución de este difícil problema, citaremos los resultados obtenidos por M. Phillips y M. Renaudot.

Supongamos una viga apoyada en sus dos extremos, y sean

l = longitud, entre los apoyos.

p = peso propio de la viga, por unidad de longitud; y, en general, carga permanente por unidad lineal.

g = aceleración debida á la pesantez = 9,81 (valor medio en Europa).

P = peso móvil, total; M. Phillips lo supone concentrado en un punto, y convertido en carga aislada; M. Renaudot lo considera repartido uniformemente.

V = velocidad uniforme del peso móvil P .

E = coeficiente de elasticidad del material.

I = momento de inercia de la sección constante de la viga.

M_0 = momento máximo de flexión, producido por las cargas móviles (punto medio de la viga).

La fórmula de M. Phillips es:

$$M_n = \frac{1}{8} P l^2 \left(1 + \frac{Pl}{2EI} \times \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{4} Pl \left(1 + \frac{2}{3} \frac{Pl}{EI} \frac{V^2}{2g} \right) \quad (1).$$

Las mismas cargas en reposo, es decir, para $V = 0$, producirían un momento máximo

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 + \frac{1}{4} P l.$$

Si la viga estuviese empotrada, los momentos máximos parciales correspondientes á las cargas p y P habrán de ser multiplicados por el factor $1 + \alpha \frac{P l V^2}{2 g E I}$, siendo α un número que varía, según los casos, entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{3}$.

Para la pieza empotrada en los dos extremos, por ejemplo, sería:

$$\begin{aligned} \text{Secciones extremas. } M_0 &= \frac{1}{12} p l^2 \left(1 + \frac{P l V^2}{16 g E I}\right) + \frac{1}{8} P l \left(1 + \frac{P l V^2}{8 g E I}\right) \\ \text{Sección media. } \dots M_0 &= \left(\frac{1}{24} p l^2 + \frac{1}{8} P l\right) \left(1 + \frac{P l V^2}{8 g E I}\right) \end{aligned} \quad (2).$$

Según M. Renaudot, en las piezas apoyadas en sus extremos,

$$M_0 = \left(\frac{1}{8} p l^2 + \frac{1}{8} P l\right) \left(1 + \frac{P V^2 l^2}{6 g E I}\right) \quad (3).$$

630. El examen de las fórmulas (1), (2) y (3) conduce á las siguientes deducciones:

- 1.^a Es pequeña la influencia que tiene la velocidad de los pesos móviles en el valor de M_0 .
- 2.^a El aumento que por este concepto experimenta el momento de flexión será tanto mayor:

Cuanto mayores sean la luz de la viga (l) y la fuerza viva del peso, que depende de V , velocidad.

Cuanto menores sean el coeficiente de elasticidad (E) y el momento de inercia (I), ó, lo que es lo mismo, cuanto mayor sea la elasticidad del material y menor la altura de la sección transversal de la viga. Las vigas de madera están en peores condiciones que las de hierro y acero, porque E es menor en aquéllas que en éstas.

M. Renaudot estima que la viga estará en buenas condiciones de resis-

tencia cuando el segundo factor de su fórmula (3) no exceda de $\frac{4}{3}$, lo cual exige que

$$\frac{P l^2 V^2}{6 g E I} = \frac{1}{3},$$

ó, como límite inferior de velocidad peligrosa,

$$V = l \sqrt{\frac{2 g E I}{P}}.$$

No se pueden considerar suficientemente aproximados á la verdad los resultados precedentes, sino cuando dan pequeños incrementos al momento de flexión correspondiente á las cargas estáticas, es decir, para pequeños valores de V .

En la práctica se empieza por calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga como si estuviese sometida únicamente á las cargas estáticas, y después se forman los valores de los factores comprendidos entre paréntesis en las fórmulas (1), (2) y (3). Si son poco mayores de 1, es prueba de que la velocidad de las cargas móviles tiene escasa influencia en el momento de flexión, y por lo tanto, en la resistencia de la viga, y la cuestión quedará reducida á un ligero incremento del coeficiente de trabajo, que es fácil de calcular una vez conocido el nuevo valor del momento máximo M_0 ; pero cuando los crecimientos de M_0 sean demasiado grandes, deberá disminuirse la acción de la velocidad, ó, lo que es lo mismo, el valor de los factores citados, disminuyendo la longitud l de la viga ó aumentando el momento de inercia I de su sección transversal.

631. Resolución de los problemas de resistencia. — Si el sólido es de sección constante, una vez conocidos el máximo momento de flexión (máximo absoluto) y el mayor de todos los esfuerzos cortantes, por las ecuaciones de los números anteriores, con arreglo á estos valores se determinarán las dimensiones de la sección transversal, que ha de ser constante, siguiendo los detalles de procedimiento explicados en los núms. 498 á 572.

Cuando se trata de grandes vigas, de sección variable en las cabezas y en el alma, se dibujarán las curvas de los momentos máximos parciales de flexión y de los máximos esfuerzos cortantes parciales, y se resolverá el problema de resistencia con arreglo á lo explicado con todo detalle en los números 573 á 585.

PIEZAS APOYADAS EN LOS DOS EXTREMOS, SOMETIDAS A CHOQUES

632. Pieza apoyada en los dos extremos y sometida en su punto medio al choque ocasionado por un peso P que cae de una altura h . — Supondremos:

1.º Que la deformación producida por el choque corresponde á las del período elástico, es decir, que las extensiones y compresiones máximas producidas en el prisma por la flexión debida al choque, no llegan al límite de elasticidad de la materia.

2.º Que el prisma, al flexarse, pasa por las mismas formas sucesivas que las características debidas á la acción de cargas estáticas graduales. Esta hipótesis se aleja tanto más de la verdad, cuanto mayor sea la velocidad del cuerpo percutor y menor sea su masa. Por ejemplo, cuando se trata de proyectiles, los efectos del choque se reconcentran en la pequeña región que lo recibe, y en ella hay penetración local, sin flexión general.

3.º Se prescinde de la masa de la pieza sometida al choque.

Sean:

- f' = la flecha total producida por el peso P al caer de la altura h .
- y = la flecha en un momento cualquiera después del choque.
- P' = la carga estática gradual capaz de producir la flecha y .
- P_1 = la carga estática gradual capaz de producir la flecha f' .

El trabajo elemental, resistente á la flexión, de la viga, correspondiente á un crecimiento infinitamente pequeño dy de la flecha, es $P' dy$; y el total, hasta adquirir la flecha f' será $\int_0^{f'} P' dy$, cantidad que debe ser igual al trabajo debido al choque que es $P h$; de modo que

$$P h = \int_0^{f'} P' dy \quad (1).$$

Pero, según hemos visto en el núm. 349 (expresión 15), la relación entre

la flecha y la carga estática que la produce es, atendiendo solamente al valor absoluto,

$$f = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{E I} \quad (2).$$

de modo que

$$y = \frac{1}{48} \frac{P' l^3}{E I} \quad (3).$$

Despejando P' , sustituyendo en (1) y verificando la integración, se obtiene

$$P h = \frac{48 E I f'^2}{2 l^3}$$

ó, puesto que

$$f' = \frac{1}{48} \frac{P_1 l^3}{E I},$$

$$P h = \frac{1}{2} P_1 f' \quad (4);$$

ecuación que liga el peso P que cae de la altura h y la carga estática P_1 que produciría la misma deformación en la viga.

633. En vez de buscar la relación de pesos P y P_1 que producen la flecha f' , se podría pedir la relación de flechas f' y f correspondientes á un mismo peso P en los dos casos de caer desde una altura h ó actuar como carga estática gradual.

Sea f' la flecha producida en la viga de longitud l , apoyada en sus extremos, por el peso P que cae de la altura h , y f la flecha correspondiente al mismo peso P cuando obra como carga estática gradual.

Se obtiene por el cálculo la relación

$$f' = f \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f}} \right) \quad (*) \quad (5).$$

* Apliquemos la ecuación general del movimiento $m \frac{d^2 s}{dt^2} = \Sigma (F)$, como ya hemos hecho en el núm. 190.

Los valores de F son:

Para $t = 0$ (primer momento), P .

Para $t = t$ (ó flecha y)..... $\frac{48 E I}{l^3} y$ (ecuación 3 del número anterior).

Será, pues,

$$\frac{P}{y} \frac{d^2 y}{dt^2} = P - \frac{48 E I}{l^3} y.$$

La expresión (2) nos dice que las deformaciones, dentro del período elástico, son proporcionales á las fuerzas que las producen; deducimos, en consecuencia, que la relación (5) es la misma que debe haber entre la carga estática capaz de producir la flecha f' y la carga estática P que produce la flecha f ; de modo que el peso P , cayendo de la altura h , equivale á un peso estático

$$P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f}} \right).$$

Si $h = 0$, caso de *carga brusca*, el valor anterior se convierte en $2P$, lo que nos dice que, para los efectos de la flexión, una carga brusca, ó instantánea, P , equivale á una carga gradual estática de valor doble. Esta misma relación encontramos en los núms. 189 y 190 para la extensión.

Las ecuaciones (4) y (5) establecen la equivalencia de cargas estáticas y de las que caen de una cierta altura h en el caso de pieza apoyada en los dos extremos, que es el más general.

634. Resistencia viva elástica de flexión. — El momento máximo de flexión, para el caso que estamos considerando, es $\frac{1}{4} P_1 l$, y como el momento de fuerzas elásticas correspondiente vale $\frac{R I}{v}$, será $\frac{R I}{v} = \frac{1}{4} P_1 l$; como además $f' = \frac{1}{48} \frac{P_1 l^3}{E I}$, la ecuación (4) del núm. 632 se convierte en

$$P h = \frac{1}{6} \frac{R^2}{E} \frac{I l}{v^2} \quad (6);$$

y si se sustituye I , momento de inercia, por su igual, el producto ω del

Multiplicando por dy , ó integrando entre los límites $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} = v$, siendo v la velocidad del cuerpo P , se obtiene, sustituyendo por $\frac{v^2}{2g}$ su igual h ,

$$- P h = P f' - \frac{48 E I}{l^3} \frac{f'^2}{2}$$

y como $\frac{48 E I}{l^3} = \frac{P}{f}$ (expresión 2 del número anterior),

$$- h = f' - \frac{f'^2}{2f}$$

de donde

$$f' = f \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f}} \right).$$

área de la sección transversal por el cuadrado r_0^2 del radio de giro, será

$$P h = \frac{r_0^2}{3^2 v} \frac{R^2}{2 E} \omega l \quad (7).$$

El valor de $P h$, que es el trabajo debido al peso que cae de la altura h , representa la *resistencia viva elástica* y tiene por expresión el segundo miembro de la ecuación anterior. Como $P h$ es equivalente á la semifuerza viva de choque de un cuerpo, la resistencia viva elástica mide la fuerza viva que es capaz de absorber un prisma por flexión, no excediendo de R kilogramos por unidad superficial de trabajo de la materia. (Véase núm. 188.)

La resistencia viva elástica es, como vemos, proporcional al volumen del prisma (ωl) y al factor $\frac{R^2}{2 E}$ que recibe el nombre de *coeficiente de resistencia viva*. (Núm. 188.)

Para las piezas de sección rectangular, en las cuales $I = \frac{1}{12} a b^3$ (número 477) y $v = \frac{1}{2} b$, la resistencia viva (2.º miembro de la ecuación 6) es $\frac{1}{18} \frac{R^2}{E} a b l$.

6. ESTUDIO DE LA FLEXIÓN

CUANDO SE ALTERA EL LÍMITE DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL.
EFFECTO DE LAS
FUERZAS REPETIDAS UN GRAN NÚMERO DE VECES

FLEXIÓN CUANDO SE REBASA EL LÍMITE DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL D .
MODIFICACIÓN DE LAS FÓRMULAS

635. La ecuación $\frac{R I}{v} = M$ que se emplea en la flexión, ha querido ser aplicada por algunos más allá de los límites convenientes, esto es, para valores de R iguales ó superiores al límite de elasticidad (D), y hasta para la fractura (\bar{R}). Así es que se ha pretendido que la ecuación

$$\frac{D I}{v} = M_1 = f(P, l) \quad (1) \quad (*)$$

podía servir para determinar la carga P que produce en las fibras extremas extensiones ó compresiones iguales al límite de elasticidad D ; y, del mismo modo, que la ecuación

$$\frac{\bar{R} I}{v} = M_2 = f(\bar{P}, l) \quad (2) \quad (**)$$

podía dar el coeficiente de fractura \bar{R} por extensión ó compresión, conocien-

(*) M_1 es el menor de los momentos máximos que producen flechas permanentes.

(**) M_2 es el momento de flexión que produce la fractura.

do la carga P de flexión que rompe la viga; ó bien, conocido \bar{R} , la carga \bar{P} capaz de producir la rotura por flexión.

Este modo de proceder, seguido por algunos experimentadores, conduce á errores gravísimos: como veremos, ni el límite de elasticidad D , ni el coeficiente de fractura por extensión \bar{R} , tienen el valor que se podría deducir de las ecuaciones (1) y (2) anteriores.

Ya indicamos en el núm. 303 (observación 2.^a) que la teoría que conduce á las fórmulas de resistencia á la flexión se funda en la hipótesis de que las fuerzas p que se desarrollan en el interior del prisma, por efecto de la flexión, son inferiores al límite de elasticidad; es decir, que se opera en pleno *período elástico*, siendo, por tanto, las deformaciones lineales que experimentan las fibras proporcionales á las fuerzas p interiores que las producen. Fundados en esta hipótesis, determinamos (núms. 305 á 308) el momento de fuerzas elásticas

$$M' = \frac{p I}{z},$$

que para las aplicaciones convertimos en $\frac{R I}{v}$, haciendo $p = R$, siendo R el coeficiente de trabajo por extensión ó compresión, inferior al valor límite de elasticidad (D) y por tanto al coeficiente de fractura (\bar{R}).

Se concibe, pues, que las fórmulas (1) y (2) que resultan de aplicar la fórmula de flexión fuera de los límites fijados en el cálculo, han de dar origen á errores considerables.

El desacuerdo entre los resultados de experiencia y los deducidos por las fórmulas (1) y (2) está puesto de manifiesto en el cuadro siguiente, que resume las experiencias realizadas por M. Bauschinger con barras de acero dulce y duro, que contenían dosis diversas de carbono.

M. Bauschinger halló el coeficiente de fractura por extensión directa (\bar{R}); sometió después barras del mismo metal á la fractura por flexión, y despejó de la fórmula (2) el valor de (\bar{R}) correspondiente. Los valores primeros, obtenidos por extensión directa, se diferencian considerablemente de los deducidos por la fórmula de flexión aplicada á la fractura, y sustituyendo en ella, por tanto, M por el momento máximo de la fuerza que produjo la rotura. Representando α la relación entre estos segundos valores y los primeros, las experiencias de Bauschinger dieron los resultados consignados en esta tabla:

PROPORCIÓN de carbono por 100.	VALORES DEL COEFICIENTE DE FRACTURA POR EXTENSIÓN, OBTENIDOS		RELACIÓN α
	por extensión directa \bar{R} kilogs. por mm. ²	por la fórmula $\bar{R} = \frac{M_r \cdot v}{I}$ kilogs. por mm. ²	
0,14	44,30	79,20 (*)	1,78
0,19	47,85	86,00 (*)	1,79
0,46	53,30	83,40	1,56
0,55	56,50	88,25	1,58
0,66	62,95	86,00	1,36
0,80	72,30	76,45	1,06
0,96	83,05	84,80	1,02

El examen de los números contenidos en esta tabla, demuestra que α es mayor que la unidad; es decir, que la carga de fractura por flexión, y el momento correspondiente M_r , pueden alcanzar valores mayores que los deducidos de la ecuación (2) anterior; pero al mismo tiempo, se observa que α no es constante, de modo que ignoramos el coeficiente que habría de multiplicar á \bar{R} en la ecuación (2) para hacerla aplicable al período de fractura. Esto prueba que la causa de las variaciones de \bar{R} es más compleja de lo que habíamos supuesto, y que no se debe solamente á la falta de proporcionalidad de fuerzas y deformaciones.

La experiencia acredita asimismo que el valor de D , límite de elasticidad obtenido por extensión directa, es diferente del que se podría deducir de la ecuación (1), siendo M_1 un momento máximo de flexión tal, que el inmediato superior produce deformaciones permanentes, ó lo que es lo mismo, flechas de curvatura que no desaparecen por completo cuando las fuerzas P dejan de obrar. Finalmente; las flechas observadas en la flexión cuando se aplican cargas que producen deformaciones permanentes, ó fractura, no son las mismas que se obtienen por la ecuación del núm. 405 $f = k \frac{P l^3}{E I}$, empleado para estos valores de P .

En una palabra, los problemas de resistencia y rigidez en la flexión, no pueden ser resueltos por las fórmulas ordinarias cuando se pasa del límite de

(*) (*) Las barras de acero dulce á que se refieren las dos primeras líneas de la tabla, no pudieron ser rotas por flexión: de modo que los valores de α son superiores á los números 1,78, 1,79.

elasticidad; y el error, que se manifiesta desde el momento en que se rebasa este límite, es debido á variadas causas que conviene conocer.

336. Error debido á la falta de proporcionalidad de fuerzas y deformaciones. — Recordaremos que el momento de fuerzas elásticas $M' = \frac{p I}{z}$ (nú-

mero 307, fórmula 10), se ha deducido de la expresión $\int p z u d z$ (núm. 307, lám. 5.^a, fig. 22), comprendiendo el signo integral todas las fibras que están de uno y otro lado de la capa neutra NH , y representando con la letra p la compresión ó extensión por unidad superficial que sufren las fibras.

La expresión $\int p z u d z$, se puede formar del modo siguiente: sobre el plano CD (fig. 10, lám. 25), tomemos HD como eje de abscisas, y H como origen; levantemos ordenadas ms, br , etc., de valor igual al que tiene p en las diversas capas de fibras mn, ab , etc., y unamos todos los puntos L, r, s, \dots, T . La superficie cuya traza es LT , y el plano CD , limitan los volúmenes HDL, HCT , cuyos momentos con respecto al plano NH , sumados, componen precisamente el valor de la integral anterior, ó sea del momento M' de fuerzas elásticas (*).

La superficie LT es plana cuando la flexión se opera dentro del período elástico, porque entonces los valores de p son proporcionales á las deformaciones bc, DD' (fig. 22. lám. 5.^a), y éstas, á su vez, lo son á las distancias Hb, HD ; de modo que en la fig. 10 (lám. 25), se verificará:

$$\frac{sn}{Hn} = \frac{rb}{Hb} = \text{etc.}$$

Según acabamos de ver, las deformaciones que experimentan las fibras pueden ser representadas por las distancias Hn, Hb , etc., al eje NH , siempre que sea $C'D'$ (fig. 22, lám. 5.^a) la posición CD después de la flexión, esto es, siempre que se verifique que las secciones transversales, planas antes de flexarse el prisma, continúen siéndolo después, lo cual tiene lugar, no solamente en el período elástico, sino en todos los demás, hasta la fractura. Según esto (fig. 10, lám. 25), si las abscisas Hm, Hb representan las deformaciones de las fibras de un mismo material, que es el que constituye la viga sometida á flexión, y las ordenadas ms, br , significan las fuerzas p por unidad de sección transversal que las producen; las líneas HL, HT , son idénticas, respectivamente, á las $OACN$ de la fig. 18, lám. 1.^a, y

(*) $\int p z u d z$ es el volumen elemental: $p z u d z$ su momento con respecto á NH .

$O A B C$ de la fig.^a 3.^a, lám. 3.^a, que nos han servido para el estudio de los períodos correspondientes á la fractura por extensión y por compresión (números 51 á 61 y 82, y siendo $H D$ el eje de las abscisas, en el que se cuentan las deformaciones, y H el origen.

En vista de cuanto queda dicho, si consideramos la flecha en el momento de la fractura, el valor de M' , ó sea el de $\int p u z dz$, será el de la suma de momentos de los volúmenes $H s L D$ y $H u T C$ (fig. 11, lám. 25) con relación al plano $N H$, siendo $H s L$ y $H u T$ las curvas completas de tracción y compresión, análogas á los $O B C N$ (fig. 18, lám. 1.^a) y $O A B C$ (fig. 3.^a, lám. 3.^a) (núms. 64 y 82), y representando $D L$ el valor de p en la fractura, ó sea $p = F$.

Ahora bien; partiendo de la hipótesis de proporcionalidad de fuerzas p y deformaciones, que sólo ocurre en el período elástico, es decir, admitiendo $p = E i$, encontramos (núms. 306 y 307) para el valor del momento de fuerzas elásticas $M' = \int p u z dz = \frac{P I}{z}$, valor que convertimos en $\frac{R I}{v}$ en las aplicaciones de la flexión (núm. 460), tomando en cuenta las fibras más alejadas de la capa neutra ($z = v$), en el momento en que para ellas era $p = R$. Si aplicamos esta expresión de M' á la fractura, haciendo $p = R$, coeficiente de fractura por extensión, el resultado $M' = \frac{\bar{R} I}{v}$ que se obtenga, basado en la proporcionalidad antes citada, que ahora no existe, sería el mismo que darían los momentos, con relación á $N H$, de los volúmenes $H D L$, $H T C$ (fig. 11, lám. 25), limitados por los planos $H L$ y $H T$, siendo $D L = \bar{R}$ y $T C = \bar{R}'$ (coeficiente de fractura por compresión); resumiendo el valor $M' = \frac{\bar{R} I}{v}$ es menor que el verdadero.

Haciendo $D X = \bar{R}$, igual á la máxima ordenada de la curva, resulta también $D H X$ menor que $D H s L$.

Evidente es el error, por defecto, cometido al tomar $\frac{R I}{v}$ como valor del momento M' de fuerzas elásticas en la fractura por flexión. Existe el error en el mismo sentido, cuando se quiere obtener el valor de M' , más allá del límite de elasticidad (D), aunque sin llegar á la fractura (\bar{R}), sustituyendo p por la fuerza $D L'$ (fig. 12, lám. 25), superior á dicho límite, en la fórmula $\frac{p I}{z}$, pues $H D L'$ es menor que $H s' L' D$.

637. Traslación de la capa de fibras neutras. Aumento del valor de \bar{R} ,

coeficiente de fractura por extension. — Hay todavía otras causas de error en la aplicación de la expresión $M' = \frac{R I}{v}$, á más de la que se deja mencionada en el número anterior.

Numerosas experiencias, entre las cuales merecen especial mención las practicadas por el ingeniero francés Mr. Considère, han demostrado que cuando la flexión de barras metálicas se lleva hasta la fractura, se verifica:

1.º Las secciones planas, normales al prisma antes de la deformación, continúan siendo planas después de la fractura.

2.º Las fibras extendidas se contraen transversalmente y las comprimidas se dilatan; de modo que la sección transversal, primitivamente rectangular, toma la forma trapecial curvilínea (fig. 13, lám. 25). El eje neutro ($H' H''$) cambia de lugar, alejándose de las fibras que se extienden; de modo que resulta aumento de área en la parte $H' A B H''$ que trabaja por extensión.

3.º Si bien hay contracción en las fibras que se extienden, como la hay, aún en el período elástico, en los cuerpos sometidos á extensión simple (número. 52), el prisma flexado se rompe sin que en las fibras extendidas se haya presentado el estrechamiento de sección y formación del huso característico de los períodos tercero y cuarto en los materiales dúctiles, rotos por extensión directa (núms. 58 y 60).

En cambio, los alargamientos de las fibras extendidas llegan á ser, en los metales dúctiles, de valor considerable, mucho mayor que los alargamientos totales α de fractura por extensión directa contados entre señales, en una cierta longitud ($\frac{l + h}{L}$, núm. 70), y por tanto, mayores que los alargamientos proporcionales que se manifiestan lejos del lugar en donde se forma el huso. Son próximamente iguales á los d (núm. 70) del huso (*).

Esto da la explicación de la diversidad de valores de α obtenidos para aceros de diferente dureza en las experiencias de Bauschinger (núm. 635), y

(*) Experiencias de Mr. Considère con los metales á que hacen referencia los núms. 640 y 644:

	Total alargamiento de extensión en 200 milímetros	Alargamiento en la flexión
Acero: barra cuadrada de 16,50 milímetros de lado para la flexión.....	12 por 100	80 por 100
Hierro: barra cuadrada de 16 milímetros para la flexión.	5 "	25 "
Idem: barra cilíndrica para id.....	15 "	70 "

es otra prueba de la superioridad del valor de \bar{R} en la flexión sobre el correspondiente á la tracción simple.

En efecto; las fuerzas p de extensión, desarrolladas á lo largo de las fibras en la flexión, son función de los alargamientos que éstas experimentan; así, al llegar á la fractura por flexión, el alargamiento de las fibras extendidas ha sido muy grande, próximamente igual al d por unidad de longitud que tiene lugar en el huso, en la fractura por extensión directa, es prueba de que p ha llegado á alcanzar valores próximamente iguales á los que en la sección de garganta del huso se obtienen al romper el material por extensión simple.

Ahora bien; estos valores son muy considerables (núms. 64 y 68); en la experiencia del núm. 68 llegó á ser el coeficiente de fractura F , referido á la sección contraída del huso, igual á 53,79 kilogramos por mm.², mientras que el \bar{R} , referido á la sección primitiva de la barra de hierro, solamente tenía el valor 30,34 kilogramos por mm.²; si tomamos allí \bar{R} como coeficiente de fractura, y no F , es porque la relación $\frac{\omega'}{\omega}$ de la sección de garganta del huso y la sección primitiva del prisma es mucho menor que las de las fuerzas final de fractura y máxima de la experiencia (ordenadas Nn y Bb , fig. 18, lám. 1.^a); de modo que la considerable resistencia que posee el metal en la sección contraída está compensada con exceso con la disminución notable de sección que por el estrechamiento resulta al huso.

Pero aquí el estrechamiento de las fibras no tiene lugar, lo cual equivale á decir que el verdadero coeficiente de fractura $F = \bar{R}_1$ es mucho mayor que el \bar{R} (máxima ordenada Bb de la fig. 18, lám. 1.^a), obtenido por extensión directa.

Según esto, la curva de las deformaciones habrá de formarse tomando $DL'' = F$ (fig. 14, lám. 25), y no $DL' = \bar{R}$; teniendo en cuenta, además, la traslación de la capa neutra, el volumen $HL'D$ se habrá convertido en $H'L''D$, que es mayor, resultando de aquí que el verdadero valor de M' , momento de fuerzas elásticas desarrolladas en la fractura por flexión, equivalente á la suma de momentos con respecto á $H'H''$ de los volúmenes $H'L''D$ y $H'u''T''C$, es, por esta nueva razón, muy superior al $\frac{\bar{R}I}{v}$ que se forma reemplazando p por \bar{R} (coeficiente de fractura por extensión directa) en la expresión $\frac{pI}{z}$, porque su valor es equivalente á la suma de momentos de los volúmenes HDL' , $HT''C$.

638. Resumiendo: el momento de fuerzas elásticas en la fractura por flexión es $M' = \alpha \frac{\bar{R}I}{v}$, siendo $\alpha > 1$; de modo que igualando este valor al del momento máximo de fractura que representaremos, en general, por $M_r = \frac{1}{n} \bar{P}l$, siendo \bar{P} la carga que la produce (núm. 405), tendremos:

$$\alpha \frac{\bar{R}I}{v} = \frac{1}{n} \bar{P}l,$$

ecuación que servirá para determinar la carga \bar{P} que produce la fractura por flexión, conocido que sea el coeficiente de fractura por extensión directa \bar{R} ; ó bien se podrá hallar el valor de \bar{R} una vez conocido \bar{P} .

Los valores de \bar{R} así obtenidos son, pues, α veces mayores que los que resultan de la aplicación de la ecuación (2) del núm. 635.

639. La cantidad α no es constante, porque la relación entre los volúmenes HDL' y $H'DL''$ (fig. 14, lám. 25) es variable con la calidad del metal.

En efecto; el alargamiento d por unidad lineal en el huso (núm. 64 y 70) tiene valor grande, superior al de δ para los metales muy dúctiles, como son el acero dulce y el hierro bueno, y es casi igual al alargamiento proporcional en los metales rígidos, como son los aceros duros y algunos hierros; quiere esto decir que para los primeros la fuerza $F = DL''$ será mucho mayor que $\bar{R} = DL'$, mientras que para los segundos la diferencia no tendrá valor apreciable; de modo que la relación de los volúmenes $H'DL''$ y HDL' , ó sea el valor de α , será mayor que la unidad en el primer caso, y próximamente igual á la unidad en el segundo.

Así quedan explicadas las diferencias de valores de α halladas por Bauschinger (tabla del núm. 635) entre los aceros dulces poco carburados, y los duros de gran dosis de carbono.

Se deduce de cuanto queda expuesto, que un metal será tanto más apto para resistir la fractura por flexión cuanto mayores sean las cantidades DL'' y $T''C$ (fig. 14, lám. 25); la primera depende de F , y la segunda de \bar{R}' , coeficiente de fractura por compresión. En los aceros, serán preferibles los aceros duros que contengan manganeso, y mejor, cromo, á los carburados de igual resistencia á la extensión y compresión, porque en aquéllos los valores de d y F son mucho mayores.

640. Determinación del coeficiente α . — El coeficiente α ha de determi-

narse por experiencias directas para cada clase de material. Las practicadas por Mr. Considère han dado el resultado siguiente:

1.º Barra de acero dulce, laminado, de sección cuadrada de 16,50 milímetros de lado.

Resultados del análisis químico.	Manganeso.	0,720 por 100
	Carbono.	0,300 »
	Azufre.	0,020 »
	Fósforo.	0,073 »
	Silicio.	indicios.
Resultado de la fractura por extensión directa, en una varilla del mismo metal, de 200 milímetros de longitud y 9,50 milímetros de diámetro. .	Límite de elasticidad (<i>D</i>). ...	34,40 kgs. por mm. ²
	Coefficiente de fractura, referido á la sección primitiva (\bar{R}).	57,80 » »
	Idem íd., referido á la sección contraída del huso (<i>F</i>).	107,50 » »
	Alargamiento por 100, total, en los 200 milímetros.	12 por 100
	Alargamiento por 100 en el huso.	100 por 100

$\alpha = 2,43$

2.º Barra de hierro, de sección cuadrada, de 16 milímetros de lado.

Propiedades específicas, obtenidas en barras de ensayo, cilíndricas, de 9,50 milímetros de diámetro.	Límite de elasticidad (<i>D</i>).	26,70 kgs. por mm. ²
	Coefficiente de fractura por extensión, referido á la sección primitiva (\bar{R}).	40,90 » »
	Alargamiento total por 100, en 200 milímetros de longitud.	6 por 100
	Estrechamiento de sección en el huso.	0

$\alpha = 1,92$

3.º Fundición gris, dulce, en barra de sección cuadrada de 30 milímetros de lado, y 1^m,04 de longitud.

Propiedades específicas, obtenidas en barras de ensayo, cilíndricas, de 19,80 milímetros de diámetro y 301 mm. de longitud.	Coefficiente de fractura por tracción, referido á la sección primitiva (\bar{R}).	11,30 kgs. por mm. ²
	Alargamiento permanente de fractura.	0,55 por 100
	Alargamiento total de fractura.	0,90 por 100

$\alpha = 1,80$

Las experiencias de M. Durand-Claye, con piedras, ladrillos y cementos, han dado el siguiente resultado:

MATERIALES	VALOR DE α
Yeso.	2,95
Caliza tierna.	2,85
Cementos de diversas calidades.	1,71 á 3,85
Ladrillos.	3,70 á 4,18
Creta.	3,45
Pizarra.	2,73

641. Influencia de la forma de la sección en el valor de α . — Parece ser que la forma de la sección ejerce influencia en el valor del coeficiente α . Experiencias de Mr. Considère, practicadas con barras de fundición gris dulce y de fundición gris dura, han dado los resultados medios consignados en el cuadro siguiente:

FORMA DE LA SECCIÓN	T' doble.	T' sencilla.	Rectangular.	Circular.
Valor de α . { Fundición dulce. .	1,40	1,48	1,92	2,21
{ Fundición dura. .	1,75	1,11	1,57	1,84
Valores medios.	1,27	1,30	1,70	2,02

He aquí las propiedades específicas de las dos clases de fundición ensayadas:

	Fundición dulce	Fundición dura.
Coefficiente de fractura por extensión (\bar{R})		
en kilogramos por mm. ²	11,30	21 á 25
Alargamiento permanente de fractura por extensión (por 100).	0,55	»
Alargamiento total de fractura por extensión (por 100).	0,90	0,36

642. Mr. Considère deduce de sus experiencias, y de las de Bauschinger, lo siguiente:

El momento de flexión que produce la fractura de los hierros y de los aceros, no es proporcional al coeficiente de fractura por extensión referido á la sección primitiva (\bar{R}).

El valor de dicho momento se obtiene multiplicando por el coeficiente α el cociente $\frac{\bar{R} I}{v}$, expresión del momento de las fuerzas elásticas aplicado al período de la fractura; α es próximamente igual á la unidad para los aceros duros y poco dúctiles, pero es igual ó mayor que 2 para los aceros y hierros dulces. Para los metales intermedios, α tiene valores comprendidos entre 1 y 2, crecientes con el grado de ductilidad.

En la flexión llevada más allá del límite de elasticidad, el eje neutro no pasa por los centros de gravedad de las secciones, sino que se aleja de las fibras extendidas tanto más cuanto mayor sea la deformación producida.

La contracción lateral de las fibras extendidas no llega á producir el estrechamiento característico del *huso*, que ocurre en los metales dúctiles, cuando se rompen por tracción simple. El área de la sección trasversal del prisma permanece sensiblemente constante, y la de la parte que trabaja por extensión aumenta, hasta el momento de la fractura, por efecto de la traslación el eje neutro.

El alargamiento de las fibras extremas, en la fractura por flexión, es mucho mayor que el total que se obtiene en la tracción simple, y, por lo tanto, superior al alargamiento proporcional (i por unidad lineal) que se produce en la parte de barra en que no se forma el huso. El alargamiento de flexión es próximamente igual al local d , que se manifiesta en el huso, en las experiencias por tracción directa.

Las secciones planas no se deforman sino en las inmediaciones del punto de fractura, y esto de modo poco perceptible.

643. Flecha de curvatura. — El valor de la flecha, dado por la fórmula general del núm. 405, $f = k \frac{P l^3}{E I}$, ha sido obtenido también en la hipótesis de proporcionalidad entre fuerzas interiores p y deformaciones lineales correspondientes, de modo que no será aplicable sino dentro del período elástico. La flecha de fractura f_1 es mayor que el valor $k \frac{\bar{P} l^3}{E I}$ que se obtendría de la fórmula anterior, poniendo en lugar de P la carga \bar{P} que produce la fractura por flexión, lo cual se explica por el considerable alargamiento que pueden tomar las fibras extendidas.

Según Mr. Considère, f_1 aumenta, á igualdad de las demás circunstancias influyentes, en razón directa del estrechamiento $\left(\frac{\omega - \omega'}{\omega}\right)$ de que es susceptible el metal en la fractura por extensión directa, y en razón inversa de la relación $\frac{D}{E}$ que existe entre el límite de elasticidad y el coeficiente de fractura referido á la sección contraída ω' .

644. Límite de elasticidad de flexión. — Llamaremos *momento de elasticidad*, y representaremos por la letra M_1 al mayor de los momentos de flexión que producen en un prisma *flechas elásticas*, esto es, deformaciones pasajeras que desaparecen cuando las fuerzas de flexión dejan de obrar. Todo momento de flexión mayor que M_1 produce *flechas permanentes*, es decir, que la flecha total no desaparece al cesar las fuerzas, sino que queda una deformación permanente visible.

Es difícil la determinación de M_1 por experiencias directas, porque no es posible apreciar con exactitud el instante en que se pasa de flechas elásticas á flechas permanentes.

Parece á primera vista que podría obtenerse M_1 sustituyendo en la expresión del momento de fuerzas elásticas, $M' = \frac{p I}{z}$, los valores $z = v$, $p = D$, siendo D la fuerza límite de elasticidad, en cuyo caso se tendría $M_1 = \frac{D I}{v}$; pero la experiencia ha demostrado que debe hacerse

$$M_1 = k \frac{D I}{v},$$

siendo h un coeficiente numérico, mayor que la unidad, y variable con la calidad de los metales.

Según M. Bauschinger, h varía con la ductilidad de los metales. Para los aceros dulces, en que el estrechamiento de sección es grande, y la relación $\frac{F}{R} = 1,78$, obtuvo $h = 1,27$, y para los aceros duros, en que $\frac{F}{R} = 1$, $h = 1$.

Es difícil la determinación exacta de h , que depende de la de M_1 ; experiencias cuidadosas de Mr. Considère, con barras de acero de la calidad citada en el núm. 640, han dado por resultado que h está comprendido entre 1,35 y 1,40 para esta clase de metal.

Para el hierro ensayado en el núm. 640 (2.ª), obtuvo que h está comprendido entre 1,30 y 1,50.

645. Diferencias características entre la flexión y la extensión. Coeficientes de corrección de las fórmulas de flexión. — Resumiendo cuanto antecede, diremos que las propiedades específicas de un metal sometido á flexión no guardan relación con las correspondientes á los ensayos de extensión, y que se pueden cometer graves errores si se quieren deducir aquéllas de éstas, como se hace á veces en la recepción de materiales. El coeficiente de fractura por extensión (\bar{R}), el límite de elasticidad, el alargamiento por 100, son, en la flexión, mayores que en la extensión simple, sin que exista relación constante entre unos y otros valores, porque varía con la naturaleza del metal.

Las fórmulas (1) y (2) del núm. 635 se convierten en las siguientes:

$$h \frac{DI}{v} = M_1 \quad (3),$$

$$\alpha \frac{\bar{R}I}{v} = M_r \quad (4).$$

La (3) se aplica á los casos en que empieza á alterarse la elasticidad del material, y la (4) á la fractura.

Los factores h y α se aproximan tanto más á la unidad, cuanto menor sea la diferencia entre R y \bar{R} , coeficientes de fractura por extensión directa, referidos á la sección contraída el primero y á la sección primitiva el segundo (núm. 65), es decir, cuanto menor sea el estrechamiento de sección.

Los valores de h y α para algunas cualidades de hierro, acero y fundición, están consignados en los núms. 640 y 644.

La forma de la sección ejerce influencia en el valor de α , que es tanto mayor cuanto más macizo sea el prisma cerca de la capa neutra. Por esta razón corresponde el máximo de α á las secciones circulares, siguiendo, en orden decreciente, las rectangulares ó cuadradas, T sencilla y doble T . Esta influencia es mayor á medida que aumenta la ductilidad.

El error en la aplicación de la fórmula general de resistencia á la flexión $\frac{RI}{v} = M$, empieza, y de modo muy sensible, desde el límite de elasticidad, puesto que $h = 1,30$ á $1,50$, según hemos visto, y alcanza valor considerable en la fractura, como que α es, á veces, igual á 2,43. Para los hierros y aceros dulces puede decirse que la carga \bar{P} de fractura por flexión es el doble, próximamente, de la calculada por la fórmula $\frac{\bar{R}I}{v} = \frac{1}{n} \bar{P}l$, en que \bar{R} es el coeficiente de fractura por extensión directa.

646. Aumento del valor del coeficiente de trabajo R en la flexión.—La fórmula $\frac{RI}{v} = M$ es aplicable solamente en tanto que no se altera el límite de elasticidad, y es la que hemos empleado en todos los problemas de flexión.

R es el coeficiente de trabajo, igual á $\frac{1}{m}$ del de fractura \bar{R} ; y como la verdadera ecuación, para la fractura por flexión, es (ecuación (4) del número anterior)

$$\frac{\alpha \bar{R}I}{v} = M_r,$$

parece que la ecuación de resistencia á la flexión, en el período elástico, debiera ser

$$\frac{1}{m} \alpha \bar{R}I \frac{1}{v} = M$$

$$\frac{R_1 I}{v} = M,$$

siendo $R_1 = \frac{1}{m} \alpha R$, y por lo tanto mayor que $R = \frac{1}{m} \bar{R}$ puesto que $\alpha > 1$.

En una palabra: aun para el período elástico debiera, en los materiales

en que $\alpha > 1$ (hierros y aceros dulces), modificarse la ecuación general de resistencia $\frac{R I}{v} = M$, consistiendo la modificación en dar al coeficiente de trabajo R un valor algo mayor que el que se emplea en la tracción directa.

Pero para esto sería necesario conocer con toda exactitud, y para toda clase de materiales, los valores de α y de h , y las experiencias practicadas hasta ahora son incompletas y no arrojan toda la luz que fuera de desear en este interesante asunto.

Nos limitaremos, pues, á decir, por lo que respecta á los cálculos de resistencia á la flexión, en los problemas que se resuelven en construcciones:

1.º Debe aplicarse la fórmula $\frac{R I}{v} = M$, siendo R el coeficiente de trabajo por extensión ó compresión simples.

2.º En los hierros y aceros dúctiles puede aumentarse algo el coeficiente de trabajo R por extensión.

3.º En todos los casos ha de conocerse el valor de la fuerza límite de elasticidad, y hacer que R sea inferior á dicho valor en la proporción que corresponde al coeficiente de seguridad que á la construcción se quiera conceder.

FUERZAS REPETIDAS UN GRAN NÚMERO DE VECES. — COEFICIENTES DE TRABAJO QUE DEBEN EMPLEARSE

647. Un cuerpo sometido á extensión (*) puede romperse de uno de los modos siguientes:

1.º Por aplicación de fuerzas crecientes de modo gradual, partiendo de cero, no interrumpiendo la operación hasta conseguir la fractura.

Si tomamos como abscisas los tiempos, y como ordenadas los esfuerzos de tracción por unidad superficial, y suponemos constante la relación entre éstos y aquéllos, la fig. 15 (lám. 25) representará este modo de fractura.

La fuerza $a b$, por unidad superficial de sección transversal, es lo que hemos llamado *coeficiente de fractura por extensión*, representándolo con la letra \bar{R} .

(*) Puede aplicarse á la *compresión* cuanto decimos.

648. 2.º Por la acción de cargas graduales crecientes, á partir de un cierto límite inferior, que al llegar á un cierto límite superior desaparecen para empezar de nuevo á crecer desde el límite inferior de partida, repitiéndose esta operación un número N suficiente de veces.

La repetición de fuerzas de tracción se puede realizar de las siguientes maneras:

649. (a) Haciendo crecer las fuerzas desde cero hasta un cierto límite $a b$ (figs. 16 y 17, lám. 25), pasando á cero después para empezar de nuevo; el tránsito del valor máximo $a b$ al *cero* de la operación inmediata, se puede hacer repentinamente (fig. 16) ó de modo gradual (fig. 17).

Al cabo de N repeticiones se consigue la fractura; N es tanto mayor cuanto menor es el valor de $a b$, límite superior de la fuerza tractora por unidad superficial de sección; pero $a b$ es siempre inferior al coeficiente de fractura \bar{R} del caso anterior.

No debe extrañarnos este resultado, porque constantemente se observa; cuando se pretende romper por tracción un cuerpo, y no se puede desarrollar de una vez la fuerza muscular necesaria para conseguir la fractura, se realiza el propósito repitiendo el esfuerzo varias veces.

Hemos dicho que el esfuerzo máximo $a b$ por unidad superficial, y el número de repeticiones N , varían en razón inversa. Disminuyendo $a b$ aumentará N , y así se llega á un valor límite $a b$ que no ocasiona la fractura aunque se repita la tracción un número N infinito de veces. El valor de $a b$ inmediatamente mayor que éste, y que representamos por \bar{R}_0 , es la menor de las fuerzas por unidad superficial que producen la fractura por extensión, creciendo gradualmente de cero á \bar{R}_0 al repetirse un número N de veces, finito, pero muy grande; toda fuerza menor no producirá la fractura aunque se repita infinitas veces.

\bar{R}_0 será, pues, el coeficiente de fractura correspondiente á fuerzas que se repiten, siempre del mismo signo, variando gradualmente de intensidad desde cero hasta \bar{R}_0 .

Las tablas del núm. **653** y **655** representan datos experimentales de este modo de fractura.

Una barra de bronce ordinario (experiencias de Spangenberg) se rompe por tracción directa con $a b = 14,70$ kilogramos por mm.² al cabo de $N = 4200$ repeticiones, y en cambio necesita $N = 5447600$ repeticiones si el esfuerzo tractor por unidad superficial es solamente $a b = 7,35$ kilogramos por mm.².

Una barra de hierro de sección rectangular, sometida á flexiones repeti-

Haciendo, respecto á la aplicación de la fórmula de flexión para la determinación de las fuerzas de tracción por unidad superficial, las salvedades expresadas en el núm. 649, vemos bien claramente por estas experiencias la influencia de $k \text{ mín.}$, en $k \text{ máx.}$, y en N .

651. $\bar{R}_k = k \text{ máx.}$, que es función desconocida de $k \text{ mín.}$, está comprendido entre \bar{R} y \bar{R}_0 (caso 1.º, y caso 2.º, a). Cuando $k \text{ mín.} = 0$, estamos en el caso 2.º (a), y $\bar{R}_k = \bar{R}_0$. Si $k \text{ mín.} = k \text{ máx.}$, se convierte el caso en el 1.º, y $\bar{R}_k = \bar{R}$; para los casos intermedios, \bar{R}_k está comprendido entre \bar{R}_0 y \bar{R} , acercándose tanto más á \bar{R} cuanto mayor sea $k \text{ mín.}$

Según esto, si en la fig. 21, (lám. 25), hacemos $OH = 1$ (lo cual supone $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}} = 1$, ó $k \text{ mín.} = k \text{ máx.}$), la ordenada debe ser $HM' = \bar{R}$, y

para el punto O de abscisa cero (que es el caso de $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}} = 0$, ó $k \text{ mín.} = 0$), la ordenada OP será igual á \bar{R}_0 .

652. (c) Puede romperse, también, el cuerpo sometido á experiencia, por la aplicación de fuerzas crecientes y decrecientes graduales que cambien de signo, esto es, que sean alternativamente de extensión y de compresión, pasando antes por cero: es lo que representa la fig. 20 (lám. 25), en la cual las ordenadas negativas corresponden á las compresiones, y las positivas á las extensiones. Estas acciones alternativas dan lugar á dos máximos, uno para las compresiones y otro para las extensiones; llamaremos $k \text{ máx.}$, al mayor de los dos, ya sea extensión ó compresión por unidad superficial, y representaremos al otro por $k' \text{ máx.}$

El coeficiente de fractura por unidad superficial de sección trasversal, $k \text{ máx.}$, depende de $k' \text{ máx.}$ y del número N de veces que se pasa de uno á otro; el caso más desfavorable para la resistencia, esto es, el mínimo de $k \text{ máx.}$ ocurre cuando $k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$. Repitiendo las consideraciones hechas en los números anteriores, llamaremos *coeficiente de fractura por repetición de esfuerzos alternativos de extensión y de compresión*, y representaremos por \bar{R}_a , á un valor de $k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$ tal, que cualquiera otro menor sea incapaz de producir la rotura, aunque se repita $N \infty$ número de veces.

$\bar{R}_a = k \text{ máx.}$ es, lo mismo que $k' \text{ máx.}$, una fuerza por unidad superficial.

El orden de magnitud de los diversos coeficientes de fractura, de mayor á menor, es para un mismo material el siguiente:

$$\bar{R}, \bar{R}_k, \bar{R}_0, \bar{R}_a.$$

\bar{R}_a es el menor de todos, y la práctica nos lo demuestra de continuo; cuan-

do un cuerpo se resiste á una sola tracción (\bar{R}) ó á tracciones repetidas (\bar{R}_0, \bar{R}_k), le aplicamos tracciones y compresiones alternativas, ó, lo que es lo mismo, lo flexamos en sentidos opuestos, con lo cual logramos la fractura deseada.

La curva PM' de la fig. 21 (lám. 25), puede continuarse á la izquierda del eje OY , puesto que la relación $\frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}}$ que sustituye á $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}}$, tiene signo menos por tratarse de fuerzas de opuesto signo. Para $OH' = -1$, que equivale á $k' \text{ máx.} = k \text{ máx.}$, el coeficiente de fractura será $H'M = \bar{R}_a$.

Cuando $k \text{ máx.} = 0$, se reduce este caso al (a) (núm. 649), y entonces $\bar{R}_a = \bar{R}_0$.

La perjudicial influencia de las extensiones y compresiones alternativas y repetidas, se ha comprobado prácticamente. Experiencias realizadas con barras de hierro de la misma procedencia han dado los resultados siguientes:

	Kilogramos por mm. ²
Compresiones y extensiones alternativas: $k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$ (caso c).....	$\bar{R}_a = 12$
Extensiones repetidas, crecientes desde cero á $k \text{ máx.}$ (caso a).....	$\bar{R}_0 = 22$
Extensiones repetidas, crecientes desde $k \text{ mín.} = 28$ kilogramos por mm. ² á $k \text{ máx.} = \bar{R}_k$	$\bar{R}_k = 32$
Extensión única, creciente de cero á \bar{R} (caso 1.º).....	$\bar{R} = 34$

Puede representarse el resultado de esta experiencia por la curva MM' (fig. 21, lám. 25), haciendo:

Abcisas = $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}}$	Ordenadas
$+ OH = +1$	$\bar{R} = HM' = 34$
$+ OA = \frac{28}{32}$	$\bar{R}_k = AB = 32$
Cero (punto O).....	$\bar{R}_0 = OP = 22$
$- OH' = -1$	$\bar{R}_a = H'M = 12$

La línea MM' es casi recta, pues la ordenada media OP es 22, y si fuese

recta tendría por valor $\frac{HM' + H'M}{2} = \frac{1}{2}(34 + 22) = 23$. Se podría, pues, trazar la línea MM' , sin error sensible, conociendo los valores $\bar{R} = HM'$ y $\bar{R}_0 = OP$.

653. Experiencias de Woehler y de Spangenberg. — Al ingeniero alemán M. Woehler se deben las experiencias que han puesto de manifiesto las notables singularidades relativas á coeficientes de fractura por fuerzas repetidas, indicadas en los números precedentes.

M. Woehler, sirviéndose de aparatos especiales que permitían la rápida repetición de esfuerzos, sometió á flexión barras metálicas diversas, deduciendo del valor del momento de fractura M_r el coeficiente de fractura por extensión correspondiente á las fibras más alejadas de la capa neutra, aplicando al efecto la ecuación $\frac{\bar{R}I}{c} = M_r$. La duración de los esfuerzos era muy pequeña (de 0,083 de segundo), y únicamente así pudo llegar en sus experiencias á tan gran número de repeticiones (N).

Para conseguir esfuerzos alternativos de extensión y compresión (caso (c) : $k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$), sometió á cargas permanentes pequeños cilindros de hierro y acero, haciéndoles girar, bajo la acción de dichas cargas, de modo igual al de los ejes de carruajes de vías férreas dentro de los cojinetes de las cajas de grasa. Para las cargas repetidas de los casos (a) y (b) empleó barras de sección rectangular, flexándolas siempre en el mismo sentido.

He aquí los resultados de algunas de las experiencias de Woehler:

FLEXIONES EN SENTIDOS OPUESTOS.—BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR
CASO (c) : $k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$

METALES	EXTENSIÓN de las fibras extremas calculada por la fórmula $\bar{R}_a = \frac{M_r}{I}$ Kilogramos por mm. ²	NÚMERO DE REPETICIONES N que produce la fractura.
Hierro: $\bar{R} = 32,70$.	23,52	56 430
	16,17	3 632 588
	11,76	No roto después de 132 250 000
Acero: $\bar{R} = 76,40$.	25,32	642 675
	22,05	45 050 640

FLEXIONES EN EL MISMO SENTIDO.—BARRAS DE SECCIÓN RECTANGULAR
CASOS (a) Y (b) .

METALES	EXTENSIÓN de las fibras extremas calculada por la fórmula $\bar{R}_k = \frac{M_r}{I}$		NÚMERO DE REPETICIONES N que produce la fractura.
	$k \text{ mín.}$	$k \text{ máx.}$	
	Kgs. por mm. ²	Kgs. por mm. ²	
Hierro: $\bar{R} = 32,70$ kilogs. por mm. ² .	0	40,42	169 750
	0	36,75	420 000
	0	33,07	481 950
	0	29,40	1 320 000
	0	26,36	4 035 000
	0	23,52	No roto después de 3 420 000
Palastro de acero Krupp: $\bar{R} = 53$ ki- logramos por mm. ²	0	22,05	No roto después de 48 200 900
	0	44,10	420 200
Acero Krupp, de muelles y resortes: \bar{R} , desconocido...	0	36,75	No roto después de 3 600 000
	0	73,50	39 950
Idem.....	0	29,40	No roto después de 32 942 000
	12,20	73,50	62 000
Idem.....	48,50	73,50	19 673 300
	7,35	58,80	99 700
Idem.....	29,40	58,80	No roto después de 38 000 000

654. Los resultados de las experiencias precedentes pueden resumirse en la siguiente ley de Woehler:

«La materia se rompe, no solamente cuando ha sido sometida una vez á fuerzas elásticas, tensiones ó compresiones por unidad superficial, superiores

á la que hemos llamado hasta aquí coeficiente de fractura (\bar{R} y \bar{R}' , números 47 y 82), sino también:

1.º Cuando está sometida á fuerzas elásticas menores que \bar{R} , todas del mismo signo (extensiones ó compresiones), con tal de que se repitan un número N suficiente de veces (casos (a) y (b): valores de \bar{R}_0 y \bar{R}_k).

2.º Por la acción de fuerzas elásticas, menores todavía que las precedentes á número igual de repeticiones, siempre que obren de modo que produzcan alternativamente extensiones y compresiones (caso (c): valor de \bar{R}_a).

655. No se pueden tomar como valores exactos los números deducidos por Woehler de sus experiencias, porque:

1.º Es difícil, en experiencias cuyos resultados han de ser comparados, obtener perfecta identidad de cualidades químicas y mecánicas en las barras metálicas de ensayo.

2.º La duración de los esfuerzos es demasiado breve (0,083 de segundo) para que puedan producir todo su efecto de deformación y alteración de resistencia del metal. Está probado que cuando la acción de las fuerzas es prolongada, las alteraciones de resistencia son mayores; es, pues, posible que los valores verdaderos de N , número de repeticiones, sean inferiores á los hallados por Woehler, cuando la duración de los esfuerzos máximos sea mayor.

Los ejes de carruajes de las vías férreas están en el mismo caso que las barras de las experiencias de Woehler, y se les puede aplicar, sin error, los resultados.

3.º Finalmente, los coeficientes de fractura por extensión, deducidos de la fórmula general de flexión, como lo han sido por Woehler, son erróneos, y deben ser divididos por el factor α (núm. 645).

Pero estos errores no disminuyen la importancia grande que tienen los estudios experimentales de Woehler; antes bien, como los verdaderos valores de los coeficientes de fractura por extensión son menores que los hallados en las experiencias citadas, se hace más sensible todavía la destructora influencia de la repetición de esfuerzos.

Las experiencias de Spangenberg, continuador de los trabajos de Woehler, confirman los resultados obtenidos por éste en punto á la perjudicial acción de los esfuerzos repetidos. M. Spangenberg operó, por tracción directa y por flexión, en metales idénticos y con fuerzas máximas k máx. iguales para los dos casos, lo cual permite comparar las resistencias por flexión y por extensión simple.

Es fácil observar que á igual valor de k máx., el número N de repeticio-

nes para obtener la fractura por flexión es mucho mayor que el correspondiente á la tracción directa; así, por ejemplo, con cargas crecientes á partir de cero hasta llegar á $\bar{R}_0 = 26,46$ kilogramos por mm.², el hierro se rompió por extensión directa después de $N = 596000$ repeticiones, mientras que sometidos á flexión necesitó $N = 3587509$; esto comprueba cuanto dejamos dicho á propósito de la mayor resistencia á la extensión en los prismas flexados (núms. 645 y 646).

Los resultados de las experiencias de Spangenberg están consignados en la tabla que damos á continuación; las cargas repetidas, tanto de extensión como de flexión, variaban de *cero* á k máx., de modo que los valores de N corresponden al caso (a) del núm. 649. Es de sentir que las experiencias por tracción directa, que tan interesantes son, no hayan sido más numerosas, para que hubiese sido posible determinar en cada metal el valor de R_a , ó sea el límite superior de las fuerzas por unidad superficial que no producen la fractura por extensión, aun cuando se repitan infinito número de veces ($N = \infty$).

EXPERIENCIAS DE SPANGENBERG

METALES	PRUEBAS DE TRACCIÓN DIRECTA		PRUEBAS DE FLEXIÓN	
	Extensión de las fibras en kilogs. por mm. ²	Número de repeticiones <i>N</i> productor de la fractura	Extensión de las fibras extremas calculada por la fórmula $\bar{R}_0 = \frac{M \sigma}{I}$ kilogs. por mm. ²	NÚMERO DE REPETICIONES <i>N</i> productor de la fractura.
Hierro de Westfalia..	35,28	4 700	34,91	612 065
	»	»	33,07	457 229
	»	»	31,24	799 543
	29,40	136 700	29,40	1 493 511
	26,46	180 800	26,46	3 587 509
	26,46	596 000	»	»
	23,52	280 121	»	»
	23,52	566 344	»	»
Acero Krupp.	47,04	81 400	»	»
	»	»	42,26	443 800
	»	»	40,42	423 400
	»	»	38,59	513 000
	36,75	429 000	36,75	11 774 000
	»	»	34,91	11 851 000
	»	»	33,07	No se rompió.
	14,70	0	14,70	102 650
Bronce ordinario.....	14,70	4 200	13,23	151 300
	»	»	11,02	837 760
	11,02	6 300	8,82	No roto después de 10 400 000
	»	»	»	»
Bronce fosforoso.....	7,35	5447 000	»	»
	18,37	147 850	»	»
	14,70	408 350	14,70	862 980
	»	»	13,23	8 151 811
	11,02	2731 161	11,02	5 075 160
Cobre rojo..	9,19	2340 000	8,82	No roto después de 10 000 000
	14,70	0	14,70	253 100
	»	»	13,23	1 934 000
	11,02	0	11,02	No roto después de 5 600 000
	7,35	53 000	»	»

656. Valores de \bar{R} , \bar{R}_0 y \bar{R}_a .—Resumiendo las experiencias de Woehler y Spangenberg sobre los metales sometidos á esfuerzos reiterados y alternativos, Mr. Considère llega á las siguientes deducciones:

«La repetición de los esfuerzos en los metales es una causa destructora cuyo efecto no es proporcional al valor absoluto del máximo del esfuerzo.

El caso más desfavorable para la resistencia de un metal, es aquel en que el esfuerzo varía entre dos valores iguales y de signo contrario, esto es, cuando el metal se halla sometido á extensiones y compresiones alternativas de igual intensidad [$k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$ caso (c)]. El límite peligroso de fuerza repetida (\bar{R}_a) es entonces muy inferior al límite de elasticidad (D), y tal vez igual próximamente á la mitad de este valor ($\bar{R}_0 = \frac{1}{2} D$) siendo 0,083 de segundo la duración de los esfuerzos máximos ($k \text{ máx.} = k' \text{ máx.}$), como en las experiencias de Woehler.

Quando el esfuerzo varía de cero á un máximo, y es siempre del mismo signo, compresión ó extensión [caso (a)], el límite peligroso de fuerza repetida (\bar{R}_0) tiene un valor próximamente igual al del límite de elasticidad (D) si la duración de los esfuerzos máximos es de 0,083 de segundo.

Si el esfuerzo varía de un mínimo ($k \text{ mín.}$) á un máximo ($k \text{ máx.}$), ambos del mismo signo [caso (b)], el límite peligroso (\bar{R}_k) aumenta de valor, y es tanto mayor que el límite de elasticidad (D) cuanto mayor sea el mínimo ($k \text{ mín.}$).

Los valores de \bar{R}_0 , \bar{R}_k y \bar{R}_a obtenidos por tracción directa, son menores que los deducidos de la fórmula general de flexión, aplicada á barras flexadas».

Según Woehler, siendo \bar{R} el coeficiente ordinario de fractura correspondiente á cargas que actúan una sola vez,

$$\bar{R} = 1,83 \bar{R}_0$$

$$\bar{R}_0 = 0,546 \bar{R}$$

$$\bar{R}_a = 0,50 \bar{R}_0 \text{ á } 0,60 \bar{R}_0 = 0,273 \bar{R} \text{ á } 0,327 \bar{R}$$

Según M. Knütt Styffe:

$$\bar{R} = 1,40 \bar{R}_0 \text{ á } 1,80 \bar{R}_0,$$

y en el caso más desfavorable

$$\bar{R} = 2 \bar{R}_0.$$

O, lo que es lo mismo,

$$\bar{R}_0 = 0,71 \bar{R} \text{ á } 0,55 \bar{R},$$

y en el caso más desfavorable

$$R_0 = 0,50 \bar{R}.$$

657. Fórmula de Launhardt. — Se ha tratado de expresar por una fórmula empírica el valor general del coeficiente de fractura en todos los casos que hemos considerado, de modo que concuerden los resultados con los de Woehler y Spangenberg. Representando dicho coeficiente por \bar{R}_r , Launhardt ha propuesto, para los casos de esfuerzos del mismo signo (casos (a) y (b), núms. 649 y 650),

$$\bar{R}_r = \bar{R}_0 + (\bar{R} - \bar{R}_0) \frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}} \quad (1)$$

que traduce bien los resultados de experiencia de Woehler, en lo que se refiere á los valores límites \bar{R}_0 y \bar{R} .

En efecto; cuando $k \text{ mín.} = 0$, se obtiene $\bar{R}_r = \bar{R}_0$, como debe suceder; pues entonces estamos en el caso (a) (núm. 649).

Si $k \text{ mín.} = k \text{ máx.}$, resulta $\bar{R}_r = \bar{R}$, y así debe ser, porque se trata del caso 1.º (núm. 647). En fin, á medida que aumenta $k \text{ mín.}$, aumenta \bar{R}_r , separándose del valor de \bar{R}_0 y aproximándose al de \bar{R} .

Para los esfuerzos en sentido contrario (compresiones y extensiones, caso (c) del núm. 652), Weyrauch ha propuesto la siguiente fórmula, en la que, como ya dijimos en otro lugar, $k \text{ máx.}$ representa el mayor de los máximos, ya sea de extensión ó de compresión, y $k' \text{ máx.}$ el otro máximo:

$$\bar{R}_r = \bar{R}_0 - (\bar{R}_0 - \bar{R}_a) \frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}} \quad (2).$$

Cuando $k' \text{ máx.} = k \text{ máx.}$, resulta $\bar{R}_r = \bar{R}_a$; y si $k' \text{ máx.} = 0$, lo cual equivale á suponer que los esfuerzos son todos en el mismo signo, variando de cero á $k \text{ máx.}$ se obtiene $\bar{R}_r = \bar{R}_0$.

658. Importancia de las experiencias de Woehler. Necesidad de tenerlas en cuenta para formar los coeficientes de trabajo.— Hasta que Woehler

puso de manifiesto los diversos modos de fractura no se consideraba otro que el de cargas graduales crecientes, del mismo signo, que conducían á un coeficiente \bar{R} , del cual se tomaba una fracción $\frac{1}{m}$ para obtener el coeficiente de trabajo R , siendo m un número que representa el grado de seguridad de la construcción (núm. 48). La adopción de este coeficiente de trabajo supone que las cargas permanentes han de actuar de modo semejante á las que ocasionaron la fractura, esto es, que han de crecer gradualmente de *cero* hasta R una sola vez, obrando después permanentemente al llegar á este límite, sin que haya repeticiones.

No siempre sucede esto en las construcciones, y como ejemplo presentaremos la variedad de cargas que actúan sobre los elementos de un puente de vía férrea.

Una vigueta trasversal, que une los cuchillos del puente, no soporta más cargas que su propio peso, que es en general despreciable; pero cuando ingresa en el puente un tren, las ruedas de cada uno de los ejes de los carruajes cargan sucesivamente sobre la vigueta, de modo que puede decirse que está sometida á cargas de flexión en el mismo sentido, pero que varían de cero á un máximo, repitiéndose un gran número de veces. Es el caso (a) del núm. 649.

Los cuchillos están sometidos á flexión permanente originada por el peso propio, que es de gran valor y no puede despreciarse, y además á la flexión que producen las sobrecargas, ó sea el peso del tren. Las piezas elementales de cada cuchillo que por la organización especial de éste hayan de trabajar siempre del mismo modo, esto es, por extensión ó por compresión, se hallarán en el caso (b) del núm. 650, pues que cuantas veces circule el tren por el puente pasarán de un esfuerzo *mínimo* debido al peso propio de los cuchillos, al *máximo* correspondiente al peso de éste y al del tren, y puede haber algunas piezas en los cuchillos que sufran alternativamente extensiones y compresiones, según la posición que en el puente ocupe el tren; es el caso (c) del núm. 652.

Los ingenieros alemanes estiman que es error grave en estos casos aplicar un mismo coeficiente de trabajo (R ó R') á todas las piezas del puente, aunque estén construídas con el mismo material, porque los coeficientes de fractura son diferentes y resultarían coeficientes de seguridad diversos, es decir, falta de unidad en la resistencia del conjunto, y aun podría suceder que hubiera deficiencia de resistencia en algunas piezas, si el coeficiente de trabajo común fuera demasiado grande.

Supongamos, por ejemplo, que se toma para coeficiente de seguridad el número 4, es decir, que se adopta como coeficiente de trabajo para todas las piezas $\frac{1}{4}$ del coeficiente de fractura correspondiente á cargas graduales crecientes de 0 á \bar{R} , ó sea $R = \frac{1}{4} \bar{R}$, lo cual para el hierro daría para R un valor de 8 á 9 kilogramos por milímetro cuadrado.

En las piezas que trabajan alternativamente por compresión y extensión, el coeficiente de fractura será, según Woehler (núm. 656), $\bar{R}_a = 0,273 \bar{R}$; luego al haber aceptado para ellas, como para las demás, un coeficiente de trabajo $R = \frac{1}{4} \bar{R} = 0,250 \bar{R}$, las colocamos en condiciones muy desfavorables de resistencia, como que R tiene valor casi igual al \bar{R}_a de fractura, y se obtiene un coeficiente de seguridad $\frac{\bar{R}_a}{R} = \frac{0,273 \bar{R}}{0,250 \bar{R}} = 1,10$, en vez del número 4 que creíamos alcanzar.

Cualquiera sobrecarga accidental no prevista, un pequeño error en el cálculo ó el deterioro del material, podrían dar lugar á que el coeficiente de trabajo R fuese igual ó superior al de fractura \bar{R}_a , sobreviniendo entonces la ruina de la obra.

Por otra parte, es necesario que todos los elementos de una construcción contribuyan de modo igual á la resistencia, esto es, que todos den el mismo coeficiente de seguridad. Si ésta se regula por la fracción de coeficiente de fractura, el procedimiento lógico de cálculo consistirá en formar los coeficientes de fractura de las diversas piezas,

$$\bar{R}, \bar{R}_0, \bar{R}_k, \bar{R}_a,$$

según la naturaleza de los esfuerzos á que se hayan de encontrar sometidas, y tomar para coeficiente de trabajo de cada una de ellas $\frac{1}{m}$ de aquellos valores.

Este es el método de cálculo que hoy se sigue en Alemania, Austria, Suecia y otras naciones, aplicándolo principalmente á los puentes metálicos, y en general á los entramados sometidos á la acción de cargas móviles de intensidad variable. En los edificios, las cargas son casi siempre estáticas y de valor constante; ó, si son de valor variable, la diferencia entre el *mínimo* y el *máximo* es muy pequeña; de modo que se emplean generalmente en el

cálculo los coeficientes de fractura (\bar{R}, \bar{R}' ...) y de trabajo (R, R' ...) ordinarios. Los *suelos* son los elementos de los edificios que se hallan en condiciones más semejantes á las de los ejemplos anteriores; pero aun para ellos, repetimos, es pequeña la diferencia que existe entre los esfuerzos mínimos debidos al peso propio del suelo y los máximos correspondientes á la carga total, es decir, que \bar{R}_k es poco diferente de \bar{R} .

659. Formación de los coeficientes de trabajo. — Hace tiempo que los ingenieros americanos comprendieron la necesidad de aplicar coeficientes de trabajos diferentes, según las circunstancias de cada caso; y á este efecto, dividen las piezas elementales de un entramado en las tres categorías siguientes:

- 1.^a Piezas sometidas á esfuerzos alternativos de extensión y de compresión.
- 2.^a Idem íd. á esfuerzos intermitentes, pero siempre de la misma clase (compresiones ó extensiones).
- 3.^a Idem íd. á esfuerzos continuos constantes.

Admiten que las cargas que es posible hacer soportar con seguridad á las piezas en estos tres casos están en la relación 1 : 2 : 3, ó, lo que es lo mismo, esta misma relación ha de existir en los coeficientes de trabajo respectivos (*).

Para el hierro, por ejemplo, si aceptamos para valor de coeficiente de trabajo en las piezas de la segunda categoría $R = 6$ kilogramos por mm.², tendríamos para los diversos casos antes considerados:

	Coeficiente de trabajo <i>R</i> Kilogs. por mm. ²
Caso 1. ^o — Piezas comprimidas y extendidas alternativamente.....	3
Caso 2. ^o — Compresiones ó extensiones repetidas de cero á un máximo.....	6
Caso 3. ^o — Compresiones ó extensiones constantes.....	9

En Alemania y en otros países se concretan más los casos, y los valores de los coeficientes de trabajo son deducidos de los de fractura (\bar{R}_r) que dan

* Los valores de \bar{R}_a, \bar{R}_0 y \bar{R} del núm. 656, son entre si como los núms. 0,273, 0,546 y 1, ó como 1:2:3,6; relación poco diferente de la de los ingenieros americanos.

las fórmulas de Launhardt y Weyrauch, puestas al efecto bajo esta forma (*):

$$\bar{R}_r = \bar{R}_0 \left[1 + \left(\frac{\bar{R}}{\bar{R}_0} - 1 \right) \frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}} \right] \quad (3) \quad (\text{Launhardt}).$$

$$\bar{R}_r = \bar{R}_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{R}_a}{\bar{R}_0} \right) \frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}} \right] \quad (4) \quad (\text{Weyrauch}).$$

Para formar el coeficiente de trabajo sustituyen los valores de \bar{R} y \bar{R}_0 , obtenidos experimentalmente, y toman una fracción $\frac{1}{m}$ de \bar{R}_r ; en general hacen $R = \frac{1}{3} \bar{R}_r$. Además, las relaciones variables $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}}$, $\frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}}$ de las experiencias de fractura son substituídas, respectivamente, por estas otras:

$$\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}} \quad " \quad \frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}},$$

siendo:

$f \text{ mín.}$ = fuerza de extensión ó de compresión, por unidad superficial de sección trasversal, á que se ha de encontrar sometida la pieza por efecto de la carga constante, que es siempre del mismo signo.

$f \text{ máx.}$ = ídem íd., correspondiente á las cargas permanentes y sobrecarga.

$f' \text{ máx.}$ = menor de los máximos de fuerza de extensión ó compresión por unidad superficial, cuando las cargas son alternativamente de signos contrarios.

$f \text{ máx.}$ = mayor de los máximos, en las condiciones anteriores.

Así se obtienen:

$$R = \frac{1}{m} \bar{R}_0 \left[1 + \left(\frac{\bar{R}}{\bar{R}_0} - 1 \right) \frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}} \right] \quad (5) \quad \text{Para fuerzas del mismo signo.}$$

$$R = \frac{1}{m} \bar{R}_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{R}_a}{\bar{R}_0} \right) \frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}} \right] \quad (6) \quad \text{Para íd. de signos contrarios.}$$

(*) Recordaremos que la fórmula de Launhardt se refiere á las piezas siempre comprimidas ó extendidas, y la de Weyrauch á las que están sometidas á compresiones y extensiones alternativas.

La substitución de las relaciones variables (y desconocidas, en general) $\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}}$, $\frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}}$ por las $\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}}$, $\frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}}$ parece lógica; la misma influencia ejercen las segundas en el valor de R que ejercían las primeras en el de \bar{R}_r . Así vemos que cuando $f \text{ mín.} = f \text{ máx.}$, $R = \frac{1}{m} \bar{R}$, como debe ser. En el caso de ser $f \text{ mín.} = 0$, es $R = \frac{1}{m} \bar{R}_0$; y si $f' \text{ máx.} = f \text{ máx.}$, resulta $R = \frac{1}{m} \bar{R}_a$.

Para el hierro algunos ingenieros admiten:

$$\bar{R} = 32 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{2} \bar{R} = 16 \quad \text{»}$$

$$\bar{R}_a = 0,6 \bar{R}_0 = 9,6 \quad \text{»}$$

$$m = 3$$

y entonces, haciendo $\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}} = \varphi$, $\frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}} = \varphi'$, relaciones de valores numéricos, absolutos, se obtiene:

	Coeficiente de fractura \bar{R}_r Kilogramos por mm. ²	Coeficiente de trabajo R Kilogramos por mm. ²
Caso de fuerzas repetidas del mismo signo (Launhardt)	$R_r = 16 \left(1 + \frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}} \right)$	$R = 5,3 (1 + \varphi) \quad (7).$
Caso de fuerzas repetidas, de signo contrario (Weyrauch.....)	$R_r = 16 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}} \right)$	$R = 5,3 \left(1 - \frac{2}{5} \varphi' \right) \quad (8).$

M. Almgvist, profesor de la Escuela politécnica de Stockolmo, ha calculado los puentes de la línea Gottebourg-Falum por las fórmulas

$$R = 6 (1 + \varphi) \quad (9) \quad (\text{fuerzas del mismo signo}),$$

$$R = 6 \left(1 - \frac{2}{5} \varphi' \right) \quad (10) \quad (\text{fuerzas de signo contrario}),$$

que tienen el mismo origen que las anteriores, sin más diferencia que la de aceptar para coeficiente de fractura un valor más elevado, $\bar{R} = 36$ kilogramos por mm.², por tratarse de excelentes hierros suecos.

M. Séjourné, ingeniero francés, ha propuesto para el hierro las siguientes fórmulas del coeficiente de trabajo:

$$R = \frac{6}{1 - 0,4 \varphi} \quad (11) \text{ Esfuerzos variables del mismo signo,}$$

$$R = \frac{6}{1 + 0,4 \varphi'} \quad (12) \text{ Esfuerzos variables de signo diferente,}$$

siendo $\varphi = \frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}}$, y $\varphi' = \frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}}$, como en las fórmulas anteriores, las relaciones de los valores absolutos, numéricos, prescindiendo del signo, de las cantidades $f \text{ mín.}$, $f \text{ máx.}$, $f' \text{ máx.}$.

Esta fórmula da los siguientes coeficientes de trabajo para el hierro:

	R Kilogramos por mm. ²
$\varphi = 0 \dots$ Esfuerzos que varían de cero á $f \text{ máx.}$...	6
$\varphi = 1 \dots$ Esfuerzos constantes de valor $f \text{ máx.}$...	10
$\varphi' = 1 \dots$ Esfuerzos alternativos de extensión y de compresión, de igual intensidad $f' \text{ máx.} = f \text{ máx.}$	4,3

Según las fórmulas de Almgvist, sería:

$\varphi = 0 \dots$	$R = 6 (1 + \varphi) \dots$	$R = 6$
$\varphi = 1 \dots$	$R = 6 (1 + \varphi) \dots$	$R = 12$
$\varphi' = 1 \dots$	$R = 6 \left(1 - \frac{2}{5} \varphi'\right) \dots$	$R = 3,6$

Para el acero dulce propone Weyrauch los coeficientes de trabajo siguientes, expresados en kilogramos por mm.²:

$$R = 10 \left(1 + \frac{3}{4} \varphi\right) \text{ para esfuerzos en el mismo sentido,}$$

$$R = 10 \left(1 - \frac{1}{2} \varphi'\right) \text{ para esfuerzos en sentido contrario.}$$

Si se acepta como coeficiente de trabajo del acero, para cargas constantes, 9 kilogramos por mm.², las fórmulas de Séjourné, para este metal, serían:

$$R = \frac{9}{1 - 0,4 \varphi} \quad (13)$$

$$R = \frac{9}{1 + 0,4 \varphi'} \quad (14)$$

que dan los siguientes resultados:

$\varphi = 0 \dots$ Esfuerzos del mismo signo, que varían de cero á un máximo.....	$R = 9$
$\varphi = 1 \dots$ Esfuerzo constante.....	$R = 15$
$\varphi' = 1 \dots$ Esfuerzos iguales en sentido contrario..	$R = 6,4$

M. Heinzerling, en su *Curso de construcción*, muy apreciado en Alemania, da las fórmulas siguientes, en las cuales $\varphi = \frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}}$, $\varphi' = \frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}}$:

	Esfuerzos variables del mismo signo.	Esfuerzos variables en magnitud y en signo.
Hierro.....	$R = 8 \left(1 + \frac{1}{2} \varphi\right)$	$R = 7 \left(1 - \frac{1}{2} \varphi'\right) \quad (15).$
Acero.....	$R = 12 \left(1 + \frac{5}{9} \varphi\right)$	$R = 11 \left(1 - \frac{5}{11} \varphi'\right) \quad (16).$

R es el coeficiente de trabajo en kilogramos por mm.².

Las fórmulas de Launhardt y Weyrauch son modernas (1876); las de Heinzerling y las que de ellas se derivan, lo son todavía más. La de Séjourné se separa de la forma general (por más que trata también su autor de que en ella estén comprendidos los resultados de las experiencias de Woehler), pero es más sencilla, y por esto es recomendable para los cálculos.

Según las fórmulas recomendadas por el Reglamento Oficial francés de 29 de Agosto de 1891, para la construcción de puentes, el valor del coeficiente de trabajo R , en kilogramos por mm.², es:

Esfuerzos variables del mismo signo...	Hierro....	$R = 6 + 3 \varphi$
	Acero....	$R = 8 + 4 \varphi$
Esfuerzos variables de signo contrario.	Hierro....	$R = 6 - 3 \varphi'$
	Acero....	$R = 8 - 4 \varphi'$

En estas fórmulas, φ y φ' tienen la misma representación que en las anteriores, es decir, respectivamente, $\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}}$ y $\frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}}$.

Resultan para el coeficiente de trabajo R los siguientes valores:

	R en kilogramos por mm. ² .	
	HIERRO	ACERO
$\varphi = 0$ esfuerzos que varían de cero á $f \text{ máx.}$	6	8
$\varphi = 1$ esfuerzo constante de valor $f \text{ máx.}$	9	12
$\varphi' = 1$ esfuerzos alternativos, iguales, de sentido opuesto; $f' \text{ máx.} = f \text{ máx.}$	3	4

Hemos reunido las fórmulas más empleadas por los ingenieros partidarios del nuevo método de cálculo; á continuación exponemos las objeciones de que han sido objeto.

660. Observaciones relativas á la exactitud de las fórmulas anteriores y á la conveniencia de su aplicación. — No todos los ingenieros conceden la misma importancia y extensión de aplicaciones á los resultados de las experiencias de Woehler y Spangenberg.

Hay algunos, como los franceses, que hacen viva oposición á la adopción de las nuevas ideas, tan esparcidas en Alemania, y creen que las fórmulas anteriores podrán emplearse, á lo más, en el cálculo de ejes de wagón ó árboles de máquina, y en general en piezas sometidas á flexión y animadas de movimiento rotatorio, como en las barras de ensayo de las primeras experiencias de Woehler; pero que no son aplicables al cálculo de puentes metálicos, ó de entramados semejantes, ni hay necesidad de adoptar coeficientes de trabajo diferentes para las diversas piezas, cualquiera que sea la intensidad y modo de aplicación de las cargas.

Otros aceptan en principio las consecuencias deducidas de dichas experiencias, y la llamada *ley de Woehler* que las condensa (núm. 654); pero no están conformes con las fórmulas empíricas de Launhart y Weyrauch, ni por su organización ni por los valores numéricos que se asignan á los coeficientes.

Cuanto á la organización de dichas fórmulas, manifiestan que si bien es patente la influencia que tiene en el coeficiente de fractura, no solamente

el máximo esfuerzo de extensión ó de compresión por unidad superficial ($k \text{ máx.}$), sino también la relación algebraica del menor esfuerzo al mayor ($\frac{k \text{ mín.}}{k \text{ máx.}}$, $\frac{k' \text{ máx.}}{k \text{ máx.}}$), no se conoce el valor exacto de esta influencia para poderla formular de modo tan concreto como lo han hecho Launhardt, Weyrauch y otros.

Por lo que respecta á las relaciones numéricas $\frac{\bar{R}}{\bar{R}_0}$, $\frac{\bar{R}}{\bar{R}_a}$ (núm. 656), entienden que han sido dadas con precipitación y falta de datos del fenómeno de fractura. Cierto es que si una fuerza de extensión ó de compresión es superior al límite de elasticidad y produce deformaciones permanentes, su repetición ha de acarrear la fractura, porque no es posible que estas deformaciones se multipliquen indefinidamente; por esto los ingenieros alemanes, y alguno francés (Mr. Considère; núm. 656), refieren al valor del límite de elasticidad los de los coeficientes de fractura \bar{R}_0 y \bar{R}_a ; pero dicho coeficiente de elasticidad D , determinado para el caso de cargas graduales aplicadas una sola vez en progresión creciente á partir de cero, ¿es de valor invariable? ¿No puede alterarse por el mismo efecto de la repetición de esfuerzos?

Por otra parte, en las experiencias de Woehler y Spangenberg, las repeticiones de esfuerzos se verifican con gran rapidez, de modo que es muy breve el tiempo que trascurre entre cada dos aplicaciones sucesivas de carga máxima (0,083 de segundo). Estas condiciones de rapidez tienen lugar tan sólo en los ejes de carruajes, pero no en los puentes ni en las construcciones sometidas á sobrecargas accidentales, en los cuales los intervalos entre cada dos aplicaciones sucesivas de carga máxima son grandes, y desde luego mucho mayores que en las tantas veces citadas experiencias. ¿No podrá esta diferencia de circunstancias influir en los valores de la fuerza límite de elasticidad de modo que resulte esta constante específica con diferente valor en cada uno de los dos casos?

Las observaciones precedentes son muy atendibles, y han sido confirmadas por las recientes experiencias de Bauschinger, que es del mayor interés conocer.

661. Experiencias de Bauschinger. — Las experiencias de M. Bauschinger sobre la elasticidad y resistencia de los hierros y aceros son muy notables, no solamente por la exactitud y rigor de las observaciones, debidas al empleo de aparatos que permiten apreciar las deformaciones por extensión y por compresión con aproximaciones de dos diezmilésimas de milímetro,

sino porque han dado á conocer fenómenos nuevos, como son los de la influencia del tiempo, que más adelante veremos.

Merced al empleo de aparatos de gran precisión, ha podido M. Bauschinger observar que con fuerzas pequeñas de extensión ó de compresión, muy inferiores al límite de elasticidad, se producen deformaciones permanentes; de modo que el que hemos llamado *período elástico* (núms. 25 y 51) está definido con exactitud, únicamente, por la constancia de la relación $\frac{p}{l}$,

esto es, por la proporcionalidad de fuerzas y deformaciones (recta $O b$, figura 22, lám. 25) que verdaderamente existe en dicho período. *Fuerza límite de elasticidad* es, pues, la mayor fuerza $a b$ por unidad superficial de las del período elástico, es decir, de las que producen deformaciones lineales proporcionales á las fuerzas de extensión ó de compresión.

M. Bauschinger ha comprobado, además, que en algunos cuerpos, á partir del límite de elasticidad, si bien las deformaciones dejan de ser proporcionales á las fuerzas que las producen, y crecen más aprisa que estas últimas, los crecimientos son poco notables al principio del segundo período; de modo que no se hace muy sensible la falta de proporcionalidad, y la curva $b c$ se separa poco de la recta $O b h$, continuando así hasta un cierto valor de p , tal como el $c d$, á partir del cual es muy notable el defecto de proporcionalidad de p é i , y las deformaciones crecen mucho más aprisa que las fuerzas, separándose mucho, por tanto, la curva $c s$ de la tangente $O b h$.

En el intervalo $a d$, los alargamientos permanentes son muy pequeños y el tiempo no ejerce influencia en el efecto que producen las fuerzas, es decir, que las deformaciones no aumentan cuando las fuerzas obran permanentemente ni disminuyen cuando cesan de actuar. En cambio, los alargamientos desde $O d$ en adelante se distinguen, no tan sólo por su mayor valor, sino también, lo que es más notable, por la acción que en ellos ejerce el tiempo, aumentando cuando las fuerzas obran constantemente y desapareciendo en parte cuando cesa su acción, continuando esta disminución durante algún tiempo después de haber desaparecido las fuerzas.

$c d$ es, pues, un segundo límite que puede llamarse *límite de las grandes deformaciones* (*), y existe lo mismo para la extensión que para la compresión.

En algunos materiales se señala perfectamente el límite $c d$ (fig. 22, lámina 25), así como el paso de $b c$ á $c s$; en otros, el tránsito es insensible; de

(*) Los ingenieros ingleses le denominan *límite plástico* (*plastic limit*).

modo que no se puede fijar con exactitud dicho límite de grandes deformaciones. En el latón, bronce, madera, acero duro y otros materiales, no existe el segundo límite $c d$, y en el hierro y acero dulce tiene un valor poco diferente de $a b$, límite de elasticidad.

M. Bauschinger estudió las alteraciones de elasticidad experimentadas por los cuerpos bajo la acción de fuerzas de tracción ó de compresión superiores á los límites de elasticidad primitivos, ya aisladas, ya repetidas varias veces en el mismo sentido ó en sentidos opuestos. A continuación consignamos los resultados de las experiencias.

662. 1.º—Alteraciones de la elasticidad causadas por una fuerza de extensión ó de compresión mayor que el límite de elasticidad.—Si la fuerza, tal como la $m n$ (fig. 22, lám. 25), es mayor que el primitivo límite de elasticidad ($a b$) y menor que el límite de las grandes deformaciones ($c d$) se produce aumento en el valor del límite de elasticidad; de modo que si, inmediatamente, después de haber actuado dicha fuerza, se somete de nuevo el cuerpo á extensión ó á compresión, será mayor el nuevo límite de elasticidad $a b$ que se obtenga. El aumento será tanto mayor cuanto mayor sea $m n$ ó cuanto más se aproxime $m n$ á $c d$.

Cuando la fuerza $r t$ de extensión ó de compresión es mayor que $c d$, límite de las grandes deformaciones, si inmediatamente después de suprimir dicha fuerza $r t$ se somete el cuerpo á nuevas extensiones ó compresiones, se encuentra que el nuevo límite de elasticidad $a b$ ha disminuído á veces hasta llegar á cero. Pero dejando el cuerpo en reposo algún tiempo, antes de la nueva aplicación de fuerzas, el límite de elasticidad se eleva de nuevo, rebasa el valor primitivo $a b$, llega á ser igual al esfuerzo $r t$ si el intervalo es de varios días, y aun á exceder de este valor cuando es de años (*).

También se verifica, cuando se aplican por primera vez esfuerzos $r t$ mayores que el límite de las grandes deformaciones $c d$, que este límite $c d$ aumenta hasta llegar á valer $r t$ si se repite la operación inmediatamente. Pero si después de haber cesado la acción de $r t$ se deja en reposo el cuerpo, días, meses y aun años, y se somete á nuevas acciones, se obtiene para límite $c d$ un valor mayor todavía que $r t$.

El coeficiente de elasticidad (E) aumenta al mismo tiempo que el límite de elasticidad ($a b = D$), aunque en menor proporción.

(*) Ya dijimos en el núm. 56 que cuando los esfuerzos sucesivos eran un poco mayores que el límite de elasticidad primitivo, éste sufría alguna, aunque pequeña, variación. Cuando los esfuerzos son bastante mayores que el límite de elasticidad primitivo, las alteraciones son más considerables. Esta segunda variación, así como la notable influencia del tiempo, han sido halladas por Bauschinger.

Para mejor inteligencia de cuanto dejamos dicho, expondremos los resultados de algunas experiencias:

Hierros.

		Kilogramos por mm. ² .
Extensión....	Límite de elasticidad primitivo....	$ab = 14,10$
	Límite de grandes deformaciones..	$cd = 19,20$

Se aumentó la fuerza de tracción hasta 34,80 kilogramos por mm.², y después de hacerla desaparecer se dejó en reposo la barra de ensayo durante tres años y treinta y un días, al cabo de cuyo tiempo, sometida de nuevo á fuerzas de extensión, dió los resultados siguientes:

		Kilogramos por mm. ² .
Extensión....	Límite de elasticidad.....	$ab = 36,70$
	Límite de grandes deformaciones..	$cd = 38,80$

Acero Bessemer, sometido á extensión.

		Kilogramos por mm. ² .
Límite de elasticidad primitivo.....		$ab = 24,85$
Idem de grandes deformaciones.....		$cd = 25,80$
Se aumentó el esfuerzo tractor hasta.....		$rt = 33,30$

y treinta minutos después de suprimirlo, se sometió de nuevo á tracción, y se halló:

		Kilogramos por mm. ² .
Límite de elasticidad.....		$ab = 9,30$
Idem de grandes deformaciones.....		$cd = 33,00$
Se hizo de nuevo.....		$rt = 37,10$

y se halló, después de treinta minutos:

Límite de elasticidad.....		$ab = 6,30$
Idem de grandes deformaciones.....		$cd = 37,90$
Se aumentó el esfuerzo tractor hasta.....		$rt = 43,30$

y dejando en reposo la barra, se halló después de tres años y tres días:

Límite de elasticidad.....	$ab > 43,30$
Idem de grandes deformaciones.....	$cd > 43,30$

663. 2.º Alteraciones de la elasticidad originadas por un pequeño número de fuerzas sucesivas, alternativamente de sentido contrario. — Los mismos fenómenos son comunes á la extensión y á la compresión; de modo que estas palabras pueden alternarse en cuanto sigue.

Cuando un esfuerzo de tracción mn (fig. 22, lám. 25) es superior al límite de elasticidad ab , el límite de elasticidad por compresión desciende, pudiendo llegar á ser cero aun para pequeñas diferencias $mn - ab$. Puede aumentarse de nuevo por medio de una compresión.

Si en seguida se somete el prisma á una compresión que exceda este límite de elasticidad, se rebaja entonces el límite de elasticidad de tracción hasta cero ó poco más. El tiempo tiene escasa ó ninguno influencia en estos fenómenos; de modo que cuando uno cualquiera de los límites de elasticidad disminuye, por efecto de las causas descritas, no aumenta sensiblemente al cabo de varias semanas.

Cuando se somete una pieza á esfuerzos crecientes, alternativamente de sentidos opuestos, el límite de elasticidad en un sentido no se altera y disminuye hasta que se ha rebasado el límite de elasticidad primitivo correspondiente á esfuerzos de signo contrario. Se puede corregir la disminución, en parte, continuando la aplicación de esfuerzos crecientes alternativos de signo contrario; pero el nuevo límite de elasticidad hallado es muy inferior al primitivo.

664. 3.º Alteraciones de la elasticidad causadas por fuerzas sucesivas del mismo signo, que varían desde cero á un cierto límite, repetidas un gran número de veces. — A semejanza de lo que sucede para las fuerzas que obran una sola vez (1.º, núm. 662), el límite de elasticidad aumenta de valor con las repeticiones de esfuerzos mn mayores que ab y menores que cd , y estos crecimientos continúan, á medida que el número de repeticiones aumenta, hasta cierto punto nada más; de modo que el límite de elasticidad primitivo ab crece á causa de las repeticiones, á medida que aumenta el esfuerzo mn , hasta llegar á un límite superior, no mayor que cd (límite de las grandes deformaciones). Si la fuerza repetida es mayor que dicho límite superior, y, por tanto, mayor que cd , se producirá la fractura al cabo de un cierto número de repeticiones.

En cambio toda fuerza creciente desde cero hasta un cierto valor próximo al límite de elasticidad primitivo, no produce la fractura aun cuando se repita de 5 á 16 millones de veces.

Lo que antecede es cierto solamente en tanto que las piezas sometidas á experiencias estén exentas de defectos, porque la más pequeña alteración es causa de fractura por esfuerzos repetidos de intensidad menor de la enunciada. En este punto, los aceros obtenidos por fusión, como más homogéneos que los hierros, sufren más que éstos por un principio de alteración superficial, aunque sea insignificante (núm. 112).

Cuando una pieza ha sufrido, sin romperse, esfuerzos del mismo signo, repetidos varios millones de veces, el coeficiente de fractura por cargas estáticas no solamente no disminuye, sino que aumenta algunas veces (*).

665. Se nota la falta de experiencias relativas á esfuerzos de signo contrario, repetidos un gran número de veces; pero todo hace presumir que el límite de fuerza peligrosa es inferior, y no en pequeña cantidad, al límite de elasticidad primitivo.

666. Resumen de las experiencias y de las observaciones anteriores.— Es incontestable la perjudicial influencia, en la resistencia de los metales, de la repetición de esfuerzos en el mismo sentido ó, alternativamente, en sentidos opuestos, siendo esta última mucho más destructora que la primera. Las experiencias de Bauschinger confirman en este punto los resultados obtenidos por Woehler y Spangenberg.

Cuando los esfuerzos son del mismo signo, variables de cero á un máximo, la fuerza límite peligrosa de repetición (R_n) es algo mayor que la admitida hasta aquí, es decir, mayor que el límite de elasticidad primitivo, pero á condición de que las piezas metálicas sean perfectas, porque el más imperceptible defecto puede producir la fractura con menor fuerza repetida.

Cuando las cargas producen alternativamente compresiones y extensiones, la fuerza límite peligrosa, por unidad superficial de sección transversal (R_a), no está suficientemente conocida todavía; pero hasta que nuevas y más completas experiencias la determinen, puede decirse que su valor es inferior al límite de elasticidad.

Los metales se encuentran en condiciones tanto más favorables de resistencia cuanto mayor sea el tiempo trascurrido entre dos repeticiones sucesivas, si bien no se conoce todavía la medida de esta influencia.

(*) Esto está de acuerdo con lo que dijimos en el núm. 56.

Es prudente hacer que la fatiga molecular de las piezas diversas de un entramado sometido á repeticiones numerosas de esfuerzo no sea la misma, sino que se subordine á los valores de las fuerzas límites, peligrosas, de repetición; ó, en otros términos, es conveniente aceptar para el cálculo valores diversos del coeficiente de trabajo, según las circunstancias en que se encuentre cada una de las piezas elementales; pero debe concretarse este procedimiento de cálculo á los casos en que sean grandes las diferencias entre la carga permanente y la carga accidental ó sobrecarga, y numerosas y frecuentes las repeticiones, como, por ejemplo, en los puentes y entramados similares. En la imposibilidad de dar hoy una fórmula que por su organización y por los valores de las constantes permita determinar con exactitud los coeficientes de trabajo R en cada caso, aceptaremos las de Séjourné (fórmula 11, 12, 13 y 14, núm. 659), que son de sencilla aplicación y dan valores aceptables de R .

667. Aplicación de las fórmulas anteriores á los problemas de extensión y de compresión. — Supongamos que se aceptan las fórmulas de Séjourné; cuanto decimos á continuación es aplicable á otras cualesquiera, como las de Launhardt, Weyrauch, Heinzerling, etc.

Sean:

- ω = área de la sección transversal de la pieza extendida ó comprimida.
- $P \text{ máx.}$ = fuerza mayor de extensión ó compresión.
- $P \text{ mín.}$ = fuerza menor de las de extensión ó compresión.
- $P' \text{ máx.}$ = fuerza mayor, de signo contrario á $P \text{ máx.}$

Como suponemos que la dirección de estas fuerzas coincide con el eje del prisma, de modo que se reparten uniformemente en toda la sección transversal, tendremos:

$$f \text{ mín.} = \frac{P \text{ mín.}}{\omega} \quad \text{,,} \quad f \text{ máx.} = \frac{P \text{ máx.}}{\omega} \quad \text{,,} \quad f' \text{ máx.} = \frac{P' \text{ máx.}}{\omega}$$

$$\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}} = \frac{P \text{ mín.}}{P \text{ máx.}} \quad \text{,,} \quad \frac{f' \text{ máx.}}{f \text{ máx.}} = \frac{P' \text{ máx.}}{P \text{ máx.}}$$

y entonces las fórmulas de Séjourné, para el hierro, serán:

$$R = \frac{6}{1 - 0,4 \frac{P \text{ mín.}}{P \text{ máx.}}} (17). \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Para piezas extendidas, ó comprimidas,} \\ \text{por fuerzas repetidas que varían entre} \\ P \text{ mín. y } P \text{ máx.} \end{array} \right.$$

$$R = \frac{6}{1 + 0,4 \frac{P' \text{ máx.}}{P \text{ máx.}}} \quad (18).$$

Para piezas extendidas y comprimidas, alternativamente, por fuerzas comprendidas entre $P' \text{ máx.}$ y $P \text{ máx.}$

Es decir, que las relaciones φ y φ' se forman con las fuerzas totales de extensión ó de compresión.

Ahora, bien; la fórmula que resuelve los problemas de extensión ó de compresión es, según sabemos,

$$P = R \omega,$$

y claro está que hemos de ponernos en las peores condiciones de resistencia para determinar ω ; esto es, sustituiremos P por su valor máximo, y será, tomando ω en milímetros cuadrados,

$$\omega = \frac{P \text{ máx.}}{R}.$$

No habrá más que formar el valor de R correspondiente al caso que se considere.

Ejemplos. 1.º *Pieza de hierro, extendida con una fuerza permanente de 1000 kilogramos, y una fuerza variable y accidental que puede llegar á valer 2400 kilogramos.*

$$\left. \begin{aligned} P \text{ mín.} &= 1000 \\ P \text{ máx.} &= 1000 + 2400 = 3400 \end{aligned} \right\} \varphi = \frac{P \text{ mín.}}{P \text{ máx.}} = \frac{1000}{3400} = 0,3.$$

$$R = \frac{6}{1 - 0,4 \varphi} = \frac{6}{1 - 0,4 \times 0,3} = \frac{6}{1 - 0,12} = 6,81 \text{ kgs. por mm.}^2$$

$$\omega = \frac{3400}{6,81} = 499 \text{ mm.}^2.$$

2.º *Una pieza de hierro está sometida alternativamente á compresiones y extensiones comprendidas entre una compresión de 820 kilogramos y una extensión de 2000 kilogramos.*

El mayor de los dos máximos es 2000; luego

$$\left. \begin{aligned} P \text{ máx.} &= 2000 \\ P' \text{ máx.} &= 820 \end{aligned} \right\} \varphi' = \frac{P' \text{ máx.}}{P \text{ máx.}} = \frac{820}{2000} = 0,41,$$

y el valor del coeficiente de trabajo será:

$$R = \frac{6}{1 + 0,4 \varphi'} = \frac{6}{1 + 0,4 \times 0,41} = 5,15 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

Y atendiendo á la fuerza máxima para la determinación de ω , tendremos:

$$\omega = \frac{P \text{ máx.}}{R} = \frac{2000}{5,15} = 388 \text{ mm.}^2.$$

3.º *Una pieza de hierro está extendida con fuerzas repetidas, intermitentes, que varían de cero á 12000 kilogramos.*

$$\left. \begin{aligned} P \text{ mín.} &= 0 \\ P \text{ máx.} &= 12000 \end{aligned} \right\} \varphi = \frac{P \text{ mín.}}{P \text{ máx.}} = 0$$

$$R = \frac{6}{1 - 0,4 \varphi} = 6 \quad \omega = \frac{12000}{6} = 2000 \text{ mm.}^2.$$

668. Para el acero se procedería del mismo modo, con la única diferencia de emplear el valor 9 en vez de 6 en el numerador de los valores de R .

Todavía pueden simplificarse más los procedimientos para la determinación de ω , empleando el valor de R de Séjourné.

Supongamos que se trata del caso más general, de esfuerzos en el mismo sentido:

$$\omega = \frac{P \text{ máx.}}{R} \quad R = \frac{6}{1 - 0,4 \frac{P \text{ mín.}}{P \text{ máx.}}};$$

sustituyendo se encuentra:

$$\omega = \frac{P \text{ máx.} - 0,4 P \text{ mín.}}{6} \quad (19).$$

Si los esfuerzos del mismo sentido son, como es general, producidos por una fuerza permanente P_0 y por una fuerza accidental P_1 , será:

$$\left. \begin{aligned} P \text{ mín.} &= P_0 \\ P \text{ máx.} &= P_0 + P_1 \end{aligned} \right\} \omega = \frac{P_1 + 0,6 P_0}{6} = \frac{P_1}{6} + \frac{P_0}{10}$$

que nos dice que para determinar ω hay que sumar á la fuerza accidental los 6 décimos de la permanente y dividir por 6, ó bien dividir por 6 la fuerza máxima accidental y por 10 la permanente y sumar.

Para esfuerzos alternativos, en sentido contrario, sería:

$$\omega = \frac{P \text{ máx.} + 0,4 P' \text{ máx.}}{6} \quad (20).$$

Si las piezas fuesen de acero, no hay más que poner el denominador 9 en vez del 6 en las fórmulas anteriores.

669. Cálculo de las piezas sometidas á flexión producida por fuerzas variables, constantes ó alternativas.— Recordaremos que el primer miembro de la ecuación $\frac{R I}{v} = M$ representa el momento de las fuerzas elásticas, y que R es la fuerza por unidad superficial que extiende ó comprime las fibras distantes v de la capa de fibras neutras. El segundo miembro es el valor del momento de flexión para aquella sección, y sabido es que el valor absoluto de R depende del de M , puesto que se tiene:

$$R = \frac{M v}{I}.$$

Este valor de R no es otra cosa que lo que hemos llamado f , en la teoría de Woehler y fórmulas que de ella se han deducido; luego

$$f \text{ mín.} = \frac{M \text{ mín.} v}{I}$$

$$f \text{ máx.} = \frac{M \text{ máx.} v}{I}$$

de modo que se verificará

$$\frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}} = \frac{M \text{ mín.}}{M \text{ máx.}} \quad \text{y} \quad \frac{f' \text{ mín.}}{f' \text{ máx.}} = \frac{M' \text{ mín.}}{M' \text{ máx.}}$$

Fórmese, pues, los momentos $M \text{ máx.}$ correspondientes á las mayores cargas y los $M \text{ mín.}$ correspondientes á las menores cargas para la sección

más comprometida, y se podrá obtener el valor del coeficiente de trabajo R y resolver el problema de flexión para la ecuación

$$\frac{R I}{v} = M \text{ máx.}$$

ó

$$\frac{I}{v} = \frac{M \text{ máx.}}{R}.$$

Supongamos, por ejemplo, el caso de que la pieza esté flexada de modo que la concavidad vuelva siempre del mismo lado, lo cual equivale á decir que las fibras trabajarán siempre del mismo modo, unas por extensión y otras por compresión, ó, lo que es lo mismo, que estamos en el caso de fuerzas del mismo sentido:

$$R = \frac{6}{1 - 0,4 \frac{f \text{ mín.}}{f \text{ máx.}}} = \frac{6}{1 - 0,4 \frac{M \text{ mín.}}{M \text{ máx.}}}.$$

De modo que sustituyendo en la anterior, resulta

$$\frac{I}{v} = M \text{ máx.} \times \frac{1 - 0,4 \frac{M \text{ mín.}}{M \text{ máx.}}}{6}$$

ó

$$\frac{I}{v} = \frac{M \text{ máx.} - 0,4 M \text{ mín.}}{6} \quad (21);$$

fórmula de igual construcción que la (19) del número anterior.

Si las cargas son, un peso muerto P_0 y una sobrecarga accidental P_1 , y llamamos M_0 y M_1 á los momentos máximos correspondientes, sabemos por el principio de *superposición de efectos* que $M \text{ máx.} = M_0 + M_1$, y como $M \text{ mín.} = M_0$, será:

$$\frac{I}{v} = \frac{M_1 + 0,6 M_0}{6 \times 10^6} \quad (23);$$

M_1 y M_0 representan kilogrametros. é $\frac{I}{v}$ metros.

Ejemplo. Vigueta doble T , laminada, de hierro, de 6 metros de longitud, apoyada en los dos extremos. Está cargada con un peso permanente de $p = 300$ kilogramos por metro lineal, uniformemente repartido, y accidentalmente (siendo la flexión en el mismo sentido) con un peso P_1 en el punto medio igual á 2000 kilogramos.

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 = \frac{1}{8} \times 300 \times 6^2 = 150 \text{ kilográmetros.}$$

$$M_1 = \frac{1}{4} P_1 l = \frac{1}{4} \times 2000 \times 6 = 3000$$

$$\frac{I}{v} = \frac{M_1 + 0,6 M_0}{6 \times 10^6} = \frac{3000 + 0,6 \times 1500}{6 \ 000 \ 000} = 0,000 \ 635.$$

Con el valor de $\frac{I}{v}$ se acudiría á las tablas de momentos de inercia (tabla 3 del núm. 489) y elegiríamos la viga cuyo valor $\frac{I}{v}$ fuese igual ó mayor que el anterior y conviniese al problema.

Una de las soluciones es una vigueta de $\frac{254 \times 153}{13,50 \times 17}$ (núm. 455) que tiene

$$\frac{I}{v} = 0,000 \ 666$$

y pesa 63,50 kilogramos por metro lineal.

670. Si la flexión se operase en opuestos sentidos, de modo que las fibras trabajasen alternativamente por extensión y por compresión, tendríamos, repitiendo el cálculo anterior,

$$\frac{I}{v} = \frac{M \text{ máx.} + 0,4 M' \text{ máx.}}{6 \times 10^6} \quad (24),$$

tomando las dimensiones en metros y en kilogramos, y siendo:

$M \text{ máx.}$ = el momento de flexión mayor de los dos máximos en los dos sentidos opuestos.

$M' \text{ máx.}$ = el otro momento máximo.

Ejemplo. Una viga de hierro, sección doble T , de 5 metros de longitud, empotrada en los dos extremos, está flexada en sentidos opuestos por fuerzas $P' = 2000$ kilogramos y $P = 4800$ kilogramos, aplicadas en el punto medio.

$$M \text{ máx.} = \frac{1}{4} P l = \frac{1}{4} \times 4800 \times 5 = 6000 \text{ kilográmetros.}$$

$$M' \text{ máx.} = \frac{1}{4} P' l = \frac{1}{4} \times 2000 \times 5 = 2500 \text{ kilográmetros.}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{M \text{ máx.} + 0,4 M' \text{ máx.}}{6 \times 10^6} = \frac{6000 + 0,4 \times 2500}{6 \times 10^6} = 0,001 \ 104.$$

En la tabla 3.^a del núm. 489 hallamos:

$$\text{Vigueta núm. 512, de } \frac{355 \times 153}{15 \times 18}$$

$$\frac{I}{v} = 0,001 \ 111.$$

Peso por metro lineal = 82,75 kilogramos.

671. Para el acero se empleará como divisor, en los valores de $\frac{I}{v}$, la cantidad 9×10^6 , en vez de 6×10^6 .

672. Esfuerzo cortante. — Las experiencias de Woehler demuestran que los coeficientes de fractura por esfuerzo cortante, producidos por cargas variables, alternativas, etc., tienen por valor 0,80 de los correspondientes á la extensión y compresión causadas por fuerzas semejantes, guardando, como vemos, la misma relación que tenían cuando se trataba de cargas graduales crecientes (núms. 99 y 116); de modo que representando las cantidades similares por las mismas letras, pero provistas de dos acentos, será:

$$\bar{R}'' = 0,80 \bar{R}$$

$$\bar{R}''_o = 0,80 \bar{R}_o$$

$$\bar{R}''_a = 0,80 \bar{R}_a$$

De aquí se deduce que el coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante (R'') ha de ser también 0,80 R , siendo R el correspondiente á las extensiones ó compresiones producidas por cargas repetidas, alternativas, etc.

Empleando la fórmula de Séjourné, tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hierro... } R'' = \frac{0,80 \times 6}{1 - 0,4\varphi} = \frac{4,80}{1 - 0,4\varphi} \\ \text{Acero... } R'' = \frac{0,80 \times 9}{1 - 0,4\varphi} = \frac{7,20}{1 - 0,4\varphi} \end{array} \right\} (25). \left\{ \begin{array}{l} \text{Para esfuerzos cortantes} \\ C \text{ del mismo signo, com-} \\ \text{prendidos en } C \text{ } \textit{mín.} \text{ y} \\ C \text{ } \textit{máx.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hierro... } R'' = \frac{0,80 \times 6}{1 + 0,4\varphi'} = \frac{4,80}{1 + 0,4\varphi'} \\ \text{Acero... } R'' = \frac{0,80 \times 9}{1 + 0,4\varphi'} = \frac{7,20}{1 + 0,4\varphi'} \end{array} \right\} (26). \left\{ \begin{array}{l} \text{Para esfuerzos cortantes} \\ C \text{ en sentidos opues-} \\ \text{tos, que varían entre} \\ C' \text{ } \textit{máx.} \text{ y } C' \text{ } \textit{máx.} \end{array} \right.$$

φ es igual á la relación $\frac{C \text{ } \textit{mín.}}{C \text{ } \textit{máx.}}$, y $\varphi' = \frac{C' \text{ } \textit{máx.}}{C \text{ } \textit{máx.}}$.

673. Modificaciones en el cálculo de las roblonaduras. — Ya se calculen por la resistencia al esfuerzo cortante, ó por la adherencia, deberá modificarse el coeficiente k (núm. 262), pudiendo emplearse al efecto las mismas fórmulas (11) á (14), sin más que sustituir los numeradores 6 y 9 por los valores de k .

VII

PIEZAS COMPRIMIDAS SEGÚN SU EJE, DE LONGITUD MUCHO MAYOR QUE LAS DIMENSIONES DE SU SECCIÓN TRASVERSAL

1. FÓRMULAS TEÓRICAS

2. FÓRMULAS PRÁCTICAS. — RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

3. OTROS CASOS DE PIEZAS COMPRIMIDAS. — PIEZAS SOMETIDAS Á COMPRESIÓN Y Á FLEXIÓN

1. FÓRMULAS TEÓRICAS

RESOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

674. Caso de piezas articuladas en los extremos. — Cuando la pieza comprimida es de longitud mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal, no se verifica la fractura por aplastamiento, como en los prismas de pequeña altura, sino por flexión lateral, que causa aplastamiento en una de las caras y fractura por extensión en la opuesta (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 3.^a).

Consideremos un prisma AB de longitud l (fig. 18, lám. 26), de fibra media rectilínea en su estado primitivo, apoyado en B y sometido á la acción de una fuerza P de compresión con respecto á la cual es despreciable el peso propio de la pieza, de que prescindiremos por tanto.

Supongamos los extremos A y B redondeados, y todavía mejor, articulados, siendo los ejes de las articulaciones rectas normales al plano de la figura, que pasan por puntos de la fibra media ó eje longitudinal del prisma, y supongamos también que por modo cualquiera se obliga al punto A á moverse según la línea AB .

Si el prisma es de materia homogénea, su eje perfectamente rectilíneo y la fuerza P obra exactamente á lo largo de este eje, no puede producirse flexión lateral alguna, puesto que es igual á cero el brazo de palanca de P , y en una sección transversal cualquiera, de área ω , la compresión por unidad superficial tendrá por valor $\frac{P}{\omega}$. Pero si por una causa accidental el prisma se flexa y adquiere la flecha TC , nace entonces un par de flexión cuyo momento es $P \times TC$, y como consecuencia de esta deformación se desarrollará

en el interior del prisma, normalmente á la sección transversal C , un par de fuerzas elásticas cuyo momento se opone á la flexión.

Según fueren el valor de la fuerza P y el de su momento $P \times TC$, comparado con el de las fuerzas elásticas, puede suceder una de las tres cosas siguientes:

La flexión no subsiste, el prisma se endereza y toma la forma rectilínea; subsiste la flexión ó bien aumenta continuamente hasta la rotura de la pieza.

Se ve, pues, que debe haber una relación entre la flecha $TC = f$, la fuerza P que la produce y el momento de las fuerzas elásticas que se oponen á la deformación, momento que, como sabemos [núm. 307, fórmula (8)], es función de E , coeficiente de elasticidad que define el material, y de I' , momento de inercia de la sección transversal.

675. Relación entre P , f , I' y E . — Sea $A'CB$ la nueva forma del prisma AB ; tomemos la línea AB como eje X , y la perpendicular á ella en B como eje Y .

Para una sección cualquiera D , el momento de flexión es $-Py$; igualándolo al momento de las fuerzas elásticas $\frac{EI'}{\rho}$, y sustituyendo en vez de ρ su valor, tendremos:

$$\frac{EI'}{\rho} = EI' \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -Py \quad (*) \quad (1).$$

El factor I' es el momento de inercia de la sección transversal del prisma con relación al eje perpendicular al plano de flexión, y como ésta se verificará por donde mayores facilidades se presenten á esta clase de deformación, es decir, por donde menor sea el momento de fuerzas elásticas $\frac{EI'}{\rho}$, resulta que I' representará en la ecuación (1) *el menor de los momentos de inercia de dicha sección*.

(*) Ponemos signo menos al momento de flexión, de acuerdo con la regla del núm. 309, porque produce una curvatura cuya concavidad se dirige á las y negativas.

En otras ocasiones (núm. 307) hemos prescindido, al formar el valor de ρ , de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, por su pequeñez al lado de la unidad, y hemos aceptado como expresión del momento de fuerzas elásticas $EI' \frac{d^2 y}{dx^2}$; pero en el caso presente no puede hacerse sin error sensible, porque en el segundo miembro encuentra y , cantidad muy pequeña, también, á causa de la débil curvatura del prisma.

Suponiendo hecho en S el abatimiento de la sección cd sobre el plano de la fig. 18 (lám. 26), siendo cd el eje de rotación, se obtiene para eje del momento de inercia de la sección S la recta LH .

Integrando una vez la ecuación (1), será:

$$-EI' \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{P}{2} y^2 + C \quad (2).$$

Podemos suponer que $A'B = AB = l$, por la pequeñez de la deformación.

La flecha f corresponde á $x = \frac{1}{2} l$, abscisa del punto C , en el cual la tangente es paralela á AB , y, por tanto, $\frac{dy}{dx} = 0$. Sustituyendo estos valores en (2), resulta:

$$-EI' = -\frac{P f^2}{2} + C \quad (3)$$

$$f = \sqrt{\frac{2(EI' + C)}{P}} \quad (4).$$

Determinando la constante C por integraciones sucesivas (*) se llega, por la primera aproximación, al siguiente valor de la flecha:

$$f = 4 \sqrt{\frac{EI'}{P}} \sqrt{\sqrt{\frac{Pl^2}{\pi^2 EI'} - 1}} \quad (**) \quad (5).$$

π representa el desarrollo de la circunferencia, que en función del diámetro l vale 3,14.

(*) Hemos prescindido, en obsequio á la brevedad, de los extensos cálculos detallados de la integración, que se realiza por las *funciones elípticas*. Véanse los trabajos de M. Maurice Levy, los de Clebsch (*Teoría de la elasticidad de los cuerpos sólidos*), y los de M. Alban Gris.

(**) Este valor de f es un poco pequeño; la segunda aproximación conduce al valor siguiente, que es más exacto:

$$f = 4 \sqrt{\frac{EI'}{P}} \sqrt{\sqrt{\frac{Pl^2}{\pi^2 EI'} - 1} \frac{1}{1 - \frac{8\pi^2 EI'}{Pl^2} \left(\sqrt{\frac{Pl^2}{\pi^2 EI'} - 1}\right)}} - 1$$

pero que no emplearemos por las complicaciones de cálculo á que da lugar. También se convierte este valor en cero cuando

$$P = \frac{\pi^2 EI'}{l^2}$$

676. Valor mínimo de la fuerza capaz de producir flexión.—Para que f sea cero, esto es, para que no haya flexión, ha de ser

$$\frac{P l^2}{\pi^2 E I'} - 1 = 0$$

ó

$$P = \frac{\pi^2 E I'}{l^2};$$

f resulta de valor imaginario cuando P es menor que $\frac{\pi^2 E I'}{l^2}$. A este valor de P le llamaremos en adelante P_0 , y tendremos

$$P_0 = \frac{\pi^2 E I'}{l^2} \quad (6).$$

P_0 es la menor de las fuerzas de compresión productoras de flexión lateral, ó bien P_0 es la mayor de las fuerzas que pueden aplicarse al prisma en las condiciones enunciadas antes, sin peligro de que se produzca flexión lateral.

El valor (5) de f se puede poner bajo una de estas formas:

$$\left. \begin{aligned} f &= 4 \sqrt{\frac{E I'}{P} \left(\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1 \right)} \\ f &= \frac{4l}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{P_0}{P}} - \frac{P_0}{P}} \end{aligned} \right\} (7).$$

677. Necesidad de evitar que se inicie la flexión lateral en las piezas comprimidas. El valor P_0 debe considerarse como carga de fractura.—El valor de P_0 [(6) del número anterior] es muy grande, por la magnitud del factor E (coeficiente de elasticidad) que entra en el numerador; de modo que si se inicia la flexión, aunque sea motivada por una fuerza P'_0 muy poco mayor que el límite P_0 , el momento de flexión $P'_0 f$ alcanzará considerable valor, á pesar de la pequeñez de la flecha f que hace de brazo de palanca. Aplicando la ecuación de resistencia

$$\frac{R I}{v} = P'_0 f$$

se obtendrá, en general, para coeficiente de trabajo R un valor igual ó mayor que el límite de elasticidad por flexión, y aún mayor también que el límite de las grandes deformaciones ó de plasticidad (núm. 661); esto quiere decir que sin necesidad de nuevos incrementos de fuerza compresora, continuará la deformación por flexión; seguirá aumentando la flecha f , y, por tanto, el momento $P'_0 f$ y el coeficiente R , continuando esta sucesión de hechos hasta la fractura. Por esto dice M. Bresse, en su *Curso de Mecánica aplicada*, que «las piezas comprimidas por fuerzas que obran según su eje, deben ser consideradas cuando llegan á flexarse, como en un estado de equilibrio inestable, porque un débil incremento de compresión las pone en peligro de fractura. Es indispensable, por consecuencia, en la práctica de las construcciones, proceder de modo que se evite toda flexión.»

El valor de P_0 debe considerarse como la fuerza teórica de fractura, es decir, que la fuerza de compresión admisible ha de ser $P = \frac{1}{m} P_0$, dando á m el valor correspondiente al grado de seguridad que se desee obtener.

El ejemplo siguiente demuestra cuán grande es la influencia que ejercen pequeños incrementos dados á P_0 en el valor del coeficiente de trabajo.

Las flechas han sido calculadas por las fórmulas (7), y los coeficientes de trabajo por la ecuación

$$\frac{R I}{v} = P'_0 f$$

suponiéndola aplicable cuando se rebasa el límite de elasticidad. De todos modos, y aunque admitamos el coeficiente α para el primer miembro de esta ecuación (núm. 640), resultan valores considerables para R , más que suficientes para producir la fractura.

Ejemplo. Barra cilíndrica de hierro, de longitud $l = 4$ metros, y diámetro $d = 0^m,096$, articulada en sus extremos.

$$E = 18 \times 10^9$$

$$\text{Momento de inercia} = I' = 0,000\,004.$$

$$v = \frac{1}{2} d = 0^m,048$$

$$\frac{I'}{v} = 0,00008.$$

Área de la sección = $\omega = 0,007238 \text{ m.}^2 = 7238 \text{ mm.}^2$
 Coeficiente de fractura del hierro, por compresión, $\bar{R}' = 34$ kilogramos por mm.^2
 La fuerza de aplastamiento en una barra corta, calculada por la fórmula $P' = \bar{R}' \omega$, sería:

$$P' = 7238 \times 34 = 246092 \text{ kilogramos.}$$

La fuerza límite P_0 , es, tomando las dimensiones en metros,

$$P_0 = \frac{\pi^2 EI'}{l^2} = \frac{3,14^2 \times 18 \times 10^9 \times 0,000004}{4^2} = 44368.$$

FUERZAS de compresión P en kilogramos.	FLECHAS f metros.	MOMENTOS de flexión Pf kilográmetros.	COEFICIENTE DE TRABAJO R deducido de la fórmula $\frac{RI'}{v} = Pf$ kilogramos por mm.^2
$P_0 = 44368$	»	»	»
44374	0,041	1819	22,73
44380	0,065	2884	36,05
44390	0,075	3329	41,61

Un incremento de fuerza igual á 6 kilogramos, es decir, 0,00013 del valor primitivo 44368, produce una flecha de 0^m,041, y un coeficiente de trabajo de 22,73 kilogramos por mm.^2

En la flexión causada por fuerzas normales al eje, hemos visto (número 405) que la flecha tiene el valor

$$f = k \frac{Pl^3}{EI'}$$

de modo que f es proporcional á P . Examinando los valores de f del cuadro anterior, se observa que las flechas crecen mucho más rápidamente.

678. Límites de la longitud l . — Llamando \bar{R}' al coeficiente de fractura por compresión, correspondiente á prismas de pequeña altura (número 82). será $\bar{R}' \omega$ la fuerza que romperá el sólido por aplastamiento directo.

Si establecemos la condición

$$\bar{R}' \omega \leq \pi^2 \frac{EI'}{l^2} = P_0 \quad (8),$$

hacemos constar que no es posible conseguir la flexión lateral del prisma, cualquiera que sea la fuerza de compresión, puesto que la menor de las fuerzas productoras de flexión (P_0) es mayor ó igual á la de aplastamiento, y éste tendrá lugar antes de que aquélla empiece.

En cambio, la posibilidad de flexión lateral está expresada por la desigualdad

$$\bar{R}' \omega > \pi^2 \frac{EI'}{l^2}.$$

De la desigualdad (8) se deduce, recordando que $I' = \omega r_0^2$, siendo r_0 el radio de giro (número 476),

$$l < \pi r_0 \sqrt{\frac{E}{\bar{R}'}} \quad (9)$$

r_0 es el radio mínimo de giro porque corresponde al valor mínimo del momento de inercia I' de la sección trasversal del prisma.

La desigualdad (9) da el límite superior de la longitud para que la flexión no sea posible; de modo que el prisma se romperá por aplastamiento, sin que llegue á realizarse la flexión lateral, siempre que quede satisfecha dicha desigualdad.

Cuando l sea mayor que $\pi r_0 \sqrt{\frac{E}{\bar{R}'}}$, será de temer la fractura por flexión.

En las secciones circulares de radio r y diámetro $d = 2r$,

$$I' = \frac{\pi r^4}{4} = \omega r_0^2;$$

y como $\omega = \pi r^2$,

$$r_0 = \frac{1}{4} d.$$

En el rectángulo,

$$I' = \frac{ab^3}{12} = ab r_0^2$$

$$r_0 = b \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

He aquí los valores límites de l para algunos materiales, en función de d y de b :

MATERIALES	E en kilogra- mos por mm. ²	\bar{R}' en kilogra- mos por mm. ²	LÍMITE SUPERIOR DE l	
			Sección circular.	Sección rectangular.
Madera de pino ó en- cina.....	1000	4	11,8 d	13,5 b
Fundición de segunda fusión.....	9500	75	8,8 d	10 b
Hierro.....	18600	36	17,5 d	20 b
Acero dulce de cons- trucciones.....	20000	40	17,5 d	20 b

679. Para que la flexión lateral no se realice cuando la materia experi- mente una compresión por unidad superficial igual á un cierto coeficiente de trabajo R' , deberá ser

$$R' \omega < \pi^2 \frac{EI'}{l^2},$$

de donde

$$l < \pi r_0 \sqrt{\frac{E}{R'}} \quad (10).$$

Este límite superior es mayor que el (9), porque $R' < \bar{R}'$.

Haciendo $R' = \frac{1}{6} \bar{R}'$ para los metales, y $R' = \frac{1}{10} \bar{R}'$ para la madera, hallaremos:

	2º VALOR LÍMITE SUPERIOR DE l	
	Sección circular.	Sección rectangular.
Madera de pino ó encina.....	37,3 d	48,6 b
Fundición ordinaria de 2.ª fusión. . .	21,5 d	24,5 b
Hierro.....	43 d	49 b
Acero dulce de construcciones.....	43 d	49 b

680. Momento máximo de flexión. — El momento máximo es Pf en va- lor absoluto; ó, sustituyendo el valor de la flecha f [segundo valor de los (7)], tendremos:

$$M_0 = P \frac{4l}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{P_0}{P}} - \frac{P_0}{P}}$$

ó

$$M_0 = A P l \quad (11),$$

siendo

$$A = \frac{4}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{P_0}{P}} - \frac{P_0}{P}} \quad (12).$$

681. Valor límite del esfuerzo máximo de compresión. — Sea b la altura de la sección transversal del prisma (fig. 18, lám. 26), ó mejor dicho, la di- mension paralela al plano de flexión; y R'_2 la compresión máxima que por efecto de la flexión sufrirán las fibras (punto c de la sección media cd).

Sabemos (núm. 460) que

$$R'_2 = \frac{M_0 v}{I'}$$

ó, puesto que $v = \frac{1}{2} b$, y sustituyendo el valor (11),

$$R'_2 = \frac{A P l b}{2 I'} = \frac{P}{\omega} \frac{l^2 \omega}{I'} \frac{A b}{2 l}$$

siendo ω el área de la sección transversal.

Haciendo

$$\frac{A b}{2 l} = B,$$

se obtiene

$$R'_2 = B \frac{P}{\omega} \frac{l^2 \omega}{I'} \quad (13).$$

B es función de P, E, I' y $\frac{b}{l}$: tanto A y B como R'_2 son imaginarios para

valores de P menores que P_0 (véase el valor (12) de A), como que entonces no hay flexión.

Por efecto de la presión directa que produce la fuerza P , la compresión por unidad superficial vale

$$R'_3 = \frac{P}{\omega}$$

La compresión máxima (punto c), tendrá por valor, por ambos conceptos, $p = R'_2 + R'_3$. Si consideramos el prisma en el momento de la fractura producida por la fuerza de compresión P_0 , será entonces $p = \bar{R}'$, llamando \bar{R}' al coeficiente de fractura por compresión, y tendremos

$$\bar{R}' = \frac{P_0}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right) \quad (14)$$

sustituyendo al efecto, en la primera ecuación, $I' = \omega r_0^2$.

Si la fractura no ha de verificarse, y la compresión máxima por unidad superficial que produce la fuerza P ha de ser igual á R' , coeficiente de trabajo ordinario,

$$R' = \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right) \quad (15)$$

682. Pieza empotrada en un extremo y libre en el otro. — Si el extremo A tiene libertad para apartarse de la tangente $A'B$ en el empotramiento (fig. 19, lám. 26), puede estimarse el prisma AB de la fig. 19 como la mitad del AB de la fig. 18. No habrá, pues, más que sustituir l por $2l$ en las fórmulas del caso anterior, para tener las correspondientes al presente.

Resulta así:

Fuerza mínima que produce flexión lateral..... $P_0 = \frac{\pi^2 E I'}{4 l^2} \quad (16)$

Límites de l que impiden la flexión lateral... } Para la fractura..... $l < \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{E}{R'}} \quad (17)$

... } Para un coeficiente de trabajo R' $l < \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{E}{R'}} \quad (18)$

Flecha..... $f = \frac{8l}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{P_0}{P}} - \frac{P}{P_0}} \quad (19)$

Ecuación de resistencia..... $R' = \frac{P}{\omega} \left(1 + 4 B \frac{\omega l^2}{I'} \right)$
 Idem de fractura..... $\bar{R}' = \frac{P_0}{\omega} \left(1 + 4 B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (20)$

Aplicando la desigualdad (17), tendríamos:

	LÍMITE SUPERIOR DE l .	
	Sección circular.	Sección rectangular.
Madera de pino ó encina.....	5,9 d	6,7 b
Fundición ordinaria de 2. ^a fusión...	4,4 d	5 b
Hierro.....	8,8 d	10 b
Acero dulce de construcción.....	8,8 d	10 b

683. Pieza empotrada en los dos extremos. — Se supone el empotramiento perfecto y que el extremo A desciende según la línea AB (fig. 20, lám. 26).

Sea m'_0 el momento del par de empotramiento.

Tendremos:

$$E I' \left[1 + \left(\frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = - P y + m'_0 \quad (21)$$

Integrando una vez, resulta:

$$- E I' \left[1 + \left(\frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = - \frac{P y^2}{2} + m'_0 y + C \quad (22)$$

Por efecto del empotramiento, para $y = 0$, $\frac{d y}{d x} = 0$; luego $- E I' = C$.

Para $y = f$, $\frac{d y}{d x} = 0$ (punto C); sustituyendo en (21) se deduce

$$m'_0 = \frac{1}{2} P f.$$

El momento de flexión máximo (punto *C*) vale

$$M_0 = -Pf + m'_0 = -\frac{1}{2}Pf = -m'_0 \quad (23).$$

Hay, pues, en el prisma tres secciones igualmente peligrosas: las *A* y *B* de empotramiento y la media *C*.

Integrando la ecuación diferencial del primer orden (22) haciendo uso de las funciones elípticas, se obtiene, como primer valor aproximado de la flecha *f*,

$$f = 8 \sqrt{\frac{EI'}{P}} \sqrt{\sqrt{\frac{Pl^2}{4\pi^2 EI} - 1}} \quad (*) \quad (24);$$

f es cero cuando $P = P_0 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ (25), é imaginario para valores de *P* menores que *P*₀; luego las fuerzas menores que *P*₀ no producen flexión.

Comparando la fórmula (25) con la (6) del primer caso (núm. 676) se observa que aquélla se obtiene de ésta poniendo $\frac{l}{2}$ en vez de *l*; luego un prisma empotrado en sus extremos y sometido á compresión tiene la misma resistencia que otro de longitud doble, cuyos extremos estén redondeados (**); ó bien el primero resiste cuatro veces más que otro de igual longitud, de extremos redondeados ó articulados (***) .

(*) Este valor de *f* es un poco pequeño. Por una segunda aproximación se obtiene el valor siguiente más exacto:

$$f = 8 \sqrt{\frac{EI'}{P}} \sqrt{\sqrt{\frac{Pl^2}{4\pi^2 EI'} - 1} \frac{1}{1 - \frac{32\pi^2 EI'}{Pl^2} \left(\sqrt{\frac{Pl^2}{4\pi^2 EI'} - 1} \right)}} - 1$$

(**) El eje del prisma toma, por efecto de la flexión, la forma *ACB* (fig. 20, lám. 26), siendo *F* y *H* verdaderos puntos de inflexión, á partir de los cuales cambia el sentido de la curvatura. El prisma en la parte *FH*, se halla, pues, en las mismas condiciones que el *A'CB* de la fig. 18; pero la longitud *FH* (fig. 20) es menor que la *A'B* = *l* (fig. 18).

(***) Hodgkinson encontró, experimentalmente, que las columnas de bases planas ofrecen resistencia triple que las de extremos redondeados, lo cual comprueba el resultado de la teoría, pues si bien ésta da el factor 4, hay que observar que las bases planas no proporcionan á las columnas la misma rigidez que los empotramientos.

Se deduciría fácilmente que, en el caso presente,

$$\left. \begin{aligned} l &< 2\pi r_0 \sqrt{\frac{E}{R'}} \\ l &< 2\pi r_0 \sqrt{\frac{E}{R'}} \end{aligned} \right\} (26).$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}' &= \frac{P_0}{\omega} \left(1 + B' \frac{\omega l^2}{I'} \right) \\ R' &= \frac{P}{\omega} \left(1 + B' \frac{\omega l^2}{I'} \right) \end{aligned} \right\} (27).$$

Aplicando la primera de las desigualdades (26), obtendríamos:

	LÍMITE SUPERIOR DE <i>l</i>	
	Sección circular.	Sección rectangular.
Madera de pino y de encina.....	23,6 <i>d</i>	27 <i>b</i>
Fundición ordinaria de 2. ^a fusión... ..	17,6 <i>d</i>	20 <i>b</i>
Hierro.....	35 <i>d</i>	40 <i>b</i>
Acero dulce de construcción.....	35 <i>d</i>	40 <i>b</i>

684. **Pieza empotrada en un extremo *B* y articulada en el otro *A*** (figura 22, lám. 26). — Es un caso intermedio de los representados en las figuras 18 y 20; en *H* hay un punto de inflexión, de modo que la parte *AH* se halla en las mismas circunstancias que la *FH* de la fig. 20 y la *A'CB* de la fig. 18.

El valor límite *P*₀ es

$$P_0 = \frac{2\pi^2 EI'}{l^2}.$$

685. **Caso de puntos fijos intermedios.** — Si en el prisma, cualquiera que sea la situación de los extremos, hay dos ó más puntos intermedios *C*, *D* (fig. 21, lám. 26), sujetos á permanecer en la línea *AB*, cada trozo *AC*, *CD*, etcétera, se porta como si estuviese aislado; de modo que en todas las fórmulas de los casos precedentes hay que poner, en vez de la longitud total *l* las parciales *AC*, *CD*..... de la parte de prisma que se considere. Se debe tomar la mayor de estas partes en beneficio de la resistencia.

RESUMEN DE LOS PRECEPTOS DE LA TEORÍA

686. Carga de fractura. — Resumiendo todo lo deducido por la teoría en el artículo precedente, diremos, por lo que respecta á las fuerzas límites de compresión, que la fuerza P_0 de fractura, cuando los prismas son de gran longitud en proporción de las dimensiones de la sección transversal, es mucho menor que la que corresponde á los de longitud pequeña, es decir,

$$P_0 < R' \omega.$$

El valor de P_0 depende de la situación y forma de los extremos del prisma sometido á compresión, pero puede expresarse por la fórmula general

$$P_0 = k \frac{\pi^2 E I'}{l^2},$$

teniendo k los valores teóricos siguientes:

	k
1.º Prisma de un extremo libre y otro empotrado (fig. 19, lám. 26).	$\frac{1}{4}$
2.º Prisma articulado en los dos extremos (fig. 18).	1
3.º Prisma empotrado en un extremo y articulado en el otro (fig. 22).	2
4.º Prisma empotrado en los dos extremos (fig. 20).	4

Es decir, que si representamos por la cifra 1 la resistencia de la pieza comprimida cuando está empotrada en los dos extremos, la correspondiente á los otros casos estará representada por los números del cuadro siguiente:

	Relación de resistencias. α
Pieza empotrada en los dos extremos (fig. 20, lám. 26).	1
Pieza empotrada en un extremo y articulada en el otro (figura 22).	$\frac{1}{2}$
Pieza articulada en los dos extremos (fig. 18).	$\frac{1}{4}$
Pieza de un extremo libre y otro empotrado (fig. 19).	$\frac{1}{16}$

El caso más favorable para la resistencia es el primero (fig. 20), y el más desfavorable el último (fig. 19).

La fórmula que da la fuerza de fractura en el caso de prisma empotrado en los dos extremos es, como sabemos,

$$P_0 = \frac{4 \pi^2 E I'}{l^2},$$

de modo que la fórmula general, será

$$P_0 = \alpha \frac{4 \pi^2 E I'}{l^2},$$

teniendo α los valores del cuadro anterior.

Esta fórmula se puede poner bajo otra forma; llamemos:

ω = área de la sección transversal.

r_0 = radio mínimo de giro correspondiente.

d = diámetro de la sección circular.

b = lado menor de la sección rectangular.

El momento de inercia I' tiene los valores siguientes:

$$I' = \begin{cases} \frac{\alpha b^3}{12} = \omega \frac{b^2}{12} \dots\dots \text{sección rectangular.} \\ \frac{\pi d^2}{64} = \omega \frac{d^2}{16} \dots\dots \text{» circular.} \\ \omega r_0^2 \dots\dots \text{» de forma cualquiera.} \end{cases}$$

Sustituyendo en la fórmula anterior, y haciendo

$$A = 4 \frac{\pi^2 E}{12}$$

$$A' = 4 \frac{\pi^2 E}{16}$$

$$A'' = 4 \pi^2 E$$

tendremos

$$(1) \begin{cases} P_0 = \alpha A \omega \frac{b^2}{l^2} \dots\dots \text{Prisma de sección rectangular.} \\ P_0 = \alpha A' \omega \frac{d^2}{l^2} \dots\dots \text{» circular.} \\ P_0 = \alpha A'' \omega \frac{r_0^2}{l^2} \dots\dots \text{» cualquiera.} \end{cases}$$

teniendo α los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$, según que los extremos estén empotrados ó articulados.

P_0 puede ponerse bajo la forma siguiente, deducida de las fórmulas (14), (20) y (27):

$$P_0 = \frac{\bar{R}' \omega}{1 + B \frac{l^2 \omega}{I'}} \quad (2),$$

siendo B un coeficiente que tiene valores diferentes para cada uno de los casos anteriores, de disposición varia en los extremos.

687. Carga permanente. — La compresión que puede resistir el prisma, en condiciones ordinarias, es:

$$P = \frac{1}{m} \frac{k \pi^2 E I'}{l^2} \quad (3);$$

m es el coeficiente de seguridad, que se hará igual á uno de los núms. 4, 5, 6, 7, 8, etc., según el grado de solidez que se desee obtener.

También puede hacerse

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{R' \omega}{1 + B \frac{l^2 \omega}{I'}} \\ R' &= \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

En piezas cortas, sometidas á compresión simple, R' es igual á $\frac{P}{\omega}$; las fórmulas (4) demuestran que cuando es de temer la flexión lateral, una compresión $\frac{P}{\omega}$ por unidad superficial de sección transversal crece y se convierte en otra efectiva, cuyo valor es $\frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right)$.

688. Límite de la longitud l . — Los valores de P_0 y P , carga de fractura y de trabajo ordinario, se refieren á prismas de gran longitud l , en los cuales es de temer la flexión lateral, porque en los prismas que se rompen por aplastamiento ó compresión simple, sabemos que

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \bar{R}' \omega \\ P &= R' \omega \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

siendo \bar{R}' y R' los coeficientes de fractura y de trabajo por compresión.

Para poder aplicar unas ú otras fórmulas, se necesita, en primer lugar, conocer el valor de l que separa los dos casos.

Siempre que

$$l < k' \pi r_0 \sqrt{\frac{E}{R'}} \quad (6),$$

los prismas se romperán por aplastamiento, pero no por flexión, y se hará aplicación de las ecuaciones de resistencia (5) correspondientes á la compresión simple (núm. 199) para la resolución de los problemas.

Cuando

$$l > k' \pi r_0 \sqrt{\frac{E}{R'}} \quad (7)$$

la flexión lateral es posible, y habremos de aplicar las fórmulas (1) á (4) anteriores.

Los valores teóricos de k' son:

	k'
1.º Prisma de un extremo libre y otro empotrado (fig. 19, lám. 26).....	$\frac{1}{2}$
2.º Prisma articulado en los dos extremos (fig. 18).....	1
3.º Idem empotrado en los dos extremos (fig. 20).....	2

Cuando el prisma está empotrado en un extremo y articulado en el otro (fig. 22), k' tiene un valor comprendido entre 1 y 2.

689. Forma más conveniente de la sección transversal en las piezas comprimidas. — Examinando las fórmulas (1) y (2) anteriores, se observa que P_0 es tanto mayor cuanto mayor es I' (menor de los momentos de inercia de la sección transversal con respecto á los ejes que pasan por su centro de gravedad), de modo que la resistencia del prisma crece con I' .

De poco servirá que una sección tenga un gran momento de inercia con respecto á un eje, si lo tiene pequeño para otros ejes distintos de éste. Esto es lo que sucede con las dobles T de alas estrechas y las secciones rectangulares alargadas; en las primeras, el momento de inercia relativo á un eje normal al nervio ó alma (1,1, fig. 17, lám. 15, y fig. 21, lám. 14) es mucho mayor que el correspondiente á un eje perpendicular al anterior (2, fig. 17, lám. 15, y fig. 31, lám. 14); en el rectángulo, llamando b al lado mayor

y a al menor, los momentos de inercia relativos á ejes perpendiculares respectivamente á estos lados están en la relación $\frac{b^2}{a^2}$. En estos casos la flexión se verificaría por el lado en que I' es mínimo, con una fuerza de compresión relativamente pequeña.

La sección más conveniente será la que tenga forma tal que los momentos de inercia con respecto á los infinitos ejes contenidos en el plano y que pasen por su centro de gravedad sean iguales ó poco diferentes. Esto es lo que sucede con el círculo y polígonos regulares.

Por otra parte, siendo $I' = \omega r_o^2$, á igual valor de ω , esto es, de materia contenida en la sección, I' crece con el radio de giro r_o , el cual alcanza valores más considerables en las secciones anulares y tubulares, y en general cuando la materia se aleja del centro de figura.

En resumen; para las piezas comprimidas es preferible el uso de vigas tubulares, y la forma típica es el cilindro hueco. Pueden presentarse como ejemplos las secciones representadas por las figuras de la lám. 21.

En comprobación de lo expuesto, compararemos las resistencias de dos columnas de igual longitud y de áreas de sección transversal equivalentes, maciza una y hueca otra.

Sean:

	COLUMNAS	
	Maciza.	Hueca.
Carga de fractura.....	P_o	P'_o
Diámetro exterior.....	d	d_1
Idem interior.....		d_2
Área de la sección.....	$\omega = \frac{\pi d^2}{4}$	$\omega = \frac{\pi (d_1^2 - d_2^2)}{4}$

Para estas secciones son iguales todos los momentos de inercia, cualquiera que sea el eje, contenido en el plano. El valor de I' para la columna maciza tiene por valor, llamando ω al área de la sección de cada una de las dos columnas,

$$I' = \frac{\pi d^4}{64} = \omega \frac{d^2}{16};$$

y para la columna hueca

$$I' = \frac{\pi}{64} (d_1^4 - d_2^4) = \omega \frac{\pi}{16} (d_1^2 + d_2^2);$$

de modo que P_o y P'_o , que dependen de I' , estarán en la relación

$$\frac{P_o}{P'_o} = \frac{d^2}{d_1^2 + d_2^2},$$

de la cual se deduce que P_o es mucho mayor que P'_o , pues cada uno de los sumandos, y la suma, en el denominador de la relación, son mayores que el numerador.

690. Disposición más conveniente de las planchas de palastro sometidas á compresión. — Para aumentar P_o hay que aumentar I' , y esto se consigue:

1.º Ondeando la plancha, de modo que las generatrices de la superficie cilíndrica sean paralelas á la dirección de la compresión. El momento de inercia de dos ondas contiguas equivale al de una corona circular (núm. 477, caso 30, fig. 7.ª, lám. 15).

También se pueden coser con roblones dos planchas ondeadas (fig. 23, lám. 26).

2.ª Formando celdas rectangulares (fig. 24, lám. 16). Este fué el método ensayado y propuesto por Fairbairn, y aceptado por Stephenson, para los techos de las vigas tubulares del puente de Britannia.

Diversas fórmulas se han tomado como punto de partida. Unas veces se ha hecho uso de la de compresión simple,

$$P_0 = \bar{R}' \omega,$$

y se ha determinado el coeficiente de fractura \bar{R}' para diversos valores de la relación $\frac{l}{b}$ entre la longitud y el lado menor de escuadría. Así operó Rondelet; pero si bien se reconoce en este método la influencia que tiene la longitud l y la relación $\frac{l}{b}$ en el valor del coeficiente \bar{R}' , se hace uso de una ecuación que no contiene los términos l y b de la relación, ni la relación misma.

Otras veces se han empleado las fórmulas teóricas (1) y (2) del núm. 686. Si se aceptan las fórmulas (1), el procedimiento consiste en someter á fractura por compresión un prisma de dimensiones conocidas (ω, l, b, d, \dots) y medir directamente la fuerza P_0 que la produce; las incógnitas serán los coeficientes A, A', A'' y α .

Cuando se emplea la fórmula (2), la incógnita es el coeficiente B , el cual tiene valores diferentes, según que los extremos estén empotrados ó articulados.

Dos objeciones pueden hacerse al procedimiento semiteórico, semiempírico que acabamos de enunciar. La fórmula (1) del núm. 686 procede de la (1) del núm. 675; y la (2), de la (1) que se acaba de citar (núm. 675) y de las 12 y 13 de los núms. 680 y 681. Ahora bien; dicha ecuación (1) (número 675) que se obtiene igualando el momento de las fuerzas elásticas $\frac{EI'}{\rho}$ al momento de flexión, solamente es exacta mientras no se llegue al límite de elasticidad; pero es errónea si se quiere aplicar á la fractura (núm. 642).

Además, el coeficiente B de la fórmula (2) (núm. 686) no debe ser constante para un mismo material, puesto que depende de la forma de la sección (valor de I') y de la relación $\frac{b}{l}$, según hemos visto en el núm. 681.

Sin embargo, á falta de una teoría completa y rigurosamente exacta, admitiremos las fórmulas obtenidas por el procedimiento explicado, que son también las empleadas por todos los constructores; y como en la práctica se toma para carga permanente una fracción de las fuerzas de fractura P_0 dadas por dichas fórmulas, se borran, en parte, las inexactitudes cometidas.

2. FÓRMULAS PRÁCTICAS

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

CONSTRUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS.—DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES PRÁCTICOS

691. Inexactitud de las fórmulas teóricas.— Los resultados de las fórmulas teóricas no coinciden con los de experiencias; la práctica demuestra que las piezas comprimidas se flexan y rompen con fuerzas menores que las P_0 de las fórmulas (1) y (2) del núm. 686, y también la flexión lateral tiene lugar para valores de l menores que el límite dado por la desigualdad (6) (núm. 688).

Este desacuerdo entre la teoría y la práctica tiene explicación fácil: la teoría supone que la compresión se opera exactamente según el eje del prisma, condición de difícil cumplimiento en la práctica; antes bien, será más frecuente que el centro de presión y el de gravedad de la base no coincidan. Por efecto de esta excentricidad (fig. 25, lám. 26), la fuerza P obra con un brazo de palanca a , desde el primer momento; de modo que la flexión del prisma y su fractura podrán tener lugar con menores valores de P .

692. Fórmulas prácticas.— Para colocarse en el caso real, algunos ingenieros han tratado de hallar experimentalmente la relación que liga á la fuerza de fractura P_0 con las cantidades l, E ó I' , rompiendo al efecto por compresión prismas de diversos materiales y de longitudes y escuadrías variables.

Pero para ello había que partir de una fórmula $P_0 = f(E, I', l)$ de organización conocida, en la cual no hubiese más incógnitas que alguno ó algunos coeficientes prácticos que las experiencias determinarían, puesto que en la fractura de cada prisma experimental se habían de medir directamente todas las cantidades E, I', l, P_0 , etc.

Numerosas son las fórmulas prácticas que se han deducido; y una de las primeras dificultades que se ofrecen al constructor, es la de elegir entre todas ellas. Examinaremos las más conocidas y manifestaremos cuáles son las de más fácil y conveniente aplicación en cada caso.

693. Casos que se presentan en la práctica. — El empotramiento perfecto rara vez se alcanza en la práctica; cuando se quiera que el prisma se aproxime al caso de pieza empotrada, se terminan sus extremos con bases planas, de la mayor superficie posible, que se aseguran al resto de la construcción por medio de pernos, clavos ú otro enlace conveniente.

Cuando un prisma terminado por bases planas (fig. 29, lám. 26) empieza á flexarse (fig. 30), los puntos de aplicación de la presión (m , n) se alejan del eje y tienden á rectificarlo. Esta favorable influencia de las bases planas es tanto mayor cuanto más anchas sean, y si existen, además, pernos ú otros enlaces con los apoyos (a , b , fig. 31) que se opongan á la rotación, el prisma se deforma como si estuviese empotrado en sus extremos.

Algunas veces no existe el ensanchamiento de las bases, y la superficie de éstas es la de la sección recta del prisma (fig. 32); la flexión es más fácil, y este caso se aproxima tanto más al de prisma de extremos redondeados (fig. 33) cuanto mayor sea la relación de la longitud l del prisma al lado menor b de dichas bases.

En adelante sustituiremos la palabra *empotramiento* por la de *base plana*, al tratar de los prismas comprimidos; y como, á pesar de las precauciones que se tomen para impedir la rotación de las bases, no puede suponerse que éstas hagan el mismo papel que los empotramientos, tendremos en cuenta la diferencia, modificando los resultados obtenidos por la teoría concernientes á la relación α de resistencias entre las piezas de extremos redondeados ó articulados, y las de extremidades empotradas (núm. 686) del modo siguiente, representando por la cifra 1 la resistencia de un prisma, cuyos dos extremos son planos (*):

I. Prisma de dos bases planas.	1
II. » de una base plana y otra redondeada ó articulada.	$\frac{4}{7}$
III. » de las dos bases redondeadas ó articuladas.	$\frac{2}{7}$

(*) Sustituyendo las bases planas por empotramientos, la teoría dió las relaciones $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$. La relación $\frac{1}{2}$ ha sido sustituida por $\frac{4}{7}$, y la $\frac{1}{4}$ por $\frac{2}{7}$.

Así, pues, cuando se haga uso de las fórmulas (1) (núm. 686), se dará á α los valores $1, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}$, correspondientes, respectivamente, á los casos I á III que se acaba de citar.

Cuando se emplee la fórmula (2) del núm. 686, el coeficiente B recibirá, para cada uno de los casos anteriores, el valor que las experiencias determinen.

Los casos I á III son los que más frecuentemente se presentan en la práctica, pudiéndose citar, entré otros, los ejemplos siguientes:

Caso I. (Fig. 26, lám. 26):

- (a) = columna metálica.
- (b) = pie derecho ó poste de madera.
- (c) = tornapunta ó jalcón de un entramado de madera.
- (d) = tornapunta de un entramado rígido de hierro.

Caso II. (Fig. 27, lám. 26):

- (e) = columna de base plana y extremo superior redondeado.
- (f) = mangueta de una viga armada.

Caso III. (Fig. 28, lám. 26):

- (g) = pieza de dos extremos redondeados.
- (h) = biela de máquina.
- (m) = mangueta de armadura ó de viga armada, articulada.

694. Forma de igual resistencia para las piezas comprimidas según su eje. — Como la sección peligrosa es la central, la forma de *igual resistencia*, en perfil longitudinal, será dada por líneas que convergen hacia los extremos, correspondiendo á secciones rectas que van decreciendo á partir de la del medio.

Para el caso de extremos redondeados ó articulados (caso III anterior), y sólidos de revolución de sección circular llena, Redtenbacher ha dado la fórmula siguiente:

$$\frac{2x}{l} = \frac{2}{\pi} \left[\text{arc. sen } \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2} \right]$$

Esta fórmula puede simplificarse, haciendo $\frac{y}{h} = \text{sen. } \varphi$ (1) en cuyo caso

$$\frac{2x}{l} = \frac{2}{\pi} (2\varphi - \text{sen. } 2\varphi) \quad (2).$$

En estas ecuaciones, h es el diámetro de la sección media (fig. 39, lámina 26), $é y$ el variable de las secciones de abscisa x , tomando el eje de la pieza como eje $O X$.

Aplicando la ecuación (2) y tomando como variable independiente el ángulo φ , la curva, perfil sólido, tiene por ecuación de sus abscisas la de una cicloide, y para la de ordenadas una sinusóide. La forma del sólido es, aproximadamente, la de la fig. 30 (lám. 26): la generatriz es un arco de círculo que tiene por radio el de curvatura de la verdadera curva en el punto medio de abscisa $x = \frac{1}{2} l$. Esta pieza, con los extremos libres, tiene una resistencia igual á 0,75 de la del cilindro de diámetro h , y de igual altura l .

M A D E R A

695. Caso I. Prismas de dos bases planas. Experiencias de Rondelet.—Rondelet (*) hizo experiencias de fractura por compresión, empleando piezas de pino y de encina de excelente calidad, cuyo coeficiente de fractura por aplastamiento, en ejemplares de forma cúbica, era $\bar{R}' = 420$ kilogramos por centímetro cuadrado, término medio; y halló que este coeficiente \bar{R}' disminuía á medida que aumentaba la relación $\frac{l}{b}$ entre la longitud del prisma y el lado menor de la sección, tomando los valores \bar{R}' , que copiamos á continuación:

RELACIÓN $\frac{l}{b}$	1	12	24	36	48	60	72
Coficiente de fractura, \bar{R}' , correspondiente: kilogramos por cm. ²	420	350	210	140	70	35	17,5
Relación de resistencias....	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

Rondelet dedujo también de sus experiencias, que el valor límite de l , á partir del cual es de temer la flexión lateral, está comprendido entre $7 b$ y $8 b$, cantidades menores que las encontradas por la teoría (núms. 678, 679 y 682), lo cual viene en apoyo de las razones expuestas en el núm. 691.

(*) *Art de bâtir.*

Si se aceptan los resultados obtenidos por Rondelet, el cálculo de la carga P_0 capaz de romper por compresión un prisma de bases planas de longitud l y área de sección trasversal ω , se hará por la fórmula

$$P_0 = \bar{R}'_1 \omega,$$

dando á \bar{R}'_1 , el valor que corresponda, en la tabla anterior, al de la relación $\frac{l}{b}$ entre la longitud l del prisma y la menor de las dimensiones de la sección recta.

La carga permanente se determinará por la ecuación de resistencia

$$P = R' \omega$$

siendo R' , coeficiente de trabajo, una fracción $\frac{1}{m}$ del valor de \bar{R}'_1 , que corresponde á la relación $\frac{l}{b}$ del problema.

Por ejemplo; en un prisma de longitud $l = 6$ metros, y de lado menor de sección recta $b = 0^m,25$, la relación $\frac{l}{b}$ es igual á $\frac{6}{0,25} = 24$, y á ella corresponde un coeficiente de fractura $\bar{R}'_1 = 210$ kilogramos por centímetro cuadrado. Tomando para coeficiente de seguridad $m = 10$, por ejemplo, sería

$$R' = \frac{1}{10} \bar{R}'_1 = 21 \text{ kilogramos por cm.}^2;$$

y la ecuación de resistencia debe ser

$$P = 21 \omega$$

expresando P en kilogramos y ω en centímetros cuadrados.

696. Cálculos de Mr. Morín.—Mr. Morín (*) representó gráficamente los resultados obtenidos por Rondelet, tomando como abscisas los valores de $\frac{l}{b}$ y como ordenadas los de \bar{R}'_1 correspondientes. Regularizó un poco la línea así obtenida, determinó los valores de las ordenadas de puntos intermedios, y adoptando para coeficiente de trabajo \bar{R}'_1 , la fracción $\frac{1}{7}$ del de fractura, halló los resultados consignados en la siguiente tabla:

(*) *Résistance des matériaux.*

RELACION $\frac{l}{b}$	Coefficiente de fractura R' , correspondiente, en kilogramos por cm. ² , siendo 420 el del ejemplar cúbico.	Coefficiente de trabajo $R' = \frac{1}{7} R'$, en kilogs. por cm. ² .	Relación entre los valores de los coeficientes de trabajo...
1	420	60	R'
12	310	44.3	$0.74 R'$
14	292	42	$0.70 R'$
16	276	39.4	$0.66 R'$
18	268	37	$0.62 R'$
20	248	36	$0.58 R'$
22	227	32.7	$0.546 R'$
24	212	30	$0.50 R'$
28	183	26	$0.43 R'$
32	166	22	$0.37 R'$
36	152	19.1	$0.32 R'$
40	138	16.4	$0.28 R'$
48	72	10.2	$0.17 R'$
60	38	5.4	$0.09 R'$
72	17.5	2.5	$0.04 R'$

PARA PIEZAS COMPRIMIDAS SEGÚN SU EJE, DE BASES PLANAS

TABLA DE MORIN

Los números de la última línea servirán para el caso en que la madera tenga un coeficiente de fractura conocido, diferente de 420 kilogramos por cm.² Si, por ejemplo, fuese $\bar{R}' = 360$ kilogramos por cm.² para ejemplares cúbicos, lo cual supone para este caso un coeficiente de trabajo $R' = \frac{1}{m} 360$, para un valor de $\frac{l}{b}$ tal como 22, la ecuación de resistencia sería

$$P = R'\omega,$$

haciendo $R' = 0,545 \left(\frac{1}{m} 360\right)$ kilogramos por cm.² No habrá más que dar á m el valor correspondiente al grado de solidez que se desee obtener.

697. Experiencias de M. Hodgkinson. — Este famoso experimentador inglés hizo ensayos de fractura, por compresión, de piezas prismáticas de madera, de bases planas, empleando al efecto encina de Dantzick y de pino rojo, cuyos coeficientes de fractura por aplastamiento, en ejemplares cúbicos, eran respectivamente 543 kilogramos por cm.² y 462 kilogramos por cm.² Hodgkinson partió de las fórmulas (1) del núm. 686.

$$P_0 = A \frac{\omega b^2}{l^2},$$

haciendo $\alpha = 1$ por tratarse de prismas de bases planas; P_0 representa la carga total de fractura en kilogramos, y expresando b y l en centímetros y ω en centímetros cuadrados, halló para la constante A , en el caso de piezas de sección rectangular de lados a y b , siendo b el lado menor, los valores siguientes:

A	Clase de madera.
256 500.....	Encina fuerte.
214 200.....	Pino fuerte.
180 000.....	Encina floja.
160 000.....	Pino flojo.

Para cargas permanentes se hace $P = \frac{1}{10} P_0$, ó, lo que es lo mismo, se

toma $\frac{1}{10}$ de los valores de A ; haciéndolo así, y sustituyendo ω por su igual αb , se obtienen las siguientes

FÓRMULAS DE HODGKINSON CORRESPONDIENTES A PRISMAS
DE BASES PLANAS

1.º *Piezas de sección rectangular.* — a , lado mayor, y b , lado menor, expresados en centímetros; l , longitud, en centímetros; P , carga permanente que puede resistir la pieza, en kilogramos.

$$(1). \left\{ \begin{array}{ll} P = 25650 \frac{ab^3}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Encina fuerte.} \\ P = 21420 \frac{ab^3}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Pino fuerte.} \\ P = 18000 \frac{ab^3}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Encina floja.} \\ P = 16000 \frac{ab^3}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Pino flojo.} \end{array} \right.$$

2.º *Piezas de sección cuadrada, de lado b* (en centímetros).—Se hará $a = b$ en las fórmulas anteriores.

3.º *Piezas de sección circular* (*), *de diámetro d* (en centímetros): $\omega =$ área de la sección en centímetros cuadrados; l , longitud (en centímetros).

$$(2). \left\{ \begin{array}{ll} P = 19237 \omega \frac{d^2}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Encina fuerte.} \\ P = 16050 \omega \frac{d^2}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Pino fuerte.} \\ P = 13500 \omega \frac{d^2}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Encina floja.} \\ P = 12000 \omega \frac{d^2}{l^2} \dots\dots\dots & \text{Pino flojo.} \end{array} \right.$$

(*) Los coeficientes numéricos para las secciones circulares, los hemos deducido de los correspondientes a las secciones rectangulares por las consideraciones siguientes: P depende de ω y de l' , de modo que dos piezas de sección de distinta forma podrán soportar la misma carga en idénticas condiciones de resistencia, siempre que los valores de ω y de l' sean iguales. Y como

$$l' = \frac{1}{12} a b^3 = \omega \frac{b^2}{12} \text{ para la sección rectangular,}$$

$$l' = \frac{\pi d^4}{64} = \omega \frac{d^2}{16} \text{ para la sección circular,}$$

la equivalencia exige que $\frac{b^2}{12} = \frac{d^2}{16}$, ó $b^2 = \frac{3}{4} d^2$.

698. *Límites de aplicación de las fórmulas de Hodgkinson.* — En las experiencias realizadas por Hodgkinson para la determinación del coeficiente A , la relación $\frac{l}{b}$ de los prismas ensayados varió entre los límites 30 y 45.

Cuando $\frac{l}{b}$ es menor que 30, los valores de P dados por las fórmulas anteriores son demasiado grandes, siendo el error por exceso tanto mayor cuanto más se aproxime $\frac{l}{b}$ a la unidad. Para $\frac{l}{b} > 45$ son aceptables los resultados obtenidos. Consideraremos aplicables las fórmulas de Hodgkinson entre los límites

$$\frac{l}{b} > 28 \quad \text{ó} \quad l > 28 b.$$

$$\frac{l}{b} < 72 \quad \text{ó} \quad l < 72 b.$$

Las fórmulas de Hodgkinson pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{P}{\omega} = R' = A \left(\frac{b}{l} \right)^2 \quad (3)$$

que nos dice que el coeficiente de trabajo R' , es diferente para cada valor particular de la relación $\frac{b}{l}$, que es lo mismo que dedujo Rondelet de sus experiencias.

Sustituyendo en la igualdad (3) anterior los valores de A y $\frac{b}{l}$, hemos formado la tabla siguiente, en la cual aparecen también los números correspondientes de la tabla de Morín, suponiendo un coeficiente de trabajo R' , de 60 kilogramos por centímetro cuadrado para la compresión simple (ejemplares en que no haya que temer la flexión lateral), y los deducidos de la fórmula de Barré que damos más adelante.

La fórmula de Hodgkinson queda así reducida a la tan conocida $P = R' \omega$, dando a R' , el valor que corresponde a la relación $\frac{l}{b}$.

699. *Caso I. Fórmula de Mr. Barré.*—Mr. Barré ha utilizado las experiencias de Rondelet, y aplicando la fórmula (4) del núm. 687, ha llegado á las siguientes:

$$P = \frac{R' \omega}{0,93 + 0,00185 \left(\frac{l}{b}\right)^2} \quad (4). \quad \left. \begin{array}{l} \text{Piezas de sección rectangular, cuyo} \\ \text{lado menor es } b, \text{ ó piezas de sección} \\ \text{cuadrada de lado } b. \end{array} \right\}$$

$$P = \frac{R' \omega}{0,93 + 0,0024 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (*) (5). \quad \text{Piezas cilíndricas de diámetro } d.$$

En ambas fórmulas, ω representa el área de la sección transversal, R' el coeficiente de trabajo por compresión simple y P la carga total de trabajo ordinario. R' y ω deben referirse á la misma unidad superficial.

Si R' es sustituido por \bar{R}' , coeficiente de fractura por compresión correspondiente á ejemplares cortos, P se convertirá en carga de fractura.

Dividiendo los dos miembros de las fórmulas anteriores por ω , y llamando R'_1 al coeficiente $\frac{P}{\omega}$ se tendrá:

$$R'_1 = \frac{R'}{0,93 + 0,00185 \left(\frac{l}{b}\right)^2} \quad (6). \quad \text{Secciones rectangulares y cuadradas.}$$

$$R'_1 = \frac{R'}{0,93 + 0,0024 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (7). \quad \text{Secciones circulares.}$$

R'_1 es el coeficiente de trabajo para piezas largas correspondiente al coeficiente R' de trabajo empleado en las piezas cortas; R'_1 disminuye á medida que $\frac{l}{d}$ aumenta.

Haciendo $R' = 60$ kilogramos por cm.^2 , resultan á R'_1 los valores que contiene la tabla anterior.

Para la piezas de sección cuadrada ó rectangular, R'_1 es igual á R' cuando

$$0,93 + 0,00185 \left(\frac{l}{b}\right)^2 = 1,$$

* Esta fórmula se ha deducido de la anterior, haciendo $l^2 = \frac{3}{4} d^2$. (Véase la nota del núm. 697.)

PIEZAS COMPRIMIDAS DE BASES PLANAS

TABLA DE LOS COEFICIENTES DE TRABAJO (EN KILOGRS. POR CM.²) CORRESPONDIENTES Á DIVERSOS VALORES DE LA RELACION $\frac{l}{b}$, DADOS POR HODGKINSON, MORIN Y BARRÉ, PARA PIEZAS DE SECCION RECTANGULAR, CUADRADA Ó CIRCULAR

RELACION $\frac{l}{b}$	12	14	16	18	20	22	24	28	32	36	40	48	60	72
PIEZAS DE SECCION RECTANGULAR Ó CUADRADA														
Resultados de la fórmula de Hodgkinson.....	»	»	»	»	»	»	»	32,83	25,00	22,52	15,90	11,24	7,18	5,13
Tabla de Morin.....	44,30	42,00	39,40	37,00	35,00	32,70	30,00	26,00	22,00	19,10	15,40	10,20	5,40	2,50
Resultados de la fórmula de Barré, haciendo $R = 60$	50,00	46,00	42,80	39,00	36,00	32,80	30,00	25,20	21,20	18,00	15,40	11,50	7,80	»
PIEZAS DE SECCION CIRCULAR														
Resultados de la fórmula de Hodgkinson.....	»	»	»	»	»	»	»	24,62	18,05	15,79	11,92	8,31	5,38	3,85
Resultados de la fórmula de Barré, para $R = 60$	47,10	42,50	39,00	35,20	31,74	28,10	26,00	21,35	17,70	14,85	12,57	9,28	6,25	4,48

lo cual da

$$l = 6 b;$$

y en las piezas cilíndricas, cuando

$$0,92 + 0,0024 \left(\frac{l}{d}\right)^2 = 1$$

ó

$$l = 5,4 d.$$

Es decir, que la necesidad de disminuir el coeficiente de trabajo R' empleado en los problemas de compresión simple, ó, lo que es lo mismo, el peligro de flexión lateral empieza, según Barré, cuando

$l > 6 b$ en piezas rectangulares ó cuadradas,

$l > 5,4 d$ en piezas cilíndricas.

700. Caso I. Piezas prismáticas de sección cualquiera. — Para una sección de forma cualquiera, se empleará la fórmula

$$P = \frac{R' \omega}{0,93 + 0,000154 \frac{l^2 \omega}{I'}} \quad (8),$$

en la cual R' es el coeficiente de trabajo por compresión simple, I' es el menor de los momentos de inercia de la sección trasversal, y ω el área de esta última. Esta fórmula se deriva de la de Barré.

También se emplea esta otra fórmula:

$$P = \frac{R' \omega}{1 + 0,000333 \frac{l^2 \omega}{I'}} \quad (8')$$

que da para P valores algo menores.

701. Caso II. Prismas de una base plana y otra redondeada ó articulada (fig. 27, lám. 26).—Hay que multiplicar por $\frac{4}{7}$ los segundos miembros de las fórmulas de Hodgkinson y de la $P = R' \omega$.

Cuando se emplean las fórmulas de Barré [(4) y (5) del núm. 699], y las (8) y (8') (núm. 700) correspondientes á secciones cualesquiera, como son

todas ellas de la forma (2) del núm. 686, habrá que afectar el factor B del segundo término del denominador de un cierto coeficiente.

Generalmente se multiplica por 2 el valor de B , ó sea el segundo sumando del denominador.

702. Caso III.—Prismas de dos bases articuladas ó redondeadas. — Se multiplicarán por $\frac{2}{7}$ los segundos miembros de las fórmulas de Hodgkinson y la $P = R' \omega$.

Se multiplicarán por 4 los factores B de los segundos sumandos de los denominadores de las fórmulas (4), (5), (8) y (8') (núms. 699 y 700).

703. Resolución de los problemas. Problema primero. Conocidas las dimensiones del prisma, calcular la fuerza P de compresión que podrá soportar. — Fórmese la relación $\frac{l}{b}$, y una vez conocida se podrá determinar el valor de P por cualquiera de los dos métodos siguientes:

704. Primer método. — Se emplea la fórmula $P = R' \omega$, dando á R' , el valor que las tablas de los núms. 696 y 698 asignen, correspondiente al de la relación $\frac{l}{b}$. Si esta relación no estuviese contenida en las tablas, se tomará el inmediato superior en beneficio de la resistencia, ó bien se hallará otro valor más aproximado, interpolando términos de una progresión aritmética.

Este método es aplicable á todos los valores de $\frac{l}{b}$ comprendidos entre 12 y 72.

Ejemplos. 1.º Pie derecho de bases planas, de madera de resistencia ordinaria ($R' = 60$ kilogramos por cm.² en ejemplares cortos); las dimensiones son:

	Longitud.....	$l = 3^m,60$
Sección..	Lado mayor.....	$a = 0^m,18$
	Lado menor.....	$b = 0^m,12$.

Formando $\frac{l}{b}$, hallamos que es igual á $\frac{3,60}{0,12} = 30$.

Este número no está en las tablas de Morin: si tomamos el inmediato superior, que es 32, le corresponde un coeficiente de trabajo de 22 kilogramos por cm.², suponiendo que sea 60 el correspondiente á la madera, en ejemplares cortos que se rompen por aplastamiento y no por flexión lateral.

Expresando las dimensiones lineales en centímetros, y los pesos en kilogramos, tendremos

$$\omega = ab = 18 \times 12 = 216 \text{ cm.}^2 \quad R'_1 = 22 \text{ kilogramos por cm.}^2 \\ P = R'_1 \omega = 22 \times 216 = 4752 \text{ kilogramos.}$$

Si se quiere determinar el valor de R'_1 , correspondiente al verdadero $\frac{l}{b} = 30$, hallaríamos medias diferenciales entre los valores de $\frac{l}{b}$, 28 y 32, que comprenden á 30, y entre los correspondientes de R'_1 , que son 26 y 22; así hallamos:

$$\text{Medias diferenciales.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Entre 28 y 32} \dots\dots\dots 30 \\ \text{Entre 26 y 22} \dots\dots\dots 24 \end{array} \right.$$

y entonces

$$P = R'_1 \omega = 24 \times 216 = 5184 \text{ kilogramos.}$$

Cuando la madera de que se dispone es conocida por su coeficiente de fractura por compresión simple, se formará el coeficiente de trabajo del siguiente modo:

En el ejemplo anterior, supongamos que el coeficiente de fractura de la madera por aplastamiento simple sea $\bar{R}' = 560$ kilogramos por cm.^2 , y que aceptamos un coeficiente de seguridad $m = 6$. El coeficiente de trabajo, en la compresión simple, sería $R' = \frac{1}{6} \bar{R}' = 93,33$ kilogramos por cm.^2 . Ahora bien; á la relación $\frac{l}{b} = 32$ (inmediata superior á la 30 del problema) corresponde un coeficiente de trabajo, en las tablas, igual á 0,37 R' , es decir, $R'_1 = 0,37 R' = 0,37 \times 93,33 = 34,53$ kilogramos por cm.^2 ; luego

$$P = 34,53 \omega = 34,53 \times 216 = 7458 \text{ kilogramos.}$$

Empleando el método de interpolaciones, hallaríamos que para $\frac{l}{b} = 30$

corresponde un coeficiente $\frac{0,43 R' + 0,37 R'}{2} = 0,40 R'$, es decir,

$0,40 \times 93,33 = 37$ kilogramos por cm.^2 ; de modo que

$$P = 37 \times 216 = 7992 \text{ kilogramos.}$$

2.º *Pieza cilíndrica de bases planas, de madera ordinaria, cuyas dimensiones son:*

$$\text{Longitud} \dots\dots\dots = l = 4^m, 20 \\ \text{Diámetro de la sección} \dots\dots = d = 0^m, 12$$

$$\frac{l}{d} = \frac{4,20}{0,12} = 35.$$

Tomando el valor inmediato superior de las tablas $\frac{l}{d} = 36$, para el cual $R'_1 = 19,1$, será, expresando las dimensiones lineales en centímetros,

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 12^2}{4} = 113 \text{ cm.}^2$$

$$P = R'_1 \omega = 19,1 \times 113 = 2158 \text{ kilogramos.}$$

Si se procede por interpolaciones para resolver con más exactitud el problema, hallaríamos:

Primera interpolación:

$$\frac{l}{d} = \frac{32 + 36}{2} = 34$$

$$R'_1 = \frac{22 + 19,1}{2} = 20,5.$$

Segunda interpolación:

$$\frac{l}{d} = \frac{34 + 36}{2} = 35$$

$$R'_1 = \frac{20,5 + 19,1}{2} = 19,8$$

$$P = R'_1 \omega = 19,8 \times 113 = 2237 \text{ kilogramos.}$$

705. Segundo método.— Se hace uso de las fórmulas de Barré ó de Hodgkinson, siempre por supuesto dentro de los límites $\frac{l}{b}$ convenientes.

Ejemplos. 1.º *Pieza de pino flojo, de un extremo plano y otro articulado (mangueta de una viga armada, caso II).*

Datos:

$$l = 4 \text{ metros} = 400 \text{ centímetros.}$$

$$\text{Sección rectangular. } \begin{cases} a = 20 \text{ centímetros.} \\ b = 10 \text{ centímetros.} \\ \omega = a b = 200 \text{ centímetros.} \end{cases}$$

$\frac{l}{b} = 40$. Es aplicable la fórmula de Hodgkinson por estar comprendido $\frac{l}{b}$ entre 28 y 72.

La fórmula, para el caso de pieza de bases planas, es (núm. 697):

$$P = 16000 \frac{a b^3}{l^2} = 16000 \times \frac{20 \times 10^3}{400^2} = 2000 \text{ kilogramos;}$$

pero como uno de los extremos está articulado, en el prisma del problema, habremos de tomar $\frac{4}{7} P$, y será:

$$P = \frac{4}{7} \times 2000 = 1143 \text{ kilogramos.}$$

2.^a *Pieza cilíndrica, de dos extremos articulados ó redondeados* (caso III).

Datos:

$$l = 5 \text{ metros} = 500 \text{ centímetros.}$$

$$\text{Diámetro de la sección} = d = 20 \text{ centímetros.}$$

Coefficiente de trabajo

de la madera, por

$$\text{compresión simple.} = R' = 50 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \times 20^2}{4} = 314 \text{ centímetros.}$$

$$\frac{l}{d} = \frac{500}{20} = 25.$$

No puede aplicarse la fórmula de Hodgkinson por ser $\frac{l}{d} = 25 < 28$; empleando la de Barré [(7) del núm. 699] correspondiente al caso del proble-

ma (caso III), á cuyo efecto multiplicaremos por 4 el coeficiente $B = 0,0024$ del denominador (núm. 702),

$$P = \frac{R' \omega}{0,93 + 4 \times 0,0024 \left(\frac{l}{d}\right)^2} = \frac{50 \times 314}{0,93 + 0,0096 \times 25^2} = 2265 \text{ kilogs.}$$

El empleo de las fórmulas de Hodgkinson y de Barré, en el caso de bases planas, se reduce al de la tantas veces citada

$$P = R' \omega$$

sustituyendo R' por el valor que le corresponde en la tabla del núm. 698 deducido de aquéllas.

706. **Problema segundo.** Conocidas la fuerza P y la longitud l del prisma, determinar la escuadría. — De acuerdo con lo expuesto en los números 701 y 702, el valor de P se multiplicará por $\frac{7}{4}$ para las piezas del

caso II, y por $\frac{7}{2}$ para las que se hallen en el caso III; para las del caso I se tomará íntegra la fuerza P dada. En los cálculos que siguen, P representa la fuerza que resulta de modificar, en la forma indicada, la que se conoce como dato del problema.

707. **Piezas de sección cuadrada de lado b , ó circular, de diámetro d .** Empleo de las fórmulas de Hodgkinson. — Las fórmulas (1) (núm. 697), aplicadas al caso de sección cuadrada, en la que $a = b$, son de la forma

$$P = A' \frac{b^4}{l^2}$$

de donde

$$b = \sqrt[4]{\frac{P l^2}{A'}};$$

y las (2) del núm. 697, correspondientes á secciones circulares, se pueden escribir así:

$$P = A'' \frac{d^4}{l^2};$$

y despejando d ,

$$d = \sqrt[4]{\frac{P l^2}{A''}}.$$

El problema es determinado, como se ve; pero para que sean aceptables los valores de b y d hallados, es preciso que la relación $\frac{l}{b}$ ó la $\frac{l}{d}$, esté comprendida entre 28 y 72, límites entre los cuales es posible la aplicación de las fórmulas de Hodgkinson.

708. Ejemplos. 1.º *Pieza cilíndrica de pino flojo, de 4 metros de longitud, en las condiciones del caso II (núm. 693) sometida á una fuerza de compresión de 2400 kilogramos.* — El valor de P , para el cálculo, será

$$P = \frac{7}{4} \times 2400 = 4200 \text{ kilogramos.}$$

En la última de las fórmulas (2) del núm. 697

$$P = 12000 \omega \frac{d^2}{l^2};$$

haremos, tomando d y l en centímetros y ω en cm.^2 ,

$$\begin{aligned} P &= 4200 \text{ kilogramos.} \\ \omega &= \frac{\pi d^2}{4} = 0,785 d^2. \\ l^2 &= 400^2 = 160000 \end{aligned}$$

y así se obtiene

$$d = \sqrt[4]{\frac{P l^2}{12000 \times 0,785}} = 16,4 \text{ centímetros.}$$

Pero formando la relación $\frac{l}{d}$, hallamos

$$\frac{l}{d} = \frac{400}{16,4} = 24 < 28.$$

Las fórmulas de Hodgkinson no son aplicables á este caso, y deberemos utilizar las de Barré ó las tablas de Morín, como más adelante explicaremos.

2.º *Prisma de encina floja, de 6 metros de longitud, de bases planas (caso I del núm. 693) sometida á fuerza de compresión de 3000 kilogramos. La sección es cuadrada.*

La fórmula correspondiente [(1) del núm. 697] es

$$P = 18000 \frac{b^4}{l^2}$$

ó

$$3000 = 18000 \frac{b^4}{600^2}$$

de donde

$$b = 15,7 \text{ centímetros.}$$

La relación $\frac{l}{b} = \frac{600}{15,7} = 37 > 28$ y < 72 .

Es admisible el resultado.

709. Empleo de la tabla del núm. 698 y de la fórmula $P = R'_1 \omega$. — Supongamos que se trata de un prisma de sección cuadrada: dese un valor arbitrario n á la relación $\frac{l}{b}$, y véase en la tabla el coeficiente de trabajo correspondiente.

Puesto que $\frac{l}{b} = n$, será $b = \frac{1}{n} l$; sustituyendo este valor, y el del coeficiente de trabajo, en la fórmula

$$P = R'_1 \omega,$$

tendremos, expresando b y l en centímetros,

$$P = R'_1 b^2 = \frac{R'_1 l^2}{n^2}.$$

Esta ecuación ha de quedar verificada.

Si el segundo miembro es mayor que P , será prueba de que hemos tomado un valor de n demasiado pequeño, y habrá que aumentarlo y hacer nuevo ensayo; si resultare menor que P , habremos de disminuir la relación $\frac{l}{b}$. Al cabo de dos ó tres tanteos se llega á un valor conveniente de n , y por consecuencia de b . Para las secciones circulares se emplea el mismo procedimien-

to, utilizando los valores de R'_1 , correspondientes a la relación $\frac{l}{d}$, que contiene la tabla del núm. 698.

El mismo procedimiento es aplicable a las relaciones $\frac{l}{b}$ y $\frac{l}{d}$, deducidas de la fórmula de Hodgkinson, que contiene la tabla citada (núm. 698); pero habrá que comprobar después que $\frac{l}{b}$ ó $\frac{l}{d}$ son mayores que 28 y menores que 72.

Ejemplo. Pieza prismática de sección cuadrada, de un extremo plano y otro articulado (caso II del núm. 693), sujeta a una fuerza de 2000 kilogramos. Longitud $l = 2$ metros = 200 centímetros.

La fuerza 2000 kilogramos se convierte en el caso presente en

$$P = 2000 \times \frac{7}{4} = 3500 \text{ kilogramos.}$$

Hagamos $\frac{l}{b} = 24$.	$b = \frac{1}{24} l = 8,3 \text{ centímetros.}$ $b^2 = 68,90$ $\frac{R'_1 = 30}{R'_1 b^2 = 2067 < 3500}$	} Hay que disminuir la relación $\frac{l}{b}$.
Para $\frac{l}{b} = 18$	$b = \frac{1}{18} l = 11,1 \text{ centímetros.}$ $b^2 = 123,21$ $\frac{R'_1 = 37}{R'_1 b^2 = 4558 > 3500}$	} Hay que aumentar $\frac{l}{b}$.
Para $\frac{l}{b} = 20$	$b = \frac{1}{20} l = 10 \text{ centímetros.}$ $b^2 = 100$ $\frac{R'_1 = 35}{R'_1 b^2 = 3500 = P}$	} El valor $b = 0^m,10$, resuelve el problema.

710. Piezas de sección rectangular, de lados a y b , siendo b el menor. Empleo de las fórmulas de Hodgkinson y de las tablas del núm. 698. —
Se empieza por asignar un cierto valor arbitrario n a la relación $\frac{l}{b}$, y se ve

el valor de R'_1 , correspondiente en la tabla. Tanto este valor como el de $b = \frac{1}{n} l$ se sustituyen en la ecuación

$$P = R'_1 \omega = R'_1 a b,$$

y se despeja el valor a , que ha de ser mayor que b , pues que éste representa el lado menor.

Puede suceder:

- 1.º Que $a < b$. Entonces se toma un valor de $\frac{l}{b}$ más grande.
- 2.º Que $a > b$, pero que resulte gran desproporción entre los valores a y b y convenga reducir a ; se tomará un valor de $\frac{l}{b}$ más pequeño.

En todos estos tanteos no hemos de salir de los límites $\frac{l}{b} > 28$ si se hace uso de las relaciones derivadas de la fórmula de Hodgkinson: empleando las de Morín hay más latitud, desde $\frac{l}{b} = 12$ en adelante.

Ejemplo. Pieza prismática de pino fuerte, de bases planas, de longitud $l = 4$ metros, cargada con $P = 3000$ kilogramos.

$\frac{l}{b} = 32$ „ $b = \frac{4^m}{32} = 12,5 \text{ cm.}$	$3000 = 25 \times 12,5 \times a$ $R'_1 = 25$	} $a = 9,6 \text{ centímetros.}$ } $a < b$ hay que aumentar $\frac{l}{b}$
$\frac{l}{b} = 48$ „ $b = \frac{l}{48} = 8,3 \text{ cm.}$	$3000 = 11,24 \times 8,3 \times a$ $R'_1 = 11,24$	} $a = 32$ } $a > b$ pero a demasiado grande, hay que disminuir $\frac{l}{b}$
$\frac{l}{b} = 40$ „ $b = \frac{l}{40} = 10 \text{ cm.}$	$3000 = 15,90 \times 10 \times a$ $R'_1 = 15,90$	} $a = 18,8$ } $a > b$ valor aceptable de a .

711. Todos estos problemas se simplifican considerablemente, haciendo uso de las tablas siguientes que contienen las cargas que pueden soportar

en buenas condiciones de resistencia, piezas de madera de sección cuadrada, cuyo lado varía entre 5 centímetros y 30 centímetros, para longitudes comprendidas entre dos metros y 8 metros. En el cálculo de estas tablas se ha supuesto que las bases son planas, y se ha hecho aplicación de la fórmula de Hodgkinson en los núms. 1, 2, 3 y 4, correspondientes respectivamente á encina fuerte, pino fuerte, encina floja, pino flojo; claro es que se ha tenido presente que la relación entre la longitud y el lado del cuadrado sección $\left(\frac{l}{b}\right)$ ha de ser mayor que 28 y menor que 72, para poder emplear dicha fórmula, y esta relación queda satisfecha en las mencionadas tablas 1 á 4.

Para tomar en consideración los casos en que $\frac{l}{b}$ es menor que 28 y mayor que 12, hemos formado la tabla núm. 5, utilizando al efecto las relaciones de Morín y aceptando un coeficiente $R' = 60$ kilogramos por centímetro cuadrado para $\frac{l}{b} < 12$, lo que supone madera de condiciones ordinarias de resistencia.

Pieza de sección cuadrada. — El uso de estas tablas es sencillísimo: si se da el lado de la sección en centímetros y la longitud en metros, la tabla da el peso en kilogramos. Si la longitud no estuviese en las tablas, se tomará la inmediata mayor, en beneficio de la resistencia, ó bien se hallará el valor de la carga P por interpolación entre los valores de P correspondientes á las longitudes inmediatamente superior é inferior á la dada.

Ejemplo. 1.º *Pieza de encina fuerte, de 6 metros de longitud, de sección cuadrada, de 20 centímetros de lado.* — En la tabla núm. 1, á la derecha del núm. 20 de la primera columna, y en la casilla correspondiente á la longitud 6, se halla $P = 11564$ kilogramos.

2.º *Pieza de pino flojo, de sección cuadrada, de 10 centímetros de lado y de 4,50 metros de longitud* (tabla núm. 4). — Si se acepta $l = 5$ metros, se halla $P = 664$ kilogramos.

Para $l = 4$ metros, es $P = 992$ kilogramos; hallando una media diferencial de 992 y 664, que corresponderá á $l = 4,5$ metros, por ser este número media diferencial de 4 y 5, sería

$$P = \frac{992 + 664}{2} = 828 \text{ kilogramos.}$$

Cuando el valor de P no se encuentra en las tablas 1 á 4, es prueba de

que $\frac{l}{b}$ es menor que 28 ó mayor que 72, y entonces se hará uso de la tabla núm. 5.

Ejemplo. *Pieza de sección cuadrada, de 18 centímetros de lado y 4 metros de longitud, de encina floja.*

En la tabla núm. 3 no se encuentra valor de P alguno: en la núm. 5 se halla $P = 10594$ kilogramos.

Si se trata del problema recíproco, dada la longitud l y la carga P , determinar el lado b del cuadrado de sección, se buscará en las tablas, en la casilla correspondiente al valor de l , el de P , ó su inmediato mayor, y á la izquierda, se hallará b .

Ejemplo. *Madera de pino fuerte* (tabla núm. 2) $l = 5$ metros. $P = 4000$ kilogramos.

En la casilla correspondiente á $l = 5$, el número inmediato mayor á P es 4198, al cual corresponde $b = 16$ centímetros.

Pieza de sección circular. — Llamando d el diámetro de la sección, la relación de pesos P y P' que pueden soportar dos piezas, una de sección cuadrada de lado b y otra cilíndrica de diámetro d , siendo $d = b$, es dada por el sencillo cálculo siguiente, en el que se aplica la fórmula general de Hodgkinson, $P_0 = A \frac{\omega b^2}{l^2}$ (núm. 697, nota).

$$\text{Sección cuadrada..... } P = A \frac{b^4}{l^2}.$$

$$\text{Sección circular..... } P' = \frac{3}{4} A \frac{\pi d^2}{l^2};$$

$$d = b \begin{cases} P' = 0,6 P. \\ P = \frac{5}{3} P' = 1,66 P'. \end{cases}$$

Estas relaciones nos permiten utilizar las tablas 1 á 5 anteriores para el cálculo de piezas cilíndricas de diámetro d . Si se dan d y l , se busca P en las tablas, y este valor, multiplicado por 0,6, será el de P' ; si se da P' , se multiplicará por $\frac{5}{3}$, y con este valor se acudirá á las tablas y se hallará $b = d$.

Ejemplos. *Pieza cilíndrica: l = 4 metros, d = 12 centímetros.*

Pino fuerte (tabla núm. 2).

Valor de las tablas..... $P = 2849$.

Carga $P' = 0,6 P = 1709$ kilogramos.

2.º *Pieza cilíndrica de pino flojo: $l = 4$ metros, peso $P' = 600$ kilogramos.*

Multiplicando P' por $\frac{5}{3}$, obtendremos $P = 600 \times \frac{5}{3} = 1000$; y acudiendo con este número á la tabla 4.ª, casilla 4.ª, encontramos el núm. 992, muy aproximado á 1000, que nos da $b = d = 10$ centímetros.

Si hubiese sido $P' = 3000$ kilogramos, sería $P = \frac{5}{3} P' = 5000$. Este número no está en la tabla núm. 4: acudiendo á la núm. 5, se halla en la casilla correspondiente á $l = 4$ el número 6300, al cual corresponde un diámetro $d = 15$ centímetros.

Piezas de sección rectangular.—Son para ellas, también, aplicables las tablas 1 á 5 precedentes, como lo demuestra el cálculo siguiente:

Carga P en una pieza de sección cuadrada

$$\text{de lado } b \dots\dots\dots P = A \frac{b^4}{l}$$

Carga P' en una pieza de sección rectangular

$$\text{de lados } a \text{ y } b, \text{ siendo } a \text{ el mayor} \dots P' = A \frac{ab^3}{l^2}$$

$$\text{Relación de resistencias.. } \begin{cases} P' = P \frac{a}{b} \\ P = P' \frac{a}{b} \end{cases}$$

Según esto, si se nos dan los lados a y b de escuadría de una viga, y la longitud l , se buscará en las tablas el valor de P correspondiente al prisma de sección cuadrada de lado b , y se multiplicará por $\frac{a}{b}$, con lo cual se obtendrá la carga P' que podrá aplicarse á la viga dada.

Ejemplo. Viga de encina fuerte: $a = 20$ centímetros, $b = 12$ centímetros y $l = 6$ metros.

En la tabla núm. 1 se halla para la viga de sección cuadrada de lado $b = 12$ centímetros y longitud $l = 6$ metros, $P = 1540$ kilogramos. La carga que puede aplicarse á la viga de lados $a = 20$ centímetros y $b = 12$ centímetros, es

$$P' = \frac{20}{12} \times 1540 = 2566 \text{ kilogramos.}$$

Cuando no se halle P en las tablas, se hará uso de la núm. 5.

Si el problema consiste en determinar la escuadría (a y b), conociendo l y la carga P' , se admitirá una cierta relación m para los lados a y b , se formará $P = \frac{P'}{m}$, y con el valor de P se acudirá á las tablas, las cuales nos darán b ; y multiplicando b por m se obtendrá a .

Ejemplo. Pieza de sección rectangular, cuyos lados han de guardar la relación $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. La longitud es $l = 3,5$ metros, la carga $P' = 4000$ kilogramos, y la madera pino fuerte.

$$P = P' : \frac{3}{2} = \frac{2 \times 4000}{3} = 2666 \text{ kilogramos.}$$

El valor de P inmediato mayor de la tabla 2.ª es 3680, al cual corresponde $b = 12$ centímetros: a será igual á $\frac{3b}{2} = 18$ centímetros.

TABLA NÚM. 5

Piezas comprimidas de sección cuadrada y bases planas, calculadas por las tablas de Morin.-Madera de un coeficiente de trabajo, por compresión simple,

$R = 60$ KILOGRAMOS POR CM.²

Lado de la sección en centims.	Superficie de la sección transversal en cm. ²	CARGA EN KILOGRAMOS QUE PUEDEN SOPORTAR, PARA LONGITUDES, EN METROS, DE									
		2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8	
8	64	1866									
9	81	2648									
10	100	3500	2900								
11	121	4477	3956								
12	144	5673	5040	4176							
13	169	6878	6084	5289	4563						
14	196	8232	7487	6624	5684						
15	225	9708	8865	7875	7042	6300					
16	256	11340	10419	9472	8371	7424					
17	289	»	12138	11039	10115	9045					
18	324	»	13608	12765	11340	10594					
19	361	»	15577	14223	13357	12301	10108				
20	400	»	17720	16280	14800	14000	11600				
21	441	»	»	18522	17375	15876	13230				
22	484	»	»	20328	19069	17908	15826	13552			
23	529	»	»	22826	21530	20207	17298	14812			
24	576	»	»	25516	24192	22694	20160	16704			
25	625	»	»	»	26250	24625	21875	18750			
26	676	»	»	»	29169	27513	23660	20280	18928		
27	729	»	»	»	32294	30618	26973	23738	20412		
28	784	»	»	»	34731	32928	27008	25636	23520		
29	841	»	»	»	»	36289	33135	29435	25230	23548	
30	900	»	»	»	»	38836	35460	31500	29430	25200	

FUNDICIÓN

712. Fórmulas de Hodgkinson.—A Hodgkinson se deben las más importantes experiencias relativas á fractura por compresión de columnas de fundición. Las columnas ensayadas eran macizas unas y huecas otras, con extremidades planas ó redondeadas, y empleando para todas ellas excelente fundición de Lowmoor (Yorkshire), de grano gris, fino, de un coeficiente de fractura por aplastamiento, en ejemplares cortos, de 81,33 kilogramos por mm.².

Hodgkinson dedujo de sus experiencias lo siguiente:

(a) Las columnas que tienen redondeados sus dos extremos resisten tres veces menos que las de bases planas; si estas bases se ensanchan suficientemente, la relación de resistencia es de 1 : 4 (*).

(b) A igual cantidad de materia empleada, es decir, á igual valor de área ω de sección transversal, si se ensancha el fuste de la columna hacia el medio la resistencia aumenta de $\frac{1}{7}$ á $\frac{1}{8}$.

(c) A igual valor de ω , las columnas huecas resisten más que las macizas, de sección circular ó de forma de cruz. Debe evitarse, en el moldeo de las columnas huecas, la excentricidad del núcleo ó macho central, con objeto de que el espesor sea uniforme.

(d) Mientras la longitud l no exceda de cinco diámetros, ó l no sea mayor que $5d$, la fractura de las barras se verifica por aplastamiento; si $l > 5d$, pero $< 25d$, la fractura se opera por aplastamiento y por flexión. Cuando $l > 25d$, la fractura es producida por flexión lateral.

En las fórmulas de Hodgkinson que copiamos á continuación, l está expresada en decímetros y d en centímetros; todas ellas son de la forma (1) (núm. 686) sustituyendo ω por su valor $\frac{\pi d^2}{4}$, y reemplazando los exponentes 4 de d y 2 de l por los números fraccionarios 3,6 y 1,7. Para carga de trabajo ordinario hemos tomado $\frac{1}{6}$ de la de fractura.

(* Aceptaremos la relación $\frac{2}{7}$, que es un término medio entre las $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ halladas por Hodgkinson.

COLUMNAS MACIZAS

CASOS	Carga de fractura. P_0	Carga de trabajo ordinario. P
I. Dos bases planas....	$P_0 = 10320 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$	$P = 1720 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$
II. Una base plana y otra } redondeada ó ar- } ticulada..... }	$P_0 = 5954 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$	$P = 992 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$
III. Dos bases redondea- } das ó articuladas.. }	$P_0 = 2977 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$	$P = 497 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$

(1).

Los valores de P_0 y P correspondientes al caso III, se han deducido de los del caso I multiplicándolos por $\frac{2}{7}$, factor que tiene un valor comprendido entre los de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ halladas por Hodgkinson en sus experiencias.

Estas fórmulas son aplicables únicamente entre los límites $l > 25d$ y $l < 120d$; tienen el defecto de contener exponentes fraccionarios que obligan á emplear los logaritmos para el cálculo de P ó de d .

Las tablas siguientes contienen las potencias fraccionarias $d^{3,6}$ y $l^{1,7}$, ya formadas.

TABLA DE VALORES DE $d^{3,6}$.

d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$
1,00	1,0000	3,70	111,05	5,70	526,20	7,70	1553,7
1,25	2,2329	3,75	116,55	5,75	543,01	7,75	1590,3
1,50	4,3045	3,80	122,24	5,80	560,20	7,80	1627,6
1,75	7,4978	3,90	134,23	5,90	595,75	7,90	1704,0
2,00	12,125	4,00	147,03	6,00	632,91	8,00	1782,9
2,10	14,454	4,10	160,70	6,10	671,72	8,25	1991,7
2,20	17,089	4,20	175,26	6,20	712,22	8,50	2217,7
2,25	18,529	4,25	182,89	6,25	733,11	8,75	2461,7
2,30	20,055	4,30	190,76	6,30	754,44	9,00	2724,4
2,40	23,3755	4,40	207,22	6,40	798,45	9,25	3006,8
2,50	27,076	4,50	224,68	6,50	844,28	9,50	3309,8
2,60	31,182	4,60	243,18	6,60	891,99	9,75	3634,3
2,70	35,720	4,70	262,76	6,70	941,61	10,00	3981,1
2,75	38,159	4,75	272,96	6,75	967,15	10,25	4351,2
2,80	40,716	4,80	283,44	6,80	993,19	10,50	4745,5
2,90	46,199	4,90	305,28	6,90	1046,80	10,75	5165,0
3,00	52,196	5,00	328,32	7,00	1102,40	11,00	5610,7
3,10	58,736	5,10	352,58	7,10	1160,20	11,25	6083,4
3,20	65,848	5,20	378,10	7,20	1220,10	11,50	6584,3
3,25	69,628	5,25	391,36	7,25	1250,90	11,75	7114,4
3,30	73,561	5,30	404,94	7,30	1282,20	12,00	7674,5
3,40	81,908	5,40	433,13	7,40	1346,00	»	»
3,50	90,917	5,50	462,71	7,50	1413,30	»	»
3,60	100,620	5,60	493,72	7,60	1482,30	»	»

TABLA DE VALORES DE $l^{1,7}$

l	$l^{1,7}$	l	$l^{1,7}$	l	$l^{1,7}$
1	1,000	9	41,900	17	123,53
2	3,249	10	50,119	18	136,13
3	6,473	11	58,934	19	149,24
4	10,556	12	68,329	20	162,84
5	15,426	12	78,289	21	176,92
6	21,031	14	88,801	22	191,48
7	27,332	15	99,851	23	206,51
8	34,297	16	111,430	24	222,00

Si la fundición de que se dispone fuese de coeficiente de fractura \bar{R}'_2 kilogramos por mm.², habría que multiplicar los valores de P_0 y P por $\frac{\bar{R}'_2}{81,33}$.

713. Para $l > 5d$ y $l < 25d$, Hodgkinson dió la fórmula

$$P_0 = \frac{BC}{B + \frac{3}{4}C} \quad (2),$$

en la cual:

P_0 = carga de fractura en kilogramos.

C = carga de aplastamiento dada por la fórmula de compresión simple

$C = R' \omega$, correspondiente á $l < 5d$.

B = Valor de P_0 , dado por las fórmulas anteriores, correspondientes á $l > 25d$.

P se obtendría tomando $\frac{1}{6}$ de P_0 .

Columnas huecas. — 1.º $l > 25d$ y $l < 120d$

$$P = A \frac{d^{3,6} - d_i^{3,6}}{l^{1,7}} \quad (3),$$

siendo:

d = diámetro exterior..... } en centímetros.
 d_i = diámetro interior..... }
 l = longitud..... en decímetros.
 P = carga de trabajo ordinario.. en kilogramos.

$A = \begin{cases} 1720 \dots \text{ caso I: dos extremos planos.} \\ 992 \dots \text{ » II: un extremo plano y otro redondeado ó articulado.} \\ 497 \dots \text{ » III: dos extremos redondeados ó articulados.} \end{cases}$

P_0 , carga de fractura, será 6 veces mayor que P .

2.º $l > 5d$ y $l < 25d$. Se acomodará á este caso la fórmula (2).

714. Fórmulas de Love. — M. Love dedujo de las experiencias de Hodgkinson las fórmulas siguientes, más sencillas que las del número anterior.

Columnas macizas — 1.º $l > 4d$ y $l < 120d$.

Carga de fractura:

$$P_0 = \alpha \frac{\bar{R}' \omega}{1,45 + 0,00337 \left(\frac{l}{d}\right)^2} = \alpha \frac{7500 d^4}{1,85 d^2 + 0,0043 l^2} \quad (4).$$

Carga permanente de trabajo ordinario:

$$P = \alpha \frac{1250 d^4}{1,85 d^2 + 0,0043 l^2} \quad (5).$$

2.º $l > 5d$ y $l < 30d$.

Carga de fractura:

$$P_0 = \alpha \frac{7500 \omega}{0,68 + 0,10 \frac{l}{d}} \quad (6).$$

Carga permanente:

$$P = \alpha \frac{1250 \omega}{0,68 + 0,10 \frac{l}{d}} \quad (7).$$

En estas fórmulas, l y d vienen expresados en centímetros y ω en centímetros cuadrados; α es un coeficiente que tiene los siguientes valores:

- I. Columna de bases planas..... $\alpha = 1$
- II. Idem de una base plana y otra redondeada ó articulada..... $\alpha = \frac{1}{7}$.
- III. Idem de dos bases redondeadas ó articuladas..... $\alpha = \frac{2}{7}$.

P_0 corresponde á una fundición en que el coeficiente de fractura por aplastamiento simple es $\bar{R}' = 75$ kilogramos por mm.² y P es igual á $\frac{1}{6}$ de P_0 .

715. Columnas huecas.—Se considera que su resistencia es la diferencia de la de dos columnas macizas, una de diámetro d (exterior) y otra de diámetro d_1 (interior).

716. Fórmula de Gordon.—M. Gordon dedujo de las experiencias de Hodgkinson las fórmulas siguientes:

Columnas cilíndricas macizas.—Carga de fractura:

$$P_0 = \frac{5630 \omega}{1 + H \times 0,0025 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (8).$$

Carga de trabajo ordinario:

$$P = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,0025 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (9).$$

Columnas huecas.—Carga de fractura:

$$P_0 = \frac{5630 \omega}{1 + H \times 0,00125 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (10).$$

Carga de trabajo ordinario

$$P = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,00125 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (11).$$

En todas estas fórmulas:

ω = área de la sección transversal..... en centímetros cuadrados.

$d = \begin{cases} \text{diámetro de la columna maciza.....} \\ \text{diámetro exterior de la columna hueca.} \end{cases}$ en centímetros.

l = longitud de la columna..... en centímetros.

P y P_0 = cargas..... en kilogramos.

Cuanto al coeficiente H del segundo término del denominador, tiene los valores siguientes, relativos á la disposición de los extremos de la pieza comprimida.

	Valor de H
Caso I. — Dos bases planas.....	1
Caso II. — Una base plana y otra redondeada ó articulada.....	$\frac{2}{3}$
Caso III. — Dos bases redondeadas ó articuladas.....	$\frac{1}{4}$

717. Piezas de sección cualquiera.—De las fórmulas anteriores se deducen estas otras, aplicables á una pieza de sección cualquiera (cruz, doble T , etc.).

Carga de fractura:

$$P_0 = \frac{5630 \omega}{1 + H \times 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}} \quad (12).$$

Carga de trabajo ordinario:

$$P = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}} \quad (13).$$

En las cuales:

ω = área de la sección en centímetros cuadrados.

l = longitud, en centímetros.

I' = mínimo momento de inercia de la sección, en centímetros.

P, P_0 = cargas, en kilogramos.

H = coeficiente que recibe los valores que se han expresado en el número anterior para los diversos casos.

718. Si dividimos por ω los dos miembros de las fórmulas de Love y Gordon, los primeros miembros se convertirán en $\frac{P_0}{\omega}, \frac{P}{\omega}$, que no son otra cosa que los coeficientes de fractura y de trabajo, respectivamente, correspondientes á la compresión de prismas largos, coeficientes que representaremos por \bar{R}'_1 y R'_1 .

\bar{R}'_1 y R'_1 son funciones de $\frac{l}{d}$; dando á la relación $\frac{l}{d}$ valores variables, se pueden hallar los que corresponden á \bar{R}'_1 y R'_1 por medio de dichas fórmulas modificadas, y esto es lo que hemos hecho en la tabla siguiente empleando las fórmulas de Love. Los problemas de resistencia quedarán así resueltos por las fórmulas de la compresión simple

$$\begin{aligned} P_0 &= \bar{R}'_1 \omega \\ P &= R'_1 \omega \end{aligned}$$

dando á \bar{R}'_1 y á R'_1 los valores que la tabla indique, correspondientes á los de la relación $\frac{l}{d}$.

La tabla se refiere al caso I de bases planas, y, por tanto, $\alpha = 1$ en las fórmulas (4) á (7).

COLUMNAS Y PIEZAS PLANAS DE BASES PLANAS

TABLA DE COEFICIENTES DE FRACTURA Y DE TRABAJO, EN KILOGRAMOS POR CM.² CORRESPONDIENTES A DIVERSOS VALORES DE LA RELACION $\frac{l}{d}$ OBTENIDOS POR LAS

FÓRMULA DE LOVE.

$\frac{l}{d}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
FUNDICIÓN																		
Coefficiente de fractura \bar{R}' ,	7500	4464	3413	2797	2339	2021	1849	1700	1570	1460	1360	1270	1190	1120	1060	1010	960	920
Coefficiente de trabajo R' ,	1250	744	569	466	390	337	294	260	230	210	190	170	150	140	130	120	110	100
Valor de R' , en función del coeficiente de trabajo R' por compresión simple.	$R' 0,56$	$R' 0,458$	$R' 0,36$	$R' 0,314$	$R' 0,23$	$R' 0,18$	$R' 0,16$	$R' 0,14$	$R' 0,126$	$R' 0,085$	$R' 0,073$	$R' 0,0645$	$R' 0,055$	$R' 0,049$	$R' 0,047$	$R' 0,038$	$R' 0,034$	$R' 0,031$
HIERRO																		
Coefficiente de fractura \bar{R}' ,	3600	2880	2472	2178	1944	1752	1584	1440	1310	1200	1100	1010	930	860	800	750	710	680
Coefficiente de trabajo R' ,	600	480	412	363	324	292	264	240	215	195	178	167	150	137	126	115	108	100
Valor de R' , en función de R' ,	$R' 0,80$	$R' 0,688$	$R' 0,606$	$R' 0,54$	$R' 0,487$	$R' 0,44$	$R' 0,40$	$R' 0,37$	$R' 0,357$	$R' 0,326$	$R' 0,298$	$R' 0,273$	$R' 0,250$	$R' 0,229$	$R' 0,21$	$R' 0,193$	$R' 0,18$	$R' 0,17$

Los números de esta tabla, calculados por las fórmulas de Love, lo están en el caso de que los coeficientes de fractura y de trabajo, por compresión simple, en ejemplares cúbicos, son:

	COEFICIENTE DE FRACTURA		COEFICIENTE DE TRABAJO	
	Kilogramos por cm. ²	Kilogramos por mm. ²	Kilogramos por cm. ²	Kilogramos por mm. ²
Fundición...	7500	75	1250	12,50
Hierro.....	3600	36	600	6

719. Resolución de los problemas. Problema primero. Conocidas las dimensiones de la pieza, calcular la fuerza P de compresión que podrá resistir. — Puesto que se conocen ω , l , d , d_1 , etc., no habrá más que sustituir sus valores en las fórmulas (1) á (13) de los números precedentes.

Ejemplo 1.º Columna maciza de bases planas (caso I) de longitud $l = 4$ metros y de diámetro $d = 0^m,10$.

Empleando la fórmula de Hodgkinson (1.ª de las (1) del núm. 712), tendremos:

$$P = 1720 \frac{d^{5,6}}{l^{1,7}}$$

$$\left. \begin{array}{l} d = 10 \text{ centímetros} \\ l = 40 \text{ decímetros} \end{array} \right\} P = 1720 \times \frac{10^{5,6}}{40^{1,7}}$$

Log. 1720.....	3,25042	}	$P = 13394$ kilogramos.
+ Log. (10 ^{5,6}).....	3,60000		
= Log. (1720 × 10 ^{5,6})..	6,85042		
– Log. (40 ^{1,7}).....	2,72350		
Log. $P = 4,12691$			

Haciendo uso de la fórmula de Love [(5) del núm. 714], será:

$\alpha = 1$, por tratarse del caso I, de bases planas.
 $d = 10$ centímetros.
 $l = 400$ centímetros.

$$P = \frac{1250 d^4}{1,85 d^2 + 0,0043 l^2} = \frac{1250 \times 10^4}{1,85 \times 10^2 + 0,0043 \times 400^2}$$

$$P = 14318 \text{ kilogramos.}$$

Si empleamos la fórmula de Gordon [(9) del núm. 716], obtendremos:

$H = 1$, por tratarse del caso I, de bases planas.
 $d = 10$ centímetros.
 $l = 400$ centímetros.

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78,50 \text{ centímetros cuadrados.}$$

$$P = \frac{940 \omega}{1 + 0,0025 \left(\frac{l}{d}\right)^2} = \frac{940 \times 78,50}{1 + 0,0025 \left(\frac{400}{10}\right)^2}$$

$$P = 14758 \text{ kilogramos.}$$

Se puede también hacer uso de la tabla del núm. 718 y de la fórmula

$$P = R'_1 \omega.$$

Formaremos la relación $\frac{l}{d} = \frac{4}{0,10} = 40$, á cuyo número corresponde, en la tabla citada, un coeficiente de trabajo

$$R'_1 = 183 \text{ kilogramos por cm.}^2,$$

y como $\omega = 78,50 \text{ cm.}^2$, será

$$P = 183 \times 78,50 = 14365 \text{ kilogramos.}$$

Los resultados obtenidos por las diversas fórmulas difieren poco; la de Gordon da mayores valores para P . La fórmula de Hodgkinson tiene el inconveniente de exigir el empleo de tablas logarítmicas; las fórmulas de Love son de aplicación más sencilla, y especialmente cuando se emplea la tabla del número anterior y la fórmula $P = R'_1 \omega$, cuyo uso recomendamos por su sencillez.

Con objeto de evitar cálculos, damos á continuación dos tablas: la primera contiene los valores de P , obtenidos por la fórmula de Love, correspondientes á columnas macizas de fundición, de diámetros y longitudes variables; también aparecen los valores de P relativos á columnas macizas de hierro, cuyo cálculo daremos más adelante (núm. 726). La segunda da los valores de la carga P que pueden resistir las columnas huecas de fundición, de alturas, diámetros y espesores diversos: d es el diámetro exterior de la columna.

TABLA

DE VALORES DE *P* (CARGA DE TRABAJO ORDINARIO EN KILOGRAMOS)
 PARA COLUMNAS MACIZAS DE BASES PLANAS, DE FUNDICIÓN Y DE HIERRO, CALCULADOS POR LA FÓRMULA DE LOVE.

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO	
		CARGAS <i>P</i> en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS <i>P</i> en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.
50.	0,75	11091	10,60	7106	11,48
	1,00	8742	14,13	6736	15,31
	1,25	6910	17,67	6282	19,14
	1,50	5398	21,20	5889	22,97
	1,75	4417	24,73	5488	26,79
	2,00	3579	28,27	5010	30,62
	2,25	2944	31,80	4593	34,45
	2,50	2454	35,33	4201	38,28
	2,75	2100	38,87	3926	42,11
	3,00	1803	42,40	3509	45,93
	3,25	1570	45,93	3141	49,76
	1,25	12580	25,44	9697	27,56
1,50	9917	30,53	9113	33,08	
1,75	8169	35,62	8590	38,59	
2,00	6789	40,71	8056	44,10	
2,25	5698	45,80	7526	49,61	
60.	2,50	4830	50,89	7010	55,13
	2,75	4134	55,97	6517	60,64
	3,00	3571	61,06	6050	66,15
	3,25	3110	66,14	5613	71,66
	3,50	2730	71,24	5207	77,17
	3,75	2318	76,33	4665	82,69

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO	
		CARGAS <i>P</i> en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS <i>P</i> en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.
70.	1,50	16162	45,02	13083	45,56
	1,75	13545	52,53	12314	48,48
	2,00	10582	60,03	11544	55,41
	2,25	9235	62,34	10967	67,53
	2,50	7696	69,26	10390	75,04
	2,75	7003	76,19	9812	82,54
	3,00	5964	83,12	9235	90,04
	3,25	5387	90,04	8658	97,55
	3,50	4848	96,97	8235	105,05
	3,75	4233	103,90	7696	112,55
	4,00	3848	110,82	7504	120,06
	4,25	3463	117,75	6926	127,56
	2,00	17630	72,37	16202	78,40
	2,25	15234	81,42	15507	88,21
	2,50	13228	90,47	14797	98,01
	2,75	11542	100,51	14085	107,80
	3,00	10130	108,56	13379	117,60
	3,25	8941	117,71	12688	127,40
80.	3,50	7936	126,66	12018	137,21
	3,75	7080	136,70	11373	147,00
	4,00	6349	144,75	10756	156,80
	4,25	5830	153,80	10153	166,60
	4,50	5176	162,80	9612	176,40
	4,75	4523	171,89	9298	186,20
	5,00	4290	180,94	8590	196,00
	5,50	»	»	7036	215,62
	6,00	»	»	6031	235,22

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO	
		CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.
90.	2,00	25449	91,60	21309	99,23
	2,50	19972	114,50	20037	124,04
	3,00	15902	137,40	17811	148,35
	3,50	11768	160,30	16539	173,66
	4,00	9860	183,20	14948	198,46
	4,50	8015	206,10	13613	223,27
	5,00	6806	229,00	12722	248,08
	5,50	5534	251,90	11132	272,89
	6,00	»	274,80	9860	297,69
	6,50	»	297,69	8269	322,50
	7,00	»	320,59	6997	347,31
	2,00	35014	113,08	26954	122,51
	2,50	27548	141,35	25316	253,13
	3,00	21853	169,62	23566	183,76
3,50	17562	197,90	21786	214,39	
4,00	14318	226,17	20040	245,01	
4,50	11839	254,44	18371	275,64	
100.	5,00	9920	282,71	16806	306,27
	5,50	8413	310,98	15360	336,89
	6,00	7212	339,25	14038	367,52
	6,50	»	»	12565	398,15
	7,00	»	»	10994	428,77
	7,50	»	»	9424	459,40
	8,00	»	»	7853	490,03
	3,00	40512	248,59	»	»
120.	3,50	32225	290,03	»	»
	4,00	27622	331,46	»	»

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO		
		CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	
120.	4,50	24169	372,89	»	»	
	5,00	19565	414,32	»	»	
	5,50	16688	455,76	»	»	
	6,00	14501	497,19	»	»	
	6,50	12660	538,62	»	»	
	7,00	11509	580,05	»	»	
	8,00	9783	662,92	»	»	
	3,00	64651	332,49	»	»	
	3,50	54183	387,90	»	»	
	4,00	43100	443,32	»	»	
	4,50	39252	498,73	»	»	
	5,00	32325	554,15	»	»	
	140.	5,50	28015	609,56	»	»
		6,00	23859	664,98	»	»
6,50		22320	720,39	»	»	
7,00		19395	775,81	»	»	
7,50		16932	831,22	»	»	
8,00		15393	886,64	»	»	
8,50		13854	942,05	»	»	
3,00		90477	434,29	»	»	
160.	3,50	83440	506,67	»	»	
	4,00	70773	579,05	»	»	
	4,50	60318	651,43	»	»	
	5,00	53281	723,82	»	»	
	5,50	45238	796,20	»	»	
	6,00	38201	868,58	»	»	
	6,50	35185	940,96	»	»	

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO	
		CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.
160.	7,00	31164	1013,34	»	»
	7,50	29154	1085,72	»	»
	8,00	25334	1158,11	»	»
	8,50	23323	1230,49	»	»
	9,00	20106	1302,87	»	»
	9,50	18095	1375,25	»	»
	3,00	132319	549,63	»	»
	3,50	114507	641,24	»	»
	4,00	101784	732,84	»	»
	4,50	89570	824,45	»	»
180.	5,00	76338	916,06	»	»
	5,50	69976	1007,66	»	»
	6,00	61070	1099,27	»	»
	6,50	58526	1190,87	»	»
	7,00	47075	1282,48	»	»
	7,50	43258	1374,08	»	»
	8,00	38423	1465,69	»	»
	8,50	35624	1557,30	»	»
	9,00	32062	1648,90	»	»
	9,50	29263	1740,51	»	»
200.	10,00	25446	1832,11	»	»
	4,00	139801	904,78	»	»
	4,50	125664	1017,88	»	»
	5,00	110584	1130,98	»	»
	5,50	97390	1244,07	»	»
	6,00	86394	1357,17	»	»
	6,50	78540	1470,27	»	»

DIÁMETRO en milímetros.	ALTURA en metros.	FUNDICIÓN		HIERRO	
		CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.	CARGAS P en kilogramos.	PESO TOTAL en kilogramos.
200.	7,00	70686	1583,37	»	»
	7,50	62832	1701,46	»	»
	8,00	57177	1809,56	»	»
	8,50	52151	1922,66	»	»
	9,00	47124	2035,76	»	»
	9,50	43982	2148,85	»	»
	10,00	39584	2261,95	»	»

TABLA

DE VALORES DE *P* (CARGA DE TRABAJO ORDINARIO, EN KILOGRAMOS) PARA COLUMNAS HUECAS,

DE BASES PLANAS, DE FUNDICIÓN

DIÁMETRO exterior <i>d</i> en mm.	ESPESOR <i>e</i> en mm.	ÁREA de la sección en mm. ²	PESO del metro lineal o en kilogramos.	CARGAS <i>P</i> , EN KILOGRAMOS, QUE PUEDEN SOPORTAR LAS COLUMNAS PARA ALTURAS, EN METROS, DE								
				1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0		
40.	4	452	3,25	1586	967	719	312	»	»	»	»	»
	6	640	4,60	2246	1370	1018	442	»	»	»	»	»
	8	804	5,80	2822	1721	1278	561	»	»	»	»	»
	10	942	6,80	3306	2016	1498	650	»	»	»	»	»
	6	1018	7,35	3446	3563	2626	1863	1619	977	»	»	»
	8	1307	9,45	6992	5475	3372	2392	2078	1255	»	»	»
	10	1571	11,30	8405	5498	4053	2875	2498	1508	»	»	»
	11	1693	12,20	9057	5925	4368	3098	2692	1625	»	»	»
	13	1920	13,85	10272	6720	4954	3514	3053	1843	»	»	»
	6	1395	10,05	8816	6696	4882	3906	2985	2441	2292	2896	2518
8	1810	13,05	11439	8088	6335	5068	3873	3167	2818	2518	2518	
100.	18	3506	23,25	16829	10829	12271	9817	7009	5199	4199	3314	
	6	1772	12,75	14034	10354	7885	6302	5227	4253	3551	4325	
	8	2313	16,65	18319	13554	10293	8095	6823	5551	4677	5288	
	10	2828	20,40	22398	16572	12585	9898	8343	6787	5688	6205	
	12	3318	23,90	26279	19443	14765	11613	9788	7963	6491	7491	
	15	4006	28,85	31727	23475	17827	14021	11818	9614	7873	8673	
	18	4638	33,40	36733	27179	20639	16233	13682	11131	9154	10503	
	6	2149	15,50	18696	12937	11476	»	7521	»	»	5554	
	8	2815	20,30	24490	19198	15032	»	9852	»	»	7263	
	10	3455	24,90	30058	23563	18450	»	12032	»	»	8914	
12	4071	29,35	35418	27764	21739	»	14248	»	»	10503		
14	4662	33,60	40559	31795	24895	»	16317	»	»	12028		
17	5501	39,60	47859	37517	29375	»	19253	»	»	14193		
20	6283	45,25	54062	42850	33351	»	21930	»	»	16210		

DIÁMETRO exterior d en mm.	ESPESOR e en mm.	ÁREA de la sección o en mm. ²	PESO del metro lineal en kilogramos	CARGAS P, EN KILOGRAMOS, QUE PUEDEN SOPORTAR LAS COLUMNAS PARA ALTURAS, EN METROS, DE									
				1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	
140.	6	2526	18,20	24048	19198	15409	10559	7856	5090	»	»	»	»
	8	3317	23,90	31578	25209	20234	13865	10316	7629	»	»	»	»
	10	4084	29,40	38880	31038	24912	17071	12701	9393	»	»	»	»
	12	4825	34,75	45934	36670	29432	20168	15006	11097	»	»	»	»
	14	5541	39,90	52750	42112	33800	23161	17232	12744	»	»	»	»
	18	6899	49,70	65678	52432	42084	28838	21456	15868	»	»	»	»
	22	8155	58,75	77636	61978	49745	34088	25362	18757	»	»	»	»
	6	2903	20,90	29030	23805	19798	13644	10160	8273	6067	»	»	»
	8	3820	27,50	36290	31324	26052	17954	13370	10887	7838	»	»	»
	12	5850	42,10	55575	47970	39897	27495	20475	16672	12226	»	»	»
160.	16	7239	52,10	68770	59360	49370	34023	25336	20631	15129	»	»	»
	18	8030	57,80	76285	65846	54765	37741	28105	22885	16783	»	»	»
	20	8797	63,35	83571	72185	59995	41346	30789	25071	18386	»	»	»
	24	10254	73,80	97413	84088	69932	48194	35889	29224	21431	»	»	»
	6	3279	23,60	34331	30265	24428	16887	13280	10894	8525	»	»	»
	8	4322	31,10	45251	39892	32199	22258	19449	13701	11237	8514	»	»
	12	6393	45,60	66966	58454	47181	32915	25649	20076	15466	12466	»	»
	26	12579	90,35	131662	116104	63713	64782	50945	38570	30076	18466	»	»
	6	3656	26,35	39412	33745	28955	21424	16239	12796	10785	»	»	»
	8	4820	34,70	51960	44489	38174	28245	21449	16870	14219	11568	»	»
200.	12	7088	51,05	76409	65422	56137	41536	31542	24808	20910	17011	13254	»
	16	9249	66,60	99706	85368	73252	54199	41158	32371	27284	22198	17296	»
	20	11310	81,45	121922	104391	89575	66276	50329	39585	33364	27144	21150	»
	25	13745	98,95	145171	126866	108960	80546	61165	48107	40548	32988	25703	»
	30	16023	115,35	172728	147892	126902	98395	71302	56080	47268	38455	29963	»
	6	4599	33,10	51739	46772	41161	32331	25432	20465	17016	»	»	»
	8	6082	43,50	68422	61854	54424	42756	33633	27065	22503	19230	16604	»
	12	8972	64,60	109335	91245	80299	63073	49615	39925	33196	28441	24493	»
	16	11762	84,70	132322	119619	105270	82687	65044	52341	43519	37285	32110	»
	20	14451	104,65	162574	146967	129336	101530	79914	64307	53469	45810	39451	»
300.	25	17671	127,25	197739	179714	158155	124227	97721	78636	65383	56017	48242	»
	30	20735	149,30	231269	210875	185578	145767	114664	92271	76719	65730	56606	»
	6	5541	39,90	63938	59843	54523	48335	35462	29867	24657	»	»	»
	8	7339	52,35	84765	79261	72216	58125	46969	38897	32658	27512	24512	»
	12	10858	78,20	125410	117266	106843	85995	69491	54547	48318	40717	36266	»
	16	14276	102,80	164888	154180	140476	112066	91366	75663	63528	53535	47632	»
	20	17593	126,75	203199	190004	173115	139336	112595	93243	78289	65974	58761	»
	25	21599	155,50	249468	233269	212534	171064	138234	114475	96115	80906	72141	»
	30	25447	183,20	293913	274827	250398	201540	162361	134869	113239	95426	84993	»
	35	29139	209,80	336555	314701	286728	230731	189490	154437	129668	109271	97324	»

Ejemplo 2.º Mangueta de un entramado, de sección cruciforme (fig. 32, lámina 14), articulada en los dos extremos (caso III del núm. 716).

Datos:

Longitud = $l = 1,40$ metros = 140 centímetros.

Lado menor de la cruz = $b = 0,08$ metros = 8 centímetros.

Grueso de las ramas = $a = b' = 0,02$ metros = 2 centímetros.

$a' = 0,10$ metros = 10 centímetros.

Lado mayor de la cruz = $a' + a = 0,12$ metros = 12 centímetros.

$H = 4$, por tratarse del caso III (núm. 716).

Haremos uso de la ecuación (13) del núm. 717,

$$P = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}};$$

I' es el menor momento de inercia de la sección con respecto a los ejes que pasan por su centro de gravedad. El eje del momento de inercia será, en este caso, el paralelo a la rama mayor de la cruz; de modo que (22, tabla del núm. 477)

$$I' = \frac{a b^3 \times a' b'^3}{12} = \frac{2 \times 8^3 + 10 \times 2^3}{12} = 92 \text{ (en centímetros)}$$

$$\omega = a b + a' b' = 2 \times 8 + 10 \times 2 = 36 \text{ cm.}^2$$

y tendremos

$$P = \frac{940 \times 36}{1 + 4 \times 0,000156 \times \frac{140^2 \times 36}{92}}$$

6

$$P = 32300 \text{ kilogramos.}$$

Ejemplo 3.º Columna hueca de bases planas (caso I).

Datos:

Longitud = $l = 4$ metros = 40 decímetros = 400 centímetros.

Diámetro exterior = $d = 0,12$ metros = 12 centímetros.

Diámetro interior = $d_1 = 0,09$ metros = 9 centímetros.

Fórmula de Hodgkinson [(3) del núm. 313]:

$$P = 1720 \times \frac{12^{3,9} - 9^{3,9}}{40^{1,7}} = 16000.$$

Fórmula de Love [(5) del núm. 714]:

Se considera que la resistencia de la columna es la diferencia de resistencia de las columnas macizas que tuviesen por diámetro $d = 12$ centímetros la una, y $d = 9$ centímetros la otra; será, pues, llamando P' y P'' a las cargas correspondientes a estas columnas,

$$P = P' - P''$$

$$P' = \frac{1250 \times 12^4}{1,85 \times 12^2 + 0,0043 \times 400^2} = 27170$$

$$P'' = \frac{1250 \times 9^4}{1,85 \times 9^2 + 0,0043 \times 400^2} = 9786$$

$$P = 27170 - 9786 = 17384 \text{ kilogramos.}$$

Fórmula de Gordon [(11) del núm. 716]:

$H = 1$, por tratarse del caso I (bases planas).

$$P = \frac{940 \omega}{1 + 0,00125 \left(\frac{l}{d}\right)^2} = \frac{940 \times \frac{\pi}{4} (12^2 - 9^2)}{1 + 0,00125 \times \left(\frac{400}{12}\right)^2}$$

6

$$P = 19532 \text{ kilogramos.}$$

720. *Fórmula relativa a una sección cualquiera [(13) del núm. 717]:*

$$I' = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{4} = \frac{\pi (6^4 - 4,5^4)}{4} = 695,50 \text{ (en centímetros)}$$

$$\omega = \pi (6^2 - 4,5^2) = 49,50 \text{ cm.}^2$$

$H = 1$ (caso I).

$$P = \frac{940 \omega}{1 + 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}} = \frac{940 \times 49,50}{1 + 0,000156 \times \frac{400^2 \times 49,50}{695,50}}$$

6

$$P = 16782.$$

Las fórmulas de Gordon dan resultados algo grandes: se emplean más generalmente las de Love, que no exigen cálculos logarítmicos como las de Hodgkinson.

721. *Problema segundo. Conocida la fuerza P de compresión y la lon-*

gitud l , calcular las dimensiones de la sección transversal de la pieza comprimida. — Se hace uso de las fórmulas (1) á (13) anteriores.

Columnas macizas. — Si se emplea la fórmula de Hodgkinson [(1) del número 712], fácil es despejar el valor de d .

La fórmula de Love [(5) del núm. 714] da lugar á una ecuación de cuarto grado; en el caso de bases planas, por ejemplo, en que $\alpha = 1$, será

$$d^4 - \frac{1,85 P d^2}{1250} - \frac{0,0043 P l^2}{1250} = 0,$$

de donde

$$d = \sqrt{\frac{1,85}{2 \times 1250} P} + \sqrt{\left(\frac{1,85}{2 \times 1250} P\right)^2 + \frac{0,0043 P l^2}{1250}} \quad (14).$$

Se pueden evitar los laboriosos cálculos á que da lugar esta fórmula, empleando la tabla del núm. 719. Si los valores de P y l no estuviesen contenidos en dicha tabla, se tomarán los inmediatamente mayores, y se tendrá en las primeras casillas el diámetro d correspondiente.

Ejemplo. Columna maciza, de 5 metros de longitud, sometida á una compresión de 4290 kilogramos.

Haciendo uso de la fórmula (14), deducida de la (5) de Love, y recordando que en ellas l y d vienen expresados en centímetros, será:

$$\begin{aligned} l &= 500 \\ P &= 4290 \\ d &= 8 \text{ centímetros.} \end{aligned}$$

Es el mismo valor que da la tabla del núm. 719.

Aplicando la fórmula de Hodgkinson (1.^a de las (1) del núm. 712), tendríamos:

$$\begin{aligned} l &= 50 \text{ decímetros} \\ P &= 4290 \\ 4290 &= P = 1720 \frac{l^{3,8}}{l^{3,7}} = 1720 \times \frac{l^{3,8}}{50^{3,7}} \\ d &= \sqrt[3,6]{\frac{4290 \times 50^{3,7}}{1720}} \quad (\text{en centímetros}). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Log. } 4290 &= 3,6324573 \\ \text{Log. } (50^{3,7}) &= 2,8882490 \\ \text{Log. } (4290 \times 50^{3,7}) &= 6,5207063 \\ \text{Log. } 1720 &= 3,2355284 \\ \text{Log. } \frac{4290 \times 50^{3,7}}{1720} &= 3,2851779 \\ \text{Log. } d &= 0,912548 \end{aligned} \right\} d = 8,17 \text{ centímetros.}$$

722. Es conveniente, para la resolución de estos problemas, el conocimiento de las proporciones que en la práctica se acostumbra á dar á las columnas macizas, y que á continuación consignamos:

DIÁMETRO d en metros.	ALTURA l en metros.	PESO por metro lineal en kilogramos.
0,070	1,50 á 2,75	20,50
0,081	2,50 á 3,25	40
0,094	2,50 á 3,65	52
0,108	2,50 á 4,50	63
0,120	3,00 á 5,00	85
0,135	5,00 á 6,00	99

Como máximo de diámetro se puede considerar $d = 0^m,20$ á $d = 0^m,22$, y esto en columnas altas, de l igual á 7 ú 8 metros. Para mayores valores de d , se hacen huecas.

723. *Columnas huecas.* — Como hay dos incógnitas (d diámetro exterior, y d_1 diámetro interior), el problema es indeterminado; desaparece, sin embargo, la indeterminación si se tiene en cuenta que el espesor $e = \frac{d - d_1}{2}$

tiene un límite inferior para cada valor de la longitud l . El espesor mínimo, dado por la práctica del fundidor para tener en cuenta la posible excentricidad del núcleo central en el molde, y todos los defectos de moldeo, es el siguiente:

Altura de las columnas (l) en metros.....	2 á 3	3 á 4	4 á 6	6 á 8	8 á 10
Espesor mínimo (e) en milímetros.....	10 á 12	12 á 15	15 á 20	20 á 25	25 á 30

Puede aceptarse como promedio conveniente de la relación $\frac{l}{d}$ entre la altura de la columna y el diámetro exterior, $\frac{l}{d} = 50$ (*).

Para resolver el problema con la mayor facilidad posible, llamemos:

P = carga dada.

P' = carga que puede soportar la columna maciza de diámetro d .

P'' = carga que puede resistir, en iguales condiciones, la columna maciza de diámetro d_1 .

Haremos $P = P' - P''$.

Se dará un valor arbitrario á d , diámetro exterior, se calculará el peso P' correspondiente (problema 1.º, núm. 719) y se deducirá P'' por la diferencia $P'' = P' - P$.

Se determinará el diámetro d_1 correspondiente á la columna maciza capaz de soportar la carga P'' (problema 1.º, número anterior) y se comprobará si d_1 es admisible, á cuyo efecto se formará $e = \frac{d - d_1}{2}$; si e es demasiado grande, es que se ha tomado d demasiado pequeño, y habrá que aumentarlo; y si, por el contrario, e resultase demasiado pequeño, habría que disminuir el primer valor dado á d .

Todos estos tanteos se simplifican notablemente con auxilio de la tabla del núm. 719.

Ejemplos:

1.º $P = 23000$ kilogramos. Bases planas; $l = 5$ metros.

Hagamos $d = 140$ milímetros. $P' = 32325$
 $P = 23000$

 $P'' = 9322$ „ $d_1 = 100$ milímetros,

$e = \frac{140 - 100}{2} = 20$ milímetros, valor aceptable.

(*) Es conveniente que el capitel y la base estén fundidos con el fuste, formando una sola pieza. Cuando $d > 0,30$ metros y $l > 6$ metros, ha de ser $e > 25$ milímetros para que se obtenga perfección en el moldeo.

Rara vez se funden columnas huecas en que $d > 0,50$ metros; si $d > 0,50$ metros y l es grande, se divide el fuste en trozos de dos ó tres metros que unen por medio de orejas ó manguitos. Así se obtiene más regularidad en los espesores.

2.º $l = 4$ metros. $P = 20000$ kilogramos. Bases planas.

Haciendo $d = 120$ milímetros. $P' = 27622$
 $P = 20000$

 $P'' = 6722$ „ $d_1 = 82$ milímetros,
 $e = \frac{120 - 82}{2} = 19$ milímetros, valor algo grande; aumentese d .

Haciendo $d = 140$ milímetros. $P' = 43100$
 $P = 20000$

 $P'' = 23100$ „ $d_1 = 114$
 $e = \frac{140 - 114}{2} = 13$ milímetros, valor aceptable.

724. Piezas de sección cualquiera. — Si se conoce la forma de la sección, la carga P y la longitud l , se procederá por tanteos del siguiente modo:

Fíjese *a priori* un coeficiente de trabajo R'_1 menor que el R' correspondiente á piezas cortas, y el cociente $\frac{P}{R'_1}$ dará un valor de ω , área de la sección transversal, que permitirá asignar dimensiones lineales á dicha sección. Pero es preciso comprobar que el valor de ω encontrado es aceptable, y á este efecto se formará el de I' , mínimo momento de inercia de la sección transversal, y se sustituirá en la fórmula (13) del núm. 717.

$$P = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}}$$

Si el segundo miembro es poco diferente del valor de P dado, el problema está resuelto; si es mayor que P , se disminuirá el valor de ω y se repetirán las operaciones. Cuando, por el contrario, el segundo miembro resulte menor que P , será prueba que ω es pequeño, ó que lo es I' porque á igual valor de ω el cociente, valor de P , crece con I' . Se aumentarán las dos cantidades, y mejor sólo la segunda (I'), á fin de llegar al valor de P con el menor valor posible de ω , por razón de economía, no olvidando, en todos estos tanteos, que I' representa el menor de los momentos de inercia de la sección transversal.

Al fijar el primer valor de ω , partimos de otro arbitrario de R'_1 , y con objeto de no tomar para este coeficiente un valor exageradamente grande ó

pequeño, que daría lugar á numerosas correcciones y tanteos, se parte de un cierto valor arbitrario de la relación $\frac{l}{b}$, entre la longitud y el lado menor de la sección, ó, lo que es lo mismo, se fija el valor de b y se toma para R'_1 el que contiene la tabla del núm. 718 para $\frac{l}{d}$, relativo á columnas macizas de fundición; pues aunque este caso es distinto, los errores en la valoración primera de R'_1 , no serán tan grandes como los que se cometerían al fijar este valor caprichosamente.

Ejemplo. Viga de fundición de bases planas (caso I) de sección cruciforme (fig. 32, lám. 14), de 4 metros de longitud, sometida á un esfuerzo de compresión $P = 20000$ kilogramos ($H = 1$, núm. 716).

Empezaremos por fijar el valor de b , rama menor de la cruz, si es que no lo está por razones de construcción ó de fabricación. Hagamos, por ejemplo:

$$b = \frac{1}{30} \quad l = \frac{4^m}{30} = 0,13 \text{ metros.}$$

Primer tanteo. — En la tabla del núm. 718, á la relación $\frac{l}{d} = 30$ corresponde un coeficiente de trabajo R'_1 de 337 kilogramos por cm.^2 ; aceptándolo, resulta

$$\omega = \frac{P}{R'_1} = \frac{20000}{337} = 59,34 \text{ cm.}^2$$

Formemos una sección en que siendo $b = 13$ centímetros (fig. 32, lám. 14) tenga ω por valor 59,34 cm.^2 aproximadamente.

Hagamos:

$$\left. \begin{array}{l} a = b' = 2,2 \text{ centímetros.} \\ b = 13 \quad \text{»} \\ a' = 14,30 \quad \text{»} \end{array} \right\} \text{será } \omega = ab + a'b' = 60 \text{ cm.}^2.$$

y el menor momento de inercia,

$$I' = \frac{ab^3 + a'b'^3}{12} = \frac{2,2 \times 13^3 + 14,30 \times 2,2^3}{12} = 415,4 \text{ (en centímetros);}$$

de modo que

$$P = \frac{940 \omega}{1 + 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}} = \frac{940 \times 60}{1 + 0,000156 \frac{400^2 \times 60}{415,4}} = 12261.$$

El resultado obtenido es menor que P ; de modo que habremos de aumentar ω ó I' , ó I' solamente.

Segundo tanteo. — Aumentemos ω (conservando el valor $b = 13$ centímetros), ó, lo que es lo mismo, disminuyamos el coeficiente de trabajo R'_1 .

Haciendo $R'_1 = 200$ kilogramos por cm.^2 , sería

$$\omega = \frac{P}{R'_1} = \frac{20000}{200} = 100 \text{ cm.}^2.$$

Formaremos la sección del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} a = b' = 3 \text{ cms.} \\ b = 13 \quad \text{»} \\ a' = 20 \quad \text{»} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega = ab + a'b' = 3 \times 13 + 20 \times 3 = 99 \text{ cm.}^2. \\ I' = \frac{ab^3 + a'b'^3}{12} = \frac{3 \times 13^3 + 20 \times 3^3}{12} = 594,2 \text{ (en cms.)} \end{array}$$

$$P = \frac{940 \times 99}{1 + 0,000156 \times \frac{400^2 \times 99}{594,2}} = 18077.$$

Todavía es la cantidad hallada menor que P , que vale 20000.

Tercer tanteo. — Pero observaremos que la dimensión a' es demasiado grande con respecto á la b ; de modo que se podrá aumentar I' y el segundo miembro del valor de P , sin necesidad de nuevos aumentos de área; bastará, al efecto, aumentar b y disminuir a' siempre, por supuesto, que b continúe siendo la menor de las ramas de la cruz.

Haremos:

$$\left. \begin{array}{l} a = b' = 3 \text{ cms.} \\ b = 14 \quad \text{»} \\ a' = 19 \quad \text{»} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega = ab + a'b' = 3 \times 14 + 19 \times 3 = 99 \text{ cm.}^2. \\ I' = \frac{ab^3 + a'b'^3}{12} = \frac{3 \times 14^3 + 19 \times 3^3}{12} = 728. \end{array}$$

Este valor de I' (728) es mayor que el anterior (594,2) para igual valor de ω (99 cm.^2), de modo que el cociente

$$\frac{940 \omega}{1 + 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}}$$

tiene que ser ahora mayor. Y, en efecto, vale

$$\frac{940 \times 99}{1 + 0,000156 \frac{400^2 \times 99}{728}} = 21218.$$

Cantidad no muy diferente de $P = 20000$, y aceptable por lo tanto. Pero todavía nos podríamos aproximar más al verdadero valor de P por nuevas modificaciones de ω ó I' . La economía exige distribuir la materia en la sección transversal, de modo que I' sea grande para valores pequeños de ω .

725. Observación relativa al empleo de piezas comprimidas dobles. — Cuando se emplean dos piezas para resistir una fuerza de compresión P (fig. 36, lám. 26), es conveniente no suponer una repartición uniforme de fuerza, de modo que á cada una de las piezas corresponda la mitad $\frac{1}{2}P$, porque puede suceder que la resultante P cambie de lugar, y entonces una de las dos piezas se hallará sometida á compresión superior á $\frac{1}{2}P$. Debe estudiarse el movimiento probable de la resultante y determinar la compresión máxima que á cada pieza puede resultar, y cuando esto no sea posible, se estimará que la fuerza de compresión parcial es $\frac{2}{3}P$, en vez de $\frac{1}{2}P$, para prevenirse contra las variaciones de posición de la resultante.

HIERRO Ó ACERO

726. Columnas macizas. Fórmulas de Love. — M. Love dió, para cilindros macizos terminados en bases planas, las fórmulas siguientes:

Carga de fractura. Hierro.

$$\left. \begin{array}{l} l > 4d \\ l < 120d \end{array} \right\} P_0 = z \frac{2500 \omega}{1,55 + 0,0005 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (1).$$

$$\left. \begin{array}{l} l > 4d \\ l < 30d \end{array} \right\} P_0 = z \frac{4000 \omega}{0,85 + 0,04 \frac{l}{d}} \quad (2)$$

P_0 = carga de fractura, en kilogramos.

l = longitud del cilindro, en centímetros.

d = diámetro, en centímetros.

ω = área del círculo sección recta, en centímetros cuadrados.

z = coeficiente numérico que tiene por valor:

$z = 1$ caso I. — Cilindros de bases planas.

$z = \frac{1}{7}$ caso II. — Cilindros de una base plana y otra redondeada ó articulada.

$z = \frac{2}{7}$ caso III. — Cilindros de dos bases redondeadas ó articuladas.

Cargas permanentes. Hierro. — M. Morín dedujo de la fórmula (1) la siguiente, para carga permanente:

$$P = z \frac{600 d^4}{1,973 d^2 + 0,00064 l^2} \quad (3).$$

Morín admitía un coeficiente de fractura para el hierro, de 3600 kilogramos por cm.² (36 kilogramos por mm.²) en vez de los 2500 de Love, y tomaba $\frac{1}{6}$ para coeficiente de trabajo.

Cargas permanentes. Acero. — Por comparación, y puesto que los coeficientes de trabajo del hierro y del acero están en la relación 6 á 9, podrá emplearse la fórmula

$$P = z \frac{900 d^4}{1,973 d^2 + 0,00064 l^2} \quad (4).$$

727. Comparación de resistencias de las columnas macizas de hierro y de fundición. — Comparando las fórmulas de Love para el hierro y la fundición [fórmulas (4) del núm. 714 y (1) del número anterior], se observa que á partir de $l = 30d$, las columnas macizas de hierro pueden soportar cargas más fuertes que las de fundición de igual diámetro y longitud, hecho comprobado por las experiencias de Hodgkinson.

728. Coeficientes de fractura \bar{R}'_1 deducidos de la fórmula de Love. — A semejanza de lo practicado para las columnas de fundición (núm. 718), la fórmula (1) puede ponerse bajo esta otra forma, dividiendo por ω sus dos miembros, y admitiendo para coeficiente de fractura en ejemplares cortos 3600 kilogramos por cm.², como hace Morín:

$$\frac{P_0}{\omega} = \bar{R}'_1 = z \frac{3600}{1,55 + 0,0005 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (5).$$

De aquí se pueden deducir los valores de R'_1 para cada valor particular de la relación $\frac{l}{d}$, y así se ha hecho en la tabla del núm. 718, que contiene también los coeficientes de trabajo R' , correspondientes, obtenidos tomando $\frac{1}{6}$ de R'_1 . Los problemas de resistencia se podrán así resolver por la fórmula

$$P = R'_1 \omega \quad (6).$$

729. Columnas huecas. — Como en las de fundición, se considera que la resistencia es igual á la diferencia de resistencias de dos columnas macizas, de diámetros d (exterior de la hueca) y d_1 (interior de la hueca), de modo que será

$$\begin{aligned} P'_0 &= P'_0 - P''_0 \\ P &= P' - P'' \end{aligned}$$

730. Piezas de sección cualquiera. — Se aplica la fórmula de Rankine:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{R' \omega}{1 + B \frac{\omega l^2}{I}} \\ R' &= \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I} \right) \end{aligned} \right\} (7);$$

P es la carga permanente de trabajo ordinario.

Los ingenieros americanos han hecho experiencias, en grande escala, rompiendo vigas de hierro laminadas y compuestas, de formas variadas (lámina 21), y han hallado que la fórmula anterior responde bien á los resultados de las experiencias, asignando los valores numéricos siguientes:

R' = coeficiente de trabajo por compresión, del hierro, en kilogramos por mm.², empleado en ejemplares cortos = 6.

B = coeficiente numérico, cuyo valor es:

	R
<i>Caso I.</i> — Dos bases planas.....	0,00003
<i>Caso II.</i> — Una base plana y otra redondeada ó articulada.....	0,000045

	R
<i>Caso III.</i> — Dos bases redondeadas ó articuladas.....	0,00006
<i>Caso IV.</i> — Un extremo empotrado y otro libre (fig. 15, lám. 26).....	0,00008

ω representa el área de la sección en milímetros cuadrados cuando está en el numerador.

El cociente $\frac{\omega l^2}{I'}$, en el que l representa la longitud de la pieza é I' el menor de los momentos de inercia de la sección recta, dará el mismo valor siempre que se refieran ω , l y I' á la misma unidad de medida, cualquiera que sea ésta, pues tanto el dividendo como el divisor son productos de cuatro factores.

Para el acero dulce de construcciones, se puede hacer $R' = 9$ kilogramos por mm.².

Resumiendo, las fórmulas son:

$$P = \frac{6 \omega}{1 + B \frac{\omega l^2}{I}} \quad (8) \text{ para el hierro,}$$

$$P = \frac{9 \omega}{1 + B \frac{\omega l^2}{I}} \quad (9) \text{ para el acero,}$$

teniendo B los valores antes citados.

731. Resolución de los problemas. Problema primero. Conocidas la sección del prisma (ω) y la longitud (l), calcular la carga (P). — No hay más que sustituir los valores de ω , l y I' en las fórmulas anteriores. Se seguirá en un todo el procedimiento explicado en el núm. 719 para columnas macizas y huecas de fundición, y piezas de sección cualquiera.

La tabla del núm. 719 permite resolver en seguida el problema en lo relativo á columnas macizas de bases planas.

Para las columnas huecas, la carga P que pueden soportar es la diferencia de las P' y P'' correspondientes á las columnas macizas de diámetro d (exterior de las huecas) y d_1 (interior de las huecas). Con el fin de facilitar los cálculos, hemos formado la tabla siguiente, que da los valores de P para diversos valores del diámetro exterior d , altura l y espesor e .

TABLA

DE VALORES DE P (CARGA DE TRABAJO ORDINARIO, EN KILOGRAMOS) PARA COLUMNAS HUECAS,
DE BASES PLANAS, DE RIERRO

DIÁMETRO exterior d en mm.	ESPESOR e en mm.	ÁREA de la sección o en mm. ²	PESO del metro lineal en kilogramos.	CARGAS P , EN KILOGRAMOS, QUE PUEDEN SOPORTAR LAS COLUMNAS PARA ALTURAS, EN METROS, DE								
				1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0		
40.	3	349	2,75	1124	928	705	489	»	»	»	»	»
	4	452	3,55	1455	1202	913	633	»	»	»	»	»
	6	640	5,00	2061	1702	1293	896	»	»	»	»	»
	8	804	6,30	2589	2139	1624	1126	»	»	»	»	»
	10	942	7,35	3033	2506	1903	1319	»	»	»	»	»
	3	537	4,20	1906	1729	1504	1316	1085	859	»	»	»
	4	704	5,50	2499	2267	1971	1725	1422	1126	»	»	»
	6	1018	7,95	3614	3278	2850	2494	2056	1629	»	»	»
	8	1307	10,20	4640	4208	3660	3202	2640	2091	»	»	»
	10	1571	12,25	5577	5059	4399	3849	3173	2514	»	»	»
60.	4	955	7,45	3581	3533	3073	2546	2110	1719	1386	1096	849
	6	1385	10,90	5231	4808	4402	4157	3711	3278	2878	2490	2130
	8	1810	14,15	6787	6317	5828	5394	4815	4253	3620	3020	2460
	10	2199	17,15	7974	7674	7081	6553	5849	5168	4398	3620	2960
	12	2563	20,00	9611	8945	8253	7638	6818	6023	5126	4260	3500
	15	3063	23,90	11486	10690	9863	9128	8148	7198	6126	5060	4100
	18	3506	27,35	13147	12236	11289	10448	9326	8239	7012	5860	4800
	3	916	7,15	3664	3298	3100	2949	2748	2382	2036	1710	1410
	4	1206	9,40	4824	4342	4161	3883	3618	3136	2710	2310	1940
	6	1772	13,85	7088	6379	6113	5706	5316	4607	4010	3460	2960
100.	8	2313	18,05	9252	8327	7980	7448	6936	6014	5190	4410	3690
	10	2828	22,05	11312	10181	9757	9106	8484	7353	6210	5210	4360
	12	3318	25,90	13273	11945	11447	10684	9954	8627	7210	6010	5010
	15	4006	31,25	16024	14422	13821	12899	12018	10416	8710	7210	6010
	18	4638	35,20	18552	16697	16001	14934	13914	12059	10210	8410	7010
	3	1102	8,60	4739	4121	3923	»	3548	»	»	»	»
	4	1457	11,40	6265	5449	5187	»	4691	»	»	»	»
	6	2149	16,80	9241	8087	7650	»	6920	»	»	»	»
	8	2815	21,95	12104	10528	10021	»	9064	»	»	»	»
	10	3455	26,95	14856	12922	12300	»	11125	»	»	»	»
120.	12	4071	31,75	17505	15235	14493	»	13109	»	»	»	»
	14	4662	36,40	20047	17436	16597	»	15012	»	»	»	»
	17	5501	42,90	23654	20574	19584	»	17713	»	»	»	»

732. Problema segundo. Siendo dadas la fuerza de compresión P y la longitud l de la pieza comprimida, determinar las dimensiones de la sección transversal.—*Columnas macizas.*—Se emplean las fórmulas (3) y (4), que dan lugar á una ecuación bicuadrada, en d , que se resolverá del mismo modo que para las columnas macizas de fundición (núm. 721). Puede utilizarse, con grande economía de tiempo, la tabla 1.^a del núm. 719.

Columnas huecas.—Se aplicará el procedimiento explicado para las de fundición (núm. 723); el espesor e puede ser mucho menor, para el hierro y el acero, que el asignado como límite inferior para las columnas huecas de fundición, porque no hay las razones de dificultades de moldeo que en estas existen. La tabla anterior resuelve con prontitud el problema.

Vigas laminadas ó compuestas, de sección cualquiera.—Las fórmulas (8) y (9) pueden escribirse así:

$$6 = \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (10) \quad (\text{Hierro}).$$

$$9 = \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (11) \quad (\text{Acero}).$$

$\frac{P}{\omega}$ deberá ser menor que 6 en la (10) y que 9 en la (11), puesto que el factor comprendido en el paréntesis es mayor que la unidad: y como $\frac{P}{\omega}$ representa el coeficiente de trabajo aparente de la pieza comprimida, coeficiente que hemos representado por R'_1 , resulta que

$$R'_1 = \frac{P}{\omega} < 6 \text{ para el hierro,}$$

$$R'_1 = \frac{P}{\omega} < 9 \text{ para el acero.}$$

De aquí se deduce el procedimiento que hemos de seguir para resolver el problema. Supongamos que se trata de piezas de hierro; para las de acero no habrá más que sustituir el número 6 por el 9.

Elíjase un coeficiente de trabajo R'_1 , menor que 6, y determínese un primer valor de ω

$$\omega = \frac{P}{R'_1}$$

que vendrá expresado en milímetros cuadrados.

Fórmese una sección transversal, de la forma pedida, que tenga por área el valor de ω anterior; hállese el menor de los momentos de inercia I' y sustitúyanse todas estas cantidades en la ecuación (10).

Si el segundo miembro es de valor no muy diferente de 6 se debe dar el problema por resuelto, y el coeficiente de trabajo efectivo será el valor de dicho segundo miembro. Si fuese bastante mayor que 6, será prueba de que hemos tomado un primer valor de R'_1 , demasiado grande, y se le dará otro R''_1 , menor, con el cual se determinará $\omega' = \frac{R''_1}{P}$, nuevo valor del área de

la sección transversal, que se organizará otra vez, se determinará su momento de inercia mínimo I' , y se sustituirán estas cantidades en la ecuación (10) que ha de quedar satisfecha. En caso de que el segundo miembro de la ecuación (10) fuese menor que 6, sería prueba de que habíamos asignado á R'_1 , valor demasiado pequeño y habría que aumentarlo.

Después de un pequeño número de tanteos se llega á un valor de ω tal que el segundo miembro de la ecuación (10) es igual ó poco diferente de 6, y entonces el problema está resuelto con la sección hallada, siendo el coeficiente real de trabajo el valor del citado segundo miembro.

En los proyectos solamente se presenta, como comprobación de los cálculos, el valor de $\frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right)$ que es el del coeficiente efectivo de trabajo,

Ejemplo. Pieza de acero dulce, de bases planas, comprimida con una fuerza $P = 42000$ kilogramos; $l = 8$ metros.

La viga va á componerse de dos barras laminadas en U y de dos palastros (fig. 38, lám. 26).

El menor de los momentos de inercia, es el relativo al eje AB .

El acero que vamos á emplear es capaz de un coeficiente de trabajo de $R' = 9$ kilogramos por mm.²

Primer tanteo.

Hagamos $R'_1 = 7$ kilogramos por mm.²

El área ω de la sección transversal deberá ser entonces $\omega = \frac{42000}{7}$ ó sea $\omega = 6000$ mm.² Formaremos la sección del modo siguiente:

	Área en mm. ²
2 hierros en U , de $\frac{130 \times 50}{4}$	3600
2 palastros de 240 mm. \times 5 mm.	2400
	$\omega = 6000$.

El momento de inercia I' , expresando en metros las dimensiones, vale:

Por los dos hierros en U	0, 000 008 800
Por los palastros [fórmula $\frac{1}{12} a (b^3 - b'^3)$].....	0, 000 010 940
	$I' = 0, 000 019 740$

Para el caso presente, $B = 0,00003$, y $l^2 = 64$.

$$1 + 0,00003 \frac{\omega l^2}{I'} = 1 + 0,56.$$

De modo que

$$R'_1 \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) = 7 \times 1,56 = 10,92 > 9.$$

Resulta un coeficiente efectivo de trabajo demasiado grande. Habrá que aumentar ω , ó, lo que es lo mismo, disminuir R'_1 .

Segundo tanteo.

$$R'_1 = 5$$

$$\omega = \frac{42000}{5} = 8400 \text{ mm.}^2$$

Formaremos la sección del modo siguiente:

	Área.
2 U de $\frac{130 \times 50}{7}$	3600
2 palastros de 300×8	4800
	$\omega = 8400$

I' vale.	{	Por las dos U	0, 000 0088
		Por las dos planchas.....	0, 000 0228

$$I' = 0, 000 0316$$

$$\frac{0,00003 \omega l^2}{I'} = 0,48.$$

De donde

$$R'_1 (1 + 0,48) = 5 \times 1,48 = 7,40 < 9.$$

Este valor es demasiado pequeño; hemos disminuído demasiado R'_1 .
Tercer tanteo.

$$R'_1 = 6. \quad \omega = \frac{42000}{6} = 7000.$$

Formaremos la sección con:

	Áreas.
Dos U de $\frac{130 \times 50}{7}$	3600
Dos palastros de 243×7	3400
	$\omega = 7000$

Determinación de I' :

Por las dos U	0, 000 008 8
Por los palastros.....	0, 000 015 9

$$I' = 0, 000 024 7$$

$$0,00003 \frac{l^2 \omega}{I'} = 0,52$$

$$R'_1 (1 + 0,52) = 6 \times 1,52 = 9,12.$$

Valor aceptable, poco diferente de 9.

Las variaciones de R' , por las de R'_1 , son tanto menores cuanto menor sea l . Para valores pequeños de l , el número de tanteos será corto, si se tiene cuidado de tomar un primer valor de R'_1 poco menor que 6 ó 9.

En el ejemplo anterior hemos variado únicamente las dimensiones de los palastros en los tanteos, pero también podría haberse hecho la variación en las dimensiones de las barras en U ; de modo que se pueden obtener muchas soluciones del problema, siendo preferible la que dé menor valor para ω .

Si en vez de aceptar como coeficientes reales de trabajo los números 6 y 9 se eligiese otro diferente R' , las fórmulas (10) y (11), adaptándolas á esta condición, serían:

$$R' = \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (12)$$

$$R' = R'_1 \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (13)$$

732' Piezas comprimidas y extendidas alternativamente. Piezas comprimidas por fuerzas repetidas de valor variable. — En este caso, que ocurre en los puentes y en otras clases de entramados, los problemas de piezas comprimidas se resolverán del modo explicado en los núms. 731 y 732, haciendo uso de las fórmulas (12) y (13) del núm. 732, sin más que sustituir R' , primer miembro de dichas fórmulas, por los coeficientes de trabajo que hemos formado en el núm. 659 para los casos de reiteración de esfuerzos de igual u opuesto signo. Estos coeficientes de trabajo, refiriéndonos siempre al hierro y al acero, pueden obtenerse por las fórmulas de Séjourné [(11) á (14) del núm. 659], por las de Weyrauch, Launhardt y Almgvist (número 659, págs. 706 á 708), ó por las del Reglamento Oficial francés de 29 de Agosto de 1891 (pág. 709).

Dando á R' el valor correspondiente, en las fórmulas (12) y (13) del número 732, se podrá resolver fácilmente el problema directo (determinar P , conociendo l , ω y, por tanto, I'), ó el recíproco (siendo datos P y l , hallar la sección transversal del prisma).

733. Formas diversas de las piezas de hierro y de acero sometidas á compresión. — Son de frecuente uso las piezas largas de hierro ó de acero, sometidas á compresión, empleándose especialmente las vigas compuestas de palastros y hierros laminados, de formas tubulares, como más convenientes para la resistencia (núm. 689). Las aplicaciones más usuales son á entramados de edificios, y á las grandes vigas de puentes, en los sistemas articulados creados por los ingenieros americanos (*).

La lám. 21 contiene las formas de sección más comunmente empleadas: las figs. 45 á 51 representan disposiciones variadas de las llamadas *columnas Fénix*; y la 44, el detalle de las *columnas Piper*.

(*) Vigas Fink, Bollman, Murphy-Wipple, Linville, etc.

3. OTROS CASOS DE PIEZAS COMPRIMIDAS

PIEZAS SOMETIDAS Á COMPRESIÓN Y Á FLEXIÓN

PIEZAS COMPRIMIDAS POR FUERZAS REPARTIDAS Á LO LARGO DEL EJE

734. Sea AB (fig. 34, lám. 26) la pieza comprimida por las fuerzas P aplicadas á los extremos, y las P_1, P_2, P_3, \dots etc., que actúan en los puntos intermedios A_1, A_2, A_3, \dots etc. Si estas últimas están uniformemente repartidas (como sucede, entre otros casos, con el peso propio del prisma comprimido) y llamamos:

p = fuerza por unidad de longitud.

l = longitud AB .

ω = área de la sección recta del prisma;

la fuerza de compresión, por unidad superficial de sección, independientemente de toda flexión lateral, es:

Punto A	$\frac{P}{\omega}$
Punto B	$\frac{P + p l}{\omega}$
Punto medio C	$\frac{P + \frac{1}{2} p l}{\omega}$
Punto cualquiera de abscisa x	$\frac{P + p (l - x)}{\omega}$

La compresión en el punto medio C , causada por las fuerzas P de los extremos, es, según hemos visto en el núm. 681 (ecuación 5),

$$\frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right);$$

de modo que la compresión definitiva en C , es, tomando en consideración el peso propio $p l$,

$$R' = \frac{p l}{2 \omega} + \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{l^2 \omega}{I'} \right) \quad (1).$$

R' es un máximo, porque si de C pasamos á otro punto inmediato inferior, la disminución que experimenta el segundo sumando es mayor que el pequeño aumento

$\frac{p \left(\frac{1}{2} l - x \right)}{\omega}$ de compresión debido al peso propio.

En el caso de que no existan más fuerzas que las p , se supone trasladada á los extremos la fuerza total repartida $p l$, y tendríamos la ecuación

$$R' = \frac{p l}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (2).$$

Esta hipótesis, aunque no es exacta, conduce á resultados beneficiosos para la resistencia y para la sencillez de los cálculos.

Las ecuaciones (1) y (2) resuelven los problemas de resistencia, poniendo en vez de R' el coeficiente de trabajo por compresión simple.

735. Cuando las fuerzas P_1, P_2 , etc., sean aisladas, y los puntos A_1, A_2 , etcétera, estén fijos, se aplicará á cada uno de los trozos las fórmulas conocidas, dadas en los artículos anteriores, teniendo presente que las fuerzas que producen flexión lateral son:

Trozo $A A_1$	P
» $A_1 A_2$	$P + P_1$
» $A_2 A_3$	$P + P_1 + P_2$
etc.	etc.

Si los puntos A_1, A_2 , etc., no son fijos, se supondrán trasladadas las fuerzas P_1, P_2 , etc., al extremo más próximo, entrando así en el caso gene-

ral, pero siendo $P + P_1 + P_2$,... y no P , la fuerza capaz de producir flexión lateral, con lo cual resulta beneficio para la resistencia y para la facilidad de los cálculos.

PIEZAS SOMETIDAS Á COMPRESIÓN Y Á FLEXIÓN

736. Sea AB (fig. 37, lám. 26) una pieza comprimida según su eje y sometida además á fuerzas de flexión, uniformemente repartidas, á razón de p por unidad lineal.

El momento máximo de flexión M_0 producido por las fuerzas p , tiene lugar en el punto medio C y vale $\frac{1}{8} p l^2$ (núm. 323). La compresión máxima por unidad superficial, debida á la flexión, que corresponderá á las fibras de la sección C más alejadas de la capa neutra (ó sea á las que distan $v = \frac{1}{2} b$, siendo b la dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión), tendrá por valor (núm. 460):

$$\frac{M_0 v}{I} = \frac{M_0 b}{2 I} = \frac{p l^2 b}{16 I}.$$

En el mismo punto medio C , la compresión por unidad superficial, producida por la fuerza P , es

$$\frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right).$$

En definitiva: la presión máxima por unidad superficial por todos conceptos, es la suma de las dos cantidades anteriores; igualándola al coeficiente de trabajo R' por compresión simple, tendremos la ecuación de resistencia

$$R' = \frac{p l^2 b}{16 I} + \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (3),$$

y, en general, cualquiera que sea la naturaleza de las fuerzas de flexión, se supondrá que el momento máximo M_0 corresponde al punto medio, y se aplicará la ecuación

$$R' = \frac{M_0 b}{2 I} + \frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (4)$$

que servirá para resolver los problemas, dando á R' y á B los valores numéricos convenientes.

Si el momento máximo de flexión M_0 , no tiene lugar en el punto medio, se supondrá trasladado á dicho punto por razón de sencillez en los cálculos, con lo cual resultará, además, beneficio para la resistencia.

Observaremos que en el sumando $\frac{M_0 b}{2 I}$, correspondiente á la flexión, I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto á un eje que pasando por su centro de gravedad sea normal al plano de flexión. En el segundo sumando, que corresponde á la compresión directa, I' es el menor de los momentos de inercia de la sección transversal, si la viga tiene libertad para flexarse lateralmente en cualquiera dirección por efecto de dicha compresión, y tendrá el mismo valor que en el sumando $\frac{M_0 b}{2 I}$ cuando esté prevenida toda flexión lateral y ésta solamente pueda operarse en el plano del momento de flexión M_0 .

Los problemas se resuelven del modo explicado en el núm. 587. Se fija un coeficiente de trabajo R'_1 , un poco menor que el ordinario, y se determina la sección transversal de la viga como si solamente estuviese sometida á flexión con arreglo á lo preceptuado en los núms. 508 y 523. Así tendremos:

$$\frac{I}{c} = \frac{M_0}{R'_1} \quad \text{ó} \quad R'_1 = \frac{M_0 c}{I} = \frac{M_0 b}{2 I}$$

Determinada la sección transversal del prisma, se hallará su área ω , su menor momento de inercia I' , y se podrá formar el término

$$R'_2 = \frac{P}{\omega} \left(1 + B \omega \frac{l^2}{I'} \right)$$

que representa la compresión por unidad superficial debida á la compresión directa P .

Si $R'_1 + R'_2$ es poco diferente del coeficiente ordinario de trabajo por compresión R' , el problema está resuelto; pero si dicha suma es demasiado grande, ó demasiado pequeña, se disminuirá en el primer caso ó aumentará en el segundo el valor asignado á R'_1 , para el cálculo de la viga por flexión y se repetirán los cálculos de determinación de R'_2 para ver si la nueva suma difiere poco de R' .

737. Prisma empotrado en un extremo B y sometido á la fuerza oblicua F que pasa por el punto L . — Sea AB la fibra media del prisma antes de la deformación, y $A'B$ después de verificada ésta (fig. 35, lám. 26).

Llamemos:

l = longitud del prisma AB .

h = la distancia $A'L$.

P = componente de F paralela á AB .

N = ídem íd. normal á AB .

f = flecha AA' .

Para una sección c de ordenadas $ch = x$, $ca = y$, el brazo de palanca de P es $cd = AL - ac = h + f - y$, y el de la fuerza N es $Aa = l - x$.

Igualando la expresión del momento de fuerzas elásticas y la general del momento de flexión, tenemos

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(h + f - y) + N(l - x) \quad (1)$$

Hagamos

$$y' = h + f + \frac{N}{P}(l - x) \quad (2)$$

y

$$y = y' + u \quad (3)$$

Si el valor de y' lo sustituimos en (3), y el y que resulta se sustituye en el segundo miembro de (1), éste queda convertido en $-Pu$; y como de la (3)

se deduce que $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}$, tendremos la ecuación (1) convertida en ésta,

más sencilla:

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -Pu \quad (4)$$

Integrada dos veces, debe resultar una expresión de la forma

$$u = C \operatorname{sen} mx + D \cos mx \quad (5)$$

siendo C y D las dos constantes correspondientes.

En efecto, la segunda derivada de u con relación á x , da

$$\frac{d^2u}{dx^2} = C m^2 \operatorname{sen} m x - D m^2 \operatorname{cos} m x = -m^2 u \quad (6),$$

y comparando (5) y (4) se deduce que debe ser

$$m = \pm \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Tomaremos el signo +, y sustituyendo en (5), será

$$u = C \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{P}{EI}} + D \operatorname{cos} x \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (7);$$

y sustituyendo, finalmente, en (3) los valores de y' (2) y de u (7), tendremos la ecuación finita de la elástica $A'B$.

$$y = h + f + \frac{N}{P}(l - x) + C \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{P}{EI}} + D \operatorname{cos} x \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (8).$$

Falta por determinar las constantes C y D y la flecha f . En cuanto á las dos primeras, observaremos que para $x = 0$, son $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Del valor (8) de y , y de su diferencial de primer orden, igualados á cero, se obtiene:

$$h + f + \frac{Nl}{P} + D = 0 \quad (9)$$

$$-\frac{N}{P} + C \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0 \quad (10),$$

ecuaciones que determinarán C y D .

Sustituyendo los valores de C y D en (8) y observando que para $x = l$ $y = f$, obtendremos, despejando f ,

$$f = h \frac{1 - \operatorname{cos} l \sqrt{\frac{P}{EI}}}{\operatorname{cos} l \sqrt{\frac{P}{EI}}} + \frac{N}{P} \sqrt{\frac{EI}{P}} \left(\operatorname{tg} l \sqrt{\frac{P}{EI}} - l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \quad (11).$$

Consideremos el caso en que f sea de pequeño valor; esto, siendo apreciables los valores de h y de $\frac{N}{P}$, ocurrirá con tal de suponer pequeño el

$$\operatorname{arco} l \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

En esta hipótesis, el coseno puede sustituirse por la unidad, y á más, aplicando los desarrollos

$$\operatorname{cos} z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots \quad \operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \dots$$

en que se desprecian las cuartas potencias de z y las superiores á la cuarta, el valor (11) de la flecha se simplifica y convierte en

$$f = \frac{Pl^2h}{2EI} + \frac{Nl^5}{3EI} \quad (12).$$

738. Cálculos de resistencia. — El prisma está sujeto á un esfuerzo constante, constante para todas las secciones, é igual á N .

Lo está igualmente á una compresión simple longitudinal P , y, por último, á una flexión cuyo momento general para una sección c de ordenadas x é y , vale

$$M = P(h + f - y) + N(l - x) \quad (13),$$

y cuyo momento máximo, en la sección de empotramiento B , vale

$$M_0 = P(h + f) + Nl \quad (14).$$

Todo esto, en la hipótesis de pequeños valores del arco $l \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ó de la flecha f .

Llamando k' el coeficiente de trabajo y b el lado de escuadría paralelo á la fuerza N , ω la sección é I el momento de inercia, la compresión de la fibra más cargada, en la sección B , será:

$$\frac{P}{\omega} \text{ por la compresión directa;}$$

$$\frac{M_0 b}{2I} \text{ por la flexión.}$$

La ecuación de resistencia será; pues,

$$R' = \frac{P}{\omega} + \frac{M_0 b}{2I} \quad (15) \quad (*)$$

Cuando $P = 0$, es $M_0 = Nl$, y estamos en el caso de pieza empotrada en un extremo y cargada en el otro.

Si $N = 0$, resulta $M_0 = P(h + f)$.

739. Método de resolución del problema. Primer problema. — Si se trata de resolver el problema directo, conocidos P y N calcular la escuadría, nos encontramos con que la ecuación (15) que nos podría dar el valor de ω , contiene la cantidad M_0 que es función de f (ecuación 14), siendo así que f es función de I (ecuación 12), y, por lo tanto, de las dimensiones de la sección transversal.

Se puede resolver el problema del siguiente modo: en general, f tiene poco valor, y así lo hemos supuesto en los cálculos anteriores; de modo que siendo f pequeño en comparación de h podremos suponer f cero, y entonces el valor $M_0 = Ph + Nl$ puede ser formado directamente. Con él, y haciendo uso de la ecuación (15), calcularemos, ya directamente, ya por tanteos, las dimensiones de la sección transversal contenidas en los valores de ω ó I , esto es, determinaremos una sección transversal tal que sus valores de ω ó I den un valor R' del primer miembro aceptable como coeficiente de trabajo.

Sustituyendo I en la ecuación (12), formaremos el valor de la flecha f , y si fuese pequeño relativamente á h admitiremos los resultados obtenidos.

(*) En el núm. 677 consideramos rota toda pieza comprimida que empezaba á flexarse, y aquí admitimos posible la flexión lateral, en buenas condiciones de resistencia, esto es, para valores aceptables de R' . Aparece una contradicción que no existe realmente.

En las piezas comprimidas según su eje, se necesita un valor muy considerable de la fuerza de compresión P para que se inicie la flexión lateral, y entonces, por pequeña que sea la flecha f , que hace de brazo de palanca, el momento Pf es muy grande y da para R' valores enormes. Pero en el problema actual, como hay un brazo de palanca h para las fuerzas P y N , aunque éstas sean pequeñas producen flexión, y su momento M_0 satisface la ecuación (15) sin que los aumentos de M_0 , causados por los crecimientos f del brazo de palanca h , sean nunca de consideración ni conduzcan á valores grandes de R' .

En realidad, la ecuación de resistencia debería ser la (4) del núm. 736; pero el efecto producido por el momento de flexión M_0 es tan superior al que produce la compresión directa P , que el sumando $\frac{P}{\omega}$, multiplicado ó no por el factor $(1 + B \frac{\omega l^2}{I})$, es muy pequeño si se compara con $\frac{M_0 b}{2I}$. Por esta razón, en obsequio á la sencillez de los cálculos, empleamos la ecuación (15).

porque así lo habíamos supuesto, y porque el aumento de M_0 por la consideración de f sería tan insignificante que modificaría muy poco los valores de ω ó I ó sea la escuadría hallada.

Si f tuviese valor apreciable, se sustituirá en la ecuación (14) para obtener un nuevo valor de M_0 , el cual, sustituido en la (15), nos dará un segundo valor de escuadría que ya podrá aceptarse.

Para facilitar todavía más la resolución del problema, diremos algo que simplifica la determinación de la escuadría dada por la ecuación (15).

En dicha ecuación, el segundo sumando del segundo miembro es el que da valores mayores, ó contribuye más poderosamente para la formación del primer miembro R' , como que corresponde al trabajo por flexión. Calcúlese, pues, la escuadría, atendiendo únicamente á la flexión producida por el momento máximo M_0 , haciendo uso de la fórmula $\frac{R' I}{\frac{1}{2} b} = M_0$, sin más

que dar á R' un valor un poco menor que el coeficiente de trabajo ordinario, en previsión de que con el incremento $\frac{P}{\omega}$, y aunque después se tengan en cuenta f para determinar M_0 , resulte un valor aceptable para el coeficiente de trabajo R' definitivo de la ecuación (15).

Ejemplo. Pieza de madera de sección rectangular, siendo su longitud $l = 4$ metros, $h = 0,6$ metros, y sometida á una fuerza cuyos componentes son:

$$P = 400 \text{ kilogramos} \quad \text{,,} \quad N = 200 \text{ kilogramos.}$$

El lo haremos igual á 10^9 kilogramos por m.²

El momento de flexión máximo, prescindiendo de la flecha f , es

$$M_0 = Ph + Nl = 400 \times 0,6 + 200 \times 4^m = 1040 \text{ kilográmetros.}$$

La escuadría correspondiente á este momento de flexión será dada

por $\frac{R' I}{r} = M_0$, que para la sección rectangular de lados a y b , es

$$\frac{R' a b^2}{6} = M_0.$$

Hagamos $R' = 500000$ kilogramos por m.², cantidad menor que la de

600000 generalmente empleada, y suponiendo $a = 0,6 b$, para quitar la indeterminación, se obtiene:

$$\frac{500000 \times 0,6 b^3}{6} = 1040,$$

de donde

$$b = 0^m,275 \text{ y } a = 0,6 b = 0^m,165;$$

entonces resulta

$$\omega = 0^m^3,045375,$$

de modo que

$$\frac{P}{\omega} = \frac{400}{0,045375} = 8820.$$

Luego el coeficiente de trabajo definitivo, despreciando el valor de f , es:

Por la flexión, debido á M_0 500000 kilogramos.

Por la compresión directa..... 8820 »

$$R' = 508820 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

Calculemos el valor de la flecha para la escuadría hallada.

$$I = \frac{1}{12} a b^3 = \frac{1}{12} 0,165 \times 0,275^3 = 0,000288 \text{ en metros.}$$

$$EI = 1000\ 000\ 000 \times 0,000\ 288 = 288\ 000$$

$$f = \frac{Pl^2h}{2EI} + \frac{Nl^3}{3EI} = \frac{400 \times 4^2 \times 0,6}{2 \times 288000} + \frac{200 \times 4^3}{3 \times 288000}$$

$$f = 0^m,007 + 0^m,015 = 0^m,022.$$

Como se ve, el valor de f es despreciable. El aumento de momento de flexión sería tan sólo $Pf = 400 \times 0^m,022 = 8,8$ kilográmetros; de modo que el aumento de R' por este concepto es insignificante.

Pero si f resultase con valor apreciable, se formaría el verdadero valor de $M_0 = P(h + f) + Nl$ y se sustituiría en la ecuación (15) para ver si R' es todavía aceptable, en cuyo caso son buenos el valor de ω y la escuadría hallada, y en caso contrario se calculará una nueva escuadría valiéndose del nuevo valor de M_0 .

Ejemplo de pieza de hierro. — Viga doble T laminada: $l = 4$ metros. $P = 800$ kgs. » $N = 400$, $h = 1$ metro, $M_0 = Ph + Nl = 2400$ kilográmetros.

Hagamos $R' = 6 \times 10^4$ por $m.^2$, ó sea 6 kilogramos por $mm.^2$, y la viga de $\frac{300 \times 80}{12}$, en que $I = 0,00006$ y $v = 0^m,15$ satisface á la ecuación

$$\frac{R' I}{v} = M_0.$$

Dicha viga tiene $\omega = 0^m^3,005232$, de modo que

$$\frac{P}{\omega} = 153000 \text{ kilogs. por m.}^2.$$

Así, pues, resulta para { Por la flexión..... 6000000

coeficiente de trabajo. { Por compresión directa. 153000

$$R' = 6153000$$

valor aceptable.

Para flecha resulta, siendo $E = 18 \times 10^9$ y $EI = 1080000$,

$$f = 0,006 + 0,008 = 0^m,014;$$

valor despreciable comparado con el de $h = 1$ metro.

740. Segundo problema. Conocida la viga calcular la carga. — Supondremos también $f = 0$, en cuyo caso

$$M_0 = Ph + Nl,$$

y sustituido este valor en la ecuación (15), resulta

$$R' = \frac{P}{\omega} + \frac{(Ph + Nl)b}{2I}.$$

Ecuación en la cual son conocidos R' (coeficiente de trabajo adoptado), ω , I y b porque dependen de la sección, y h y l como datos del problema. Las incógnitas son P y N ; de modo que el problema es indeterminado. Se hará determinado asignando valor á una de ellas, ó bien dando el valor del ángulo FLP (fig. 35, lám. 26) que forma la resultante F con el eje primitivo del prisma.

VIII

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS

SOMETIDAS Á FUERZAS OBLICUAS Á SU EJE

TEORÍA GENERAL

741. Cuando las fuerzas que actúan en el plano longitudinal de simetría de una viga son oblicuas con respecto á su eje, producen momentos de flexión, compresiones ó extensiones y esfuerzos cortantes, cuyo valor interesa conocer para poder resolver los problemas de resistencia y de rigidez.

Sea HS (fig. 29, lám. 27) una viga solicitada por las fuerzas $P, P', P'',$ etcétera, contenidas en el plano longitudinal de simetría, y oblicuas al eje HS .

Consideremos un plano transversal cualquiera, tal como el AB , y las fuerzas que están á un lado de este plano, á la derecha por ejemplo (*). Llamemos $d, d', d'',$ á las distancias $Oa, Ob, Oc,$ y $\alpha, \alpha',$ etc., á los ángulos que forman las fuerzas con el eje, medidos por arcos trazados de izquierda á derecha, según manifiesta la figura.

Descomponiendo cada una de las fuerzas $P, P',$ etc., normal y paralelamente al eje de la viga, las componentes normales $+P \operatorname{sen} \alpha, -P' \operatorname{sen} \alpha', -P'' \operatorname{sen} \alpha''$ producen en ella flexión, y las componentes paralelas $-P \operatorname{cos} \alpha, +P' \operatorname{cos} \alpha', -P'' \operatorname{cos} \alpha''$, originan compresión ó extensión, según el signo de la suma algebraica de dichos componentes.

Consideraremos positivos los momentos parciales de flexión $dP \operatorname{sen} \alpha, d'P' \operatorname{sen} \alpha',$ etc., cuando produzcan en la viga, obrando solos, curvatura de concavidad dirigida hacia la parte superior, y les asignaremos signo menos en el caso de que la concavidad fuese del lado opuesto.

También daremos signo *más* á las componentes paralelas al eje que pro-

(*) Es indiferente tomar en consideración las de uno ú otro lado, porque los momentos de flexión, esfuerzos cortantes, compresiones, etc., de unas y otras con respecto al plano AB , son del mismo valor; de lo contrario habría una fuerza ó un par resultante, y la viga no estaría en equilibrio como se ha supuesto.

ducen compresión, esto es, á las que se dirigen al plano AB , y signo *menos* á las de dirección opuesta, productoras de extensiones.

Todos los momentos parciales de flexión serán de la forma $+dP \operatorname{sen} \alpha$, y las componentes paralelas al eje tendrán por expresión $+P \cos \alpha$, teniendo como signo definitivo el que corresponda á $\operatorname{sen} \alpha$, y á $\cos \alpha$, según la magnitud gradual de α medida del modo señalado en la figura.

Resulta, en definitiva, que para la sección AB las extensiones ó compresiones, momentos de flexión y esfuerzos cortantes, tienen los valores siguientes:

Extensión ó compresión. $T = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots$
 Momento de flexión. $M = dP \operatorname{sen} \alpha + d'P' \operatorname{sen} \alpha' + d''P'' \operatorname{sen} \alpha'' + \dots$
 Esfuerzo cortante. $C = P \operatorname{sen} \alpha + P' \operatorname{sen} \alpha' + P'' \operatorname{sen} \alpha'' + \dots$

742. Si T es fuerza de extensión, la fatiga molecular máxima, en la sección AB , es de extensión también, y tiene por valor la suma $\frac{Mv}{I} + \frac{T}{\omega}$ (núm. 586). Cada uno de estos sumandos es variable de una á otra sección, y para la resistencia es necesario que el máximo de la suma no sea mayor que R , coeficiente de trabajo por extensión, es decir,

$$R = \text{máximo de } \left(\frac{Mv}{I} + \frac{T}{\omega} \right),$$

cuyo máximo depende exclusivamente de M y T en las piezas prismáticas, porque I , ω y v son constantes; de modo que si llamamos M_1 y T_1 , los valores de M y T correspondientes á la sección en que la suma anterior es un máximo, tendríamos para ecuación de resistencia

$$R = \frac{M_1 v}{I} + \frac{T_1}{\omega}.$$

Cuando en una misma sección coinciden el máximo de M (M_0) y el de T (T_0), la ecuación de resistencia será

$$R = \frac{M_0 v}{I} + \frac{T_0}{\omega}.$$

Si no se verifica esta coincidencia, puede suponerse que existe, en obsequio de la resistencia y de la brevedad de los cálculos.

Si T es fuerza de compresión, tendremos, llamando R' al coeficiente de trabajo correspondiente,

$$R' = \frac{M_1 v}{I} + \frac{T_1}{\omega},$$

siendo M_1 y T_1 el momento de flexión y la compresión en la sección en la cual el segundo miembro es un máximo; ó bien

$$R' = \frac{M_0 v}{I} + \frac{T_0}{\omega} \quad (1),$$

cuando los máximos M_0 y T_0 coinciden en una sección. M_0 es el momento máximo de flexión y T_0 la compresión total máxima. En obsequio á la resistencia y á la sencillez de los cálculos, se emplea la fórmula (1), aun cuando M_0 y T_0 no correspondan á una misma sección.

En realidad estas ecuaciones son aplicables solamente á piezas cortas, en que no sea de temer la flexión lateral por efecto de la compresión T_0 . Cuando la relación de la longitud al lado menor de escuadría sea mayor que 10 ó 12 unidades, hemos visto ya (núm. 687) que la presión $\frac{P}{\omega}$ por unidad superficial, aplicada á los extremos, se convierte en $\frac{P}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right)$ que es mayor, es decir, que el peligro de flexión lateral equivale á un aumento en la compresión efectiva por unidad de superficie; de modo que si suponemos que la compresión máxima T_0 está aplicada en los extremos de la viga y que el momento máximo de flexión M_0 tiene lugar en el punto medio de ésta, para ponernos en las condiciones más desfavorables de resistencia (núm. 736), la ecuación (1) debiera sustituirse por esta otra:

$$R' = \frac{M_0 v}{I} + \frac{T_0}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right).$$

Recordaremos que en esta fórmula, I representa el momento de inercia de la sección transversal con respecto á un eje que, pasando por su centro de gravedad es normal al plano de flexión, é I' el menor de los momentos de inercia de dicha sección (núm. 736). Así, por ejemplo, cuando la viga sea de

forma de doble T , siendo el alma paralela al plano de flexión, I es el momento de inercia con respecto al eje que manifiesta la fig. 21 (lám. 14), ó I' el que señala la fig. 31; para la sección dibujada en la fig. 17 (lám. 15), I se refiere al eje 1, ó I' al eje 2.

La cantidad $\frac{T_0}{\omega}$ es, en general, de pequeño valor en comparación del que tiene $\frac{M_0 v}{I}$, especialmente para las secciones circulares, cuadradas y rectangulares de lados a y b poco diferentes. Puede suceder, sin embargo, que el segundo sumando de la fórmula anterior llegue á tomar valores muy grandes, á pesar de la pequeñez del factor $\frac{T_0}{\omega}$, y esto debido á que el otro factor, $1 + B \frac{\omega l^2}{I'}$, alcance gran magnitud; así sucede cuando I' es muy pequeño, como tiene lugar en las secciones de figura muy alargada (lám. 14, figs. 28 y 33; lám. 21, figs. 1.^a á 10).

Para conciliar la brevedad y la exactitud de los cálculos, en las aplicaciones, haremos uso de las tres fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad R' &= \frac{M_0 v}{I} \\ (b) \quad R' &= \frac{M_0 v}{I} + \frac{T_0}{\omega} \\ (c) \quad R' &= \frac{M_0 v}{I} + \frac{T_0}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \end{aligned} \right\} (2).$$

Emplearemos la primera (a) cuando se trate de piezas de madera, de sección circular, cuadrada ó rectangular de lados poco diferentes, porque el segundo sumando de R' es despreciable (véase ejemplo 1.^o del núm. 767).

Haremos uso de la segunda (b) en el cálculo de piezas metálicas, en las que el valor de I' , menor de los momentos de inercia, sea poco diferente de I . En este caso se encuentran:

1.^o Las secciones de forma tubular (lám. 21, figs. 11 á 13, 15 á 17, 19, 20 y 26, 28 y 29, 31 á 35, 38 á 43, 57 á 59).

2.^o Secciones doble T , U ó T sencilla, laminadas, de tablas anchas (figura 21, lám. 14), ó de forma de cruz (fig. 32, lám. 14). Vigas compuestas, de sección cruciforme (lám. 21, figs. 23 y 25).

Aplicaremos, finalmente, la tercera de las fórmulas anteriores (c) á las

vigas laminadas de sección alargada y tablas estrechas, ya sean de forma T sencilla ó doble, U , etc. (figs. 1.^a á 8.^a, lám. 21), y á las vigas compuestas de forma de doble T ó de T sencilla (lám. 14, figs. 23, 28 y 33; lám. 21, figuras 14 y 18, 52 á 56).

743. En las deformaciones ejerce influencia la fuerza T ; pero es despreciable, como vamos á demostrar.

Sea O (fig. 25, lám. 27) el centro de curvatura del arco de elástica ac , correspondiente á la flexión, que tiene una longitud dx . Por efecto de la fuerza T , la parte ac se alargará ó acortará una cierta cantidad l , moviéndose la sección CD paralelamente á sí misma; de modo que O se habrá trasladado á O' , por ejemplo, suponiendo para fijar las ideas, que T es fuerza de compresión. El valor de $l = bc$ es (núms. 185 y 199):

$$bc = \frac{T dx}{E \omega}$$

El radio de curvatura $Oa = \rho$ se ha convertido en $O'a = \rho'$, y tenemos la proporción siguiente:

$$\frac{O'a}{Oa} = \frac{ab}{ac} = \frac{ac - bc}{ac} = \frac{dx \left(1 - \frac{T}{E \omega} \right)}{dx}$$

ó

$$\rho' = \rho \left(1 - \frac{T}{E \omega} \right);$$

y como $\rho = \frac{EI}{M}$ (núm. 307), será

$$\rho' = \frac{I}{M} \left(E - \frac{T}{\omega} \right).$$

El valor de E es mucho mayor que $\frac{T}{\omega}$, de modo que se puede despreciar sin error sensible; y entonces

$$\rho' = \frac{EI}{M},$$

es decir, que los puntos O' y O se confunden, ó que es despreciable la deformación debida á la fuerza T .

744. El eje de la viga no puede considerarse como eje neutro, puesto que está sometido á una fuerza $\frac{T}{\omega}$ por unidad superficial. La capa neutra será aquella para la cual R ó R' sea cero, esto es,

$$\frac{Mr}{I} + \frac{T}{\omega} = 0,$$

y estará á una distancia $r = \frac{-TI}{M\omega}$.

FUERZAS PARALELAS

745. Las ecuaciones del núm. 741 dan los valores de M , T y C , necesarios para la resolución de los problemas de resistencia y para el cálculo de las deformaciones, pero es preciso determinar primeramente las reacciones de los apoyos y los momentos de empotramiento cuando éste exista, operaciones que ofrecen alguna dificultad en muchos casos.

Cuando las fuerzas P , P' , etc., son paralelas, los valores de M , T y C se hacen depender, por relaciones muy sencillas, de los correspondientes á una viga proyección de la primera sobre un plano normal á dichas fuerzas, como vamos á ver á continuación.

746. 1.º **Pieza apoyada en los dos extremos. Fuerzas aisladas.** — Sea $OB = l$ (fig. 27, lám. 27) la viga inclinada α grados con el horizonte, y P , P' , P'' las fuerzas paralelas que forman un ángulo ϵ con la vertical.

Llamemos δ el ángulo que el apoyo superior forma con la vertical; cuanto al apoyo inferior, le supondremos dispuesto como representa la figura, para evitar el resbalamiento del extremo inferior de la viga.

Sean H' y H'' las reacciones de los apoyos. La reacción H'' , correspondiente al apoyo superior, tiene dirección conocida, puesto que ha de ser normal á dicho apoyo; pero ignoramos la dirección de H' porque desconocemos *a priori* la intensidad de la presión y del empuje que en el apoyo inferior producen las fuerzas, de cuyas reacciones parciales es resultante la total H' .

Puede determinarse la magnitud y dirección de H' y H'' del modo siguiente: hállese la resultante R de las fuerzas P , P' , etc., y su intersección D con H'' ; OD será la dirección de H' , pues el equilibrio exige la concurrencia de las tres fuerzas. Si se toma $mn = R$ (fig. 26, lám. 27) y se trazan

mr y nr paralelas á H' y H'' , el triángulo de las fuerzas mnr , que establece el equilibrio de R , H' y H'' , da $mr = H''$ y $nr = H'$.

Prescindiremos, por ahora, de H' y H'' , y las sustituiremos por sus componentes normales y paralelas á la viga OB (figs. 27 y 28, lám. 27).

Llamemos:

Q', Q'' = componentes, normales á la viga, de H' y H'' .

Z', Z'' = componentes, paralelas á la viga, de H' y H'' .

d, d', d'', \dots = distancias al extremo inferior O , de los puntos de aplicación de las fuerzas P, P', P'', \dots .

l = longitud OB .

M' = momento general de flexión.

C' = esfuerzo cortante.

α' = tangente del ángulo de rotación de la sección trasversal extrema O .

f' = flecha de curvatura, contada normalmente á OB .

z = abscisa, contada sobre el eje OB , de una sección cualquiera A .

Supongamos que el sistema de fuerzas P, P', P'', \dots se aplica á la viga $O'B'$ (proyección de OB sobre un plano normal á las fuerzas) apoyada en O' y B' , y llamemos (fig. 28, lám. 27):

Q' y Q'' = reacciones de los apoyos O' y B' .

d, d', d'' = distancias, al extremo O' , de los puntos de aplicación de las fuerzas P, P', P'', \dots .

h = longitud $O'B'$ de la viga proyección.

M = momento general de flexión.

C = esfuerzo cortante.

α = tangente del ángulo de rotación de la sección extrema O .

f = flecha de curvatura de $O'B'$.

x = abscisa, contada sobre $O'B'$, de una sección A' proyección de la A .

Descomponiendo las fuerzas P, P' , etc., en direcciones paralela y normal á la viga, podremos suponer que ésta se halla sometida á las fuerzas siguientes:

Reacciones Q', Q'' , normales á OB .
 Reacciones Z' y Z'' , según OB .
 Fuerzas $P \cos(\alpha \pm \epsilon)$, $P' \cos(\alpha \pm \epsilon)$,..., normales á OB .
 Fuerzas $P \sin(\alpha \pm \epsilon)$, $P' \sin(\alpha \pm \epsilon)$,..., según OB .

Adoptamos el doble signo \pm en el binomio $\alpha \pm \epsilon$, porque el ángulo puede formarse á la izquierda ó á la derecha de la vertical.

747. Reacciones. — Aplicando las ecuaciones (1) del núm. 310, tenemos:

$$\begin{aligned} Q'_1 + Q''_1 - \Sigma P \cos(\alpha \pm \epsilon) &= 0 \\ Q''_1 l - \Sigma P \cos(\alpha \pm \epsilon) d_1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $\frac{d_1}{l} = \frac{d}{h}$,

$$\left. \begin{aligned} Q''_1 &= \cos(\alpha \pm \epsilon) \frac{\Sigma P d}{h} = Q'' \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ Q'_1 &= Q' \cos(\alpha \pm \epsilon) \end{aligned} \right\} (3).$$

Las reacciones Q'_1 y Q''_1 de la pieza inclinada OB se obtienen multiplicando por $\cos(\alpha \pm \epsilon)$ las Q' y Q'' de la pieza $O'B'$, proyección de la OB , sometida á las mismas fuerzas P, P' , etc.

Las relaciones (3) son independientes de la inclinación δ del apoyo superior; de modo que Q'_1 y Q''_1 tienen el mismo valor, cualquiera que sea el de δ .

El triángulo DBE (fig. 27, lám. 27), en que $BE = Q''_1$, da

$$DE = Z'' = Q'' \cot(\alpha + \delta) = Q'' \cos(\alpha \pm \epsilon) \cot(\delta + \alpha) \quad (4);$$

y como ha de haber equilibrio entre todas las fuerzas que actúan á lo largo de OB , será

$$Z' = Z'' + \Sigma P \sin(\alpha \pm \epsilon) \quad (5);$$

Z'' y Z' son funciones de δ , y disminuyen cuando δ aumenta. Á igual valor de α , el máximo de Z' y Z'' corresponde á $\delta = 0$, es decir, cuando el apoyo superior es vertical, y entonces

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= Q'' \cos(\alpha \pm \epsilon) \cot \alpha \\ Z' &= Q'' \cos(\alpha \pm \epsilon) \cot \alpha + \Sigma P \sin(\alpha \pm \epsilon) \end{aligned} \right\} (6).$$

El mínimo de Z' y Z'' tiene lugar para $\delta = 90 - \alpha$, es decir, cuando el apoyo superior B tiene la misma inclinación de la viga, como se ve en B , fig. 3.^a (lám. 29).

Entonces, las fórmulas (4) y (5) se convierten en

$$\begin{aligned} Z'' &= 0 \\ Z' &= \Sigma P \sin(\alpha \pm \epsilon). \end{aligned}$$

748. Compresión en un punto cualquiera. — En una sección cualquiera A de abscisa z (fig. 28, lám. 27), la compresión longitudinal tiene por expresión

$$T = Z'' + \Sigma_A^B P \sin(\alpha \pm \epsilon) \quad (7).$$

749. Momentos de flexión. — Para la sección A de abscisa z , el momento M' de flexión, es

$$M' = Q'_1 z - \Sigma_0^z P (z - d_1) \cos(\alpha \pm \epsilon).$$

Sustituyendo Q'_1 por su valor (3), y puesto que

$$\begin{aligned} z \cos(\alpha \pm \epsilon) &= x \\ (z - d_1) \cos(\alpha \pm \epsilon) &= x - d, \end{aligned}$$

se tiene

$$M' = Q' x - \Sigma_0^z P (x - d);$$

y este valor [(2) del núm. 311], no es otra cosa que el momento de flexión M de la viga proyección $O'B'$ sometida á las mismas fuerzas P, P' , etc. Luego $M' = M$, es decir, que el momento de flexión de la viga OB es el mismo que el de la viga proyección $O'B$ sometida á las mismas cargas, y esto independientemente de la inclinación δ del apoyo superior.

750. Esfuerzos cortantes (fig. 28, lám. 27). — Para la sección A de la viga OB , tenemos:

$$C' = Q'_1 - \Sigma_0^z P \cos(\alpha \pm \epsilon).$$

Sustituyendo Q'_1 por su valor,

$$C' = (Q' - \Sigma_0^z P) \cos(\alpha \pm \epsilon)$$

$$C' = C \cos(\alpha \pm \epsilon) \quad (8).$$

Los esfuerzos cortantes C' en la viga OB , se obtienen de los de la $O'B'$, multiplicándolos por $\cos(\alpha \pm \epsilon)$.

751. Deformaciones. — Aplicando las ecuaciones (10) y (11) de los números 345 y 347 á las vigas OB y $O'B'$ (fig. 28, lám. 27), y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} M' &= M \\ l - x &= (l_1 - z) \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ dx &= dz \cos(\alpha \pm \epsilon), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{a}{\cos(\alpha \pm \epsilon)} \\ f' &= \frac{f}{\cos^2(\alpha \pm \epsilon)} \end{aligned} \right\} (9).$$

752. Las conclusiones anteriores, que tanto simplifican el cálculo de vigas inclinadas sometidas á flexión, pueden demostrarse gráficamente.

Sean OB (fig. 3.^a, lám. 28) la viga inclinada, apoyada en O y en B , y **1**, **2**, y **3** las fuerzas paralelas. Sumadas en CD , tomando O_1 como polo, trazando los radios polares O_1C , ..., O_1D y las paralelas mn , nr , rs , sp , y prolongando mn y sp , obtendremos el punto q de paso de la resultante $Aq = 1 + 2 + 3$. Dibujando AB normal al apoyo B , y uniendo A y O , las rectas OA , AB son las líneas de acción de las reacciones H' y H'' , cuya intensidad encontraremos formando el triángulo DCE de las fuerzas.

Las componentes **5** y **4** de H' y H'' , paralelas á las fuerzas **1**, **2** y **3**, se obtendrán en DL y LC , trazando EH paralela á OB , ó bien uniendo m y p y dibujando O_1L paralela á mp ; de modo que las rectas O_1L y EL deben cortarse, como comprobación, en un punto de DC .

El polígono de los momentos de flexión resulta ser m_psrn , que es el mismo que correspondería á la pieza OB' , proyección de la OB sobre una recta normal á las fuerzas.

Bajando perpendiculares á EH desde los diversos puntos N , S , D , que separan las fuerzas **1**, **2** y **3** en la recta CD , es fácil ver que las compresiones y esfuerzos cortantes tienen los siguientes valores:

	Compresiones T	Esfuerzos cortantes C
Entre O y b	EH	$+CH$
» b y c	Eg	$+Ng$
» c y e	Et	$-St$
» e y B	Ei	$-Di$

Los componentes de H' y H'' normales á OB son independientes de la inclinación del apoyo superior B . En efecto, si suponemos varias direcciones BN' , BE' de la reacción H'' (fig. 2.^a, lám. 29) correspondientes á otras tantas inclinaciones diversas del apoyo B , al formar los triángulos de fuerzas DCN , DEC , los puntos E y N se hallan sobre la recta EH paralela á OB , del mismo modo que los N' , E' , se encuentran sobre la recta $E'N'$ paralela á CD . Ahora bien; las componentes, normales á la viga, de los diversos valores de H' y H'' , son, respectivamente, CH y DS .

753. 2.º Pieza empotrada en los dos extremos, ó empotrada en un extremo y apoyada en el otro. Fuerzas aisladas (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 28).—Llamemos m'_1 y m''_1 los momentos de empotramiento de la viga inclinada OB (fig. 1.^a), y m'_0 , m''_0 los de la viga proyección $O'B'$, sometida á las mismas fuerzas P , P' , P'' .

La acción del empotramiento puede ser sustituida por la de las fuerzas S y S' (fig. 2.^a), de modo que podemos suponer que la viga OB está sometida á las fuerzas siguientes:

Reacciones F'_1 , F''_1 , normales á OB .

Reacciones Z' , Z'' , según OB .

Momentos m'_1 , m''_1 de las fuerzas S y S' con respecto á los apoyos O y B .

Fuerzas $P \cos(\alpha \pm \epsilon)$, $P' \cos(\alpha \pm \epsilon)$, normales á OB .

Fuerzas $P \sin(\alpha \pm \epsilon)$, $P' \sin(\alpha \pm \epsilon)$, según OB .

754. Momentos de empotramiento y de flexión. — Si comparamos la viga OB (fig. 2.^a, lám. 28) con la OB simplemente apoyada (fig. 28, lám. 27), tendríamos, repitiendo los razonamientos de los núms. 359 á 362, las ecuaciones siguientes, análogas á las (9), (13) y (14) del núm. 360:

$$\begin{aligned} \int_0^l M' (l - z) dz - (2m'_1 + m''_1) \frac{l^2}{6} &= 0 \\ \int_0^l M' dz - (m'_1 + m''_1) \frac{l}{2} &= 0 \\ m' &= M' - \frac{m'_1(l - z)}{l} - m''_1 \frac{z}{l}; \end{aligned}$$

m' es el momento general de flexión de la viga inclinada OB ; llamaremos m al correspondiente á la viga proyección $O'B'$ (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 28).

Si se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} h - x &= (l - z) \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ dx &= dz \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ h &= l \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ M &= M' \end{aligned}$$

las dos ecuaciones primeras, anteriores, se convierten en

$$\begin{aligned} \int_0^h M(h-x) dx - (2m'_1 + m''_1) \frac{h^2}{6} &= 0 \\ \int_0^h M dx - (m'_1 + m''_1) \frac{h}{6} &= 0. \end{aligned}$$

Pero estas ecuaciones son las que servirían para determinar los momentos de empotramiento de la viga $O'B'$ (fig. 1.^a, lám. 28), proyección de la OB , sin más que sustituir m'_1 y m''_1 por m'_0 y m''_0 ; luego

$$m'_1 = m'_0 \quad \text{y} \quad m''_1 = m''_0.$$

Haciendo esta sustitución en el valor de m' anterior, y recordando que

$$\begin{aligned} M' &= M \\ \frac{l-z}{l} &= \frac{h-x}{h} \\ \frac{z}{l} &= \frac{x}{h} \end{aligned}$$

se encuentra

$$m' = M - \frac{m'_0(h-x)}{h} - m''_0 \frac{x}{h} \quad (10),$$

que es el valor del momento general de flexión m correspondiente a la viga empotrada $O'B'$ proyección de la OB .

Luego los momentos de flexión y de empotramiento en la viga inclinada son los mismos que los de la viga proyección sobre un plano normal a las fuerzas, y sometida a la acción de éstas.

755. Reacciones. — Aplicando las ecuaciones (1) del núm. 359 y (8) del 360, y teniendo en cuenta las relaciones (3) del núm. 747, y que $m'_1 = m'_0$,

$m''_1 = m''_0$, llegaríamos fácilmente a estas otras, en las que F' y F'' son las reacciones de la viga proyección $O'B'$ (fig. 1.^a, lám. 28).

$$\left. \begin{aligned} F'_1 &= F' \cos(\alpha \pm \epsilon) \\ F''_1 &= F'' \cos(\alpha \pm \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Esfuerzos cortantes. Flechas. — Del mismo modo se deduciría que

$$C' = C \cos(\alpha \pm \epsilon) \quad (12)$$

$$f' = \frac{f}{\cos^2(\alpha \pm \epsilon)} \quad (13).$$

Compresiones. — La reacción del apoyo B es normal a la viga, de modo que no produce compresión en ella a lo largo de su eje. Es comparable este caso al de $\delta = 90^\circ - \alpha$ que hemos considerado en el núm. 747. Será, pues,

$$\begin{aligned} Z' &= 0 \\ Z' &= \Sigma P \operatorname{sen}(\alpha \pm \epsilon) \\ T &= \Sigma_A P \operatorname{sen}(\alpha \pm \epsilon). \end{aligned}$$

756. Pieza apoyada en varios puntos. — Sería fácil demostrar, haciendo uso de las ecuaciones (8), (11) y (12) de los núms. 387 y 389, que entre los momentos de flexión en los apoyos, ó en un punto cualquiera, esfuerzos cortantes y reacciones de los apoyos correspondientes a la pieza inclinada OB , y a la pieza proyección $O'B'$ (fig. 5.^a, lám. 28), existen las mismas relaciones que hemos demostrado para las piezas empotradas ó apoyadas en sus extremos.

Si llamamos:

	Pieza inclinada OB .	Pieza proyección $O'B'$.
Momento de flexión en el apoyo $n^{\text{ésimo}}$	m''_n	m'_n
Momento general de flexión en el tramo $n^{\text{ésimo}}$	m'''_n	m_n
Reacción del apoyo $n^{\text{ésimo}}$	F'_n	F_n
Esfuerzo cortante en el tramo $n^{\text{ésimo}}$.	C'_n	C_n

tendremos:

$$\begin{aligned} m''_n &= m'_n & \text{y} & \quad m'''_n = m_n \\ F''_n &= F'_n \cos(\alpha \pm \epsilon) & \text{y} & \quad C'_n = C_n \cos(\alpha \pm \epsilon) \end{aligned} \quad (14).$$

Las reacciones Z' y Z'' , y la compresión T en un punto de la viga de abscisa z , serán dadas por las ecuaciones (4), (5) y (7) (núms. 747 y 748), sin más que sustituir Q'' por la reacción F_{k+1} correspondiente al apoyo B' . Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} Z'' &= F_{k+1} \cos(\alpha \pm \epsilon) \cot(\alpha + \delta) \\ Z' &= Z'' + \sum P \sin(\alpha \pm \epsilon) \\ T &= Z'' + \sum_1 P \sin(\alpha \pm \epsilon). \end{aligned}$$

757. 3.º Piezas apoyadas ó empotradas. Fuerzas repartidas. — Si las fuerzas están repartidas, existen las mismas relaciones que hemos hallado en los números precedentes, puesto que dichas fuerzas pueden ser sustituidas por otras, paralelas, aisladas, que obran cada una en un elemento longitudinal de prisma; de modo que repetiríamos los razonamientos anteriores y llegaríamos á las mismas deducciones.

Una observación conviene hacer, no obstante: al comparar la viga inclinada con la viga proyección, hemos visto que es preciso suponer que sobre ésta actúan las mismas fuerzas que estaban aplicadas sobre aquélla; sí, pues, sobre la viga inclinada obra una fuerza de p' kilogramos por unidad de longitud l , como la proyección de esta unidad vale $l \times \cos(\alpha \pm \epsilon)$, resulta que la viga proyección está sometida á una fuerza de p' kilogramos por cada $l \times \cos(\alpha \pm \epsilon)$ de longitud, ó á $p = \frac{p'}{\cos(\alpha \pm \epsilon)}$ por unidad lineal. Es decir, que la fuerza p' por unidad de longitud, correspondiente á la pieza inclinada, se convierte en $p = \frac{p'}{\cos(\alpha \pm \epsilon)}$ para la pieza proyección.

Si toda la viga OB (fig. 4.^a, lám. 28) estuviese cargada con p' por unidad lineal, los valores (4), (5) y (7) del núm. 747 se convierten en:

$$\text{Reacción } Z'' = \frac{1}{2} p' h \cot(\alpha + \delta)$$

$$\text{Reacción } Z' = \frac{1}{2} p' h [\cos(\alpha + \delta) + 2 \operatorname{tg}(\alpha \pm \epsilon)] \quad (15).$$

$$\text{Compresión en un punto de abscisa } Z. \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} T = \frac{1}{2} p' h \cot(\alpha + \delta) + p'(l - z) \sin(\alpha \pm \epsilon) \quad (16).$$

h es la longitud de la proyección $O'B'$.

758. Resumen. — Resumiendo, si se compara la viga inclinada, apoyada ó empotrada, cargada con fuerzas aisladas ó repartidas, con la viga proyec-

ción sobre un plano normal á las fuerzas, y sometida á la acción de éstas, resulta:

1.º Las momentos de flexión y de empotramiento son iguales en las dos vigas.

2.º Las reacciones de los apoyos, normales al eje de la viga inclinada, son iguales á los de la viga proyección multiplicados por $\cos(\alpha \pm \epsilon)$.

3.º Los esfuerzos cortantes en la viga inclinada, se obtienen multiplicando por $\cos(\alpha \pm \epsilon)$ los de la viga proyección.

4.º La tangente del ángulo de rotación de las secciones extremas, en la viga inclinada cuando está apoyada, es igual á la correspondiente á la viga proyección dividida por $\cos(\alpha \pm \epsilon)$.

5.º La flecha de la viga inclinada se obtiene dividiendo por $\cos^2(\alpha \pm \epsilon)$ la de la pieza de proyección.

6.º Todas estas relaciones subsisten cualquiera que sea la inclinación del apoyo superior, esto es, independientemente del ángulo δ .

759. Compresión máxima en cada sección transversal. — Según hemos visto en el núm. 742, la compresión por unidad superficial, para las fibras más alejadas de la capa neutra, es, en cada sección, $\frac{M'v}{I} + \frac{T}{\omega}$. Esta suma depende exclusivamente de M' y de T en las piezas prismáticas, puesto que I , v y ω son constantes.

Si trazamos las líneas cuyas ordenadas sean los valores de M' y de T , y las multiplicamos respectivamente por $\frac{v}{I}$ y por $\frac{1}{\omega}$, la suma de estos productos dará la compresión máxima en cada sección.

Si las fuerzas están uniformemente repartidas (fig. 6.^a, lám. 28), la curva de valores de M' es la parábola $O'cB'$ correspondiente á la pieza proyección $O'B'$, siendo la ordenada máxima $mc = \frac{1}{8} p h^2$, y teniendo p y h los valores

$$h = O'B' = l \cos(\alpha \pm \epsilon)$$

$$p = \frac{p'}{\cos(\alpha \pm \epsilon)} \quad (17).$$

Las compresiones totales T [fórmula (16) del núm. 757] son dadas por la recta ba .

La compresión máxima por unidad superficial, para una sección cualquiera s , estará representada por la recta dt , si hemos tenido la precau-

ción de tomar la magnitud cm en escala $\frac{c}{T}$, y las $B'b$, $O'a$, en la $\frac{1}{\omega}$.

La mayor de las ordenadas dt se hallará trazando la tangente dc paralela á ab ; el punto de tangencia d , determina la sección s de la viga inclinada en que la compresión por unidad superficial es un máximo absoluto, y fija los valores de M' (M'_s) y de T' (T'_s) correspondientes.

Cuando se trata de fuerzas aisladas P , P' (fig. 7.^a, lám. 28), las líneas de valores de M' y T' son, respectivamente, $O'rnb'$ y $O'cdtesmB'$. La compresión máxima corresponde á una de las secciones a , b , de aplicación de las fuerzas P , P' .

PIEZAS INCLINADAS SOMETIDAS Á LA ACCIÓN DE FUERZAS VERTICALES

760. Es el caso más general: entre otros ejemplos, podemos presentar el de los pares de una armadura, ó el de las zancas de una escalera. El ángulo δ es cero.

761. Momentos de flexión. — Siendo h (fig. 8.^a, lám. 28) la longitud OB' de la proyección horizontal de la viga, es decir, $h = l \cos \alpha$, los momentos de flexión de OB son, como sabemos, los mismos que los de la viga OB' . El momento máximo M'_0 será, pues, de la forma $M'_0 = \frac{1}{n} Ph$, llamando P á la carga total que actúa sobre OB , y n un número que tiene por valor, 2, 4, 8, 12, 32, según el caso de flexión, con arreglo á lo que dejamos consignado en el núm. 405.

Por ejemplo: si la carga estuviese uniformemente repartida, á razón de p' kilogramos por unidad de longitud de viga inclinada, sería $P = p'l$, y $M'_0 = \frac{1}{8} Ph$, ó bien $M'_0 = \frac{1}{8} p h^2$, siendo $p = \frac{p'}{\cos \alpha}$. Si se trata de una fuerza P aplicada al punto medio, sería $M'_0 = \frac{1}{4} Ph$, y así para los demás casos.

No ofrece, pues, dificultad alguna cuanto se refiere á la determinación de momentos de flexión de una viga inclinada.

762. Esfuerzos cortantes. — Se forman, como hemos visto (núm. 758), multiplicando por $\cos \alpha$ los de la viga proyección.

Por ejemplo, el esfuerzo cortante máximo, en el caso de carga P aplicada en el punto medio, será $C'_0 = \frac{1}{2} P \cos \alpha$.

763. Reacciones de los apoyos. — Si R es la resultante de las cargas (fig. 8.^a, lám. 28), el triángulo abc da las reacciones H' y H'' . Este triángulo que expresa el equilibrio de las fuerzas R , H' y H'' , se construye fácilmente, como sabemos, tomando, con arreglo á una escala de fuerzas, $bc = R$, y trazando ca y ba paralelas respectivamente á OD y BD .

La reacción H' tiene una componente vertical A' y otra horizontal E' ; esto quiere decir que el apoyo inferior O sufre compresiones $A = A'$ y empujes $E = E'$, y habrá de disponerse para que resista á estos esfuerzos.

También la reacción H'' , ó su igual y contraria — H'' , se puede descomponer vertical y horizontalmente; el apoyo superior B está, pues, sometido á presiones verticales y empujes horizontales. La componente horizontal de H'' es también E' (véase el triángulo bac); de modo que son iguales los empujes horizontales que sufren los dos apoyos O y B .

Si el apoyo B fuese horizontal (fig. 9.^a, lám. 28), sería vertical la reacción H'' , y como consecuencia la H' . Entonces no hay empuje horizontal ninguno en O ni en B , y H' y H'' tendrán por valor el de las reacciones Q' y Q'' correspondientes á la viga proyección OB' .

Cuando el apoyo superior B es vertical (fig. 10, lám. 28) no sufre más que empujes, iguales á H' , pero no presiones verticales. Por esta razón, en la unión de los pares é hilera de una armadura, la solución que representa la fig. 11 (lám. 28) es preferible á la que está indicada en la fig. 12; en la primera (fig. 11), las dos compresiones A se equilibran y no producen flexión vertical en la hilera; de modo que esta pieza puede tener débil escuadría, mientras que en la segunda (fig. 12) las fuerzas A tienen una resultante B productora de flexión.

764. Los empujes y presiones que sufren los apoyos (A' , E' , db , fig. 8.^a, lám. 28) se hallan gráficamente con gran sencillez, haciendo uso del triángulo abc , pero pueden determinarse analíticamente.

La reacción $Bn = Q''_1$, normal á la viga inclinada, es, puesto que $\delta = 0$, $Q''_1 = Q'' \cos \alpha$ [ecuación (3), núm. 747], siendo Q'' la reacción del apoyo B' , en la viga proyección OB' sometida á las mismas fuerzas que la OB .

Tendremos, pues, en el triángulo rectángulo Bmn , $H'' = \frac{Q''_1}{\cos mBn}$; y como $mBn = 90^\circ - OBm = 90^\circ - (\alpha + \delta)$, por ser $mBs = \delta$ y $sBo = \alpha$, será, substituyendo Q''_1 por su valor,

$$H'' = \frac{Q'' \cos \alpha}{\text{sen}(\alpha + \delta)} \quad (18);$$

y su proyección horizontal, $H'' \cos \delta$, ó sea el empuje E' ,

$$E' = \frac{Q''}{tg \alpha + tg \delta} \quad (19).$$

La componente vertical de H'' es $db = E' tg \delta$.

En el apoyo inferior O , el empuje horizontal es E' , y la componente vertical, ó compresión A' , tiene por valor, llamando R á la resultante de las cargas,

$$A' = cb - db = R - E' tg \delta$$

ó

$$A' = R - \frac{Q''}{1 + \frac{tg \alpha}{tg \delta}} \quad (20).$$

Si el apoyo inferior O no ofrece obstáculo al resbalamiento, el pie de la viga se moverá hacia la izquierda, obedeciendo al empuje E' , á no ser que este empuje esté equilibrado por el rozamiento que ocasiona la presión A' . Si es f el coeficiente de rozamiento de resbalamiento, la fuerza pasiva de rozamiento engendrada por la presión A' es $A' f$; de modo que el resbalamiento no tendrá lugar, aun suponiendo que no existe resalto alguno en el apoyo inferior, siempre que se verifique

$$A' f > E' \quad \text{ó} \quad \frac{E'}{A'} < f;$$

pero $\frac{E'}{A'}$ es la tangente del ángulo rac que forma la reacción H' con la vertical, y f es la tangente del ángulo φ de rozamiento. Esto quiere decir que cuando el pie de la viga esté simplemente apoyado, como representa la fig. 1.^a (lám. 29), no resbalará siempre que el ángulo $A' O H'$ sea menor que φ .

Las ecuaciones (19) y (20) manifiestan la influencia que tiene la inclinación del apoyo superior en el valor de los empujes y presiones.

El máximo del empuje E' (ecuación 19) corresponde á $\delta = 0$, esto es, al caso de apoyo superior vertical (fig. 10, lám. 28, y fig. 1.^a, lám. 29). La presión A' en el apoyo inferior es también un máximo para $\delta = 0$; los valores de E' y A' en este caso son, llamando f á la altura $B B'$ y h á la proyección $O B'$,

$$\left. \begin{aligned} E' &= \frac{Q''}{tg \alpha} = \frac{Q'' h}{f} \\ A' &= R \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

E' y A' disminuyen cuando δ aumenta: si la superficie del apoyo coincide con la cara inferior de la viga (fig. 3.^a, lám. 29), esto es, si $\delta = 90^\circ - \alpha$,

$$E' = \frac{1}{2} Q'' \operatorname{sen} 2 \alpha$$

$$A' = R - \frac{Q''}{1 + tg^2 \alpha}.$$

Si el apoyo superior es horizontal (fig. 9.^a, lám. 28), $\delta = 90^\circ$, y $tg \delta = \infty$; tendremos:

$$E' = 0$$

$$A' = R - Q'' = Q',$$

es decir, que no hay empujes, y las presiones son las que corresponderían á la viga proyección $O B'$ cargada con las mismas fuerzas que lo está $O B$.

765. Compresiones. — Las fórmulas (4), (5) y (7) de los núms. 747 y 748 se convierten, haciendo $\Sigma P = R$, y $\ell = 0$, en

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= Q'' \cos \alpha \cot (\alpha + \delta) \\ Z' &= Z'' + R \operatorname{sen} \alpha \\ T &= Z'' + \Sigma_A^B P \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (22);$$

Z' y Z'' son las compresiones en los extremos O y B (fig. 8.^a, lám. 28) y T' la correspondiente á una sección cualquiera A , de abscisa $O A = z$. Es mayor Z' que Z'' en la cantidad $R \operatorname{sen} \alpha$.

Q'' es la reacción del apoyo B' en la pieza proyección $O B'$ sometida á las mismas cargas que $O B$.

Si $\delta = 0$ (fig. 1.^a, lám. 29), las fórmulas anteriores se reducen á las siguientes, haciendo $\cos \alpha = \frac{h}{l}$, $\cot \alpha = \frac{h}{f}$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{f}{l}$, siendo $O B' = h$,

$O B = l$ y $B B' = f$:

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= Q'' \frac{h^2}{f l} \\ Z' &= Q'' \frac{h^2}{f l} + R \frac{f}{l} \\ T &= Q'' \frac{h^2}{f l} + \Sigma_A^B P \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (23),$$

y para cargas repartidas, á razón de p' por unidad de longitud de OB (figura 10, lám. 28),

$$\left. \begin{aligned} R &= p' l & Q'' &= \frac{1}{2} p' l \\ Z'' &= \frac{p' h^2}{2f} \\ Z' &= \frac{p' h^2}{2f} + p' f \\ T &= \frac{p' h^2}{2f} + p' (l - z) \frac{f}{l} \end{aligned} \right\} (24).$$

Cuando $\delta = 90 - \alpha$ (fig. 3.^a, lám. 29), y las cargas P, P', \dots son aisladas,

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= 0 \\ Z' &= \frac{Rf}{l} \\ T &= \sum_A^B P \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} (25),$$

y si las cargas son repartidas (p' por unidad lineal de $l = OB$)

$$\left. \begin{aligned} Z'' &= 0 \\ Z' &= p' f \\ T &= p' (l - z) \frac{f}{l} \end{aligned} \right\} (26).$$

En este caso, la compresión Z'' en el extremo B es cero, pero no lo es en el apoyo O ; y obedeciendo á Z' , la viga OB resbalará si no existe algún enlace que lo impida.

Las ecuaciones (26) son aplicables á la viga empotrada en B , porque también se verifica $\delta = 90^\circ - \alpha$.

Cuando se trata de piezas inclinadas apoyadas en varios puntos, servirán las ecuaciones anteriores, sin más que sustituir Q'' por la cantidad R_{k-1} , reacción del último apoyo de la derecha, en la viga proyección, con arreglo á lo expuesto en los núms. 747 y 756.

766. Resolución de los problemas. — Haremos aplicación de las fórmulas (2) del núm. 742, sin más que hacer $T_0 = Z'$, puesto que Z' es la mayor de las compresiones según el eje de la pieza; tendremos, pues (*),

(*) Véase, para más detalles, el núm. 742.

$$\left. \begin{aligned} R' &= \frac{M'_0 r}{I} \dots \dots \dots (27). \\ R' &= \frac{M'_0 r}{I} + \frac{Z'}{\omega} \dots \dots \dots (28). \\ R' &= \frac{M'_0 r}{I} + \frac{Z'}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \dots (29). \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Piezas de madera de sección circu-} \\ \text{lar, cuadrada ó rectangular, de} \\ \text{lados poco diferentes (proporcio-} \\ \text{nes ordinarias).} \\ \text{Vigas metálicas.} \\ \text{Secciones de forma tubular.} \\ \text{Secciones } T' \text{ sencilla ó doble, } U, \\ \text{etcétera, laminadas, de tablas} \\ \text{anchas.} \\ \text{Vigas compuestas, de sección cru-} \\ \text{ciforme.} \\ \text{Vigas metálicas.} \\ \text{Secciones } T' \text{ sencilla ó doble, } U, \\ \text{etcétera, laminadas, de tablas} \\ \text{estrechas.} \\ \text{Vigas de palastro, compuestas, de} \\ \text{forma } T' \text{ doble ó sencilla.} \end{array}$$

En estas fórmulas recordaremos que:

- M'_0 = momento máximo de flexión de la pieza inclinada, que es igual al M_0 de la pieza proyección sometida á las mismas cargas (número 761).
- Z' = compresión máxima (extremo inferior, núm. 765).
- r = semialtura de la sección transversal de la viga, y, en general, distancia al eje neutro de las fibras más alejadas.
- ω = área de la sección transversal.
- l = longitud de la pieza inclinada.
- R' = coeficiente de trabajo por compresión simple.
- I = momento de inercia de la sección transversal con respecto á un eje que pasa por su centro de gravedad y es normal al plano de flexión.
- I' = menor de los momentos de inercia de la sección transversal; su eje es, para las formas empleadas en construcciones, generalmente perpendicular al de I .
- B = coeficiente numérico que tiene los valores siguientes:

MATERIALES	VALORES DE B PARA PRISMAS DE		
	Dos bases planas.	Una base plana y otra redondeada ó articulada.	Dos bases redondeadas ó articuladas.
	I	II	III
Fundición (núms. 716 y 717).....	0,000156	0,000312	0,000624
Hierro y acero (núm. 730).	0,00003	0,000045	0,000060

Los detalles de procedimiento son los ya explicados en el núm. 587 á propósito de las piezas flexadas y extendidas. Se fija un coeficiente de trabajo R'_1 , algo menor que el R' definitivo, y con arreglo á él se calcula la sección transversal de la viga, como si solamente estuviese sometida al momento de flexión M'_0 , á cuyo efecto, cuando las vigas son de pequeña altura, se seguirá el método explicado en los núms. 508 y 523 á 526. Tendremos, por lo tanto, el primer sumando del valor de R' , ó sea $R'_1 = \frac{M'_0 v}{I}$.

Conocida la sección de la viga y su área ω por los cálculos precedentes, se formará $R'_2 = \frac{Z'}{\omega}$ si se hace aplicación de la ecuación (28), ó

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right)$$

cuando se emplee la (29). En ambos casos se verá si la suma $R'_1 + R'_2$ es mayor ó menor que R' .

Cuando $R'_1 + R'_2$ sea poco diferente de R' , el problema se considerará resuelto, y el coeficiente de trabajo por compresión, definitivo, será $R'_1 + R'_2$.

Si $R'_1 + R'_2$ es demasiado grande, es prueba de que hemos partido de un valor de R'_1 , demasiado elevado: se disminuirá R'_1 , y se calculará una nueva viga que resista al momento de flexión M'_0 . Como hemos empleado un valor de R'_1 menor que el primitivo, resultará mayor valor para ω y para I' ; de modo que disminuirá también R'_2 , y podrá ser aceptable la suma $R'_1 + R'_2$ como coeficiente definitivo de trabajo, pero si no lo fuera, se harían nuevos tanteos hasta alcanzar este resultado.

Si $R'_1 + R'_2$ fuese demasiado pequeño, se aumentará R'_1 , y se repetirán los cálculos.

Cuando la sección de la viga es de grande altura, ya sea el alma llena ó de celosía, las ecuaciones (28) y (29) servirán para el cálculo de las cabezas ó cordones, siguiendo los métodos explicados en los núms. 547 á 550; de modo que I , I' y ω representarán, respectivamente, los momentos de inercia y el área de la sección transversal de dichas cabezas.

Las dimensiones del alma se determinarán del modo explicado en los núms. 550, 557 y 570, teniendo en cuenta el máximo esfuerzo cortante C'_0 , cuyo valor sabemos ya encontrar (núm. 762).

En el caso de que se quiera tomar en consideración, en los cálculos, el peso propio de la viga, se seguirán los procedimientos explicados en los números 510 y 551.

Los ejemplos siguientes ponen de manifiesto todos los detalles de cálculo, y justifican también la aplicación de las fórmulas (27), (28) y (29) á los diversos casos, aplicación que ya se razonó en el núm. 742.

767. Ejemplo 1.º — Viga de madera OB (fig. 1.ª, lám. 29) apoyada á un muro $B'B$ de paramento vertical ($\delta = 0$) y cargada en el punto medio L con una fuerza P .

Datos:

$$P = 1000 \text{ kilogramos.}$$

$$OB = l = 5 \text{ metros.}$$

$$OB' = h = 4 \text{ metros.}$$

$$BB' = f = 3 \text{ metros.}$$

La resultante R de las fuerzas es la única fuerza P .

$$E' = \begin{cases} \text{Presión en el muro, en } B. \\ \text{Empuje en el pie, } O. \end{cases}$$

$$A' = \text{Presión en el apoyo inferior } O.$$

$$Z' = \text{Compresión que sufre la viga en el extremo inferior } O: \text{ es un máximo.}$$

$$Q'' = \text{Reacción de la pieza proyección } OB' \text{ en el extremo } B', \text{ suponiéndola apoyada en } O \text{ y en } B' \text{ y cargada con la fuerza } P \text{ en el punto medio; } Q'' \text{ es igual á } \frac{1}{2} P = 500 \text{ kilogramos.}$$

Reacciones, presiones y empujes.—Haciendo uso de las ecuaciones (21) del núm. 764, hallamos

$$E' = \frac{Q'' h}{f} = \frac{500 \times 4}{3} = 666 \text{ kilogramos.}$$

$$A' = R = P = 1000 \text{ kilogramos.}$$

Las ecuaciones (23) del núm. 765 dan

$$Z' = Q'' \frac{h^2}{f l} + R \frac{f}{l} = 500 \times \frac{4}{5} + 1000 \times \frac{3}{5} = 1133 \text{ kilogramos.}$$

Determinación de la escuadría.—El momento máximo de flexión M'_0 es igual al M_0 correspondiente á la pieza proyección OB' de longitud h , cargada en el punto medio con $P = 1000$ kilogramos, esto es, $M'_0 = \frac{1}{4} P h = 1000$ kilográmetros.

Calculemos la escuadría como si la viga estuviese sometida solamente á flexión, admitiendo un coeficiente de trabajo R'_1 más pequeño que el ordinario R' , por ejemplo, $R'_1 = 40$ kilogramos por cm.^2 , ó $R' = 400000$ kilogramos por metro cuadrado, puesto que M'_0 se ha encontrado en kilográmetros. Tendremos, pues,

$$\frac{R'_1 a b^2}{6} = M'_0$$

ó, haciendo $a = \frac{2}{3} b$,

$$\frac{2 b^3}{18} \times 400000 = 1000;$$

b será dado en metros.

$$\text{Se obtiene. } \begin{cases} b = 0,28 \text{ metros.} \\ a = 0,18 \text{ } \end{cases}$$

El área de la sección transversal será, en metros cuadrados,

$$\omega = 0,28 \times 0,18 = 0,0504 \text{ m.}^2;$$

de modo que la compresión por metro cuadrado producida por $Z' = 1000$ kilogramos, es

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{1133}{0,0504} = 22480 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

El coeficiente de trabajo definitivo tiene por valor

$$R' = R'_1 + R'_2 = 400000 + 22480 = 422480 \text{ por m.}^2,$$

ó sea

$$R' = 42,24 \text{ kilogramos por cm.}^2.$$

Aquí se ve la escasa influencia de la compresión directa en las piezas de madera. Siendo de $R'_1 = 40$ kilogramos por cm.^2 la compresión debida á la flexión, solamente es de 224 kilogramos por cm.^2 la que corresponde á la compresión directa, máxima, Z' .

Los resultados anteriores demuestran que hemos partido de un valor de R'_1 demasiado pequeño; de modo que se puede aumentar R'_1 , ó, lo que es lo mismo, disminuir la escuadría.

Si le damos el valor ordinario $R'_1 = 600000$ kilogramos por m.^2 , ó $R'_1 = 60$ kilogramos por cm.^2 , obtendríamos:

$$\begin{cases} b = 0,24 \text{ metros.} \\ a = 0,16 \text{ } \end{cases} \omega = 0,0384 \text{ m.}^2$$

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = 29505 \text{ kilogramos por m.}^2$$

$$R' = R'_1 + R'_2 = 629505 \text{ kilogramos por m.}^2,$$

ó

$$R' = 62,95 \text{ kilogramos por cm.}^2.$$

Es decir, que el coeficiente de trabajo debido á la flexión (60 kilogramos por cm.^2) solamente ha experimentado un aumento de 2,95 kilogramos por cm.^2 , por efecto de la compresión. Está, pues, justificado el que se prescinda de la compresión en los cálculos de las piezas de madera, y se determine la escuadría como si se tratase de una pieza sometida solamente al momento de flexión M'_0 , admitiendo desde luego el coeficiente de trabajo ordinario R'_1 , sin perjuicio de formar después el sumando $\frac{Z'}{\omega}$ para ver en

cuánto aumenta R' á causa de la compresión. En general, este aumento será despreciable; pero si no lo fuese, se disminuiría R' , haciéndolo igual á R'' , como hemos hecho en el ejemplo precedente.

768. *Ejemplo 2.º — Pieza de madera, inclinada, empotrada en los dos extremos y cargada uniformemente con p' kilogramos por metro de longitud.*

Datos:

longitud $l = 5$ metros.
 Proyección $h = 3,5$ metros.
 $f = 3,57$ metros.
 $p' = 300$ kilogramos.
 La carga total $P = p' l = 300 \times 5 = 1500$ kilogramos.

La compresión máxima Z' vale [ecuación (26) del núm. 765]:

$$Z' = p' f = 300 \times 3,57 = 1071 \text{ kilogramos.}$$

El momento máximo de flexión M'_0 es igual al M_0 de la pieza proyección, es decir, $\frac{1}{12} P h = \frac{1}{12} \times 1500 \times 3,50$, ó

$$M'_0 = 437 \text{ kilográmetros.}$$

Para $R = 600000$ kilogramos por m.² (60 kilogramos por cm.²), la ecuación $\frac{R a b^2}{6} = M'_0$ da, haciendo $a = \frac{2}{3} b$,

$$b = 0,187 \text{ metros.}$$

$$a = 0,124 \text{ metros.}$$

$$\omega = a b = 0,0231 \text{ m.}^2.$$

La compresión R'_2 es

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{1071}{0,0231} = 4,6 \text{ kilogramos por cm.}^2;$$

de modo que la compresión definitiva sería, solamente, $R' = 64,6$ kilogramos por cm.².

Si para que R' no exceda de 60 kilogramos por cm.², queremos averiguar el aumento a'' que habrá de darse á la dimensión a , conservando la b inalterable, tendremos, tomando las dimensiones en centímetros,

$$Z' = R' a'' b$$

ó

$$a'' = \frac{Z'}{R' b} = \frac{1071}{60 \times 18,7} = 0,9 \text{ centímetros,}$$

es decir, que el aumento de a no llega á valer un centímetro.

769. *Ejemplo 3.º — Viga de hierro doble T, laminada, apoyada en tres puntos O, A, B (fig. 5.ª, lám. 29), siendo OA = AB, y cargada con fuerzas iguales á P en los puntos medios S y D.*

Datos:

$$OB = l = 8 \text{ metros.}$$

$$cd = h = 7 \text{ »}$$

$$BB' = f = 3,87 \text{ »}$$

$$P = 2000 \text{ kilogramos.}$$

Momentos de flexión, esfuerzos cortantes y compresiones. — El momento máximo de flexión es el m'_1 , de la pieza proyección, que tiene lugar en el apoyo intermedio a (núm. 398), y vale

$$m'_1 = -\frac{3}{16} P h = -2625 \text{ kilográmetros.}$$

Las reacciones, en la pieza cd , son

$$F_0 = F_2 = \frac{5}{16} P = 625 \text{ kilogramos.}$$

$$F_1 = \frac{22}{10} P = 2750 \text{ kilogramos.}$$

El esfuerzo cortante máximo, en cd , es

$$C_0 = -\frac{11}{16} P = -1375 \text{ kilogramos.}$$

La compresión máxima Z' será (ecuación 23, núm. 765), puesto que $R = 2 P = 4000$, y sustituyendo Q'' por R_2

$$Z' = F_3 \frac{h^2}{f l} + 2 P \frac{f}{l} = 2923 \text{ kilogramos.}$$

Determinación de la escuadría. — Calculando la viga para que resista á la flexión, y admitiendo un coeficiente de trabajo R'_1 algo menor que el ordinario, por ejemplo, $R'_1 = 5 \times 10^6$ kilogramos por m.² (5 kilogramos por mm.²), de la fórmula $\frac{R'_1 I}{r} = m'_1$ deducimos que ha de ser

$$\frac{I}{r} = \frac{m'_1}{R'_1} = \frac{2625}{5 \times 10^6} = 0,000525.$$

Necesitamos una vigueta cuya sección transversal dé para $\frac{I}{v}$ el valor anterior.

Acudiendo á la tabla 3.^a del núm. 489, hallamos la vigueta núm. 442, en la cual $\frac{I}{v} = 0,000532$, que pesa 60 kilogramos por m. l ; sus dimensiones son $\frac{250 \times 123}{19 \times 14,5}$. El verdadero valor de R'_1 , para esta vigueta, es

$$R'_1 = m'_1 : \frac{I}{r} = \frac{2625}{0,000532} = 4,93 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

El área ω de la sección transversal se obtiene dividiendo el peso del metro lineal por el del metro cúbico (7800 kilogramos), de modo que

$$\omega = \frac{60}{7800} = 0,007692 \text{ m.}^2.$$

El coeficiente de trabajo por la compresión Z' , es

$$R_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{2923}{0,007692} = 0,38 \text{ kilogramos por mm.}^2;$$

de modo que el coeficiente definitivo de trabajo es

$$R' = R'_1 + R'_2 = 4,93 + 0,38 = 5,31 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

Si se quiere comprobar si el aumento que experimenta R'_2 por verificarse la compresión en una viga de longitud grande relativamente á las dimensiones de su sección transversal, es tan elevado que puede obligar á un nuevo cálculo en que R'_1 reciba valor menor, aplicaremos la fórmula (29) del número 766, y será

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right).$$

B es igual á 0,00003, por tener la viga bases planas.

I' es el menor de los momentos de inercia, que tiene lugar para el eje DD (fig. 11, lám. 29). Haciendo uso de la fórmula 22 de la tabla del núm. 477,

$$I' = \frac{a b^3 + a' b'^3}{12},$$

y teniendo presente que

$$\begin{aligned} a &= 0,029 \text{ metros.} & a' &= 0,221 \text{ metros.} \\ b &= 0,123 \text{ »} & b' &= 0,019 \text{ »} \end{aligned}$$

se encuentra

$$I' = 0,00000462,$$

y sustituyendo en el valor R'_2 , se halla

$$R'_2 = 0,38 \times 4,2 = 1,59;$$

de modo que

$$R' = R'_1 + R'_2 = 4,93 + 1,59 = 6,52 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

Este valor es aceptable, así como la vigueta hallada. Aún hubiera sido menor R'_2 si A fuese punto fijo, porque entonces la longitud l , en el valor de R'_2 , queda reducida á la mitad, $OA = AB = \frac{1}{2} l$.

Si R' hubiese resultado demasia lo grande, se comenzarán los cálculos de nuevo, asignando á R'_1 un valor menor que el primitivo.

770. Ejemplo 4.º — *Viga de hierro, en la disposición que representa la fig. 4.ª, lám. 29.* — El apoyo B es vertical ($\delta = 0$). Es el caso del par de una armadura.

Datos:

$$\text{Longitud } OB = l = 10 \text{ metros.}$$

$$\text{Proyección } OB' = h = 8,66 \text{ metros.}$$

$$B B' = f = 5 \text{ metros.}$$

$$\text{Carga por metro lineal de viga} = p' = 430 \text{ kilogramos.}$$

$$\text{Carga total sobre } OB = p'l = 4300 \text{ kilogramos.}$$

771. Primera solución. — La viga es tubular (fig. 6.ª, lám. 29), compuesta de cuatro escuadras a, b, c, d , que forman las cabezas ó cordones, y una doble alma de celosía (líneas de puntos ad, cb) formada de barras planas que se cortan una vez (fig. 4.ª, lám. 29) y de montantes r s normales al eje, de hierro en ángulo. Las dos semivigas ad, bc (fig. 6.ª, lám. 29) están reunidas á intervalos por pequeños bastidores transversales, de hierro en ángulo (líneas de puntos ab, dc, ac y bd). Las dimensiones del tubo rectangular son

$$\text{Altura total de la sección, } ad = 2v = 0,500 \text{ metros.}$$

$$\text{Anchura total, } ab \dots \dots \dots = 0,420 \quad \gg$$

Las cabezas de la viga (hierros en escuadra) se calcularán para resistir al momento máximo de flexión M'_0 y á la compresión máxima Z' , y el alma (barras de la celosía) para que resista al esfuerzo cortante máximo C'_0 .

Determinación de M'_0, Z' y C'_0 . — El momento máximo M'_0 es el mismo que el de la pieza proyección, $OB' = h = 8,66$, apoyada en los dos extremos, como lo está OB , y cargada con todo el peso $p'l = 4300$ kilogramos, uniformemente repartido:

Será, por tanto,

$$M'_0 = \frac{1}{8} P h = \frac{1}{8} \times 4300 \times 8,66 = 4656 \text{ kilográmetros.}$$

La compresión máxima Z' [ecuación (24) del núm. 765], es

$$Z' = \frac{p' h^2}{2 f} + p' f = \frac{430 \times 8,66^2}{2 \times 5} + 430 \times 5 = 5375 \text{ kilogramos.}$$

El esfuerzo cortante máximo $C'_0 = C_0 \cos \alpha$, siendo $C_0 =$ esfuerzo cortante máximo de la pieza proyección $= \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \times 4300 = 2150$ kilogramos.

$$\text{Como } \cos \alpha = \frac{h}{l} = \frac{8,66}{10} = 0,866, \text{ será}$$

$$C'_0 = 2150 \times 0,866 = 1862 \text{ kilogramos.}$$

Determinación de las dimensiones de las escuadras. — Admitiendo un coeficiente de trabajo en la flexión, $R = R'_1 = 6 \times 10^6$ kilogramos por metro cuadrado (6 kilogramos por mm.^2), será

$$\frac{R'_1 I}{v} = M'_0 \quad \text{ " } \quad \frac{I}{v} = \frac{M'_0}{R'_1} = \frac{4656}{6 \times 10^6} = 0,000776.$$

Es preciso, pues, que las cuatro escuadras tengan un valor de $\frac{I}{v}$, para la altura $2v = 0,500$ metros adoptada, igual á 0,000776, ó bien un momento de inercia $I = v \times 0,000776 = 0,250 \times 0,000776 = 0,000194$.

Acudiendo á la tabla 7 del núm. 489, encontramos que el momento de inercia de cuatro escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$, para una altura $2v = 0,500$ metros con respecto al eje DD (fig. 6.ª, lám. 29), es 0,000194213 (*).

Las cuatro escuadras de $\frac{60 \times 60}{8}$ resuelven el problema en cuanto á la flexión, siendo el coeficiente de trabajo, por este concepto, $R'_1 = 6 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 , ó 6 kilogramos por mm.^2 .

Veamos ahora el coeficiente de trabajo R'_2 correspondiente á la compresión Z' , para sumarlo con R'_1 y determinar el coeficiente definitivo. El área ω de las cuatro escuadras es (tabla 7 del núm. 489) $\omega = 0,003584 \text{ m.}^2$, de modo que

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{5375}{0,003584} = 1,50 \times 10^6 \text{ kilogramos por metro cuadrado}$$

$$(1,50 \text{ kilogramos por } \text{mm.}^2).$$

*: I tiene el mismo valor, ya estén separadas las escuadras (fig. 6.ª, lám. 29), ya reunidas de dos en dos (fig. 7.ª, lám. 29). (Véase núm. 476, observación 5.ª).

Resulta, en definitiva,

$$R' = R'_1 + R'_2 = 6 + 1,50 = 7,50 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

El valor de R' es aceptable; si hubiese sido demasiado grande ó demasiado pequeño, se comenzarían los cálculos tomando, en el primer caso, R'_1 menor que el valor primeramente aceptado (6 kilogramos por mm.²) y menor que él en el segundo caso.

Hemos encontrado aceptable el valor de $R' = 7,50$ kilogramos por mm.²; pero para cerciorarse de ello, conviene tomar en consideración el aumento de R'_2 por consecuencia de la posibilidad de flexión lateral. R'_2 se convierte [núm. 766, fórmula (29)] en

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + 0,00003 \frac{\omega l^2}{I'} \right),$$

siendo I' el menor de los momentos de inercia de la sección trasversal.

El momento de inercia con respecto al eje DD (fig. 6.^a, lám. 29) se puede descomponer (figs. 8.^a, 9.^a y 10, lám. 29) en los de los rectángulos F' (fig. 9.^a, lám. 29) y L (fig. 10, lám. 29).

Para el F ,

$$I'_1 = \frac{1}{12} a (b^3 - b'^3) = 0,0000395 \text{ (núm. 477),}$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= 2 \times 0,052 = 0,104 \\ b &= 0,420 - 2 \times 0,052 = 0,316 \\ b' &= 0,420 - 2 \times 0,060 = 0,300. \end{aligned}$$

Para el L ,

$$I'_2 = \frac{1}{12} a' (b''^3 - b'^3) = 0,0000361,$$

siendo

$$\begin{aligned} a' &= 0,016 \\ b'' &= 0,420 \\ b' &= 0,300. \end{aligned}$$

El total $I' = I'_1 + I'_2$, es igual á 0,0000756, valor menor que el

0,000194 que corresponde al eje AA (fig. 6.^a, lám. 29), según hemos hallado anteriormente (*).

El primero es, pues, el mínimo, y sustituido en el valor de R'_2 , se tiene

$$R'_2 = 1,50 \left(1 + 0,00003 \times \frac{0,003584 \times 10^6}{0,0000756} \right)$$

6

$$\begin{aligned} R'_2 &= 1,50 \times 1,14 = 1,71 \text{ kilogramos por mm.}^2 = \\ &1,71 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2. \end{aligned}$$

Como se ve, aun poniéndonos en las condiciones más desfavorables, el aumento de R'_2 es insignificante, siendo, finalmente, el coeficiente R' de trabajo por compresión en los puntos más fatigados

$$R' = R'_1 + R'_2 = 6 + 1,71 = 7,71 \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

6

$$R' = 7,71 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

El segundo valor hallado para R'_2 (1,71) es muy poco superior al primero (1,50), y esto se debe á la forma tubular asignada á la viga que hace que I' é I sean poco diferentes. La ventaja de la viga tubular se hará más sensible cuando estudiemos la *segunda solución*: allí veremos que el incremento de R'_2 puede llegar á ser muy considerable cuando la viga no es tubular.

Dimensiones de las barras de la celosía. — El alma de la viga es doble, de modo que á cada una de las partes corresponderá un esfuerzo cortante $\frac{1}{2} C'_0 = 931$ kilogramos.

Aplicando la fórmula (2) del núm. 557, y suponiendo que las barras de la celosía están inclinadas 45° con respecto á los cordones ó cabezas, tendremos, para área resistente ω de cada barra,

$$\omega = \frac{C'_0}{2nR \cos \alpha} = \frac{931}{2 \times 1 \times 6 \times 10^6 \times 0,707} = 0,000111 \text{ m.}^2.$$

Hemos hecho $n = 1$, porque las barras se cortan una sola vez, y hemos aceptado para coeficiente de trabajo R el valor 6×10^6 (6 kilogramos por mm.²).

* Si se quiere mayor exactitud en la determinación de los valores de I é I' , se restaría del total hallado la parte correspondiente á los tablados para el paso de los roblones (núm. 484).

Si empleamos barras de 4 milímetros de grueso, por ejemplo, el ancho resistente habrá de ser de $\frac{111}{4} = 30$ milímetros, á cuya cantidad habrá de añadirse el diámetro d del roblón que se coloca en el cruce; d se determinará por la fórmula $\frac{\pi d^3}{4} k = C_0 [(3)]$ del núm. 557, haciendo $n = 1$ y $n' = 1$; y dando á k el valor 4 kilogramos por mm.^2 , se deduce $d = 17,2$ milímetros, ó, en números redondos, $d = 18$ milímetros. El ancho de las barras será, pues, de $30 + 18 = 48$ milímetros.

Los montantes, que pueden hacerse de hierro en escuadra, se calcularán como piezas comprimidas, siendo la fuerza de compresión el esfuerzo cortante, que para cada uno de los de cada lado es, como máximo, $\frac{1}{2} C'_0 = 931$ kilogramos.

772. Segunda solución. — La viga no es tubular, y tiene la forma que representa la fig. 7.^a (lám. 29); las cabezas se forman con cuatro hierros en escuadra, unidos de dos en dos, y el alma es de celosía con barras cruzadas como en la fig. 4.^a.

Si asignamos la misma altura $2v = 0^m,500$ á la sección, y admitimos $R'_1 = 6$ kilogramos por mm.^2 , ó $R'_1 = 6 \times 10^6$ por m.^2 , repitiendo los cálculos anteriores encontraríamos las mismas dimensiones para las escuadras ($\frac{60 \times 60}{8}$) y el mismo valor para la compresión simple ($\frac{Z'}{\omega} = 1,50$ kilogramos por mm.^2).

Pero este valor ha de aumentarse mucho en este caso, si se atiende á la flexión lateral y se aplica la fórmula

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + 0,00003 \frac{\omega l^2}{I'} \right);$$

porque I' , mínimo momento de inercia, que es el correspondiente al eje DD (fig. 7.^a, lám. 29), tiene pequeño valor.

Para hallar el mínimo de I' (fig. 11, lám. 29), reuniremos las cuatro escuadras, y resulta una doble T acostada cuyas dimensiones son

$$\begin{array}{ll} a' = 0,104 \text{ metros} & a = 0,016 \text{ metros.} \\ b' = 0,016 & b = 1,20 \end{array}$$

Aplicando la fórmula 22 de la tabla núm. 477, se obtiene

$$I' = \frac{a' b'^3 + a b^3}{12} = 0,00000234.$$

Este valor es mucho menor que el encontrado para la viga tubular (figura 8.^a, lám. 29) en la primera solución ($I' = 0,0000756$), de modo que resultará R'_2 mucho mayor ahora. En efecto, se encuentra

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + 0,00003 \times \frac{0,003584 \times 10^6}{0,00000234} \right)$$

ó
 $R'_2 = 1,50 \times 5,58 = 8,37$ kilogramos por $\text{mm.}^2 = 8,37 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 , de modo que

$$R = R'_1 + R'_2 = 6 + 8,37 = 14,37 \text{ kilogramos por } \text{mm.}^2$$

valor excesivamente grande. Habrá que disminuir R'_1 .

Hagamos $R'_1 = 4$ kilogramos por $\text{mm.}^2 = 4 \times 10^6$ kilogramos por m.^2 . Tendremos,

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R'_1} = \frac{4656}{4 \times 10^6} = 0,001164,$$

de donde, puesto que $v = \frac{1}{2} \times 0,500$ metros = 0,250 metros,

$$I = 0,001164 \times 0,25 = 0,000291.$$

Cuatro escuadras de $\frac{80 \times 80}{10}$, dan, para $2v = 0,500$ metros (tabla 7, núm. 489) $I = 0,000297$, y $\frac{I}{v} = 0,001188$.

El verdadero valor de R'_1 es, para estas escuadras,

$$R'_1 = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{4656}{0,001188}$$

$R'_1 = 3,91 \times 10^6$ kilogramos por $\text{m.}^2 = 3,91$ kilogramos por mm.^2 .

Como ω vale 0,004864 m.², será

$$\frac{Z'}{\omega} = \frac{5375}{0,004864} = 1,10 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2 = 1,10 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

El momento de inercia I' con respecto al eje DD (fig. 11, lám. 29 es), aplicando la fórmula $I' = \frac{ab^3 + a'b'^3}{12}$, y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} a &= 0,020 \text{ metros} & a' &= 0,140 \text{ metros} \\ b &= 0,160 & b' &= 0,220 \\ I' &= 0,00000692; \end{aligned}$$

de modo que

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} \left(1 + 0,00003 \times \frac{\omega l^2}{I'} \right),$$

da, sustituyendo los valores anteriores,

$$R'_2 = 1,10 \times (1 + 2,1) = 3,41 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

y

$$R' = R'_1 + R'_2 = 3,91 + 3,41 = 7,32 \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

valor aceptable.

El alma de la viga se compondría de barras cuya sección transversal es doble de la que hemos hallado para la viga tubular, porque hay una sola celosía.

APLICACIONES. — CÁLCULO DE ESCALERAS

773. Las zancas de una escalera no son otra cosa que piezas inclinadas sometidas á la acción de fuerzas verticales uniformemente repartidas. Si $BCHD$ es la proyección horizontal del tramo (fig. 12, lám. 29), sobre la zanca $B'C'$, BC , actúa la mitad del peso total; de modo que si llamamos p'' al peso por metro cuadrado de huella, sobre la zanca $B'C'$, BC , carga un peso total

$$P = p'' \times \frac{e}{2} \times B'L = \frac{p'' e h}{2}$$

llamando e á la anchura BD del tramo; y á cada metro lineal de proyección de zanca le corresponde

$$p = \frac{P}{BC = h} = \frac{p'' e}{2} \quad (30).$$

Las zancas se terminan por su parte superior en un plano vertical; están, pues, en este punto, en el caso representado en las figs. 10 (lám. 28) y 1.^a (lám. 29) ó sea apoyo superior vertical, ó $\delta = 0$. Según lo dicho en el número **764**, el empuje horizontal E' sobre los apoyos superior é inferior, y la presión vertical A' sobre el apoyo inferior B' , tendrán por valor, siendo $h = B'L$, $f = C'L$, resultante $R = P = p'' \times \frac{1}{2}$ área de $BCHD$, $Q'' =$ reacción del apoyo C en la pieza proyección $BC = \frac{1}{2} P$,

$$\left. \begin{aligned} A' &= P = \frac{p'' e h}{2} \\ E' &= \frac{P h}{2 f} = \frac{p'' e h^2}{4 f} \end{aligned} \right\} (31)$$

y la compresión máxima en el extremo inferior, Z' , debida á $P = \frac{p'' e h}{2}$ se deducirá de las ecuaciones (23) (núm. **765**), haciendo

$$Q'' = \frac{1}{2} P = \frac{p'' e h}{4} \quad \text{y} \quad R = P = \frac{p'' e h}{2};$$

así se obtiene

$$Z' = \frac{p'' e h}{2 l} \left(\frac{h^2}{2 f} + f \right) \quad (32).$$

El apoyo superior no sufre presiones verticales; como ya sabemos, se verifica cuando $\delta = 0$ (núm. **763**).

El momento máximo de flexión M'_0 , es (núm. **761**).

$$M'_0 = \frac{1}{8} P h = \frac{p'' e h^2}{16} \quad (33);$$

y el esfuerzo cortante máximo, $C'_0 = C_0 \cos \alpha = C_0 \frac{h}{l}$ (núm. 762) ó, puesto que C_0 , esfuerzo cortante máximo de la pieza proyección $B'L$, es $\frac{1}{2} P = \frac{p'' e h}{4}$,

$$C'_0 = \frac{p'' e h^2}{4 l} \quad (34).$$

Para determinar la escuadría se empleará la fórmula (28) del núm. 766,

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{Z'}{\omega}$$

porque á causa de la rigidez que le comunican las huellas y contrahuellas de los peldaños, no hay peligro de flexión lateral, ni necesidad de aplicar la fórmula (29), más complicada.

A la compresión máxima Z' , debida á los pesos que inmediatamente insisten sobre la zanca, deberá sumarse cualquiera otra compresión, en sentido del eje, que provenga de las zancas de los tramos superiores, como sucede en algunos casos, según veremos á continuación.

774. A p'' se le pueden dar los valores siguientes:

Cuarteles y edificios públicos, grandes escaleras.....	400 kgs. á 500 kgs.
Edificios privados y en general escaleras de poco tránsito.....	200 » á 300 »

En estas cifras va incluido el peso propio y la sobrecarga.

775. Supongamos que la escalera tiene la organización que representa la fig. 13, lám. 29. BNT es el primer tramo, y HCF el segundo (proyección horizontal); las zancas $T'N$ y $C'F$ apoyan en la viga horizontal BH de la mesilla $BSDH$.

$T'C'$, $C'F'$, son las proyecciones verticales de las zancas, sobre un plano paralelo á éstas, y $B'H'$ la proyección de la viga de la mesilla, sobre un plano vertical paralelo á dicha viga BH .

Las zancas se calcularán por las ecuaciones del número anterior, según lo explicado en el núm. 766 y en los ejemplos que á él siguen.

Las zancas $T'C'$ y $C'F'$ dan, cada una, un empuje E' á la viga BH , que es contrarrestado por el piso de la mesilla. Además, el extremo inferior

C' de la zanca $C'H'$ trasmite á la viga BH , $B'H'$, en el punto C' , una presión vertical E' igual á $\frac{p'' e h}{2}$ [fórmula (31) del número anterior]; de modo que BH , $B'H'$ puede considerarse como pieza apoyada en los extremos y cargada con los pesos siguientes:

1.º Un peso P' uniformemente repartido correspondiente á la mitad $BrdH$ de la mesilla: si llamamos c á la anchura BS' de la mesilla, h' á la longitud de la viga HB y p'' al peso por metro cuadrado de mesilla (igual al de proyección horizontal de escalera), será $P' = \frac{p'' c h'}{2}$, y el momento

máximo de flexión correspondiente á P' , tendrá por valor $M''_0 = \frac{1}{8} P' h'$ ó

$$M''_0 = \frac{p'' c h'^2}{16}.$$

2.º Una fuerza aislada $A' = \frac{p'' e h}{2}$, que obra á una distancia CH del apoyo H igual á c . El momento máximo de flexión correspondiente es (núm. 317).

$$M'''_0 = \frac{A' e (h' - e)}{h'} = \frac{p'' e^2 h (h' - e)}{2 h'}$$

El momento máximo definitivo de la viga BH es, aplicando el principio de superposición de efectos, y suponiendo que los dos máximos parciales tienen lugar en el punto medio (*),

$$M_0 = M''_0 + M'''_0 = \frac{p'' c h'^2}{16} + \frac{p'' e^2 h (h' - e)}{2 h'} \quad (35).$$

El esfuerzo cortante máximo, será:

$$\text{Por la carga repartida.....} \quad \frac{1}{2} P' = \frac{p'' c h'}{4}$$

$$\text{Por la fuerza } A' \text{ (núm. 317).....} \quad A' \frac{h' - e}{h'} = \frac{p'' e h (h' - e)}{2 h'}$$

Las contrahuellas se calculan como piezas apoyadas en los extremos y cargadas con un peso uniformemente repartido, igual al que corresponde á la huella.

*) Hacemos esta hipótesis para colocarnos en el caso más desfavorable. Fácil es, por lo demás, resolver el problema con toda exactitud, hallando analítica ó gráficamente la sección de la viga en que el momento máximo de flexión, total, tiene lugar.

776. La fig. 14, lám. 29, representa una escalera de zanca continua, cuyo primer tramo es $T'S$: N es la primera mesilla y K la segunda.

La zanca OB , $D'B'$ del tercer tramo, se calculará como las del caso considerado en el número anterior. Esta zanca ocasiona en el extremo inferior O , O' , un empuje E' y una presión vertical A' , cuyos valores son dados por las fórmulas (31) del núm. 773. El empuje E' es transmitido al muro de la caja por la vigueta CO , $C'D'$ de la mesilla K , que resulta comprimida según su eje: la presión vertical A' se descompone según la zanca OD , $O'D'$ y la vigueta OH , $O'H'$ de la mesilla K , causando en estas piezas compresiones $O'm$ y $O'n$, cuyo valor es, llamando α al ángulo de inclinación de la zanca con el plano horizontal,

$$O'm = \frac{A'}{\cos \alpha} \quad O'n = A' \cot \alpha.$$

La zanca se calculará por la fórmula

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{Z'_1}{\omega}$$

en la cual Z'_1 es igual al valor de Z' dado por la ecuación (32) correspondiente á dicha zanca, aumentado en la cantidad $O'm$; ó $Z'_1 = Z' + O'm$.

Cuanto á la zanca $D'T$, podemos suponer que la presión vertical A' correspondiente á OB , $O'B'$, que actuaba en O , se ha trasladado á D , D' : aquí se suma con la A'' correspondiente al tramo OD , $O'D'$, de modo que, en resumen, en el punto D , D' viene á actuar una fuerza vertical A''' que es la suma de las A' , A'' , correspondientes á los tramos BO , $B'D'$ y OD , $O'D'$, ó sea la suma de todas las cargas que obran sobre las zancas que están por encima de D , D' .

La compresión $D'n$ que produce en la zanca, será $D'n = \frac{A'''}{\cos \alpha}$, y para el cálculo se hará uso de la ecuación

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{Z'_2}{\omega}$$

siendo $Z'_2 = Z' + D'n$.

777. Ejemplo 1.º— Cálculo de la escalera representada en la fig. 13, lámina 29.

Datos:

Longitud de la zanca.....	$C'F' = l = 4,48$ metros.
Idem de la proyección... ..	$CF = h = 4$ metros.
Idem de.....	$F'L = f = 2,04$ metros.
Ángulo de inclinación.....	$= \alpha = 27^\circ$.
Ancho de la escalera.....	$= e = 2$ metros.
Peso por metro cuadrado de proyección de escalera.....	$= p'' = 400$ kilogramos.
Ancho de la mesilla.....	$= c = BS = 2$ metros.
Longitud $HB = h'$	$= 5$ metros.

Cálculo de la zanca $C'F'$ (la NT se calcularía de modo idéntico).— Haremos uso de las ecuaciones del núm. 773, y tendremos:

$$\text{Compresión máxima} = Z' = \frac{p''eh}{2l} \left(\frac{h^2}{2f} + f \right) = 2142 \text{ kilogramos.}$$

$$\text{Momento máximo de flexión} = M'_0 = \frac{p''eh^2}{16} = 800 \text{ kilográmetros.}$$

$$\text{Presión } A' \text{ en } (C, C'); A' = \frac{p''eh}{2} = 1600 \text{ kilogramos.}$$

La zanca ha de ser una vigueta laminada, en forma de U (fig. 15, lámina 29).

La ecuación de resistencia es

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{Z'}{\omega} = R'_1 + R'_2.$$

Seguiremos el método explicado en el núm. 766, y en los ejemplos de los núms. 769 y 770.

$$\text{Haremos } R'_1 = 6 \times 10^6 \quad \frac{I}{v} = \frac{M'_0}{R'_1} = \frac{800}{6 \times 10^6} = 0,000133.$$

Acudiendo á la tabla 2.ª del núm. 489, hallamos una U de $\frac{175 \times 67}{15 \times 11}$

En el ejemplo anterior, para un coeficiente de trabajo $R'_1 = 7 \times 10^8$ por m.², es

$$\frac{I}{v} = \frac{M'_0}{R'_1} = 0,000114.$$

Fijando la altura $b = 2v$ de la sección de la zanca en 0,24 metros, será $I = 0,000114 \times 0,12 = 0,00001368$. La tabla 7.^a del núm. 489 contiene los momentos de inercia de cuatro escuadras; tomando la mitad de los valores, tendremos los correspondientes á dos escuadras. Haciendo uso de esta tabla, y de la núm. 4, hallamos para $b = 2v = 240$ milímetros:

	I
Dos escuadras de $\frac{40 \times 40}{5}$ (tabla 7. ^a).....	0,000 008 46
Un alma de palastro, de 240 milímetros de altura y 5 milímetros de grueso (tabla 4. ^a) = $5 \times 0,000001144$	0,000 005 72
I	0,000 014 18
$\frac{I}{v} = \frac{I}{0,12}$	0,000 117

El verdadero valor de R'_1 , será

$$R'_1 = M'_0 : \frac{I}{v} = \frac{800}{0,000117} = 6,83 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

El área ω de la sección, vale:

Por las dos escuadras.....	750 mm. ²
Por el alma.....	1200 »
	$\omega = 1950$ »

El coeficiente de trabajo por compresión será

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{2142}{1950} = 1,10 \text{ kilogramos por mm.}^2$$

y el definitivo

$$R' = R'_1 + R'_2 = 6,83 + 1,10 = 7,93,$$

que es valor aceptable.

La zanca se compondrá, pues, de dos escuadras de $\frac{40 \times 40}{5}$ y un alma llena de 240 \times 5.

779. La zanca puede ser de celosía, con un hierro en escuadra para cada cabeza (fig. 17, lám. 29).

Para la determinación de R' se tomará en consideración únicamente las escuadras; el alma en celosía se calculará para que resista al esfuerzo cortante.

Admitiendo para altura $b = 2v$ de la viga, 0,300 metros, tendremos, partiendo de un valor de R'_1 , algo menor que en los casos anteriores, porque el $R'_2 = \frac{Z'}{\omega}$ será ahora mayor en razón á que ω es igual tan sólo al área de las dos escuadras;

$$R'_1 = 6 \times 10^8 \text{ por m.}^2 \quad \frac{I}{v} = \frac{M'_0}{R'_1} = 0,000 133$$

$$v = 0,15 \text{ metros}$$

$$I = 0,0000 1995.$$

En dos escuadras de $\frac{50 \times 50}{7}$, es $I = 0,0000 228$, para $b = 2v = 300$ milímetros (tabla 7.^a del núm. 489); de modo que $\frac{I}{v} = 0,000 152$, y el verdadero valor de R'_1 , es

$$R'_1 = M'_0 : \frac{I}{v} = \frac{800}{0,000152} = 5,26 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

El área ω de las dos escuadras es 1302 mm.², y entonces

$$R'_2 = \frac{Z'}{\omega} = \frac{2142}{1302} = 1,64 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

En definitiva, el coeficiente de trabajo máximo por compresión, es

$$R' = R'_1 + R'_2 = 5,26 + 1,64 = 6,90 \text{ kilogramos por mm.}^2,$$

valor aceptable.

La celosía se calcularía del modo explicado en el núm. 557 (véase también el ejemplo del núm. 770). El esfuerzo cortante [fórmula (34) del número 773] sería, en el caso presente,

$$C'_0 = \frac{p'' e h^2}{4l} = 714 \text{ kilogramos.}$$

Ejemplo 2.º — Cálculo de la escalera representada en la fig. 14 de la lámina 29.

Datos:

- Angulo de inclinación de todas las zancas..... = $\alpha = 27^\circ$.
- Carga por metro cuadrado de proyección horizontal..... = $p'' = 300$ kilogramos.
- Ancho de la escalera en todos los tramos..... = $e = 1,60$ metros.
- Zanca $OB, D'B'$; longitud de la proyección..... = $h = 4,5$ metros.

$$\begin{array}{l} \text{Zanca } OD, O'D'. \left\{ \begin{array}{l} h' = 3,00 \text{ metros.} \\ l' = 3,36 \text{ »} \\ f' = 1,53 \text{ »} \end{array} \right. \\ \text{Zanca } DT, D'T'. \left\{ \begin{array}{l} h'' = 4,00 \text{ »} \\ l'' = 4,48 \text{ »} \\ f'' = 2,04 \text{ »} \end{array} \right. \end{array}$$

Valor A' de la presión en D', O , producida por la zanca $D'B', OB$:

$$A' = \frac{p'' e h}{2} = 1080 \text{ kilogramos.}$$

Valor A'' de la presión producida en D', D , por la zanca $O'D', OD$:

$$A'' = \frac{p'' e h'}{2} = 720 \text{ kilogramos.}$$

Valor de A''' :

$$A''' = A' + A'' = 1800 \text{ kilogramos.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Compresiones producidas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zanca } O'D', OD \text{ ,, } O'm = \frac{A'}{\cos \alpha} = 1212 \text{ kilogs.} \\ \text{por las fuerzas } A' \text{ y } A'' \left. \begin{array}{l} \text{Zanca } D'T', DT \text{ ,, } D'n = \frac{A''}{\cos \alpha} = 2020 \text{ »} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Compresiones Z' en las zancas, calculadas por la fórmula (32) del número 773:

$$\begin{array}{l} \text{Zanca } O'D', OD \dots\dots\dots Z' = 963 \text{ kilogramos.} \\ \text{Zanca } D'T', DT \dots\dots\dots Z' = 1284 \text{ »} \end{array}$$

Compresiones totales:

$$\begin{array}{l} \text{Zanca } O'D', OD \dots\dots Z'_1 = Z' + O'm = 2176 \text{ kilogramos.} \\ \text{Zanca } D'T', DT \dots\dots Z'_1 = Z' + D'n = 3304 \text{ »} \end{array}$$

Momentos máximos de flexión M'_0 [fórmula (23) del núm. 773]:

$$\begin{array}{l} \text{Zanca } O'D', OD \dots\dots\dots M'_0 = 270 \text{ kilográmetros.} \\ \text{Zanca } D'T', DT \dots\dots\dots M'_0 = 480 \text{ »} \end{array}$$

Supongamos que la zanca es un palastro de sección rectangular (fig. 18, lám. 29) de altura resistente $mn = b$, y de grueso a ; esta forma alargada puede emplearse, sin peligro de flexión lateral, por la rigidez que en este sentido proporcionan las contrahuellas y huellas.

Comenzaremos el cálculo por la zanca inferior $D'T', DT$, que es la que se encuentra en peores condiciones.

Para un coeficiente $R'_1 = 6 \times 10^6$ kilogramos por m.², será

$$\frac{I}{r} = \frac{a b^2}{6} = \frac{M'_0}{R} = 0,00008,$$

ecuación que se satisface con $b = 0,21$ metros, y $a = 0,01$ metros; y como

$$R'_2 = \frac{Z'_1}{\omega} = \frac{3304}{0,0021} = 1,57 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2, \text{ será}$$

$$R' = R'_1 + R'_2 = (6 + 1,57) \times 10^6 \text{ kilogs. por m.}^2 \text{ (7,57 kilogs. por mm.}^2),$$

valor aceptable.

Para la zanca $O' D'$, conservaremos el valor $b = 0,21$ metros de altura resistente, pero el grueso a deberá ser menor, porque M'_0 y Z'_1 son menores también.

Para $R'_1 = 6 \times 10^6$, la ecuación

$$\frac{R'_1 a b^2}{6} = M'_0,$$

da $a = 0,0061$ metros; ahora es $\omega = 0,21 \times 0,0061 = 0,001281$ m.², y

$$R'_2 = \frac{Z'_1}{\omega} = \frac{2175}{0,001281} = 1,70 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

Resulta $R' = R'_1 + R'_2 = (6 + 1,7) \times 10^6$ kilogramos por m.² (7,7 kilogramos por mm.²), valor aceptable.

La zanca $D' B'$ se calcularía como en el ejemplo del número anterior.

En las juntas $A B$ (fig. 18, lám. 29) se colocan uno ó dos cubrejuntas D , y se calcula la roblonadura por las reglas enunciadas en los núms. 262 y 268.

IX

TORSIÓN

EXPRESIÓN DEL MOMENTO

DE LAS FUERZAS ELÁSTICAS

780. Definiciones. — Cuando un sólido se halla sometido á fuerzas que obran en planos normales á su eje (fig. 1.^a, lám. 27), se produce en aquél una *torsión* (núm. 41). Las secciones transversales O' , O'' (fig. 2.^a, lám. 27) experimentan rotaciones de diversa amplitud, y las generatrices se transforman en líneas helicoidales.

El ángulo $CO''c$ que mide la rotación de la sección extrema O'' , supuesta fija la O , se llama *ángulo de torsión*, y lo representaremos con la letra U , que expresará el desarrollo del arco de radio unidad, correspondiente.

El momento del par de torsión, ó la suma de momentos, cuando hay más de una fuerza (fig. 1.^a, lám. 27), se denomina *momento de torsión*. El momento de torsión engendra en el interior del sólido un *momento de fuerzas elásticas* que le hace equilibrio.

781. Resultados de la experiencia. Sólidos de revolución. — Cualquiera que sea la magnitud de la torsión operada en un sólido de revolución, está probado por la experiencia que sus dimensiones y forma permanecen inalterables, de modo que el volumen y la densidad son constantes.

Toda recta normal al eje antes de la torsión continúa siéndolo mientras ésta se verifica y después de terminada. Las experiencias de Duguet no dejan duda en este punto: sometiendo á torsión cilindros de cobre, hierro y acero dulce, en los cuales se habían introducido, preliminarmente, delgadas agujas normalmente al eje, se observó que estas agujas se conservaban rectas (fig. 3.^a, lám. 27).

Dedúcese de esta experiencia que las secciones rectas son planas antes y

después de la torsión, y que las deformaciones consisten en rotaciones de las secciones rectas alrededor del eje de la superficie de revolución. En la fig. 2.^a (lám. 27), si suponemos fija la sección O , y aplicada á la O'' la fuerza P , los tres radios paralelos antes de la deformación, OA , $O'B$, $O''C$, toman por efecto de la torsión las posiciones OA , $O'b$, $O''c$; de modo que las secciones O' y O'' han girado, respectivamente, las cantidades angulares $BO'b$, $CO''c$.

La generatriz rectilínea AC , trazada en una superficie cilíndrica, se convierte en la hélice abc , á causa de la torsión. Este hecho experimental fija la naturaleza de las rotaciones de las secciones rectas, pues demuestra que los arcos circulares Bb , Cc que las miden son proporcionales á las longitudes de sólido AB , AC .

Si U es el ángulo $CO''c$ de torsión correspondiente al sólido de longitud l , el $BO'b = u$ relativo á la longitud 1, será

$$u = \frac{U}{l};$$

u recibe el nombre de *ángulo de torsión por unidad lineal de sólido*, y representa el arco de radio unidad correspondiente.

782. Períodos de la deformación. — Apliquemos á un cilindro de longitud l y radio r , momentos de torsión crecientes de modo gradual, á partir de cero, hasta conseguir la fractura; si tomamos como abscisas $O'b$, $O'd$, etcétera (fig. 4.^a, lám. 27), las deformaciones medidas por los valores de u , ó por los arcos $r \times u$ rectificadas, y como ordenadas ba , dc , etc., los momentos de torsión, se obtiene una línea $Oacm$ que presenta las singularidades siguientes:

Primer período ó período elástico. — La parte Oa es rectilínea, lo cual demuestra que las deformaciones son proporcionales á los momentos de torsión.

Este período se llama *elástico*, como su semejante de la *tracción* y de la *compresión* (núms. 51 y 82); cuando el par de torsión cesa de obrar, desaparece, á la simple vista la deformación, es decir, que u , ángulo de torsión por unidad lineal, se convierte en cero.

El punto a corresponde al *límite de elasticidad*; la ordenada ab es el *momento límite de elasticidad* relativo al ejemplar de prueba, y la abscisa $O'b$ la deformación límite correspondiente.

Segundo período. — A partir de ab , las deformaciones $O'd$, $O'u$, crecen más aprisa que los momentos de torsión cd , mu , hasta llegar al momento d : fractura mu y torsión correspondiente $O'u$.

En los materiales de gran ductilidad, la parte cm de curva se confunde con una recta paralela al eje OX .

En este período, aun cuando el momento de torsión se anule, el ángulo de torsión no desaparece por completo, sino que queda una parte como deformación permanente visible.

Cuando el momento de torsión st es mayor que el límite ab y deja de obrar, queda como deformación permanente OO' . Si se somete de nuevo el mismo ejemplar de ensayo á torsión, resulta un nuevo *momento límite de elasticidad* que es st , esto es, el momento máximo de la experiencia anterior.

La fractura se opera próximamente en un plano; comienza en la superficie exterior del sólido y se propaga hacia el interior. Presenta un punto o , muy señalado, que parece ser el centro de rotación, pero que no siempre coincide con el eje del cilindro (fig. 5.^a, lám. 27), en cuyo caso la fractura se manifiesta primeramente en la parte a más alejada de o . La homogeneidad más ó menos perfecta del material, influye considerablemente en la *excentricidad* observada.

Las figs. 6.^a y 7.^a (lám. 27) se refieren á experiencias realizadas por Duguet, y corresponden, la 6.^a, á un cilindro de fundición mezclada de Ruelle, y la 7.^a á una barra cilíndrica de acero duro de herramienta.

783. Experiencias de Coulomb. — Las experiencias de torsión realizadas por Coulomb con alambres metálicos, pueden resumirse en la ecuación

$$u = A \frac{M}{r^4} \quad (1),$$

que dice que *el ángulo de torsión, por unidad lineal de cilindro, es directamente proporcional al momento de torsión M , é inversamente proporcional á la cuarta potencia del radio r* . A es una constante que depende de la naturaleza del material.

Para los cilindros huecos, de radio interior r_1 , será

$$u = A \frac{M}{r^4 - r_1^4} \quad (2).$$

La cantidad u puede ser sustituida por su igual $\frac{U}{l}$, siendo, como sabemos, U el ángulo total de torsión y l la longitud del cilindro.

784. Sólidos prismáticos. — Cuando los sólidos no son de revolución, la

torsión origina también rotaciones en las secciones transversales, pero con una diferencia que importa hacer notar: las secciones rectas, planas antes de las deformaciones, no continúan siéndolo después de que la torsión se ha efectuado.

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE RESISTENCIA Y RIGIDEZ

785. **Sólidos de revolución. Momento de las fuerzas elásticas.** — La torsión produce rotaciones de las secciones transversales, y éstas engendran verdaderos *esfuerzos cortantes* en las fibras paralelas al eje, de que supondremos formado el sólido. Es, pues, aplicable á la torsión la fórmula del número 20,

$$E' = \frac{p'}{i_1},$$

en el cual

E' = coeficiente de elasticidad transversal.

p' = fuerza transversal, ó cortante, por unidad superficial de sección recta.

i_1 = deformación lineal por unidad de longitud de sólido.

Consideremos la parte de sólido comprendido por las secciones rectas O y O' (fig. 2.^a, lám. 27) que distan la unidad de longitud; sea $m m'$ una fibra elemental, situada á la distancia $O' m' = z$ del eje, y llamemos $d\omega$ al área de su sección transversal. Por efecto de la torsión, la base m' de la fibra se ha trasladado á n (suponiendo empotrado el sólido en el extremo inferior) obedeciendo á una fuerza p' por unidad superficial, ó sea $p' d\omega$ para la fibra citada; p' es un esfuerzo cortante, contenido en el plano O' , producido por la torsión.

El ángulo $B O' b$ está medida por u (núm. 781), y el arco $m' n$ tiene por valor $z u$ y mide la deformación lineal, por esfuerzo cortante, correspondiente á la fibra $m m'$ de longitud unidad. Resulta, pues, que $i_1 = z u$.

El momento de torsión ha engendrado fuerzas como la p' en el plano O' , y ésta á su vez desarrollan otras p'_1 , elásticas, iguales y contrarias, que se oponen á la deformación, esto es, á la rotación de la sección O' . Siendo p'_1 , como p' , una fuerza por unidad superficial, resulta que la fibra elemental $m' m$ dará lugar á la fuerza elástica $p'_1 d\omega$, en el plano O' ; el momento de esta fuerza con respecto á O' es $p'_1 z d\omega$, y la suma de momentos de todas las

fibras, ó sea el momento de fuerzas elásticas que se desarrollan en el plano O' y hacen equilibrio al momento de torsión, será

$$M' = \int \int p'_1 z d\omega.$$

Pero $p'_1 = p'$, y aplicando la ecuación

$$E' = \frac{p'}{i_1},$$

y puesto que, según acabamos de ver, $i_1 = z u$,

$$p' = E' i_1 = E' z u \quad (1);$$

de modo que

$$M' = \int \int E' u z^2 d\omega,$$

y como E' y u son constantes para todas las fibras,

$$M' = E' u \int \int z^2 d\omega.$$

Però $\int \int z^2 d\omega$ no es otra cosa que la suma de productos de las áreas elementales de la sección O' por los cuadrados z^2 de sus distancias al eje O' , es decir, el momento de inercia polar I_p de la sección (*) (fig. 24, lám. 27). Luego

$$M' = E' I_p u.$$

786. **Ecuaciones de resistencia y rigidez.** — El equilibrio exige que

(*) Recordaremos que I_p momento de inercia de una figura, con respecto al eje OZ normal á su plano y que pasa por su centro de gravedad (fig. 24, lám. 27), es decir, el momento de inercia polar, es igual á la suma de los momentos de inercia de dicha área con respecto á dos ejes principales OX, OY contenidos en su plano, de modo que $I_p = I_x + I_y$.

Como en los polígonos regulares y en el círculo se verifica que $I_x = I_y = I$, tendremos que $I_p = 2I$, siendo I el momento de inercia con respecto á un eje que pasa por el centro de gravedad de la figura y contenido en su plano.

el momento de fuerzas elásticas M' sea igual al de torsión M , ó

$$E' u I_p = M \quad (2),$$

de donde

$$u = \frac{M}{E' I_p} \quad (3).$$

De la ecuación (1) anterior deducimos que $E' u = \frac{p'}{z}$; luego la (2) se convierte en

$$\frac{p' I_p}{z} = M \quad (4),$$

ecuación de la misma forma que la (10) del núm. 307, relativa á la flexión.

De la (4) se obtiene $p' = \frac{Mz}{I_p}$, valor del esfuerzo cortante p' por unidad superficial, desarrollada por efecto de la torsión. El máximo de p' corresponde al máximo de M (M_0) y al de $z = r$, suponiendo un sólido cilíndrico, en cuyo caso $I_p = \text{constante}$. La intensidad de esfuerzos puede ser representada por la de tintas de la fig. 8.^a (lám. 27); la fatiga molecular máxima p' por esfuerzo cortante corresponde al anillo de fibras exterior, de radio r , y va disminuyendo hacia el centro.

Si ha de haber resistencia, es preciso que el máximo de p' sea á lo más igual á R'' , coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante; tendremos, pues,

$$\frac{R'' I_p}{r} = M_0 \quad (5),$$

como ecuación de resistencia; siendo:

$R'' =$ coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante.

$r =$ radio del cilindro.

$I_p =$ momento de inercia polar de la sección transversal.

$M_0 =$ momento máximo de torsión.

Las deformaciones serán dadas por la ecuación (3) que puede ponerse bajo esta otra forma, haciendo $u = \frac{U}{l}$.

$$\frac{U}{l} = \frac{M_0}{E' I_p} \quad (6),$$

en la cual:

$U =$ arco de radio unidad, que sirve de medida del ángulo total de torsión.

$l =$ longitud del cilindro.

$E' =$ coeficiente de elasticidad trasversal.

Las ecuaciones (5) y (6) resuelven los problemas de torsión; sustituyendo I_p por su valor, que es

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} \text{ para el círculo lleno,}$$

$$I_p = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{2} \text{ para la corona circular, de radios } r \text{ (exterior) y } r_1 \text{ (interior)}$$

tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R'' \pi r^5}{2} &= M_0 & (7) \\ \frac{U}{l} &= \frac{2}{\pi E'} \frac{M_0}{r^4} & (8) \end{aligned} \right\} \text{ cilindro macizo.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{R'' \pi (r^4 - r_1^4)}{2 r} &= M_0 & (9) \\ \frac{U}{l} &= \frac{2}{\pi E'} \frac{M_0}{r^4 - r_1^4} & (10) \end{aligned} \right\} \text{ cilindro hueco.}$$

El valor de U , dado por las fórmulas (8) y (10), es el lineal correspondiente al arco de radio unidad; fácil es pasar al valor angular U'' , ya por las tablas de grados y arcos, ya por la proporción $U'' : 360'' :: U : 2\pi$.

Las fórmulas (8) y (10) son iguales á las de Coulomb [(1) y (2) del número 783], siendo

$$A = \frac{2}{\pi E'}.$$

Todas las ecuaciones anteriores son aplicables solamente dentro del período elástico, puesto que se fundan en la igualdad $E' = \frac{p'}{i_1}$ que es exacta tan sólo para dicho período.

787. Determinación de los momentos máximos de torsión. — Para que no haya al propio tiempo momento de flexión, supondremos que el sólido

está apoyado en todos los puntos correspondientes á la aplicación de las fuerzas de torsión. En todos los casos que vamos á considerar, tomaremos como eje OX el del sólido, y como origen el extremo O de la derecha; P , P' , etc., serán las fuerzas de torsión, y h , h' , etc., los brazos de palanca respectivos.

1.º Fuerza P , aislada en un extremo O (fig. 9.ª, lám. 27). — Para una sección cualquiera A , el momento de torsión es $M = Ph$; esta cantidad es constante en todo el sólido, de modo que podemos establecer

$$M_0 = Ph.$$

2.º Fuerza P uniformemente repartida en toda la longitud l , siendo constante el brazo de palanca h (fig. 10, lám. 27). — A la unidad de longitud de sólido corresponderá una fuerza $p = \frac{P}{l}$.

Para una sección cualquiera A de abcisa x , será $M = pxh = \frac{Ph}{l}x$, ecuación de la recta OB .

El mínimo de M tiene lugar en la sección O ($x = 0$); el máximo corresponde á la sección H ($x = l$) y tiene por valor

$$M_0 = Ph,$$

como si toda la fuerza P estuviese aplicada en el extremo O .

3.º Fuerza P distribuída uniformemente, á razón de $p = \frac{P}{l}$ por unidad de longitud de sólido; los brazos de palanca varían como las ordenadas de la recta OB (fig. 11, lám. 27), siendo el mayor $BH = h$.

Para una sección cualquiera A de abcisa x , la fuerza de torsión será px , y el brazo de palanca ab de la resultante px corresponderá á la abcisa $Ob = \frac{2}{3}x$, pues ha de pasar por el centro de gravedad del triángulo OAD .

Tendremos:

$$M = px \cdot ab;$$

pero la semejanza de los triángulos OBH y Oab da

$$ab : BH = h :: Ob = \frac{2}{3}x : OH = l$$

ó

$$ab = \frac{2}{3} \frac{xh}{l};$$

de modo que, sustituyendo en M ,

$$M = \frac{2}{3} \frac{ph}{l} x^2;$$

ó

$$M = \frac{2}{3} Ph \frac{x^2}{l^2};$$

ecuación de la parábola OL . El máximo de M tiene lugar en la sección H ($x = l$), y vale

$$M_0 = \frac{2}{3} Ph.$$

4.º Fuerzas aisladas P , P' , P'' (fig. 12, lám. 27). — Llamemos h , h' y h'' los brazos de palanca respectivos.

Los valores de M , son:

Entre O y A	$M = Ph$.
Entre A y B	$M = Ph + P'h'$.
Entre B y H	$M = Ph + P'h' + P''h''$.

El máximo $M_0 = Ph + P'h' + P''h''$ corresponde á la sección H .

Los valores de M están representados por las ordenadas de la línea quebrada $abc h' h$.

5.º Fuerza P aplicada en un plano A situado á las distancias f y c , respectivamente, de los extremos fijos O y H (fig. 13, lám. 27). — Sea h el brazo de palanca de P : esta fuerza da origen á dos reacciones Q' y Q'' , de igual brazo de palanca h , que tienen por valor

$$Q' = \frac{Pf}{l} \quad Q'' = \frac{Pc}{l}.$$

Puede considerarse que la sección A es la fija, y que en las extre-

mas O y H obran los momentos de torsión $Q'' h$ y $Q' h$; tendremos, pues,

Entre A y O $M = \frac{Pc}{l} h.$

Entre A y H $M = Q'' - Ph = -\frac{Pf}{l} h.$

Suponiendo $c > f$,

$$M_0 = \frac{Pc}{l} h.$$

Los valores de M son los de las rectas ab , bm , paralelas al eje: cambian de signo al pasar de OA á AH ; y, en efecto, las rotaciones de la sección A , con respecto á la O , son de dirección contraria á las de A referidas á la H .

6.º Fuerza P uniformemente repartida. Extremos O y H fijos (fig. 14, lámina 27). — Las reacciones Q' y Q'' , son:

$$Q' = Q'' = \frac{P}{2} = \frac{pl}{2}.$$

El momento M para una sección A de abscisa x , es

$$M = Q'' h - pxh$$

6

$$M = ph \left(\frac{l}{2} - x \right);$$

ecuación de las rectas BD .

Para $x = 0$ (punto O)..... $M = \frac{1}{2} phl.$

• $x = \frac{1}{2} l$ (punto S)..... $M = 0.$

• $x = l$ (punto H)..... $M = -\frac{1}{2} phl.$

El momento máximo vale

$$M_0 = \pm \frac{1}{2} phl = \pm \frac{1}{2} Ph,$$

y corresponde á las secciones extremas O y H .

Los momentos de torsión cambian de signo al pasar de OA á AH , lo que demuestra que las rotaciones son en sentido opuesto en estas partes.

788. Resolución de los problemas. — El momento máximo de torsión es, como acabamos de ver, de la forma

$$M_0 = k Ph,$$

siendo k un factor numérico que depende del caso de torsión.

Sustituyendo M_0 en las ecuaciones (7) á (10) del núm. 786, encontramos la relación que liga á las cantidades P , h , r , R'' y U ; de modo que pueden, con su auxilio, resolverse los siguientes problemas:

1.º Conocida la sección (r) y longitud (l) del sólido, calcular la fuerza de torsión (P) ó su brazo de palanca (h); determinar también el ángulo de torsión (U).

2.º Siendo datos la fuerza de torsión (P), su brazo de palanca (h) y la longitud del sólido (l), calcular las dimensiones de la sección transversal (r) y el ángulo de rotación (U).

3.º Conocidas las dimensiones del sólido (r y l) y el momento de torsión (P y h), determinar el coeficiente de trabajo R'' (problema de reconocimientos). Ninguno de estos problemas ofrece dificultad; pero antes de presentar ejemplos que así lo demuestren, conviene recordar los valores de E' (coeficiente de elasticidad transversal) y de R'' (coeficiente de trabajo por esfuerzo cortante) que son las constantes específicas que intervienen en las ecuaciones antes citadas, y de que ya nos hemos ocupado en los núms. 99, 100, 116, 123 y siguientes.

MATERIALES	COEFICIENTE de elasticidad transversal. E'		COEFICIENTE de trabajo por esfuerzo cortante. R''	
	Kgs. por m. ²	Kgs. por m. ²	Kgs. por m. ²	Kgs. por mm. ²
Acero dulce de construcciones.....	$8,8 \times 10^9$	8800	8×10^6	8
Hierro.....	8×10^9	8000	6×10^6	6
Fundición ordinaria de segunda fusión.....	2×10^9	2000	3×10^6	3
Cobre.....	$4,4 \times 10^9$	4400	4×10^6	4
Bronce de cañones.....	$1,06 \times 10^9$	1060	2×10^6	2
Pino.....	$0,433 \times 10^9$	433	6×10^5	0,6
Encina.....	$0,460 \times 10^9$	460	6×10^5	0,6

789. Ejemplo 1.º — Cilindro macizo de encina, de 0,1 metro de radio y 2 metros de longitud, sometido á torsión por una fuerza P aplicada á la sección libre O (fig. 9.ª, lám. 27) con un brazo de palanca $h = 0,4$ metros. Se desea conocer el valor de P y la deformación angular U^0 .

Datos, refiriendo las dimensiones al metro y al kilogramo :

- $l = 2$ metros.
- $r = 0,1$ metro.
- $h = 0,4$ metros.
- $R'' = 600\ 000$ kilogramos por metro cuadrado.
- $E' = 400\ 000\ 000$ por metro cuadrado.
- $M_0 = P h$ (caso 1.º del número anterior).

Ecuaciones de resistencia [núm. 786, ecuación (7)]:

$$\frac{R'' \pi r^3}{2} = P h$$

$$P = \frac{R'' \pi r^3}{2 h} = \frac{600\ 000 \times 3,14 \times 0,1^3}{2 \times 0,4} = 2355 \text{ kilogramos.}$$

$$M_0 = 2355 \times 0,4 = 942 \text{ kilográmetros.}$$

Deformación:

$$\frac{U}{l} = \frac{2 M_0}{\pi E' r^4}$$

$$U = \frac{2 M_0 l}{\pi E' r^4} = \frac{2 \times 942 \times 2}{3,14 \times 400\ 000\ 000 \times 0,1^4} = 0,03$$

$$U^0 = 1^0,43'$$

Ejemplo 2.º — Cilindro de hierro de 3 metros de longitud, en las circunstancias del caso 6.º del número anterior (fig. 14, lám. 27).

Datos:

- $l = 3$ metros.
- $P = 6000$ kilogramos.
- $h = 0,3$ metros.
- $R'' = 6 \times 10^6$ por metro cuadrado.
- $E' = 8 \times 10^9$ por íd.

Dimensiones del cilindro:

$$r^5 = \frac{2 M_0}{R'' \pi} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times 6000 \times 0,3}{6 \times 10^6 \times 3,14} = 0,000\ 095$$

$$\text{radio} = r = \sqrt[5]{0,000095} = 0,046 \text{ metros.}$$

Angulo total de torsión:

$$U = \frac{2 M_0 l}{\pi E' r^4} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times 6000 \times 0,3 \times 3}{3,14 \times 8 \times 10^9 \times 0,046^4}$$

- Arco de radio 1..... $U = 0,048$
- Angulo correspondiente..... $U = 2^0,45'$.

Ejemplo 3.º Se desea conocer el coeficiente de trabajo correspondiente á un cilindro que se encuentra en el caso 5.º del número anterior (fig. 13, lámina 27).

Datos:

- $l = 4$ metros.
- $f = 1$ metro.
- $c = 3$ metros.
- $r = 0,05$ metros.
- $P = 4000$ kilogramos.
- $h = 0,5$ metros.
- $M_0 = \frac{P c}{l} h = 1500$ kilográmetros.

$$R'' = \frac{2 M_0}{\pi r^3} = \frac{2 \times 1500}{3,14 \times 0,05^3} = 7,7 \times 10^6 \text{ por metro cuadrado,}$$

$$R'' = 7,7 \text{ kilogramos por mm.}^2.$$

790. Sólidos de igual resistencia. — En los problemas anteriores se ha determinado el radio del cilindro atendiendo al momento máximo de torsión M_0 y á la sección más peligrosa, y asignando las mismas dimensiones á las secciones restantes. Pero puede subordinarse el valor de r (radio) ó l

(diámetro) de cada sección al valor particular de M , de modo que R'' sea siempre el mismo.

El sólido de igual resistencia se obtiene estableciendo la condición de $R'' = \text{constante}$ en las ecuaciones de resistencia (7) y (9) del núm. 786, poniendo en vez de M_0 la expresión del momento general de torsión, que es función de x .

Para los sólidos macizos, será

$$r^5 = \frac{2}{R'' \pi} M = \frac{2}{R'' \pi} f(P, h, x),$$

y esta ecuación, que relaciona r y x , es la de la curva generatriz del cuerpo de revolución.

Para los sólidos huecos, sería

$$\frac{r^4 - r_1^4}{r} = \frac{2M}{R'' \pi} = \frac{2}{R'' \pi} f(P, h, x).$$

Se puede hacer constante una de las dos variables r ó r_1 .

El ángulo de torsión U es mayor en los sólidos de igual resistencia; se determina por la ecuación $\frac{dU}{dx} = \frac{M}{I_x E'}$, siendo I_x el momento de inercia polar de la sección de abscisa x .

791. Supongamos que se trata del caso 2.º del núm. 787 (fig. 10, lám. 27). Llamando y al radio variable, será

$$M = \frac{Ph}{l} x$$

$$\frac{R'' \pi y^5}{2} = \frac{Ph}{l} x.$$

Para el extremo H , de abscisa $x = l$ (fig. 15, lám. 27), el radio r' se deduce de la ecuación

$$\frac{R'' \pi r'^5}{2} = Ph.$$

De esta igualdad, y de la anterior, deducimos

$$\frac{y^5}{r'^5} = \frac{x}{l},$$

ecuación de la curva generatriz AO .

Una forma aproximada del sólido es la del tronco de cono cuyas bases tengan por radio r' y $\frac{2}{3} r'$.

El valor de U es

$$U = \frac{3R'' l}{2E' r'}.$$

792. En el caso 3.º (fig. 11, lám. 27) resulta

$$\frac{R'' \pi y^5}{2} = \frac{2Ph}{3} \frac{x^2}{l^2},$$

y para el extremo H , en que $x = l$,

$$\frac{R'' \pi r'^5}{2} = \frac{2Ph}{3},$$

de donde

$$\frac{y^5}{r'^5} = \frac{x^2}{l^2},$$

ecuación de la curva generatriz.

La fórmula del sólido es, aproximadamente, la de un tronco de cono cuyos radios sean r' en la base H , y $\frac{1}{3} r'$ en la O .

El valor de U es

$$U = \frac{3R'' l}{E' r'}.$$

793. Sólidos de forma cualquiera. — La experiencia y el cálculo analítico demuestran que únicamente los sólidos de revolución gozan de la propiedad de mantener planas sus primitivas secciones rectas después de la torsión; y como esta hipótesis ha servido de fundamento á los cálculos pre-

cedentes, se deduce que las ecuaciones (5) y (6), que resuelven los problemas de resistencia y rigidez, son aplicables exactamente tan sólo á las piezas de sección circular.

La hipótesis es todavía admisible para los prismas cuya sección se aproxima á la forma circular, como sucede con los polígonos regulares; pero no lo es de ningún modo para las secciones alargadas, como sucede con las rectangulares de lados muy desiguales.

En suma: se podrán aplicar las ecuaciones (5) y (6), sin error sensible, al cuadrado, exágono, octógono, etc., ó á la elipse de ejes poco diferentes. Haciéndolo así, tenemos, recordando que r representa el máximo valor de z , ó sea la distancia, al eje, de la fibra más alejada (núm. 786):

FORMA de la sección.	r	MOMENTO de inercia polar. I_p	ECUACIÓN de resistencia.	ÁNGULO TOTAL de torsión. U
Cuadrado de lado b , $r = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} b \sqrt{2}$	$0,1666 b^4$	$\frac{R'' b^3 \sqrt{2}}{6} = M_0$	$\frac{U}{l} = \frac{6 M_0}{E' b^4}$
Exágono regular. Radio del círculo circunscrito = r	r	$1,0826 r^4$	$1,0826 r^3 R'' = M_0$	$\frac{U}{l} = \frac{M_0}{1,0826 E' r^4}$
Octógono regular. Radio del círculo circunscrito = r	r	$1,276 r^4$	$1,276 r^3 R'' = M_0$	$\frac{U}{l} = \frac{M_0}{1,276 E' r^4}$

794. Esfuerzos de torsión repetidos un gran número de veces. — Deberán emplearse los coeficientes de trabajo que dan las fórmulas (25) y (26) del núm. 672.

795. Piezas sometidas á torsión y á flexión. — El esfuerzo cortante p' por unidad superficial que se desarrolla por la torsión en las fibras más alejadas del eje del sólido ($z = r$), es [fórmula (4) del núm. 786]:

$$p' = \frac{M r}{I_p}$$

Llamémos p á la fuerza de extensión por unidad superficial que produce en la materia una fatiga molecular comparable con la p' . Admitiendo que la relación entre p' y p sea la misma que existe entre los coeficientes de fractura por esfuerzo cortante y por extensión, \bar{R}'' y \bar{R} , tenemos (núm. 99):

$$\frac{p'}{p} = \frac{\bar{R}''}{\bar{R}} = \frac{4}{5}$$

ó

$$p = \frac{5}{4} p'$$

Esto quiere decir que, para los efectos de la resistencia, puede suponerse que la torsión produce una extensión por unidad superficial en las fibras más alejadas del eje

$$p = \frac{5}{4} \frac{M r}{I_p}$$

Supondremos que los sólidos son de sección constante, circular ó de forma de polígono regular. En estos casos I_p y r son constantes, y además $I_p = 2 I$, siendo I el momento de inercia de la sección con respecto á un eje cualquiera que pase por el centro de gravedad.

El valor de p variará con M , momento de torsión que puede ser variable de una á otra sección de abscisa x , según hemos visto en los casos del número 787; p podrá estar representado, con arreglo á una cierta escala, por las ordenadas de M (figs. 9.^a á 14, lám. 27).

Si el sólido está además sometido á flexión, y llamamos M' al momento general, la extensión por unidad superficial de las fibras más alejadas de la capa neutra ($z = v$) es (núm. 459):

$$p = \frac{M' v}{I}$$

Los valores de p , puesto que v é I son constantes, pueden estar representados por las ordenadas de la curva de M' .

Llamando R al coeficiente de trabajo por extensión, la resistencia exige que el máximo de $p' + p$ sea á lo más igual á R , ó haciendo $I_p = 2 I$ (nota del núm. 785), y llamando s á la abscisa $x = s$, para la cual $p' + p$ es un máximo;

$$R = \frac{\frac{5}{8} M_s r + M'_s v}{I}$$

M, M' , son funciones de las fuerzas exteriores; I, v y r son funciones de las dimensiones de la sección transversal. La ecuación anterior resolverá los problemas de resistencia, pero para ello es necesario determinar la abscisa $x = s$ que convierte á $p' + p$ en máximo, y los valores correspondientes de los momentos de torsión y de flexión, M_s, M'_s . Supongamos, por ejemplo, que la flexión es producida por fuerzas uniformemente repartidas, y la torsión por las fuerzas que están representadas en la fig. 14 (lám. 27). Se trazaría la parábola $HL O$ (fig. 17, lám. 27) correspondiente á los momentos de flexión M' , y la recta BD relativa á los valores de M ; la paralela LN á BD determinará el punto L , cuya abscisa Oa es el valor s buscado.

En la mayor parte de los casos coinciden, en una misma sección, los máximos de M y M' , que se sustituirán entonces en la ecuación anterior; y en todos casos es sencilla la determinación de $x = s$.

Sea HO (fig. 18, lám. 27) una pieza fija en H y sometida á la acción de la fuerza de torsión P , que actúa en un plano normal al eje, en el extremo libre O , con un brazo de palanca h . Siendo $P' = P''$, la fuerza P produce un par de torsión P, P'' , cuyo momento es Ph , y una flexión causada por la fuerza $P' = P$ aplicada al extremo de la longitud $HO = l$.

El momento de torsión $M = Ph$ es constante para todas las secciones del sólido, y el máximo del momento de flexión M' tiene lugar en H , y vale $M'_0 = Pl$.

La ecuación de resistencia será

$$R = \frac{\frac{5}{8} Phr + Plv}{I}$$

Para la sección circular, por ejemplo, sabemos que, llamando r al radio,

$$\begin{aligned} r &= r \\ v &= r \\ I &= \frac{\pi r^4}{4}, \end{aligned}$$

y entonces

$$R = \frac{P \left(\frac{5}{2} h + 4l \right)}{\pi r^3},$$

de donde se puede deducir P ó r .

X

VIGAS RECTAS DE ALMA CALADA

Ó DISCONTÍNUA, ARTICULADAS Y DE ENLACES RÍGIDOS

1. VIGAS RECTAS ARTICULADAS SOMETIDAS

Á CARGAS ESTÁTICAS.

2. VIGAS RECTAS ARTICULADAS SOMETIDAS Á CARGAS

EN MOVIMIENTO.

3. VIGAS DE ENLACES RÍGIDOS.

1. VIGAS RECTAS ARTICULADAS

SOMETIDAS Á CARGAS ESTÁTICAS

PRELIMINARES

796. Si en un entramado cualquiera reducimos las piezas á sus ejes, resulta una figura geométrica, compuesta de líneas ó lados que unen los vértices ó nudos. En cada vértice ó nudo concurren dos ó más líneas, y cada línea ó lado está comprendida entre dos vértices ó nudos; cuando h vértices están en línea recta (fig. 9.^a, lám. 32), se considerará ésta dividida en $h - 1$ partes, correspondientes á otros tantos lados diferentes.

797. **Figuras deformables ó indeformables.**—Se denomina *figura deformable* la que puede sufrir modificaciones en la magnitud de sus ángulos sin necesidad, para ello, de que varíe la magnitud de los lados. Tal es el trapecio $ABCD$ (sin diagonales) (fig. 2.^a, lám. 30), que puede tomar la forma $A'B'C'D'$ sin que los lados experimenten modificación alguna.

Llámanse figuras *indeformables*, las que no son susceptibles de sufrir alteraciones en el valor de los ángulos mientras se conserven inalterables los lados. Así, el trapecio $ABCD$, provisto de la diagonal AC , es una figura indeformable, porque para tomar la figura $A'B'C'D'$ sería necesario que la diagonal AC se alargase, ó que el lado CD se acortase.

Las figuras indeformables se clasifican en las dos categorías siguientes:

Figuras estrictamente indeformables, son aquéllas en las cuales la supresión de un solo lado ó línea las convierte en figuras deformables. Puede servir de ejemplo el trapecio $ABCD$ provisto de su diagonal AC : si se suprime ésta, el trapecio es deformable.

Figuras de líneas superfluas, son las que no pierden su cualidad de inde-

formabilidad por la supresión de uno ó más lados ó líneas. Esto es lo que sucede con el trapecio $ABCD$ provisto de sus dos diagonales AC , BD ; la supresión de una de ellas no influye en la indeformabilidad de la figura.

798. Modo de conocer si una figura es deformable.—El triángulo es el tipo de las figuras indeformables; si á partir del ABE (fig. 4.^a, lám. 30) queremos dibujar una figura *estrictamente indeformable*, habremos de unir cada uno de los nuevos vértices ó nudos á la parte de figura ya construída por medio de dos líneas; así, el nudo C quedará unido al triángulo ABE de partida por medio de lados CB , CE ; el nudo D lo estará á $ABCD$ por las líneas DC y DE . Procediendo de este modo obtendremos una figura $ABCDE$ *estrictamente indeformable*. Veamos la relación que existe, en esta clase de figuras, entre el número l de lados y el número n de nudos ó vértices.

El triángulo ABE de partida tiene tres lados y tres vértices; el número restante de vértices ó nudos será $n - 3$; y como á cada uno de ellos, según la construcción anterior, le corresponden dos lados, los $n - 3$ nudos dan origen á $2(n - 3)$ lados. En definitiva, el número total l de lados de la figura es de 3, correspondientes al triángulo ABE , más $2(n - 3)$ relativos á los $n - 3$ nudos restantes, de modo que $l = 3 + 2(n - 3)$, ó bien

$$l = 2n - 3 \quad (1).$$

Si l es menor que $2n - 3$, la figura es deformable; y cuando $l > 2n - 3$, tendrá líneas superfluas.

Podemos establecer, entre el número l de lados y el n de nudos de una figura, la relación

$$l = 2n - 3 + k.$$

Si $k = 0$, la figura es estrictamente indeformable; cuando $k < 0$, la figura es deformable; y en el caso de $k > 0$, la figura tiene exceso de líneas en número k , ó es de k líneas superfluas.

799. Figuras libremente dilatables.—Diremos que una figura es libremente dilatada cuando uno cualquiera de los lados puede dilatarse ó contraerse sin causar alteración en la longitud de los lados restantes.

El trapecio $ABCD$ (fig. 2.^a, lám. 30), provisto de una sola diagonal AC , es libremente dilatado; las dilataciones ó contracciones del lado AC , por ejemplo, introducen modificaciones en la magnitud de los ángulos ACD , ABC , pero no en la de los lados del trapecio. Lo mismo diríamos de la figura $ABCDE$ (fig. 4.^a, lám. 30) y de cualquiera otra construída de igual modo.

El trapecio $ABCD$ (fig. 2.^a, lám. 30), sin diagonales, es también libremente dilatado, pero deja de serlo cuando las dos diagonales existen. Las dilataciones ó contracciones de AC causarían compresiones ó extensiones en BD .

Las figuras deformables, ó estrictamente indeformables, son libremente dilatadas.

800. Figuras recíprocas.—Se dice que dos figuras son *recíprocas* cuando:

1.^o A cada lado de una de ellas corresponde un lado paralelo ó perpendicular de la otra.

2.^o A cada nudo ó conjunto de líneas que concurren en un vértice, en una de las figuras, corresponde en la otra un polígono cerrado compuesto de tantos lados como líneas concurren al nudo.

Las figs. $ABCD$ y $EFHO$ (fig. 3.^a, lám. 30) son recíprocas. Un lado cualquiera 1, 2... 6 de la primera tiene su correspondiente, paralelo, 1', 2'... 6' en la segunda; y las tres líneas que concurren en un nudo, de cualquiera de las dos figuras, forman un triángulo en la otra.

Para que una figura admita otra recíproca, es necesario que aquélla-cumpla con las siguientes condiciones:

1.^a Que pueda descomponerse en un cierto número de polígonos cerrados, tales que cada lado de la figura pertenezca á un tiempo á dos polígonos parciales, y nada más que á dos. Así, en la fig. 3.^a, lám. 30, el lado AB corresponde al triángulo ABD y al ABC ; el lado AD pertenece á los triángulos ADB , ADC , y lo mismo sucede en los demás.

2.^a Que de cada nudo partan, cuando menos, tres líneas.

3.^a Que cada lado pase, por lo menos, por dos nudos.

801. Sistemas articulados.—En los puntos de encuentro de dos ó más piezas de un entramado ordinario, sometido á la acción de fuerzas contenidas en el plano de los ejes, existen ensambladuras más ó menos complicadas. Si estas ensambladuras se sustituyen por articulaciones que permitan á las piezas elementales las pequeñas rotaciones que son consecuencia de las inevitables deformaciones elásticas producidas por las fuerzas, el entramado toma el nombre de *sistema articulado*; habrá, pues, vigas articuladas, armaduras articuladas, etc.

Puede suponerse que cada uno de los elementos AB , BE , BC , etc., del entramado $ABCDE$ (fig. 4.^a, lám. 30), está provisto en cada uno de sus extremos de un pasador ó eje de articulación. A cada elemento le corresponden dos ejes, uno en cada extremo, y á cada nudo un solo eje, que atraviesa todas las piezas que allí concurren; por esto los nudos se denominan también articulaciones.

802. Cómo trabajan las piezas elementales de un sistema articulado. — Las fuerzas que actúan sobre un sistema articulado, en el plano longitudinal de simetría, pueden estar aplicadas:

- 1.º A los ejes ó pasadores de las articulaciones, en todos los nudos (figuras 4.ª y 12, lám. 30), ó en algunos solamente (fig. 11, lám. 30).
- 2.º A las piezas elementales, en puntos intermedios (fig. 10, lám. 30).

En el primer caso (fig. 12), todas las piezas trabajan solamente por extensión ó por compresión. En efecto; si trazamos un plano trasversal XX , y sustituimos la parte de viga situada á la izquierda por las fuerzas S, B é I , que se desarrollan en las barras cortadas (fig. 13), permanecerá en equilibrio la parte de la derecha de dicho plano; pero para esto es necesario que las fuerzas S, B é I tengan por línea de acción el eje de las piezas cortadas, es decir, que produzcan en ellas extensiones ó compresiones, pues de lo contrario dichas piezas girarían alrededor de las articulaciones F y H y no existiría el equilibrio supuesto.

En el segundo caso (fig. 10), cada una de las fuerzas P producirá, en los nudos próximos, presiones P' y P'' , en virtud de las cuales todas las piezas del sistema, incluso la BC , se hallarán sometidas á extensiones ó compresiones, como en el caso anterior. Además, la pieza BC y todas las que se encuentran en idéntica situación, resultarán flexadas. En resumen, las piezas que recibe inmediatamente la acción de las cargas, estarán sometidas á flexión y á extensión, ó á flexión y compresión; y las restantes estarán simplemente extendidas ó comprimidas, como si las fuerzas exteriores se hubieran sustituido por sus componentes aplicadas á los nudos. Como, por otra parte, el equilibrio de las fuerzas exteriores no se altera porque se reemplacen las fuerzas P intermedias por sus componentes P' y P'' , resulta que el segundo caso se reduce al primero en lo relativo á la magnitud y direcciones de las compresiones y extensiones de las piezas del entramado, haciendo la descomposición de fuerzas P antes indicada.

803. Equilibrio y resistencia de un sistema articulado.—Aplicando á un sistema articulado las condiciones de equilibrio de una construcción, enunciadas en el núm. 37, deberá verificarse:

- 1.º Equilibrio de todas las fuerzas exteriores que obran sobre la construcción.
 - 2.º Equilibrio, en cada elemento de la construcción, de las fuerzas exteriores que le están aplicadas y de las reacciones de los elementos contiguos.
- La primera condición da el medio de determinar las reacciones de los apoyos. Si las fuerzas exteriores son paralelas, se hace uso del método expli-

cado en el núm. 413; y cuando son de dirección cualquiera, se sigue el procedimiento del núm. 407 formando el polígono de las fuerzas con las $n - 2$ conocidas, y cerrándolo con las dos reacciones desconocidas en magnitud ó en dirección.

La segunda condición servirá, como veremos más adelante, para hallar las fuerzas de extensión ó compresión á que se hallan sometidas las piezas elementales del sistema.

Una vez determinados los esfuerzos á que se encuentra sometido cada uno de los elementos del sistema, las condiciones de resistencia y rigidez quedarán satisfechas dando á cada pieza las dimensiones de la sección trasversal convenientes, como hemos hecho en los problemas de extensión, compresión y flexión resueltos en los capítulos III y VI.

El problema que nos toca resolver al presente es, pues, el determinar las fuerzas de extensión ó compresión que engendran en las piezas del sistema articulado las fuerzas exteriores, y lo resolveremos, según acabamos de decir, satisfaciendo la segunda de las condiciones de equilibrio antes enunciadas.

804. Resumiendo: el orden de operaciones para la resolución de los problemas de equilibrio y resistencia de sistemas articulados, es el siguiente:

1.º caso. *Las fuerzas exteriores están aplicadas á los nudos ó articulaciones.*

(a) Determinación de las reacciones de los apoyos por medio del polígono de las fuerzas ó del polígono funicular (núms. 407 y 413).

(b) Determinación de las tensiones y compresiones en las piezas elementales del sistema.

(c) Determinación de las escuadrías.

2.º caso. *Algunas de las fuerzas exteriores (ó todas) están aplicadas á puntos intermedios de las piezas elementales.*

(d) Se descompondrá cada una de las fuerzas en otras dos que actúen en los nudos inmediatos.

(e) Se practicarán las operaciones (a) y (b) del caso anterior.

(f) Se calcularán las escuadrías de las piezas, teniendo en cuenta que las que reciben inmediatamente la acción de las fuerzas, en puntos intermedios, están sometidas á extensión y flexión, ó compresión y flexión, y las restantes únicamente á extensión ó á compresión.

805. Determinación de las extensiones y compresiones de las piezas elementales de un sistema articulado. — Casos en que el problema tiene solución. — Sea $ABCDE$ (fig. 4.ª, lám. 30) un sistema articulado sometido á la acción de las fuerzas exteriores 1, 2, ..., 5.

Partimos de la hipótesis de que estas fuerzas están en equilibrio; de modo que si dos de ellas, por ejemplo, las 1 y 5, fueran reacciones de los apoyos, se habrán determinado en dirección y magnitud por el cumplimiento de dicha condición de equilibrio. Llamemos n al número de nudos de la figura articulada, y l al número de lados, y veamos las condiciones que, en general, son necesarias y suficientes para que el problema de la determinación de las tensiones y compresiones de las piezas elementales de la viga pueda resolverse.

1.º *Figuras estrictamente indeformables.* — Para esta clase de figuras se verifica $l = 2n - 3$ (núm. 798). Prescindamos de un lado cualquiera, del AE por ejemplo (fig. 4.ª, lám. 30): los nudos restantes B, C, D , serán $n - 2$, y concurrirán en ellos $l - 1$ lados, ó sea $2n - 4$.

Ha de haber equilibrio en las fuerzas exteriores é interiores que concurren en cada nudo; y para cada uno de ellos, se manifiesta analíticamente esta condición por dos ecuaciones que expresan ser cero la suma de proyecciones de las fuerzas concurrentes, sobre dos ejes coordenados que tienen su origen en el nudo. Como hay $n - 2$ de éstos, resultan $2(n - 2) = 2n - 4$ ecuaciones, número igual al de barras pertenecientes á dichos nudos, ó sea al de fuerzas interiores incógnitas; de modo que dichas ecuaciones, si no son incompatibles ni determinadas, circunstancias que constituirían casos de excepción, servirán para determinar las fuerzas interiores de todas las piezas elementales del sistema, á excepción de la AE . Pero la fuerza AE queda determinada también, como consecuencia del conocimiento de las restantes fuerzas interiores; en efecto, hemos partido de la existencia del equilibrio de todas las fuerzas exteriores, y por lo tanto, del sistema articulado; así es que la barra AE tiene que estar forzosamente en equilibrio, de modo que la estimación según AE de las fuerzas conocidas 1 y a que concurren en el extremo A , debe ser igual y contraria á la estimación, según EA , de las fuerzas 5, c , e y f , conocidas también, que actúan en el otro extremo E , y cada una de ellas representa la tensión ó compresión b de AE .

En resumen: en general, cuando existe la relación $l = 2n - 3$, es decir, en las figuras estrictamente indeformables, el problema de la determinación de las fuerzas interiores de un sistema articulado es determinado, siempre que las fuerzas exteriores (fuerzas y reacciones) que le están aplicadas, se equilibren.

2.º *Figuras deformables.* — Para éstas se verifica $l = 2n - 3 - k$ (número 798), siendo k un número positivo.

Aumentemos k lados, con lo cual la figura tendrá $l = 2n - 3$, y será estrictamente indeformable. Llamando t_1, t_2, \dots, t_k á las tensiones ó compresiones

de los lados que se han aumentado, serán determinadas, así como las de las barras restantes, por las $2n - 4$ ecuaciones de que hemos hablado en el caso anterior, ecuaciones en que entran también las fuerzas exteriores P y los ángulos α y β , que con los ejes coordenados forman todas las barras, de modo que t_1, t_2 , etc., serán funciones de P y de α y β , es decir,

$$t_1 = f'(P, \alpha, \dots) \quad \text{,,} \quad t_2 = f''(P, \alpha, \dots) \text{ etc.}$$

Ahora bien; si queremos que el primitivo sistema articulado, es decir, el que tiene $l = 2n - 3 - k$ lados, esté en equilibrio, habrá que expresar que no se perturba por supresión de las k barras añadidas, y esto no podrá suceder sino cuando las tensiones de estas barras sean cero, ó

$$t_1 = f'(P, \alpha, \dots) = 0 \quad \text{,,} \quad t_2 = f''(P, \alpha, \dots) = 0, \text{ etc.}$$

Estas son otras tantas ecuaciones de condición, que fijan valores particulares de las fuerzas exteriores P , ó de las direcciones de los lados del polígono articulado (ángulos α, β, \dots); luego:

En las figuras deformables en que $l = 2n - 3 - k$, es decir, que les falta k líneas para ser estrictamente indeformables, el problema de hallar las tensiones de las barras es más que determinado. Para que sea determinado, es preciso que la magnitud de las fuerzas exteriores ó la dirección de los lados de la figura satisfaga k condiciones.

3.º *Figuras de líneas supérfluas.* — El número de lados es, en función del número de nudos, $l = 2n - 3 + k$. Si diéramos valores arbitrarios á las tensiones de k barras, quedarían $2n - 3$ incógnitas y estaríamos en el primer caso. El problema es, pues, indeterminado, pues hay k incógnitas más que ecuaciones: para resolverlo, habría necesidad de tomar en consideración las deformaciones elásticas de las barras y acudir á la teoría de la elasticidad, recurso que hemos empleado siempre que las ecuaciones de la estática racional son insuficientes para determinar las fuerzas desconocidas. (Piezas empujadas, apoyadas en varios puntos, etc.).

Resumiendo: en las figuras de k líneas supérfluas, es indeterminado el problema de hallar las tensiones de las barras con los recursos de la estática.

806. *Descomposición de una fuerza en tres componentes, según líneas dadas.*—Sean R (fig. 1.ª, lám. 30), la fuerza que ha de descomponerse en las 1, 2 y 3. Supongamos el problema resuelto: si componemos las fuerzas 1 y 2, y su resultante a con la 3, hemos de obtener la fuerza dada R . Ahora bien; la

resultante a de las fuerzas 1 y 2 ; ha de pasar por su punto de encuentro E , y también por el M de intersección de R y 3 , puesto que R es la resultante de a y 3 , de modo que la dirección de la fuerza a se obtiene uniendo el punto M de intersección de R , y de una de las fuerzas (la 3 en la figura) con el punto E de encuentro de las otras dos rectas dadas EH , EL .

Según esto, para resolver el problema, después de trazada la recta ME , descompondremos R en las dos direcciones ML , ME , con lo cual obtendremos las componentes 3 y a , y á su vez a se descompondrá en las direcciones EL , EH , con lo cual obtendremos las fuerzas 1 y 2 .

Para hacer estas descomposiciones, dibujaremos AB igual y paralela á R y trazaremos AC , BC , paralelas á ME , ML , obteniendo así el triángulo ABC que es la mitad del paralelogramo de las fuerzas. Las direcciones de a y 3 (véase las flechas) han de concurrir en A con la fuerza R .

Por los extremos C y B de a se trazarán, después, paralelas á 1 y 2 , con lo cual obtendremos la magnitud y dirección de estas componentes.

Si las tres rectas dadas EH , EL , ML , fuesen paralelas ó concurriesen en un punto, el problema sería indeterminado.

MÉTODO DE CULMANN

807. Caso general. — Sea (fig. 12, lám. 30) una viga $ADLE$, sometida á las fuerzas 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 y 7 , que la mantienen en equilibrio. Para la numeración de las fuerzas, tomaremos, alternativamente, una del cordón superior $ACDHL$ y otra del inferior $ALEF$, correspondientes á los nudos A , C , D , E , etc. Consideremos un plano transversal XX que corte á tres elementos de la viga, como son, el cordón superior S , el inferior I y la barra inclinada B .

Sin que se perturbe el equilibrio de la parte de viga que está á la derecha de XX (línea de trazo seguido), podremos suprimir toda la parte que está á la izquierda (líneas de puntos), siempre que apliquemos á las barras S , B , I , cortadas por el plano XX , á lo largo de ellas, fuerzas iguales á las acciones que las partes de estas barras, situadas á la izquierda de dicho plano, ejercen sobre las que quedan á la derecha. Podremos, pues, suponer (fig. 13, lámina 30) que la viga está en equilibrio, en el espacio, bajo la acción de las fuerzas 5 , 6 , 7 , S , B é I ; ó, lo que es lo mismo, las fuerzas S , B é I , equilibran á las 5 , 6 y 7 .

Por otra parte, si la viga dada $ADLE$ (fig. 12, lám. 30) ha de estar en

equilibrio, es preciso que éste exista en todas las fuerzas exteriores 1 á 7 ; de modo que si llamamos R á la resultante de las 1 , 2 , 3 y 4 que se hallan á la izquierda de XX , ha de equilibrar R á las fuerzas 5 , 6 y 7 situadas á la derecha. Dedúcese de aquí que la fuerza R produce el mismo efecto que las S , B é I , lo cual equivale á decir que éstas son componentes de aquélla.

Resumiendo; para determinar las tensiones ó compresiones de las barras S , B é I , no hay más que encontrar la resultante R de las fuerzas exteriores situadas á la izquierda de XX , y descomponerla en las direcciones de dichos tres elementos, problema que sabemos ya resolver (núm. 806).

Fácilmente, pues, se hallan las fuerzas interiores (tensiones ó compresiones) siempre que se pueda trazar un plano que corte á lo más á tres elementos de la viga. La cualidad de estas fuerzas se deduce sencillamente: serán de *extensión* las que se alejen del plano XX (I y B , en las figs. 12 y 13), y de *compresión* las que se dirijan á él (S : figs. 12 y 13).

La fig. 12 (lám. 30), contiene todas las operaciones necesarias para la resolución del problema. Se construirá el polígono $Ohlz$ O de las fuerzas, que es cerrado, puesto que están éstas en equilibrio: efectuando la numeración de las fuerzas exteriores en el orden que hemos indicado anteriormente, se obtienen de seguida las resultantes R , cualquiera que sea la posición del plano XX , en las diagonales Ol , Oz , etc. Para el plano XX de la figura, la resultante R de las fuerzas 1 , 2 , 3 y 4 es la Os , en dirección Os .

La posición de la resultante se fija trazando el polígono funicular correspondiente al $Ohlz$ O de fuerzas. Tomando como polo el vértice O , se trazará Aa prolongación de la fuerza 1 hasta que corte á la 2 ; por a se dibujará ab , paralela al radio polar Ol , hasta que encuentre á 3 en b , y se continuará con bc , cd , etc., terminando con eL que ha de ser prolongación de 7 : el lado cd paralelo á Os , da la posición de R .

Para descomponer R en las tres direcciones DH , DF y EF , seguiremos el procedimiento explicado en el núm. 806. Prolongaremos R hasta que corte en M á una de las fuerzas, la DH , y uniremos este punto con el F de intersección de las otras dos rectas DF y FE . Descompondremos R en las dos direcciones MD , MF , á cuyo efecto construiremos el triángulo de fuerzas tnr , sobre la base $tr = R$: la dirección de las componentes es contraria á la que resulta de recorrer el triángulo en el sentido tr de la fuerza R ; de modo que, según indican las flechas, nr será la dirección y magnitud de la fuerza S , y tn las correspondientes á la fuerza MF .

Trasladando la dirección de la fuerza S á la barra DH , resulta ser S fuerza de compresión, porque se dirige al plano XX .

Descomponiendo tn en las dos direcciones DF , EF , á cuyo efecto formaremos el triángulo ntm , se obtiene $mn = B$ y $tm = I$; y trasladando las direcciones á las barras correspondientes, resulta que las fuerzas B é I son de extensión, por alejarse de XX . En resumen; la barra DH está comprimida por una fuerza $S = nr$, y las DF , EF extendidas con fuerzas respectivamente iguales á $B = mn$ é $I = mt$.

808. En la fig. 11, lám. 30, hemos resuelto el problema aplicándolo á la viga OK , apoyada en O y K , y sometida á las fuerzas paralelas 1, 2, 3 y 4. Las reacciones 5 y 6 se determinarán por el procedimiento del número 413, á cuyo efecto construiremos en AL el polígono de las fuerzas, y elegido el polo O' y dibujado el polígono funicular $abcdef$, se trazará $O'm$ paralela á af . La resultante R del caso anterior es ahora C , esfuerzo cortante en XX , pues que este plano es paralelo á dichas fuerzas.

Para encontrar las tensiones de las barras EH , HF y FT , cortadas por el plano ideal XX , seguiremos el método explicado anteriormente. La resultante C de las fuerzas 6 y 1 que están á la izquierda de X , pasará por el punto h de intersección de los lados af y bc del polígono funicular (número 410): su magnitud será $mn = 6 - 1$.

Para descomponer C en las direcciones de las tres barras, prolongaremos EH , FT y FH ; uniremos los puntos M y N , construiremos el triángulo DPR sobre $RP = C$ como base, siendo PD , RD , paralelas á NH , MN , y el triángulo RDZ sobre la base RD , con lados DZ , RZ paralelos á MH , MT . Las flechas manifiestan que las barras EH y FH están comprimidas con fuerzas cuyo valor es, respectivamente, ZD y DP ; y que la barra FT se halla sometida á una fuerza de extensión igual á RZ .

También se hubiera podido tomar el punto S de intersección de TF con C , el cual unido al H en que se encuentran EH y FH , daría lugar al triángulo ZPR , y éste al ZPD . La recta SH es paralela á la que une los puntos Z y P de la construcción primera, porque las figuras $SMNH$ y $DZRP$ son recíprocas.

809. Si además de ser paralelas las fuerzas lo son también los cordones superior é inferior de la viga (rn y mt , fig. 8.^a, lám. 34), hallaríamos el esfuerzo cortante C correspondiente al plano XX trazado paralelamente á las fuerzas exteriores (C es la resultante de todas las fuerzas situadas á la izquierda de dicho plano), y el punto de intersección T con la barra inclinada mn : este punto ha de unirse con el de intersección de los cordones rn y mt , lo cual equivale á trazar TA paralela á dichos cordones.

Descompondremos C en las direcciones Tm , TA , á cuyo efecto cons-

truiremos, sobre $LN = C$ como base, el triángulo LNP . La fuerza $LP = B$ comprime la barra mn : en cuanto á la $NP = A$, habremos de descomponerla según mt y rn ; y para ello tomando un polo O , y trazados los radios polares OP y ON , y los lados del polígono funicular ac y cb , paralelos á dichos radios, uniremos a y b y trazaremos OD paralela á ab , con lo cual resulta que la fuerza I , igual á PD , extiende el cordón inferior; y la S , igual á DN , comprime el cordón superior.

En definitiva, la fuerza B que obra sobre la barra (triángulo LNP) estimada verticalmente, tiene por valor el esfuerzo cortante C : dicha fuerza B será de compresión ó de extensión, según el signo de C y la inclinación de la barra. Considerando como positivos los esfuerzos cortantes C cuando obran de abajo á arriba y negativos los de dirección opuesta, tendremos:

Barras inclinadas de derecha á izquierda.....	}	C positivo....	Barra comprimida (fig. 8. ^a).
		C negativo....	Barra extendida (fig. 9. ^a).
Barras inclinadas de izquierda á derecha.....	}	C positivo....	Barra extendida (fig. 10).
		C negativo....	Barra comprimida (fig. 11).

Si llamamos α al ángulo que forma la barra con la vertical levantada en su extremo izquierdo (fig. 12, lám. 34), la fuerza B tendrá por expresión $B = \frac{C}{\cos \alpha}$: el denominador $\cos \alpha$ es positivo para las barras AC , y negativo para las DE . Combinando estos signos con los de C , resultará B positiva ó negativa, esto es, estará comprimida ó extendida la barra, para los diversos casos de la tabla anterior.

Dedúcese también del triángulo LNP (fig. 8.^a, lám. 34), que A , componente horizontal de B , representa la diferencia de valores absolutos de las fuerzas S é I que actúan en los cordones superior é inferior, ó bien su suma algebraica.

Todas estas propiedades de las fuerzas S , I y B se deducirán, también, por el método de Cremona (núms. 844 á 846).

MÉTODO DE CREMONA, Ó DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS

810. Caso general.—Supongamos que la barra BC (fig. 6.^a, lám. 30) perteneciente á un sistema articulado, recibe de los elementos contiguos, las acciones d . Esta barra, que está en equilibrio, como todo el entramado, go-

zaría de él también si estuviese aislada, separada de las barras restantes (fig. 8.^a), y sometida á las fuerzas d , lo cual exige que estas dos fuerzas sean iguales y tengan por línea de acción la recta BC que une los puntos de articulación. Cuando las fuerzas d se dirigen al punto medio de la barra, son de *compresión*; y si se alejan de él serán de *extensión*.

En el entramado puede prescindirse de la barra BC sin perturbar el equilibrio del conjunto, siempre que apliquemos á las articulaciones B y C (fig. 7.^a) fuerzas d' iguales y contrarias á d . Según lo que hemos dicho á propósito del signo de d , cuando la barra BC esté comprimida las fuerzas d' se dirigirán á los nudos ó articulaciones, y cuando esté extendida se separarán de ellos. Si del entramado $ABCDE$ (fig. 4.^a, lám. 30) suprimimos una á una todas las barras y las sustituimos (fig. 5.^a) por fuerzas c', a', e' , etcétera, iguales y contrarias á las que actúan á lo largo de aquéllas, el entramado quedará reducido á los nudos A, B, \dots , cada uno de los cuales será punto de concurrencia de un sistema de fuerzas compuesto de las fuerzas exteriores $1, 2, \dots, 5$, y de las interiores de cada barra.

El sistema articulado estará en equilibrio si éste existe aisladamente, en cada uno de los grupos de fuerzas A, B , etc. Ahora bien: conocemos las direcciones de todas las fuerzas; las exteriores $1, 2$, etc., porque son dadas, ó determinadas por la condición del equilibrio de todas ellas, y las interiores a', c', d' , etc., porque siguen la dirección de las barras del entramado; si, pues, en cada uno de los grupos conociéramos la magnitud de todas las fuerzas menos dos, serían fácilmente conocidas éstas por la construcción del polígono correspondiente, que ha de ser cerrado (núm. 407).

Para dar signo á las fuerzas, recordaremos que son de *compresión* las que se dirigen al nudo, y de *extensión* las que se separan de él.

811. Cuando alguna barra BC , está directamente sometida á la acción de fuerzas F (fig. 9.^a, lám. 30), podrá suponerse en equilibrio, aisladamente, bajo la acción de las fuerzas d y las reacciones Z y X paralelas á F é iguales y contrarias á las presiones que F causa en las articulaciones B y C . Este caso queda reducido al anterior, en que hemos supuesto fuerzas exteriores aplicadas solamente en los nudos.

812. Diagrama de las fuerzas.—Sea $ABCDE$ (fig. 4.^a, lám. 30), una viga articulada sometida á las fuerzas $2, 3$ y 4 , de magnitud y direcciones conocidas, y supongamos conocidas las direcciones 1 y 5 de las reacciones de los apoyos A y D . Si las fuerzas estuviesen aplicadas á puntos intermedios de las piezas BC, ED , etc., se hallarían sus componentes en los nudos inmediatos y quedaría reducido el caso al anterior.

Siguiendo el orden de operaciones señalado en el núm. 804, empezaremos por determinar la intensidad de las fuerzas desconocidas 1 y 5 , por la condición de equilibrio de ellas y de las $2, 3$ y 4 . Para esto formaremos, con arreglo á una cierta escala, la parte de polígono $nrst$ (fig. 4.^a, lám. 30), por medio de rectas iguales y paralelas á las fuerzas $2, 3$ y 4 ; y por el último punto t , y por el origen n , trazaremos tm y nm paralelas respectivamente á 5 y 1 (núm. 407): recorriendo el polígono en el sentido $nrst$, tendremos $tm = 5$ y $nm = 1$.

Pasaremos en seguida á determinar las tensiones de las barras del sistema articulado, siguiendo el método del núm. 810. Con este objeto, elegiremos un nudo en el que nos sean conocidas todas las fuerzas menos dos; tal es el A (figs. 4.^a y 4.^a, lám. 30) porque conocemos 1 , y desconocemos las fuerzas interiores a y b . Sobre la recta $mn = 1$, formaremos el triángulo mpn trazando mp y pn paralelas respectivamente á b y a : el sentido cíclico es el de la fuerza 1 , siendo m el origen; de modo que la dirección de la fuerza a es np , y trasladándola á la pieza BA correspondiente, vemos que se dirige al nudo, luego es fuerza de *compresión*, y lo mismo sucede con la fuerza $pm = b$.

Las piezas BA y EA están, pues, comprimidas por fuerzas iguales, respectivamente, á np y pm .

En lo sucesivo representaremos las fuerzas y su calidad del modo siguiente:

Fuerzas exteriores (incluyendo las reacciones)...	} Dos líneas paralelas delgadas.
Fuerzas de extensión, en los polígonos de fuerzas. Piezas extendidas, en el sistema articulado.....	
Fuerzas de compresión, en los polígonos de fuerzas. Piezas comprimidas, en el sistema articulado....	} Línea gruesa.

Del nudo A pasaremos á otro inmediato en el que se conozcan $n - 2$ de las fuerzas concurrentes, con las que formaremos $n - 2$ lados del polígono de fuerzas, que cerraremos con dos paralelas á las 2 fuerzas incógnitas. Recorriendo el polígono en dirección de las fuerzas conocidas, obtendremos la dirección de las desconocidas, y trasladándola á las piezas correspondientes averiguaremos su cualidad, recordando que serán de *compresión* ó *extensión* según que se dirijan al nudo ó se separen de él.

En el nudo E solamente conocemos la fuerza $\mathfrak{5}$ (reacción) y la b que acabamos de determinar, pero desconocemos c , e y f ; no es éste el nudo que nos conviene. Elegiremos el B , en el cual solamente hay dos incógnitas, e y d .

Encontramos en el nudo A que la fuerza a era de compresión y tenía la dirección BA ; cuando consideremos el nudo B , la fuerza a tendrá la dirección AB (véase núm. 810 y fig. 5.^a, lám. 30). Construiremos el polígono de fuerzas á partir del origen p , haciendo pn igual y paralela á a ; nr igual y paralela á $\mathfrak{2}$, con lo cual tenemos sumadas en pnr las fuerzas conocidas a y $\mathfrak{2}$, y trazando por el punto r y por el origen p las rectas ru , pu paralelas respectivamente á CB y EB . El sentido cíclico es $pnrup$; y trasladando las direcciones ru , up á las piezas correspondientes CB , EB , hallamos que $d = ru$ y $c = up$ son fuerzas de compresión porque se dirigen al nudo B .

Ya podemos pasar al nudo E , en el que no hay más incógnitas que e y f , ó al C , que contiene las fuerzas conocidas d y $\mathfrak{3}$, y las dos desconocidas e y h . Eligiendo el E , y recordando que b y c son fuerzas de compresión que deben dirigirse ahora al nudo E , formaremos el polígono de fuerzas $tmput$, haciendo $tm = \mathfrak{5}$, $mp = b$, $pu = c$, y trazando tx paralela á DE y ux paralela á CE . Recorriendo el polígono á partir del origen t , hallamos que la fuerza $ux = e$ es de compresión porque se dirige al nudo E , y la xt de extensión porque se aparta de él.

En el nudo D encontramos una sola incógnita, que es la fuerza h , puesto que conocemos la fuerza $\mathfrak{4}$ y la f , que por ser de extensión actuará ahora en la dirección DE . El problema es más que determinado y da lugar á una comprobación; á partir del punto y dibujaremos $yt = \mathfrak{4}$ y $tx = f$, y la recta xy debe ser paralela á CD .

El nudo C ofrece otra comprobación porque todas las fuerzas son conocidas; formando el polígono $sruzs$ debe resultar cerrado.

La aplicación del polígono de las fuerzas como método gráfico de resolución del problema, no es seguramente idea nueva, y es indudable que la causa de no haberse generalizado este método se debe al considerable espacio que ocupan los polígonos parciales, sobre todo cuando la viga articulada tiene muchos nudos. Este inconveniente deja de existir desde el momento en que se agrupan los polígonos, yustaponiéndolos y superponiéndolos y formando con ellos un *diagrama de fuerzas* relativamente pequeño, lo cual puede hacerse fácilmente como veremos á continuación.

Observaremos que en los nudos A , B , etc., del perímetro de la viga (figura 4.^a, lám. 30) están aplicadas las fuerzas exteriores $\mathfrak{1}$, $\mathfrak{2}$, ..., $\mathfrak{5}$, de modo que estas fuerzas entran en la composición de los polígonos correspondientes.

Además, un lado cualquiera AB pertenece á dos nudos A y B , uno por cada extremo; de modo que la fuerza a formará parte de los dos polígonos de fuerzas relativas á dichos nudos; y como a tiene el mismo valor en ambos, resultará que los polígonos parciales tienen de dos en dos un lado igual. Por ejemplo (figs. 4.^a y 4.^{a'}, lám. 30), el triángulo $m p n$ y el cuadrilátero $p n r u$, pertenecientes á los nudos A y B ; tienen iguales los lados $pn = a$.

Resumiendo: todos los polígonos parciales en que intervienen fuerzas exteriores, pueden construirse sobre el polígono $m n r s t m$ (fig. 4.^{a''}) que se formó para determinar las reacciones incógnitas, y además todos ellos pueden yustaponerse ó superponerse, haciendo coincidir el lado común á cada dos de ellos.

En el ejemplo que nos ocupa, el orden de operaciones sería el siguiente (figs. 4.^a y 4.^{a''}, lám. 30):

Nudo A. — Fuerzas conocidas: $\mathfrak{1} = mn$, de dirección mn ; incógnitas, a y b .

Se construirá el triángulo mnp de fuerzas, sobre mn como base y m como origen.

$$a = np, \text{ compresión.}$$

$$b = pm, \text{ compresión.}$$

Nudo B. — Fuerzas conocidas: $\mathfrak{2} = nr$, de dirección nr ; y $a = pn$, de dirección pn . Para sumar estas fuerzas, utilizando el diagrama construído, hemos de tomar por origen del polígono el punto p , y de este modo en pnr tenemos la suma $a + \mathfrak{2}$. Se completará el polígono con los lados ru y pu paralelos á CB y EB , trazándolos desde los puntos u y p , y recorriendo el polígono hallamos:

$$d = ru, \text{ compresión.}$$

$$c = up, \text{ compresión.}$$

Nudo E. — Fuerzas conocidas: $\mathfrak{5} = tm$, de dirección tm ; $mp = b$, de dirección mp ; $pu = c$, de dirección pu . Para sumarlas ha de tomarse como origen el punto t ; trazando desde este punto y desde el u las rectas tz , uz , paralelas á DE , CE , hallamos:

$$e = uz, \text{ compresión.}$$

$$f = zt, \text{ extensión.}$$

Como vemos, las operaciones gráficas son sencillísimas: no hay más que

tener un cuidado; al construir un polígono de fuerzas parcial, utilizando la parte ya formada de diagrama, elegir convenientemente el punto de partida ó de origen del polígono para que se puedan sumar las fuerzas conocidas sin necesidad de trazar nuevas líneas, y para esto no hay más que señalar sobre el diagrama las direcciones de dichas fuerzas. Así, por ejemplo, en el nudo *E*, tenemos:

FUERZAS	DIRECCIÓN	
	En la viga.	En el diagrama.
<i>b</i>	<i>AE</i>	<i>mp</i>
<i>c</i>	<i>BE</i>	<i>pu</i>
5	<i>SE</i>	<i>tm</i>

Se deduce en seguida que para sumar *mp*, *pu* y *tm* hay que tomar como origen del polígono el punto *t*.

813. Puede presentarse una duda en el trazado de los dos últimos lados de cada polígono parcial, paralelos, como sabemos, á las dos fuerzas incógnitas, y es la de elección del sistema de paralelas, entre los dos que pueden dibujarse. Por ejemplo, en el polígono correspondiente al nudo *B*, una vez construída la parte *pnr* correspondiente á las fuerzas conocidas *a* y **2**, la paralela á *BE* se puede trazar desde el origen *p* ó desde el penúltimo vértice *r*; en el primer caso, se obtiene el cuadrilátero *pnr u*, y en el segundo el *p' n' r' u*, que hemos dibujado aparte para no complicar la figura.

Si los polígonos parciales se construyesen por separado, como hemos hecho en las figs. 4.^a, sería indiferente la adopción de uno ú otro sistema de paralelas, porque los dos cuadriláteros *p' n' r' u' p'* y *p' n' r' u p'* dan la misma magnitud y la misma dirección para las fuerzas incógnitas $c = r' u' = u p'$ y $d = u' p' = r' u$. Pero no es lo mismo cuando se trata del diagrama, en que los lados de un polígono parcial, correspondiente á un nudo, han de servir para la construcción del perteneciente al nudo inmediato, porque es necesario disponer los lados de modo que se puedan sumar siempre las fuerzas conocidas que concurren en un nudo.

Trazando el cuadrilátero *pnr u*, hemos podido después, al pasar al nudo *E*, sumar en *tm pu* las fuerzas conocidas **5**, *b* y *c*. Si hubiésemos elegido el

trazado *p' n' r' u'*, la suma no sería posible, pues al llegar al punto *p'* hallamos que $u' r' = c$ no pasa por él.

El detalle, como vemos, es de importancia: la solución se deriva sencillamente de las consideraciones que á continuación exponemos.

Elíjase un polo *O*, correspondiente al polígono *mnrst* que expresa el equilibrio de las fuerzas exteriores; dibújense los radios polares *Om*, *On*, etcétera, y el polígono funicular *MNPRS*, á cuyo efecto trazaremos la recta *MS* paralela al primer radio polar *Om* hasta que corte en *M* á la fuerza **1**, por este punto una paralela *MN* al segundo radio polar *On* hasta que corte en *N* á la fuerza **2**, y, sucesivamente, *NP*, *PR*, etc., paralelas á *Or*, *Os*, etc. Según los principios de la estática gráfica, el polígono funicular debe ser cerrado, porque lo es el polígono *mnrst* de las fuerzas.

La figura formada por:

El polígono articulado *ABCDE*.

El polígono funicular *MNPRS*.

Las partes *MA*, *BN*, *ES*, etc., de las líneas de acción de las fuerzas exteriores **1**, **2**, etc.,

es *recíproca* (núm. 800) de la figura compuesta de las líneas siguientes:

Polígono *mnrstm* de fuerzas exteriores,

Polígonos parciales de fuerzas *mpn*, *npu r*, etc.,

Radios polares *Om*, *On*, etc., que parten de *O*.

Cumplen, en efecto, las condiciones impuestas á las figuras recíprocas (núm. 800), por razón de construcción. A cada lado *MA = 1*, *AB = a*, *MN*, etc., de la primera, corresponde un lado *mn = 1*, *pn = a*, *On*, etc., paralelo de la segunda; y, recíprocamente, cada línea de la segunda tiene su correspondiente paralela en la primera. A un conjunto cualquiera de líneas concurrentes de la primera figura, por ejemplo, las *BA*, *BN*, *BE*, *BC*, corresponde un polígono cerrado *pnr u* en la segunda; é inversamente al nudo *s*, por ejemplo, de la segunda figura, en donde concurren las líneas *h*, **3**, **4** y *s O*, corresponde el polígono cerrado *CPRD* de la primera.

Según esto, un lado *BC = d* de la viga articulada, que forma parte del polígono *BCPN*, formará nudo con las líneas *BN*, *CP* y *PN* en la figura recíproca, es decir, que en el diagrama la línea paralela á *d* pasará por el punto de encuentro de las paralelas á *BN* y *CP*, ó sea de las fuerzas **2** y **3**,

y, en efecto, la línea $ur = d$ pasa por el punto r de intersección de las fuerzas **2** y **3**. Por la misma razón, el mismo lado BC , perteneciente al triángulo $BE'C$, tendrá en la figura recíproca una paralela que pasará por el punto de intersección de las paralelas á los lados $EB, E'C$; y, efectivamente, la línea ur del diagrama pasa por el punto de intersección u de las líneas pu , paralela á BE , y uz , paralela á CE .

Resumiendo : podemos establecer que *todo lado X del polígono ó sistema articulado, comprendido entre dos fuerzas exteriores ó interiores Z, V , aplicadas en sus extremos, tiene en el diagrama de fuerzas una línea recíproca, correspondiente, que pasará por el punto de encuentro de las paralelas á Z y á V .*

Queda así determinada la dirección y posición de todas las líneas que constituyen el diagrama, y salvada la dificultad enunciada anteriormente. La duda que se presentaba, por ejemplo, en la construcción del cuadrilátero $pnru$, correspondiente al nudo B , desaparece si se atiende á que estando BC comprendido entre las fuerzas **2** y **3**, la línea d del diagrama debe pasar por el punto de intersección de las paralelas á **2** y **3**, ó sea por el punto r ; el polígono será $pnru$, y no $p'n'r'u'$. A la misma conclusión conduciría el examen del lado BE ; estando comprendido entre las fuerzas a y b , debe pasar su paralela por la intersección de las paralelas á a y b , ó sea por el punto p .

Añadiremos á lo que precede, que un lado cualquiera BE forma triángulo con los BA y AE , y por lo tanto, su paralela formará nudo con las paralelas á AB y AE , y deberá pasar por su punto de encuentro. En la figura, el lado $c = pd$ del diagrama pasa por el punto p de concurrencia de las rectas pn, pm , paralelas á AB, AE . Diremos, pues, que *todo lado X del polígono articulado que forma triángulo con otros dos A y B , tiene en el diagrama de fuerzas una línea recíproca que pasará por el punto de encuentro de las paralelas á A y B .*

En la práctica no hay necesidad de dibujar el polo O y radios polares, ni el polígono funicular $MNPR$; los hemos trazado únicamente para llegar á la interesante deducción que acabamos de presentar, y que fija, de un modo definitivo, las líneas del diagrama.

El método de Cremona se llama también de las figuras recíprocas, por serlo las totales 4 y 4" (lám. 30) y los polígonos parciales de ambas.

814. Caso de figuras deformables. Vigas poligonales. — En este caso, $l = 2n - 3 - k$, como sabemos, y para que el problema de determinación de tensiones en las barras sea posible, será preciso que las fuerzas exteriores ó las direcciones de las barras satisfagan k condiciones (núm. 805).

Supongamos que se trata del polígono $ABCDE$ (fig. 13, lám. 34), sometido á la acción de las fuerzas exteriores **1, 2, ..., 5**, que están en equilibrio; de modo que se podrá formar el polígono de fuerzas $ea bc de$, que es cerrado. Si es n el número de nudos ó vértices, se verifica que el de lados, l , es igual á n , ó

$$l = 2n - n = 2n - 3 - (n - 3).$$

Estamos, pues, en el caso de figura deformable (núm. 798), siendo $k = n - 3$.

Para determinar las fuerzas interiores **6, 7, ..., 10**, siguiendo el método de Cremona, ó de las figuras recíprocas, empezaremos por el nudo A y formaremos el triángulo aeO sobre $ea = 1$ como base, trazando aO paralela á AB , y eO paralela á EA . Recorriendo el triángulo en el sentido eaO y trasladando las direcciones á las piezas paralelas del nudo A , se deduce que la fuerza **6** $= aO$ es de compresión, y la **10** $= Oe$ de extensión.

Pasando al nudo B conocemos la fuerza **6**, que ahora actúa en el sentido AB , ó en el Oa , y la exterior **2** $= ab$; de modo que para sumarlas deberá fomarse como origen el punto O , y tendremos $Oab = 6 + 2$. Pero resulta que en el nudo B no hay más fuerza incógnita que la **7** (lado BC), y para que el correspondiente polígono parcial de fuerzas, del cual tenemos ya formada la parte Oab , pueda cerrarse, es preciso que la paralela á BC , trazada por b , pase por O , ó, lo que es lo mismo, que el lado BC sea paralelo á Ob .

Pasando á los nudos D, E , etc., demostraríamos de igual modo que para que los polígonos parciales de fuerzas se cierren, es decir, para que haya equilibrio en los nudos y puedan determinarse las fuerzas que actúan sobre los lados, es necesario y suficiente que las paralelas á los lados CD, DE trazadas por los puntos c, d , vértices del polígono de fuerzas exteriores, pasen por el punto O , ó bien que CD, DE sean paralelas á Oc, Od , es decir, que los lados del polígono articulado $ABCDE$ formen el polígono funicular correspondiente al polígono de fuerzas exteriores $ea bc de$ (cerrado) y al polo O .

Si la inclinación del primer lado hubiese sido diferente, la formación del triángulo Oab daría lugar á otro polo O distinto, y á un polígono $ABCDE$ diferente. Podemos, pues, establecer el siguiente teorema:

Para que un sistema de fuerzas pueda mantener en equilibrio á un polígono articulado cerrado, es necesario y suficiente:

- 1.º Que sea cerrado el polígono de las fuerzas.
- 2.º Que los lados del polígono formen uno cualquiera de los infinitos polígonos funiculares de las fuerzas dadas.

Las tensiones y compresiones de los lados estarán representadas por los radios polares.

Veamos si, como dijimos en el núm. 805 (2.º), ha sido necesario satisfacer $k = n - 3$ condiciones en la inclinación de los lados del polígono $ABCDE$.

Los lados AB y AE pueden tener inclinación cualquiera, con arreglo á la cual se formará el triángulo $e a O$ y se fijará el polo O .

Los lados BC , CD han de cumplir con la condición de ser paralelos á los radios polares $b O$, $c O$.

El último lado DE resultará siempre paralelo á $d^* O$, porque siendo cerrado el polígono $e a b c d$ de las fuerzas exteriores, deberá serlo también el funicular, de que tenemos formada la parte $E A B C D$; luego DE será forzosamente paralelo á $O d$.

Resulta, pues, que los tres lados AB , AE , DE tienen dirección definida, y los $n - 3$ restantes BC , CD han de satisfacer la condición de paralelismo con los radios polares; hay, por lo tanto, $k = n - 3$ condiciones que satisfacer relativas á la inclinación de los lados del polígono articulado.

Al pasar del nudo A al B podríamos cerrar el triángulo $O a b$ correspondiente á este último nudo, aun cuando BC y $O b$ no fuesen paralelas, modificando el valor de la fuerza $a b = 2$, para lo cual trazariamos desde O la recta $O h$, paralela á BC . Del mismo modo se trazarian por O paralelas á CD , DE , y se modificarían las dimensiones de las fuerzas 3, 4, si se conserva su dirección, ó las direcciones, si conservamos las magnitudes, procurando siempre que el polígono de fuerzas $e a h \dots e$ resultase siempre cerrado, pues es condición indispensable la de equilibrio de fuerzas exteriores. Veríamos también que las condiciones de magnitud, ó de dirección, de las fuerzas exteriores son en número $k = n - 3$.

Todos los lados del polígono trabajan por compresión, á excepción del AE , que hace las veces de tirante y está sometido á extensión.

Si se invierte la figura (fig. 14, lám. 34) cambian de signo las fuerzas, pero las condiciones de equilibrio son las mismas; es preciso que $ABCDE$ sea un polígono funicular del de fuerzas $e a b c d$. Es el caso de los cables ó cadenas de puentes suspendidos.

815. Figuras estrictamente indeformables. — Ha de verificarse en ellas, como sabemos (núm. 798), $l = 2n - 3$. El problema es determinado, y se podrá formar el diagrama de las fuerzas; pero en algunos casos ofrece dificultades la construcción de dicho diagrama, y es de interés reconocer las causas de estas excepciones aparentes ó verdaderas, y el modo de salvar las dificultades.

1.º *Disposición especial de los lados de la figura.* — La fig. $AbcB$ (7.ª de la lám. 31) es un entramado apoyado en A y B (*) y sometido á la acción de las fuerzas z . Tiene $l = 37$ lados y $n = 20$ nudos ó articulaciones, de modo que se verifica $l = 2n - 3$; y, sin embargo, una vez conocidas las reacciones Q , Q' , no encontramos la manera de empezar la construcción del diagrama de fuerzas. En el nudo A desconocemos las fuerzas Ab , Ad , Ae y Af ; en el b son incógnitas bA , bf , bd , y en cualquier otro nudo, el número de fuerzas desconocidas es superior á dos, y no puede formarse, por tanto, el polígono recíproco del nudo.

La dificultad se resuelve empleando el método de Culmann; al efecto, trazaremos un plano transversal XX que corte á tres lados de la figura, $m r$, nh , so , y descompondremos en sentido de estas líneas la resultante de las fuerzas exteriores situadas entre A y XX , (núms. 806 y 808), resultante que es el esfuerzo cortante C . Ahora podremos formar la recíproca del nudo r , porque conocemos rm , y determinar ro y rt , pasando después á los nudos t , o , v , x , e , h , k y B de la derecha del plano XX , siguiendo el orden en que se han enumerado, y á los a' , t' , r' , g , $e \dots$ etc., situados á la izquierda de XX .

2.º *Vigas complejas.* — Llamaremos así á los sistemas articulados indeformables, en que uno ó más lados están formados por vigas indeformables también. Tanto el polígono primitivo como las vigas que forman los diversos lados, pueden ser ó estrictamente indeformables ó de líneas supérfluas; consideraremos al presente tan sólo el primer caso, pero los procedimientos generales de resolución del problema son comunes á los dos.

Un ejemplo de viga compleja presenta la fig. 22 de la lám. 29; en el polígono $A F E D C$ (líneas de puntos) se han sustituido los lados rectilíneos, de una pieza, $A F$, etc., por vigas articuladas.

En un nudo cualquiera, el A , por ejemplo, concurren por lo menos cuatro lados, dos por cada una de las figuras contiguas, y no se puede formar directamente una figura recíproca total, por el simple conocimiento de las fuerzas exteriores; el procedimiento que debe seguirse es el siguiente:

Si las fuerzas exteriores 1, 2, 3, etc., están aplicadas á los nudos, se hallará el diagrama de fuerzas correspondiente al polígono $A F E D C$ (líneas de puntos) y se determinarán las presiones ó tensiones que actúan á lo largo

(*) Puede estar apoyado en a y d , en cuyo caso los montantes $A a$, $B d$ (líneas de puntos) tienen por objeto transmitir las presiones á los puntos a y d , y serán piezas comprimidas por las reacciones Q , Q' ; y las partes de tirantes $a b$, $c d$ servirán para asegurar la inmovilidad de los extremos b y c . Las líneas $A a$, $B d$, $a b$, $c d$ son accesorias, para los efectos del diagrama de fuerzas.

de las líneas AF , etc. Después se considerará cada viga parcial aisladamente, como un sistema articulado sometido á dos fuerzas exteriores, iguales y contrarias en sus extremos, que no son otra cosa que las tensiones ó compresiones de los lados del polígono primitivo, y se formará el diagrama correspondiente.

Cuando además de las fuerzas **1, 2, 3**, etc., haya otras P, P' , aplicadas á puntos intermedios, se descompondrán en otras Q, Q' que pasen por los nudos; se hallarán las resultantes R, R' de estas fuerzas y de las **2 y 3**; se determinarán las tensiones ó compresiones del polígono sencillo primitivo, sometido á las fuerzas exteriores R, R' , y después se calculará aisladamente cada viga parcial suponiéndola sometida á la tensión ó compresión en los extremos, según la línea BC , que resulte del diagrama anterior, y á las fuerzas P, P' , etc.

La fig. 19, lám. 29, es otro tipo de viga compleja que no puede calcularse directamente, á pesar de que siendo $l = 61$ y $n = 32$, se verifica $l = 2n - 3$, de modo que el sistema es estrictamente indeformable; pero puede suponerse formado de una viga primitiva $A'B'H'$ (fig. 20, lám. 29), en la cual á cada una de las partes $A'C', C'T'$, etc., se ha yustapuesto una viga de la forma $R''E''A''$ (fig. 21, lám. 29).

Las fuerzas **1, 2, 3**, etc. (fig. 19, lám. 29), se descompondrán en otras que pasen por los puntos A, R, T , etc., y se sumarán con las **17, 4, 8, 12, 16**, que actúan directamente en estos puntos. Si las fuerzas **1, 2, 3**, etc., fuesen iguales entre sí, y á p , tendríamos (figs. 19 y 20, lám. 29):

$$\text{Reacción } Q = Q' = 17 - \frac{3}{2} p = \frac{15}{2} p - \frac{3}{2} p = 6 p.$$

$$\text{Fuerza } I = \frac{1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7}{2} + 4 = 3 p + p = 4 p.$$

$$\text{Fuerza } II = III = I = 4 p.$$

Formaríamos la recíproca de la fig. 20 y determinaríamos las fuerzas interiores b', a' , etc., y estudiando después aisladamente (fig. 21, lám. 29) el sistema elemental $A''E''R''$, sometido á las fuerzas **1, 2, 3**, y á las reacciones **4', 5'** correspondientes, que se calcularían por la condición de equilibrio entre ellas y las fuerzas **1, 2, 3**, se construiría el diagrama de fuerzas y se determinarían los valores a'', b'' , etc., de las tensiones respectivas.

Los diagramas de fuerzas de las figs. 20 y 21 (lám. 29) resuelven el problema. En efecto, la parte AB de la fig. 19 pertenece á la vez á la pieza $A'B'$ de la fig. 20 y á la $A''B''$ de la fig. 21; de modo que la fuerza

interior b correspondiente será la suma algebraica de las b' y b'' relativas á $A'B'$ y $A''B''$. Decimos suma algebraica, porque puede suceder muy bien que una de las dos fuerzas b', b'' , sea de extensión, y la otra de compresión. Es fácil ver que

$$f \text{ (fig. 19)} = b' + f'' \text{ (figs. 20 y 21)}$$

$$a = b'$$

$$a = a' + a''$$

$$d = a' + d''$$

$$c = c''$$

$$e = e''.$$

3.º *Disposición defectuosa de los lados.* — La fig. 23 de la lám. 29 tiene $l = 13$ lados, y $n = 8$ nudos; de manera que $l = 2n - 3$, y, sin embargo, no puede formarse el diagrama de fuerzas interiores. Podremos, sí, construir el triángulo MNR correspondiente el nudo A , puesto que conocemos la reacción Q , y determinar las fuerzas a y b ; pero no podemos pasar al nudo B en el que hay las tres incógnitas BC, BD, BE ; y si pasamos al nudo C , el polígono se reduce á la línea b , porque las paralelas á los lados AC y CD se confunden en esta línea, lo cual manifiesta que el lado HS paralelo á BC es cero, es decir, que no actúa fuerza alguna á lo largo de BC , y que la línea BC es inútil y podría suprimirse.

Suprimida BC , quedan $l = 11$ lados y $n = 7$ nudos, verificándose también $l = 2n - 3$. Del nudo A se podría pasar al B , en que son conocidas a y 1 y desconocidas BD y BE ; del nudo B se pasaría después á los D, E, F , etcétera.

Puede conservarse el número primitivo de lados $l = 13$, pero cambiando la posición de la línea BD , sustituyéndola por otra que uniera los puntos C y E . En resumen: el problema se hace posible suprimiendo el lado BC , ó modificando la posición del BD .

Podíamos haber comprendido desde luego la imposibilidad de formar el polígono cerrado recíproco del nudo C , porque no es posible el equilibrio de tres fuerzas AC, CD, BC , cuando dos de ellas (AC, CD) tienen la misma línea de acción. Diremos, por lo tanto, que *cuando en una figura estrictamente indeformable concurren en un nudo tres lados de los cuales dos estén en línea recta, no es posible la construcción del diagrama de fuerzas, y el tercer lado podrá suprimirse sin que se altere la relación $l = 2n - 3$, pues que con él se suprime otro lado y un nudo, en cuyo caso la construcción del diagrama no*

ofrece dificultad: tampoco la ofrecerá si, conservando el número total de lados l , se modifica la posición de alguno de ellos, haciéndolo pasar por el nudo antes citado.

816. Figuras de líneas superfluas. — La fig. 16 (lám. 31) tiene $l = 20$ lados y $n = 10$ nudos; de modo que aplicando la fórmula $l = 2n - 3 + k$ resultan $k = 3$ líneas superfluas. La fig. 5.^a puede suponerse compuesta de las dos X y Z , estrictamente indeformables, yustapuestas, sometidas á las fuerzas $1' 2'$, etc., que son la mitad de las $1, 2$, correspondientes á la viga V .

Se construirán los diagramas de fuerzas correspondientes á cada uno de los sistemas elementales X y Z ; la tensión de los lados CN, BM , etc., que entran en la composición de una de las vigas X ó Z , será la correspondiente al diagrama parcial respectivo; pero las tensiones de las piezas AB, AN, BN , etc., que forman parte de X y Z á la vez, se obtendrán por la suma algebraica de las tensiones parciales.

La fig. 13 (lám. 31) se puede descomponer en la $a'ue$ sometida á la fuerza 2 , y la MhN cargada con 1 y 3 ; los montantes Aa, Ee no sirven más que de apoyos de la viga elemental $AbCdE$.

Las fuerzas interiores correspondientes á los lados inclinados Ba, Bc , etc., serán $n, m, r, \dots x, z, h, \dots$. Las de los lados AE y ae tendrán los valores:

$AB \dots \dots \dots$	k	$ab \dots \dots \dots$	m
$BC \dots \dots \dots$	$k + u$	$bc \dots \dots \dots$	$m + h$
$CD \dots \dots \dots$	$p + u$	$cd \dots \dots \dots$	$o + h$
$DE \dots \dots \dots$	p	$de \dots \dots \dots$	o

817. Observación relativa á la determinación del número de lados (l) y de nudos (n). — La distinción de figuras deformables é indeformables, se funda en la relación $l = 2n - 3 + k$ (núm. 798). Ha de fijarse, con toda exactitud, los valores de l y n , y á este efecto conviene observar que tal vez aparezcan como inútiles ó superfluos, lados cuya inutilidad es tan sólo relativa: tales son la péndola Bm (fig. 1.^a, lám. 31), que sirve solamente para sostener el tirante AC , y el cepo ab , cuyo objeto es dividir en dos partes la longitud de las piezas comprimidas AB, BC , creándoles puntos fijos intermedios para asegurar su resistencia con menor escuadría, pues sabido es que esta aumenta con la longitud.

Por esta razón dividiremos las piezas de un entramado en *principales* y *accesorias* ó *auxiliares*: forman en el primer grupo todas aquellas que espe-

rimentan extensiones ó compresiones desarrolladas por las fuerzas exteriores, é intervienen en el equilibrio de todo el sistema ó de los nudos; y en el segundo las que tienen por objeto modificar, en beneficio de la resistencia ó estabilidad, la situación creada en las piezas principales por las fuerzas exteriores. Claro es que los valores de l y n se han de referir á las piezas principales eliminando las auxiliares: así, en la fig. 1.^a (lám. 31), prescindiremos de la péndola Bm y cepo ab , y resulta un sistema estrictamente indeformable, mientras que si se toman en consideración dichas piezas es $l < 2n - 3$ y el sistema sería deformable.

APLICACIONES. — VIGAS POLIGONALES Y PARABÓLICAS. — CONSOLAS Y GRUAS. — VIGAS ARMADAS. — VIGAS RECTAS DE TODOS SISTEMAS

818. Escalas. — En la resolución gráfica de los problemas en que nos ocupamos, son necesarias dos escalas: una, de h milímetros por metro, servirá para las longitudes, y con arreglo á ella, se dibujará el entramado articulado y se situará el polo á la distancia de k unidades del polígono de fuerzas, para trazar después el funicular correspondiente; otra escala de p kilogramos por milímetro, tendrá por objeto apreciar las intensidades de las fuerzas, y con su auxilio se trazará el polígono correspondiente y se medirán las fuerzas interiores que, en longitudes de líneas, dé el diagrama. En las figs. 4.^a y 4.^a" (lám. 30), por ejemplo, la viga articulada se dibujará con la escala EL de longitudes; con arreglo á ella se situará el polo O con respecto al polígono de fuerzas, y las magnitudes $mn, nr, \dots mp, zs$, de las fuerzas exteriores é interiores se apreciarán en la escala EF , llevando á ella las magnitudes lineales mn, mp , etc.

También se medirán por la escala de fuerzas, cuando sea necesario, los momentos de flexión (núm. 418).

819. Vigas poligonales y parabólicas. — Estas vigas están formadas de una línea poligonal ABC (fig. 11, lám. 31), ó de un arco parabólico (ABC , fig. 12, lám. 31) provisto de una cuerda AC . Recordaremos (núm. 814) que para que el equilibrio exista en un polígono articulado, es preciso, además de la condición principal de equilibrio de las fuerzas exteriores, que los lados del polígono formen uno de los infinitos polígonos funiculares de las fuerzas dadas. A continuación presentamos algunos casos.

1.^o *Triángulo ABC* (fig. 1.^a, lám. 31) *apoyado en A y C , sometido á la fuerza 1 , aplicada al nudo B .* — El polígono de fuerzas es $PFDP$, siendo

$PF = 1$: las reacciones $FD = 2$ y $DP = 3$ son iguales á la mitad de 1 , por ser $Am = mC$, y no es necesario trazar el polígono funicular para obtenerlas (núm. 415).

En el nudo A es conocida la fuerza 3 y desconocemos las 4 y 5 : se trazarán PO y DO paralelas respectivamente á BA , CA ; y recorriendo el triángulo en el sentido DPO y trasladando al nudo las direcciones PO , OD , hallamos que la fuerza $4 = PO$ es de compresión, y la $5 = OD$ es de extensión. La recta OD pasa por el punto medio de PF , que es el de separación de 2 y 3 , por ser perpendicular á ella.

Pasando al nudo B , conocemos la fuerza $4 = OP$, que por ser de compresión se dirigirá ahora al nudo, según AB , y la fuerza exterior $1 = PF$: el origen del nuevo polígono es O , y la suma de las fuerzas conocidas OPF . El problema es más que determinado, pues no hay más fuerza incógnita que la 6 : como comprobación, OF debe ser paralela á BC .

Cualquiera que sea la inclinación de BA y AC , el problema tiene solución, pues las paralelas PO , FO á dichas rectas se cortan en un punto O de la recta OD (paralela á AC trazada por el punto D de separación de las reacciones 2 y 3).

El lado AC hace de tirante: si no existiese y se sustituyese por dos apoyos ó resaltos en A y C , el empuje horizontal que actuaría sobre los apoyos es precisamente la tensión del tirante, ó sea $5 = OD$. Si es arbitraria la inclinación de los lados, se podrán disponer de modo que el empuje ó tensión del tirante, que representaremos por la letra H , tenga un valor determinado de antemano, á cuyo efecto haremos $DO = H$, uniremos O con P y F y trazaremos AB , AC , paralelos á PO , PF .

Llamando l á la luz AC de la viga, f á la flecha ó montea Bm , y P á la fuerza 1 , la comparación de los triángulos semejantes OPD , ABm , nos da

$$H = OD = \frac{1}{2} P \times \frac{Am}{Bm} = \frac{Pl}{4f}.$$

A la misma relación entre H y f se llega por las consideraciones siguientes, aplicables no solamente al triángulo ABC , sino á una figura poligonal de cualquier número de lados. Puesto que ABC es el polígono funicular correspondiente al de fuerzas PF y al polo O situado á H unidades de distancia de PF , la ordenada Bm de un punto m , multiplicada por H , representa el valor M_m del momento de flexión, en este punto, de una viga AC apoya-

da en A y en C (núm. 416). Será, pues, llamando f á la magnitud Bm ,

$$M_m = fH \quad (1),$$

ó, puesto que $M_m = M_o = \frac{1}{4} Pl$ (núm. 317),

$$\frac{1}{4} Pl = fH \quad \text{''} \quad H = \frac{Pl}{4f} \quad (2).$$

El empuje H puede hacerse tan grande como se quiera, disminuyendo f convenientemente.

Si los apoyos A y C no estuviesen en una horizontal, la construcción sería la misma: la línea OD sería inclinada, y el empuje horizontal H tendría por valor la proyección horizontal de OD . Cuando se diese H como dato, se tomaría O á una distancia de PF igual á E .

820. 2.º Cuadrilátero $ABCD$ (fig. 2.ª, lám. 31) situado por encima del lado AD , solicitado por las dos fuerzas iguales 1 y 2 .—En lo sucesivo, siempre que empleemos el método de Cremona, numeraremos las fuerzas exteriores, incluyendo las reacciones de los apoyos, de izquierda á derecha, á partir de la primera fuerza exterior de la izquierda, de modo que el último número corresponderá al apoyo izquierdo, y continuaremos la numeración para las fuerzas interiores.

Puesto que $1 = 2$, son también iguales 3 , 4 y 1 ; el polígono de las fuerzas exteriores es $PEFEP$. El polígono $ABCD$, para que sea posible el equilibrio, ha de tener sus lados paralelos á los de uno de los polígonos funiculares correspondientes al de fuerzas exteriores $PEFP$: pero se ha fijado la posición de uno de los lados, el AD comprendido entre las fuerzas 3 y 4 , luego el radio polar que pase por el punto E de separación de las fuerzas 3 y 4 ha de ser paralelo á AD , y en uno de sus puntos estableceremos el polo O , que uniremos á P y F , trazando después AB , BC , CD paralelas á OP , OE , OF .

Las fuerzas interiores estarán representadas por los radios polares $OP = 5$ (compresión), $OE = 7$ (compresión), $OF = 8$ (compresión) y $OE = 6$ (extensión): se comprobaría formando las recíprocas de los nudos A , B , C y D (triángulos OPE y OEF). Llamando f á la flecha ó montera Bm , y P á cada una de las fuerzas 1 y 2 , el empuje horizontal $H = 6$ es, comparando los triángulos semejantes OPE , ABm , $H = P \times \frac{Am}{f}$. A la misma relación

llegaríamos por la ecuación (1) del núm. 819, haciendo $M_m = P \times A m$, que es su valor (núm. 319).

Para obtener un polígono $ABCD$ de una cierta flecha f , se hará OE igual al valor de H correspondiente, y se trazará AB, BC, CD , paralelas á OP, OE, OF : inversamente, se puede obtener un polígono que dé un empuje, ó tensión H del tirante, de valor dado.

821. Si las fuerzas 1 y 2 son desiguales y se fija la posición AD del tirante, el equilibrio no es posible á no ser por la adición de nuevas líneas que hagan $l = 2n - 3$.

En la fig. 9.^a (lám. 31) la fuerza 1 = Pc es mayor que 2 = cF . Para determinar las reacciones de los apoyos tomaremos un polo O , trazaremos los radios polares OP, Oc, OF , y sus paralelas MN, NR, RS , uniremos M y S , y dibujaremos Or paralela á MS , obteniéndose así $Fr = 3, rP = 4$.

Construyamos el triángulo rPa , recíproco del nudo A , en el cual $Pa = 5$ (compresión) y $ar = 6$ (extensión). Al pasar al nudo B , en el que conocemos las fuerzas 5, de dirección aP , y 1 = Pc , el origen del polígono recíproco será a , y la suma de fuerzas conocidas es aPc : si se traza cb paralela á la línea restante BC del nudo B , hallamos que no pasa por el origen a , de modo que el polígono no cierra, y por lo tanto no es posible que exista equilibrio en dicho nudo, ni en el sistema, á no aumentar un lado que pase por B y sea oblicuo á AD . Hagámoslo así, y tracemos la diagonal BD , y su paralela ab : el polígono recíproco del nudo B es $aPcba$, de modo que la diagonal DB resulta comprimida por una fuerza $ba = 8$, y en el lado CB se desarrolla una compresión $cb = 7$.

Como comprobación, debe resultar Fb paralela á DC : los polígonos recíprocos de los nudos C y D son, respectivamente, cFb y $Frab$.

Con la adición de la diagonal BD , el sistema articulado tiene $l = 5$ lados y $n = 4$ nudos, de modo que $l = 2n - 3$ y la figura es estrictamente indeformable.

Añadiendo la diagonal AC , en vez de la BD , hubiese resultado sometida á extensión.

En la fig. 10 (lám. 31), la fuerza 1 = Pc es menor que la 2 = cF : operando del modo antes indicado hallaríamos que BD está sometida á la fuerza de extensión $8 = ba$. La diagonal AC estaría comprimida.

822. Las fuerzas 1 y 2 pueden estar aplicadas al tirante AD (fig. 4.^a, lámina 31); en cuyo caso, para evitar la flexión de él, habría necesidad de aumentar las péndolas Bm y Cn . La figura continúa siendo deformable porque $l = 8, n = 6$ y $l < 2n - 3$; para que haya equilibrio será preciso que el con-

torno $ABCD$ corresponda á un polígono funicular del polígono de fuerzas exteriores.

Construyendo el diagrama, se ve que las fuerzas 5, 8 y 12 son de compresión; las 6, 7, 9, 10 y 11 de extensión.

Observaremos que la recíproca del nudo m es un rectángulo, en el cual los lados correspondientes á las fuerzas 1 y 7 son iguales y paralelos, y lo mismo los 6 y 9. Si en vez de cortarse perpendicularmente las líneas Bm, An formasen un ángulo diferente de 90° , la figura recíproca sería un paralelogramo en el cual los lados opuestos son también iguales de dos en dos: podremos, pues, establecer que en cuatro fuerzas concurrentes en equilibrio, cuyas direcciones se confunden con las de dos rectas que se cortan, son iguales y de signo contrario las que tienen la misma línea de acción.

823. En la fig. 5.^a (lám. 31), la línea poligonal $ABCD$ está situada debajo de la cuerda AD que resulta comprimida por la fuerza 5, mientras que los otros lados están extendidos por las fuerzas 6, 7 y 8.

Cuando las fuerzas 1 y 2 están aplicadas á la cuerda (fig. 6.^a, lám. 31), para evitar su flexión se colocan las mangueras 7 y 11, que estarán comprimidas con fuerzas 7 = 1 y 11 = 2. El polígono de las fuerzas es PF : no creemos necesario detallar la construcción del diagrama, que es sencillísima.

Si las fuerzas 1 y 2 son desiguales, habría necesidad de aumentar una diagonal (líneas de puntos).

Las fuerzas 5, 6, 7 y 8 (figs. 5.^a y 6.^a) se pueden expresar por sencillas fórmulas deducidas de los diagramas.

En la fig. 5.^a (lám. 31), la fuerza 5, que comprime el cordón superior AD , tiene por valor (núm. 819), llamando f á la flecha Bm , h á la longitud Am y P á la carga total 1,

$$H = 5 = \frac{Ph}{f} \quad (3).$$

La fuerza 7, que extiende el tirante horizontal BC , tiene el mismo valor que la 5, es decir, $\frac{Ph}{f}$.

La fuerza 6 de extensión del tirante AB , es, por el triángulo OEF ,

$$6 = \sqrt{P^2 + \frac{P^2 h^2}{f^2}} \quad \text{ó} \quad 6 = \frac{P}{f} \sqrt{f^2 + h^2} \quad (4).$$

En la fig. 6.^a (lám. 31) las fuerzas de compresión del cordón superior (5) y de extensión del inferior (8) son dadas por el cociente $\frac{P h}{f}$; y la extensión del tirante inclinado (6), por el producto $\frac{P}{f} \sqrt{f^2 + h^2}$, como en el caso anterior. Las manguetas (7 y 11) están comprimidas con una fuerza $1 = 2 = P$.

La disposición representada en la fig. 1.^a de la lám. 32, puede ser calculada por las fórmulas anteriores.

824. 3.^o Polígono $A B C$, con tirante $A C$ (fig. 11, lám. 31). Repitiendo los razonamientos anteriores, veremos que, una vez determinadas las reacciones 7 y 8 de los apoyos, debe trazarse por el punto c de separación una recta $c O$ paralela al tirante $A C$, y tomar en ella el polo O : dibujados los radios polares $O P, O a, O b$, etc., se trazarán paralelamente á ellos, los lados 9, 10, 11, etc., del polígono. Los radios polares $O P, O a$, etc., representan las magnitudes de las compresiones 9, 10, etc.

El radio $O c$ es la extensión del tirante $A C$: podremos, pues, trazar un polígono $A B C$ cuyo tirante tenga una extensión determinada cualquiera H , haciendo $c O = H$. Si no hay tirante, H será el empuje horizontal en los apoyos.

Empleando la relación (1) del núm. 819, tendremos, haciendo $B m = f$,

$$H = \frac{M_m}{f} \quad (5).$$

Si las fuerzas 1, 2, etc., son iguales á p y distantes entre sí la cantidad h , el momento de flexión M_m vale:

$$M_m = 8 \times A m - \left(p \times \frac{5}{2} h + p \times \frac{3}{2} h + p \times \frac{1}{2} h \right)$$

ó, teniendo en cuenta que $8 = 3 p$, y $A m = 3 h$:

$$M_m = \frac{9}{2} h p \quad \text{y} \quad H = \frac{9 p h}{2 f}.$$

En general, H es de la forma $H = \frac{n h p}{f}$; ó, puesto que h es una fracción de la longitud $l = A C$:

$$H = m \frac{p l}{f} \quad (6).$$

Los polígonos $A' B' C'$ y $A'' B'' C''$ se diferencian del $A B C$ únicamente en el cambio de signo de las fuerzas interiores; las cuerdas $A' C'$, $A'' C''$ están comprimidas, por la fuerza $H = \frac{M_m}{f}$, que puede ponerse bajo la forma (6), y los lados del polígono, extendidos. Las manguetas ó montantes m, n , etc., de la viga $A'' B'' C''$ no tienen otro objeto que el de evitar la flexión de $A'' C''$, y están comprimidos con las mismas fuerzas 1, 2, etc., aplicadas á sus extremos.

825. La fig. 14 (lám. 31), representa un doble polígono $A B C B'$, con el tirante ó cuerda $A C$: el polígono superior $A B C$ está sometido al sistema de fuerzas 1, 2... 8, y el inferior $A' B' C'$ al sistema 1', 2'... 8'. Los lados de $A B C$ son paralelos á los radios polares $O P, O a... O P'$, siendo $P F = 1 + 2 + \dots + 8$: el polígono $A' B' C'$ tiene sus lados paralelos á $O' P', O' a' \dots O' F'$, radios polares del polígono de fuerzas $P' F' = 1' + 2' + \dots + 8'$.

Las reacciones Q y Q' son la suma de las parciales de los dos sistemas de fuerzas 1... 8 y 1'... 8'.

El lado $A C$ sufre una extensión $H = O c$ engendrada por el polígono $A B C$, y una compresión $H' = O' c'$ debida al polígono $A' B' C'$. Según que $H - H'$ sea mayor, menor ó igual á cero, el lado $A C$ estará comprimido, ó extendido por la fuerza $H - H'$, ó no sufrirá esfuerzo alguno y podrá suprimirse. Supongamos que son iguales entre sí las fuerzas 1 á 8, y que sucede lo mismo á las 1' á 8': llamemos p á las primeras y p' á las segundas, f á la flecha $B D$ y f' á la $D B'$, tendremos (fórmula 2):

$$H = m \frac{p l}{f} \quad \text{y} \quad H' = m \frac{p' l}{f'};$$

y para que $H = H'$ será preciso que

$$\frac{p}{f} = \frac{p'}{f'}.$$

Cuando hay un solo sistema de fuerzas 1, 2... 8 aplicadas al polígono superior $A B C$ (fig. 15, lám. 31), que se transmiten al inferior por medio de los montantes m, n , etc., puede decirse que cada una de las fuerzas se divide en dos mitades, aplicadas una al polígono superior y otra al inferior, quedando comprendido este caso en el anterior, con sólo hacer $1' = 1 = \frac{1}{2} p$;

entonces, para que $H = H'$ es necesario que $f' = f$, es decir, que la figura $ABC B'$ sea simétrica con relación al eje que pasase por A, C .

826. 4.º *Parábola ABC* (fig. 12, lám. 31), con tirante AC , sometida á una carga $MN = P$ uniformemente repartida á razón de p por unidad de longitud l de proyección AC . Es el caso de la fig. 11, suponiendo iguales las fuerzas **1**, **2**..., y pequeños los lados: el polígono funicular se convierte, en el límite, en una parábola ABC (núms. 423 y 424), tangente en A y C á las rectas AD y DC paralelas á los radios polares OP y OF . La magnitud PF es igual á $pl = P$, carga total; O , el polo tomado en la perpendicular á PF en el punto medio R , á la distancia $OR = H$; y B es el punto medio de la magnitud DE .

Los radios polares OP, OF representan la compresión en los extremos A y C del arco, en las direcciones tangenciales AD, CD ; y $OR = H$, el empuje del arco, ó la fuerza de extensión del tirante AC .

Aplicando la ecuación (5) (núm. 824), y recordando que $M_m = M_0 = \frac{1}{8} pl^2$ (núm. 323), tendremos, siendo $BE = f$,

$$H = \frac{pl^2}{8f}.$$

Muchos arcos parabólicos resuelven el problema, y si se da conocido el empuje H , ó la flecha f , se fijará el polo O , los radios OP, OF , el punto D y el E .

Algunas veces se da á las viguetas que han de hacer de cargaderos, ó á las que soportan el peso de un tabique, la forma parabólica (fig. 4.ª, lám. 32), con su tirante correspondiente que se calculará por la fórmula anterior.

827. Vigas armadas.—Se denominan así las vigas ordinarias, apoyadas en sus extremos, cuando se crean en ellas puntos de apoyo intermedios, sustentándolas por manguetas ó suspendiéndolas por péndolas que á su vez están ligadas á la viga principal mediante otras piezas, pares ó tirantes.

La fig. 3.ª (lám. 31) es un ejemplo de viga armada; la mangueta DC , que proporciona un punto de apoyo intermedio D á la viga AB , reduciendo así su longitud, está suspendida por medio de los tirantes CA, CB que parten de los extremos A y B .

En la fig. 8.ª (lám. 31) el punto D está suspendido por la péndola CD del punto C de encuentro de dos pares CA, CB , enlazados en A y B con la viga AB .

Las figs. 4.ª y 6.ª (lám. 31) representan otros tipos, en que se ha proporcionado á la viga dos puntos de apoyo intermedios.

Cuando se emplean manguetas y tirantes (figs. 3.ª y 6.ª, lám. 31) se dice que la viga está armada por la parte inferior, porque, en efecto, las piezas adicionales, manguetas y tirantes, están situadas debajo de la viga primitiva; y en el caso de hacer uso de péndolas y pares (figs. 4.ª y 8.ª, lám. 31), la viga está armada por la parte superior.

828. Viga armada, con un punto de apoyo intermedio.—Supongamos que se trata de la viga representada en la fig. 3.ª (lám. 31). Sea **1** = P la fuerza total aplicada en el punto medio D . Las reacciones **2**, **3** de los apoyos son iguales cada una á la mitad de **1** ó á $\frac{1}{2} P$; de modo que si PF es igual á **1**, Fc y cP representarán las reacciones **2** y **3**.

En el nudo A es conocida la fuerza **3** igual á cP , y desconocemos las **4** y **5**; siguiendo el método general explicado en el núm. 812, trazaremos por P y c paralelas á AD, AC , y para conocer por cuál de los dos puntos P y c ha de trazarse la paralela á AD , aplicaremos la regla del núm. 813. El lado AD está comprendido entre las fuerzas **3** y **1**; luego su paralela, en el diagrama de fuerzas, ha de pasar por el punto de encuentro, ó de separación, de las fuerzas **3** = cP y **1** = PF , que es el punto P ; será, pues, Pac la recíproca del nudo A ; y recorriendo el triángulo en la dirección cP de la fuerza **3**, se deduce que **4** = Pa es fuerza de compresión, y **5** = ac de extensión.

Observaremos que debiendo pasar por P la paralela á DA , y por c la relativa á CA , el punto de encuentro a de estas paralelas está á la izquierda del polígono de fuerzas PF , y lo mismo le sucede á todo el diagrama. Este resultado es independiente de la organización de la viga, y se debe solamente á la circunstancia de que las fuerzas **3** y **1** están aplicadas á la pieza AB que forma el contorno ó *cordón* superior de la viga. Podremos, pues, enunciar esta regla, que evita toda duda en la construcción de los diagramas. *Cuando las fuerzas exteriores estén aplicadas al cordón superior de una viga apoyada en sus extremos, el diagrama de fuerzas debe formarse á la izquierda del polígono de fuerzas exteriores.*

En el nudo C es dato la fuerza **5**, que tendrá ahora la dirección ca ; tomando c como origen, trazaremos cb y ab paralelas respectivamente á CB y CD . Recorriendo el triángulo en el sentido cab y trasladando las direcciones de los lados á las piezas respectivas del nudo C , se deduce que **6** = ab es fuerza de compresión, y **8** = bc de extensión. Siguiendo el convenio estable-

cido en el núm. 812, dibujamos con línea gruesa las fuerzas de compresión y las piezas comprimidas, y con línea delgada las piezas extendidas y las fuerzas de extensión.

La recíproca del nudo *D* es el rectángulo *PfbaP*, y la del nudo *B* el triángulo *Fcb*.

Siendo $1 = P$, $DC = f$ y $AB = l$, la comparación de los triángulos semejantes que contiene el diagrama de fuerzas y la viga armada, da:

$$\text{Compresión del cordón } ADB \dots 4 = 7 = \frac{Pl}{4f} \quad (1).$$

$$\text{Compresión de la mangueta } DC \dots 6 = P \quad (2).$$

$$\text{Extensión de los tirantes } CA \text{ y } CB. \quad 5 = 8 = \frac{P}{4f} \sqrt{l^2 + 4f^2} \quad (3).$$

Estas fórmulas se aplicarían, entre otros casos, á la vigueta armada que representa la fig. 2.^a de la lám. 32.

Cuando la mangueta no está colocada en el punto medio de la viga (figura 16' y 16", lám. 32), se hallarán las reacciones $1 = bc$ y $2 = ca$, tomando un polo *O*, construyendo el polígono funicular *ABC* y trazando *Oc* paralela á *AC*. El triángulo *cad*, recíproco del nudo *M*, los *bce* y *cde*, relativos á los nudos *N* y *S*, y el rectángulo *bade* correspondiente al nudo *R*, determinan las compresiones y extensiones de las piezas elementales.

La comparación de los triángulos *MRS* y *adc*, nos da, teniendo en cuenta que la reacción **2** es igual á $P \times \frac{RN}{l}$, llamando *l* á la longitud total del cordón superior y *f* á la de la mangueta:

$$\text{Compresión del cordón} = 3 = \frac{P}{fl} \times RN \times RM \quad (4).$$

$$\text{Compresión de la mangueta} = 5 = P \quad (5).$$

$$\text{Extensión del tirante } MS = 4 = \frac{P \times NR}{fl} \sqrt{RM^2 + f^2} \quad (6).$$

$$\text{Extensión del tirante } SN = 6 = \frac{P \times MR}{fl} \sqrt{RN^2 + f^2} \quad (7).$$

829. Si la viga está armada por la parte superior (fig. 8.^a, lám. 31), al construir el triángulo *oPa* recíproco del nudo *A*, deberá trazarse por *P* la paralela *Pa* al cordón inferior *AD*, porque estando *AD* comprendido entre las

fuerzas **3** y **1**, su paralela del diagrama ha de pasar por el punto *P* de separación de $3 = oP$ y $1 = PF$ (núm. 813). Entonces el punto *a* de encuentro de *Pa* y *oa* estará á la derecha de *PI*; luego cuando las fuerzas exteriores estén aplicadas al cordón inferior de una viga apoyada en sus extremos, debe formarse el diagrama de fuerzas á la derecha del polígono de fuerzas exteriores.

El diagrama de la viga *ACB* se construye como el del caso anterior: resultan las mismas fuerzas interiores, pero con signo contrario; así es que el cordón inferior *AB* y la péndola *CD* están extendidos, y los pares *CA* y *CB* comprimidos. Se deducirían también los valores de fuerzas siguientes:

$$\text{Pares} \dots \dots \dots \frac{P}{4f} \sqrt{l^2 + 4f^2} \quad (8).$$

$$\text{Cordón inferior} \dots \dots \dots \frac{Pl}{4f} \quad (9).$$

$$\text{Péndola} \dots \dots \dots P \quad (10).$$

Si la fuerza $P = 1$ estuviese aplicada á un punto *D* diferente del medio, se hallarían las reacciones de los apoyos por el procedimiento gráfico general del núm. 413.

Ejemplo. — Una vigueta de piso (fig. 3.^a, lám. 32), de 6 metros de longitud, ha de soportar el peso de un tabique de 5 metros de altura, colocado longitudinalmente sobre dicha vigueta, la cual ha de resistir también al peso de la parte de piso que le corresponde. Son datos, además:

- Peso del metro cuadrado de tabique. 200 kilogramos.
- Distancia, entre ejes, de las viguetas de piso. 0'8 metros.
- Peso por metro cuadrado de piso. 400 kilogramos.
- Altura de la péndola. $f = 2$ metros.

Como la vigueta, aisladamente, no podrá soportar estos pesos, se forma una viga armada por la parte superior, pudiendo aceptarse la disposición que representa la fig. 3.^a de la lám. 32. Hace de tirante una doble vigueta, de forma de doble *T* laminada, suspendida por una péndola de hierro plano que se cose á dos pares, también de hierro plano; estos pares trabajan por compresión, como sabemos, y por lo tanto sería de temer su flexión lateral si no fuera porque el forjado del tabique lo impide.

Sobre la doble vigueta armada cargan los pesos siguientes, por metro lineal:

Tabique.....	$5 \times 200 =$	1000 kilogramos.
Piso.....	$0,8 \times 400 =$	320 „
Total por m. l.....	1320	„
Total en toda la viga.....	$1320 \times 6 =$	7920 kilogramos.

Descomponiendo en dos partes iguales el peso que actúa sobre cada semi-vigueta, una que cargue sobre el apoyo inmediato y otra sobre la péndola, resulta que puede suponerse aplicada á esta un peso $P = \frac{1}{2} \times 7920 = 3960$ kilogramos.

Aplicando las fórmulas (8), (9) y (10) del núm. 829, tendremos:

Extensión de la péndola..	$P = 3960$ kgs. (4000 kgs. en números redondos).
Compresión de los pares..	$\frac{P}{4f} \sqrt{l^2 + j^2} = 3600$ kilogramos.
Extensión del tirante ó cor-	
dón inferior.....	$\frac{Pl}{4f} = 3000$ kilogramos.

Cálculo de la péndola.—Admitiendo un coeficiente de trabajo $R = 7 \times 10^6$ kilogramos por m.² (7 kilogramos por mm.²), el área ω de la sección resistente de la péndola será

$$\omega = \frac{4000}{7} = 571 \text{ mm.}^2;$$

y como la péndola se compone de dos ramas, la sección resistente de cada una será $\frac{571}{2} = 285 \text{ mm.}^2$.

Cálculo de los pares.—Como no es de temer la flexión lateral, se hará uso de la fórmula de compresión simple $P = R \omega$; y haciendo $R = 7$ kilogramos por mm.², será

$$\omega = \frac{P}{R} = \frac{3600}{7} = 514 \text{ mm.}^2.$$

Cálculo de las viguetas.—Son dos, para soportar un peso total de 7920 kilogramos; de modo que á cada una corresponden $\frac{1}{2} \times 7920 = 3960$ kilogramos, cuya carga produce un momento de flexión máximo,

$$M_0 = \frac{1}{32} Pl = \frac{1}{32} \times 3960 \times 6 = 742 \text{ kilográmetros.}$$

Hemos hecho $n = 32$ en la fórmula del momento máximo M_0 , porque puede suponerse que las viguetas están apoyadas en los extremos y en el punto medio.

Además, siendo de 3000 kilogramos la extensión total del cordón inferior, en cada vigueta actuará una fuerza de extensión de 1500 kilogramos.

Para un coeficiente de trabajo $R_1 = 6 \times 10^6$ por m.², será empleando la conocida fórmula $\frac{RI}{v} = M_0$,

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R_1} = \frac{742}{6 \times 10^6} = 0,000123.$$

En la tabla 3.^a del núm. 489 hallamos una vigueta (la núm. 161), cuyas dimensiones son $\frac{180 \times 60}{7 \times 10}$, y cuyo valor de $\frac{I}{v}$ es el anterior; de modo que satisface al problema. Esta vigueta pesa por metro lineal 18,09 kilogramos, de modo que el área de la sección transversal es $\omega = \frac{18,09}{7800} = 0,0023 \text{ m.}^2$, ó sea 2300 mm.²; y el coeficiente de trabajo por la extensión directa (1500 kilogramos) tiene por valor $R_2 = \frac{1500}{2300} = 0,65$ kilogramos por mm.².

El coeficiente de trabajo definitivo será $R = R_1 + R_2 = 6 + 0,65 = 6,65$ kilogramos por mm.².

830. Viga armada, con dos puntos de apoyo intermedios (figs. 4.^a y 6.^a, lám. 31.— Cuando las fuerzas **1** y **2** son iguales, se pueden organizar las vigas del modo que representan las figs. 4.^a y 6.^a de la lám. 31; los diagramas son de sencilla construcción, y por esto no nos detenemos en describirlos.

Este problema lo hemos resuelto ya en el núm. 819 y siguientes, y pueden utilizarse las fórmulas (3) y (4) (núm. 823) que allí encontramos; cuanto á las manguetas y péndolas, la fuerza á que están sometidas es igual á **1** = **2** = P .

Recordaremos que si las fuerzas 1 y 2 no son iguales, el equilibrio no es posible sin la adición de piezas (figs. 9.^a y 10, lám. 31).

831. Otros tipos de viga armada. — 1.º Viga *ACH* (figs. 5.^a y 5.^{a'}, lámina 32), sometida á la acción de las fuerzas $1 = 2 = 3 = P$. Numeramos las fuerzas exteriores de izquierda á derecha, á contar desde la primera de la izquierda. Las reacciones $4 = na$ y $5 = ab$ son iguales á $\frac{3}{2}P$; el polígono de fuerzas exteriores es, tomando *b* como origen, *bhmna*. Construiremos el diagrama á la derecha de *bn*, por estar las fuerzas 1, 2 y 3 aplicadas al cordón inferior *AH*.

Nudo A. — Datos: $5 = ab$; origen, el punto *a*; figura recíproca, triángulo *abc*.

$7 = bc$ extensión (pieza *AD*).
 $6 = ca$ compresión (pieza *BA*).

Nudo D. — Datos: $7 = cb$ y $1 = bh$; origen, el punto *c*; suma de los datos, *cbh*; figura recíproca, *cbhd*.

$11 = hd$ extensión (pieza *DE*).
 $8 = dc$ extensión (pieza *DB*).

Nudo B. — Datos: $6 = ac$ y $8 = cd$; origen, el punto *a*; suma de los datos, *acd*; figura recíproca, *acdea*. La paralela á *EB* tiene que pasar por *d*, porque *BE* forma triángulo en la viga con las líneas *ED = 11* y *DB = 8*; de modo que en la figura recíproca (diagrama de fuerzas) deberá formar nudo con las fuerzas 11 y 8, ó pasar por su punto de encuentro *d*.

$9 = de$ compresión (pieza *EB*).
 $10 = ea$ compresión (pieza *CB*).

Del nudo *B* pasariamos sucesivamente á los *C* (triángulo *aea*), *E* (polígono *edhmsre*), *F* (polígono *arsta* y *H* (triángulo *atna*).

La viga es estrictamente indeformable, porque $l = 2n - 3$ (núm. 798).

2.º Viga *ACH* (figs. 6.^a y 6.^{a'}, lám. 23), armada por la parte inferior con cinco manguetas y cuatro tirantes. Fuerzas exteriores $1 = 2 = 3$, aplicadas al cordón superior; el diagrama deberá formarse á la izquierda del polígono de fuerzas.

Trabajan por extensión las piezas 6, 9, 13 y 16, y por compresión las restantes, siendo sus magnitudes las que acusa el diagrama, que no describimos por su sencillez.

La viga es estrictamente indeformable.

3.º Viga armada por la parte inferior (figs. 9.^a y 9.^{a'}, lám. 32), con cinco manguetas y diez tirantes, sometida á la acción de las fuerzas iguales $1 = 2 = 3 = 4 = 5$, aplicadas al cordón superior.

El polígono de fuerzas exteriores es *bhm...nab*, teniendo las reacciones los valores $6 = na$, $7 = ab$. El diagrama se construirá á la izquierda de *bn*, por el orden siguiente:

NUDOS	POLÍGONO de fuerzas.	ORIGEN	PIEZAS	
			Comprimidas	Extendidas.
<i>A</i>	<i>abca</i>	<i>a</i>	<i>BA</i>	<i>AC</i>
<i>B</i>	<i>cbhd</i>	<i>c</i>	<i>AB</i>	»
			<i>CB</i>	
<i>C</i>	<i>acdea</i>	<i>a</i>	<i>DB</i>	<i>CA</i>
			<i>BC</i>	<i>CD</i>
<i>D</i>	<i>edhmp</i>	<i>e</i>	<i>BD</i>	<i>CE</i>
			<i>ED</i>	<i>DC</i>
<i>E</i>	<i>aepra</i>	<i>a</i>	<i>HD</i>	<i>EC</i>
			<i>DE</i>	<i>EH</i>
<i>F</i>	<i>arsa</i>	<i>a</i>	<i>HF</i>	<i>EF</i>
				<i>FE</i>

832. Viga Fink (fig. 11, lám. 32). — Para construir la viga *Fink* se divide la longitud del cordón *AD* en dos partes iguales, y en el punto de división *C* se coloca una mangueta *CB* y dos tirantes *BA*, *BD* que parten de los extremos del cordón. Cada una de las mitades *AC* y *CD* se organiza de igual modo, como si estuviese aislada; por ejemplo, en la parte *AC* colocaremos una mangueta *EF* en su punto medio, y los tirantes *FA*, *FC*, di-

rigidos á los extremos de AC . De igual modo se dividirán las porciones AE , EC , etc., en dos partes iguales, y se proveerán de manguetas y de tirantes que pasen por los extremos de cada fracción de cordón.

El larguero ó cordón superior AD queda dividido por esta construcción en 2^a partes iguales. Las piezas principales de la viga son:

		Cordón superior.	Mangueta.	Tirantes.
1. ^o	Viga $ACDB$	ACD	CB	BA y BD
2. ^o	{ Viga $AECF$	AEC	EF	FA y FC
	{ Viga $CNDH$	CND	NH	HC y HD
3. ^o	{ Viga $AREO$	ARE	RO	OA y OE
	{ Viga $ESCT$	ESC	ST	TE y TC
	{ Viga $CMNL$	CMN	ML	LC y LN
	{ Viga $NVDZ$	NVD	VZ	ZN y ZD

Como piezas accesorias, y á fin de dar mayor rigidez al conjunto, se pueden unir con un cordón inferior OZ los extremos de las manguetas (línea de puntos), y colocar además las contradiagonales FR , FS , BS , BM , HM y HV (líneas de puntos). Todas estas piezas no son necesarias.

El cálculo de la viga *Fink* es muy sencillo. Supongamos un peso P aplicado á cada uno de los nudos del cordón superior. Por la descripción que acabamos de hacer de la viga, puede suponerse compuesta de la viga principal ABD , de las AFC , CHD , que descansan en los puntos A , C y D , y de las AOE , ETC , CLN , etc., que se apoyan por sus extremos en los puntos A , E , C , etc.; de modo que el cordón superior está formado de la yuxtaposición de otros tres, correspondientes á los tres grupos de vigas indicados.

La viga AOE transmitirá al punto E que le sirve de apoyo la mitad del peso P que sobre ella obra, ó sea $\frac{1}{2}P$; lo mismo diremos de la viga ETC ;

de modo que en E actuará $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P$, además de la fuerza P que directamente está aplicada en E , es decir, en definitiva, la fuerza $2P$; se podrá, pues, calcular la viga elemental AFC como viga armada con una mangueta y dos tirantes y sometida á una fuerza $2P$ en su punto medio (fig. 13, lámina 32). Lo mismo diríamos de la viga CHD (fig. 11, lám. 32).

La viga ABD recibe en el punto medio C las cargas siguientes):

La mitad de la fuerza que actúa sobre AFC , que es $2P$, ó..... P

La mitad de la fuerza que obra sobre CHD , que es $2P$, ó.....	P
La mitad de la fuerza P que insiste sobre la viga ETC	$\frac{1}{2}P$
La mitad de la fuerza que soporta CLN	$\frac{1}{2}P$
Fuerza aplicada directamente en C	P
Total.....	$4P$.

Se podrá calcular ABD como viga armada con una mangueta CB y dos tirantes AB y BD , que soportan un peso $4P$ en su punto medio (fig. 12, lám. 32).

En resumen, la viga *Fink* se descompone en las tres vigas armadas dibujadas en las figs. 12, 13 y 14 (lám. 32) y cargadas respectivamente con las fuerzas $4P$, $2P$ y P , debiendo tener en cuenta que para obtener la compresión definitiva del cordón superior AD (fig. 11, lám. 32) común á las tres vigas parciales, habrán de sumarse las compresiones correspondientes á los cordones de las vigas elementales.

En general, si el cordón superior se ha dividido en 2ⁿ partes, se podrá descomponer la viga principal en n vigas armadas, elementales, cargadas en sus puntos medios, respectivamente, con fuerzas $2^{n-1} \times P$, $2^{n-2} \times P$ $4P$, $2P$ y P .

Ya sabemos calcular gráfica y analíticamente las fuerzas interiores que obran en los cordones, manguetas y tirantes de las vigas, figs. 12, 13 y 14 (lám. 32). (Véanse los núms. 827 y 828). Representando con las letras C y M las compresiones de cordones y manguetas, y con la T la extensión de los tirantes, tendremos, llamando f á la longitud de las manguetas y l á la longitud total AD del cordón superior (fig. 11), y aplicando las fórmulas del núm. 828:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Viga } ABD \\ \text{(fig. 12)...} \end{array} \right\} \begin{array}{l} C = \frac{4Pl}{4f} = \frac{Pl}{f} \text{ (Cordón superior).} \\ M = 4P \text{ (Mangueta } CB). \\ T = \frac{4P}{4f} \sqrt{l^2 + 4f^2} \text{ (Tirantes } BA \text{ y } BD). \end{array} \quad (11).$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{Vigas } AFC \\ \text{y } CHD \\ \text{(figs. 11 y} \\ \text{13)...} \end{array} \right\} \begin{array}{l} C'' = \frac{2P \times \frac{1}{2} l}{4f} = \frac{Pl}{4f} \text{ (Cordón superior).} \\ M'' = 2P \text{ (Manguetas } EF \text{ y } NH). \\ T'' = \frac{P}{4f} \sqrt{\frac{l^2}{4} + 4f^2} \text{ (Tirantes } FA, FC, HC \text{ y } HD). \end{array} \quad (12). \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{Vigas } AOE, \\ \text{ETC, etc.} \\ \text{(figs. 11} \\ \text{y 14)...} \end{array} \right\} \begin{array}{l} C''' = \frac{P \times \frac{1}{4} l}{4f} = \frac{Pl}{16f} \text{ (Cordón superior).} \\ M''' = P \text{ (Manguetas } RO, ST, ML \text{ y } VZ). \\ T''' = \frac{P}{4f} \sqrt{\frac{l^2}{16} + 4f^2} \text{ (Tirantes } AO, OE, TE, TC, \text{ etc.)} \end{array} \quad (13).
 \end{aligned}$$

La compresión total C del cordón superior, será

$$C = C' + C'' + C''' = \frac{Pl}{f} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right).$$

Los sumandos que contiene el paréntesis forman la progresión geométrica

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

de la cual se tomarán 1, 2, 3, 4 términos, según que el número de partes en que se ha dividido el cordón superior sea 2, 4, 8, 16, etc.

El valor de C depende de la relación $\frac{l}{f}$ entre la longitud l del cordón y la f de la mangueta. Cuando esta relación es muy grande, C alcanza gran valor, y lo mismo puede decirse de la extensión T' de los tirantes BA y BD ; en T'' y T''' , la relación $\frac{l}{f}$ ejerce menor influencia.

Dedúcese de aquí que si la mangueta central BC es pequeña relativamente á la longitud l del cordón AD (fig. 11, lám. 32), será preciso emplear escuadrías grandes para dicho cordón y para los tirantes BA , BD . Por esta razón es preferible adoptar, cuando sea posible, la disposición represen-

tada en la fig. 15 (lám. 32), dando á la mangueta central grande altura.

Esta viga solamente se diferencia de la dibujada en la fig. 11, en que las manguetas son de desigual altura, y en que los tirantes AO , AF , AB , que parten de cada extremo, coinciden.

Para el cálculo se aplicarían también las fórmulas del núm. 828, teniendo en cuenta que la altura f de las manguetas es aquí variable.

El problema puede resolverse también gráficamente, empleando los métodos de Cremona y Culmann. Se hallarían, por su orden, las recíprocas de los nudos A , R y O ; no se puede pasar á ninguno de los inmediatos E , F , etcétera, porque el número de incógnitas es superior á dos; pero se determinarían, por el método de Culmann, las tensiones de las tres barras cortadas por el plano XX , lo cual nos permitirá construir las recíprocas de los nudos S , T , B , F y E .

833. La fig. 10 (lám. 32), es una viga *Fink* en que el cordón superior se ha dividido en cuatro partes. La fig. 10' representa el diagrama de fuerzas; las líneas gruesas expresan compresiones y las delgadas extensiones. No nos detenemos en los detalles de construcción del diagrama por considerarlo innecesario en razón á la sencillez del problema.

834. Viga *Bollmann* (fig. 16, lám. 32). — La longitud l del cordón superior MN se divide en n partes, y en cada punto de división se coloca una mangueta, cuyo extremo inferior se une por medio de dos tirantes á los extremos M y N de dicho cordón.

Esta viga puede suponerse que procede de la yuxtaposición de varias vigas armadas MSN , MEN y MHN , tantas como manguetas; la compresión del cordón MN será la suma de las compresiones de las vigas parciales.

Si llamamos h la magnitud de una de las n partes iguales de la longitud l de cordón, tendremos, aplicando la fórmula (4) del núm. 828, y observando que para la viga armada con la mangueta de orden m , es $MR = mh$ y $RN = l - mh$ (figs. 16 y 16', lám. 32), que la compresión del cordón superior para esta viga elemental es

$$C'_m = \frac{P}{fl} (l - mh) mh;$$

de modo que para la viga armada con la mangueta núm. 1, contando de izquierda á derecha, haremos $m = 1$ en la fórmula anterior, y será

$$C'_1 = \frac{P}{fl} (l - h) h = \frac{P}{fl} (lh - h^2).$$

Para la viga armada con la mangueta núm. 2,

$$C'_2 = \frac{P}{f l} (2 l h - 4 h^2),$$

y así sucesivamente para las demás, hasta la última mangueta, que es la $n - 1$ ésima, en la cual

$$C'_{n-1} = \frac{P}{f l} [(n-1) l h - (n-1)^2 h^2].$$

La compresión total C del cordón es la suma de $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}$, ó

$$C = \frac{P}{f l} [l h (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) - h^2 (1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2)].$$

Sustituyendo h por su igual $\frac{l}{n}$, sacando por factor común $\frac{l^2}{n^2}$, y recordando que

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{(1+k)k}{2}$$

$$1 + 4 + 9 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

se obtiene, para compresión total C del cordón superior,

$$C = \frac{P l (n^2 - 1)}{6 n f} \quad (14).$$

La extensión T_m del tirante que partiendo del extremo izquierdo M termina en el pie de la mangueta de orden m , será, aplicando la fórmula (6) del núm. 828,

$$T_m = P \frac{l - m h}{l} \sqrt{\left(\frac{m h}{f}\right)^2 + 1} = P \frac{n - m}{n} \sqrt{\left(\frac{m h}{f}\right)^2 + 1} \quad (15);$$

las colocadas simétricamente á partir del extremo derecho sufren la misma tensión.

Cuanto á las manguetas, cada una de ellas estará sometida á una compresión igual á P , es decir,

$$M_m = P \quad (16).$$

La viga Bollmann suele ir provista de un cordón inferior SH (fig. 16, lám. 32) y de diagonales RE, SD , etc., para obtener mayor rigidez y prevenir el accidente á que pudiera dar lugar la fractura de un tirante, pero no influyen en la estabilidad del conjunto.

835. Consolas.— La fig. 7.^a (lám. 32) representa una consola compuesta de un cordón superior MA , otro inferior ACN y barras verticales é inclinadas BC, CD, DE , etc. Está empotrada en M y N y cargada con pesos **1, 2, 3 y 4** aplicados á los nudos del cordón superior.

La fig. 7.^{a'} es el diagrama de las fuerzas, siendo as la suma de las fuerzas exteriores.

NUDOS	FUERZAS CONOCIDAS	ORIGEN	SUMA de fuerzas conocidas.	FIGURA recíproca.
<i>A</i>	1	<i>a</i>	<i>an</i>	<i>anb</i>
<i>B</i>	5 = bn y 2 = no	<i>b</i>	<i>bno</i>	<i>bnacb</i>
<i>C</i>	6 = ab y 7 = bc	<i>a</i>	<i>abc</i>	<i>abcd</i>
<i>D</i>	9 = co, 8 = de y 3 = op	<i>d</i>	<i>dcop</i>	<i>dcoped</i>
<i>E</i>	10 = ad, 11 = de	<i>a</i>	<i>ade</i>	<i>adefa</i>
<i>F</i>	12 = ep, 13 = fe y 4 = ps	<i>f</i>	<i>feps</i>	<i>fepshf</i>
<i>H</i>	14 = af, 15 = fh	<i>a</i>	<i>afh</i>	<i>afhna</i>

La reacción N del muro, ó sea la presión causada en él por el cordón inferior, es igual á la fuerza **18**. En el punto M las fuerzas de extensión **16 y 17** (figs. 7.^a y 7.^{a'}) dan una resultante horizontal de valor igual á am .

836. La fig. 8.^a (lám. 32) representa otra consola cuyo diagrama está dibujado en la fig. 8.^{a'}; las líneas gruesas expresan compresión, y las delgadas extensión.

Las figs. 19 y 20 representan consolas sencillas, formadas por un triángulo BCA , en cuyo vértice A está aplicada la fuerza P . El triángulo de fuerzas bca da la extensión del lado AB , que servirá para determinar la resistencia de su enlace con el muro, y la compresión del lado AC , así como el empuje que causa en C .

837. Grúas.— En la fig. 17 (lám. 32) está dibujada una grúa sencilla compuesta de un árbol ab terminado por la parte inferior en un pivote intro-

ducido en su correspondiente rangua y por la parte superior en un collar a , de un brazo ac y un tornapunta cb .

Sea P la fuerza que ha de elevarse, y puede suponerse aplicada en c . El triángulo de fuerzas ABC , construido sobre $AB = P$ como base, da la compresión CB del tornapunta cb y la extensión CA del brazo ca .

La extensión CA y compresión CB , estimadas verticalmente, dan por resultante la fuerza P , y ésta es la compresión que sufre la rangua; de modo que la reacción Q es igual á P . La componente horizontal de CB y de CA es Cm ; éste será el valor de los empujes E y H de los apoyos superior é inferior, que servirán para calcular la resistencia en sentido horizontal de la rangua y del collar.

838. Las figs. 18 y 18' (lám. 32) se refieren á una grúa anclada en A por medio del tirante 15. El diagrama es de construcción sencilla y por eso no lo detallamos.

839. Vigas rectas.— Denomínase *viga recta* á la que, colocada sobre apoyos horizontales, solamente da lugar á reacciones verticales, esto es, que produce en dichos apoyos *presiones*, pero no empujes. Esta definición no tiene en cuenta la forma de la viga, que puede ser cualquiera: vigas rectas son las representadas en las figs. 2.^a, 3.^a y 4.^a de la lám. 34, y la definición comprende á las vigas poligonales ó parabólicas provistas de tirante, á las vigas armadas y consolas.

Cuando se producen *empujes* en los apoyos, el sistema, articulado ó rígido, recibe el nombre de *arco*.

Cualquiera que sea la forma de una viga recta, se compone de una serie de piezas que forman el perímetro ó contorno, y de un sistema de barras que constituyen la parte central ó alma. El perímetro consta de un *cordón superior* ya rectilíneo (AB , fig. 4.^a, lám. 34), ya poligonal ó curvilíneo (ABC , fig. 2.^a y 3.^a), y de un *cordón inferior* (CD , fig. 4.^a, y ADC , figs. 2.^a y 3.^a).

El alma ó núcleo central está formado de barras verticales ó inclinadas que toman nombres diversos, según su posición y la naturaleza de las fuerzas interiores que en ellas se desarrollan.

Las barras verticales son *montantes* cuando están comprimidas (ab , figuras 1.^a y 4.^a de la lám. 34), y *péndolas* si están extendidas (mn , figs. 5.^a y 6.^a). Las barras inclinadas se denominan *brazos* cuando trabajan por compresión (cd , figs. 1.^a, 5.^a y 6.^a, lám. 34), y *tirantes* si se hallan sometidas á extensión (cb , figs. 1.^a y 5.^a, lám. 34). Los brazos y tirantes se llaman también *diagonales*.

Una misma barra inclinada puede trabajar por compresión unas veces y

por extensión otras, según la posición de las cargas en la viga. Para hacer la clasificación anterior se supone que la viga está sometida á cargas estáticas, de posición invariable por lo tanto.

Para evitar que una barra sufra alternativamente esfuerzos de compresión y de extensión por la posición variable de las cargas móviles, se agrega, en algunos sistemas, otro grupo de barras inclinadas en sentido contrario, cuyo objeto es impedir el cambio de signo de las fuerzas en las barras primitivas, ó, lo que es lo mismo, hacer que cada barra trabaje siempre por compresión ó por extensión ó no sufra esfuerzo alguno. A este efecto, cuando una barra del primer sistema que está comprimida, por ejemplo, va á pasar á sufrir una extensión, hay una barra adicional, del segundo sistema, que entrando á funcionar en aquel momento lo impide sufriendo entonces una compresión y haciendo que la primera barra no experimente esfuerzo de ninguna clase; lo mismo diríamos de las extensiones.

Las barras adicionales están inclinadas en sentido contrario que las primeras, y por esto se llaman *contradiagonales*. Se clasifican, á su vez, en razón á la naturaleza del esfuerzo que experimentan, del modo siguiente:

Contrabrazos.—Barras inclinadas en sentido contrario al de los brazos y que trabajan por compresión en determinadas posiciones de la carga móvil. En la fig. 7.^a (D , lám. 33), las diagonales $an, re, \dots, ab, cd, \dots$ son *brazos*, y las $sr, nm, \dots, se, bo, \dots$, son *contrabrazos*.

Contratirantes.—Barras inclinadas en sentido contrario al de los tirantes, que trabajan por extensión cuando las cargas ocupan ciertas posiciones: em, so, \dots (fig. 8.^a, L , lám. 33) son *tirantes*, y rs, mn, \dots *contratirantes*.

Las contradiagonales no se emplean en las vigas sometidas á cargas estáticas, y son peculiares de los cuchillos de puente, y en general de las vigas sujetas á la acción de cargas en movimiento.

840. Clasificación de las vigas.—Una primera clasificación se hace de las vigas rectas, que se funda en la organización del núcleo central ó *alma*, y es la siguiente:

Vigas de alma llena.

Vigas de alma calada ó discontinua (*).

En las primeras el alma es continua, compuesta de una sola pieza ó de

(*) Las vigas de alma calada son llamadas por los franceses *poutres en treillis*, cuya traducción literal (vigas de celosía) no hemos aceptado como denominación general de las vigas de alma discontinua, por considerar que la palabra *celosía* ó *enrejado* debe aplicarse al caso en que las barras se cruzan varias veces en una vertical.

La *poutre en treillis* es el *framework* de los ingleses y el *Fachwerk* y *Neiswerk* de los alemanes.

varias unidas, ensambladas y empalmadas; tales son las vigas doble *T*, laminadas ó compuestas.

En las segundas el alma está formada de piezas, articuladas ó roblonadas, que dejan entre sí claros ó huecos, y no constituyen un macizo continuo. Así son las de *celosía* ó *enrejado*, de madera ó de hierro, de que nos hemos ocupado en los núms. 555 y 570.

Las vigas rectas de alma discontinua, con articulaciones más ó menos numerosas, se conocen también con el nombre de *vigas americanas*, porque han sido creadas por ingenieros americanos que les han dado nombre, como veremos á continuación.

Las vigas de alma calada ó discontinua se subdividen en *simples*, *compuestas* y *complejas*.

Vigas simples.—En éstas, un plano trasversal no encuentra más de tres piezas, cordones ó barras. Las figs. 4.^a, 10 y 11 de la lám. 33, y las 1.^a, 2.^a, 3.^a y 5.^a de la lám. 34, representan vigas simples, porque un plano trasversal no encuentra más que los dos cordones y una barra.

Vigas compuestas.—Las que resultan de la yustaposición de varias vigas simples del mismo tipo. (Véanse figs. 7.^a, *D*; 8.^a, *L*; lám. 33, y 4.^a y 6.^a, lámina 34).

Vigas complejas.—Ya las hemos definido en el núm. 815; son vigas simples, en las cuales uno ó varios de sus elementos rectilíneos (cordones ó barras) están sustituidos por otras pequeñas vigas, simples, compuestas ó complejas. La fig. 7.^a (lám. 34) presenta un ejemplo de esta clase de vigas: *AHB DCE* es una parte de viga simple, en que las porciones *AB*, *BC*, *DE* de cordones inferior y superior, han sido sustituidas por vigas simples *Aab B*, *DeFrE*, ó por otra viga compleja *BdcC*.

Esta organización se aplica solamente á las grandes vigas, en las que son desmesuradamente grandes las partes de cordón *AB*, *BC*, etc.

En las vigas compuestas y complejas, un plano trasversal corta á más de tres piezas elementales.

Para hacer la clasificación anterior se atiende únicamente á las piezas principales de la viga, cordones, brazos, tirantes, montantes ó péndolas, y se prescinde de los contrabrazos y contratirantes que pueden existir, como piezas adicionales, en una parte de su longitud ó en el todo.

841. Vigas simples.—Los tipos empleados son tres: *Warren*, *Howe* y *Murphy-Wipple* ó *Pratt*.

Sistema Warren, isométrico ó triangular.—Constan las vigas de dos cordones paralelos (figs. 3.^a y 4.^a, lám. 33) y de barras inclinadas que forman

con los cordones una serie de triángulos isósceles. A partir del punto medio de la viga, si la carga está uniformemente repartida (fig. 4.^a), ó del punto de aplicación de la carga cuando es aislada (fig. 3.^a), y en general del punto en que el momento de flexión es un máximo (fig. 5.^a), las barras inclinadas hacia los apoyos son *brazos* (véanse las líneas de trazo grueso), y las dirigidas hacia el medio *tirantes* (líneas de trazo fino).

Cuando se altere la posición ó intensidad de las cargas, cambiará de situación el punto á partir del cual se cuentan los brazos y los tirantes; de modo que algunos brazos pasarán á ser tirantes y recíprocamente.

Se podría hacer uso de contrabarras disponiéndolas como representan las líneas de trazo interrumpido en las figs. 3.^a y 4.^a (lám. 33); pero no se acostumbra á hacerlo, y se asigna escuadría y resistencia suficiente á los lados de la triangulación y á las articulaciones, para que puedan trabajar alternativamente por compresión y por extensión en el caso de que se trate de pesos móviles productores de este cambio de signo en las fuerzas interiores.

Cuando se quieren obtener puntos de apoyo intermedios en los cordones, se agregan *montantes ab* (fig. 1.^a, lám. 34) si las cargas están situadas en la parte superior, ó péndolas *mn* (fig. 5.^a, lám. 34) si están aplicadas al cordón inferior.

Sistema Howe (fig. 7.^a, *A*, lám. 33).—Es una viga triangular de triángulos rectángulos ascendentes; las hipotenusas son *brazos* (líneas gruesas) que están comprimidos; los catetos verticales son péndolas (líneas delgadas) y están, por lo tanto, sometidos á extensión.

Para el caso de cargas en movimiento se dota á la viga Howe de contrabrazos en toda su longitud (fig. 7.^a, *D*, lám. 33) ó en la parte central.

Los brazos y contrabrazos están inclinados 45° con los cordones, de modo que se cortan á ángulo recto.

Es fácil ver la necesidad de los contrabrazos en la viga Howe, si se quiere conseguir que las barras trabajen siempre del mismo modo, por extensión ó por compresión (fig. 7.^a, lám. 33). Cuando un peso *P*, por ejemplo, pasa del nudo medio (fig. *A*) á otro nudo *m* (fig. *B*), la péndola *me* (*A*) se convierte en montante (*B*), y esto hace alterar el signo de las fuerzas interiores en todas las barras comprendidas en la parte *es* de semiviga, pues en la otra mitad *st* no sufren variación; en la parte *es*, las péndolas se han transformado en montantes y los brazos en tirantes. Este cambio de compresiones y extensiones se evita colocando en el intervalo *es* los contrabrazos *mn*, *rs* (fig. *C*); la péndola *me*, poco apta para resistir compresiones, su-

frirá una pequeña deformación por la cual entrará en acción el contrabrazo mn , y entonces rn se portará como péndola y rs como brazo, mientras que la péndola me y el brazo re dejan de obrar. Los contrabrazos restantes, si existen, no trabajan.

Si estudiamos los cambios de posición del peso P en la semiviga st , veríamos de igual modo la necesidad de contradiagonales; el sistema completo da lugar á la viga representada en la fig. D , debiendo observar que no todas las piezas trabajan á la vez, como acabamos de ver.

Sistema Murphy-Wipple Pratt.—Es una viga triangular de triángulos rectángulos descendentes (figs. 8.^a y 11, lám. 33); las hipotenusas son *tirantes* y los catetos verticales hacen de *montantes*.

Las cargas pueden ser aplicadas al cordón superior (fig. 11) ó al inferior (fig. 8.^a)

Se demostraría de igual modo que en la viga Howe la necesidad de las contradiagonales. Si el peso P (fig. 8.^a) pasa del punto medio al nudo e , por ejemplo (fig. J'), el montante ae se convierte en péndola, y los tirantes ab , zs en brazos; esto se evita por medio de los contratirantes mn , rs . El sistema completo da lugar á la fig. L , inversa de la D (fig. 7.^a) en cuanto al modo de trabajar las barras, aunque igual á ésta si se las considera geoméricamente.

Los tirantes y contratirantes están generalmente inclinados 45° con los cordones y á ángulo recto entre sí.

Bowstring (*) ó *viga de arco atirantado*.—El bowstring es una viga cuyo cordón superior es un arco que tiene por cuerda el cordón inferior (fig. 3.^a, lám. 34). Cuanto á las barras, pueden recibir la disposición adoptada en la viga Howe (triángulos rectángulos ascendentes) (fig. 3.^a, lám. 34), ó la empleada en las vigas Murphy y Warren, y se aplican contradiagonales si se quiere.

Si el cordón inferior es también curvilíneo (fig. 2.^a, lám. 34), resulta un *bowstring* doble ó viga *Pauli* ó *lenticular*, empleada en Alemania.

842. Vigas compuestas.—*Sistema Warren doble, triple, etc.*—La viga doble se forma yustaponiendo dos vigas Warren simples; las barras se cruzan una vez en la vertical (fig. 13, lám. 31).

En las vigas triples, cuádruples, etc., las barras se cruzan dos, tres veces en una misma vertical, y se pueden descomponer en dos, tres ó más vigas Warren sencillas, que no tienen de común más que los cordones superior é

(*) De *bow* (arco) y *string* (cuerda).

inferior. A las vigas compuestas Warren se las puede aplicar el nombre de *vigas de celosía* ó de *enrejado*.

Sistema Howe (fig. 6.^a, lám. 34). — Resulta de la yustaposición de dos ó más vigas Howe sencillas; es poco empleado.

Sistema Linville (fig. 4.^a, lám. 34). — Es una doble viga Murphy ó Pratt. Las piezas verticales están comprimidas y las inclinadas extendidas; se le aplican las contradiagonales necesarias.

Sistema Post.—Todas las barras, brazos ó tirantes, están inclinados (figura 15, lám. 34). Las contradiagonales están señaladas con líneas de trazos.

843. Vigas complejas. — Generalmente para formar una viga compleja, se parte de una viga Warren ó de una viga Pratt.

En la viga Warren se pueden hacer las modificaciones que aparecen en la fig. 7.^a de la lám. 34.

En la viga Pratt se sustituyen las partes de cordón superior por vigas Fink (fig. 19, lám. 29) y recibe el nombre de sistema Pettit; la viga Fink puede estar dispuesta del modo que indica la fig. 17 (lám. 34). Otras veces se intercalan pequeñas vigas Warren (fig. 16, lám. 34).

844. Cálculo de las vigas rectas. Método de Cremona. — *Viga Warren, cargada con un peso aislado 1 aplicado en un nudo cualquiera* (figs. 6.^a y 6.^{a'}, lám. 33). — Se empezará por determinar las reacciones **2** y **8** de los apoyos siguiendo el método del núm. **413**, á cuyo efecto, una vez construído $ab = 1$, se tomará el polo O , se dibujarán los radios polares y el polígono funicular correspondiente ABC , y se trazará ON paralela á AC ; resulta $bN = 2$ y $Na = 3$.

Siguiendo la regla del núm. **828**, formaremos el diagrama de fuerzas á la derecha de ab , por estar aplicada la fuerza **1** al cordón inferior.

La recíproca del nudo E es el triángulo $NacN$, y llevando las direcciones ac , cN á las piezas DE , FE , se deduce que la fuerza **4** es de extensión y la **5** de compresión.

Del nudo E se pasa al D , en el que conocemos la fuerza **4** que ahora actuará en la dirección DE ; en el diagrama tomaremos como origen el punto c , y la recíproca del nudo D será el triángulo $cadc$, que da la fuerza **6** de compresión de la barra FD , y la **7** de extensión del cordón DH .

Los nudos F , H y L dan lugar á los siguientes polígonos de fuerzas:

Nudo F. — Polígono $NcdeN$.

8 = de , extensión

9 = eN , compresión.

Nudo H. — Polígono $e d a f e$.

$$\begin{aligned} 11 &= a f, \text{ extensión.} \\ 10 &= f e, \text{ compresión.} \end{aligned}$$

Nudo L. — Polígono $N e f h N$.

$$\begin{aligned} 12 &= f h, \text{ extensión.} \\ 13 &= h N, \text{ compresión.} \end{aligned}$$

En el nudo S en que está aplicada la fuerza exterior única, **1**, se conocen las fuerzas de extensión **11** y **12** (que actuarán ahora en las direcciones $f a$, $h f$) y la exterior **1**. Tomando como origen el punto h , en $h f a b$ tenemos la suma de las fuerzas conocidas; de modo que trazando por b y h paralelas á las direcciones de las fuerzas incógnitas **14** y **15**, tendremos el polígono $h f a b m h$ que determina el valor de éstas; **15** = $b m$ (extensión) y **14** = $m h$ (extensión).

Las recíprocas de los nudos situados á la derecha de M están comprendidas entre las paralelas $N h$, $b m$, y su construcción es sencillísima. Las fuerzas en los cordones superior é inferior, son:

$$\begin{array}{ll} 17 = N s & 15 = b m \\ 21 = N e & 19 = b p \\ 25 = N o & 23 = b t \\ 29 = N n & 27 = b u \\ 33 = N r & 31 = b x. \end{array}$$

Del examen del diagrama de fuerzas se deducen consecuencias que interesa conocer.

El cordón superior está comprimido y el inferior extendido, aumentando la magnitud de las compresiones y extensiones, en las diversas partes de los cordones, desde los extremos de la viga hacia la sección transversal que pasa por el punto de aplicación de la fuerza exterior. Así, tenemos:

$$\begin{array}{l} 13 > 9 > 5 \quad \text{,,} \quad 13 > 17 > 21 > 25 > 29 > 33 \\ 11 > 7 \quad \quad \quad \text{,,} \quad 15 > 19 > 23 > 27 > 31. \end{array}$$

El momento máximo de flexión corresponde, como sabemos (núm. 317),

al punto de aplicación de la fuerza **1**; de modo que las compresiones del cordón superior y las extensiones del inferior varían como el momento de flexión, y alcanzan su máximo valor en la sección para la cual dicho momento de flexión es un máximo.

Las barras inclinadas están, alternativamente, comprimidas y extendidas, á excepción de las dos que pasan por el punto de aplicación de la fuerza (barras 12 y 14), que están extendidas.

Recordaremos que en este punto el esfuerzo cortante cambia de signo (núm. 317), siendo positivo, é igual á la reacción **3**, para las secciones de la izquierda, y negativo é igual á $3 - 1 =$ reacción **2**, para las de la derecha.

A uno y otro lado de dicho punto, en donde el esfuerzo cortante cambia de signo, las barras inclinadas hacia los apoyos están comprimidas (barras 10 y 6, 16, 20, 24, 28 y 32), y las dirigidas á él extendidas (barras 12, 8 y 4, 14, 18, 22, 26, 30 y 34).

Cuanto á la magnitud de las compresiones y extensiones, está íntimamente ligada con el valor del esfuerzo cortante en el plano transversal $X X$ que corta á la barra que se considera, como que este esfuerzo cortante es la proyección de la compresión ó extensión de la barra. Por ejemplo: en la parte comprendida entre E y el punto de aplicación de la fuerza exterior **1**, el esfuerzo cortante es constante é igual á la reacción **3**, y en el diagrama se observa que las fuerzas **4** á **12** tienen por proyección vertical la magnitud $N a = 3$; del mismo modo, las fuerzas **14** á **32**, estimadas verticalmente, dan por resultado la cantidad $N b = 3 - 1$, es decir, el esfuerzo cortante en este intervalo.

Si se toma en consideración el signo del esfuerzo cortante, obtendremos á un tiempo la magnitud absoluta y cualidad de las fuerzas que obran según las barras. Supongamos que el esfuerzo cortante C sea positivo: en una barra B inclinada de derecha á izquierda, y cortada por un plano transversal $X X$ (fig. 8.^a, lám. 34), la fuerza B que actúa sobre ella debe dirigirse de abajo á arriba (véase la flecha), como C , es decir, que la barra está comprimida, puesto que puede suponerse fija la parte situada á la derecha del plano $X X$. Si la barra está inclinada de izquierda á derecha (fig. 10, lámina 34) resultará extendida.

Cuando sea negativo el esfuerzo cortante C (fig. 9.^a y 11, lám. 34), estarán extendidas las barras inclinadas de derecha á izquierda (fig. 9.^a) y comprimidas las de dirección contraria (fig. 11). Así se explica el cambio de signo en las fuerzas interiores de las barras (fig. 6.^a, lám. 33) al pasar del

trozo en que el esfuerzo cortante es positivo al intervalo en que es negativo.

Las fuerzas de compresión y extensión de los cordones están relacionadas también con las de las barras que los ligan. Consideremos dos trozos, uno del cordón superior, el 9 por ejemplo; otro, inmediato, del cordón inferior 11 y la barra 10 que los une (figs. 6.^a y 6.^{a'}, lám. 33); la fuerza $9 = Ne$ y la $11 = af$ se diferencian en una cantidad que es precisamente la proyección, sobre los cordones, de la fuerza $10 = ef$ que obra sobre la barra. Lo mismo sucede con las partes 9, 7 y la 8 que las une.

La fig. 3.^a (lám. 33) es un caso particular del anterior; la fuerza 1 está aplicada en el punto medio; de modo que las reacciones 2 y 3 son iguales, y lo mismo le sucede á las fuerzas interiores de todas las barras (fig. 3.^{a'}). Los cordones equidistantes del centro están sometidos á las mismas fuerzas interiores; el plano transversal medio, de simetría para las líneas, lo es también para las fuerzas.

845. Viga Warren, cargada con fuerzas cualquiera aplicadas á los nudos (figs. 5.^a y 5.^{a'}, lám. 33). — Supongamos, para mayor generalidad, que las fuerzas 1, 2, 3..... 8 son desiguales; sumaremos en ab las fuerzas exteriores, elegiremos un polo O , y por medio del polígono funicular determinaremos las reacciones 9 y 10.

Siguiendo el método tantas veces explicado ya, y empezando por el nudo E y siguiendo por los D, F, H , etc., formaremos el diagrama de fuerzas dibujado en la fig. 5.^{a'}.

Nudos E	Polígono	Nad	Origen N
» D	»	$daecd$	» d
» F	»	$NdcrN$	» N
» H	»	$rcehfr$	» r
⋮		⋮	⋮
» M	»	$snmxhs$	» s

Con igual facilidad construiríamos los polígonos restantes, que estarán situados por debajo de la recta Ns .

El estudio del diagrama conduce á las mismas conclusiones del caso anterior, teniendo en cuenta que M es el punto de paso del esfuerzo cortante C positivo (parte EM) al negativo (parte MR), y que, por tanto, en la sección

transversal que pasa por él es un máximo el momento de flexión (*).

El cordón superior está comprimido y el inferior extendido; las compresiones y extensiones varían como el momento de flexión; aumentan á partir de los extremos de la viga y alcanzan su máximo valor en la sección transversal en que el momento de flexión es un máximo.

Las barras están alternativamente comprimidas y extendidas, á excepción de las dos que concurren en el nudo M correspondiente á la sección transversal de momento de flexión máximo, las cuales están sometidas á la misma clase de esfuerzos.

A partir de M , á uno y otro lado, las barras que se dirigen á los apoyos están comprimidas, y las inclinadas hacia el punto M extendidas. La magnitud de las compresiones y extensiones varía como el esfuerzo cortante, desde las barras extremas, en que es un máximo, hasta las que concurren en M en que alcanzan su mínimo valor. En magnitud y signo, la fuerza interior de cada barra, proyectada sobre un plano transversal XX , es igual al esfuerzo cortante en dicho plano.

La diferencia en valor absoluto de las fuerzas interiores correspondientes á dos porciones de cordón, superior é inferior, unidos por una barra, es igual á la proyección, sobre aquéllos, de la fuerza interior correspondiente á dicha barra.

846. Viga Warren, cargada con fuerzas iguales en los nudos del cordón superior, ó del inferior.—En la fig. 4.^a (lám. 33), las fuerzas están aplicadas al cordón superior. No hay necesidad de construcción gráfica para la determinación de las reacciones: $8 = 9 = \frac{1}{2} (1 + 2 + \dots + 7)$.

El polígono de las fuerzas es aba (fig. 4.^{a'}); el diagrama se construirá á la izquierda de ab , siguiendo la regla del núm. 828; no lo detallamos por su sencillez. El cordón superior está dividido en un número par de partes, y no resulta innecesaria ninguna barra (prescindimos de las contradiagonales dibujadas con trazo interrumpido, aplicables solamente al caso de cargas móviles), porque en el plano transversal que corte á cualquiera de ellas, el esfuerzo cortante tiene un valor, positivo ó negativo, diferente de cero.

Si el número de divisiones del cordón superior fuese impar (figs. 2.^a y 2.^{a'},

(*) En general, sabemos que $C = \frac{dM}{dx}$ (núm. 312), y si este valor es cero, es prueba de que la tangente á la curva de los momentos de flexión es paralela al eje Ox ; puesto que la tangente trigonométrica del ángulo que forma con dicho eje es cero, y esto equivale á decir que la ordenada, ó el momento de flexión, es un máximo. Ahora bien; el punto en que C es cero es aquel en que C pasa de positivo á negativo.

lám. 33), ó, lo que es lo mismo, el número de fuerzas exteriores fuese par, las barras centrales (13 y 15) son inútiles, porque en los planos XX el esfuerzo cortante $6 - (1 + 2)$ es cero.

Lo mismo sucede en la viga representada en la fig. 1.^a (lám. 33). (Véase el diagrama fig. 1.^a.)

En general, cuando es par el número de fuerzas iguales aplicadas á los cordones superior ó inferior de la viga Warren, las barras centrales no ejecutan trabajo alguno y pueden suprimirse.

La fig. 1.^a (lám. 34) es una modificación sencilla de la viga Warren, que consiste en intercalar montantes para poder duplicar el número de fuerzas aplicadas al cordón superior. El diagrama de fuerzas es sencillísimo.

En la fig. 5.^a (lám. 34) las fuerzas están aplicadas al cordón inferior y los montantes son sustituidos por péndolas.

847. Viga Howe, cargada en los nudos con fuerzas iguales.— En la fig. 9.^a (lám. 33) las fuerzas 1, 2..... 5 están aplicadas al cordón inferior; la fig. 9.^a' es el diagrama de fuerzas, que formaremos á la derecha de AF , según la regla del núm. 829.

Nudos a	Polígono	$RABR$	Origen R
» r	»	$RBM R$	» R
» b	»	$MBA s d M$	» M
»	»	⋮	⋮
»	»	⋮	⋮
» n	»	$RNHLNR$	» R

Deduciríamos del diagrama las mismas consecuencias enunciadas en el núm. 845, observando que para conocer el esfuerzo cortante que hemos de tomar en consideración al determinar la extensión de las péndolas, se trazará un plano oblicuo XX que corte solamente á la péndola considerada y á los dos cordones, y se sumarán las fuerzas exteriores que se hallen á la izquierda de este plano. Así, para la péndola 14, la suma de fuerzas situadas á la izquierda de XX es $7 - 1$, y éste será el valor de la extensión; y, en efecto, en el diagrama se ve que $14 = Nd = Rs = 7 - 1$.

Si las fuerzas estuviesen aplicadas al cordón superior (figs. 10 y 10'), el plano XX deja á la izquierda las fuerzas 7, 1 y 2, de modo que $14 = 7 - (1 + 2)$.

848. Viga Murphy, cargada en los nudos con fuerzas iguales.— En la fig. 11 (lám. 33) las fuerzas están situadas en el cordón superior; la figura 11' es el diagrama de fuerzas, cuya construcción no ofrece dificultad alguna.

En la fig. 12 (lám. 33) las fuerzas están aplicadas en los nudos del cordón inferior; la fig. 12' es la mitad del diagrama que, como todos los anteriores, es simétrico con respecto á la recta NR .

Se puede aplicar á estas vigas lo que dejamos dicho para las Howe y Warren.

849. Vigas de arco atirantado.— Las figs. 2.^a y 3.^a de la lám. 34 representan estas vigas y sus diagramas correspondientes, cuya construcción es sencilla (*). Las barras verticales é inclinadas resultan comprimidas ó extendidas según su inclinación y la de los elementos de los cordones.

En la viga fig. 3.^a (lám. 34), por ejemplo, una vez construido el triángulo $NbaN$ correspondiente al nudo M , pasamos al H , cuya recíproca es el polígono $abcdea$, que demuestra ser $12 = ea$ una fuerza de compresión, puesto que trasladada esta dirección á la pieza LH se encamina al nudo H considerado.

Pero si en la construcción del triángulo Nba hubiera quedado el punto a por encima de de , también resultaría colocado ae de este lado, y al recorrer el polígono $abcdea$ tendría la fuerza 12 dirección contraria á la anterior, esto es, sería fuerza de extensión.

850. Vigas compuestas.— Esta clase de vigas se puede descomponer en dos ó más vigas simples, con las fuerzas que á los nudos respectivos estén aplicadas. Se construirán los diagramas parciales de fuerzas y se obtendrán así las fuerzas interiores de cada elemento. En los elementos que formen parte de dos ó más vigas simples, las fuerzas interiores se hallarán sumando algebraicamente las correspondientes á cada diagrama parcial.

La doble viga Warren de la fig. 13 (X) (lám. 31), por ejemplo, se puede descomponer en las dos vigas sencillas (X) y (Z); la primera, sometida á la fuerza 2, y la segunda cargada con 1 y 3. Las fuerzas interiores que acusen los diagramas respectivos para las barras $n, r..... t, x..... g$, serán las verdaderas, pues cada barra forma parte de una sola viga simple, pero no sucede lo mismo con los cordones, que son comunes á las dos vigas elemen-

(*) Solamente aparece la mitad de los diagramas, porque son simétricos con respecto á la horizontal que pasa por el punto de división de las reacciones de los apoyos.

tales; representando por las letras k, u, \dots, h, o , las compresiones y tensiones parciales, las totales tendrán los valores siguientes:

$$\begin{array}{l} \text{Cordón superior..} \\ \text{Cordón inferior..} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} AB \dots\dots & k \\ BC \dots\dots & k + u \\ CD \dots\dots & u + p \\ DE \dots\dots & p \\ ab \dots\dots & m \\ bc \dots\dots & m + h \\ cd \dots\dots & h + o \\ de \dots\dots & o \end{array} \right.$$

Los montantes extremos Aa, Ee se hallan comprimidos por fuerzas iguales á las reacciones M y N de la viga (Z), como que, en efecto, se puede suponer que los apoyos de esta viga elemental se han trasladado á A y E (fig. X).

851. La viga D (fig. 7.^a, lám. 33), sometida á cargas estáticas, de modo que trabajen simultáneamente todas las piezas, puede considerarse como compuesta de una viga *Howe* simple (A , fig. 7.^a, lám. 33), y una viga *Murphy* sencilla (E , fig. 8.^a, lám. 33), cargadas ambas en cada nudo con un peso mitad del aplicado á cada uno de los nudos de la viga compuesta D (fig. 7.^a, lám. 33). Las dos vigas elementales A y E (figs. 7.^a y 8.^a) tienen comunes las barras verticales y los cordones; las fuerzas interiores definitivas se obtendrán por la suma algebraica de las relativas á los elementos de cada viga simple (figs. 10 y 10', 11 y 11', lám. 33).

La doble viga *Howe* (fig. 6.^a, lám. 34) se puede descomponer en dos sencillas, con las fuerzas aplica las á los nudos respectivos, y en el mismo caso está la viga *Linville* (fig. 4.^a, lám. 34), que no es otra cosa que una doble viga *Murphy*.

También la viga *Post* (fig. 15, lám. 34) puede descomponerse en dos vigas triangulares simples.

852. **Vigas complejas.**—Se calcularán por el método explicado en el núm. 815; así, en la fig. 7.^a (lám. 34), por ejemplo, la fuerza interior de la pieza Aa será la suma de las correspondientes á la barra AH perteneciente á la viga simple $AHB D \dots$ y á la barra Aa de la pequeña viga triangular $Aab B$, suponiéndola apoyada en A y B . Lo mismo diríamos del cordón AB .

Como viga compleja puede calcularse la viga *Fink*, fig. 18 (lám. 34), que tiene por cordón superior una doble viga *Warren*.

853. **Fórmulas deducidas de los diagramas de fuerzas.**—El procedimiento gráfico que hemos descrito en los números anteriores, es sencillísimo, y los errores que pueden cometerse en la construcción del diagrama, debidos á la imperfección de reglas y escuadras y al grueso de las líneas trazadas con el lápiz, son de escaso valor.

En todo caso, si se prefiere obtener el valor de las fuerzas interiores por fórmulas, el diagrama las suministra también, y bien sencillas por cierto.

Como ejemplo, supongamos que se trata de la viga *Warren*, cargada con pesos iguales $1 = 2 = \dots = p$ en el cordón superior (fig. 4.^a, lám. 33), cuyo diagrama de fuerzas está dibujado en la fig. 4.^{a'}. Llamemos:

N = número de fuerzas = número de partes del cordón inferior.

P = Np = carga total.

l = longitud AC de una de las partes de los cordones.

L = Nl = longitud del cordón inferior.

h = BD = altura de la viga.

α = ángulo que forman las barras con la vertical.

Barras.—Ya hemos visto que las fuerzas interiores que actúan en las barras, estimadas verticalmente, tienen valor igual al del esfuerzo cortante (núms. 809 y 845). Según esto, si numeramos las fuerzas exteriores de izquierda á derecha, en las dos barras comprendidas entre las fuerzas n ésima y $(n + 1)$ ésima, el esfuerzo cortante es $9 - (1 + 2 + \dots + n)$, = $\frac{P}{2} - np = \frac{(N - 2n)P}{2N}$; de modo que la compresión y extensión de

estas barras tendrá por valor $\frac{P(N - n)}{2N \cos \alpha}$.

Extensión del cordón inferior.—La extensión del primer trozo AC (fuerza 11) está representada por kd en el diagrama. Comparando los triángulos semejantes kad y ABD , se obtiene

$$kd : AD = \frac{1}{2} l :: ad = \frac{1}{2} P : BD = h,$$

de donde

$$kd = \frac{Pl}{4h} = N \frac{Pl}{4Nh}$$

Para el segundo trozo CE , la fuerza de extensión es $15 = rd$, ó, lo que

es lo mismo, $r k + k d$; la comparación de los triángulos semejantes $r e k$ y $A B C$, da, estableciendo la proporcionalidad de bases y alturas, y teniendo en cuenta que $d t$, altura de $r e k$, es igual á

$$d a - a t = \frac{1}{2} P - \frac{1}{n} P = \frac{(N-2) P}{2 N},$$

$$r k = \frac{(N-2) P l}{2 N h}$$

y por lo tanto

$$r d = \frac{N P l}{4 N h} + \frac{(N-2) P l}{2 N h}.$$

El trozo tercero $E F$ está sometido á la extensión $19 = c d = c r + r k + k d$; y como de la comparación de triángulos semejantes $c s r$ y $A B C$ se deduce que

$$c r = \frac{(N-4) P l}{2 N h},$$

será

$$19 = c d = \frac{N P l}{4 N h} + \frac{(N-2) P l}{2 N h} + \frac{(N-4) P l}{2 N h}.$$

Para la parte de cordón inferior $n^{\text{ésima}}$, siendo $n < \frac{1}{2} L$, la fuerza T de extensión tendrá por valor

$$T = \frac{N P l}{4 N h} + \frac{(N-2) P l}{2 N h} + \frac{(N-4) P l}{2 N h} + \dots + \frac{[N-2(n-1)] P l}{2 N h}$$

$$= \frac{P l}{2 N h} \left[\frac{N}{2} + [(N-2) + (N-4) + \dots + N-2(n-1)] \right].$$

Verificando la suma de los $n-1$ términos que siguen á $\frac{N}{2}$, y que forman progresión aritmética, hallamos, para fuerza de extensión de la parte de cordón inferior de orden n ,

$$T = \frac{P l}{4 N h} [N(2n-1) - 2n(n-1)] \quad (1),$$

y para $n = \frac{1}{2} N$ (punto medio del cordón) se convierte en

$$T = \frac{P L}{8 h};$$

ó, puesto que el momento máximo de flexión M_0 , que tiene lugar en dicho punto medio, vale $\frac{P L}{8}$, será

$$T = \frac{M_0}{h}.$$

Cordón superior. — La compresión de las diversas partes del cordón superior está dada por las líneas del diagrama $e t$, $s m$, etc.

$$\text{Primer trozo: } e t = k d + \frac{1}{2} r k = \frac{P l}{4 N h} (2 N - 2).$$

$$\text{Segundo trozo: } s m = k d + r k + \frac{1}{2} c r = \frac{P l}{4 N h} (4 N - 8).$$

Por la organización de los valores de $e t$ y $s m$ (trozos 1.º y 2.º) se deduce que la compresión del trozo $n^{\text{ésimo}}$ es

$$F = \frac{P l}{2 N h} (N - n) n \quad (2).$$

Para $n = \frac{1}{2} N$,

$$F = \frac{P L}{8 h} = \frac{M_0}{h}.$$

Con igual facilidad se obtendrían fórmulas de todos los demás diagramas.

En las fórmulas (1) y (2) precedentes, que dan los valores de T y F , entra en el denominador la altura h de la viga; cuanto mayor sea h menores serán aquellos valores.

MÉTODO DE RITTER

854. Caso general. — Si en la viga $a D F$ (fig. 19, lám. 34), cortamos por un plano $X X$ los cordones $c D$, $b h$ y la barra $D b$, y llamamos S , I y B á las fuerzas interiores correspondientes á estos elementos, y R á la resultante $A C$ de las fuerzas exteriores, situadas á la izquierda del plano $X X$, el momento de R , con respecto á un punto cualquiera del plano, ha de ser igual á la suma de momentos, con relación al mismo punto, de las fuerzas S , I y B que engendra en las barras cortadas.

En efecto; puede suprimirse toda la parte de viga situada á la derecha del plano XX y sustituirse por la reacción de las piezas Dc , Dd y he , que son fuerzas iguales y contrarias á S , I , B , y dichas reacciones habrán de estar en equilibrio con las fuerzas exteriores **1**, **2** y **7** que se hallan á la izquierda de XX , ó con su resultante R , lo cual exige que la suma de los momentos de las reacciones y de R sea cero. Esto equivale á decir que la suma de momentos de S , I y B ha de ser igual en valor absoluto y en signo al momento de R .

Para que el problema tenga solución, es necesario que el plano XX corte á lo más á tres barras. Conocida la posición y magnitud de R , si el punto con respecto al cual tomamos los momentos es el de encuentro de dos de los tres elementos de viga cD , Dd , bh , en la ecuación de momentos no habrá más incógnita que la fuerza interior que actúa en el tercer elemento, puesto que es cero el brazo de palanca de los otros dos. Así, tenemos:

Cordón Dc. — Momentos con relación al punto b de encuentro de la barra Dd y cordón inferior bh .

$$R \times bm = S \times br \quad \text{''} \quad S = \frac{R \times bm}{br}$$

Cordón bh. — Momentos con relación al punto D de encuentro del cordón superior cD y barra bd .

$$R \times DC = I \times Dh \quad \text{''} \quad I = \frac{R \times DC}{Dh}$$

Barra Db. — Momentos con respecto al punto O de encuentro de los dos cordones Dc , hb .

$$R \times OA = B \times Os \quad \text{''} \quad B = \frac{R \times OA}{Os}$$

Como vemos, es sencillo el procedimiento que da los valores absolutos de las fuerzas interiores S , I y B ; no es menos fácil el conocimiento de la cualidad ó signo de estas fuerzas.

La rotación de S , B ó I , con respecto al punto que sirve para medir los brazos de palanca de los momentos, ha de verificarse en el mismo sentido que la de la resultante R , pues que el momento de ésta ha de ser igual y del mismo signo que la suma de momentos de aquéllas.

Para la fuerza S , por ejemplo, el punto fijo ha sido el b ; R gira de izquierda á derecha con respecto á este punto, y lo mismo deberá suceder á S , cuya dirección será, por tanto, la de la flecha, y como se dirige al plano XX , causará compresión en el cordón cD .

Para la fuerza I , el centro de rotación es el punto D ; también con respecto á D gira la resultante R como las agujas de un reloj, de izquierda á derecha, y lo mismo sucede á I (véase la flecha) que se separará del plano XX y producirá extensión en el cordón inferior bh .

Por último, para la fuerza B se ha tomado por punto fijo el O ; la resultante R gira como las agujas de un reloj, y lo mismo B , que según esto se separará del plano XX y causará extensión en la barra Dd (véase la flecha). Si el punto O hubiese estado á la izquierda de AC , giraría R de derecha á izquierda, en sentido contrario al de las agujas de un reloj; á B le sucedería lo mismo y tendría entonces dirección opuesta á la anterior, resultando, por tanto, comprimida la barra Dd .

855. Caso de fuerzas paralelas. — Supongamos que las fuerzas exteriores **1**, **2**,... **4** son paralelas (fig. 11, lám. 30); las reacciones **5** y **6** también lo serán, y la resultante de las fuerzas situadas á la izquierda de un plano transversal XX , no es otra cosa que el esfuerzo cortante C correspondiente á esta sección.

Si C es positivo, estará á la izquierda del apoyo O ; todas las barras inclinadas FE , FH , HT , etc., cortan al cordón inferior en puntos O , F , T , etc., que están á la derecha de $+C$; de modo que al determinar las fuerzas interiores de las porciones de cordón superior, con respecto á estos puntos habrán de tomarse los momentos de dichas fuerzas; y como $+C$, gira de izquierda á derecha (flecha x), las fuerzas se dirigen al plano XX , lo que demuestra que el cordón está comprimido. Del mismo modo se demostraría que el cordón inferior está extendido, puesto que los centros de rotación (puntos E , H , etc.), están á la derecha de $+C$.

Si en la sección $X'X'$ fuese negativa la resultante ó suma algebraica de las fuerzas situadas á la izquierda [**6** — (**1** + **2** + **3**)], es decir, que fuese negativo el esfuerzo cortante $-C$, resultaría colocado á la derecha del apoyo K y de todos los nudos de los cordones superior é inferior; de modo que el sentido de la rotación alrededor de dichos puntos, cuando calculemos las tensiones de los cordones, continuará siendo el de las agujas de un reloj (véase flecha x'). Señalando estas mismas direcciones en los cordones, á la izquierda siempre del plano transversal puesto que $-C$ es la resultante de las fuerzas situadas á la izquierda de $X'X'$, resulta también

comprimido el cordón superior y extendido el inferior (véanse las flechas).

Diremos, pues, que *en toda viga sometida á fuerzas exteriores paralelas, el cordón superior está comprimido y el inferior extendido.*

Una barra cualquiera FH estará comprimida ó extendida según su dirección, el signo del esfuerzo cortante C en el plano XX que la corta y la posición, con respecto á C , del punto de encuentro M de las partes de cordón EH , FT que reúne la barra FH .

La barra FH , por ejemplo, está comprimida, porque estando M á la izquierda de $+C$, la rotación de esta resultante tiene lugar de derecha á izquierda (flecha z), y lo mismo será para la fuerza B de la barra. En la barra NN' es negativo C , y como el punto V de encuentro de los cordones está á su derecha, la rotación será la que señala la flecha z' , y trasladándola á la izquierda de XX' , á la barra $N'N$, se deduce que esta pieza está extendida.

856. El procedimiento que acabamos de describir, para determinar el signo de las fuerzas interiores de las barras, es general. Apliquémoslo á las figs. 20 y 21 (lám. 34) que ofrecen la particularidad de que uno de los cordones, ANB , se compone de dos rectas que cortan al otro cordón en los puntos de apoyo A y B . En el mismo caso se encuentran las vigas figs. 9.^a y 10 de la lám. 32.

Es indiferente que las fuerzas exteriores paralelas estén aplicadas á los nudos del cordón superior ó del inferior; en ambos casos, el esfuerzo cortante positivo ($+C$) para una sección cualquiera XX , $X'X'$ (fig. 20, lám. 34), estará á la izquierda del apoyo A , y el esfuerzo cortante negativo $-C$ (secciones X_1X_1 , $X'_1X'_1$) se hallará á la derecha del apoyo B . El cordón superior ANB estará comprimido y el inferior AB extendido, según la regla del número anterior. Para encontrar el signo de las fuerzas interiores que obran en las barras, haremos una sección XX , $X'X'$ en la barra considerada y cordones superior é inferior, y observaremos la dirección que dichas fuerzas tienen con relación á estos planos.

El punto de encuentro de las proporciones de cordón superior é inferior es A para todas las barras de la semiviga izquierda, y B para las de la derecha. Como $+C$ y $-C$ son exteriores á A y B , las rotaciones han de efectuarse, para todas las barras, de izquierda á derecha, ó sea en dirección de las agujas de un reloj; llevando estas direcciones á todas las barras cortadas por los planos XX , $X'X'$, X_1X_1 , etc., á la izquierda de dichos planos, y recordando que las fuerzas dirigidas á ellos son de compresión, y las que se alejan lo son

de extensión, se deduce que las barras verticales están comprimidas y las inclinadas extendidas.

En la fig. 21 (lám. 34), por el contrario, las barras verticales sufren extensión y las inclinadas compresión, é iguales consecuencias deduciríamos para las vigas armadas por la parte inferior (figs. 9.^a y 10, lám. 32).

857. Simplificación del método de Ritter cuando los cordones son paralelos. — Si los cordones son paralelos, su punto de encuentro se halla á una distancia infinita, á la izquierda del plano transversal XX y de la resultante C de las fuerzas exteriores situadas de este lado del plano.

Cuando el esfuerzo cortante C sea positivo (figs. 8.^a y 10, lám. 34), su rotación tendrá lugar de derecha á izquierda, en dirección contraria á la de las agujas de un reloj; si la barra está inclinada de derecha á izquierda (figura 8.^a), resultará comprimida (véase la flecha), y si la inclinación es de izquierda á derecha (fig. 10), estará extendida. Lo contrario tendrá lugar cuando el esfuerzo cortante sea negativo (figs. 9.^a y 11, lám. 34), porque la rotación ha de contarse de derecha á izquierda.

Se deduce de aquí que, *á partir de la sección transversal en que el esfuerzo cortante cambia de signo, las barras inclinadas hacia los apoyos están comprimidas y las de dirección contraria extendidas.*

Del mismo modo se demostraría que *si las barras inclinadas están combinadas con barras verticales (montantes ó péndolas), estas últimas tienen signo contrario al de las inclinadas; por esto están extendidas en el sistema Howe y comprimidas en el Murphy.*

Cuanto á los cordones, ya sabemos que el superior está comprimido y el inferior extendido. Iguales consecuencias dedujimos por el método de Cremona (núm. 845).

Pasemos á calcular los valores absolutos de las fuerzas interiores que obran en los cordones y barras. Sea $A'N'$ (fig. 1.^a, lám. 35), una viga triangular cargada con los pesos $1, 2, \dots, 5$, cuya suma es LN ; tomando el polo O á h unidades de distancia de LN , dibujaremos el polígono funicular $ABDH$ y determinaremos las reacciones de los apoyos (núm. 413) si fuese necesario por ser desiguales las fuerzas 1 á 5 . Recordaremos que las ordenadas Bb , Dd del polígono funicular, multiplicadas por k y estimadas en la escala de fuerzas, representan los valores de los momentos de flexión en las secciones de la viga que pasan por B' , z , etc. (núm. 416).

Tracemos también el polígono $h''h'l m''n' \dots m'$ de los esfuerzos cortantes (núm. 417).

La fuerza S de compresión, en la parte del cordón superior $D'z$ cortada

por el plano XX , será (núm. 854), tomando los momentos de S y R con relación al punto x , y llamando h á la altura de la viga,

$$S = \frac{R \times Z E'}{h};$$

R , que es igual al esfuerzo cortante C , es la resultante de las fuerzas 7, 1 y 2 que están á la izquierda de XX ; su magnitud es $7 - (1 + 2)$; ha de ser paralela á estas fuerzas y pasar por el punto Z que se obtiene prolongando los lados del polígono funicular CD y AH (núm. 410).

Pero $R \times Z E'$ es el momento de flexión M_x correspondiente á la sección transversal que pasa por x ; de modo que

$$S = \frac{M_x}{h} \quad (1);$$

y como por construcción tenemos $M_x = E' H' \times k$, será

$$S = E' H' \times \frac{k}{h};$$

y si tomamos k igual á m veces de altura h de la viga,

$$S = m \times E' H',$$

es decir, que la fuerza de compresión, en una parte cualquiera $D'z$ del cordón superior, es igual á m veces la ordenada $E' H'$ del polígono funicular correspondiente al nudo opuesto x del cordón inferior, estimada en la escala de fuerzas.

La fuerza I de extensión del cordón inferior $x L'$ se obtendrá igualando los momentos de I y de R con respecto al punto z ; de modo que

$$I = \frac{R \times Z d}{h} = \frac{M_z}{h} \quad (2).$$

También veríamos que siendo

$$R \times Z d = M_z \text{ (momento de flexión en } z) = k \times D d \text{ y } k = m h,$$

se verifica

$$I = m \times D d.$$

De modo que la fuerza de extensión, en una parte $x L'$ de cordón inferior, es igual á m veces la ordenada $D d$ del polígono funicular correspondiente al nudo z opuesto á $x L'$, estimada en la escala de fuerzas.

La cantidad m es la relación $\frac{k}{h}$ de la distancia On á que se coloca el polo y la altura h de la viga.

Acabamos de demostrar que la fuerza de compresión del cordón superior, y la de extensión del cordón inferior, se obtienen dividiendo el momento de flexión por la altura de la viga (fórmulas (1) y (2) anteriores); á este mismo resultado conducen los diagramas de fuerzas obtenidas por el método de Cremona (núm. 853) y los razonamientos del núm. 549 (fórmula 4).

Las fuerzas interiores B que actúan en las barras no pueden calcularse por el método de Ritter, porque siendo paralelos los cordones, su punto de encuentro está en el infinito, é infinito es el valor de los brazos de palanca de R y B ; pero se podrá emplear el método de Culmann, según el cual el esfuerzo cortante C , en un plano transversal que corte á una barra, es la proyección de la fuerza interior B que en ella actúa (núm. 809).

En el intervalo $A' B'$, es $C = 7 = h' h''$; luego trazando $h'' s'$ paralela á $A' B'$, la compresión de esta barra estará dada por la recta $h'' s'$ tomada en la escala de fuerzas.

En el intervalo $B' C'$ el esfuerzo cortante C es constante é igual á $m'' r' = 7 - 1$; la extensión de la barra $C'' B'$ será igual á la compresión de la $C' D'$, y ambas se obtendrán trazando por el punto a' , proyección del C' , las rectas $a' m''$ y $a' n'$ paralelas á $C' B'$, $C' D'$. Lo mismo puede hacerse para todas las demás barras.

Según el convenio establecido (núm. 812), hemos trazado con línea gruesa las piezas comprimidas y las líneas que representan compresión, y con raya delgada las piezas extendidas y las líneas que expresan fuerzas de extensión.

Para no complicar la fig. 1.^a, hemos dibujado en la fig. 11, sobre el polígono funicular, los semipolígonos cuyas ordenadas, multiplicadas por m , dan los valores de las fuerzas de compresión del cordón superior y extensión del inferior.

El semipolígono $A b'' c'' d'' \dots n''$ corresponde al cordón inferior; puesto que la extensión de la parte $A' C'$ es dada por la ordenada $B b$ del nudo opuesto B' (figs. 1.^a y 11), y dicha extensión es constante en el intervalo $A' C'$, trazaremos por B (fig. 11) la recta $b'' c''$ paralela á $A H$. Por la misma razón se trazarían paralelas á $A H$ por los demás vértices C , etc., del polígono funicular.

El semipolígono $r'' u'' x'' \dots$ se refiere al cordón superior. La compresión

de las partes de éste depende de la ordenada del nudo opuesto del cordón inferior, y, por lo tanto, las paralelas $x''t''$, $r''u''$, etc., han de pasar por los puntos del polígono funicular que sean proyección de los nudos P' , L' , etc.

858. En la fig. 10 (lám. 35) aparecen las construcciones anteriores, relativas á una viga Howe simple. La tensión de las partes $A'a$, $a'd$ de cordón inferior depende de las ordenadas del polígono funicular referentes á los nudos b , c , etc., y por esto se han trazado Bp , Cr , etc., por los puntos B , C , etc. El semipolígono $tF'uH$ corresponde á las compresiones del cordón superior.

En la figura aparece tan sólo la mitad MN del polígono de fuerzas y la mitad $a'b'c'$ del polígono de esfuerzos cortantes. Para la barra ac , el esfuerzo cortante C es $e'h' = 8 - 1$, y para la péndola ab es $C = c'h' = 8$; por esta razón hemos trazado por el punto h' , proyección del a , las rectas $h'c'$, $h'f'$ paralelas á ab , ac , limitando la primera en la horizontal $b'c'$ y la segunda en la $e'f'$. Las magnitudes $h'c'$ y $h'f'$ representan las fuerzas de extensión de la péndola ab y de compresión de la barra ac .

Igual construcción se ha hecho para las demás; por ejemplo, mn' es la extensión de la péndola dc , y ml' la compresión de la barra de .

859. **Altura de las vigas.** — Las fórmulas (1) y (2) precedentes demuestran la influencia grande que tiene la altura h de las vigas en la compresión S del cordón superior y extensión I del cordón inferior, como que S é I son inversamente proporcionales á h , á igualdad de cargas y de número de divisiones de los cordones.

Esta misma consecuencia se deduce del método gráfico de Cremona (figuras 4.^a y 4.^{a'}, lám. 33), porque á igualdad de luz de la viga y de número de divisiones de los cordones, cuando h aumenta, aumenta también el ángulo BAC , BCA de inclinación de las barras; de modo que las dimensiones dk , te , dr , etc., son más pequeñas.

Las fuerzas interiores de las barras son algo menores también, pero como en cambio aumenta la longitud de éstas, no se obtiene ventaja ninguna en las comprimidas, por la influencia desfavorable que los aumentos de longitud ejercen en la resistencia (cap. VII).

Ya dijimos en el núm. 556 que la relación generalmente admitida entre la altura h de las vigas de celosía y la luz l , varía entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$. En las vigas americanas esta relación tiene valores mayores, comprendidos entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$ según las luces, como manifiesta el siguiente cuadro (*):

(*) Comolli, *Les ponts de l'Amérique du Nord.*

LONGITUD DEL TRAMO l	ALTURA DE LA VIGA h	RELACIÓN $\frac{h}{l}$
100	17	$\frac{1}{6}$
150	21	$\frac{1}{7}$
200	25	$\frac{1}{8}$
250	28	$\frac{1}{9}$
300	30	$\frac{1}{10}$
400	40	$\frac{1}{10}$

860. **Deformaciones de las vigas articuladas.** — La teoría general de la deformación, y las fórmulas que hemos deducido en los arts. 1.º, 2.º y 3.º del cap. V, no son en realidad aplicables más que á las piezas prismáticas; de modo que se cometería un error en hacer uso de las ecuaciones de la elástica y de los valores de las flechas f que para dichas piezas hemos hallado (tabla del núm. 404), cuando se trate de vigas que no son de alma llena, sino calada, ya estén sus diversas partes articuladas ó ligadas por medio de enlaces rígidos. La triangulación de barras que, en estos últimos casos, constituye el alma de la viga, ocasiona en el conjunto deformaciones mayores que las que se producen cuando el alma es llena.

Las mayores deformaciones corresponden á las vigas articuladas; pueden calcularse exactamente, y así lo ha hecho Résal (*), el cual ha determinado las flechas f por las siguientes fórmulas, en las cuales:

l = longitud de la viga.

h = altura de ídem.

R = coeficiente de trabajo por extensión empleado en el cálculo de la viga.

R' = coeficiente de trabajo por compresión.

E = coeficiente de elasticidad, correspondiente al metal de las piezas que están extendidas.

(*) *Ponts métalliques.*

E' = coeficiente de elasticidad del metal de que están formadas las piezas comprimidas.
 α = ángulo que forman las barras inclinadas, con la recta perpendicular á los cordones.

Viga Warren (fig. 4.^a, lám. 33):

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left(\frac{l^2}{8h} + \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \right).$$

Si los triángulos son equiláteros, $\alpha = 30^\circ$, y

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left(\frac{l^2}{8h} + \frac{l}{1,73} \right).$$

Cuando $\alpha = 45^\circ$,

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left(\frac{l^2}{8h} + \frac{l}{2} \right).$$

Viga Howe (figs. 9.^a y 10, lám. 33):

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left[\frac{l^2}{8h} + \frac{l}{2} \left(\cot \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \right];$$

y en el caso, muy frecuente, de $\alpha = 45^\circ$,

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left(\frac{l^2}{8h} + \frac{3l}{4} \right).$$

Viga Murphy (figs. 11 y 12, lám. 33):

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left[\frac{l^2}{8h} + \frac{l}{2} \left(\cot \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \right].$$

La viga armada con una mangueta y dos tirantes (fig. 3.^a, lám. 31) es un caso particular de viga Murphy. Aplicando la fórmula anterior, y teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{DC} = \frac{l}{2h}$ y $\cot \alpha = \frac{2h}{l}$, tendremos:

$$f = \left(\frac{R}{E} + \frac{R'}{E'} \right) \left(\frac{l^2}{4h} + h \right).$$

Para mayor generalidad se ha supuesto que los metales sometidos á extensión en la viga son diferentes de los que soportan compresión. Generalmente son iguales (hierro ó acero), de modo que $E = E'$, con lo cual se simplificarán las fórmulas anteriores.

Las vigas Howe y Murphy se deforman igualmente, pues los valores de f son iguales; las vigas Warren son más rígidas.

Las fórmulas anteriores son aplicables al caso de cargas en movimiento.

860'. Si las barras que constituyen el alma están ligadas á los cordones por medio de enlaces rígidos (ensambladuras cosidas con roblones), las deformaciones de la viga son sensiblemente menores que en el caso de existir articulaciones; pero siempre son mayores que las correspondientes á piezas de alma llena. Es muy difícil evaluar estas deformaciones por medio de un cálculo exacto, y por eso aceptamos en el ejemplo del núm. 565, las fórmulas correspondientes á piezas prismáticas.

Aun en el caso de vigas de alma llena, si ésta es de pequeño espesor, la deformación resulta en la práctica algo mayor que la de las vigas prismáticas anchas.

En las vigas metálicas de todas clases, propone Mr. Résal como procedimiento expedito y suficientemente exacto, hacer uso de las ecuaciones de la elástica y de las fórmulas de la flecha f obtenidas en los núms. 347 á 357, 365 á 385, 392 y tabla del núm. 404, para piezas prismáticas apoyadas ó empotradas sometidas á flexión, sin más que disminuir en aquéllas el valor de E , coeficiente de elasticidad longitudinal, dándole los valores siguientes:

	VALORES DE E		
	FUNDICIÓN	HIERRO	ACERO
Vigas prismáticas, y vigas de alma llena gruesa.....	$9,5 \times 10^9$	19×10^9	21×10^9
Vigas de alma llena delgadas.....	9×10^9	18×10^9	20×10^9
Vigas de alma calada. Barras de trian- gulación con enlaces rígidos.....	8×10^9	16×10^9	18×10^9
Vigas de alma calada de barras ar- ticuladas.....	7×10^9	14×10^9	$15,5 \times 10^9$

TRANSFORMACIÓN DE ENTRAMADOS

861. Vigas semejantes. Módulos. — Supongamos una viga semejante, en el concepto geométrico, á la de la fig. 4.^a de la lám. 33, es decir, que siendo en ambas igual el número de lados, los de la primera son paralelos y proporcionales á los de la segunda.

Si las dos vigas están cargadas con los mismos pesos **1, 2..... 7**, iguales ó desiguales, el polígono *ab* de las fuerzas exteriores será común á las dos, y lo mismo sucederá con el diagrama de fuerzas interiores, construído sobre *ab*, como base, por medio de paralelas á los lados de las vigas.

Si, llamando **1', 2', 3'..... 7'** las fuerzas exteriores aplicadas á la segunda viga, se verificase

$$\frac{1}{1} = \frac{2'}{2} = \dots = \frac{7'}{7} = m,$$

las fuerzas interiores de la segunda viga guardarán con sus homólogas de la primera la misma relación *m*.

En efecto; la reacción **9'** de la segunda viga es *m* veces mayor que la **9** de la primera, y por lo tanto, los lados del triángulo de fuerzas semejante al *kad* serán *m* veces mayores que los homólogos de éste. Las figuras recíprocas de los nudos *B*, en las dos vigas, serán también semejantes y guardarán la misma relación *m*, porque tienen sus *n* lados paralelos y *n* — 2 de ellos proporcionales, siendo *m* la razón (lados **10, 1, 10', 1'**) por pertenecer á los polígonos de los nudos *A*, ó por ser fuerzas exteriores. Pasando á los nudos restantes, encontraríamos el mismo resultado; y como la semejanza de vigas no excluye la igualdad, que es un caso particular de ella, diremos que *en dos vigas iguales ó semejantes, geoméricamente, cargadas semejantemente, las fuerzas interiores, en las piezas correspondientes, son proporcionales á las exteriores.*

Si se tiene en cuenta que la sección de las piezas extendidas ha de calcularse por la fórmula $F = R \omega$, de modo que los valores de ω son proporcionales á los de la fuerza interior *F*, se deduce que las fuerzas exteriores, las interiores y las secciones de las piezas extendidas, están en la misma relación.

Fácil es concebir la importancia de esta proporcionalidad, porque calculando en una viga tipo, sometida á la acción de fuerzas *unidad*, las fuerzas

interiores y la sección de las piezas extendidas, para otra viga igual ó semejante cargada con fuerzas *P* veces mayores, no habrá más que multiplicar por *P* los números relativos á la viga patrón, que hacen así las veces de verdaderos *módulos*.

862. Proyección paralela de una figura. — Supongamos dos figuras *ABCD*, *A'B'C'D'* (figs. 22 y 23, lám. 34) compuestas del mismo número de lados y de vértices. Refiriéndolas á sistemas de ejes rectangulares ú oblicuos, llamemos:

- $x_1, y_1 \dots$ coordenadas del primer vértice (*A*) en la figura *ABCD*.
- $x'_1, y'_1 \dots$ coordenadas del primer vértice (*A*) en la figura *A'B'C'D'*.
- $x_2, y_2 \dots$ coordenadas del segundo vértice (*B*) en la figura *ABCD*.
- $x'_2, y'_2 \dots$ coordenadas del segundo vértice (*B*) en la figura *A'B'C'D'*.
- ⋮
- $x, y \dots$ coordenadas generales de *ABCD*.
- $x', y' \dots$ coordenadas generales de *A'B'C'D'*.

Si se verifica

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \dots = \frac{x'}{x} = s$$

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{y'_3}{y_3} = \dots = \frac{y'}{y} = n$$

diremos que la figura *A'B'C'D'* es la *proyección paralela* de la figura *ABCD*. Los puntos *A', B'..... D'* son los *correspondientes* de los *A, B..... D*.

En estas figuras, cada punto de la una tiene su correspondiente en la otra, y á cada sistema de dos líneas iguales y paralelas de la primera, corresponde un sistema de dos líneas iguales y paralelas de la segunda.

No es necesario que los sistemas de ejes sean de la misma clase para las dos figuras: puede ser uno rectangular y otro oblicuo (figs. 3.^a y 4.^a, lám. 35).

La *semejanza* de figuras es un caso particular; sucede cuando $s = n$.

863. Propiedades de las proyecciones paralelas. — 1.^a Se deduce de la definición anterior que si tres puntos *C, N, D*, (figs. 22 y 23, lám. 34) están

en línea recta, sus proyecciones paralelas C', N', D' , estarán también en línea recta y las magnitudes CD y $C'D'$ quedarán divididas en partes proporcionales, es decir, que se verificará

$$\frac{CN}{ND} = \frac{C'N'}{N'D'}$$

Inversamente: si estando en línea recta los puntos C, N y D , y los C', N', D' , es $C'D'$ proyección paralela de CD y se verifica la proporción anterior, los puntos N y N' son *correspondientes*, y el N' será, por tanto, proyección paralela del N .

Los entramados $ACE, A'CE', A''C''E''$ (figs. 2.^a, 3.^a y 4.^a, lám. 35) son, cada uno, proyección paralela de otro cualquiera, siempre que, componiéndose del mismo número de piezas dispuestas de modo análogo, se verifique

$$\begin{aligned} Aa : ab : bc : cC :: A'a' : a'b' : b'c' : c'C' :: A''a'' : a''b'' : b''c'' : c''C'' \\ Ad : dE :: A'd' : d'E' :: A''d'' : d''E'' \\ Ep : pC :: E'p' : p'C' :: E''p'' : p''C'', \end{aligned}$$

es decir, que los nudos que están en línea recta dividan en partes proporcionales á las líneas correspondientes. En efecto; las abscisas de todos los nudos, en los tres entramados, están en la relación $l : l' : l''$ de las luces, y las ordenadas en la $f : f' : f''$ de las flechas, y los nudos son puntos correspondientes.

Las relaciones anteriores son, en general, diferentes; de modo que $\frac{Aa}{A'a'} = s, \frac{Ad}{A'd'} = r, \frac{Ep}{E'p'} = t$. Consideraremos como caso particular que $s = r = t$.

Lo mismo puede decirse de las vigas $ONR, O'N'R', O''N''R''$ (figs. 5.^a á 7.^a, lám. 35), siempre que $Oa : ac : \dots :: O'a' : a'c' : \dots :: O''a'' : a''c'' : \dots$ y $Nb : bd :: N'b' : b'd' :: N''b'' : b''d''$. La relación de abscisas será la misma que la de las luces l, l', l'' , y la de ordenadas igual á la de alturas h, h', h'' .

2.^a La proyección paralela de una recta Nb paralela al eje OX , (figs. 5.^a á 7.^a, lám. 35) es otra recta $N'b'$ paralela al eje $O'X'$, y la relación de magnitudes es la misma que existe entre las abscisas, es decir, que si $x' = m x$

(siendo x' y x las abscisas generales de las figuras $O'N'R'$ y ONR), se verificará que $N'b' = m \times Nb$.

Del mismo modo, la proyección paralela de una recta ad paralela al eje OY (figs. 2.^a y 3.^a, lám. 35), es otra recta $a'd'$ paralela al eje $O'Y'$ y de magnitud $a'd' = n \times ad$, siendo $n = \frac{y'}{y}$.

En las figuras AEC y $A''E''C''$, á las rectas ad, bE, cP paralelas á OY corresponden las $a''d'', b''E'', c''P''$ paralelas á $O''Y''$.

3.^a La proyección paralela de un sistema de líneas paralelas cuyas longitudes guardan entre sí una cierta relación, es otro sistema de líneas paralelas cuyas longitudes tienen esta misma relación.

4.^a La proyección paralela de un polígono cerrado, un paralelogramo, un paralelepípedo, es también un polígono cerrado, un paralelogramo, un paralelepípedo.

5.^a La proyección paralela de un sistema de dos superficies planas paralelas cuyas áreas tienen una cierta relación, es otro sistema de dos superficies planas cuyas áreas guardan dicha relación.

6.^a La proyección paralela de dos volúmenes que están en una cierta relación, se compone de otros dos volúmenes de la misma relación.

864. Aplicación de las proyecciones paralelas á sistemas de fuerzas situadas en un plano. — Estando representadas por longitudes las fuerzas, gozarán de las propiedades enunciadas en el número anterior, que se pueden ampliar con las siguientes:

1.^a Si un sistema cualquiera de fuerzas está en equilibrio, también lo estará el sistema formado por las proyecciones paralelas de dichas fuerzas (*).

2.^a Si un sistema de fuerzas paralelas es la proyección paralela de otro

(*) En efecto; descomponiendo cada fuerza del primer sistema en otras dos paralelas á los ejes coordenados, tendremos, llamando P_x, P_y á las componentes, y x_a, y_a las ordenadas del punto de aplicación,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (P_x) = 0 \\ \Sigma (P_y) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Suma de proyecciones.} \quad \left. \begin{aligned} \Sigma (P_x y_a) = 0 \\ \Sigma (P_y x_a) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Suma de momentos con relación al origen.}$$

Si x', y' son las coordenadas generales del segundo sistema, y $\frac{x'}{x} = s, \frac{y'}{y} = n$, como s y n son constantes, se verificará

$$\begin{aligned} \Sigma (s P_x) = 0 & \quad \Sigma (s P_x n y_a) = 0 \\ \Sigma (n P_y) = 0 & \quad \Sigma (n P_y m x_a) = 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones demuestran que, en el segundo sistema de fuerzas, es cero la suma de proyecciones y las de sus momentos, es decir, que este sistema está en equilibrio.

sistema de fuerzas paralelas, la resultante y punto de aplicación del primero, serán las proyecciones paralelas de la resultante y punto de aplicación del segundo (*).

865. Transformación de entramados. — Las propiedades anejas á las figuras paralelas permiten resolver un interesante problema de construcción, cual es la fácil determinación de las fuerzas interiores de las piezas de un entramado por la comparación con las relativas á otro que sea proyección paralela de él.

Consideremos los dos entramados ADH (I) y $A'D'H'$ (II) (figs. 8.^a y 9.^a, lám. 35) que son proyección paralela uno de otro, para lo cual han de componerse del mismo número de piezas, dispuestas de modo análogo, y además debe verificarse la proporcionalidad de líneas siguientes (núm. 863, propiedad 1.^a):

$$\begin{aligned} AB : BC : CD &:: A'B' : B'C' : C'D' \\ DE : EL : LH &:: D'E' : E'L' : L'H' \\ TM : MD &:: T'M' : M'D' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Demostremos el siguiente teorema: *Si un entramado (I) es en sus líneas proyección paralela de otro (II), y las fuerzas exteriores aplicadas á*

(*) En efecto; si llamamos P' y P'' á las proyecciones, sobre los ejes, de la resultante del segundo sistema, y X é Y á las ordenadas del punto de aplicación, y conservamos las notaciones de la nota anterior, será

$$\begin{aligned} \Sigma (P_x) &= Y' & \Sigma (P_x y_a) &= Y' \Sigma (P_x) \\ \Sigma (P_y) &= P'' & \Sigma (P_y x_a) &= X \Sigma (P_y). \end{aligned}$$

En el primer sistema, proyección paralela del primero, se verifica (propiedad segunda del número anterior), llamando X' é Y' á las ordenadas del punto de aplicación de la resultante,

$$\begin{aligned} \Sigma (s P_x y_a) &= Y' \Sigma (s P_x) \\ \Sigma (n P_y x_a) &= X' \Sigma (n P_y) \\ Y' &= \frac{sn \Sigma (P_x y_a)}{s \Sigma (P_x)} = n Y \\ X' &= \frac{sn \Sigma (P_y x_a)}{n \Sigma (P_y)} = s X; \end{aligned}$$

luego el punto de aplicación del primer sistema, es la proyección paralela del segundo.

Además, la resultante tiene por proyecciones paralelas á los ejes $\Sigma (s P_x)$, $\Sigma (n P_y)$ ó $s \Sigma (P_x)$, $n \Sigma (P_y)$, es decir, que es la proyección paralela del segundo sistema (propiedad segunda del número anterior).

aquél ($B'b'$, $C'c'$, etc.), son proyecciones paralelas de las que obran en éste (Bb , Cc , etc.), las fuerzas interiores de compresión y extensión que se desarrollan en las piezas del primero (I) guardan con respecto á las similares del entramado segundo la misma relación que existe entre las longitudes de las piezas respectivas.

Es decir, que si

$$\frac{B'b'}{Bb} = \frac{C'c'}{Cc} = \frac{D'd'}{Dd} = \dots = \frac{f'}{f''} = n,$$

la fuerza $B's'$ que comprime la pieza $B'T'$ y la Bs de compresión de la pieza BT del otro entramado, están en la relación de las longitudes $B'T'$ y BT , y del mismo modo

$$\frac{B'r'}{Br} = \frac{B'A'}{BA} \quad " \quad \frac{B't'}{Bt} = \frac{B'M'}{BM} \text{ etc.}$$

Fijemos la atención en dos nudos correspondientes, en los B y B' por ejemplo; tomemos sobre las líneas del nudo B (fig. II), magnitudes Br , Bs , Bt , etc., que representen las fuerzas interiores de estas piezas; y en las líneas del nudo B' , magnitudes $B'r'$, $B's'$, $B't'$, etc., tales que se verifique

$$\frac{B'r'}{r'A'} = \frac{Br}{rA} \quad " \quad \frac{B's'}{s'T'} = \frac{Bs}{sT} \text{ etc.}$$

Según lo que hemos dicho en el núm. 863 (propiedad 1.^a), los puntos r' , s' , ..., z' serán correspondientes de los r , s , ..., z ; de modo que las fuerzas $B'b'$, $B'r'$, $B's'$, etc., son la proyección paralela de las Bb , Br , Bs , etc.; y como aquéllas están en equilibrio, lo estarán también éstas (núm. 864), y entonces $B'r'$, $B's'$, etc., representarán las fuerzas interiores del nudo B' , puesto que cumplen con la condición de equilibrio. Ahora bien; por construcción, estas fuerzas y las del nudo B están en la relación de las longitudes de las piezas sobre que actúan, y esto es lo que se trataba de demostrar.

866. Fácil es, con este teorema, hallar las fuerzas interiores de un entramado I (figs. 8.^a y 9.^a, lám. 35) que es proyección paralela de otro II, en función de las fuerzas interiores de éste.

Emplearemos las notaciones siguientes:

	Entramado I.	Entramado II.
Longitud de las líneas correspondientes ($AB, A'B'; BM, B'M'...$).....	h'	h''
Flechas.....	$D'S' = f'$	$DS = f''$
Fuerzas exteriores que actúan en los nudos.....	P'	P''
Fuerzas interiores en las diversas piezas del entramado.....	F'	F''

Si las fuerzas P' del entramado I son la proyección paralela de las P'' del entramado II, esto es, si $\frac{P'}{P''} = \frac{f'}{f''} = n$, tendremos, según el teorema anterior,

$$\frac{F'}{F''} = \frac{h'}{h''} \quad \text{ó} \quad F' = F'' \frac{h'}{h''}.$$

Pero para generalizar, vamos á suponer que las fuerzas P aplicadas á los nudos del entramado I no son la proyección paralela de las P'' del entramado II, sino que guardan con ellas la relación $\frac{P}{P''} = m$, diferente de n , y llamemos F á las fuerzas interiores que bajo la acción de estas nuevas fuerzas P se desarrollan en el entramado I.

De los dos relaciones $\frac{P'}{P''} = n$, $\frac{P}{P''} = m$, se deduce $P = \frac{m}{n} P'$; esta misma relación deberá haber entre F y F' (núm. 861), es decir,

$$F = \frac{m}{n} F' \quad \text{ó} \quad F = \frac{m}{n} \frac{h'}{h''} F'' \quad (1).$$

Si los dos entramados I y II fuesen, en sus líneas, semejantes geométricamente, serían proporcionales todos sus lados y $\frac{h'}{h''} = \frac{f'}{f''} = n$; entonces la fórmula anterior se convertiría en

$$F = m F'' \quad (2)$$

que ya hemos hallado anteriormente (núm. 861).

Grandes son los resultados prácticos de la fórmula (1): calculadas las fuerzas interiores F'' de un entramado tipo ADH (fig. 8.^a, lám. 35), lo estarán las de otro entramado $A'D'H'$ (fig. 9.^a), que se componga de las mismas piezas, aunque no sea semejante en sus líneas al anterior, siendo suficiente que los nudos sean puntos correspondientes, esto es, que se verifique

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = k \quad \text{''} \quad \frac{F'M'}{FM} = \frac{M'D'}{MD} = r, \text{ etc.};$$

las nuevas fuerzas interiores F' se obtendrán por la fórmula (1), en la cual m es la relación entre las fuerzas exteriores

$$\frac{B'b'}{Bb} = \frac{C'c'}{Cc} = \frac{D'd'}{Dd} = \dots = m,$$

n la relación de las flechas, contadas paralelamente al eje OY ,

$$\frac{D'S'}{DS} = n,$$

y $\frac{h'}{h''}$ la relación entre los lados correspondientes que se consideren, relación diferente para los diversos lados, puesto que los entramados no son semejantes.

2. VIGAS RECTAS ARTICULADAS

SOMETIDAS Á CARGAS EN MOVIMIENTO

867. Resolución general del problema.—En muchos casos los entramados están sometidos á la acción de cargas móviles, como sucede en los puentes de carretera y vía férrea, en los puentes auxiliares ó *de servicio*, empleados como medio auxiliar de construcción de aquéllos, en los andamios, etc., y es de gran importancia el poseer métodos expeditos de determinación de las fuerzas interiores que actúan en las piezas.

En principio, el problema lo tenemos ya resuelto; en efecto, en el artículo anterior (núms. 807, 809, 854 y 857), hemos dado medios fáciles para encontrar las fuerzas interiores, en los cordones y barras, para una sección transversal cualquiera de la viga, siempre que se conozcan en dicha sección los valores y signo del momento de flexión y esfuerzo cortante, y el artículo 5 del cap. VI (núm. 618 y siguientes), contiene reglas que permiten determinar el máximo momento de flexión y los máximos esfuerzos cortantes positivos y negativos en una sección cualquiera, teniendo en cuenta la posición más desfavorable de cargas móviles.

868. Cálculo de los cordones.—Cualquiera que sean las fuerzas exteriores y su posición en la viga, apoyada en los extremos, el cordón superior está siempre comprimido y el inferior extendido (núms. 844 y 855); de modo que no debemos preocuparnos más que de los valores absolutos de los momentos de flexión. Una vez construída la curva ó polígono cuyas ordenadas representan los máximos momentos de flexión para cada sección, por los procedimientos explicados en los núms. 619, 621 y 623, se determinarán las fuerzas interiores de los cordones por el método del núm. 857 y siguientes, operando con dicho polígono como hemos hecho con el $Aa''H$ (fig. 11, lám. 35), y ADB' (fig. 10, lám. 35).

869. Cálculo de las barras.—El cálculo de las barras requiere estudio más detenido, porque las diferentes posiciones que en la viga toman los pesos móviles hacen variar en magnitud y en signo los valores de los esfuerzos cortantes, y por lo tanto, los de las fuerzas interiores de una misma barra, y esta inversión de esfuerzos influye en la determinación de las dimensiones de su sección transversal, y en el cálculo del número y dimensiones de las contradiagonales, si se aceptan.

Es conveniente recordar:

1.º Cuando el esfuerzo cortante es positivo ($+C$, dirigido de abajo á arriba), las barras inclinadas de derecha á izquierda están comprimidas y las inclinadas de izquierda á derecha resultan extendidas (núm. 809, figuras 8.ª á 11, lám. 34).

Si el esfuerzo cortante es negativo ($-C$, dirigido de arriba á abajo) se invierte el sentido de las fuerzas interiores, sufriendo extensión las barras inclinadas de derecha á izquierda, y compresión las que lo están de izquierda á derecha.

Cuando hay barras verticales combinadas con las inclinadas, las primeras sufren esfuerzos de signo contrario á los de las segundas; estarán, pues, comprimidas ó extendidas cuando estas últimas sufran extensión ó compresión (núm. 857).

2.º Cuando la carga móvil está constituída por un solo peso P , los esfuerzos cortantes máximos, positivo y negativo, en una sección N' (fig. 1.ª, lám. 26) se desarrollan en el momento de pisar dicha sección el peso móvil, y tienen por valores

$$\begin{aligned} +C &= N'a' \\ -C &= N'b'. \end{aligned}$$

El máximo positivo ($+C = N'a'$) corresponde á un movimiento del peso móvil en la dirección HO (de derecha á izquierda); la recta HB se construye tomando $OB = P$. El máximo negativo ($-C = N'b'$) tiene lugar cuando P pisa la sección N' , al caminar de izquierda á derecha (dirección OH), y la recta OB' se traza haciendo $HB' = P$ (núm. 619).

Si la carga móvil está formada por un peso uniformemente repartido, el esfuerzo cortante máximo positivo en una sección A (fig. 5.ª, lám. 26), se desarrollará cuando la parte anterior de la carga repartida llegue á la sección A , marchando de derecha á izquierda. El máximo esfuerzo cortante negativo tendrá lugar en A , cuando la cabeza del tren pise esta sección, moviéndose de izquierda á derecha (fig. 7.ª, lám. 26). (Véase el núm. 623).

El polígono ó curva de los máximos esfuerzos cortantes positivos, correspondientes á la marcha de derecha á izquierda (HBm , fig. 8.^a, lám. 26), se construye sobre la línea OH , y el relativo á los máximos negativos, pertenecientes á la marcha inversa (OaB'), por debajo. En una sección cualquiera N , levantando la perpendicular Ba , se obtiene $NB =$ máximo de $+C$ y $Na =$ máximo de $-C$ para dicha sección.

Cuando la carga móvil esté compuesta de varios pesos aislados, el esfuerzo cortante máximo, positivo ó negativo, en una sección cualquiera S' (figura 8.^a, lám. 36), tendrá lugar, en la mayor parte de los casos, cuando el primer peso cargue sobre dicha sección, marchando de derecha á izquierda ó inversamente (núm. 620"), y en este caso es fácil construir los polígonos HBm y OaB' (fig. 6.^a, lám. 37) que nos dan los valores de dichos esfuerzos cortantes $C_0 = +NB$, $C_0 = -Na$ para la sección que se considere. Pero si el máximo C_0 fuese producido por otro peso (núm. 620), se determinaría por los procedimientos explicados en los núms. 620' y 622'.

Ya se trate de cargas uniformemente repartidas ó de cargas aisladas, si se transmiten á la viga principal por el intermedio de viguetas transversales, se determinará C_0 por el método de los núms. 628' y 628".

870. Caso de no tener en cuenta el peso propio de la viga.—Supondremos primeramente que se prescinde del peso propio de la viga y consideraremos los casos de que la carga móvil esté formada por un solo peso ó por varios.

Peso único (figs. 7.^a, 8.^a, 9.^a y 10, lám. 37).— Cuando el peso P esté á la derecha de una barra tal como la ab (fig. 7.^a), el esfuerzo cortante es positivo ($+C$) y la barra ab estará comprimida. El máximo de $+C$, y, por tanto, de la compresión de la barra, tendrá lugar cuando, marchando de derecha á izquierda (flecha D), el peso P pise en b .

Trazando las líneas FL y HR (fig. 9.^a), cuyas ordenadas representan respectivamente los esfuerzos cortantes positivos y negativos para las diversas secciones (núm. 619), será fácil calcular la máxima compresión de ab . Para ponernos en las condiciones más desfavorables, tomaremos en consideración la ordenada Bd (fig. 9.^a), que es la mayor de las correspondientes á las secciones que se pueden causar en la barra ab , y trazando AB paralela á ab de la fig. 7.^a, obtendremos en AB la máxima compresión de la barra ab .

Cuando P está á la izquierda de ab (fig. 8.^a), el esfuerzo cortante en el plano XX que corta á ab es negativo ($-C$), y su máximo absoluto tendrá lugar cuando, en el movimiento de izquierda á derecha (véase flecha D'), venga P á s . La barra ab resulta sometida á una fuerza de extensión $A'B'$

(fig. 9.^a), tomando como máximo de $-C$, para esta barra, la ordenada $A'd$.

Veremos del mismo modo que para la barra mn (figs. 9.^a y 10) el máximo esfuerzo de compresión es MN , correspondiente á la posición de P sobre el nudo m ; y que para la $m'n'$, la máxima extensión es $M'N'$, cuando P está en t .

Como la viga es simétrica con respecto á la vertical que pasa por su punto medio, no hay necesidad de calcular más que las fuerzas interiores de las barras de una semiviga.

El cálculo de las contradiagonales, cuando las haya, se hará del modo que se explica á continuación para el caso de varios pesos.

2.^o *Varios pesos, uniformemente repartidos, ó aislados y desiguales.*— Lo que sigue es aplicable á cargas repartidas y á pesos desiguales, existiendo únicamente diferencia, en los dos casos, en el trazado de las líneas de los esfuerzos cortantes [parábolas Hnm , OaB' (fig. 8.^a, lám. 26); polígonos HBm , OaB' (fig. 6.^a, lám. 37), polígono $O_1S_1D_1ud_2 \dots H_1a_3 \dots t'O$ (fig. 11, lám. 54.)].

Para fijar las ideas, supondremos que los esfuerzos cortantes máximos tienen lugar, en cada sección, cuando la cabeza del tren pisa sobre ella; pero repetimos que el procedimiento es aplicable á todos los casos.

La barra an (fig. 16, lám. 35) sufrirá la máxima compresión $+B$, correspondiente al máximo esfuerzo cortante $+C$, cuando las fuerzas **1, 2, 3**..... estén situadas á la derecha de an , de modo que la primera de ellas (fuerza **1**) cargue en el extremo anterior n , marchando el tren en la dirección de la flecha D . Si las fuerzas están aplicadas al cordón inferior, la posición de cargas que produce compresión máxima en la barra an , es la que indica la fig. 17.

En efecto; desde que el tren ingresa en la viga por la derecha, moviéndose hacia la izquierda, se produce en la sección XX un esfuerzo cortante positivo ($+C$), cuyo valor absoluto aumenta á medida que las cargas se aproximan á esta sección y adquiere su máximo valor cuando la fuerza **1** llega al nudo más próximo á dicha sección ó á la barra an . El signo de la fuerza B que se desarrolla en la barra depende del de C , y como éste es positivo en todo este intervalo, lo será B que tendrá la dirección que marca la flecha, esto es, hacia la sección XX ; la barra an estará comprimida, llegando al máximo de la compresión cuando se sitúen las fuerzas del modo que hemos dibujado en las figs. 16 y 17.

Trazada la curva Hm de los valores de $+C$ (figs. 16 y 20), fácilmente se obtendrá la ordenada correspondiente á la sección XX ; y para ponernos

en el caso más desfavorable, elegiremos, de todos los puntos de la barra an , el a , que es al que corresponde mayor ordenada en dicha curva; Aa' será, pues, el máximo de $+C$ para la barra an , y trazando AA' paralela á na (núm. 857), obtendremos la compresión máxima $+B$, que hemos de tener en cuenta para el cálculo de la sección transversal de esta barra.

El máximo esfuerzo cortante negativo, para la barra an , tiene lugar cuando los pesos móviles se hallan á la izquierda de XX , en la posición $1'$, $2'$, etc. (figs. 18, 19 y 20, lám. 35), como si la parte anterior del tren, marchando de izquierda á derecha (flecha D'), llegase á pisar el nudo anterior de la barra an , en el sentido de la marcha (nudo c en la fig. 18 y nudo a en la fig. 19). La barra an estará ahora sometida á un esfuerzo de extensión máximo $-B$; y para calcularlo, poniéndonos en las condiciones más desfavorables, tomaremos como valor del esfuerzo cortante negativo $-C$ el relativo al punto n , ó sea la ordenada Nn' (línea OB' , de valores de $-C$) que es el mayor de todos los correspondientes á las diversas secciones de la barra an ; trazando NN' paralela á an , tendremos en NN' , con arreglo á la escala de fuerzas, que ha servido también para trazar las líneas Hm , OB' , la magnitud de la extensión máxima de la barra an .

Resumiendo: por efecto de las posiciones diversas de las cargas móviles en la viga, la barra an pasa gradualmente de una compresión máxima $+B = AA'$ á una extensión máxima $-B = NN'$.

Se puede evitar el trabajo por extensión de la barra an empleando una contradiagonal, que puede tener la posición ct (fig. 18, lám. 35) ó la af (fig. 19).

La contradiagonal ct sustituye á las barras ca , an , nt (fig. 18), y como está inclinada de izquierda á derecha, el esfuerzo cortante negativo $-C$ producirá en ella una fuerza inferior $+K$ dirigida al plano XX , es decir, una compresión. Siguiendo el procedimiento empleado para el cálculo de las barras an , elegiremos el máximo valor de $-C$, de todos los relativos á la contradiagonal ct , que es el correspondiente al punto d , y trazando TT' paralela á ct , obtendremos en TT' la compresión máxima de esta contradiagonal.

Si adoptamos la contradiagonal af , veríamos de igual modo que está sometida á una extensión máxima representada por la recta FF' .

Las contradiagonales de la barra an no trabajan sino cuando la fuerza interior B de dicha barra, y, por lo tanto, el esfuerzo cortante C , cambia de signo. En una barra ah inclinada de izquierda á derecha (figs. 1.^a á 4.^a, lám. 37) se verifica:

La extensión máxima ($-B$), correspondiente á un esfuerzo cortante positivo máximo $+C$, se desarrolla cuando las cargas móviles están situadas á la derecha, á partir del nudo que precede al a (fig. 1.^a), ó á partir del mismo nudo a (fig. 2.^a), según que estén cargados los nudos del cordón superior ó los del inferior.

La compresión máxima ($+B$), debida al máximo esfuerzo cortante negativo, tiene lugar cuando las cargas móviles ocupan la parte de viga situada á la izquierda, á partir del nudo h (fig. 3.^a), ó del anterior al h (fig. 4.^a).

Se puede evitar el cambio de signo de B y hacer que la barra ah trabaje constantemente por extensión, ó no trabaje, por medio de contradiagonales que pueden tener la posición hr (fig. 3.^a), en cuyo caso estarán sometidas á compresión, ó la sn (fig. 4.^a), y entonces trabajarán por extensión.

Atendiendo solamente á las cargas móviles, el esfuerzo cortante C puede cambiar de signo, según la posición de éstas, en todas las secciones transversales de la viga comprendidas entre los nudos más próximos á los apoyos, en el cordón superior ó inferior según que uno ú otro soporte dichas cargas. Así, pues, excepción hecha de las barras extremas, todas las demás experimentarán inversión de esfuerzos, es decir, que pasarán de una compresión á una extensión, ó recíprocamente; y si se quiere evitar este defecto, habrá necesidad de dotar de contradiagonales á todas las barras.

Como las barras ó diagonales están generalmente colocadas simétricamente con respecto al plano transversal medio de la viga (figs. 3.^a y 4.^a, lám. 33), las contradiagonales también lo estarán (líneas de trazos). Si reservamos á las barras el papel que desempeñan cuando las cargas son estáticas y uniformemente repartidas, esto es, que las inclinadas hacia los apoyos estén comprimidas y las dirigidas al medio de la viga extendidas, á las contradiagonales les sucederá lo contrario, resultando extendidas las dirigidas á los apoyos (fig. 4.^a, lám. 33), y comprimidas las inclinadas hacia el punto medio de la viga (fig. 3.^a, lám. 33).

871. Cálculo de las barras cuando se tiene en cuenta el peso propio de la viga. — En este caso el esfuerzo cortante causado por el peso propio es constante en magnitud y signo para cada sección transversal, é influye en la magnitud y signo del esfuerzo cortante originado por las cargas móviles, como vamos á ver á continuación.

Sea $A'B'$ una viga de longitud $A'B' = l$, apoyada en sus extremos figura 12, lám. 35), y llamemos p á su peso propio por metro lineal.

Tomando como eje la recta AH , si hacemos $AN = HL = \frac{1}{2} pl$, la

recta NL representará con sus ordenadas los valores de los esfuerzos cortantes correspondientes al peso propio (núm. 323), que serán positivos para la semiviga $A'd'$ y negativos en la $d'B'$.

Tracemos la línea AEM de los máximos esfuerzos cortantes negativos, que se producirán, como ya hemos dicho, cuando la cabeza del tren, moviéndose éste de izquierda á derecha, se apoye sobre cada sección. Para hallar los esfuerzos cortantes definitivos, cuando las cargas móviles ingresan por el apoyo izquierdo A' y se dirigen al apoyo derecho B' , habremos de sumar algebráicamente las ordenadas de la recta NL y de la línea AEM . Esta suma algebráica es una resta aritmética en la parte AD , porque las ordenadas de ND y de ACE son de signo contrario; y se convierte en suma aritmética en la parte DH , porque las ordenadas de DL y de ERM son del mismo signo, negativas ambas.

Para efectuar la suma algebráica haremos girar la recta NL alrededor de AH hasta que tome la posición BF , y obtenemos:

Entre A y O (longitud $A'E'$ de la viga): las ordenadas de BD son mayores que las de AC , y las diferencias (ordenadas comprendidas en la parte rayada ABC) tendrán el signo del minuendo, esto es, serán positivas. El esfuerzo cortante será positivo ($+C$) en esta parte.

Entre O y H (longitud $E'B'$ de la viga): las diferencias son negativas entre O y D , y en cuanto á la parte DH , como las ordenadas de DF y ERM son negativas, será negativa su suma. En resumen: en la parte $E'B'$ el esfuerzo cortante máximo, para todas las secciones, es negativo, y tiene por valor las ordenadas inscritas en el polígono CFM .

Consideremos el movimiento del tren de derecha á izquierda: se producirán máximos esfuerzos cortantes positivos en todas las secciones, representados por las ordenadas de la línea am , construída sobre ah como eje de abscisas. Sumando algebráicamente estas ordenadas con las de la recta nl , relativas al peso propio, para lo cual debe ser $hn = al = \frac{1}{2}pl$, y repitiendo los razonamientos precedentes, tendremos:

Entre a y S (longitud $B'H'$ de la viga): los esfuerzos cortantes son negativos ($-C$), porque las ordenadas de ac son menores que las de ef , y estarán representados por las ordenadas inscritas en el polígono caf .

Entre S y h (longitud $H'A'$ de la viga): los máximos esfuerzos cortantes son positivos ($+C$) y son dados por las ordenadas inscritas en el polígono $cm.b$. Si comparamos los dos polígonos $ABFMC A$ y $afbmca$, deducimos las interesantes consecuencias siguientes:

En la parte $A'E'$ de viga, los esfuerzos cortantes son siempre positivos, cualquiera que sea el sentido de la marcha de los pesos móviles; los máximos valores corresponden á la marcha de derecha á izquierda, y están representados, para cada sección de la viga, por la ordenada inscrita en el polígono $mprb$.

En la parte $H'B'$ de viga, los esfuerzos cortantes son siempre negativos, y los máximos valores son dados por las ordenadas del polígono $PFRM$.

En la región media $E'H'$, los esfuerzos cortantes cambian de signo con la posición de las cargas móviles. En la parte $E'd'$, en la cual los esfuerzos cortantes debieran ser positivos siempre si las cargas fuesen estáticas y uniformemente repartidas, llegan á ser negativos cuando el tren camina de izquierda á derecha, y están representados por las ordenadas del polígono CDE ; por el contrario, en $d'H'$, los esfuerzos cortantes que son negativos para cargas estáticas, se hacen positivos cuando el tren marcha de derecha á izquierda, y tienen por valor las ordenadas inscritas en el triángulo cde .

Delúcese de cuanto precede:

1.º En las regiones $A'E'$ y $H'B'$ no hay necesidad de colocar contradiagonales, puesto que los esfuerzos cortantes no han de cambiar nunca de signo. Si la organización de la viga es la que representa la figura, las barras $a'A'$, $D'b'$ estarán siempre comprimidas, porque están inclinadas de derecha á izquierda, y el esfuerzo cortante es positivo (núm. 809), y las $a'b'$, $D'E'$ extendidas.

Para la barra $b'D'$ tomaremos el mayor de los esfuerzos cortantes correspondientes á sus diversos puntos, que es la ordenada $s't'$, y tendremos en $s't'$ la extensión de la péndola $a'b'$, y en $s't''$ la compresión de la barra $b'D'$. Del mismo modo hallaríamos en mb'' la compresión de la barra $A'a'$ y en pr la extensión de la péndola $D'E'$.

Las barras $F'e'$ y $f'B'$ estarán comprimidas también, porque estando inclinadas de izquierda á derecha el esfuerzo cortante es negativo (número 809), y las piezas $f'e$, $F'H'$ se hallarán extendidas. Se determinarían sus dimensiones, sobre el polígono $RPFM$, por medio de construcciones análogas á las de las barras $A'a'$, $a'b'$, etc., en la parte $mprb$.

Las piezas $A'C'$, $B'T'$ son montantes sometidos á las compresiones $mb = MF$.

2.º En la región media $E'H'$, como cambian de signo los esfuerzos cortantes, es necesario colocar contradiagonales $D'd'$, $d'I'$.

La barra $c'E'$ trabajará por compresión, como sus paralelas $D'b'$, $a'A'$, cuando en la parte $E'd'$ se desarrollen esfuerzos cortantes positivos; según

esto, su magnitud se calculará por las ordenadas del polígono $p d e r$, de las cuales la mayor, $p r$, de las de dicha barra $E' c'$ servirá para trazar la $p r'$ que representa la compresión buscada. La recta $d e = D E$ es la extensión de la péndola $c' d'$.

La contradiagonal $D' d'$ trabajará cuando el esfuerzo cortante sea negativo, y estará entonces sometida á compresión por estar inclinada de izquierda á derecha. Hemos de utilizar las ordenadas del triángulo $C D E$; y construyendo sobre la $D E$, que es la mayor del intervalo correspondiente á la contradiagonal $D' d'$, el triángulo rectángulo $D E T$, será $T E$ la compresión buscada.

La barra $c' H'$ trabajará por compresión, como sus paralelas $F'' e', f' B'$, cuando el esfuerzo cortante sea negativo, como sucede á éstas. Para su cálculo habremos de utilizar las ordenadas del polígono $D P R E$. La contradiagonal $F' d'$ entrará en acción cuando se desarrollen esfuerzos cortantes positivos, y resultará entonces comprimida por estar inclinada de derecha á izquierda. Se calculará por las ordenadas de $c d e$.

Resumiendo: las ordenadas del polígono $m d b e$ servirán para el cálculo de todas las barras paralelas de la semiviga de la izquierda, y el triángulo $C D E$ para el de las contradiagonales que existan en esta semiviga. De igual modo, el polígono $D E M F$ se empleará en el cálculo de las barras principales $c' H', F' e, f' B', F' H', f' e'$ de la semiviga derecha $d' B$, y el triángulo $c d e$ en el de las contradiagonales $d' F'$.

Como la viga es simétrica con respecto á $c' d'$, basta hacer el cálculo de diagonales y contradiagonales de una semiviga.

En la fig. 12 (lám. 35) no aparece más que una sola contradiagonal de cada lado de la línea media $c' d'$; pero hubieran podido colocarse más, dividiendo al efecto $E' d' = d' H'$ en dos ó más partes iguales.

Observaremos que la región media $E' H'$ es tanto más pequeña, á igual longitud $A' B'$ de viga, cuanto mayor sea el peso propio de ésta por unidad lineal (p), porque entonces $A B = h b = \frac{1}{2} p l$ aumentará también, y los

puntos C y c de encuentro de las rectas $B F, b f$ con las líneas $A C M, a c m$, estarán más próximos al punto medio (E, e). El número de contradiagonales necesarias está, pues, en razón inversa del peso propio por metro lineal p , á igualdad de las demás condiciones.

Las ordenadas inscritas en los triángulos $C D E, c d e$, aumentan á medida que se aproximan al centro de la viga, y lo mismo sucede á los esfuerzos en las contradiagonales. Es lo inverso de lo que sucedió en las barras principa-

les, las cuales, como sabemos, trabajan tanto más cuanto mayor es su distancia al centro.

872. Viga sin contradiagonales. — Cuando no hay contradiagonales, las barras de la región media trabajan unas veces por compresión y otras por extensión.

Supongamos que se trata de la viga Warren, representada en la fig. 13 (lám. 35), y atendamos á la mitad $z n$ de la izquierda.

Las barras de la región $z a$ estarán siempre sometidas á esfuerzos del mismo signo, porque C es constantemente positivo; $z x, u t$, etc., estarán comprimidas, y $x u, t s$, etc., extendidas. Las magnitudes se calcularán por medio de las ordenadas inscritas en el polígono $m b r p$.

Cuanto á las barras de la región media, tendremos, para el cálculo de los esfuerzos máximos:

Esfuerzo cortante positivo...	{ $h a, m l \dots$ compresión. } Ordenadas para el cálculo,
	{ $h l, m n \dots$ extensión. } las del polígono $p r e d$.
Esfuerzo cortante negativo...	{ $h a, m l \dots$ extensión. } Ordenadas para el cálculo,
	{ $h l, m n \dots$ compresión. } las del polígono $C D E$.

873. Vigas compuestas. — El cálculo de las vigas compuestas se refiere al de las simples. Por lo que respecta á las barras que forman el alma, que son las piezas que pueden presentar diferencias para la determinación de las fuerzas interiores, se procede como sigue: se elige un sistema de barras, formando triangulación, que una los extremos de la viga; por ejemplo, el $a b c d e f g h m$ (fig. 13, lám. 37), y se calculan las fuerzas de extensión y compresión que se desarrollarían en estas barras si ellas solas constituyesen el alma de la viga, y estas fuerzas se suponen repartidas en todas las barras restantes que, combinadas con las que hemos considerado, forman la viga completa. En la fig. 13, una vertical corta á cuatro barras; se dividiría por 4 el valor de las fuerzas halladas para las barras de la triangulación simple $a b c \dots g h m$.

También se puede resolver este problema descomponiendo la viga en estas otras cuatro simples: 1.^a, = $a b c d e f \dots h m$; 2.^a, = $a b' c' d' \dots h' m$; 3.^a, = $n a'' b'' c'' \dots r'' h''$; 4.^a, = $n a''' b''' c''' \dots r''' h'''$. Las vigas 1.^a y 2.^a son iguales, y se pueden superponer si se hace girar una de ellas alrededor de la vertical que pasa por el punto medio; lo mismo puede decirse de las vigas 3.^a y 4.^a.

874. Vigas Schwedler. — En estas vigas, que toman el nombre de su

autor, ingeniero alemán, la parte central ó región media $ABCD$ (fig. 12, lám. 37), en que los esfuerzos cortantes, y, por lo tanto, las fuerzas interiores de las barras, cambian de signo con la posición de las cargas móviles, está organizada como en las vigas ordinarias, siendo el cordón superior paralelo al inferior, y teniendo el alma compuesta de montantes, diagonales y contradiagonales, como en el sistema Murphy.

Las partes extremas OBA , HCD , comprendidas entre las secciones límites AB , CD y los apoyos O y H , se organizan dando al cordón superior una inclinación tal que las barras FM , EM , etc., del alma no sufran esfuerzo alguno para la posición más desfavorable de cargas, y únicamente trabajen los cordones superior é inferior. Así, pues, los montantes y diagonales en estas partes son de muy débil escuadría.

El objeto del autor es posible obtenerlo. Recordemos el método de Culmann aplicado al caso de fuerzas paralelas (núm. 808), y veremos que para una sección tal como la XX , hay que descomponer el esfuerzo cortante en las tres direcciones FB , FA , MA ; pero como disponemos de la dirección de FB , podremos dar á esta parte del cordón superior la inclinación conveniente para que la componente, según FA , sea cero, para el valor del esfuerzo cortante correspondiente á la posición más desfavorable de cargas. Lo mismo puede hacerse con EF , OE , etc.

3. VIGAS DE ENLACES RÍGIDOS

875. Método de cálculo.—En los sistemas de vigas que hemos explicado en los artículos anteriores, se ha supuesto la existencia de articulaciones en todos los puntos de concurrencia de piezas, y este es un carácter distintivo de las vigas americanas. Los ingenieros europeos, al adoptar los sistemas americanos, han sustituido las articulaciones por enlaces rígidos; las vigas constan de los mismos elementos, dispuestos de idéntica manera; pero las diversas piezas que concurren en un nudo se ensamblan por medio de cubrejuntas y roblones, desaparece el pasador y con él la libertad de rotación de las piezas.

La determinación de los esfuerzos, tal como acaba de explicarse en los artículos anteriores, supone que en cada nudo las piezas están unidas por articulaciones, en cuyo caso las deformaciones generales del sistema, dan lugar á pequeñas rotaciones de las piezas elementales, y dichas fuerzas trabajan por esfuerzos simples. Pero cuando la unión se hace con roblones, queda anulada toda rotación relativa; los ángulos que forman entre sí las diversas piezas que concurren en un nudo, permanecen invariables, y esto trae consigo el que al deformarse toda la viga las piezas se flexen ligeramente para conservar en los nudos los ángulos de inclinación primitivos que entre sí formaban. Esta flexión da lugar á *esfuerzos secundarios* en las barras, que se suman á los que resultan por la acción directa de las cargas.

Los esfuerzos secundarios se desprecian, generalmente, y las vigas de enlaces rígidos se calculan del mismo modo que las articuladas, sin que por ello resulte error sensible; y no existiría error, en absoluto, si no hubiese deformación alguna, y las vigas fuesen de figura invariable, porque la distribución de fuerzas en las diversas piezas que las constituyen es independientemente de su modo de unión. El coeficiente de seguridad que se admite en todos los cálculos de resistencia de materiales, es más que suficiente para contar con los aumentos de trabajo molecular á que dan lugar los es-

fuerzos secundarios; pero en todo caso, no habría más que aceptar para las barras coeficientes de trabajo un poco menores, por ejemplo: 10 á 20 por 100 inferiores á los ordinarios.

Todas las vigas americanas, simples, compuestas y complejas, pueden construirse con enlaces rígidos.

876. Comparación de las vigas articuladas y las de enlaces rígidos.—No es de este lugar hacer una comparación minuciosa de los dos sistemas, y nos limitaremos á exponer los defectos principales atribuidos á las vigas articuladas. En las articulaciones se forman holguras entre los pasadores y los orificios de las piezas que unen, ya por defecto de construcción ó montaje, ya por causa de las deformaciones del material. Estas holguras son sumamente perniciosas, especialmente cuando las piezas están sometidas alternativamente á esfuerzos de compresión y extensión, alternativa que se traduce en choques de las piezas articuladas que pueden ser causa de su fractura, y cuando menos del aumento de la holgura, y, por lo tanto, de la dislocación de la viga; y he aquí la razón del empleo de contradiagonales, por los americanos, en todas las regiones de la viga en que sea de temer la inversión de esfuerzos por pequeñas que sean las diferencias de las fuerzas de signo contrario.

Además, las piezas comprimidas, cuando están articuladas en sus extremos, tienen menor resistencia que las de extremos planos ó unidos á partes fijas por medio de enlaces rígidos (núm. 683).

Por último, la fractura de un solo pasador trae consigo la destrucción de la viga, mientras que en los enlaces rígidos no tiene consecuencias inmediatas la fractura de un cierto número de roblones, y se puede remediar el mal sin gran dificultad.

Estas son las razones principales por las que, al adoptarse las vigas americanas en Europa, no ha sido bien acogido el sistema de articulaciones. Observaremos que los ingenieros americanos no admiten articulaciones en todos los nudos; desde luego, todo el cordón superior, que trabaja por compresión, es rígido, y se va extendiendo el empleo de enlaces rígidos también en las uniones de las barras comprimidas con los dos cordones, especialmente en los montantes ó piezas verticales (sistemas Murphy y Linville).

XI

ARMADURAS Y CIMBRAS

1. PRELIMINARES

2. CÁLCULO DE LAS FUERZAS INTERIORES

1. PRELIMINARES

PROCEDIMIENTOS GENERALES DE CÁLCULO

877. Las armaduras dispuestas para cubrir los edificios se componen de los elementos siguientes (fig. 14, lám. 37):

Armaduras propiamente dichas, aa , situadas á distancias d , cuya organización describiremos más adelante.

Viguetas ó *correos* v, v , colocadas horizontalmente: llamaremos v á la distancia que separa dos próximas. Las viguetas se apoyan en los pares, y son las piezas encargadas de transmitir á las armaduras aa el peso de toda la cubierta.

Cabios ó *parecillos* c, c , colocados sobre las viguetas, según las líneas de máxima pendiente, á la distancia c entre ejes.

Listones l, l , paralelos á las viguetas, á e distancia entre ejes. El enlistonado se emplea para la teja plana, chapas ondeadas metálicas, etc.; para otras clases de cubiertas se pone un *entablado* ó *enlatado*.

No siempre existen todas estas piezas; unas veces se suprimen los listones, otras veces faltan también los cabios, y las viguetas forman el enlistonado.

Las *armaduras* son verdaderas *vigas rectas* compuestas de un cordón superior formado de partes poligonales ó curvas (figs. 1.^a y 12 (*a*), lám. 43) llamadas *pares*, un cordón inferior ó *tirante*, que puede ser recto ó poligonal (figs. 5.^a (*a*) y 6.^a (*a*), lám. 42) y un núcleo ó parte central, semejante al *alma* de las vigas, constituido por piezas comprimidas (*montantes*, *tornapuntas*, *manguetas* ó *bielas*, etc.) y piezas extendidas (*pendolón*, *péndolas*, *tirantes*, etc.).

Dividiremos las armaduras en *simples*, *compuestas* y *complejas*. Aplicaremos la primera denominación á las figuras deformables ó estrictamente indeformables; de modo que llamando l al número de lados y n al de nudos, ha de ser $l \leq 2n - 3$ (núm. 798). Armaduras *compuestas* son las que tienen líneas supérfluas, y, por tanto, $l > 2n - 3$; pueden descomponerse en dos ó más armaduras simples. Finalmente, damos el nombre de *complejas* á las armaduras simples en que alguna ó algunas piezas (generalmente los pares) son pequeñas vigas simples ó compuestas.

Las figs. de las láms. 39, 40, 41 y 42, son armaduras simples.

La fig. 15, lám. 37, es una armadura compuesta.

Las figs. 11 (a) (lám. 38) y 1.^a y 2.^a de la lám. 44, son armaduras complejas. En las figs. 1.^a y 2.^a (lám. 44), los pares son vigas de celosía, y en la 11 (a) (lám. 38) vigas triangulares simples.

878. Otra división se hace de las armaduras, fundada en los medios empleados para enlazar las piezas que concurren en los nudos; á semejanza de lo que para las vigas rectas hemos dicho, las armaduras pueden ser *articuladas* (núm. 801) ó de enlaces rígidos, ó *rígidas* (núm. 875).

En las armaduras articuladas, los tirantes, y aun los tornapuntas y bielas, están articulados, y los primeros son generalmente hierros redondos; esto es lo que tiene lugar, por ejemplo, en la fig. 2.^a, lám. 44.

La fig. 5.^a, lám. 13, representa el detalle de una articulación en el tirante de una armadura; la fig. 6.^a, de la misma lámina, la articulación de un tirante inclinado en su unión con el par, y la fig. 28 de la lám. 26 (m), las articulaciones correspondientes á una mangueta ó biela en su unión con el par y el tirante.

Las armaduras rígidas se distinguen por la rigidez del tirante ó cordón inferior, que se forma de hierros laminados, en escuadra, *T* sencilla ó doble, etc., y porque los elementos sometidos á compresión (tornapuntas, manguetas, etc.) se unen á los pares y al tirante por medio de bridas ó cubrejuntas cosidos con roblones (fig. 15, lám. 37, y fig. 10, lám. 38).

La fig. 9.^a (lám. 13) representa el detalle de enlace rígido de una péndola *A* de hierro plano y un tirante *B* de hierro *T* sencilla; en las figs. 20 y 29 de la lám. 16, se ve la unión de par y tirante en armaduras rígidas; y en la 26 (d) de la lám. 26, el enlace rígido de un tornapunta con el par y el tirante.

879. **Cómo trabajan las diversas piezas de una armadura.** — Los listones l, l (fig. 14, lám. 37) son piezas sometidas á flexión, apoyadas en varios puntos (en los cabios) y cargadas uniformemente. Si llamamos p el peso del

metro cuadrado de cubierta (cargas permanentes y accidentales) y e á la distancia entre los listones, el peso por metro lineal de listón es $p \times e$.

Los cabios c, c son piezas inclinadas sometidas á flexión; su extremo inferior se apoya en el muro, en el marco de soleras ó en una vigueta, y el superior puede presentar una de las dos posiciones dibujadas en las figs. 11 y 12 (lám. 28). Cada cabio se apoya en dos ó más viguetas y puede estar formado de uno ó más trozos; cada metro lineal de cabio sufre una carga $p \times c$ siendo c la separación, entre ejes, de dos contiguos.

Las viguetas trabajan por flexión; son piezas horizontales, apoyadas en dos ó más puntos (en los pares de las armaduras) y cargadas uniformemente con $p \times v$ por metro lineal. Si las distancias v, v' de una vigueta á las inmediatas de cada lado fuesen desiguales, el peso por metro lineal sería $p \times \frac{v + v'}{2}$.

Cuanto á las piezas que constituyen la armadura propiamente dicha, aplicando los métodos de Culmann, Cremona y Ritter, y repitiendo los razonamientos del núm. 856 (figs. 20 y 21 de la lám. 34), tendremos ocasión de ver demostrado que cuando las viguetas descansan en los nudos de los pares, éstos trabajan por compresión, el tirante por extensión y las piezas centrales por extensión ó compresión, según la posición que ocupen en la armadura y la organización de ésta; si las piezas verticales están combinadas con otras dirigidas á los apoyos extremos (fig. 20), las primeras resultan comprimidas y las segundas extendidas; y cuando las piezas inclinadas lo están hacia el medio (fig. 21), trabajan por compresión, mientras que las verticales lo hacen por extensión.

Cuando las viguetas se apoyan en puntos diferentes de los nudos (fig. 6.^a, lám. 38, y fig. 1.^a (a), lám. 39), los pares se hallan sometidos á compresión y á flexión (núm. 804); las demás piezas de la armadura trabajan del modo indicado en el párrafo anterior.

880. **Procedimientos generales de cálculo de una armadura.** — *Enlistonado.* — Un listón HE (fig. 8.^a, lám. 42) es pieza apoyada en varios puntos; para facilitar los cálculos consideraremos la parte HD próxima á uno de los extremos y la conceptuaremos pieza empotrada en D y apoyada en H , de longitud $DH = c$, y cargada uniformemente con pe por metro lineal (número 879); de modo que la carga total es $P = pec$. En la fórmula general del momento de flexión (núm. 405) será $n = 5$.

La fuerza P se descompone en dos (véase A y B , fig. 9.^a, lám. 42): una $P' = P \cos \alpha$, normal al cabio, y otra $P'' = P \sin \alpha$, paralela á la vertical;

la primera produce un momento máximo de flexión $M'_0 = \frac{1}{2} P' c$ ó sea $M'_0 = \frac{1}{2} p e c^2 \cos \alpha$, y la segunda otro máximo $M''_0 = \frac{1}{8} P'' c = \frac{1}{8} p e c^2 \sin \alpha$.

Llamando I' al momento de inercia con respecto al eje $I' I'$ (fig. 9.^a, lámina 42), é I'' al relativo al eje $I'' I''$; y R_1 , y R_2 á los coeficientes de trabajo producidos por los momentos M'_0 , M''_0 , tendremos (núm. 460):

$$\frac{R_1 I'}{v'} = M'_0 \quad (1)$$

$$\frac{R_2 I''}{v''} = M''_0 \quad (2),$$

y es necesario que la suma $R_1 + R_2$ sea igual al coeficiente R ordinario de trabajo.

Las ecuaciones (1) y (2) sirven para determinar la escuadría del listón. Fijese *à priori* un coeficiente de trabajo R_1 menor que el ordinario R , y haciendo uso de la ecuación (1) determínese la escuadría de la pieza; conocida ésta, lo será $\frac{I''}{v''}$, y de la ecuación (2) se despejará R_2 que se sumará con R_1 .

Si la suma es mayor ó menor que R , será prueba de que el valor dado á R_1 es demasiado pequeño ó demasiado grande, y habrá que corregirlo y proceder á nuevo tanteo.

Ejemplo. — Enlistonado de hierro en escuadra de lados desiguales. Datos: $p = 200$ kilogramos, $e = 2$ metros, $c = 1$ metro, $\alpha = 27^\circ$, $\sin \alpha = 0,454$, $\cos \alpha = 0,891$.

$$P = pec = 200 \times 1 \times 2 = 400 \text{ kilogramos.}$$

$$P' = P \cos \alpha = 400 \times 0,891 = 356.$$

$$P'' = P \sin \alpha = 400 \times 0,454 = 180.$$

$$M'_0 = \frac{1}{8} P' c = \frac{1}{8} \times 356 \times 2 = 89 \text{ kilográmetros.}$$

$$M''_0 = \frac{1}{8} P'' c = \frac{1}{8} \times 180 \times 2 = 45 \text{ kilográmetros.}$$

Aceptaremos, condicionalmente, un coeficiente de trabajo $R_1 = 4 \times 10^6$

kilogramos por m.² (4 kilogramos por mm.²) para la flexión producida por P' ; y tendremos, haciendo uso de la ecuación (1) anterior,

$$\frac{I'}{v'} = \frac{M'_0}{R_1} = \frac{89}{4 \times 10^6} = 0,000022.$$

Necesitamos un hierro en escuadra que tenga un valor de $\frac{I'}{v'}$ igual á 0,000022. En la tabla 1.^a del núm. 489 (pág. 412), hallamos una escuadra de $\frac{100 \times 60}{5}$, cuyo $\frac{I'}{v'}$, cuando la rama mayor es paralela al plano de flexión, tiene por valor 0,00002325.

El verdadero valor de R_1 para esta escuadra será (núms. 508 y 509):

$$R_1 = \frac{M'_0}{0,00002325} = 3,82 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2.$$

La flexión causada por P'' produce un coeficiente R_2 de trabajo [ecuación (2) anterior]

$$R_2 = M''_0 : \frac{I''}{v''}.$$

Ahora bien; en la escuadra de $\frac{100 \times 60}{5}$, el valor de $\frac{I''}{v''}$, correspondiente al caso de ser la rama menor paralela al plano de flexión, es 0,00000914. Resulta, pues,

$$R_2 = \frac{45}{0,00000914} = 4,92 \times 10^6 \text{ por m.}^2.$$

El coeficiente definitivo de trabajo es, pues,

$$R = R_1 + R_2 = 8,74 \times 10^6 \text{ kilogramos por m.}^2 \text{ (8,74 kilogramos por mm.}^2\text{).}$$

881. **Simplificaciones.** — Puede suceder que $\frac{I'}{v'} = \frac{I''}{v''} = \frac{I}{v}$; tal su-

cederá en las escuadras de ramas iguales (fig. 9.^a, lám. 42); en este caso se tiene

$$\frac{R_1 I'}{v'} = \frac{1}{8} P' c$$

$$\frac{R_2 I'}{v'} = \frac{1}{8} P'' c$$

$$(R_1 + R_2) \frac{I}{v} = \frac{1}{8} (P' + P'') c$$

6

$$\frac{R I}{v} = \frac{1}{8} (P' + P'') c = M_0 \quad (3),$$

es decir, que se determina la escuadría por la fórmula ordinaria, dando á R su valor definitivo, sin más que sustituir el peso total P por la suma de sus componentes P' y P'' .

Ejemplos. — 1.º Enlistonado de hierros en escuadra, de ramas iguales, colocados como se representa en B (fig. 9.^a, lám. 42).

Datos: $p = 180$ kilogramos, $c = 1,2$ metros, $e = 0,8$ metros, $\alpha = 27^\circ$, $\text{sen } \alpha = 0,454$, $\text{cos } \alpha = 0,891$.

Será:

$$\left. \begin{array}{l} P = p e c = 172,8 \text{ kilogramos.} \\ P' = P \cos \alpha = 153 \text{ kilogramos.} \\ P'' = P \text{ sen } \alpha = 78 \text{ kilogramos.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P' + P'' = 231 \text{ kilogramos.} \\ \frac{1}{8} (P' + P'') c = M_0 = 34 \text{ kilográmetros.} \end{array}$$

Empleando el método del núm. 508 tendremos, fijando un coeficiente de trabajo $R = 8 \times 10^6$ por m.² (8 kilogramos por mm.²),

$$\frac{I}{v} = \frac{M_0}{R} = \frac{34}{8 \times 10^6} = 0,00000425.$$

En la tabla 1.^a del núm. 489 hallamos una escuadra de $\frac{54 \times 54}{6}$, cuyo valor de $\frac{I}{v}$ es 0,00000429; aceptándola, el verdadero valor del coeficiente de trabajo sería:

$$R = M_0 : \frac{I}{v} = \frac{34}{0,00000229} = 7,92 \times 10^6 \text{ kgs. por m.}^2 \text{ (7,92 kgs. por mm.}^2 \text{)}.$$

2.º Listón de madera de sección cuadrada, con los datos del ejemplo anterior.

Haremos uso de la tabla del núm. 507, pero para ello es preciso expresar $\frac{1}{8} (P' + P'') c = M_0$ en kilogramosdecímetros, es decir, tomar el valor de c en decímetros. Haciéndolo así, resulta:

$$\frac{1}{8} (P' + P'') c = \frac{1}{8} (153 + 78) \times 12 = 340.$$

El número inmediato superior á 340, en la tabla, es 343, y á él corresponde un lado b de escuadría de 7 centímetros, ó $b = 0,07$ metros. Recordaremos que esta tabla está calculada admitiendo un coeficiente de trabajo $R = 60$ kilogramos por cm.².

Si el listón fuese de sección cuadrada, sabemos que $\frac{I}{v} = \frac{b^3}{6}$, y sería:

$$\frac{R b^3}{6} = \frac{1}{8} (P' + P'') c.$$

Formaríamos el segundo miembro, y con este valor acudiríamos á la tabla del núm. 507, en donde se hallará el lado b de escuadría.

882. Generalmente se calculan los listones por la fórmula $\frac{R I}{v} = \frac{1}{8} P c$, como si la cara que asienta en los cabios fuese horizontal. El resultado que se obtiene es poco diferente del verdadero, como puede verse en los ejemplos anteriores.

Para el hierro en escuadra, y puesto que $\frac{1}{8} P c = \frac{1}{8} \times 172,8 \times 1,2 = 26$ kilográmetros, hallaríamos, empleando el mismo coeficiente $R = 8 \times 10^6$ kilogramos por m.², $\frac{I}{v} = 0,00000325$, á cuyo valor corresponde, en la tabla 1.^a del núm. 489, una escuadra de $\frac{54 \times 54}{5}$, poco diferente de la de $\frac{54 \times 54}{6}$ antes hallada.

Para la madera sería, expresando c en decímetros, $M_0 = 260$; y en la tabla del núm. 507 encontraríamos para el número inmediato superior, que

es 275, $b = 6,5$ centímetros, valor próximamente igual al hallado por el método anterior (7 centímetros).

883. Cabios. — Si la armadura es parhilara, los cabios son piezas inclinadas, cargadas uniformemente con un peso $p' = pc$ por metro lineal. El peso P total que obra sobre cada cabio, se obtendría multiplicando $p' = pc$ por la longitud de éste. Llamando h á la longitud de proyección horizontal del cabio, f á la flecha ó diferencia de nivel de los dos extremos, y α al ángulo de inclinación con la horizontal, recordaremos que el momento de flexión máximo M'_0 es igual al $M_0 = \frac{1}{8} Ph$ de la pieza proyección (núm. 761); que

el esfuerzo cortante máximo es $C'_0 = \frac{1}{2} P \cos \alpha$ (núm. 762), y que la compresión máxima Z' , según el eje del cabio, tiene por valor (núm. 765):

$$Z' = \frac{p' h^2}{2f} + p' f \quad \text{ó} \quad Z' = \frac{pc h^2}{2f} + pcf \quad (4),$$

cuando el extremo superior termina en un plano vertical (fig. 11, lám. 28); y

$$Z' = p' f \quad \text{ó} \quad Z' = pcf \quad (5),$$

si el apoyo superior está dispuesto del modo representado en la fig. 12 (lámina 28).

884. Si los cabios son de madera, se suele prescindir, para el cálculo de la escuadría, de la compresión Z' , por las razones que hemos dado en los núms. 766, 767 y 768. Atendiendo únicamente al momento de flexión, se empleará la fórmula

$$\frac{R a b^3}{6} = M_0 = \frac{1}{8} P h,$$

pudiendo hacer uso con ventaja de la tabla del núm. 507.

Ejemplo. — Cabios de 5 metros de longitud, $h = 4$ metros de proyección horizontal y $f = 3$ metros de flecha, distantes $c = 0,6$ metros entre ejes.

El peso del metro cuadrado de cubierta es $p = 200$ kilogramos.

La carga p' por metro lineal de cabio es $p' = pc = 200 \times 0,6 = 120$ kilogramos; y la carga total será $P = 5 \times 120 = 600$ kilogramos; de modo que el momento máximo de flexión es

$$M'_0 = M_0 = \frac{1}{8} P h = \frac{1}{8} \times 600 \times 4 = 300 \text{ kilográmetros,}$$

y la ecuación de resistencia

$$\frac{R a b^3}{6} = 300$$

se resolverá como se ha explicado con todo detalle en los núms. 500, 501 y 505. Haciendo $R = 600000$ (60 kilogramos por cm.^3) y $a = \frac{2}{3} b$, deduciríamos $a = 0,11$ metros, $b = 0,165$ metros.

Empleando la tabla del núm. 507, para lo cual formaremos M_0 tomando h en decímetros ($h = 40$), hallaremos $M_0 = 3000$; el número inmediato superior de la tabla es 3048, al cual corresponden los valores $a = 11,02$ centímetros, $b = 16,5$ centímetros, próximamente iguales á los anteriores.

Si se quiere tener en cuenta la compresión Z' , se hará uso de la fórmula (28) del núm. 766, ó bien, lo que es más sencillo, al valor de a obtenido anteriormente se le aumentará la cantidad a'' dada por la fórmula $R' a'' b = Z'$ (núm. 588), en que R' es el coeficiente de trabajo de la madera por compresión. En el ejemplo anterior, si suponemos que el cabio está dispuesto en su extremo superior como indica la fig. 11 de la lám. 28, sería, aplicando la fórmula (4) precedente,

$$Z' = \frac{200 \times 0,6 \times 4^2}{2 \times 3} + 200 \times 0,6 \times 3 = 580 \text{ kilogramos.}$$

$$R' = 600000 \text{ kilogramos por m.}^2$$

$$a'' = \frac{Z'}{R' b} = \frac{580}{600000 \times 0,16} = 0,006 \text{ metros.}$$

Como vemos, el suplemento a'' que debe concederse á a por efecto de la compresión Z' es insignificante; no llega á un centímetro.

885. Cuando los cabios sean metálicos de forma tubular, ó viguetas Z sencilla ó doble, laminadas ó compuestas, de alas anchas, y en general, siempre que no sean de temer las consecuencias de la flexión lateral, se empleará la fórmula (28) del núm. 766,

$$R' = \frac{M'_0 r}{I} + \frac{Z'}{\omega} \quad (6),$$

y se determinará la escuadría por el método allí explicado y detallado en el ejemplo del núm. 769.

886. Si se quiere tomar en consideración la influencia de la flexión lateral, se hará aplicación de la fórmula (29) del núm. 766,

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{Z'}{\omega} \left(1 + B \frac{\omega l^2}{I'} \right) \quad (7),$$

del modo que se detalla en el ejemplo del núm. 769. En estas fórmulas l es la longitud del cabio, y las demás letras representan las cantidades que se citan en el núm. 766. Cuanto á Z' , se calculará por las fórmulas (3) ó (4) anteriores.

Para los efectos de la compresión Z' , el cabio se considera como pieza de bases planas, y en tal concepto se darán á B los valores correspondientes al caso I que se consignan en el ya citado núm. 766.

887. En el caso de que los cabios fuesen vigas de celosía, se calcularán las cabezas por la fórmula anterior (véase el ejemplo de los núms. 770, 771, y 772), en la cual I , I' y ω representarán entonces momentos de inercia y área de dichas cabezas. La sección de las barras de la celosía se determinará por la fórmula (2) del núm. 557, $\omega = \frac{C'_0}{2nR \cos \alpha'}$ (8), siendo α' el ángulo que forman las barras con los cordones ó cabezas del cabio. C'_0 , esfuerzo cortante máximo, es igual á $C_0 \cos \alpha$, siendo C_0 el esfuerzo cortante máximo de la pieza proyección, y α el ángulo de inclinación del cabio (núm. 762).

888. Los cabios se apoyan generalmente en varias viguetas (fig. 14, lám. 37), y en este caso se tomará para el cálculo de la escuadría la parte mn del pie, considerando como fijos los puntos m , n , etc.

El momento máximo de flexión de esta parte es $M'_0 = \frac{1}{8} P h$, siendo P la carga que corresponde á la longitud de cabio mn , y h su proyección. La compresión Z' se hallará por la fórmula (5) del núm. 883, pero tomando en cuenta todo el cabio.

En resumen: se aplicarán á la parte mn las fórmulas y procedimientos que hemos explicado en los números anteriores para los cabios apoyados tan sólo en los extremos, apreciando ó no la compresión Z' , según ya hemos visto.

889. Viguetas. — Siendo d la separación de las armaduras y v la de las viguetas, sobre cada una de éstas actúa un peso $P = p \times d \times v$ (9) ó

$P = p \times d \times \frac{v' + v''}{2}$ (10) cuando las distancias v' y v'' de la vigueta considerada á las dos inmediatas sean desiguales.

En la vigueta D (fig. 9.^a, lám. 42), el peso P se descompone en los P' y P'' , como sucedía en los listones A y B . Si los cabios DH se apoyan en el muro, queda destruída por éellos la componente P'' , y la vigueta se flexará obedeciendo á la fuerza $P' = P \cos \alpha$, siendo entonces la ecuación de resistencia

$$\frac{RI}{v} = \frac{1}{8} P' d = \frac{1}{8} P d \cos \alpha \quad (11)$$

y representando I el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje $I'I'$ (figs. 9.^a y 11, lám. 42).

El cálculo de la escuadría no ofrece dificultad alguna, y se emplearán los métodos explicados en los núms. 499 á 509, 523 y las tablas de los números 507, 508 y 527. Como el plano de flexión de la vigueta es el $F'F'$ (figura 11, lám. 42) normal á la vertiente, se deduce que en este caso debe colocarse la altura b ó mayor dimensión transversal perpendicularmente al par de la armadura.

Si no está destruída por los cabios la componente P'' , como sucede cuando éstos no existen, ó cuando no están apoyados por su extremo inferior, la vigueta se halla en el caso explicado para los listones (núms. 880 y 882), y es aplicable á éllas cuanto para éstos queda dicho.

Cuando la vigueta es de forma de doble T (fig. 11, lám. 42), la componente P'' ejerce perniciosa influencia, porque el momento de inercia I'' de la sección transversal con respecto al eje $F'F'$ es de pequeño valor. Preferible es entonces situar la vigueta de modo que el alma sea vertical (fig. 10, lám. 42); si la superficie ab de apoyo de los pesos es horizontal, no existe componente P'' , y $P' = P$, empleándose la ecuación

$$\frac{RI}{v} = \frac{1}{8} P d.$$

Esta misma ecuación puede emplearse, sin error sensible, aun cuando existan P' y P'' (fig. 12, lám. 42).

890. Armaduras articuladas. — Dos casos pueden presentarse: que las viguetas, que son las piezas que transmiten á los pares el peso de la cubierta,

estén aplicadas tan sólo á los nudos (fig. 14, lám. 37) ó á puntos intermedios (fig. 6.^a, lám. 38).

En el primer caso, todas las piezas elementales de la armadura trabajan por compresión ó por extensión, pero ninguna sufre flexión (véase núm. 802).

Si llamamos F á las fuerzas interiores de extensión ó de compresión de las diversas piezas elementales de la armadura, fuerzas que se determinan por los procedimientos de Culmann, Cremona ó Ritter, según veremos más adelante (núms. 906, 907 y 929), el cálculo de las escuadrías se hará del siguiente modo:

891. Péndolas, tirantes, pendolón. — Se hará uso de la fórmula de extensión $P = R\omega$; representa R el coeficiente de trabajo y ω el área de la sección resistente.

En el cálculo de los tirantes es preciso tener muy en cuenta el aumento de extensión que puede resultarles por los cambios de temperatura (véase núm. 925).

892. Tornapuntas, manguetas, etc. — Son piezas comprimidas según su eje, y pueden estar articuladas en sus dos extremos (m , fig. 28, lám. 26), ó solamente en su unión con los tirantes (f , fig. 27, lám. 26).

Si se emplea madera, la escuadría se determinará por la fórmula de Hodgkinson (núm. 697), afectando el segundo miembro del coeficiente $\frac{4}{7}$ cuando un extremo esté articulado (núm. 701), y del $\frac{2}{7}$ si lo están los dos (núm. 702). Será, pues,

$$F = \frac{2}{7} A' \frac{ab^3}{l^2} \dots \dots \text{articulación en los dos extremos.}$$

$$F = \frac{4}{7} A' \frac{ab^3}{l^2} \dots \dots \text{ídem en los dos extremos.}$$

La constante A' tiene los valores consignados en las fórmulas (1) del número 697, esto es, $A' = \frac{1}{10}$ de A .

También se puede aplicar la fórmula $R' = \frac{2}{7} R'\omega$ para piezas articuladas en los dos extremos, y $F = \frac{4}{7} R'\omega$ para las que lo están en uno, dando á R' los valores que contiene la tabla de Morín (núm. 696).

Finalmente, serán de útil aplicación las tablas calculadas en el núm. 711,

no olvidando que estas tablas están hechas para piezas planas, y que en el caso actual las fuerzas de compresión correspondientes á las mismas áreas de sección, han de ser multiplicadas por $\frac{2}{7}$ ó por $\frac{4}{7}$.

Cuando se emplee la fundición, la ecuación de resistencia es [(13) del número 717].

$$F = \frac{940 \omega}{1 + H \times 0,000156 \frac{l^2 \omega}{I'}}$$

siendo $H = 2$ para el caso de un extremo articulado, $H = 4$ cuando lo estén los dos, y teniendo las demás letras la significación que se especifica en el núm. 717. En el ejemplo del núm. 724 aparece el detalle de los cálculos.

Si las piezas comprimidas son de acero ó hierro, se empleará la fórmula del núm. 730,

$$R' = \frac{F}{\omega} \left(1 + \frac{B \omega l^2}{I'} \right),$$

haciendo

$$B = 0,000045 \dots \dots \text{ caso de un extremo articulado.}$$

$$B = 0,00006 \dots \dots \text{ caso de los dos extremos articulados.}$$

I' es el menor de los momentos de inercia de la sección transversal, y las demás letras tienen la representación que se consigna en el núm. 730. Para el detalle de las operaciones, véase lo que contiene el núm. 732, en la parte relativa á vigas de sección cualquiera.

893. Pares. — También están comprimidos, y se considerarán como piezas de bases planas; la longitud l , para el cálculo, será la an (fig. 14, lám. 37) comprendida entre el pie del par y el nudo n , ó la intermedia de dos nudos, pues se considera á éstos como puntos fijos para los efectos de la flexión lateral. El mayor valor de F corresponde al par inferior an , según veremos más adelante, y éste es el que se tiene en cuenta en el cálculo de la escuadría.

Se emplearán las fórmulas siguientes:

$$\text{Madera} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} F = A' \frac{ab^3}{l^2} \text{ (núm. 697).} \\ F = R' \omega, \text{ y tabla del núm. 697.} \\ \text{Tablas del núm. 711.} \end{array} \right.$$

$$\text{Hierro ó acero} \dots \dots R' = \frac{F}{\omega} \left(1 + 0,00093 \frac{\omega l^2}{I'} \right) \text{ (núm. 730 y siguientes).}$$

Conviene no olvidar que I' es el menor de los momentos de inercia de la sección transversal del par; si fuese una doble T habría que comparar los valores correspondientes á las posiciones dibujadas en las figs. 21 y 31 de la lámina 14; si se trata de una T sencilla, los relativos á las figs. 35 y 30 (lámina 14), etc.

894. Enlaces. — Las bridas, pasadores, cabezas de barras articuladas, etcétera, se calcularán del modo explicado en los núms. **239, 245 y 249.**

895. Cuando las viguetas, y por tanto las fuerzas exteriores, están aplicadas á los pares fuera de los nudos (fig. 6.^a, lám. 38), ya hemos visto en el núm. **802** que ha de descomponerse cada una de éstas en otras dos que pasen por los nudos próximos, con lo cual las piezas de la armadura estarán sometidas á las mismas fuerzas F que resultarían en el caso de que las fuerzas exteriores actuasen en los nudos, y el cálculo de su escuadría se hará por medio de las fórmulas de los números anteriores. Cuanto á los pares, son piezas flexadas y comprimidas; la compresión F se obtiene del mismo modo que las fuerzas interiores de las demás piezas, haciendo la descomposición de fuerzas exteriores antes indicada, á fin de que obren todas en los nudos, y aplicando los métodos de Culmann, Cremona ó Ritter, que más adelante detallaremos; y el momento máximo de flexión M'_0 se obtendrá, analítica ó gráficamente, recordando que es igual al M_0 de la pieza proyección (número **761**).

Considerando la parte RT de par (fig. 6.^a, lám. 38), por ejemplo, que es la que generalmente se halla en peores condiciones, para la determinación de M_0 supondremos, en beneficio de la resistencia, que se trata de una pieza apoyada en los dos extremos R y T , aun cuando no exista articulación en T (*), y llamando F' á la compresión obtenida por el diagrama ó por el cálculo, la escuadría se hallará por medio de las ecuaciones siguientes:

Pares de madera:

$$\frac{R a b^2}{6} = M'_0.$$

Si no se quiere prescindir de la compresión F' , se aumentará a con el sumando a'' , obtenido por la fórmula

$$a'' = \frac{F'}{R' \delta}.$$

(*) También se podría tomar en consideración todo el par, en la determinación de M_0 , considerándolo como pieza apoyada en dos, tres ó más puntos, tantos como nudos hay en él.

(Véase núms. **766, 883 y 884**).

Pares de hierro: forma tubular, secciones laminadas ó compuestas de alas anchas, y en general cuando no sean de temer las consecuencias de la flexión lateral (véase núms. **766 y 886**):

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{F}{\omega}.$$

Se determinará la escuadría como en el ejemplo del núm. **769.**

Pares de hierro, cuando se toma en consideración la influencia de la flexión lateral (núms. **766 y 886**):

$$R' = \frac{M'_0 v}{I} + \frac{F}{\omega} \left(1 + 0,00003 \frac{\omega l^2}{I} \right).$$

El detalle de cálculo es el que se explica en el ejemplo del núm. **769**, pero con la diferencia de que en el caso presente I' es igual á I , porque evitando las viguetas (situadas en puntos intermedios de los nudos) la flexión lateral, la flexión que puede ocasionar la compresión F' ha de operarse en el mismo plano que la debida al momento M_0 .

Pares de hierro, de forma de viga de celosía. Las cabezas ó cordones se calcularán por la fórmula anterior, en la cual I y ω representarán momento de inercia y área de la sección transversal de dichas cabezas.

La celosía se calculará de modo que resista al esfuerzo cortante C' (número **762**), empleando la fórmula (2) del núm. **557** (véase el ejemplo de los núms. **770, 771, y 772**).

896. Armaduras rígidas.—*Primer método.*—Se calculan como si fuesen articuladas, sin más diferencia que la de conceptuar las manguetas y tornapuntas, cuyos extremos están enlazados rígidamente á los demás elementos, como piezas de bases planas (fig. 26, lám. 26), y emplear en la determinación de su escuadría las fórmulas que hemos dado en el núm. **893** para los pares.

Segundo método — La armadura total se considera como una viga rígida (fig. 15, lám. 37) apoyada en C y D , y se calcula del modo explicado en los núms. **547 y 557**. Se hallará el polígono EST de los momentos de flexión y el NX de los esfuerzos cortantes.

Los pares CAD y el tirante CBD , hacen las veces de cordones superior é inferior: su escuadría se determinará por la fórmula

$$\frac{R I}{v} = M_0,$$

en que I es el momento de inercia de los cordones en la sección AB ; v es igual á $\frac{AB}{2}$, y M_0 el momento máximo LS .

Como la altura de la sección de la armadura disminuye desde el medio hacia los extremos ($AB > ab > \dots$), pudiera suceder que esta disminución fuese más considerable que la de los valores del momento de flexión M , y es conveniente comprobar si en una sección cualquiera, la ab , por ejemplo, en que el momento de flexión es cd , se verifica

$$\frac{RI}{v} > M,$$

ó, lo que es más sencillo, admitiendo la sección hallada para los pares y tirante en AB , se determinará $\frac{I}{v}$ en ab , y de la ecuación anterior se despejará el coeficiente de trabajo R , que se comparará con el admitido en el cálculo de la sección AB ; y si fuese demasiado grande se calcularían nuevas dimensiones de pares y tirantes, en la sección ab , por la fórmula anterior, asignando á R el valor conveniente.

Las piezas centrales, que forman el alma de la viga, se calcularán por la fórmula (2) del núm. 557. En la sección ab , por ejemplo, el esfuerzo cortante $C'_0 = ef$; y puesto que $n = 1$, pues las barras se cortan una vez en la vertical, el área resistente ω de la sección trasversal de cada una sería dada por la fórmula

$$\omega = \frac{C'_0}{2R \cos \alpha};$$

α es el ángulo que forman las barras con la vertical.

Expuestos ya en los números anteriores los detalles de cálculo de las piezas elementales de una armadura, resta sólo, para que el problema quede resuelto, determinar las fuerzas interiores F de compresión ó extensión de cada pieza, pero antes es necesario el conocimiento de las fuerzas exteriores, y, por lo tanto, empezaremos por fijar, para cada caso, el peso p por metro cuadrado de cubierta.

DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS EXTERIORES

897. Cálculo del peso total p por metro cuadrado de vertiente. — Las armaduras destinadas á soportar las cubiertas de los edificios, se encuentran sometidas á tres clases de cargas:

1.^a Peso de la cubierta y de la armadura (t kilogramos por metro cuadrado de vertiente ó plano inclinado de los que forman la cubierta). Esta carga obra permanentemente.

2.^a Peso de la nieve (n kilogramos por metro cuadrado de cubierta); es carga que actúa accidentalmente.

3.^a Presión vertical del viento (v kilogramos por metro cuadrado de cubierta), que obra accidentalmente, como la anterior (*).

La suma de estas cargas da un peso p por metro cuadrado de cubierta, $p = t + n + v$, que es de interés conocer, pues sirve de base á los cálculos que tienen por objeto la determinación de las fuerzas interiores de la armadura, del mismo modo que en el cálculo de las vigas rectas partíamos del conocimiento de las fuerzas exteriores ó cargas. De la formación de los valores de t , n , v y p , nos ocuparemos en los números siguientes.

898. Tabla de pesos de materiales para cubiertas.

CUBIERTAS DE ARCILLA COCIDA		Kilogramos.
<i>Teja ordinaria:</i>	el millar.....	2700 á 2800
»	Un metro cuadrado de cubierta formando canales y cobijas.....	60 á 70
»	Un cubo de barro para sentar las tejas.	20
<i>Teja ordinaria:</i>	Barro y cascote para el forjado de un metro cuadrado de cubierta.....	50 á 60
»	Peso total por metro cuadrado, de teja, cascote y barro.....	110 á 130
<i>Teja plana:</i>	Catalana, de 0 ^m ,44 × 0 ^m ,21: el millar.	3000 á 3300
»	Un metro cuadrado de cubierta.....	50
»	Teja de Madrid: el millar.....	2000 á 2300
»	Un metro cuadrado.....	46

CUBIERTAS METÁLICAS

Peso del metro cuadrado de cubierta.

<i>Plomo:</i>	planchas del núm. 2.....	12,50
---------------	--------------------------	-------

(*) Otros pesos accidentales pueden cargar sobre las armaduras: tales son los de los operarios y herramientas empleadas en la colocación y reparaciones de la cubierta; pero suponemos que estas operaciones no han de practicarse en casos de nieve y viento fuerte, y los pesos citados son menores que $n + v$.

	Kilogramos.
<i>Plomo:</i> planchas del núm. 3.....	18,73
» ídem del núm. 4.....	25,00
<i>Zinc.</i>	
<i>Sistema de listones.</i>	
Chapa del núm. 11.....	5
» » 12.....	6
» » 13.....	7
» » 14.....	8
<i>Sistema de rombos.</i>	
Chapa del núm. 9.....	4
» » 10.....	4,5
» » 11.....	5
» » 12.....	6
<i>Sistema de regueras.</i>	
Chapa del núm. 15.....	8
» » 16.....	9
» » 17.....	11
» » 18.....	12
Chapas ondeadas núm. 14.....	9
» » » 15.....	10
<i>Palastro galvanizado:</i> Chapa ondeada (según el espesor).	5,5 á 20
» Chapa plana, de 2 milímetros...	16
<i>Cobre:</i> Chapa de 0,8 milímetros.....	8

CUBIERTA DE PIZARRA

Pizarra española. — Peso del millar.

Núm. 1.....	3550
» 2.....	3250
» 3.....	2550

	Kilogramos.
Números 4.....	2500
» 5.....	1850
» 6.....	1850
» 7.....	1460
» 8.....	950
» 9.....	680
» 10.....	400

Peso del metro cuadrado de cubierta.

Números 1 á 5.....	37
» 6.....	35
» 7 y 8.....	30
» 9.....	34
» 10.....	31

OTRAS CLASES DE CUBIERTAS

Peso del metro cuadrado.

<i>Vidrio:</i> sencillo (incluyendo mastic, etc.).....	5,50
» semidoble.....	7
» doble (de 4 milímetros).....	10
» estriado.....	15
<i>Asfalto.</i>	20 á 25
<i>Fieltro asfaltado.</i>	8
<i>Cartón embreado.</i>	4

899. Relación entre la flecha f (*) y la luz l de una armadura, para diversas inclinaciones de los pares con el horizonte, contadas en número entero de grados sexagesimales.

$$\text{Valor de } \frac{f}{h} \dots\dots\dots \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}.$$

$$\text{Inclinación en grados.. } 45^\circ, 34^\circ, 27^\circ, 22^\circ, 18^\circ, 16^\circ, 14^\circ, 12^\circ, 11^\circ.$$

(*) También recibe el nombre de *montea*; es la magnitud de la perpendicular bajada á la horizontal que pasa por los pies de los pares desde el extremo superior de éstos.

900. Inclinación de las vertientes según la naturaleza de la cubierta.

CUBIERTA	INCLINACIÓN	
	$\frac{f}{l}$	Grados.
Cubiertas metálicas.....	$\frac{1}{7}$ á $\frac{1}{5}$	16 á 22
Fieltro y cartón.....	$\frac{1}{7}$ á $\frac{1}{5}$	16 á 22
Vidrio.....	$\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{5}$	11 á 22
Teja ordinaria (lomuda).....	$\frac{1}{5}$ á $\frac{1}{3}$	22 á 34
Teja plana.....	$\frac{1}{3}$ á $\frac{1}{2}$	34 á 45
Pizarra.....	$\frac{1}{3}$ á $\frac{1}{2}$	34 á 45

901. Peso propio t por metro cuadrado de vertiente, incluyendo el peso de la cubierta y el de la armadura (pares, viguetas, cabios, enlisonado, enlatado, etc.).

CUBIERTA	PESO DEL M. ² EN KILOGRAMOS CUANDO HAY	
	Armadura de madera ó de madera y hierro.	Armadura de hierro.
Teja plana.....	100	70
» árabe ó lomuda.....	160	130
Pizarra.....	75	50
Zinc ó palastro.....	40	25
Cobre.....	70	45
Vidrio.....	80	60
Asfalto.....	60 á 100	»
Cartón.....	30	»

902. Peso de la nieve. — La densidad de la nieve se estima en $\frac{1}{8}$ de la

del agua, es decir, que el peso del metro cúbico será $\frac{1000}{8} = 125$ kilogramos. En un metro cuadrado de vertiente de inclinación α° con el horizonte, una capa de nieve de a metros de altura tiene $1 \times \cos \alpha \times a$ de volumen (área de la sección recta multiplicada por la arista) y $n = 125 a \cos \alpha$ kilogramos de peso; de modo que la carga adicional debida á la nieve, por metro cuadrado de vertiente, será tanto mayor cuanto menor sea α .

Observando que $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} l}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2}}}$ y sustituyendo

este valor en la fórmula anterior que da el peso, encontraremos, para diversos valores de $\frac{f}{l}$ y de altura a de nieve, los siguientes de n :

RELACIÓN $\frac{f}{l}$	PESO n DE LA CAPA DE NIEVE POR M. ² DE VERTIENTE PARA UNA ALTURA a DE			
	0,10 metros.	0,20 metros.	0,30 metros.	0,40 metros.
$\frac{1}{2}$	8,80	17,60	26,40	35,20
$\frac{1}{3}$	10,40	20,80	31,20	41,60
$\frac{1}{4}$	11,08	22,16	33,24	44,32
$\frac{1}{5}$	11,68	23,36	35,04	46,72
$\frac{1}{6}$	11,84	23,68	35,52	47,36
$\frac{1}{7}$	12,00	24,00	36,00	48,00
$\frac{1}{8}$	12,08	24,16	36,24	48,32
$\frac{1}{9}$	12,16	24,32	36,48	48,64
$\frac{1}{10}$	12,32	24,64	36,96	49,28

903. Efecto del viento. — La presión que el viento ejerce, sobre una superficie perpendicular á su dirección, es por metro cuadrado, $r = 0,113 V^2$, r expresa kilogramos, y V representa la velocidad del viento en metros por segundo.

Los valores de V son dados por la tabla siguiente, que contiene también la presión r correspondiente:

CLASE DE VIENTO	VELOCIDAD V en metros por 1".	PRESIÓN por metro cuadrado r en kilogramos.
Viento fresco	4 á 6	2 á 4
» fuerte	10 á 12	12 á 17
» muy fuerte	15 á 18	26 á 38
» impetuoso	18 á 22	38 á 56
Tempestad	22 á 26	56 á 78
Tempestad violenta	26 á 32	78 á 119
Huracán	36 á 40	150 á 180
Gran huracán	45	235

Se admite que la dirección del viento forma un ángulo de 10° con el horizonte (D , fig. 11, lám. 37): se trata de conocer la presión vertical bh que producirá en una superficie plana inclinada α grados con respecto á la horizontal AH .

Para medir la presión sobre AB , hay que proyectar esta superficie normalmente á la dirección del viento, y multiplicar por r la proyección.

Así, pues,

$$P = \text{presión sobre } AB = r \times CF = 0,113 V^2 \times CF.$$

Pero

$$CF = BE = \frac{AB}{\text{sen } (\alpha + 10^\circ)};$$

luego

$$P = \frac{0,113 V^2}{\text{sen } (\alpha + 10^\circ)} \times AB.$$

La presión q por cada metro cuadrado de superficie AB se obtendrá dividiendo por AB el valor anterior. Será, pues,

$$q = \frac{0,113 V^2}{\text{sen } (\alpha + 10^\circ)}.$$

Si descomponemos $q = ah$ vertical y tangencialmente á AB , y llamamos v á la componente vertical bh , tendremos, por el triángulo abh , y puesto que $abh = 90^\circ - \alpha$ y $bah = \alpha + 10^\circ$,

$$\frac{v}{q} = \frac{\text{sen } (\alpha + 10^\circ)}{\text{sen } (90^\circ - \alpha)},$$

de donde

$$v = q \frac{\text{sen } (\alpha + 10^\circ)}{\text{cos } \alpha},$$

ó

$$v = \frac{0,113 V^2 \text{ sen}^2 (\alpha + 10^\circ)}{\text{cos } \alpha};$$

v es, en kilogramos, la presión vertical que causa el viento por cada metro cuadrado de vertiente.

Admitiremos para el cálculo una velocidad del viento, máxima, de 32 metros por 1"; cierto es que las hay mayores, pero hay que tener en cuenta que la presión v hemos de sumarla con la que produce una carga de nieve; y para valores de V mayores que 32 metros, no es de suponer que pueda mantenerse la capa de nieve sobre la cubierta. Siendo $V = 32$, la presión vertical v por metro cuadrado de cubierta tiene, para valores diferentes de α , ó de la relación $\frac{f}{l}$, los que contiene el siguiente cuadro:

RELACIÓN $\frac{f}{l}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Presión v por metro cuadrado de cubierta en kilogramos.	107	65	45	34	27	23	19	17	15

904. Peso total p por metro cuadrado de cubierta. — Sumando t , n y v , obtendremos los valores del peso p total por metro cuadrado de cubierta que

han de servir de base al cálculo de las armaduras. En el sumando n suponemos que el espesor de la capa de nieve es de 0,30 metros, cantidad muy suficientemente grande en nuestro clima; por lo demás, fácil es alterar el valor de este sumando, así como el de v y obtener el de p (*).

CLASE DE CUBIERTA	RELACIÓN $\frac{f}{l}$ ENTRE LA FLECHA Y LA LUZ								
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
ARMADURA DE MADERA ó DE MADERA Y HIERRO									
Teja plana.....	230	200	180	»	»	»	»	»	»
» árabe ó lomuda.....	290	260	240	230	220	»	»	»	»
Pizarra.....	220	180	150	140	»	»	»	»	»
Zinc ó palastro.....	170	140	120	110	100	100	100	90	90
Cobre.....	210	170	150	140	130	130	130	120	120
Vidrio.....	220	180	160	150	140	140	140	130	130
Asfalto.....	200	160	140	130	120	120	120	110	110
Cartón.....	230	200	180	170	160	160	160	150	150
160	130	110	110	90	90	90	90	80	80
ARMADURA DE HIERRO									
Teja plana.....	200	170	150	»	»	»	»	»	»
» árabe ó lomuda.....	260	230	210	200	190	»	»	»	»
Pizarra.....	180	150	130	120	110	110	110	100	100
Zinc ó palastro.....	160	120	100	90	90	80	80	80	80
Cobre.....	180	140	120	110	110	100	100	100	100
Vidrio.....	190	160	140	130	120	120	120	110	110

(*) Hemos hecho terminar en cero todos los números de la tabla, tomando por defecto ó por exceso la cifra de las decenas.

2. CÁLCULO DE LAS FUERZAS

INTERIORES

MÉTODO DE CULMANN

905. Aplicando á la fig. 1.^a de la lám. 43 el método explicado en los números 807 y 808, se hallarán las tensiones de todas las piezas de la armadura. Supongamos que se quieren encontrar las fuerzas que obran en ab , as , rs ; el orden de operaciones es el siguiente:

Determinación de la resultante de las fuerzas exteriores 8 y 1, situadas á la izquierda del plano XX . La resultante pasará por A' , punto de encuentro de los lados del polígono funicular DE , de , y tendrá por valor $8 - 1 = RV$.

Unión del punto f' de intersección de la resultante y de la barra as con el Q de encuentro de las otras dos barras ab y rs .

Descomposición de $f'd' = RV = 8 - 1$ en las dos direcciones Qf' y $f's$. La componente $d'h'$, que tiene la dirección $d'h'$ puesto que la resultante se dirige de d' á f' , es la fuerza relativa á la barra as ; es de *extensión* porque se separa del plano XX .

Descomposición de $h'f'$ en las dos direcciones ab , rs : resulta la pieza rs extendida por la fuerza $t'f'$, y la ab comprimida por la $h't'$.

Del mismo modo se hallarán las compresiones y extensiones de las demás piezas de la armadura.

MÉTODO DE CREMONA

906. El método de Cremona ó de las *figuras recíprocas*, explicado en el núm. 812, es aplicable á las armaduras, como á todo entramado. Recordaremos la clasificación de piezas *principales* y *accesorias*, que hicimos en el

núm. 817, para no tener en cuenta más que las primeras al construir los diagramas.

Con arreglo al convenio establecido en el núm. 812, representaremos con trazo grueso las piezas comprimidas y las líneas del diagrama que representan fuerzas de compresión, y con trazo delgado las piezas extendidas y las fuerzas de extensión.

Se dibujará la armadura, representando las piezas por sus ejes, con arreglo á una cierta escala de longitudes (s milímetros por 1 metro) que servirá también para fijar la posición del polo cuando sea necesario construir el polígono funicular para determinar las reacciones de los apoyos ó los momentos de flexión en los pares. Para la construcción del diagrama de fuerzas, se hará uso de una *escala de fuerzas* á razón de m kilogramos por milímetro.

El cálculo de las fuerzas exteriores es sencillo: sea $BCLEH$ una proyección paralela al plano de una de las vertientes (fig. 7.^a, lám. 42); BC, DE, HL son las cerchas colocadas, respectivamente, á las distancias $BD = d'$, $DH = d''$; y CL, MR, NS , las viguetas que distan entre sí las cantidades $LR = v'$, $RS = v''$. En el nudo A de la armadura DE , carga el peso del rectángulo $abcd$ formado con líneas equidistantes de las viguetas y armaduras contiguas; si llamamos p al peso por metro cuadrado de vertiente, en el nudo A actuará una fuerza P igual á área de $abcd \times p$, ó

$$P = p \times \frac{v' + v''}{2} \times \frac{d + d''}{2}.$$

Si $v' = v'' = v$ y $d' = d'' = d$, será $P = p \times v \times d$.

907. Cuando las viguetas no descansan en los nudos, sino en puntos intermedios del par (fig. 1.^a (a), lám. 39, y fig. 6.^a, lám. 38), se determinará analítica ó gráficamente la carga que transmiten al nudo próximo, teniendo en cuenta que la presión que cada vigueta causa en el par está representada por $p \times \frac{v' + v''}{2} \times \frac{d' + d''}{2}$ ó por $p \times v \times d$, según que las distancias

entre viguetas y entre las armaduras sean iguales ó desiguales. Si se quiere determinar gráficamente la fuerza exterior del nudo T , por ejemplo (fig. 6.^a, lám. 38), consideraríamos RT como pieza apoyada en sus extremos y sometida á la acción de los pesos a, b y c ; construido el polígono de fuerzas SN y el funicular $ABCDE$, y trazando OH paralela á la línea final AE , será HN la reacción en T (núm. 413), ó, lo que es lo mismo, la presión que las viguetas a, b y c ocasionan en T .

Haciendo igual construcción en TV con las fuerzas a', b', c' , etc., hallaríamos que $H'S'$ es la presión en T originada por ellas. En definitiva, la fuerza exterior en el nudo T , que hemos de tomar en consideración para la construcción del diagrama, es $R = HN + H'S'$. El par RT sufre un momento máximo de flexión $M_0 = ZC \times k$ (núm. 416), y además la compresión F que resulte de la construcción del diagrama de fuerzas.

En las armaduras de linterna, ya estén los montantes de éstas situados en los nudos ó fuera de ellos, es fácil, siguiendo los métodos expuestos, determinar la fuerza aplicada á los nudos.

Las fuerzas aplicadas á los nudos serán numeradas de izquierda á derecha, incluyendo después las reacciones de los apoyos que llevarán los últimos números (véase, por ejemplo, la fig. 5.^a (a), lám. 40).

Formaremos los diagramas de fuerzas á la izquierda del polígono de fuerzas exteriores, puesto que éstas se hallan aplicadas á los pares, piezas que hacen las veces de *cordón superior*, cumpliendo la regla del núm. 828.

Las reacciones de los apoyos serán en general iguales entre sí, é igual cada una á la mitad de la suma de fuerzas exteriores $1 + 2 + \dots$, porque las armaduras son generalmente simétricas, geoméricamente, con respecto al plano vertical que pasa por la hilera, y están siméricamente cargadas. Cuando esta simetría no exista, las reacciones se determinarán, ya analíticamente (ecuaciones (1) del núm. 310), ya gráficamente, por medio del polígono funicular (núm. 413).

908. Armaduras á una sola agua (fig. 6.^a (c), lám. 39).

Datos:

Luz $l = AD = 4$ metros.

Flecha $f = CD = 2$ metros.

Separación de armaduras $= d = 3$ metros.

Peso por metro cuadrado de cubierta $= 180$ kilogramos.

Escala de longitudes $= 0,01$ metros por 1 metro.

Escala de fuerzas $= 40$ kilogramos por milímetro.

1.^o Las viguetas descansan en los nudos, es decir, en los puntos A, B, C .

En B actuará la fuerza $P_1 = 1$, que será igual á $p \times \frac{AB + BC}{2} \times d = 180 \times 2,2 \times 3 = 1188$ kilogramos.

En C obrará $P_2 = p \times \frac{BC}{2} \times d$, y comprimirá la pieza CD ; el par BC

no sufrirá esfuerzo alguno, y la armadura quedará reducida, para el cálculo, al par inferior AB , tornapunta BD y tirante AD , sometidos á la acción de la fuerza $P_1 = 1$ aplicada á B . Es el mismo caso que el de la armadura ABD (fig. 6.^a (a)), cuyo diagrama de fuerzas está dibujado en la fig. 6.^a (b); obtendremos:

AB (4).....	1307 kilogramos (compresión).
BD (8).....	ídem. ídem.
AD (5).....	1188 ídem. (extensión).

2.º La cubierta, por intermedio de viguetas ó enlistonados, entablados, etc., carga sobre todo el par ABC .

El tornapunta BD y el tirante AD estarán sometidos á las fuerzas antes encontradas. El par ABC se hallará comprimido por una fuerza $F = 4 = 1307$ kilogramos, como en el caso precedente, y además á la flexión que le produce la carga uniformemente repartida $P = p \times AC \times d \times 3 = 180 \times 4,4 \times 3 = 2376$ kilogramos. El par ABC puede considerarse como una viga apoyada en tres puntos, en cuyo caso su momento máximo de flexión será $M_0 = \frac{1}{32}$

$P \times AD$ (núm. 761), ó bien, como subdividido en las porciones AB y BC , suponiendo que cada una de ellas está apoyada en sus extremos. Entonces la parte AB tendrá un momento máximo de flexión igual al de su proyección, esto es, $M'_0 = \frac{1}{8} \times \frac{P}{2} \times AE$. En obsequio á la brevedad, se acepta esta última hipótesis cuando los puntos de apoyo intermedios son numerosos; en el caso actual los dos momentos máximos M_0 y M'_0 son iguales.

909. Armadura compuesta de dos pares y tirante (fig. 6.^a (a) y 6.^a (b), lám. 39). — El polígono de fuerzas exteriores se reduce en este caso á la fuerza $1 = cd$; de modo que las reacciones serán $2 = da$ y $3 = ac$.

El triángulo de fuerzas relativo al nudo A es acb , de origen a , construido sobre la fuerza conocida 3 , obteniéndose $cb = 4$ (compresión del par) y $bc = 5$ (extensión del tirante). Como comprobación se formarán los triángulos cbd y dab correspondientes á los nudos B y D .

Si hubiese la péndola BC , al construir sobre ab como base el polígono de fuerzas correspondiente al nudo C , habrá que trazar por b la recta mn paralela á BC , y por el origen a la recta ab paralela á AC . El polígono se reduce á la recta ab y resulta cero la fuerza 6 , lo que dice que la péndola BC es superflua, como *pieza principal*, y solamente se podrá aceptar como *accesoria* para suspender el tirante AD .

La péndola BC será pieza principal cuando esté aplicada en C una fuerza 2 (figs. 9.^a (a) y 9.^a (b), lám. 39), ya directamente, ya como resultante de otras fuerzas aplicadas al tirante; en el primer caso el tirante se halla sometido á extensión, y en el segundo á extensión y á flexión. Sumando en mn las dos fuerzas exteriores $md = 1$ y $dn = 2$, las reacciones iguales 3 y 4 son $na = 3$ y $am = 4$. Construyendo los polígonos de fuerzas referentes á los nudos A, B, C y D , hallamós:

NUDOS	POLÍGONOS DE FUERZAS	ORICEN	PIEZAS	
			Comprimidas.	Extendidas.
A	$amba$	a	BA	AC
B	$bm dr b$	b	AB y DB	BC
C	$dn ts d$	d	»	CA y CD

910. Armadura de dos pares y tirante ligados por sus manguetas ab, cd , etc. (fig. 5.^a, lám. 38). — Las correas, aplicadas á los pares, producen en ellos flexión, y también en el tirante. Fijemos la atención en la parte ABE de armadura: las fuerzas a y c producen en B una compresión que es fácil determinar por medio del polígono funicular, á cuyo efecto haremos $fh = a$, $hl = c$; tomaremos el polo O á k unidades de distancia de fl , trazaremos el polígono funicular correspondiente $xzpy$ y recta Om paralela á la línea final xy , con lo cual obtendremos en lm la presión en B , y mf igual á la presión en A sobre el muro ó apoyo de la armadura, y por eso prescindiremos de ella.

Las fuerzas c' y a' producen en B otra presión igual á lm ; luego la presión final será $2 \times lm$. Pero como las fuerzas $a, c, a'; c'$ ejercen su acción también sobre el tirante por intermedio de las manguetas ab, cd , etc., suponiendo que se distribuyan por mitad entre el tirante y el par, resultará que la fuerza total se repartirá á su vez por mitades en B y en E' , extremos del pendolón; de modo que para el cálculo hemos de contar con una fuerza $1 = lm$ en B' y con la fuerza $2 = lm$ en E' .

La reacción 4 será igual á la semisuma de 1 y 2 , ó bien igual á una cualquiera de estas fuerzas. El polígono correspondiente al nudo A' es srn , y el relativo al nudo E' el $stun$; como el triángulo srn se construye sobre la reacción $sr = 4$ como base, y ésta es la misma, que existan ó no manguetas ab, cd , se deduce que la extensión del tirante AE es en ambos casos de igual valor, ns . La diferencia consiste en que las manguetas crean en E' la

fuerza 2, que obliga á colocar un pendolón BE , cuya extensión está medida por la línea $nt = 2$.

El polígono funicular $xzpy$ da los momentos de flexión del par AB y del tirante AE ; si se recuerda que las fuerzas a y c se dividen en dos partes iguales para actuar sobre par y tirante, se deduce que las ordenadas zz', pp' , del polígono funicular construído haciendo $fh = a$ y $hl = c$, son de valor duplo del verdadero. Así, pues, el momento de flexión del tirante en b ó del par en a es $\frac{zz' \times k}{2}$, siendo k el número de unidades de longitud á que se

ha colocado de fl el polo O (núm. 416).

Resumiendo: para el cálculo de la escuadría de las piezas de la armadura, tendremos los datos siguientes:

Para AB : compresión según su eje, $F = nr$; momento máximo de flexión, $M_0 = \frac{zz' \times k}{2}$.

Tirante AE : extensión $F = ns$; momento máximo de flexión $M_0 = \frac{zz' \times k}{2}$.

Pendolón BE : extensión $F = nt = 2$.

Manguetas. $\left\{ \begin{array}{l} ab: \text{ comprimida por } F = a. \\ cd: \text{ comprimida por } F = c. \end{array} \right.$

911. Armadura compuesta de pares, tirante y puente (fig. 4.^a, lámina 40). — En esta armadura y en todas las demás en que haya simetría de líneas y fuerzas exteriores con respecto á la vertical que pasa por la hilera, no construiremos más que la mitad del diagrama de fuerzas interiores.

Para no repetir los detalles de construcción de los diagramas, nos referimos á cuanto sobre este particular hemos dicho en el núm. 812 y siguientes, y nos limitaremos á indicar cuáles son los polígonos parciales y las fuerzas interiores de cada pieza.

En la armadura á que hacemos referencia [figs. 4.^a (a) y 4.^a (b)], hallamos:

NUDOS	Fuerzas conocidas	ORIGEN del polígono	Polígono.	FUERZAS DE	
				Compresión.	Extensión.
A	$5 = ac$	a	acb	$6 = cb(BA)$	$7 = ba(AE)$
B	$6 = bc$ y $1 = cd$	b	$bcdeb$	$9 = de(CB)$ $8 = eb(BD)$	» »

912. Armadura compuesta de pares, tirante, tornapuntas y pendolón (fig. 7.^a (a) y 7.^a (b), lám. 39):

NUDOS	Fuerzas conocidas.	ORIGEN del polígono.	Polígono.	FUERZAS DE	
				Compresión.	Extensión.
A	$5 = ab$	a	$abca$	$6 = bc(DA)$	$7 = ca(AE)$
D	$6 = cb$ $1 = bm$	c	$cbmec$	$9 = me(CD)$ $8 = ec(ED)$	» »
C	$9 = em$ $2 = mh$	e	$emhde$	$11 = hd(FC)$	$10 = de(CE)$

913. Puede suceder que las fuerzas aplicadas á los nudos sean desiguales. Supongamos (figs. 1.^a (a) y 1.^a (b), lám. 38) que

$$1 = 500 \text{ kilogramos, } 2 = 450 \text{ y } 3 = 400.$$

Hemos tomado para la escala de longitudes 10 milímetros por metro, y para la de fuerzas 25 kilogramos por milímetro. Construyendo el polígono funicular $L M N R S$ y trazando $O t$ paralela á LS , hallamos: reacción $4 = dt = 700$ kilogramos; reacción $5 = ta = 650$ kilogramos.

NUDOS	POLÍGONOS	FUERZAS DE	
		Compresión, kilogramos.	Extensión, kilogramos.
A	tam	$6 = 1225$	$7 = 1000$
B	$manm$	$8 = 850$ $9 = 415$	» »
C	$nbcen$	$12 = 850$	$10 = 525$
H	$tmneht$	$11 = 325$	$13 = 935$
D	$ecdhe$	$14 = 1135$	»

914. Tipos alemán y suizo.

FIGURAS	NUDOS	FUERZAS conocidas	ORIGEN del polígono.	POLÍGONO	FUERZAS DE	
					Compresión.	Extensión.
6. ^a (a) y 6. ^a (b) lám. 40	A	5 = ac	a	acba	6 = cb(BA)	7 = ba(AS)
	B	6 = bc	b	bcdeb	9 = de(CB)	»
		1 = cd			8 = eb(SB)	»
C	9 = cd 2 = dm	e	edmne	11 = mn(CR)	10 = ne(CS)	
3. ^a (a) y 3. ^a (b) lám. 40.	A	5 = ae	a	aeba	6 = eb(BA)	7 = ba(AD)
	B	6 = be	b	bedcb	9 = dc(CB)	»
		1 = ed			8 = cb(DB)	»
C	9 = cd 2 = dm	c	edmnc	11 = mn(CR)	10 = nc(CD)	

Como variedades de los tipos anteriores, pueden presentarse los siguientes, en los que los pares presentan tres ó más divisiones (cuatro ó más nudos):

FIGURAS	NUDOS	POLÍGONOS	ORÍGENES	OBSERVACIONES
2. ^a (a) y 2. ^a (b), lám. 40.	A	acba	a	9 = ab 13 = af
	B	bedgb	b	
	C	abgfa	a	
	D	fgdhrf	f	
5. ^a (a) y 5. ^a (b), lám. 40.	E	rhmnr	r	12 = ab 15 = af 19 = ha
	A	acba	a	
	B	bcigb	b	
	C	abgfa	a	
	D	fgildf	f	
	E	afdha	a	
F	hdlrch	h		
L	ermne	e		

FIGURAS	NUDOS	POLÍGONOS	ORÍGENES	OBSERVACIONES
4. ^a (a) y 4. ^a (b), lám. 41.	A	aeba	a	
	B	behdb	b	
	C	dhlcd	d	
	D	clmnc	c	
7. ^a (a) y 7. ^a (b), lám. 41.	A	acba	a	12 = ab 15 = ef
	B	bchdb	b	
	C	abdfa	a	
	D	fdhlgf	f	
	E	glæg	g	
	F	eamre	e	

915. Tipo inglés. — En las armaduras de este tipo están combinadas barras verticales (péndolas) con barras inclinadas hacia el medio. El tirante puede ser horizontal (fig. 7.^a (a), lám. 40), ó quebrado (fig. 10, lám. 38).

FIGURAS	NUDOS	POLÍGONOS	ORÍGENES	OBSERVACIONES
7. ^a (a) y 7. ^a (b), lám. 40.	A	acba	a	12 = ab 15 = af 19 = ah
	B	bcdeb	b	
	C	abefa	a	
	D	fedrif	f	
	E	afiha	a	
	F	hirsth	h	
	G	tsmnt	t	

14 = fe, 18 = hi, 16 = fi, 20 = ht, 23 = mn.

El diagrama correspondiente á la fig. 10 (lám. 38), solamente se diferencia de la fig. 7.^a (b) en que la línea ab es inclinada.

916. Tipos franceses.

FIGURAS	NUDOS	POLÍGONOS	ORÍGENES	OBSERVACIONES
Armadura mansar- da ó quebrantada, figs. 4. ^a (a) y 4. ^a (b), lám. 38.	A	<i>r a f r</i>	<i>r</i>	11 = h f
	B	<i>f a b h f</i>	<i>f</i>	
	C	<i>h b c m h</i>	<i>h</i>	
	D	<i>m c d n m</i>	<i>m</i>	
Tipo Polonceau sin mangueta, 1. ^a (a) y 1. ^a (b), lám. 41 ...	A	<i>a c b a</i>	<i>a</i>	
	B	<i>a b d a</i>	<i>a</i>	
	C	<i>d b c t m d</i>	<i>d</i>	
Tipo Polonceau sen- cillo de tirante quebrado, 2. ^a (a) y 2. ^a (b), lám. 41 ...	A	<i>a c b a</i>	<i>a</i>	
	B	<i>b c h d b</i>	<i>b</i>	
	C	<i>a b d e a</i>	<i>a</i>	

Las figs. 5.^a (a) y 5.^a (b) de la lám. 41, se refieren á una armadura Polonceau sencilla, de tirante horizontal; el diagrama [fig. 5.^a (b)] se construye de igual modo que el de la fig. 2.^a (b).

La armadura Polonceau sin mangueta (fig. 1.^a (a), lám. 41), exige que el tirante *ABSH* sea quebrado. Si fuese recto (figs. 1.^a (a) y 1.^a (b), lám. 40), se vería por el diagrama que los tirantes inclinados **6** y **8** son inútiles, como piezas principales, y solamente pueden admitirse como piezas accesorias. La fig. 3.^a (a) (lám. 41) representa una armadura Polonceau reforzada, de tres manguetas en cada par, y tirante quebrado *AESH*.

No ofrece dificultad alguna la formación del diagrama [fig. 3.^a (b)] en los nudos *A, B, C*; pero á partir de aquí aparece una indeterminación que en realidad no debe existir, puesto que siendo el número de lados $l = 27$ y el de nudos $n = 15$, se verifica $l = 2n - 3$, y por consecuencia la figura es estrictamente indeformable y no tiene líneas superfluas (núm. 798). Sin embargo, si del nudo *C* pasamos al *D*, nos son conocidas las fuerzas **13** (par), **14** (tirante inclinado) y **2** (fuerza exterior), y desconocemos tres fuerzas que son las **17** (par), **18** (tirante) y **16** (mangueta); y en el nudo *E* resulta haber tres incógnitas (**16**, **19** y **23**), y una sola fuerza conocida (**15**); no podemos, pues, en ninguno de los nudos *D* y *E*, construir el polígono de fuerzas.

Para resolver el problema emplearemos el método de Culmann, y á este efecto trazaremos un plano *XX* que corte á las barras *LM* (**21**), *FM* (**22**) y

ES (**23**), y determinaremos estas tres fuerzas (núm. 808). Conocida la fuerza **23** se podrá construir la figura recíproca del nudo *E*, porque solamente serán incógnitas las dos fuerzas **16** y **19**, y sucesivamente las de los nudos *D, L*, etc.

Otro método gráfico, muy sencillo, puede seguirse para la determinación de la fuerza **23** (tirante *ES*). La armadura (fig. 3.^a (a), lám. 41) puede considerarse formada de dos pares *AEM, MSH*, que son dos vigas armadas, y un tirante horizontal *ES*.

Si cortamos la armadura por un plano vertical *Mc* (fig. 8.^a, lám. 41) y establecemos el equilibrio de la mitad de la izquierda, habremos de considerar las siguientes fuerzas:

Reacción horizontal *MN* del par superior.

Fuerza de extensión *Ec* del tirante *ES* (fuerza **23**).

Resultante *Nh* de las fuerzas exteriores **1, 2** y **3** que obran sobre el par, ó sea $R = 1 + 2 + 3$, y que en el caso de ser iguales dichas fuerzas actuará en el punto medio *b*. Si fuesen desiguales, se determinaría gráficamente la posición de *R* (núm. 410).

Reacción *Aa* del apoyo *A*, que es igual á *R* y de signo contrario.

Las dos fuerzas *Aa* y *R* forman un par cuyo brazo de palanca es *ab*; y si el equilibrio ha de existir, han de formar otro par las fuerzas horizontales *MN* y *Ec = 23*, es decir, que la fuerza **23** es igual en valor absoluto á la reacción *MN* del apoyo superior, y se podrá determinar, según hemos demostrado en el núm. 746, prolongando *MN* hasta que encuentre en *N'* á *R*, uniendo *N* y *A* y construyendo el triángulo *Nhd* en que $Nh = R$; la magnitud *dh* será el valor de la reacción *MN*, y, por lo tanto, de la fuerza de extensión (**23**) del tirante *ES* (*).

Conociendo la fuerza **23** (figs. 3.^a (a) y 3.^a (b), lám. 41) podremos construir el polígono *bmscb* correspondiente al nudo *E*, á cuyo efecto trazaremos *ms* paralela á *DE* (**16**) y *cs* paralela á *FE* (**19**).

Cuando hay simetría de líneas y de fuerzas respecto á la vertical de la hilera, no son necesarias estas construcciones auxiliares, porque entonces las fuerzas **14** (*DC*) y **18** (*DF*) son iguales. Las rectas *hx, lr* [fig. 3.^a (b)] se limitarán por la *xr*, prolongación de *au*; se trazará *rc* paralela á *EF* (**19**)

(*) También hubiera podido determinarse **23** por la ecuación siguiente que expresa la igualdad de momentos de los dos pares de fuerzas *Aa, R* y *MN, 23*:

$$23 \times Nb = R \times ab$$

$$23 = \frac{R \times ab}{Nb}$$

hasta su encuentro con la horizontal bc , y ms paralela á DE (16), y como comprobación ha de ser xs paralela á DF .

Todo lo anterior es aplicable á la armadura fig. 6.^a (a) (lám. 41) que únicamente se diferencia de la 3.^a (a) en que el tirante ASH es recto. El diagrama de fuerzas está dibujado en la fig. 6.^a (b).

917. La fig. 1.^a (a) de la lám. 42 es una variación de la armadura Polonceau dibujada en la fig. 2.^a (a) (lám. 41); la mangueta única está sustituida por dos que parten del nudo E (fig. 1.^a (a), lám. 42): el diagrama de fuerzas (fig. 1.^a (b), lám. 42) no ofrece dificultad en su construcción. Puede hacerse uso de tres ó más manguetas que concurran en E .

918. **Otros tipos de armaduras simples.** — La variedad de armaduras es grande, y con los recursos de la estática gráfica todo constructor se halla en estado de dibujar y calcular tipos nuevos. A continuación presentamos algunos relativos á armaduras simples; no hacemos mayor la colección por no dar desmesuradas dimensiones á esta parte:

Figs. 2.^a y 3.^a (lám. 38). Armaduras para taller: las vertientes son de inclinación diferente; las BD , VK llevan cubierta metálica ó de teja cualquiera, y las AB , DV , vidriera para la iluminación del interior del edificio.

Fig. 2.^a (a). La fuerza **1** se obtendrá por la semisuma de los pesos correspondientes á AB y BC ; la **2** es igual á la semisuma de BC y CD .

Para hallar las reacciones **3** (apoyo D) y **4** (apoyo A), hemos dibujado el polígono de fuerzas $ab = 1$, $bc = 2$, construido el polígono funicular $HMNE$ correspondiente al polo O y trazado Od paralela á la línea final HE . Así se obtiene **3** = cd y **4** = da .

Diagrama de fuerzas [fig. 2.^a (b)]:

Nudos	Poligonos.
A	dah
B	$habeh$
C	$ebcfe$
t	$dhefd.$

Figs. 3.^a (a) y 3.^a (b). El polígono de fuerzas exteriores se ha formado con $ab = 1$, $bc = 2$ y $ce = 3$; las reacciones **4** (en K) y **5** (en D) son respectivamente ed y da , y se han obtenido por el polígono funicular $DP RST$.

Compresión.	{ Piezas.....	$DV, VZ, Zu, Zs, sx, Ks.$
	{ Fuerzas...	$af, hb, hr, mc, mn, ne.$
Extensión..	{ Piezas.....	$Du, Vu, ux, Zx, Kx.$
	{ Fuerzas...	$df, hf, rd, mr, nd.$

Figs. 2.^a (a) y 2.^a (b), lám. 42:

Compresión.	{ Piezas.....	$AB, BC, BD, DC, DS, DE.$
	{ Fuerzas...	$bc, bd, dh, df, fe, le.$
Extensión..	{ Piezas.....	$AC, CS, SE.$
	{ Fuerzas...	$ab, af, en.$

Figs. 4.^a (a) y 4.^a (b):

Compresión.	{ Piezas.....	$AB, BC, BD, DE, DN.$
	{ Fuerzas...	$cb, bd, hd, le, fe.$
Extensión..	{ Piezas.....	$AC, CD, CS.$
	{ Fuerzas...	$ab, df, af.$

Esta armadura es deformable, porque $l = 14$, $n = 5$; de modo que $l > 2n - 3$ ó $l = 2n - 3 - k$, siendo $k = 1$. Para que la formación del diagrama sea posible, es necesario satisfacer $k = 1$ condición (véase números 805 y 814); esta condición es la de que el puente DN sea paralelo al tirante AC . En efecto; únicamente de esta manera se podrá cerrar el polígono de fuerzas $fdhle f$ correspondiente al nudo D , en el cual conocemos las fuerzas **12**, **11** y **2** ($fdhl$) y sabemos que la **14** (le) ha de tener su extremo e en la recta ab , porque el triángulo len relativo al nudo E , ha de ser isósceles.

Otros tipos de armaduras están representados en las figs. 14 (a y b, lám. 37); en las de la lám. 42, 3.^a (a) y 3.^a (b), 5.^a (a) y 5.^a (b), 6.^a (a) y 6.^a (b); en las de la lám. 38, 7.^a (a) y 7.^a (b), 8.^a (a) y 8.^a (b), 9.^a (a) y 9.^a (b), cuyos diagramas de fuerzas creemos innecesario describir.

La fig. 5.^a (lám. 43), es una armadura de pares poligonales, ó curvos, organizada como las vigas Howe; se podría dar á las piezas que forman el alma de la viga la disposición aceptada en las vigas Murphy.

Las figs. 3.^a (a), 3.^a (b) y (4) de la lám. 43, son *marquesinas*, y las figuras 2.^a (a), 2.^a (b), se refieren á una armadura con puntos de apoyo interiores.

919. **Pabellones y cúpulas.** — Si es $ABCD$ (fig. 3.^a, lám. 44) la planta del pabellón, y AE, BO , etc., las armaduras de pendolón común TX , sobre cada par OB carga el peso de cubierta $aObB$, ó su igual el del triángulo AOB ,

y es fácil determinar la carga correspondiente á cada uno de los nudos, y formar el diagrama de una de las armaduras. La extensión del tirante inclinado SX es sr ; si no existiese tirante, y en su lugar se pusiese un cerco poligonal $ABCD\dots$, será ns el empuje horizontal que corresponde á cada vértice $A, B, \text{etc.}$; y descomponiéndolo en las direcciones AZ, AB , á cuyo efecto trazaremos nh, sh paralelas á estas rectas, obtendremos en $nh = sh$ la fuerza de extensión de los lados $AB, BC, \text{etc.}$

Cuando se trata de una cúpula MNR , de lados articulados, sabemos (número 824) que $Mr, rs, \text{etc.}$, han de ser paralelas á los radios polares $Oe, Ot, \text{etc.}$ El empuje horizontal es Oe , y la fuerza de extensión de $AB, BC, \text{etc.}$, está representada por las magnitudes $Of = ef$, que se obtienen trazando Of, fe paralelas á AZ, AB .

920. Armaduras de tirante sometido directamente á la acción de cargas (figs. 12 (a) y 12 (b), lám. 43). — Este caso se presenta cuando el tirante de la armadura soporta el peso de un piso.

Supondremos que las cargas están aplicadas á los nudos D, E, F del tirante; si lo estuvieran en puntos intermedios se descompondrían en partes aplicadas á estos nudos, y resultaría el mismo caso; entonces el tirante estaría sometido á flexión y á la fuerza de extensión que se deduzca del diagrama respectivo que vamos á formar. Para la flexión se considerará dividido el tirante en las partes $AD, DE, EF, \text{etc.}$, y cada una de estas partes como si estuviese apoyada en los dos extremos.

Numeraremos las fuerzas exteriores tomando alternativamente una en el par de la armadura y la siguiente en el tirante, y formaremos el polígono respectivo ax , determinando las reacciones 13 y 14 por los medios conocidos.

En la fig. 12 (b), aparece solamente medio diagrama, el correspondiente á la semiarmadura AMF .

Oal es el triángulo de fuerzas del nudo A , y el cuadrilátero $laobl$ de origen l , da las magnitudes de las fuerzas que concurren en B .

Del nudo B se pasa al D , en el cual se conocen las fuerzas 16 y 17 (cuya suma es Olb) y la 2 que dibujaremos en bc , trasladándola de op por medio de la recta pc paralela á ob ; trazando por c y por el origen O las rectas cd, Od , paralelas á DC (19) y DE (20), obtendremos el polígono $OlbcdO$ y las fuerzas 19 y 20.

Se pasará al nudo C , en el cual conocemos las fuerzas 19 = dc , 18 = bo = cp y 3 = pq ; las tres están sumadas en $dcpq$, siendo origen el punto d , y dan lugar al polígono $dcpqe d$.

La parte restante del diagrama se construye del mismo modo, sin dificultad alguna, y encontraríamos los siguientes resultados:

PIEZAS	FUERZAS	PIEZAS	FUERZAS
CH	$eq = fs$ (22)	DE	Od (20)
HM	$ht = mu$ (26)	EH	fr (23)
CE	de (21)	EF	Or (24)
HF	rh (25)	FM	mn (27)

921. El problema puede resolverse también por el método de *superposición de efectos*. Se construirá el diagrama correspondiente á las fuerzas exteriores que actúan en los pares (figs. 7.^a (a) y 7.^a (b), lám. 40), é independientemente el diagrama relativo á la armadura cargada tan sólo en el tirante con las fuerzas que en esta parte están aplicadas (figs. 13 (a) y 13 (b), lám. 43). No habrá más que sumar algebraicamente las fuerzas de los diagramas que se refieren á las mismas piezas; si las fuerzas son del mismo signo (compresiones las dos, ó extensiones), se hará la suma aritmética; y si fuesen de signo contrario (una compresión y una extensión), se restarán aritméticamente.

922. Armaduras complejas (figs. 11 (a) y 11 (b), lám. 38). — Los pares son vigas articuladas ó rígidas, en cuyos diversos nudos del cordón superior actúan las fuerzas 1, 2, 3, etc.

La semisuma $\frac{1 + 2 + 3}{2}$ podrá suponerse aplicada en A' y en E' ; de la aplicada en A' prescindiremos porque la soporta el muro ó apoyo de la armadura; del mismo modo la suma $5 + 6 + 7$ se descompone en dos mitades que actuarán en E' y C' .

Resumiendo: las fuerzas que obran en los nudos $E', C', F', \text{etc.}$, de la armadura son:

$$\begin{aligned} \text{En } E' \dots \quad I &= 4 + \frac{1 + 2 + 3}{2} + \frac{5 + 6 + 7}{2} \\ \text{En } C' \dots \quad II &= 8 + \frac{5 + 6 + 7}{2} + \frac{9 + 10 + 11}{2} \\ \text{En } F' \dots \quad III &= 12 + \frac{9 + 10 + 11}{2} + \frac{13 + 14 + 15}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Cada una de las reacciones en } H' \text{ y } A' \text{ vale } \frac{I + II + III}{2}$$

Construiremos la mitad del diagrama, que es la correspondiente á la semiarmadura de la izquierda.

Sumaremos en ad las fuerzas $ar = 1, rs = 2, st = 3, 4, 5, 6$, etc.; será $HO = I, OV = II$ y $dH = R$. Construyendo el diagrama $HABCd$ relativo á las fuerzas exteriores I, II, III , como si los pares fuesen elementos de una sola pieza, hallamos la fuerza de compresión N' de la mangueta y la de extensión T', S', M' de los tirantes $A'B', B'C', B'D'$; cuanto á los pares $A'E', E'C'$, sufren, respectivamente, las compresiones $P = AH$ y $P' = BO$.

Construiremos el diagrama referente al par $A'E'$, considerado aisladamente como viga apoyada en sus extremos y cargada con los pesos **1, 2 y 3**; el diagrama $abcd''n$ lo hemos formado sobre el mismo polígono de fuerzas ad , y se obtiene:

Piezas comprimidas..... $A'a', a'b', a'd', d'e', e'n', e'E'$.
 Fuerzas de compresión... $ab, bm, cr, cd'', d''s, mn, nt$.
 Piezas extendidas..... $A'b', c'b', a'c', c'n', c'e', n'E'$.
 Fuerzas de extensión..... $Hb, Hm, cm, Hn, d''m, Hn$.

Del mismo modo se formará el diagrama de fuerzas de la viga $E'C'$.

Si los enlaces A', E' y C' están en el cordón superior de las vigas que hacen de pares, como aparece en el dibujo, habrá que sumar las compresiones de dicho cordón superior, dadas por los diagramas parciales, con las compresiones P y P' de los pares desarrolladas por las cargas I, II y III ; será, pues,

Piezas	Fuerzas
$A'a'$	$ab + P$
$a'd'$	$cr + P$
$d'e'$	$ds + P$
$e'E'$	$nt + P$

Las compresiones del cordón $E'C'$ se sumarían con P' .

Cuanto á las demás piezas de las vigas que forman los pares ($a'b', b'c', a'c'$, etc.), esto es, las barras y cordón inferior, están sometidas á las fuerzas determinadas por los diagramas parciales y consignadas en las tablas anteriores; por ejemplo, las fuerzas correspondientes á las barras $a'b', b'c', a'c'$ son bm, Hm, cm .

923. Los pares de las armaduras complejas pueden calcularse de otro

modo. Supongamos que se trata de una armadura Polonceau (fig. 2.^a, lám. 44), cuyos pares son vigas de celosía, compuestas de largueros ó cordones formados de hierros en escuadra, con ó sin tablas, y un alma en celosía dispuesta de cualquiera de los modos A, B , ó C ; las viguetas descansan sobre el par en puntos diferentes de los nudos; de modo que aquél se hallará sometido á flexión y compresión.

Se determinará el momento máximo M_0 de flexión del par DE considerado como pieza inclinada, apoyada en tres puntos, ó del semipar DH , apoyado en D y H , así como el esfuerzo cortante máximo C_0 , y también se hallará, por el diagrama de fuerzas respectivo, la compresión P' que á este par DH corresponde.

Los cordones del par (escuadras, tablas, etc.) se calcularán para que resistan á un tiempo al momento de flexión M_0 , y á la compresión P' , por la fórmula

$$R = \frac{M_0 p}{I} + \frac{P'}{\omega};$$

y el esfuerzo cortante C_0 , que obra según el plano transversal ab , servirá para determinar la escuadría de la barra ó barras encontradas por dicho plano, haciendo uso de la fórmula del núm. **557**

$$\omega = \frac{C_0}{2 n R \cos \alpha}.$$

De idéntico modo se calcularía la armadura Oppermann (fig. 1.^a, lám. 44).

924. Acción del viento en una sola vertiente. — En la formación del valor de p , carga total, vertical, por cada metro cuadrado de vertiente, entra como sumando v , componente vertical de la presión ejercida por el viento (núm. **903**), y el valor de p ha servido de base para el cálculo de las fuerzas exteriores **1, 2**, etc., que actúan en los nudos (núms. **906** y **907**); de modo que suponemos implícitamente que el viento ejerce presiones en las dos vertientes opuestas á un tiempo, lo cual no es exacto.

La hipótesis anterior, generalmente aceptada, se hace en obsequio á la resistencia y á la facilidad de las operaciones gráficas ó analíticas que se practican para la determinación de las fuerzas interiores de una armadura. El problema puede resolverse, sin embargo, con facilidad, acomodándose á la realidad y estimando la presión del viento en una de las vertientes nada más.

Las fuerzas **1**, **2** y **3** que obran en los nudos de la armadura $A m B$ (figuras 11 (a) y 11 (b), lám. 43) se calcularán tomando en cuenta únicamente los dos sumandos t y n , peso propio, y peso de la nieve por metro cuadrado de vertiente (núms. **901** y **902**); así, pues, llamando d á la distancia entre las armaduras contiguas, será

$$\mathbf{1} = (t + n) \frac{A h + h m}{2}, \quad \mathbf{2} = (t + n) \frac{h m + m z}{2}, \text{ etc.}$$

Recordaremos que la línea de acción del viento se supone inclinada 10° con el horizonte, y que la presión que en esta dirección ejerce, por metro cuadrado de cubierta, es $q = \frac{0,113 V^2}{\text{sen}(\alpha + 10^\circ)}$ (núm. **903**), dando á V , como valor máximo, 32.

Según esto, las fuerzas $l h$, $s m$, debidas al viento, que actuarán en una de las vertientes, en la $A M$ por ejemplo, serán:

$$\text{Nudo } h \dots \quad \text{I} = l h = q \frac{(A h + h m) d}{2} \quad \text{,,} \quad l h c = 10^\circ.$$

$$\text{Nudo } m \dots \quad \text{II} = s m = q \frac{h m}{2} \quad \text{,,} \quad s m r = 10^\circ.$$

La presión que ejerce el viento sobre la mitad de $A h$, á partir de A , suponemos que es soportada por el muro, por intermedio de los cabios, á semejanza de lo que sucede con las demás cargas $(t + n)$, y por eso no la tomaremos en consideración.

Las fuerzas **1**, **2** y **3** dan lugar á las reacciones verticales $A x$ y $B e$, que se podrán determinar analítica ó gráficamente.

Las fuerzas I y II se descomponen en direcciones horizontal y vertical. Las componentes verticales $b h$, $n m$ darán lugar á nuevos sumandos $u x$, $e t$ en las reacciones de los apoyos, resultando como reacciones verticales totales $A u$ en A y $B t$ en B ; las componentes horizontales engendrarán, á su vez, reacciones horizontales en los apoyos, cuyo conocimiento es necesario para tener el de las reacciones definitivas.

Consideremos la armadura en el momento en que va á iniciarse su resbalamiento sobre el marco de soleras ó muro, obedeciendo á las componentes horizontales de presión del viento $c h = \text{I} \cos 10^\circ$, $r m = \text{II} \cos 10^\circ$. Se opondrá á este movimiento el rozamiento engendrado en A y B ; las fuerzas de

rozamiento, F' en A y F'' en B , son fuerzas pasivas, de signo contrario al de las componentes horizontales del viento, y su valor es proporcional á la presión que se desarrolla en los apoyos, entre las superficies en contacto, obteniéndose su valor absoluto por el producto de estas presiones y del coeficiente f de rozamiento; será, pues,

$$F' = A u \times f \quad \text{,,} \quad F'' = B t \times f \quad \text{,,} \quad \frac{F'}{F''} = \frac{A u}{B t}.$$

Pero hemos de suponer, en obsequio á la estabilidad, que el resbalamiento no llega á verificarse, ya porque la suma de fuerzas de rozamiento desarrolladas en los apoyos A y B sea mayor que el empuje horizontal del viento, ya porque existan enlaces que establezcan la unión del muro y de los pies de los pares. Admitiremos, en esta hipótesis, que los rozamientos en A y B , ó las reacciones de los enlaces en estos puntos, fuerzas cuya suma equilibra al empuje horizontal del viento, están en la relación $\frac{A u}{B t}$ anterior.

Las reacciones horizontales F' y F'' se obtendrán, pues, dividiendo la suma de empujes $c h + r m$ en partes proporcionales á las reacciones $A u$ y $B t$ de los apoyos. Esta división se ejecuta gráficamente, tomando $BC = c h + r m$, levantando la perpendicular $CM = A u$ y uniendo M y t : será $F' = CN$ y $F'' = BN$.

Las resultantes AR y BD de las reacciones verticales y horizontales son las reacciones definitivas de los apoyos A y B . Las rectas AR y BD son paralelas á Mt .

Si formamos en $a' b' c' d' e' f'$ el polígono de las fuerzas exteriores, siendo $a' b' = \mathbf{1}$, $b' c' = \text{I}$, $c' d' = \mathbf{2}$, $d' e' = \text{II}$, $e' f' = \mathbf{3}$, la recta $a' f'$, paralela á AR y DB , será la suma de estas dos reacciones, como que en la suma $a' b' c' \dots f'$ no hemos hecho más que repetir las operaciones geométricas practicadas anteriormente en A y B . Tomando $f' m' = BD$, ha de resultar como comprobación $m' a' = AR$.

El diagrama de fuerzas se forma del mismo modo que en el caso de fuerzas exteriores paralelas.

Nudo A : se conoce la reacción $AR = m' a'$, y se desconocen las fuerzas **6** y **7**. El polígono de fuerzas es $m' a' n' m'$.

Nudo h : son conocidas las fuerzas $I(lh)$, **1** y **6**, cuya suma es $n' a' b' c'$, y desconocidas las **8** y **9**, se trazarán $c' r'$ y $n' r'$ paralelas respectivamente á $m h$, $S h$, obteniéndose así el polígono $n' a' b' c' r' n'$.

Del mismo modo encontraríamos:

- Nudo *m*: polígono $r' c' d' e' h' r'$
 Nudo *Z*: polígono $h' e' f' l' h'$.
 Nudo *B*: polígono $f' m' l' f'$.
 Nudo *S*: polígono $m' n' r' h' l' m'$.

Si se comparan los resultados obtenidos en este diagrama con los que da el formado en la hipótesis de que la componente vertical de la presión del viento obra en las dos vertientes, hallaríamos que la mayor parte de las fuerzas interiores son en el segundo caso mayores que sus semejantes del primero, y en las que son menores, la diferencia es muy pequeña. Esto explica que hayamos dado preferencia á dicha hipótesis en la resolución de los problemas, pues se obtiene resistencia y sencillez de procedimiento mayores.

925. Influencia de la temperatura. — La tabla del núm. 238 hace ver el aumento considerable que puede experimentar el coeficiente de trabajo *R* por efecto de los cambios de temperatura de las barras metálicas. Si á la tracción que sufren los tirantes de una armadura, causada por las cargas y sobrecargas, se suma la que puede producirse por las contracciones del metal, resulta un coeficiente de trabajo que puede llegar á tener valores mucho mayores que el límite de elasticidad, y esta es la causa de numerosas fracturas de armaduras, acaecidas como consecuencia de grandes descensos de temperatura.

En la ya citada tabla del núm. 238, se ve que una contracción no verificada, debida á un descenso de temperatura de 30°, equivale á una extensión de 6,90 kilogramos por mm.²; de modo que si el tirante principal de una armadura, cuyos pares están anclados en muros resistentes, se ha calculado para un coeficiente de trabajo de 6 á 8 kilogramos por mm.², no teniendo en cuenta la temperatura, podrá alcanzar este coeficiente valores comprendidos entre 13 y 15 kilogramos por mm.². Es, pues, de la mayor importancia evitar estos crecimientos destructores del valor de *R*, y á este efecto estudiaremos los diversos casos que pueden presentarse en la práctica.

1.º *Armaduras de luz invariable.* — La luz ó tiro de una armadura será invariable cuando los pies de los pares estén sólidamente enlazados con los muros y éstos sean suficientemente resistentes para que ni las contracciones del tirante ni los empujes causados por los pares, cuando el tirante se dilate, puedan modificar su posición.

Esta disposición es defectuosa; en la fig. 5.^a (a) (lám. 41), por ejemplo, si la distancia *AH* es invariable, resulta completamente inútil el tirante *CS*;

y de existir, se flexará, porque los puntos *C* y *S* tienden á aproximarse cuando los pares *AD*, *DH* se deformen por flexión.

Atendiendo á la influencia de la temperatura, debe evitarse en cuanto sea posible el enlace invariable de los pares á los muros. Si el montaje de las armaduras se hace en verano, no es exagerado, en nuestro clima, estimar la variación de temperatura en 40 ó 50 grados centígrados, que produciría en el tirante extensiones de $40 \times 0,23$ á $50 \times 0,23$ kilogramos por mm.² (9,20 á 11,50 kilogramos por mm.²; véase la tabla del núm. 238).

Hemos fijado la atención en el tirante principal por ser el de más importancia, á causa del papel que desempeña y de la fuerza considerable de tracción á que se halla sometido por efecto de las cargas. Fácil es, por lo demás, calcular las deformaciones que experimentan las piezas restantes de la armadura, puesto que se conocen las longitudes primitivas y el coeficiente de dilatación del metal.

Aun suponiendo que el montaje de la armadura se haga á una temperatura media entre la máxima y mínima de la localidad, es prudente contar con variaciones de 30 grados, á las cuales corresponde una extensión, para el tirante, de 6 á 7 kilogramos por mm.². No podrá exceder de $R = 2$ kilogramos por mm.² el coeficiente de trabajo que se emplee en la fórmula $F = R\omega$ para la determinación del área resistente ω de la sección trasversal, á fin de que el coeficiente definitivo no exceda de 8 á 9 kilogramos por mm.², y claro es que ha de resultar ω de valor excesivo.

2.º *Armaduras de libre dilatación.* — Supongamos que los pies de los pares descansan sobre rodillos de dilatación, de modo que las variaciones de longitud del tirante principal puedan verificarse fácilmente. Como las contracciones y dilataciones totales de los diversos elementos son proporcionales á sus longitudes, la armadura modificada por la temperatura tendrá una figura semejante á la primitiva, y ninguna de las piezas que la constituyen sufrirá extensión ni compresión.

Representando por f' el coeficiente de rozamiento, en el que se produce al rodar los rodillos sobre las planchas de asiento, y *P* la carga que sufre cada par (igual á la reacción del apoyo), para que tengan lugar las modificaciones de longitud del tirante principal, tendrá que efectuar éste una tracción total representada por Pf' , valor total de rozamiento, es decir, que el coeficiente de trabajo admitido para el cálculo del área ω de la sección trasversal del tirante sufrirá un aumento $\frac{Pf'}{\omega}$. Pero esta cantidad es insignificante por la pequeñez de f' .

Resumiendo: en las armaduras de libre dilatación los tirantes se calculan atendiendo únicamente á las fuerzas de extensión, obtenidas por los diagramas ó por el cálculo, y se prescinde del efecto causado por las variaciones de temperatura. Es, pues, de recomendar el empleo de rodillos ú otros medios que permitan la libertad de dilataciones y contracciones en los tirantes principales, y así se hace para las armaduras de gran luz.

3.º *Caso intermedio.*—La invariabilidad de luz de una armadura rara vez ocurrirá en la práctica.

Aunque los pares estén sólidamente unidos á los apoyos (muros, pies derechos, columnas, etc.), estos ceden y siguen el movimiento, de pequeña amplitud, iniciado por los tirantes.

El caso más general es que los pies de los pares descansen sobre un marco de soleras, una platina, etc., sin estar enlazados invariablemente á estas piezas. Las contracciones del tirante se comunicarán á los pares, que resbalarán sobre sus apoyos; y si P es la carga que actúa sobre un par de la armadura y f el coeficiente de rozamiento de resbalamiento, el tirante al contraerse, habrá de vencer una resistencia que podremos representar por Pf . Llamando F á la fuerza de extensión del tirante producida por las cargas y deducida gráfica ó analíticamente por los medios que ya conocemos, el área ω de la sección resistente se calculará por la fórmula

$$F + Pf = R\omega,$$

siendo R el coeficiente de trabajo.

La tabla del núm. 32 contiene los valores de f ; puede hacerse $f = 0,6$, en la fórmula anterior, para ponernos en el caso más desfavorable. El sumando Pf no es despreciable: en las figs. 5.^a (a) y 5.^a (b) (lám. 41), por ejemplo, $ac = P$, $ab = F$; P y F son poco diferentes, de modo que Pf vale próximamente $0,60 F$; y como de haber prescindido de los efectos de la temperatura se hubiese hecho uso de la fórmula $F = R\omega$, se reduce que el verdadero valor de ω , dado por la fórmula anterior, es próximamente 1,5 veces mayor del que se obtiene cuando se desprecia la influencia de aquélla, lo cual equivale á decir que, de no tenerse en cuenta, el coeficiente de trabajo real podrá llegar á ser 1,5 veces mayor que el calculado.

926. Consecuencias deducidas de los diagramas sobre la mejor colocación de las diversas piezas de una armadura.—Examinando un diagrama cualquiera, por ejemplo, el de la fig. 5.^a (b) (lám. 41) correspondiente á la armadura fig. 5.^a (a), se observa que de haber hecho mayor el ángulo CAD

que el par forma con el horizonte, la recta cb trazada por c paralelamente á la DA , cortaría á la ab en un punto más próximo al a que al b , y entonces serían menores las fuerzas 6 de compresión del par y 7 de extensión del tirante. La misma deducción se haría en cualquiera otra armadura de tirante horizontal (fig. 7.^a, lám. 39; 4.^a y 7.^a de la lám. 40, etc.), ó de tirante inclinado (figs. 3.^a y 5.^a; lám. 40; 3.^a, 4.^a y 7.^a de la lám. 41, etc.).

Podemos, pues, asegurar que á igualdad de inclinación del tirante (y de fuerzas exteriores) *cuanto mayor sea la inclinación de los pares con el horizonte, menor será su compresión, y lo mismo sucederá con la extensión del tirante.*

Fijemos nuestra atención en las armaduras dibujadas en las figs. 5.^a (a) y 2.^a (a) (lám. 41) y en sus respectivos diagramas de fuerzas 5.^a (b) y 2.^a (b). En el segundo de éstos, la recta ab corta á la cb en un punto b que está á mayor distancia de c y a que el b del diagrama 5.^a (b), y esto es debido á que el tirante CA de la fig. 2.^a (a) tiene más inclinación que el CA de la fig. 5.^a (a). Por idéntica razón la recta hd de la fig. 2.^a (b) que representa la compresión del semipar superior, es mayor que la análoga de la fig. 5.^a (b).

A las mismas deducciones conduce la comparación de los diagramas figuras 1.^a (b), lám. 40, y 1.^a (b), lám. 41; 3.^a (b) y 6.^a (b), lám. 41, etc.; luego *á igual inclinación de los pares, éstos y el tirante sufren tanto mayor esfuerzo cuanto mayor sea la inclinación del tirante con el horizonte.*

Al construir el cuadrilátero $bchdb$ figs. 5.^a (b) y 5.^a (a), lám. 41), se trazó la recta bd paralela á BC ; la recta bd , que representa la fuerza de compresión del tornapunta, será la más corta de todas las análogas cuando esté á ángulo recto con dh , ó, lo que es lo mismo, cuando el tornapunta BC sea normal al par.

Si BC se aproxima á la horizontal que pasa por B , la recta bd se acerca á la ba , resultando aumentada la fuerza de compresión del tornapunta y disminuída la compresión del par superior (véanse las figs. 6.^a (a) y 6.^a (b) de la lám. 40; 4.^a (a) y 4.^a (b), 7.^a (a) y 7.^a (b) de la lám. 41).

Si BC (fig. 5.^a, lám. 41) se aproxima á la vertical que pasa por B , aumentará la longitud de bd y hd , es decir, las compresiones del tornapunta y semipar superior (véanse las figs. 7.^a (a) y 7.^a (b) de la lám. 40, y 7.^a (a), 7.^a (b), 8.^a (a) y 8.^a (b) de la lám. 38). En cambio, si los pares varían de inclinación variará la magnitud de bd (fig. 5.^a (b), lám. 41), aumentando ó disminuyendo con aquélla.

Deduciremos de todo esto que *la compresión de los tornapuntas: Es independiente de la inclinación del tirante principal;*

Aumenta cuando disminuye el ángulo que el par forma con el horizonte; Crece también cuando la dirección del tornapunta se separa de la normal al par, y en esta última situación es un mínimo. Si al separarse de la normal al par se aproxima á la horizontal, disminuye la compresión del semipar superior; si se acerca á la vertical, aumenta esta compresión.

Cualquiera que sea el número de articulaciones supuestas al par, la formación del primer triángulo del diagrama correspondiente al apoyo izquierdo (*abc*, figs. 5.^a (*b*) y 2.^a (*b*), lám. 41), que da la compresión de la porción inferior de par y la extensión del tirante inmediato, es la misma. Se deduce, por lo tanto, que *á igualdad de las demás condiciones, el número de articulaciones del par no influye en el valor de la compresión del par inferior ni en el de la extensión del tirante inmediato.*

El examen de las figs. 2.^a (*a*) y 2.^a (*b*) (lám. 39) demuestra que *el esfuerzo de tracción á que el pendolón se halla sujeto, crece cuando los tornapuntas se aproximan á la vertical, y disminuye cuando se acerca su dirección á la de la horizontal; y si el tirante es oblicuo* (figs. 3.^a (*a*) y 3.^a (*b*), lám. 39), *aumentá con la oblicuidad la extensión del pendolón.*

En las figs. 7.^a (*a*) y 7.^a (*b*) (lám. 40), las rectas *ef*, *ih*, etc., representan las fuerzas de extensión de las péndolas *CD*, *EF*, etc., y *fa*, *ha*, etc., las de los tirantes *CE*, *ES*, etc. Las distancias más cortas de los puntos *e*, *i* á la recta *ba*, son las perpendiculares bajadas desde estos puntos á la recta, que es paralela al tirante *AH*.

Si la dirección de las péndolas se separa de la perpendicular al tirante, hacia la izquierda, los puntos *f* y *h* estarán más distantes de los *a* y *e*, y las rectas *ef*, *fa*, *ih*, *ha*, aumentarán de longitud. Si, por el contrario, la separación de las péndolas se opera á la derecha de las normales al tirante, crecerán *ef*, *ih*, pero disminuirán *af*, *ah*. La misma deducción haríamos del estudio de las figs. 2.^a (*a*) y 2.^a (*b*), 5.^a (*a*) y 5.^a (*b*), lám. 40; luego *la mejor situación de las péndolas es la normal al tirante; á la izquierda de esta normal aumenta la extensión de las péndolas y del tirante; á la derecha crece la extensión de las péndolas y disminuye la del tirante.*

Otras varias deducciones podríamos hacer del examen de los diagramas; pero basta lo expuesto para formarse idea de la luz que arroja el método gráfico en la resolución del problema que nos ocupa. Estas reglas generales dan bases para componer armaduras que satisfagan las condiciones mecánicas; y si del caso general descendemos á un tipo concreto de armadura, el estudio del diagrama conduce á la determinación de las posiciones y dimensiones de piezas más convenientes.

Como ejemplo discutamos, en la armadura Polonceau (fig. 2.^a (*a*) y 2.^a (*b*), lám. 41), la influencia que ejerce la longitud de la mangueta *BC*.

El aumento de longitud de *BC* hace crecer los ángulos *BAC*, *DCS*. El crecimiento del primero trae como consecuencia inmediata, en el diagrama de fuerzas, que la recta *ab* corte á la *cb* en un punto más próximo á los *c* y *a* que el *b*, es decir, resulta disminuída la compresión del semipar inferior (y por consiguiente, la del superior) y la tensión del tirante *CA*.

El aumento del ángulo *DCS* hace que *de* se aproxime á la normal á *ca*; y como, además, el punto *d* quedará menos separado de *ae*, la línea *de*, es decir, la tensión del tirante inclinado *DC* será menor.

El punto *e*, en cambio, se separa del *a*; aumentará, pues, la tensión *ae* del tirante horizontal.

La recta *bd*, expresión geométrica de la fuerza que comprime la mangueta, permanecerá invariable, pero como la longitud de ésta ha aumentado se encontrará en circunstancias más desfavorables de resistencia. En definitiva, el aumento de longitud de la mangueta favorece á los pares y á los tirantes inclinados y perjudica al tirante horizontal y á la mangueta.

927. Armaduras deformables y de líneas superfluas. Consecuencias deducidas por el cálculo gráfico.—Sabemos ya (núm. 798) que si *l* es el número de lados ó piezas de una armadura y *n* el número de nudos, la igualdad $l = 2n - 3 + k$, da á conocer la naturaleza del sistema, que será estrictamente indeformable cuando $k = 0$, le faltarán *k* líneas ó piezas cuando *k* sea negativo y tendrá *k* líneas superfluas cuando este término sea positivo.

La construcción del diagrama de fuerzas por el cálculo gráfico conduce á las mismas deducciones, y tiene la ventaja de que determina la situación de las piezas que faltan, y la de las piezas superfluas cuando existen, entendiendo siempre que nos referimos á las piezas principales (núm. 817).

Examínese la armadura de la fig. 4.^a (*a*), lám. 39, y después de haber construído el triángulo *acb* del diagrama [fig. 4.^a (*b*)], correspondiente al nudo *A*, pasemos á formar el polígono referente al nudo *B*, constituído por los semipares *AB*, *BD*, puente *BE*, tornapunta *BC* y fuerza **1**; en total cinco fuerzas, de las que son conocidas solamente dos, la **1** y **6**, y desconocidas tres, las **8**, **9** y **10**.

El problema es indeterminado; el polígono puede ser *bcefb*, en cuyo caso se supone cero la fuerza **9** é inútil la pieza *BE*; el *bce^mnb*, siendo cero la fuerza **8** y superflua la pieza *BC*, ó cualquiera de los intermedios *bce^mn'b*, *lce^mnb*, etc. La indeterminación subsiste aunque se acuda á cualquiera de los nudos restantes *C*, *E*, *D*, como es fácil comprobar.

Esto indica que una de las dos piezas BE ó BC es inútil, es decir, que la armadura puede estar perfectamente en equilibrio suprimiendo una cualquiera de ellas. Pero esta inutilidad es relativa, porque se puede aceptar cualquiera de los polígonos $bce m' n' b$, etc., conservando el puente y tornapunta y distribuyendo entre ambos la compresión total.

Sea la armadura de la fig. 6.^a (a) (lám. 39): constrúyase el triángulo acb [fig. 6.^a (b)], correspondiente al nudo A , y pasamos al C formado por los tirantes AC , CD y el pendolón BC . El problema es determinado, puesto que sólo hay dos incógnitas, las fuerzas **6** y **7**.

Siguiendo el procedimiento tantas veces explicado, tomaremos como origen el punto a ; ab es la fuerza **5** conocida. Por b trazaremos mn paralela á BC y por el origen a una paralela á CD , que se confunde con la ab . El triángulo de las fuerzas, reducido á esta recta, resulta ser $abba$; la fuerza **7** es igual á la **5** y la **6** igual á cero, ó, lo que es lo mismo, indica el cálculo que el pendolón es inútil.

Para convencernos de ello consideremos el nudo B , á que pertenece, por su otro extremo, el pendolón. En él conocemos las fuerzas **4** y **1**, siendo incógnitas las **6** y **8**; si se toma por origen el punto b , en bcd quedan sumadas las fuerzas **4** y **1**; y como la paralela á BD , trazada por d , pasa por b , es cero el cuarto lado del cuadrilátero, el paralelo al pendolón, é inútil por consecuencia esta pieza.

Pudo preverse el resultado obtenido, pues claramente se observa que el objeto del pendolón no es otro que el de suspender el tirante AD , cuyo peso, así como el de las demás piezas de la armadura, no consideramos en el cálculo gráfico, y esto sin error sensible, por desconocer *á priori* sus escuadrías. En el caso de que este peso sea conocido (ó en el de que el tirante soporte alguna carga, como por ejemplo la de un suelo), el problema sería distinto y determinado; conocida la carga que obra en C [fig. 9.^a (a)] y la fuerza **5**, se formará el polígono correspondiente, que es un rectángulo, siendo la fuerza **6** igual á la carga y la **7** igual á la **5**.

La fig. 9.^a (b) representa el diagrama de las fuerzas; el polígono referente al nudo B es $bmdrb$, cuadrilátero y no triángulo, como en el caso anterior, porque la dr no pasa ya por b .

Las figs. 1.^a (a) y 1.^a (b) de la lám. 40 demuestran también la inutilidad del tirante inclinado.

Idéntico resultado encontramos para la péndola mn en la armadura de la fig. 5.^a (a) (lám. 39). En el nudo m ocurren la fuerza **6**, conocida en el triángulo abc [fig. 5.^a (b)], y las incógnitas **8** y **9**. Tomando b como origen, la

paralela $m'n'$ á la péndola mn corta á cb en el mismo origen b ; la fuerza **8** es cero, ó igual conclusión deduciríamos pasando del nudo A al n .

Examinemos la armadura fig. 8.^a (a) (lám. 39), compuesta de las piezas representadas por las líneas de trazo continuo, grueso ó fino.

El polígono correspondiente al nudo A es el triángulo abc [fig. 8.^a (b)]. Pasando al nudo D encontramos el cuadrilátero $bcd e b$, siendo $b e$ la fuerza **10** de compresión. En el nudo E , compuesto de las fuerzas **8**, **10** y **13**, no podemos formar triángulo: todo él se proyecta en la recta ab ; parece indicar el cálculo gráfico que la fuerza **10** es cero, siendo así que hemos encontrado para ella un valor igual á $b e$ en el nudo D .

Sin embargo, á poco que detengamos nuestra atención observaremos que en el nudo E el problema es más que determinado, pues de las tres fuerzas concurrentes **8**, **10**, **13**, solamente es desconocida una, la **13**; de modo que la contradicción aparente que hemos encontrado nos manifiesta que falta una fuerza incógnita en dicho nudo E , y, por lo tanto, una pieza en la cercha, por ejemplo el tirante EB . El polígono de las fuerzas se podrá completar y será el $ab e h a$, conservando la fuerza **10** el valor que tenía en el polígono correspondiente al nudo D .

También acusa el cálculo gráfico falta de piezas en el nudo F . A él concurren las fuerzas **11**, **2** y **12**; tomando como origen del polígono respectivo el punto e del diagrama, encontramos sumadas en $e d m$ las dos fuerzas conocidas **11** y **2**, y trazando por m la recta $m f$, paralela á **12**, queda sin cerrar el polígono, indicándonos, al parecer, que la fuerza **12** tiene un valor infinito.

Como en el caso anterior, el problema presentado en el nudo F es más que determinado, y la solución ∞ demuestra la necesidad de aplicar en F otra pieza, por ejemplo, el puente FG . Entonces el polígono queda cerrado con la paralela á la dirección de la nueva pieza trazada por el origen e .

En general, siempre que en un nudo concurren tres piezas de las cuales dos estén en una misma línea, ó la tercera pieza es inútil, ó falta una pieza en el nudo. Para desvanecer la duda, acúdase al nudo á que corresponde aquella pieza por su otro extremo.

Basta con el número de ejemplos que hemos presentado para formarse una cabal idea de los procedimientos gráficos en sus aplicaciones al cálculo de las fuerzas interiores de una armadura. El lector podrá haberse convencido de la sencillez del método; la formación de los diagramas es sumamente fácil, y al cabo de un corto tiempo de práctica se adquiere la suficiente para poder formar en la memoria el diagrama correspondiente á una cercha que

se vea por primera vez, y deducir, á la simple inspección, cómo trabajan las piezas que la constituyen, si hay alguna de más ó menos, si la combinación de piezas es la más conveniente en beneficio de la resistencia; en una palabra, se puede formular un juicio crítico prudente á que los laboriosos cálculos analíticos conducen muy difícilmente.

928. Fórmulas deducidas de los diagramas. — De los diagramas se pueden deducir fórmulas que den los valores de las fuerzas interiores de una armadura. En las figs. 4.^a (a) y 4.^a (b) (lám. 40), por ejemplo, comparando los triángulos semejantes abc y ACH , se tiene:

$$\frac{bc=6}{ca=5} = \frac{AC}{CH} \quad \text{''} \quad 6 = 5 \times \frac{AC}{CH}$$

$$\frac{ab=7}{ca=5} = \frac{AH}{CH} \quad \text{''} \quad 7 = 5 \times \frac{AH}{CH}$$

Trazando ds paralela á ab , y comparando los triángulos semejantes dsc y ACH , obtenemos:

$$\frac{ds=be=8}{cd=1} = \frac{AH}{CH} \quad \text{''} \quad 8 = 1 \times \frac{AH}{CH}$$

La fuerza $9 = de$ es la diferencia de las magnitudes $cb = 6$ y cs , y como

$$\frac{cs}{cd=1} = \frac{AC}{CH} \quad \text{''} \quad cs = 1 \times \frac{AC}{CH}$$

será

$$9 = 6 - 1 \times \frac{AC}{CH} = \frac{6 \times CH - 1 \times AC}{CH}$$

Armadura compuesta de pares, tirante, tornapuntas y pendolón (figuras 7.^a (a) y 7.^a (b), lám. 39).

Triángulos semejantes abc y ACE :

$$\frac{cb=6}{ba=5} = \frac{AC}{CE} \quad \text{''} \quad 6 = 5 \times \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{ca=7}{ba=5} = \frac{AE}{EC} \quad \text{''} \quad 7 = 5 \times \frac{AE}{EC}$$

Trazando mt paralela á ce y comparando los triángulos semejantes tbm y DCE , resulta:

$$\frac{mt=ce=8}{bm=1} = \frac{DE}{CE} \quad \text{''} \quad 8 = 1 \times \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{tb}{DC} = \frac{bm=1}{CE} \quad \text{''} \quad tb = 1 \times \frac{DC}{CE}$$

$$em=9 = cb - tb \quad \text{''} \quad 9 = 6 - 1 \times \frac{DC}{CE}$$

$$9 = \frac{5 \times AC - 1 \times DC}{CE}$$

La fuerza 10 (de) es igual á la 1 (bm); puede expresarse también su valor del modo siguiente:

Los triángulos semejantes ErC y CFu dan

$$\frac{CE}{CF=CD} = \frac{Er}{Fu} = \frac{Fs}{Fu};$$

por otra parte, de la semejanza de los triángulos dbh y DCE , se obtiene

$$\frac{db=9}{bh} = \frac{CD}{CE},$$

de donde

$$bh = 9 \times \frac{CE}{CD} = 9 \times \frac{Fs}{Fu};$$

y como $10 = bh - 2$, se tendrá

$$10 = \frac{9 \times Fs - 2 \times Fu}{Fu}$$

Podríamos traducir á fórmulas todos los diagramas de fuerzas encontrados, por comparación de figuras semejantes, pero no lo hacemos porque hemos de obtener estas mismas fórmulas empleando método analítico (método de Ritter, núms. 937 y 938).

MÉTODO DE RITTER

929. El método de Ritter, explicado en los núms. 854 y siguientes, es aplicable á las armaduras. Es el caso de *fuerzas paralelas*, tratado en los núms. 855 y 856, y recordaremos que allí se demostró que los pares están siempre comprimidos y el tirante inferior extendido; cuanto al signo de las fuerzas que obran según las barras (manguetas, tornapuntas y tirantes inclinados), nos referimos, para su determinación, á lo explicado en el número 856, y así, en cuanto sigue, nos ocuparemos solamente de los valores absolutos de las fuerzas interiores.

930. *Armaduras de pares poligonales* (fig. 1.^a, lám. 43). — *HT* es el polígono de las fuerzas exteriores y *CLP* el funicular; el polo *O* se ha tomado á una distancia $RO = k$ unidades lineales del polígono de fuerzas *HT*; de modo que habrá que multiplicar por *k* las ordenadas *Dd*, *Ee*, etc., estimadas en la escala de fuerzas, para obtener los momentos de flexión de la viga *AcB* en los puntos *r*, *s*, etc. (núm. 416).

Los valores absolutos de las fuerzas interiores que actúan según los ejes de las piezas elementales de la armadura, los representaremos por las letras siguientes, que no aparecen en el dibujo por no complicar la figura:

Piezas *Aa, Ar, ra, ab, as, rs, bs, bc, bt, st, cm, tr.*
 Fuerzas interiores. $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}.$

Tracemos un plano *XX* que corte á las líneas *ab*, *as* y *rs*, y con arreglo á lo explicado en el núm. 854, las fuerzas interiores que obran según dichas líneas se obtendrán estableciendo las siguientes ecuaciones de igualdad de momentos de las fuerzas exteriores 8 y 1 que están á la izquierda de *XX* y de las fuerzas interiores.

Par (barra *ab*). — Momentos con respecto á *s* (punto de encuentro de las otras dos barras *as*, *rs*):

$$8 \times As - 1 \times rs = F_4 \times sf;$$

sf es la perpendicular á *ab* bajada desde el punto *s*. El primer miembro de

la ecuación es el momento de flexión con respecto á *s*, ó *M_s*, y estará representado por *k* veces la ordenada *Ee*. Será, pues,

$$k \times Ee = F_4 \times sf$$

ó

$$F_4 = Ee \times \frac{k}{sf}.$$

Tirante (barra *rs*). — Momentos con respecto al punto *a* (punto de encuentro de las otras dos barras *as*, *ab*):

$$8 \times Ar = F_6 \times ar.$$

Y como $8 \times Ar$ es el momento de flexión *M_r* en *r*, que vale *Dd* × *k*, tendremos:

$$F_6 = Dd \times \frac{k}{ar}.$$

Barra as. — Momentos con respecto á *Q* (punto de encuentro de *ab* y *rs*):

$$8 \times QA - 1 \times Qr = F_3 \times Qp.$$

Péndola bs. — Tracemos un plano que corte á esta barra y á otras dos más, el *YY*, por ejemplo. Tomando los momentos con respecto á *Q*, tendremos:

$$8 \times QA - 1 \times Qr = F_7 \times Qs.$$

931. *Condiciones para que el par poligonal *AbcB* esté igualmente comprimido en toda su longitud.* — Hemos visto que la compresión en *ab*

era $F_1 = Ee \times \frac{k}{sf}$; del mismo modo se deduciría:

$$\text{Compresión en } Aa \dots \dots \dots F_1 = Dd \times \frac{k}{rz}.$$

$$\text{Compresión en } cm \dots \dots \dots F_{11} = Ss' \times \frac{k}{rm = h},$$

siendo *h* la altura ó flecha $mr = ct$.

Para que las compresiones F sean iguales, es preciso que

$$\frac{Dd}{rz} = \frac{Ee}{sf} = \frac{Ss'}{h} \quad \text{ó} \quad rz : sf : h :: Dd : Ee : Ss'.$$

Sobre una recta $m'n'$ tomemos $m'b' = Dd$, $m'a' = Ee$, $m'n' = Ss'$; levantemos la perpendicular $n'v = h$, unamos v y m' y tracemos $b'c'$, $a'x$ perpendiculares á $m'n'$; las rectas $b'c'$, $a'x$, etc., serán las magnitudes que han de tener rz , sf , etc., para conseguir la igualdad de compresión en todo el par.

El trazado geométrico que responde á las condiciones anteriores, es sencillo. Haciendo centro en r , s y t , y con radios respectivamente iguales á $b'c'$, $a'x$, $n'v = h$, se describen pequeños arcos; trácese Aa tangente al primer arco, hasta su encuentro con ar ; por a la tangente ab al segundo arco de centro s , hasta que corte á bs , y así sucesivamente.

El arco cuyo centro es t y cuyo radio es $tu = h$, ha de tener por tangentes la recta bc y la línea media cm , paralela á AB . Si se satisface esta condición, el punto c de encuentro de las dos tangentes no podrá estar en la perpendicular ct á AB . Lo que debe hacerse es trazar bc tangente al arco de radio $tu = h$, prolongar esta tangente hasta su encuentro con la perpendicular ct á AB , y por este último punto dibujar cm paralela á AB ; de este modo la altura ct resulta algo mayor que h , pero la diferencia es despreciable.

932. Condiciones para que el tirante inferior AB esté igualmente extendido en toda su longitud. — La extensión del tirante inferior en rs (figura 1.^a, lám. 43) es, según hemos visto en el núm. 930, $F_a = Dd \times \frac{k}{ar}$; del mismo modo deduciríamos:

$$\text{Extensión en } st \dots \dots \dots F_{10} = Ee \times \frac{k}{bs}.$$

$$\text{Extensión en } tr \dots \dots \dots F_{12} = Ll \times \frac{k}{ct = h}.$$

Para que todas estas extensiones tengan igual valor, es preciso que

$$\frac{Dd}{ar} = \frac{Ee}{bs} = \frac{Ll}{ct}$$

ó

$$ar : bs : ct :: Dd : Ee : Ll.$$

Pero Dd , Ee , etc., son las ordenadas del polígono funicular CLP correspondiente al polígono de fuerzas exteriores HT y polo O ; luego ar , bs , ct ,

serán las ordenadas de otro polígono funicular relativo al mismo polígono de fuerzas exteriores.

La condición para que el tirante sufra extensiones iguales en todas sus partes es, pues, que los pares $AabcB$ formen uno de los infinitos polígonos funiculares correspondientes al polígono de fuerzas exteriores.

Si las fuerzas exteriores **1, 2, 3**, etc., estuviesen infinitamente próximas (caso de carga uniformemente repartida en toda la longitud de los pares), el polígono funicular $AabcB$ se convierte en parábola (núm. 423). De aquí el nombre de vigas parabólicas ó armaduras parabólicas que se da á las que cumplen las condiciones precedentes.

Para que el polígono funicular $AabcB$ tenga la flecha $ct = h$ que se desee, será preciso tomar el polo O' (fig. 1.^a (b), lám. 43) á una distancia de $H'T'$, igual á $k = \frac{M_0}{h}$, siendo M_0 el momento máximo de flexión de una viga AB sometida á las fuerzas **1, 2, 3**, etc. En efecto; la ordenada tc , multiplicada por k , representa el valor de M_0 (núm. 416); luego $tc \times \frac{M_0}{h} = M_0$, de donde $tc = h$. Una vez elegido el polo sobre la perpendicular $R'O'$ levantada á $H'T'$ en su punto medio, se trazarán Aa , ab , bc , etc., paralelas á los radios polares $O'H'$, $O'C'$, $O'D'$, etc.

933. Las compresiones en Aa , ab , etc., no hay necesidad de determinarlas; están representadas por los radios polares $O'H'$, $O'C'$, etc., (véase núm. 814), y los montantes y tirantes inclinados ar , as , bs , etc. (figs. 1.^a y 1.^a (b), lám. 43), no sufren esfuerzo alguno en tanto subsista la repartición de fuerzas **1, 2**, etc., que ha servido de base á las construcciones geométricas anteriores. En un nudo tal como el a existe equilibrio entre las fuerzas Aa , **1** y ab , representadas por los lados del triángulo $O'H'C'$; de modo que las piezas ar , as , son inútiles; una modificación cualquiera en las fuerzas **1, 2**, etcétera, las hará necesarias, porque entonces $AabcB$ no será polígono funicular de las nuevas fuerzas exteriores.

934. Armadura Polonceau reforzada. — Apliquemos el método de Ritter á una armadura Polonceau de tres manguetas ó bielas por par (fig. 6.^a, lám. 43); **1, 2, ..., 7** son las fuerzas exteriores, ya estén aplicadas directamente á los nudos, ya sean las componentes de las que insisten sobre los pares en puntos intermedios. Por los procedimientos gráficos ó analíticos determinaremos las reacciones de los apoyos; llamemos Q á la del apoyo a .

Representaremos el valor absoluto de las fuerzas interiores por las letras A, B , etc.; su signo ó cualidad (compresión ó extensión) sabemos determi-

narlo por la regla del núm. 856, ó por los diagramas de fuerzas del método de Cremona.

La regla del núm. 856 es muy sencilla, y conviene recordarla: cortada la armadura por un plano transversal cualquiera, el $X''X''$, por ejemplo (figura 6.^a, lám. 43), se supondrá que la parte que queda á la izquierda de dicho plano tiene un movimiento de rotación de izquierda á derecha (flecha K), como el de las agujas de un reloj, obedeciendo á la resultante R_1 de las fuerzas exteriores $Q, 1$ que están á la izquierda de $X''X''$; para mayor claridad puede suponerse el eje de giro en el punto G de intersección del plano transversal $X''X''$ con el cordón superior be ó par de la armadura. Fácil es dibujar, paralelamente á las barras cortadas, las flechas que indican el movimiento que estas barras tomarían al verificarse la rotación; si estas flechas, que se trazarán á la izquierda de $X''X''$, se separan de este plano, la barra estará sometida á extensión, y si se dirigen á él representan compresión.

Las fuerzas interiores, cuyas direcciones hemos representado por flechas, están engendradas por la resultante R_1 , ó por las fuerzas exteriores $Q, 1$, etcétera; la suma algebraica de momentos de las primeras, con respecto á un punto cualquiera, ha de ser igual á la suma algebraica de los momentos de las segundas con respecto al mismo punto. Así, pues, en los cálculos que á continuación presentamos, el primer miembro de la ecuación de los momentos lo formaremos con la suma algebraica de los momentos de las fuerzas interiores (véase las flechas); en ambos miembros daremos signo positivo á los momentos de las fuerzas que produzcan rotaciones de izquierda á derecha (como las agujas de un reloj) alrededor del punto origen, y signo negativo á los relativos á direcciones contrarias.

Supongamos, por ejemplo (fig. 9.^a, lám. 43), que consideramos las tres barras eb, ed, df , cortadas por el plano $X''X''$. Tendremos, tomando los momentos con respecto al punto O :

FUERZAS	MOMENTOS	SIGNO	ROTACIÓN	
Exteriores..	$Q \dots$	$Q \times On$	+	Izquierda á derecha.
	$1 \dots$	$1 \times Os$	-	Derecha á izquierda.
Interiores..	$D \dots$	$D \times Or$	+	Izquierda á derecha.
	$E \dots$	$E \times Om$	-	Derecha á izquierda.
	$F \dots$	$F \times Oc$	-	Derecha á izquierda.

Ecuación de momentos:

$$Q \times On - 1 \times Os = D \times Or - E \times Om - F \times Oc.$$

Pasemos á determinar las fuerzas interiores en la armadura Polonceau (fig. 6.^a, lám. 43).

Plano XX . — Corta al par ab y al tirante ad .

Par ab : momentos con respecto al punto d :

$$Q \times mn = A \times bd \quad \text{,} \quad A = Q \times \frac{mn}{bd} \quad (1).$$

Tirante ad : momentos con respecto al punto b :

$$Q \times mr = B \times bs \quad \text{,} \quad B = Q \times \frac{mr}{bs} \quad (2).$$

Plano $X'X'$. — Corta á las tres líneas be, bd, ad . Fuerzas exteriores que hay que considerar, reacción Q y fuerza 1 .

Par be : momentos con relación al punto d :

$$Q \times mn - 1 \times rn = D \times bd.$$

$$D = \frac{Q \times mn - 1 \times rn}{bd} \quad (3).$$

Mangueta bd : momentos con respecto al punto a :

$$1 \times mr = C \times ab.$$

$$C = \frac{1 \times mr}{ab} \quad (4).$$

Continuaremos del mismo modo observando las prescripciones siguientes (núm. 854):

1.^a Un plano transversal ha de cortar, á lo más, á tres piezas de la armadura.

2.^a Para determinar la fuerza interior de una de ellas se toma como origen de los momentos el punto de encuentro de las otras dos.

Plano $X''X''$. — Tirante de : momentos con respecto á a :

$$1 \times mr = E \times au \quad \text{,} \quad E = \frac{1 \times mr}{au} \quad (5).$$

Tirante $d f'$: momentos con respecto á e :

$$Q \times m x - 1 \times r x = F \times e z \quad \text{,} \quad F = \frac{Q \times m x - 1 \times r x}{e z} \quad (6).$$

Entre los nudos e y l , todo plano trasversal corta á más de tres piezas elementales de la armadura; de modo que no se pueden determinar, al parecer, las fuerzas H , L , M , N y V ; veremos que el problema es posible, pero antes hallaremos las fuerzas R , T y S correspondientes á las tres piezas cortadas por el plano $X'''X'''$.

Par $l t$: origen de momentos el punto f .

$$Q \times m y - 1 \times r y - 2 \times x y + 3 \times y o = R \times e f.$$

$$R = \frac{Q \times m y - 1 \times r y - 2 \times x y + 3 \times y o}{e f} \quad (7).$$

Tirante $f f''$: origen de momentos el punto t .

$$Q \times m t - 1 \times r t - 2 \times x t - 3 \times o t = S \times t f''.$$

$$S = \frac{Q \times m t - 1 \times r t - 2 \times x t - 3 \times o t}{t f''} \quad (8).$$

Tirante $t h$: origen de momentos el punto a .

$$1 \times m r + 2 \times m x + 3 \times m o = T \times a p - S \times f f'.$$

$$T = \frac{1 \times m r + 2 \times m x + 3 \times m o + S \times f f'}{a p} \quad (9).$$

Determinación de la fuerza N (mangueta $l h$, fig. 7.^a, lám. 43). — Consideremos la sección $Y F$ en la mangueta $l h$ y tomemos como origen de los momentos el punto t . A excepción de las fuerzas N y 3 , las demás concurren en t , y su momento es cero. Tendremos, pues,

$$3 \times l a = N \times l t \quad \text{ó} \quad N = \frac{3 \times l a}{l t} \quad (10).$$

Si las fuerzas 1 , 2 y 3 son iguales, é iguales también las divisiones $a b$, $b e$, etc., del par (fig. 6.^a, lám. 43); la fuerza N tiene el mismo valor que

la C de la mangueta $b d$ [fórmula (4)]; esto se deduce también por el procedimiento gráfico de Cremona.

Determinación de la fuerza M (tirante $e h$ fig. 8.^a, lám. 43). — La sección $Y' Y'$, tomando como origen el punto t , da

$$3 \times l a = M \times t c \quad \text{ó} \quad M = \frac{3 \times l a}{t c} \quad (11).$$

También son iguales los valores de M y de E (fórmula 5), cuando las fuerzas exteriores son iguales, así como las divisiones del par.

Fuerzas H y L . — Plano trasversal $X^{iv} X^{iv}$ (fig. 6.^a, lám. 43).

Fuerza H : origen de momentos, el punto a .

$$1 \times m r + 2 \times m x = H \times a e - M \times a i.$$

$$H = \frac{1 \times m r + 2 \times m x + M \times a i}{a e} \quad (12).$$

Fuerza L : origen de momentos, el punto f .

$$Q \times m y - 1 \times r y - 2 \times x y = L \times e f - M \times f k.$$

$$L = \frac{Q \times m y - 1 \times r y - 2 \times x y + M \times f k}{e f} \quad (13).$$

Fuerza V (tirante $f h$). — Plano trasversal $X^v X^v$: origen de momentos el punto a .

$$1 \times m r + 2 \times m x = V \times a p - S \times f f' - M \times a a'.$$

$$V = \frac{1 \times m r + 2 \times m x + S \times f f' + M \times a a'}{a p}.$$

935. Hemos aplicado el método de Ritter á un caso complicado; en general, las fórmulas se encuentran con más sencillez todavía.

Las fórmulas del caso anterior, y las de los siguientes, son generales, es decir, que pueden aplicarse á toda clase de armaduras, ya sean iguales ó desiguales las fuerzas exteriores 1 , 2 , etc., y simétricas ó no las figuras con respecto á la línea vertical que pasa por la hilera.

También es aplicable el método al caso en que se estima la presión del

viento en una de las vertientes tan sólo (núm. 924, figs. 11 (a) y 11 (b) de la lám. 43).

936. Armadura tipo inglés (fig. 10, lám. 43):

$$\begin{aligned} \text{Par } AB \text{ (compresión = 1)} \dots\dots\dots 1 &= Q \times \frac{AC}{Ce}. \\ \text{Tirante } AC \text{ (extensión = 2)} \dots\dots\dots 2 &= Q \times \frac{Aa}{Ba}. \\ \text{Tornapunta } BC \text{ (compresión = 3)} \dots\dots\dots 3 &= P \times \frac{Aa}{Ad}. \\ \text{Par } BD \text{ (compresión = 4)} \dots\dots\dots 4 &= \frac{Q \times AC - P \times Ca}{Ce}. \\ \text{Péndola } DC \text{ (extensión = 5)} \dots\dots\dots 5 &= \frac{P \times Aa}{AC}. \\ \text{Tirante } CE \text{ (extensión = 6)} \dots\dots\dots 6 &= \frac{Q \times AC - P \times Ca}{CD}. \\ \text{Tornapunta } DE \text{ (compresión = 7)} \dots\dots\dots 7 &= \frac{P \times Aa + P' \times CA}{Ah'}. \\ \text{Par } DF \text{ (compresión = 8)} \dots\dots\dots 8 &= \frac{Q \times AE - P \times Ea - P' \times CE}{Ee}. \end{aligned}$$

Para determinar la fuerza de extensión 9 del pendolón FE, suponemos que la parte FYY está aislada del resto de la armadura por la sección YY; la fuerza 8, por ser de compresión, se dirigirá hacia la YY, y la 9, que es de extensión, se separará, como indican las flechas. Tomando los momentos con relación á H, se obtiene:

$$- P'' \times Hh = 9 \times Hh - 8 \times Hm,$$

de donde

$$9 = \frac{8 \times Hm - P'' \times Hh}{Hh}.$$

Ejemplo. — Datos del problema:

Luz de la armadura = $l'' = 15$ metros; flecha = $f'' = FE = 3$ metros.

Separación de armaduras = $d = 3,5$ metros.

$\frac{f''}{l''} = \frac{1}{5}$; peso por metro cuadrado de cubierta, suponiendo que es de

zinc y la armadura es de hierro, $p = 90$ kilogramos.

Dimensiones de las líneas de la armadura:

$$\begin{aligned} AF = 8^m,10 \quad \text{''} \quad AB = BD = DF = 2^m,7 \quad \text{''} \quad Ba = 1^m \quad \text{''} \quad DC = 2^m. \\ AC = 5^m \quad \text{''} \quad CE = 2^m,5 \quad \text{''} \quad BC = AB = 2^m,7 \quad \text{''} \quad Cc = Ad = 1^m,88. \\ Ee = 2^m,81 \quad \text{''} \quad Ah = 4^m,68 \quad \text{''} \quad Hh = Aa = 2^m,5 \quad \text{''} \quad Hm = Cc = 1^m,88. \end{aligned}$$

El peso $P = P' = P''$ que actúa en cada nudo, se obtiene por el producto $p \times d \times AB$, puesto que son iguales las partes AB, BD, DF; tendremos, pues,

$$P = P' = P'' = 90 \times 3,5 \times 2,7 = 850 \text{ kilogramos.}$$

La reacción Q es igual á $2,5 P = 2126$ kilogramos.

Aplicando las fórmulas anteriores hallamos:

$$\begin{aligned} \text{Pares} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} AB(1) = 5654 \text{ kilogramos.} \\ BD(4) = 4524 \quad \text{''} \\ DF(8) = 3400 \quad \text{''} \end{array} \right. \\ \text{Tirantes} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} AC(2) = 5135 \quad \text{''} \\ CE(6) = 4253 \quad \text{''} \end{array} \right. \\ \text{Tornapuntas} \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} BC(3) = 1130 \quad \text{''} \\ DE(7) = 1360 \quad \text{''} \end{array} \right. \\ \text{Péndolas} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} DC(5) = 425 \quad \text{''} \\ FE(8) = 1707 \quad \text{''} \end{array} \right. \end{aligned}$$

937. Armadura de pares, puente y tirante (fig. 4.^a (a), lám. 40):

$$\begin{aligned} \text{Par } AB \text{ (compresión 6)} \dots\dots\dots 6 &= 5 \times \frac{AE}{En}. \\ \text{Tirante } AE \text{ (extensión 7)} \dots\dots\dots 7 &= 5 \times \frac{AH}{CH}. \\ \text{Puente } BD \text{ (compresión 8)} \dots\dots\dots 8 &= 1 \times \frac{Af}{Bf}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de la compresión 9 del par superior BC, se supone la sección YY; y tomando los momentos con respecto al punto D, se obtiene en función de las fuerzas 6 (par AB) y 1 (fuerza exterior en B)

$$9 = \frac{6 \times Dm - 1 \times DB}{Dm};$$

5 es la reacción del apoyo *A*, que cuando las fuerzas 1, 2 y 3 son iguales, tiene por valor $\frac{1+2+3}{2}$.

Las fórmulas anteriores son iguales á las deducidas directamente del diagrama (núm. 928), como vamos á ver.

Fuerza 6: los triángulos *ACH* y *AEn* son semejantes, de modo que $\frac{AE}{En} = \frac{AC}{CH}$; luego $5 \times \frac{AE}{En}$, valor que hemos hallado anteriormente para la fuerza 6, es igual á $5 \times \frac{AC}{CH}$, valor deducido del diagrama en el número 928.

Los valores de la fuerza 7 son idénticos, y los de la 8 iguales, por ser $\frac{Af}{Bf} = \frac{AH}{CH}$.

Lo mismo sucede con los valores de la fuerza 9, porque siendo semejantes los triángulos *DBm* y *ACH*, se verifica que $\frac{DB}{Dm} = \frac{AC}{CH}$.

938. Armadura de pares, tornapuntas y pendolón (fig. 7.^a (a), lám. 39):

$$\begin{aligned} \text{Par } AD \text{ (compresión = 6)} & \dots\dots\dots 6 = 5 \times \frac{AE}{Er} \\ \text{Tirante } AE \text{ (extensión = 7)} & \dots\dots\dots 7 = 5 \times \frac{Az}{Dz} \\ \text{Tornapunta } DE \text{ (compresión = 8)} & \dots\dots\dots 8 = \frac{1 \times Az}{An} \\ \text{Par } DC \text{ (compresión = 9)} & \dots\dots\dots 9 = \frac{5 \times AE - 1 \times Ez}{Er} \\ \text{Pendolón (extensión = 10)} & \dots\dots\dots 10 = \frac{9 \times Fs - 2 \times Fu}{Fu} \end{aligned}$$

5 es la reacción del apoyo *A*, y 1 y 2 las fuerzas exteriores aplicadas á *D* y *C*.

Como en el número anterior, es fácil demostrar que las fórmulas precedentes son equivalentes á las deducidas directamente de los diagramas, para esta armadura, en el núm. 928.

Valores de 6..... $\frac{AE}{Er} = \frac{AC}{CE}$ " Triángulos semejantes *AEr* y *ACE*.

Valores de 7..... $\frac{Az}{Dz} = \frac{AE}{EC}$ " Triángulos semejantes *ADz* y *ACE*.

Valores de 8..... Los triángulos semejantes *ADz* y *ECr*, dan

$$\frac{AD}{EC} = \frac{Az}{Er};$$

y como *AD* = *DE* y *Er* = *An*,

$$\frac{DE}{EC} = \frac{Az}{An}.$$

Los valores de 9 son también iguales, porque

$$\frac{AE}{Er} = \frac{AC}{CE} \text{ y } \frac{DC=ED}{EC} = \frac{Ez}{Er}$$

por la semejanza de los triángulos *EDz* y *ECr*.

Cuanto á la extensión 10 del pendolón, tiene exactamente el mismo valor encontrado en el núm. 928.

Se demostraría igualmente para toda clase de armaduras las equivalencias de resultados obtenidos por las fórmulas de Ritter y por las deducidas de los diagramas de fuerzas.

939. Armadura Polonceau sencilla (fig. 2.^a (a), lám. 41):

$$\begin{aligned} \text{Par } AB \text{ (compresión = 6)} & \dots\dots\dots 6 = 5 \times \frac{mn}{BC} \\ \text{Tirante } AC \text{ (extensión = 7)} & \dots\dots\dots 7 = 5 \times \frac{mf}{Br} \\ \text{Mangueta } BC \text{ (compresión = 8)} & \dots\dots\dots 8 = 1 \times \frac{mf}{AB} \\ \text{Par } BD \text{ (compresión = 9)} & \dots\dots\dots 9 = \frac{5 \times mn - 1 \times fn}{BC} \\ \text{Tirante } CS \text{ (extensión = 11)} & \dots\dots\dots 11 = \frac{5 \times Dm - 1 \times Df}{Dt} \\ \text{Tirante } CD \text{ (extensión = 10)} & \dots\dots\dots 10 = \frac{1 \times mf + 11 \times ut}{As} \end{aligned}$$

Estas mismas fórmulas sirven para la armadura Polonceau de tirante horizontal (fig. 5.^a (a), lám. 11), trazando en ella las rectas *Br*, *As*, *Dt*, etcétera, de la fig. 2.^a (a).

940. Armadura tipo suizo (fig. 3.^a (a), lám. 40):

$$\begin{aligned} \text{Par } AB \text{ (compresión = 6)} &\dots\dots\dots 6 = 5 \times \frac{tz}{Dh} \\ \text{Tirante } AD \text{ (extensión = 7)} &\dots\dots\dots 7 = 5 \times \frac{tu}{Bs} \\ \text{Tornapunta } BD \text{ (compresión = 8)} &\dots\dots\dots 8 = 1 \times \frac{tu}{Ar} \\ \text{Par } BC \text{ (compresión = 9)} &\dots\dots\dots 9 = \frac{5 \times tz - 1 \times uz}{Dh} \\ \text{Pendolón } CD \text{ (extensión = 10)} &\dots\dots\dots 10 = \frac{9 \times Rd - 2 \times Rf}{Rf} \end{aligned}$$

5 es la reacción del apoyo A; 1 y 2 las fuerzas exteriores en los nudos B y C.

941. Armadura (fig. 4.^a (a), lám. 42):

$$\begin{aligned} \text{Par } AB \text{ (compresión = 8)} &\dots\dots\dots 8 = 7 \times \frac{AC}{BC} \\ \text{Tirante } AC \text{ (extensión = 9)} &\dots\dots\dots 9 = 7 \times \frac{Am}{Bm} \\ \text{Mangueta } BC \text{ (compresión = 10)} &\dots\dots\dots 10 = 1 \times \frac{Am}{AB} \\ \text{Par } BD \text{ (compresión = 11)} &\dots\dots\dots 11 = \frac{7 \times AC - 1 \times Cm}{BC} \\ \text{Tirante } CD \text{ (extensión = 12)} &\dots\dots\dots 12 = 1 \times \frac{Am}{Au} \\ \text{Tirante } CS \text{ (extensión = 13)} &\dots\dots\dots 13 = \frac{7 \times Dt - 1 \times Dz}{At} \\ \text{Puente } DN \text{ (compresión = 15)} &\dots\dots\dots 15 = \frac{1 \times Am + 2 \times Dt}{At} \\ \text{Par } DE \text{ (compresión = 14)} &\dots\dots\dots 14 = \frac{11 \times Ns - 12 \times Nr - 2 \times DN}{Ns} \end{aligned}$$

7 es la reacción del apoyo A; 1 y 2 las fuerzas exteriores aplicadas á los nudos B y D.

TRANSFORMACIÓN DE ARMADURAS

942. Son aplicables, y con ventajas de consideración, á las armaduras los principios de transformación de entramados que expusimos en los números 865 y 866. La fórmula (1) del núm. 866

$$F = \frac{P}{P''} \times \frac{f'' h'}{f' h''} \times F''$$

permite hallar las compresiones ó extensiones F' de una armadura I (fig. 9.^a, lám. 35) cuando nos sean conocidas las fuerzas F'' de las piezas correspondientes de otra armadura II (fig. 8.^a, lám. 35). Recordaremos que las letras de la fórmula anterior tienen la siguiente representación:

	ARMADURAS	
	<i>I</i>	<i>II</i>
Fuerzas exteriores, en los nudos.....	P	P''
Fuerzas interiores, en las piezas.....	F'	F''
Flecha de la armadura, ó sea magnitud de la perpendicular bajada desde el punto de encuentro de los pares á la horizontal que pasa por su pie.....	f'	f''
Longitudes de las piezas análogas.....	h'	h''

Llamando A al producto $\frac{P}{P''} \times \frac{f''}{f'}$, la fórmula anterior se convierte en esta otra:

$$F = A \times \frac{h'}{h''} \times F'' \quad (1).$$

Para poder aplicar las fórmulas anteriores, es suficiente que la armadura I sea, en sus líneas, *proyección paralela* de la II , es decir, que han de componerse las dos del mismo número de piezas, dispuestas de modo análogo, y ha de existir proporcionalidad entre las longitudes de las piezas que están en línea recta (véase núm. 865).

Como ejemplo, que pondrá de manifiesto las excelencias del método de transformación, determinaremos las fuerzas interiores de una armadura inglesa como la representada en la fig. 10 de la lám. 43, utilizando los cálculos hechos para la del ejemplo del núm. 936; esta última armadura, ya calculada, la representaremos con la cifra II , y la nueva armadura con la I .

Datos de la nueva armadura (I):

Luz = l = 8 metros; flecha = f' = 2 metros; distancia entre armaduras = d = 3 metros.

Cubierta de teja plana: p = 150 kilogramos.

Longitud total de par = AF = 4,50 metros „ $AB = BD = DF$ = 1,50 metros.

Peso P en cada nudo = $AB \times d \times p$ = $1,5 \times 3 \times 150$ = 675 kilogramos.

Según vimos en el ejemplo del núm. 936, $P'' = 850$, y $f'' = 3$. Podemos formar el factor A que es igual á

$$\frac{P}{P''} \times \frac{f''}{f'} = \frac{675 \times 3}{850 \times 2} = 1,19;$$

según esto

$$F' = 1,19 \frac{h'}{h''} F''.$$

Es decir, que las fuerzas interiores F' de las piezas de la armadura nueva (I) se obtendrán multiplicando las F'' de las piezas correspondientes de la armadura II por el factor $1,19 \frac{h'}{h''}$, siendo $\frac{h'}{h''}$ la relación de longitudes de las piezas análogas.

Por ejemplo: la parte de par AB tiene la longitud $h' = 1,50$ metros en la armadura I , y $h'' = 2,7$ metros en la II , sufriendo en esta última una compresión $F'' = 5654$ kilogramos. La compresión del par AB en la armadura I sería

$$F = 1,19 \times \frac{1,50}{2,70} \times 5654 = 3769 \text{ kilogramos.}$$

Aplicando la fórmula anterior á las diversas piezas de la armadura I , hallaríamos:

PIEZAS	ARMADURA II		ARMADURA I	
	h''	F''	h'	F'
Par BD	2,70	4524	1,50	2940
» DF	2,70	3400	1,50	2210
Tornapunta BC	2,70	1130	1,50	734
» DE	3,2	1360	1,88	810
Tirante AC	5	5135	2,66	2721
» CE	2,5	4253	1,33	2254
Péndola DC	2	425	1,33	283
» FE	3	1707	2	1138

943. Armaduras semejantes. — Cuando las armaduras son semejantes, geoméricamente, la fórmulas anteriores se convierten en la sencilla

$$F' = m F'',$$

según se ha demostrado en los núms. 861 y 866, siendo m el cociente $\frac{P}{P''}$ de las fuerzas que obran en los nudos.

Consideremos las dos armaduras semejantes figs. 7.^a (a) y 10 (a) de la lám. 39, que distinguiremos con las difras I [fig. 7.^a (a)] y II [fig. 10 (a)], y llamemos p, d y p'', d'' á los pesos por metro cuadrado de cubierta y distancia entre armaduras, en las dos consideradas. Será $P'' = A' D' \times p'' \times d''$ en la armadura II [fig. 10 (a)] y $P = A D \times p \times d$ en la I [fig. 7.^a (a)]. Según esto, la fuerza F' , en esta última armadura, se podrá determinar, en función de la F'' de la primera [fig. 10 (a)], por la fórmula anterior, y tendremos:

$$F' = \frac{A D \times p \times d}{A' D' \times p'' \times d''} \times F'' \quad (*).$$

Si l y l'' son las luces AB y $A'B'$ de las armaduras, la semejanza de éstas da $\frac{l}{l''} = \frac{A D}{A' D'}$; de modo que

$$F' = \frac{l p d}{l'' p'' d''} F'' \quad (2).$$

Supongamos que en la armadura II [fig. 10 (a)] se verifica $l'' = 1, p'' = 1$ y $d'' = 1$, y calculamos las fuerzas F'' de compresión y extensión de todas las piezas, será

$$F' = l p d \times F'' \quad (3);$$

de modo que las fuerzas F' correspondientes á una armadura se obtendrán multiplicando los valores de F'' , que hacen el papel de módulos, por el producto $l p d$ de la luz en metros por el peso p del metro cuadrado de cubierta en kilogramos y la distancia d entre las armaduras que se van á calcular, tomada en metros también.

(*) La comparación de los diagramas semejantes (figs. 10 (b) y 7.^a (b) de la lám. 39) conduce también á la fórmula $F' = m F''$ (núm. 861).

Con la fórmula anterior se pueden formar tablas que son de grande utilidad porque permiten calcular rapidísimamente las fuerzas interiores de una armadura; no hay más que formar el producto lpd y multiplicarlo por los módulos contenidos en la tabla.

La sección resistente ω de las piezas extendidas se obtendrá también multiplicando por pld la ω'' de la armadura patrón, según hemos dicho en el núm. 861.

CIMBRAS

944. Las cimbras se componen de cuchillos, cuyos camones ó partes curvas, que hacen el oficio de pares, están unidos por costillas, sobre las cuales descansan las dovelas ó hiladas de la bóveda en construcción. Los cuchillos son verdaderas armaduras para los efectos de resistencia y de cálculo; como problema nuevo, consideraremos solamente el de la determinación de las cargas.

945. Presión ejercida por una dovela de una bóveda en construcción sobre su cimbra. — La dovela $HMcu$ (fig. 9.^a, lám. 44) se apoya en la costilla E colocada en el plano medio CD , y ejerce una presión, en dirección del radio CE , que se comunica á la cimbra y vamos á determinar.

Sea R la resultante de las acciones que la parte de bóveda construída, situada encima de HM , desarrolla en este plano, y a el centro de gravedad de la dovela $HMcu$, cuyo peso mn , compuesto con $R = ms$, dará la resultante $md = R'$ de las fuerzas que actúan en el plano de junta uc , siendo t el punto de aplicación.

Prolongando dm hasta que corte en o á CD , y tomando $or = md$, habremos de descomponer $R' = or$ normal y paralelamente á CD ; trazando Fr paralela á CD , las componentes normal y tangencial son, respectivamente, Fo y Fr ; esta última cantidad es la que buscamos, pero ha de restarse de ella el equivalente del rozamiento de resbalamiento que se produce en el plano de junta uc á causa de la presión Fo , rozamiento que tiene por valor $Fo \times f$, siendo f el coeficiente correspondiente.

Pero $f = tg\varphi$, llamando φ al ángulo de rozamiento, que aquí haremos igual á 15° . Si, pues, trazamos oh de modo que $Foh = 15^\circ$, en el triángulo rectángulo Foh se tiene $Fh = Fo \times tg\varphi$; será, pues, $hr = Fr - Fh$ la presión causada á la costilla E por la dovela proyectada en $HMcu$, presión dirigida según el radio CE de la curva de intradós.

La determinación de hr se funda en el conocimiento de la resultante R

de las acciones ejercidas por la parte de bóveda superior á la dovela considerada. Partiendo de la dovela últimamente colocada, R será cero, y podremos hallar la acción sobre la dovela inmediata inferior y pasar después á las sucesivas.

La intersección de oh con el plano de junta uc es el punto de aplicación de la presión que en uc causa la parte de bóveda colocada encima de este plano, sobre el cual resbalaría dicha parte si no existiese la cimbra. Cuando el punto de intersección de oh y uc resulta á la derecha de c , es prueba que la parte de bóveda superior al plano uc tiende á separarse del resto girando alrededor de la arista proyectada en c ; en este caso la fuerza $or = R'$ se descompondrá en las direcciones oc , oD ; la primera componente representa la presión en c , y la segunda la presión transmitida á la cimbra, que es la incógnita que se desea conocer.

Conociendo las presiones ejercidas en los camones AB , BD de la cimbra (fig. 4.^a (a), lám. 44), se deducirán fácilmente, en dirección y magnitud, las resultantes **1**, **2** y **3** que obran en los nudos y que han de servir para la determinación de las fuerzas interiores de las piezas que constituyen la cimbra, conocida que sea ésta por sus líneas, así como la distancia á que se colocan los cuchillos. Los camones, que resisten ineditamente el peso de la bóveda por intermedio de las costillas, son piezas sometidas á flexión y compresión.

En el cálculo de la cimbra se supone, como es práctica, que la bóveda se construye al mismo tiempo por los dos arranques; de modo que las fuerzas tienen por plano de simetría el vertical que pasa por el eje. Generalmente se atiende á la carga completa, es decir, que toda la bóveda, á excepción de la clave, está colocada sobre la cimbra; pero es conveniente estudiar el efecto ocasionado por las dovelas cuando las hiladas superiores llegan tan sólo á los riñones, y también cuando la cimbra resiste las tres cuartas partes de la carga total, porque pudiera haber algunas piezas que se hallen en peores condiciones de resistencia en estas situaciones intermedias de carga.

946. Si no se quiere emplear el método gráfico antes descrito, para la determinación de las presiones que causan en la cimbra las dovelas, podrá aplicarse la siguiente fórmula empírica:

$$p = t' \left(e + \frac{e^2}{2R} \right),$$

en la cual:

p = presión normal al intradós por metro cuadrado de superficie de cimbra.

t' = peso del metro cúbico de mampostería de la bóveda, en kilogramos.

e = espesor de la bóveda en la clave, en metros.

R = radio de intradós.

Si la bóveda es muy rebajada (figs. 8.^a (a) y 8.^a (b), lám. 44) se considera que las presiones son verticales, con lo cual, sin error apreciable, se facilita mucho el cálculo de las fuerzas interiores.

947. Una vez conocidas las fuerzas exteriores no ofrece dificultad la determinación de las interiores, pudiéndose emplear el procedimiento gráfico de Cremona ó los de Ritter ó Culmann, como en un entramado cualquiera.

Las figs. 4.^a á 8.^a de la lám. 44, contienen los diagramas de fuerzas de algunos tipos de cimbra; no detallamos su construcción porque es la ya explicada para vigas y armaduras.

Fig. 4.^a (a). Las presiones 1 y 3 se transmiten á los puntos C y N por intermedio de las piezas BC y EN . La cimbra queda reducida á las líneas de la fig. 4.^a (b) para la construcción del diagrama de fuerzas 4.^a (c).

Fig. 5.^a (a). Las piezas BN , DR , señaladas con puntos, son accesorias y no deben tomarse en consideración en el diagrama fig. 5.^a (b). El polígono de fuerzas exteriores es $abcd a$, y las reacciones de los apoyos son $de = 4$, $ea = 5$.

Figs. 6.^a, 7.^a y 8.^a. Los diagramas no ofrecen particularidad alguna.

XII

PIEZAS CURVAS

PIEZAS CURVAS

948. Se diferencian de las vigas rectas en que dan lugar á reacciones R_1 , R'_1 , oblicuas á los apoyos (fig. 14, lám. 44), las cuales se descomponen en otras normales F , F_1 y en los horizontales N , N' ; esto equivale á decir que las piezas curvas producen presiones F , F_1 y empujes N , N' .

Con la denominación de piezas curvas, comprendemos:

Arcos de madera ó de hierro para ó armaduras para cuchillos de puente.—

Los de madera pueden ser macizos, de sección transversal rectangular ó formando viga de celosía (véase la fig. 11, lám. 44, y la sección C por AB). Los arcos de hierro pueden estar formados de una viga laminada, como sucede en las armaduras de los edificios sistema Tollet (fig. 10, lám. 44) ó compuesta, de alma llena, ó bien constituir verdaderas vigas de celosía (fig. 12, lám. 44), cuyos cordones de intradós y trasdós se organizan con escuadras, tablas, nervios, etc. (véase las secciones C y C').

En todos casos, la sección transversal puede ser constante ó variable.

Armaduras sin tirante.—En realidad hace las veces de tirante el terreno que sirve de fundamento á la obra, que es el que destruye los empujes N , N' (figs. 10 y 13, lám. 44.) El cordón de trasdós (fig. 13, lám. 44) es rectilíneo; el de intradós es curvo, y ambos prolongados forman el pilar bc , que algunas veces es sustituido por una columna. El alma puede ser llena (a , b) ó calada.

Las armaduras poligonales (fig. 1.^a, lám. 45) forman parte de este grupo.

Los arcos y armaduras de los grupos anteriores se calculan del mismo modo; el procedimiento que á continuación describimos es general é independiente de la forma del entramado ó pieza curva.

949. Resolución general del problema de resistencia en las piezas curvas. — Empezaremos por trazar el eje de la pieza curva; si la sección es de altura constante (fig. 2.^a, lám. 45), el eje equidista del intradós y del trasdós;

cuando la altura de las secciones es variable (fig. 3.^a, lám. 45), el eje OHE se forma uniendo los puntos medios de las secciones ef , hl , etc.

Supongamos conocidas las reacciones verticales (F) y los empujes (N) (figs. 2.^a y 3.^a, lám. 45), y consideremos una sección cualquiera, la AB , por ejemplo; en ella ejercen su acción las reacciones F , N y las fuerzas 1 aplicadas á la pieza curva, situadas todas ellas á la izquierda de dicha sección. Estas fuerzas pueden ser sustituidas por su resultante R_1 .

En la sección AB se desarrolla:

1.^o *Un momento de flexión* μ , que se obtendrá tomando los momentos, con relación al centro O de la sección, de las fuerzas F , N , 1, ó de su resultante. En el primer caso, $\mu = F \times Or - N \times Or - 1 \times Ot$, tomando como positivos los momentos que producen rotaciones en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj, y dando signo negativo á los otros. Cuando se aprecia únicamente la resultante R_1 , se descompone normal y tangencialmente á AB ; el momento de la componente normal P , es el momento de flexión, y será $\mu = P \times OD$.

2.^o *Compresiones ó extensiones*, que se obtienen estimando normalmente á AB las fuerzas exteriores F , N , 1 , etc., y sumando algebraicamente las componentes; ó bien proyectando en Dn , perpendicularmente á AB , la resultante R_1 . La fuerza $P = Dn$ será de compresión si se dirige á AB y de extensión cuando se aleja de este plano.

En general, denominaremos *compresión* á la fuerza Dn , y la representaremos con la letra P .

3.^o *Esfuerzo cortante* C , que es la suma algebraica de las componentes de F , N , 1, paralelas al plano AB , ó bien la componente Dm de la resultante R_1 .

A estos efectos hay que añadir el producido por las dilataciones ó contracciones del material en las piezas curvas metálicas, pero no lo tendremos en cuenta.

En las piezas curvas de madera, laminadas de hierro ó compuestas, metálicas, de pequeña altura, se prescinde del esfuerzo cortante, como vimos se hacía en las vigas rectas (núm. 491). Se considerarán como piezas flexadas y comprimidas (núm. 589), y la ecuación de resistencia que se empleará para su cálculo es

$$R = \frac{\mu v}{I} + \frac{P}{\omega},$$

siendo μ el momento de flexión, v la semialtura de la sección transversal, I el

momento de inercia de esta sección, ω el área, P la fuerza de compresión y R el coeficiente de trabajo por compresión ó por extensión, que son iguales para el hierro y madera.

μ y P tienen valores diferentes para las diversas secciones, y se ha de demostrar en los proyectos que la ecuación anterior queda verificada con valores admisibles de R .

En las piezas curvas de grande altura, de alma llena ó de celosía, lo mismo que para las vigas rectas de igual clase (núm. 493), los cordones ó cabezas se calculan para que resistan al momento de flexión μ y á la compresión P , y se empleará al efecto la ecuación anterior, teniendo en cuenta que I y ω se refieren, en este caso, á la sección de las dos cabezas ó cordones (véase C , fig. 11, y C, C' , fig. 12, lám. 44). Puesto que uno de los cordones está sometido á extensión y otro á compresión, la cantidad $\frac{P}{\omega}$ hace de sumando unas veces y de sustraendo otras, siendo el coeficiente de trabajo R en los cordones de trasdós é intradós dado por la ecuación

$$R = \frac{\mu v}{I} \pm \frac{P}{\omega}.$$

Los detalles de cálculo se han explicado ya en los núms. 587 á 589.

Cuanto al alma de la viga, se calculará de modo que resista al esfuerzo cortante C , como se hacía en las vigas rectas (núm. 557).

Como vemos, el problema de cálculo de la resistencia de una pieza curva depende del conocimiento de las reacciones de los apoyos F, F' , de los empujes N, N' , momentos de flexión μ , compresión P y esfuerzo cortante C . La determinación de estas cantidades incógnitas forma el objeto de los párrafos siguientes:

950. Polígono de presiones. Propiedades.—Supongamos que, en magnitud y dirección, son conocidas las reacciones **5** y **6** del arco cuyo eje es AB (fig. 6.^a, lám. 45), y sean **1, 2, 3**.... etc., las fuerzas exteriores aplicadas á los puntos m, n, s Tracemos $c' O$ igual y paralela á la reacción **6**, y las $c'd', d'e'$, etc., paralelas é iguales, respectivamente, á las fuerzas **1, 2**, etc.; tomemos O como polo y dibujemos las radios polares Od', Oe' , etc.

Por el punto c de encuentro de ac y **1**, tracemos cd paralela al segundo radio polar Od' hasta su intersección d con **2**; por este punto, la recta de paralela al radio polar Oe' , y así sucesivamente; como comprobación, la paralela á Ob' trazada por h debe coincidir con la reacción **5** del apoyo B

El polígono $acdehb$ es uno de los infinitos polígonos funiculares del sistema de fuerzas **1, 2..... 4**; pasa por los puntos a y b , y esta condición sirve para determinarlo.

En una sección trasversal CD que pasa por un punto r comprendido entre otros dos n y s de aplicación de fuerzas exteriores, la resultante de las fuerzas **1 y 2** que se hallan á la izquierda es Oe' en magnitud, y de en posición y sentido. En una palabra, en el plano CD causan las fuerzas exteriores una presión cuyo punto de aplicación es x , y cuya línea de acción y magnitud son, respectivamente, de y el radio polar Oe' . Por esta razón se denomina *polígono de las presiones* el $acd..... b$.

Diremos, pues, que entre todos los polígonos funiculares correspondientes á un sistema de fuerzas aplicadas á un cuerpo ó á un sistema de cuerpos, existe uno cuyos lados son las líneas de acción de las resultantes de las acciones exteriores correspondientes á una sección trasversal cualquiera, estando representadas las magnitudes de estas resultantes por los radios polares respectivos.

Cuando las fuerzas exteriores **1, 2**, etc., están infinitamente próximas, el polígono se convierte en una *curva de presiones*; la tangente á esta curva en x sería la línea de acción de la resultante, y el radio polar paralelo á la tangente daría la magnitud.

951. El polígono de las presiones da un medio sencillo de calcular el momento de flexión en una sección cualquiera.

Supongamos que AB (fig. 12, lám. 45) es el eje de un arco, cuyo polígono de presiones $MEf..... X$ hemos podido trazar. En una sección CD normal al arco $abdc$, la presión tiene la dirección Ef y la magnitud Oc' , que llevaremos á mn . La fuerza $mn = Oc'$ es la resultante de todas las situadas á la izquierda de CD ; de modo que el momento de flexión en esta sección es $\mu = mn \times os$, siendo os la perpendicular á nm bajada desde o .

Si hallamos la componente horizontal mr de mn y trazamos la vertical om , resulta $mn = \frac{rm}{\cos nmr}$ y $so = \frac{om}{\cos mos}$, y como los ángulos mos y nmr son iguales, tendremos $\mu = mr \times om$, ó, puesto que $mr = Oz$ y Oz no es otra cosa que la componente horizontal de la reacción $Oa' = 5$, es decir, el empuje horizontal N , será

$$\mu = N \times om,$$

que nos dice que el momento de flexión, en una sección trasversal cualquiera

del arco, es igual al producto del empuje horizontal N por la distancia vertical del centro de gravedad de la sección al polígono ó curva de las presiones.

Si el eje de la pieza curva fuese $MEfFX$ en vez de AB , las magnitudes om serían cero; de modo que los momentos de flexión μ son nulos en todas las secciones, las cuales se verán sometidas tan sólo á la compresión $P = rm$ y al esfuerzo cortante $C = nr$. Diremos, pues, que cuando el eje de la pieza curva coincide con la curva de las presiones, los momentos de flexión son cero, y la pieza trabaja únicamente por compresión y por esfuerzo cortante.

Cuando las cargas están uniformemente repartidas sobre la línea proyección horizontal de la pieza curva, la curva de las presiones es una parábola (núm. 423).

952. El polígono de las presiones presta, como acabamos de ver, grandes servicios; su trazado es el de un polígono funicular que tiene puntos obligados de paso, entre otros, los de aplicación de las reacciones de los apoyos, y es conveniente estudiar los casos en que el trazado es posible. Recordaremos á este propósito que, según se demuestra en estática gráfica, tres condiciones son necesarias y suficientes para definir un polígono funicular.

953. Arcos articulados en los arranques.—Sea AB (fig. 7.^a, lám. 45) un arco articulado en A y B ; por estos puntos deberán pasar las reacciones de los apoyos.

Determinemos la resultante R de las fuerzas **1, 2..... 5**, y unamos un punto cualquiera de ella, el C , por ejemplo, con los A y B . Si el arco es rígido, puede suponerse en equilibrio bajo la acción de R y de dos fuerzas dirigidas según AC y CB , cuyas magnitudes serán dadas por el triángulo mOn construído sobre $mn = R$ como base, trazando mO, nO paralelas á CA, CB ; y si se toma como polo el punto O , el polígono funicular correspondiente construído á partir de A , y cuyo primer lado es AC , pasará también por B y será *polígono de las presiones*.

Pero si trazamos Ou paralela á AB , cualquiera otro polo O' tomado sobre dicha recta dará lugar á un polígono funicular que pasará también por A y B ; de modo que resulta infinito número de polígonos de presión, siendo así que no debe haber más que uno, y es que siendo necesarias tres condiciones para fijar la posición de un polígono funicular, en el caso presente tan sólo existen dos, que son las de pasar por los puntos A y B .

En este caso, y en todos aquellos en que las condiciones sean dos, el problema resulta indeterminado, si se resuelve con los recursos de la estática, y hay necesidad de apelar á la teoría de la elasticidad, tomando en consideración las deformaciones que el sólido sufre bajo la acción de las fuerzas.

Que la estática es imponente para resolver el problema, es fácil deducirlo; el equilibrio existiría igualmente si las reacciones estuviesen dirigidas según AC' , BC' y tuviesen por magnitud los lados $O'm$, $O'n$ dados por el triángulo $mO'n$ construido sobre $mn = R$ con lados mO' , nO' paralelos á AC' , $C'B$, y lo mismo diremos de otras direcciones cualquiera entre las infinitas que se obtienen uniendo A y B con un punto de R . Observaremos que Om , $O'm$ tienen por componente F paralela á las fuerzas exteriores la misma cantidad am , siendo la otra componente $N(Oa, O'a$) la que varía. Además, las reacciones de los dos apoyos dan igual componente N , es decir, empujes iguales.

Para arcos circulares articulados únicamente en sus extremos, cuando éstos se hallan en una línea horizontal (fig. 5.^a, lám. 45) y la carga hr esté uniformemente repartida en proyección horizontal, á razón de p kilogramos por unidad lineal, el empuje N en los arranques tiene por valor, según dedujo M. Bresse,

$$N = \frac{pl^2}{2f} \times \frac{1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{l^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{I}{\omega f^2}},$$

siendo $2l = AB$, $f = Ce$, ω el área de la sección transversal del arco, é I su momento de inercia. Como primera aproximación del valor de N se puede prescindir del segundo factor, lo que equivale á suponer una articulación en C (núm. 958).

Cuando la carga p por unidad lineal está repartida á lo largo de la fibra media ACB del arco,

$$N = pr\alpha \times \frac{l}{2f} \times \frac{1 - \frac{3}{7} \frac{f^2}{l^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{I}{\omega f^2}},$$

representando r el radio del arco y α el ángulo en el centro.

954. Arcos parabólicos. — Supongamos un arco ACB articulado en los arranques (fig. 13, lám. 45) y sometido á cargas hr uniformemente repartidas, á razón de p kilogramos por cada metro de longitud $AB = L$ de proyección horizontal.

El polígono funicular correspondiente al sistema de cargas supuesto es una parábola AcB (fig. 5.^a, lám. 9.^a), en la cual $hc = ct$, y las tangentes tA, tB

son paralelas á los radios polares extremos OK, OH (núms. 423, 424 y 425); además, es AcB polígono de los momentos de flexión de la viga recta proyección de AB , y el momento máximo hc es igual á $\frac{1}{8} p L^2$,

siendo L la longitud total, ó $\frac{1}{2} p l^2$ si llamamos l á la semiluz, de modo que sea $2l = L$.

Construyamos el eje del arco ACB (fig. 13, lám. 45) como si fuese el polígono funicular de las cargas dadas, pasando por los puntos A y B , á cuyo efecto haremos $ab = pL$; situaremos el polo O á h unidades de ab en la perpendicular Oc á esta recta; trazaremos AD, BD paralelas á los radios polares Oa, Ob , y tomando $DC = Ce$ se dibujará la parábola que pasa por A, C y B (núm. 584).

Según lo demostrado en el núm. 951, los momentos de flexión μ en las secciones del arco parabólico ACB son cero. No hay más que esfuerzos cortantes C y compresiones P ; la misma parábola ACB , eje del arco, es la curva de presiones, y para obtener el valor de P en una sección cualquiera mn , no habrá más que trazar la tangente ts y el radio polar paralelo Ox , el cual representará la magnitud de la compresión en s con arreglo á la correspondiente escala.

Las reacciones R_2 en A y en B son iguales y están representadas por Oa, Ob ; se descomponen en una fuerza vertical $F = ac = pl$ y un empuje horizontal N , cuyo valor es $N = Oc = ac \times tg Oac$; y como, llamando f á la flecha Ce ,

$$ac = pl \quad , \quad tg Oac = tg ADe = \frac{Ae}{eD} = \frac{l}{2f}$$

será

$$N = \frac{pl^2}{2f} \quad (1).$$

Es el mismo resultado obtenido en el núm. 826, si se observa que allí l representa una magnitud doble de la que le asignamos ahora.

La reacción R_2 tendrá por valor

$$R_2 = Oa = \sqrt{Oc^2 + ca^2} = pl \sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}} \quad (2).$$

955. Puentes suspendidos. — Todos los razonamientos precedentes son

aplicables al arco $A' C' B'$ (fig. 13, lám. 45), que es el ACB invertido. Las presiones P son ahora extensiones, y tienen en los puntos C' y A' , respectivamente, los valores (1) y (2).

956. Arcos articulados en los arranques y en la clave. — Uno de los lados cd del polígono de presiones (fig. 8.^a, lám. 45) ha de pasar por la articulación C , así como los lados extremos Aa , Be han de partir de las articulaciones A y B de los arranques. El polígono de las presiones será, pues, el funicular que pase por A , C y B , correspondiente al sistema de fuerzas 1, 2..... 5, problema que se resuelve en estática gráfica del siguiente modo:

Sean A , B y C (fig. 9.^a, lám. 45) los tres puntos dados, y 1, 2..... 5 las fuerzas; se construye con ellas el polígono EF , y tomando un polo O cualquiera se dibujan los radios polares y el polígono funicular correspondiente $A' m n r$ B' . Sobre la recta CC' , prolongada, se toma $C_1' c' = Cc$, y sobre las rectas as , bn , etc., magnitudes sm' , tn' , etc., que guarden la relación

$$\frac{sm'}{sm} = \frac{tn'}{tn} = \dots = \frac{Cc}{C'c'}$$

Puede hacerse gráficamente esta operación prolongando mn hasta su encuentro en D con $A'B'$ y uniendo D y C_1' ; del mismo modo, para construir $n'r'$, se prolongará nr , y su intersección con $A'B'$ se unirá con n' , y así para los demás lados.

Haciendo $ua = sm'$, $xb = tn'$, etc., y uniendo A , a , b , etc., se obtiene el polígono $Aab d$ B , funicular del sistema de fuerzas 1, 2..... 5, que pasa por A , B y C .

Construido este polígono Aab B en la fig. 8.^a (lám. 45), si hacemos $a'b' = 1 + 2 + \dots + 5$, y trazamos $a'O$, $b'O$ paralelas á Aa , Be , el punto O será el polo correspondiente, y como comprobación los radios polares habrán de ser paralelos á los lados ab , bc de . El lado ca del polígono de presiones señala la dirección de la reacción común á las dos partes de arco; su magnitud es dada por el radio polar Oh paralela á cd , estimada en la escala de fuerzas.

Si trazamos Oz paralela á AB , y descomponemos las reacciones de los apoyos $R_1 = Oa'$, $R_1' = Ob'$, paralelamente á las fuerzas 1, 2..... 5 y á línea AB de los arranques, obtenemos

$$F = za', F_1 = b'z, N = N' = Oz.$$

957. Otro método para determinar las reacciones en las articulaciones. — Cuando no se quiera encontrar el polígono de presiones, y sí solamente las reacciones en los arranques y en la articulación central, puede emplearse el procedimiento siguiente: Sean H y T (fig. 4.^a, lám. 45) las resultantes de las fuerzas que obran en las partes de arco AC , BC , y h , t sus distancias á A y B . Llamemos N á la reacción en la articulación C , y m , n á las perpendiculares Aa , BE , bajadas á N desde A y B ; podremos suprimir una cualquiera de las dos partes de arco articuladas en C con tal de introducir en esta articulación la reacción N ; haciéndolo así, y tomando los momentos con respecto á los puntos A y B , tenemos:

$$Nm = Hh \left\{ \frac{m}{n} = \frac{Hh}{Tt} \right. \quad (3).$$

$$Nn = Tt \left\{ N = \frac{Tt}{n} = \frac{Hh}{m} \right. \quad (4).$$

El valor de la relación $\frac{m}{n}$ indica el medio de hallar la dirección de N , cuya magnitud es conocida por la fórmula anterior (4). Unanse A y C y divídase AC en dos partes que den la relación $\frac{AC}{DC} = \frac{Hh}{Tt}$; no habrá más que trazar Ca paralela á BD para tener la línea de acción de N .

En efecto; trazando Dd perpendicular á N , se verifica

$$\frac{Aa}{Dd} = \frac{AC}{DC} = \frac{Hh}{Tt} = \frac{m}{n}.$$

La reacción del apoyo A tiene la dirección AS' , porque considerando la parte de arco AC sometida á la resultante H , y las reacciones en C y en A , estas tres fuerzas han de ser concurrentes si el equilibrio existe. La magnitud Sb de la reacción en A puede obtenerse construyendo el triángulo Seb , en que Se es igual á H y la recta eb es paralela á Ca .

Sb tiene por componentes $be = N$ y $Se = F = H$: según esto, el empuje ó reacción N que existe en la articulación C se trasmite íntegra al apoyo A , dando lugar, además, á una reacción F , vertical, igual á H . Del mismo modo se veía que la reacción BV del apoyo B se descompone en una reacción vertical $F' = T$ y en el empuje N' .

El conocimiento de las reacciones en las articulaciones, permite construir

el polígono de las presiones, que es el funicular que pasa por A , C y B .

958. Cuando el arco es simétrico con respecto á la vertical que pasa por el punto medio, y está simétricamente cargado, $H = T$, $h = t$ y $Hh = Tt$, es decir, que el punto D coincide con el A y Ca es paralela á AB . En este caso (fig. 5.^a, lám. 45), si llamamos p á la carga por unidad lineal de proyección de arco, f á la flecha Ce y $L = 2l$ á la luz AB , será

$$H = pl \quad h = \frac{1}{2} l \quad m = f,$$

y la fórmula (4) anterior da para valor de la reacción,

$$N = \frac{pl^2}{2f} \quad (5).$$

igual al (1) encontrado en el núm. **954**.

Este mismo resultado se halla construyendo el triángulo dac sobre $ac = pl$, porque $dc = N = ac \times tg \, dac$; y como $tg \, dac = \frac{Ab}{ab} = \frac{l}{2f}$,

se obtiene $dc = N = \frac{pl^2}{2f}$. La reacción del apoyo A es Aa , de magnitud da ; se descompone en una reacción vertical Q igual á ac , esto es, al peso que obra sobre el semiarco, y un empuje $dc = N$.

Si se compara la fórmula (5) con la primera de las del núm. **953**, correspondiente al caso en que no existe articulación en la clave C , y si únicamente en los arranques A y B , se observa que el valor de N en este último caso se forma multiplicando el dado por la fórmula (5) por el factor

$$\frac{1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{l^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{I}{\omega f^2}}$$

del cual se puede prescindir cuando se desee hacer un cálculo rápido.

Como aplicaciones de los arcos articulados en los arranques y punto medio, pueden presentarse los compuestos de dos arcos lenticulares (fig. 14, lámina 45) y los de suspensión rígida (fig. 15, lám. 45), siendo á ambos aplicables las fórmulas anteriores.

959. Otros casos en que es posible el trazado del polígono de las presiones. — Ya hemos visto que, con los recursos de la estática, para que el polígono funicular quede definido son necesarias tres condiciones, puntos de paso ó direcciones de los lados. Estas condiciones existen en los casos siguientes:

Arco de tres articulaciones y un empotramiento (fig. 10, lám. 45). — Se construirá, como en el caso del núm. **956**, el polígono de presiones correspondiente á la parte ACD ; el polígono de fuerzas es hs y la presión en D es dD , de magnitud Os . Se prolongará el polígono á partir de D , á cuyo efecto haremos $st = 5$, uniremos O y t y desde el punto e de intersección de Dd , prolongada, con la fuerza 5 , trazaremos ef paralela al último radio polar Ot . La reacción, en el empotramiento MN , es de dirección fe y de magnitud Ot ; el centro de presión es f .

Arco empotrado en los extremos y articulado en tres puntos intermedios (fig. 11, lám. 45). — Se construirá el polígono de fuerzas ms y el de presiones $Ccdef$, correspondientes á la parte CE , y se prolongará el polígono por ambos extremos hasta encontrar las reacciones Oh en a , Ot en x y los puntos de aplicación respectivos.

960. Arcos con más de tres articulaciones. — El problema es más que determinado é imposible de resolver en general.

961. Arcos empotrados en los extremos, con dos articulaciones, cuando más, en puntos intermedios. — Cuando hay dos, una ó ninguna articulación intermedia, como se desconoce el punto de paso de las reacciones en los empotramientos el problema es indeterminado, y puede trazarse un número infinito de polígonos funiculares correspondientes al sistema de fuerzas que actúan sobre el arco. En estos casos, como en el de dos articulaciones únicas en los extremos, que hemos tratado en el núm. **953**, hay que apelar á la teoría de la elasticidad para la determinación de las reacciones de los apoyos, de cuyo conocimiento dependen los valores de los momentos de flexión μ , compresiones P y esfuerzos cortantes C , necesarios para los cálculos de resistencia (núm. **949**). Tal es el objeto de la materia contenida en los párrafos que siguen.

962. Resolución del problema. Importancia de la teoría. — Debe manifestarse *à priori* que en la resolución de los problemas de resistencia relativos á piezas curvas no preside todo el rigor matemático que fuera de desear. Las fuerzas que actúan sobre las piezas curvas, producen en éstas deformaciones más ó menos sensibles que son capaces de alterar la intensidad, dirección y punto de aplicación de aquéllas; de modo que la resolución exacta del pro-

blema exige el conocimiento de la figura de equilibrio afectada por la pieza en su estado definitivo, después de la deformación, siendo así que lo que se conoce es la figura del estado primitivo.

El problema así planteado es de tal modo difícil y conduce á cálculos tan complicadísimos, que no se ha intentado siquiera encontrar la solución.

Mas como quiera que lo que se busca es una teoría que dé aproximaciones suficientes en la práctica, y, por otra parte, son generalmente poco diferentes la figura de equilibrio y la primitiva, antes de cargarse la pieza, supondremos esta última invariable al hacer los cálculos de resistencia.

963. Planteo del problema. — Supongamos un arco definido por su fibra media OSB (fig. 16, lám. 45) apoyado en los planos bc y ae .

Sean $d, d' \dots$ etc., las distancias de las fuerzas $P, P' \dots$ á la vertical OY , que hace de eje de las y , así como la cuerda $OB = L$ ejerce las funciones de eje de las x .

Para mayor generalidad supondremos que las reacciones R_1 y R'_1 de los apoyos no pasan por los extremos O y B de la fibra media, sino exteriormente á ésta.

Dan lugar, pues, á dos pares μ_0, μ'_0 y á dos reacciones iguales en intensidad á R_1 y R'_1 , y pasando por los puntos O y B .

Llamemos F, F_1 á las componentes verticales de dichas reacciones, y N, N' á las componentes horizontales.

Se tienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

Suma de proyecciones

horizontales. $N + N' = 0$ (1).

Suma de proyecciones

verticales. $F + F_1 - \Sigma(P) = 0$ (2).

Momentos alrededor del

punto B $\mu_0 - \mu'_0 - \Sigma_0^B P(L - d) + FL = 0$ (3).

El momento de flexión μ para una sección cualquiera S vale

$$\mu = \mu_0 + Fx - \Sigma_0^S P(x - d) - Ny \quad (4),$$

llamando N á una cualquiera de las dos fuerzas iguales de empuje, según la ecuación (1).

En estas ecuaciones intervienen cinco incógnitas, que son μ_0, μ'_0, N, F y F_1 , que pueden reducirse á tres, mediante las consideraciones siguientes:

Consideremos la pieza proyección HH que descansa sobre dos apoyos distantes L , sometida á la acción de las mismas cargas $P, P' \dots$.

Tendremos para esta pieza, llamando Q y Q' á las reacciones y M á la expresión general del momento de flexión,

$$Q + Q' - \Sigma(P) = 0 \quad (5).$$

$$QL - \Sigma_0^B P(L - d) = 0 \quad (6).$$

$$M = Qx - \Sigma_0^S P(x - d) = 0 \quad (7).$$

La (6) da:

$$QL = \Sigma_0^B P(L - d).$$

Sustituyendo en la (3) se obtiene:

$$\mu_0 - \mu'_0 - QL + FL = 0,$$

de donde

$$F = Q - \frac{\mu_0 - \mu'_0}{L} \quad (8).$$

De la (7) se saca:

$$\Sigma_0^S P(x - d) = Qx - M.$$

Sustituyendo este valor y el (8) de F en la (4),

$$\mu = \mu_0 + Qx - \frac{\mu_0 - \mu'_0}{L} x + M - Qx - Ny$$

ó

$$\mu = M - Ny + \mu_0 \frac{L - x}{L} + \mu'_0 \frac{x}{L} \quad (9),$$

que es la expresión general del momento de flexión para una sección del arco, de abscisa x .

El valor de μ , necesario en los cálculos de resistencia, viene en función de la cantidad conocida M y de las incógnitas N, μ_0 y μ'_0 , para cuyo conocimiento apelaremos al estudio de las deformaciones del arco, ya que las tres ecuaciones de equilibrio que la mecánica racional nos suministra han sido insuficientes.

964. Movimiento de las secciones normales al arco por consecuencia de la flexión. — Sea un arco CD (fig. 17, lám. 45), cuya cuerda CD hace las veces de eje de las X , siendo eje de las y la perpendicular CY . El origen de las magnitudes del eje CBD de la pieza curva es C .

Si consideramos dos secciones cualesquiera, a y b , definidas por las longitudes de eje $Ca = s_0$, $Cb = s_1$, el movimiento de la sección b con respecto á la a , por efecto de la flexión, es dado por las fórmulas (4) del núm. 340, sustituyendo en ellas la letra M por la μ que representa aquí el momento general de flexión.

$$\text{Traslación horizontal..... } H' = \int_{s_0}^{s_1} f \frac{\mu ds}{EI} \quad (10).$$

$$\text{Idem vertical..... } H'' = \int_{s_0}^{s_1} h \frac{\mu ds}{EI} \quad (11).$$

Tangente de la variación angular de

$$\text{las secciones } a \text{ y } b \text{..... } A = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mu ds}{EI} \quad (12).$$

En estas fórmulas, la cantidades f , h y μ son variables para cada una de las infinitas secciones comprendidas entre a y b . Si la sección del arco no es constante, I , momento de inercia, es variable también; hasta el divisor E , coeficiente de elasticidad, puede variar de un punto á otro del arco, aunque no es lo general, si el material varía.

En general, es imposible expresar las variaciones de estas cantidades en función de una sola variable.

965. Movimientos debidos á otras causas. — Las fuerzas que actúan sobre el arco, descompuestas normal y tangencialmente á las diversas secciones de él, producen también deformaciones.

Las variaciones de temperatura y el acuñado de las partes ó dovelas del arco motivan asimismo alteraciones en la forma.

Todas estas causas, sin embargo, tienen muy escasa influencia comparadas con la flexión, según los resultados comprueban. De aquí el que no se tengan en cuenta, con lo cual se simplifica notablemente el problema.

En efecto; en el hierro, por ejemplo, una tracción ó compresión de 20 kilogramos por milímetro cuadrado (superior al trabajo ordinario de este material) produce alargamientos ó acortamientos de 0,001 solamente de la longitud primitiva.

Treinta grados de variación de temperaturas son causa, en el hierro, de contracciones ó extensiones de 0^m,000366 por metro.

Si representamos por s la longitud de la fibra media de un arco y por a la suma de espesores de cuñas introducidas por fuerza entre los segmento

de fibra media, la relación $\frac{a}{s}$, variable en la práctica, como es natural, no llega á valer ordinariamente 0,0001.

Si, pues, las fibras elementales varían tan poco en longitud, no es erróneo suponer que la pieza sufra deformaciones inapreciables por estas causas.

966. Aplicaciones. — La expresión general del momento de flexión antes encontrada

$$\mu = M - Ny + \mu_0 \frac{L-x}{L} + \mu'_0 \frac{x}{L}$$

y las fórmulas (10), (11) y (12) resuelven todos los problemas de resistencia de arcos.

Observaremos que si el arco es simétrico con respecto á la vertical de la clave, y está simétricamente cargado, $\mu_0 = \mu'_0$. Y

$$\mu = M - Ny + \mu_0 \quad (13).$$

967. Primer caso. — Los extremos del arco reposan sobre macizos de mampostería, de separación fija, interponiendo en los asientos láminas de plomo ó cuñas de hierro, cuyo objeto es, permitiendo rotaciones pequeñas á las secciones extremas, producir una repartición sensiblemente uniforme de la presión, ó, lo que es lo mismo, que las reacciones de los apoyos pasen por la fibra media.

Entonces $H' = 0$, y $\mu = 0$ si se consideran las secciones extremas del arco CD para las cuales $s_0 = 0$, $s_1 = CBD$. Pueden tomarse como límites para la integración el origen C y el punto medio B si se atiende á que esta sección B no tiene movimiento horizontal; tendremos las ecuaciones

$$\mu = M - Ny \quad (14).$$

$$\int_C^B y \frac{\mu ds}{EI} = 0 \quad (15) \quad (*).$$

que se refunden en una sola

$$\int_C^B \frac{My ds}{EI} - N \int_C^B \frac{y^2 ds}{EI} = 0 \quad (16).$$

(*) Tomando como eje de las x la cuerda del arco, y para eje de las y la perpendicular á éste en el extremo, los valores de la variable f deben ser sustituidos por las y , ordenadas de la fibra media.

En el mismo caso estaríamos si el arco descansase sobre ejes ó munones situados en los extremos de la fibra media, dejando libertad á estas secciones para girar alrededor de ellos. Así han sido dispuestos los arcos en algunas construcciones.

968. Segundo caso. — Las secciones extremas están empotradas, y, por lo tanto, sin libertad de rotación.

μ_0 es diferente de cero: A y H' deben ser cero.

Tendremos:

$$\mu = M - Ny + \mu_0 \quad (17),$$

$$\int_C^B y \frac{\mu ds}{EI} = 0 \quad (18),$$

$$\int_C^B \frac{\mu ds}{EI} = 0 \quad (19),$$

que se reducen á las dos ecuaciones siguientes:

$$\int_C^B \frac{My ds}{EI} - N \int_C^B \frac{y^2 ds}{EI} + \mu_0 \int_C^B \frac{y ds}{EI} = 0 \quad (20).$$

$$\int_C^B \frac{M ds}{EI} - N \int_C^B \frac{y ds}{EI} + \mu_0 \int_C^B \frac{ds}{EI} = 0 \quad (21).$$

Mr. Dion (*), haciendo uso de la teoría que acabamos de exponer, llegó á las siguientes ecuaciones, mucho más complicadas:

$$\int \frac{My}{EI} ds - N \int \frac{y^2}{EI} ds + \mu_0 \int \frac{(L-x)y}{EIL} ds + \mu'_0 \int \frac{xy}{EIL} ds - N \int \frac{ds}{E\omega} = 0 \quad (22).$$

$$\int \frac{M}{EI} ds - N \int \frac{y}{EI} ds + \mu_0 \int \frac{(L-x)}{EIL} ds + \mu'_0 \int \frac{x}{EIL} ds = 0 \quad (23).$$

Y esto, prescindiendo de las deformaciones debidas á las variaciones de temperatura, al acuñado y á la acción del viento.

La ecuación (16) en el primer caso y las (20) y (21) en el segundo, sirven

(*) Mr. Dion aplicó esta teoría al proyecto de las armaduras sin tirante de la Gran galería de máquinas y de la Galería ancha en la Exposición universal francesa de 1878; la primera de 36,60 metros de luz y 23,36 de flecha, y la segunda de 23,40 metros de luz y 11,25 de flecha.

para la determinación de las incógnitas N y μ_0 ; la dificultad estriba en encontrar los valores de las integrales que hacen de coeficientes. Trataremos de la resolución del problema haciendo aplicación al cálculo de una armadura de las llamadas *sin tirante*.

969. Cómo trabaja el material en las diversas secciones trasversales de la armadura. — En las armaduras llamadas *sin tirante*, los pares BC y CD (fig. 1.^a, lám. 46) estén invariablemente unidos entre sí (en C) y á los pilares, pies derechos ó jambas AB y ED , formando un todo continuo $ABCD E$.

La sección transversal, en un punto cualquiera de la armadura, tiene una de las formas dibujadas en las figs. 2.^a, 36, 52 (lám. 21), 12 (lám. 44), 10 (lám. 46).

A semejanza de lo practicado en el cálculo de toda clase de vigas de hierro de sección doble T ó tubular, para puentes, arcos, etc., se calculan las cabezas de modo que resistan á la flexión y á la compresión que resulta de la estimación de las fuerzas exteriores normalmente á las secciones trasversales. El alma de las vigas, que puede ser llena ó de enrejado, se calcula para que resista al esfuerzo cortante.

Si la armadura está apoyada simplemente por sus extremos A y E , de modo que las reacciones pasen por las extremidades de la fibra media (primer caso) (fig. 1.^a, lám. 46), el momento de flexión para una sección cualquiera vale, según hemos visto (ecuación 14),

$$\mu = M - Ny$$

ó

$$\mu = N (M' - y),$$

siendo

$$M' = \frac{M}{N}.$$

La curva de los momentos M es una parábola, y también tendrá esta forma la curva de los valores de $M' = \frac{M}{N}$, pues que N es constante.

Construyendo la parábola M' (*haAS* fig. 2.^a, lám. 46), las ordenadas

$$\begin{aligned} + ac &= ab - bc = M' - y \\ - de &= fe - df = M' - y \end{aligned}$$

multiplicadas por la constante N representan los valores de los momentos de flexión μ para las diversas secciones c, d, \dots (*).

970. Fácil es observar:

1.º Que hay en el par un punto A en que $M' = y$, y, por tanto, en que el momento de flexión es cero.

2.º Que los momentos de flexión son positivos de C á A y negativos de A á S .

3.º Que el valor absoluto de estos momentos crece á partir de C para decrecer después hasta llegar á cero en la sección A , y que de A á S aumenta considerablemente, correspondiendo el máximo valor á la sección T .

De estas consideraciones se deduce inmediatamente las formas y dimensiones que lógicamente hay que dar á la armadura.

Los momentos de inercia de las secciones deben ser proporcionados á los momentos de flexión, según la conocida fórmula

$$R = \frac{\mu v}{I} \quad \text{ó} \quad \frac{I}{v} = \frac{\mu}{R}.$$

Ahora bien; el momento de inercia I puede variarse variandó v ó sea la altura de la sección, ó variandó ω , área de las cabezas ó haciendo uso á un tiempo de los dos medios. De aquí las formas y dimensiones asignadas á estas armaduras, según puede verse en la fig. 8.^a (lám. 46).

Si los extremos de la armadura están empotrados,

$$\mu = M - Ny + \mu_0 \quad (\text{ecuación 17})$$

ó

$$\mu = N(M' - y) + \mu_0.$$

Es decir, que á las ordenadas ac, de (fig. 2.^a, lám. 46) que representan los valores de los momentos de flexión, hay que sumar la cantidad constante μ_0 momento de empotramiento.

También resulta, en este caso, una sección del par, en el cual μ es cero, y llegaríamos á las mismas conclusiones que se dejan indicadas anteriormente.

En virtud de los signos que afectan á los momentos de flexión en las diversas secciones de la viga, se deduce que de C á A (en que μ es positivo) las

(*) A este mismo resultado hemos llegado en el núm. 951 por consideraciones geométricas.

fibras superiores están comprimidas y extendidas las inferiores, y que lo contrario sucede de A á S . La forma de equilibrio, después de la deformación, viene á ser la $A' B' C' D' E'$ de la fig. 1.^a (lám. 46).

971. Marcha general en la resolución del problema. — Entiéndase que en la resolución de problemas tan complicados como el que nos ocupa, no es posible llegar á una fórmula que dé las dimensiones de las secciones trasversales de la armadura en función de la flecha, luz y cargas, como sucede en otros cálculos de resistencia de materiales.

El problema se resuelve presentando un tipo y al lado la verificación del trabajo del material por mm.^2 ó cm.^2 , para que el encargado de examinar el proyecto pueda juzgarlo. Tal acontece también en las bóvedas, puentes y otras muchas obras de hierro.

Sentado esto, concretémonos, para fijar las ideas, á uno de los dos casos considerados en los párrafos 967 y 968; al primero, por ejemplo, es decir, que supondremos la armadura apoyada en sus extremos, de modo que las reacciones pasen por las extremidades de la fibra media, y que la luz es invariable.

El cálculo de la armadura exige el conocimiento del momento general de flexión μ , cuyo valor (ecuación 14), viene dado en función del empuje N ; para conocer N disponemos de la ecuación (16), pero en ella entra I , momento general de inercia, que no se puede determinar si no se tienen las formas y dimensiones de las diversas secciones trasversales de la armadura.

Es decir, que para resolver el problema es necesario el conocimiento primordial de la forma y dimensiones de la armadura, círculo vicioso del que no se puede salir sino fijando éstas *à priori*, lo más aproximadamente que posible sea.

972. El orden de operaciones es el siguiente:

- 1.º Determinación *aproximada*, de forma y magnitudes, de las secciones trasversales.
- 2.º Cálculo de las cargas, contando con el peso propio de la armadura.
- 3.º Cálculo de las integrales contenidas en la ecuación (16) y determinación del valor de N .
- 4.º Cálculo de los diversos valores del momento de flexión μ .
- 5.º Determinación de las fuerzas de compresión P en cada sección trasversal.
- 6.º Determinación de los esfuerzos cortantes.

7.º Verificación de la resistencia de la armadura ó sea del trabajo R del material en cada sección, por la fórmula

$$R = \frac{\mu v}{I} \pm \frac{P}{\omega}$$

8.º Si los valores de R son aceptables, calcular todos los detalles de empalmes, roblonaduras y las dimensiones del alma, ya sea llena ó de enrejado. Dé haber obtenido para R valores inaceptables, hay que corregir la armadura y repetir los cálculos.

973. Determinación aproximada de las magnitudes y forma de las secciones transversales. — En todo lo que sigue supondremos el peso uniformemente repartido sobre los pares de la armadura, según es práctica en el cálculo ordinario de éstas, á razón de p kilogramos por unidad de luz ó proyección horizontal del eje.

Si conociésemos un valor aproximado del empuje N , la fórmula

$$\mu = M - N y$$

nos daría los valores de μ ; y de la

$$R = \frac{\mu v}{I} + \frac{P}{\omega}$$

deduciríamos I y v .

El procedimiento generalmente empleado para la determinación del valor aproximado de N (y por lo tanto de P), se funda en la hipótesis de una articulación en C , punto de unión de los pares (fig. 3.ª; lám. 46), ó, lo que es lo mismo, en suponer que el momento de flexión es cero en este punto.

Si llamamos l á la semiluz GE , la resultante H de las cargas en la media armadura CDE valdrá pl y pasará por el punto S , medio de la distancia GE .

El equilibrio exige que la resultante H y las reacciones en C y E concurren en un punto; uniendo, pues, O con E , EO será la línea de acción de la reacción en E , y su valor quedará determinado en la hipotenusa Ob del triángulo rectángulo Oab , en el que $Oa = pl$.

La reacción Ob tiene una componente vertical igual á pl y otra horizontal ab , igual á N .

N se obtiene resolviendo el triángulo Oab , en el cual

$$ab = N = Oa \operatorname{tang} aOb,$$

y como

$$Oa = pl,$$

$$\text{y } \operatorname{tang} aOb = \frac{ES}{OS} = \frac{\frac{1}{2}l}{f} = \frac{l}{2f},$$

resulta

$$N = \frac{pl^2}{2f},$$

que es el valor hallado para los arcos en el núm. 958.

974. Este valor de N , adoptado generalmente en las aplicaciones para el cálculo aproximado de μ , deducido de la hipótesis de una articulación en la hilera, conduce á veces á errores, resultando ya mayor, ya menor que el verdadero que á *posteriori* se obtiene mediante la ecuación (16).

Se obtiene un valor mucho más aproximado por el procedimiento que á continuación proponemos, modificación del empleado por Dion en el cálculo de las armaduras de la galería aneja á la de máquinas (Exposición universal de 1878).

Recordaremos (núm. 970, fig. 2.ª, lám. 46) que la curva M' corta al par en un punto A , de abscisa SB .

La experiencia acredita que esta abscisa varía entre muy cercanos límites, 0,50 á 0,40 de la semiluz l ; haremos $BS = 0,44l$, y del conocimiento tan aproximado de la posición del punto A vamos á deducir el valor aproximado de N .

Dibujemos la parábola de los momentos $\frac{M}{N} = M'$ (fig. 11, lám. 46)

por el método del núm. 584.

Siendo CD la luz completa, debe tomarse OA igual á M'_0 , máximo de M' ; dividir la semiluz OD , y OA , en el mismo número de partes iguales á partir respectivamente de D y de O ; trazar las oblicuas Ca' , Cb' ,... y las ordenadas de los puntos c , b , a , hasta que se encuentren.

De esta construcción resulta que para una división cualquiera, por ejemplo la c ,

$$Dc : DO :: Ca' : OA.$$

Según esto (fig. 2.^a, lám. 46), si A , de abscisa $BS = 0,44 l$, es un punto de paso de la parábola M' , debemos tener, siendo O el otro extremo de la armadura,

$$BS : SY :: YX : YC$$

$$YC = \frac{SY \times YX}{BS} = l \times \frac{YX}{BS}$$

Pero YC es el máximo de M' , y

$$M' = \frac{M}{N}$$

6

$$N = \frac{M}{M'}$$

Luego si dividimos el momento máximo

$$M_0 = \frac{1}{8} p (2l)^2 = \frac{1}{2} p l^2$$

por YC , tendremos el valor de N .

Así resulta:

$$N = \frac{\frac{1}{2} p l^2}{l \times \frac{YX}{BS}} = \frac{p l}{2} \times \frac{BS}{YX}$$

fórmula de muy fácil uso para la determinación de N . Si el punto de $\mu = 0$ lo suponemos en A' , sería

$$N = \frac{p l}{2} \times \frac{B'S}{X'Y'}$$

Fácil es comprobar, prácticamente que las relaciones $\frac{BS}{XY}$ y $\frac{BS}{YX'}$ varían muy poco entre los límites de posición del punto A antes indicados.

975. Cálculo de las integrales contenidas en las ecuaciones que conducen al conocimiento de N y μ_0 . — Los coeficientes de las ecuaciones (16), (20) y (21), son integrales muy difíciles de resolver por el cálculo, por la gran

dificultad que existe en expresar, mediante una relación analítica, la variabilidad de las funciones M, y, I .

Se puede emplear el método de las cuadraturas que á continuación detallamos.

En la ecuación (16)

$$\int \frac{My}{EI} ds - N \int \frac{y^2}{EI} ds = 0,$$

el valor de un coeficiente cualquiera, de $\int \frac{My}{EI} ds$, por ejemplo, es el del área formada sobre la línea media s de la armadura, supuesta desarrollada, siendo las ordenadas los valores variables de $\frac{My}{EI}$, y, análogamente, cada uno de los coeficientes restantes representan un área.

Llamando A, B, C , etc., á los valores de estas áreas, las ecuaciones (16), (20) y (21) se convierten en

$$A - NB = 0 \quad (24).$$

$$A - BN + C\mu_0 = 0 \quad (25).$$

$$D - CN + E\mu_0 = 0 \quad (26).$$

Sobre una recta ab (fig. 4.^a, lám. 46) de longitud igual á la fibra media, desarrollada de la mitad de la armadura (*), siendo b el punto correspondiente al apoyo derecho, por ejemplo, se toman las divisiones 1, 2 y 3, etcétera, y con arreglo á la escala se levantan ordenadas iguales á los valores de M correspondientes á estos puntos en la armadura.

Uniando los extremos de las ordenadas, formaremos una curva que llamaremos de las M .

De idéntica manera se obtendrá la curva de las y y la de las $\frac{1}{EI}$; para esta última hay que hallar primeramente los valores de los momentos de inercia de las secciones transversales en los puntos 1, 2,.... de la armadura.

(*) Como hay simetría de cargas y de líneas, las construcciones relativas á la media armadura de la izquierda serian simétricas de las del dibujo. Cuando la simetría de cargas ó de líneas no existe, hay necesidad de considerar todo el eje desarrollado.

Secciones	μ	$\frac{I}{r}$	P	ω	$\frac{P}{\omega}$	VALORES DE r	
						Intradós.	Trasdós.
0							
1							
2							
.							
.							
.							
.							
.							
n							

977. Expuesto el cuadro de las operaciones que es forzoso practicar para la verificación de la resistencia de una armadura, fácil es ver lo laborioso y prolijo del procedimiento, á pesar de las simplificaciones importantes que hemos introducido en el método de Dion.

El ingeniero encargado de un proyecto necesita aplicar su atención á numerosísimos y variados detalles; juzgamos muy conveniente toda simplificación que tienda á una pronta resolución del problema, sin tanteos ni vacilaciones, y en tal concepto exponemos á continuación las ideas que, á nuestro entender, conducen al objeto deseado, y que aplicables al propio tiempo al examen rápido de una obra ó proyecto cualquiera, constituyen un *método abreviado*.

978. Semejanza de armaduras. — Primer caso: μ_0 es cero. La ecuación que ha de dar el valor del empuje N incógnito es

$$\int \frac{My ds}{EI} - N \int \frac{y^2 ds}{EI} = 0,$$

ó, puesto que E es constante,

$$N = \frac{\int \frac{My}{I} ds}{\int \frac{y^2}{I} ds}.$$

Supongamos que por el procedimiento complicado de Dion ó por otro cualquiera, se ha calculado una cierta armadura $CB A$ (fig. 9.^a, lám. 46) de semiluz $DC = l$, y hallado, por lo tanto, los valores de N, μ, P , etc.; vamos á demostrar que para otra armadura $A' B' C'$ semejante á la primera, N', μ', P' , etc., se derivan de sus homólogos N, μ, P por relaciones sencillísimas.

Sean:

	Armadura ABC	Armadura $A' B' C'$
Semiluz.....	l	l'
Longitud de la fibra media.....	$2 ABC = S$	$2 A' B' C' = S'$
Cargas por metro lineal de proyección.	p	p'
Ordenada general correspondiente á la abscisa $\frac{1}{z} l$	y	y'
Momentos de inercia correspondientes á secciones homólogas.....	I	I'
Momento general de flexión de la pieza proyección.....	M	M'
Momento general de flexión para secciones homólogas de las armaduras.	μ	μ'
Empujes.....	N	N'
Compresión en las secciones homólogas.....	P	P'
Esfuerzos cortantes en íd.....	C	C'

Llamemos n y m á las relaciones $\frac{l'}{l}$ " $\frac{p'}{p}$; de modo que

$$\left. \begin{aligned} l' &= n l \\ p' &= m p \end{aligned} \right\} (27).$$

De la semejanza de las figuras $ABC, A' B' C'$ se deduce

$$\left. \begin{aligned} y : y' :: l : l' & \text{ ó } y' = n y \\ s : s' :: l : l' & \text{ ó } s' = n s \\ ds' &= n ds \end{aligned} \right\} (28).$$

La expresión general de M es

$$M = p l x - \frac{1}{2} p x^2,$$

ó haciendo $x = \frac{1}{z} l$,

$$M = p l^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} \right).$$

Si l se convierte en $l' = n l$, y p en $p' = m p$

$$M' = m n^2 p l^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} \right)$$

6

$$M' = m n^2 M \quad (29).$$

Establezcamos la relación $I' = K I$ (30); K será un factor producto de cuatro dimensiones.

979. El empuje N' , en la segunda armadura es:

$$N' = \frac{\int \frac{M' y' d s'}{I'}}{\int \frac{y'^2}{I'} d s'}$$

y haciendo uso de las relaciones (28), (29) y (30),

$$N' = \frac{\frac{m n^4}{K} \int \frac{M y}{I} d s}{\frac{n^5}{K} \int \frac{y^2}{I} d s}$$

ó, finalmente,

$$N' = m n N \quad (31).$$

980. Es sabido ya que

$$\begin{aligned} \nu &= M - N y \\ \nu' &= M' - N' y' \end{aligned}$$

Luego

$$\nu' = m n^2 M - m n^2 N y$$

6

$$\nu' = m n^2 \nu \quad (32).$$

981. En la armadura tipo, el triángulo $O A B$ (fig. 6.^a, lám. 46), formado con $A B = p l$ y $O A = N$, da en $O a, O b, \dots$ las compresiones en las diversas secciones trasversales.

Para la armadura $A' B' C'$ (fig. 9.^a, lám. 46) se formaría un triángulo semejante en que los catetos serían $p' l' = m n p l$, $N' = m n N$, de donde se deduce que la misma relación $m n$ guardarán todas las líneas homólogas representantes de las presiones y sus componentes normales y tangenciales á las secciones, es decir, las compresiones y esfuerzos cortantes.

Luego

$$\left. \begin{aligned} P' &= m n P \\ C' &= m n C \end{aligned} \right\} \quad (33).$$

982. Segundo caso: μ_0 es diferente de cero. Las ecuaciones que nos han de determinar μ_0 (momento de empotramiento), μ (ídem de flexión) y N (empuje), son:

$$\begin{aligned} \mu &= M - N y + \mu_0 \quad (34). \\ \left. \begin{aligned} \int \frac{M y d s}{E I} - N \int \frac{y^2 d s}{E I} + \mu_0 \int \frac{y d s}{E I} &= 0 \\ \int \frac{M d s}{E I} - N \int \frac{y d s}{E I} + \mu_0 \int \frac{d s}{E I} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35). \end{aligned}$$

6

$$\left. \begin{aligned} A - B N + C \mu_0 &= 0 \\ D - C N + E \mu_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36),$$

las cuales nos han de dar μ_0 y N .

Según las conocidas relaciones

$$\left. \begin{aligned} M' &= m n^2 M \\ y' &= n y \\ d s' &= n d s \\ I' &= K I \end{aligned} \right\} \quad (37),$$

para una armadura semejante á la primera, tendríamos:

$$\frac{m n^4}{K} \int \frac{M y d s}{E I} - \frac{n^5}{K} N' \int \frac{y^2 d s}{E I} + \frac{n^2}{K} \mu'_0 \int \frac{y d s}{E I} = 0$$

$$\frac{m n^5}{K} \int \frac{M d s}{E I} - \frac{n^2}{K} N' \int \frac{y d s}{E I} + \frac{n}{K} \mu'_0 \int \frac{d s}{E I} = 0$$

ó

$$\left. \begin{aligned} m n^2 A - n B N' + C \mu'_0 &= 0 \\ m n^2 D - n C N' + E \mu'_0 &= 0 \end{aligned} \right\} (38).$$

El sistema (36) da

$$\mu_0 = \frac{B D - A C}{C^2 - B E}$$

$$N = \frac{C D - A E}{C^2 - B E}$$

y el sistema (38)

$$\mu'_0 = m n^2 \frac{B D - A C}{C^2 - B E}$$

$$N' = m n \frac{C D - A E}{C^2 - B E}$$

ó, en resumen,

$$\left. \begin{aligned} \mu'_0 &= m n^2 \mu_0 \\ N' &= m n N \end{aligned} \right\} (39),$$

y substituyendo en (34)

$$\mu' = M' - N' y' + \mu'_0 = m n^2 (M - N y + \mu_0)$$

ó

$$\mu' = m n^2 \mu \quad (40).$$

Existen, pues, las mismas relaciones que en el caso de no considerar el empotramiento.

983. Método abreviado. — Utilizando las sencillas relaciones (31), (32), (33), (39) y (40), se pueden obtener los valores de las cantidades N' , μ' , P' y C' de una armadura ó pieza curva, en función de las homólogas de una armadura semejante que se tome como tipo y que se hayan calculado con todo el detenimiento y exactitud necesarios.

La determinación de dichas cantidades constituye precisamente la mayor

dificultad del problema, empleando después, en el cálculo de escuadrías, el método explicado en el núm. 949.

Es necesario no olvidar que las secciones transversales de la pieza que se calcula han de cumplir la condición $I' = K I$ [(30) del núm. 978] que ha servido de base en los desarrollos anteriores.

984. Procedimiento para conseguir coeficientes de trabajo próximamente iguales en las diversas secciones transversales homólogas de la armadura que se va á calcular y de la armadura tipo. — Empiécese por formar los factores n y m

El primero no es otra cosa que la relación de luces $\frac{2 l'}{2 l}$.

El segundo se encuentra también con suma facilidad.

La carga p' por metro lineal de proyección, se compone de los sumandos p'_1 y p'_2 , siendo

$$p'_1 \left\{ \begin{aligned} &\text{peso de la cubierta.} \\ &\text{» correas, cabios, entablado, etc.} \\ &\text{» componente vertical del viento.} \\ &\text{» carga de nieve.} \end{aligned} \right.$$

p'_2 peso propio de la armadura.

Para determinar p'_2 , fórmese el valor aproximado de N por la fórmula del núm. 974

$$N = \frac{1}{2} \rho l \times \frac{B S}{N Y},$$

y el de $\mu = M - N y$ para la sección del arranque de los pares.

Como quiera que el trabajo del material, en las armaduras sin tirante, se debe casi exclusivamente al momento de flexión y muy poco á las compresiones directas, por la fórmula $R = \frac{\mu v}{I}$, en la que son conocidas R y μ , determinaremos con suficiente aproximación I y v , es decir, la sección y el peso p'_2 .

Observaremos que sin error sensible puede tomarse para valor de m la relación $\frac{d'}{d}$ de separación de armaduras para una misma clase de cubierta, pues todos los sumandos que entran en la composición de p' y p guardan

esta relación, á excepción de los p'_2 que varían con el producto $m n$, como las áreas de las secciones transversales.

La armadura tipo se ha calculado por la fórmula

$$R = \frac{\mu r^2}{I} \pm \frac{P}{\omega},$$

y la del problema se calculará por la

$$R = \frac{\mu' r'}{I'} \pm \frac{P'}{\omega'}$$

si se quiere que el coeficiente R sea el mismo en ambas.

Prescindamos de los sumandos $\frac{P}{\omega}$, $\frac{P'}{\omega'}$, cuyo valor es pequeño con relación al de los primeros de las ecuaciones anteriores. El coeficiente R de trabajo será próximamente el mismo en las dos armaduras si hacemos

$$\frac{\mu v}{I} = \frac{\mu' r'}{I'} = m n^2 \frac{\mu r'}{I'}$$

De esta ecuación de condición se deduce

$$\frac{I'}{v'} = m n^2 \frac{I}{v} \quad (41).$$

Fijémonos en las secciones D y D' , por ejemplo (fig. 8.^a, lám. 46); formaremos la sección D' de modo que su $\frac{I'}{v'}$ tengan el valor $m n^2 \frac{I}{v}$, utilizando hierros cuya área ω' no sea muy diferente de $m n \omega$, porque así $\frac{P'}{\omega'}$ será próximamente igual á $\frac{P}{\omega}$, y resultarán menores diferencias en los coeficientes R . Para estos cálculos son muy convenientes las tablas del núm. 489.

Conocidos $\frac{I'}{v'}$, y por lo tanto I' y v' , para la sección D' , fórmese el coeficiente $\frac{I'}{I} = K$, relación constante que ha de existir entre los momentos de inercia de todas las secciones homólogas de la armadura tipo y la nueva.

Fórmese asimismo la relación $\frac{v'}{v} = h$ y dibújese la armadura nueva de modo que las alturas de las secciones homólogas guarden esta relación.

De la ecuación (41) se deduce que $\frac{I'}{I} = K = m n^2 h$ ó

$$I' = m n^2 h I \quad (42)$$

que nos da el valor de I' para cada sección, siendo ya conocida su altura $2 v'$. Se formará el perfil de las cabezas en estas secciones para que el momento de inercia I' tenga el valor (42), aun cuando no resulte para estas nuevas secciones $\omega' = m n \omega$ (*).

985. Caso en que se tiene en cuenta la acción del viento. — Rara vez suele tenerse en cuenta la fuerza del viento en los cálculos de armaduras, limitándose los ingenieros á estimar tan sólo la componente vertical como sumando de la sobrecarga accidental y haciendo caso omiso de la otra componente.

Sin embargo, el empuje horizontal alcanza valores considerables; y si en las armaduras atirantadas no ha lugar á estimarse, pues que los muros están calculados ya para resistir á esta fuerza, no debe suceder lo mismo en las armaduras sin tirante.

Cierto es que esta consideración complica notablemente los cálculos; de aquí el que los constructores la excluyan muchas veces, subsanando el error con la admisión de coeficientes de trabajo R pequeños; pero no es este modo de resolver el problema, y se corre, además, el riesgo de repartir antieconómicamente, y por lo tanto, antieconómicamente, las masas metálicas, dando demasiada robustez á ciertos elementos, mientras que otros resultan con dimensiones deficientes.

(*) Aunque $\frac{I'}{\omega'}$ no resulte exactamente igual á $\frac{P}{\omega}$ en las diversas secciones, por no ser $\omega' = m n \omega$, importa poco, ya que los sumandos $\frac{P'}{\omega'}$ suponen una fracción pequeña del coeficiente R .

986. La teoría de la semejanza antes expuesta, aplicable también á este caso, abrevia considerablemente las operaciones y permite resolver cumplida y fácilmente el problema.

Sean (fig. 7.^a, lám. 46):

d = separación de armaduras.

L = luz.

l = semiluz.

f = flecha.

E = parte de flecha correspondiente á los pares.

H = ordenada en el punto del medio del par.

V' = fuerza vertical del viento por metro lineal de proyección horizontal.

V'' = fuerza horizontal del viento por metro lineal de proyección vertical de par (véase núm. **903**).

F''_1 y F''_2 = reacciones verticales de los apoyos.

N_1 y N'_1 = reacciones horizontales.

μ_1 = expresión general del momento de flexión.

M_1 = expresión general del momento de flexión de la pieza proyección horizontal sujeta á las cargas V' .

Q'_1 y Q''_1 = reacciones de los apoyos.

Supuesto el origen de coordenadas en T' , tenemos:

$$\text{De } A \text{ á } C. \quad \mu_1 = F''_1 (L - x) - N_1 y$$

$$\text{De } C \text{ á } D. \quad \mu_1 = F''_1 (L - x) - \frac{1}{2} V' (l - x)^2 - \frac{1}{2} V'' (f - y)^2 - N_1 y.$$

$$\text{De } D \text{ á } T. \quad \mu_1 = F''_1 (L - x) - \frac{1}{2} V' l^2 - V'' E (H - y) - N_1 y.$$

En la pieza proyección:

$$\text{De } A \text{ á } C. \dots \dots M_1 = Q'_1 (L - x).$$

$$\text{De } C \text{ á } D. \dots \dots M_1 = Q'_1 (L - x) - \frac{1}{2} V' (l - x)^2.$$

$$\text{De } D \text{ á } T. \dots \dots M_1 = Q'_1 (L - x) - \frac{1}{2} V' l^2.$$

Pero

$$F''_1 L - \frac{1}{2} V' l^2 - V'' E H = 0$$

$$Q'_1 l - \frac{1}{2} V' l^2 = 0$$

luego

$$F''_1 = Q'_1 + \frac{V'' E H}{L},$$

y entonces

$$\text{De } A \text{ á } C. \dots \dots \mu_1 = M_1 + \frac{V'' E H}{L} (L - x) - N_1 y.$$

$$\text{De } C \text{ á } D. \dots \dots \mu_1 = M_1 + \frac{V'' E H}{L} (L - x) - \frac{1}{2} V'' (f - y) - N_1 y.$$

$$\text{De } D \text{ á } T. \dots \dots \mu_1 = M_1 + \frac{V'' E H}{L} (L - x) - V'' E (H - y) - N_1 y.$$

y en general

$$\mu_1 = \delta - N_1 y.$$

987. Repitiendo los razonamientos de los núms. **978** y **981** se encontrará que, para una armadura semejante á otra tipo,

$$\left. \begin{aligned} \mu'_1 &= m n^2 \mu_1 \\ N'_1 &= m n N_1 \\ P'_1 &= m n P_1 \\ C'_1 &= m n C_1 \end{aligned} \right\} (43).$$

En estas fórmulas, n representa la relación que existe entre la luz de la armadura que se va á calcular y la de la armadura patrón, y m la relación de las fuerzas debidas al viento, y, por tanto, de las componentes verticales y horizontales por metro lineal, respectivamente, de proyecciones horizontal y vertical de par.

Resulta que m es la relación de la separación de armaduras en el caso que se resuelve y en el que sirve de tipo.

988. Resolución abreviada del problema. — Si apelamos al método de superposición de efectos, resulta que el empuje, momento general de flexión, compresiones, etc., definitivos, atendiendo á las cargas y á la acción del

viento, serán la suma de las cantidades correspondientes á cada uno de estos casos tratado aisladamente.

Así, pues, en la armadura tipo,

$$\begin{aligned} N_0 &= N + N_1 \\ \mu_0 &= \mu + \mu_1 \\ P_0 &= P + P_1 \\ C_0 &= C + C_1 \end{aligned}$$

y como para la armadura nueva

$$\begin{aligned} N' &= m n N \quad \text{,,} \quad N'_1 = m n N_1, \text{ etc.} \\ \mu' &= m n^2 \mu \quad \text{,,} \quad \mu'_1 = m n^2 \mu_1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

se obtiene, finalmente,

$$\begin{aligned} N'_0 &= m n N_0 \\ \mu'_0 &= m n^2 \mu_0 \\ P'_0 &= m n P_0 \\ C'_0 &= m n C_0 \end{aligned}$$

y el problema se resuelve como queda explicado en los núms. 983 y 984.

Teniendo, pues, calculados un cierto número de tipos correspondientes á las distintas clases de cubiertas, y con alturas distintas de pies derechos ó jambas, cualquiera que sea el caso que se presente, puede referirse á uno de dichos tipos, por semejanza, y hacerse el cálculo con suma rapidez.

Esto es lo que hemos hecho, y á continuación presentamos, calculados, algunos tipos de armaduras sin tirante, que servirán para calcular fácilmente otras armaduras semejantes geoméricamente, como se detalla en el ejemplo siguiente (*):

Datos:

Luz = 14 metros.

Separación de armaduras = 4 metros.

Altura exterior del estribo = 5 metros.

Cubierta metálica.

(*) Las secciones A' , D' , etc., son las homólogas de las A , D , etc., en la otra mitad de la armadura (fig. 12, lám. 46).

Se quiere tener en cuenta la acción del viento.

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{2l'}{2l} = \frac{14}{20} = 0,7 \\ m &= \frac{s'}{s} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n^2 &= 0,49 \\ mn &= 0,56 \\ mn^2 &= 0,392. \end{aligned}$$

Para que la altura exterior de estribo sea de 5 metros, es preciso que la de la armadura patrón sea de

$$\frac{5}{n} = \frac{5}{0,7} = 7 \text{ metros.}$$

Debemos elegir para el cálculo la armadura tipo núm. 2.

Para una sección cualquiera de la parte recta del par, la D' , por ejemplo (fig. 12, lám. 46), $\omega = 3584$ milímetros cuadrados.

En la nueva armadura $\omega = mn\omega = 0,56 \times 3584 = 2000$ milímetros cuadrados.

Elegiremos hierros angulares de $\frac{50 \times 50}{5}$ milímetros, que dan 1900 milímetros cuadrados de área para los cuatro que forman los cordones de intradós y de trasdós.

Apliquemos la fórmula (41)

$$\frac{I'}{v'} = mn^2 \frac{I}{v}$$

$$\left. \begin{aligned} mn^2 &= 0,392 \\ I &= 0,0003964 \\ v &= 0,35 \end{aligned} \right\} \text{(Armadura tipo núm. 2),}$$

y resulta

$$\frac{I'}{v'} = \frac{0,392 \times 0,0003964}{0,35} = 0,0004445;$$

cuatro escuadras de $\frac{50 \times 50}{5}$ dan un valor de $\frac{I'}{v'}$ igual al anterior, cuando

$$v' = 0,27;$$

entonces

$$I' = 0,00012463,$$

de modo que

$$h = \frac{v'}{v} = \frac{0,27}{0,35} = 0,77$$

$$K = \frac{I'}{I} = \frac{0,00012363}{0,0003964} = 0,31.$$

Dimensiones que resultan á la nueva armadura:

SECCIONES	ALTURAS	POSICIÓN DE LAS SECCIONES
A'	$0,6 \times 0,77 = 0^m,46$	Hilera
E'	"	$bs = n \times 8^m = 0,7 \times 3 = 2^m,1$
H'	$1,6 \times 0,77 = 1^m,23$	$ba = n \times 7^m = 0,7 \times 7 = 5^m$
R'	$0,7 \times 0,77 = 0^m,54$	$bc = n \times 3^m = 0,7 \times 3 = 2^m,1$

El valor de I' en estas secciones se obtendrá multiplicando por K el de I de las secciones homólogas de la armadura patrón. Por otra parte formaremos el momento de inercia I_1 de las cuatro escuadras de $\frac{50 \times 50}{6}$ para las alturas $2v'$ que acabamos de calcular y hallaremos la diferencia $I' - I_1 = \delta$; la cantidad δ será lo que falta á I_1 para valer I' , y habrá que añadir á las escuadras, pedazos de alma llena, ó tablas, cuyo momento de inercia sea δ .

Sección H'. Valor de I_1 para los cuatro ángulos de $\frac{50 \times 50}{5}$ y altura $2v' = 1,23$:

Tomando las dimensiones en centímetros..... 67458

Debe valer I' la cantidad $KI = 0,31 \times 35250...$ 109275

Diferencia $\delta =$ 41817

Completaremos el perfil de los cordones con trozos de alma llena.

Adoptemos para espesor de alma 5 milímetros = 0,5 centímetros; si llamamos x al ancho del alma (dimensión a , fig. 4.^a, lám. 20) y c á la dimensión $b - 2x$, tendremos (núm. 477):

$$\frac{1}{12} (ab^3 - ac^3) = \delta$$

ó

$$\frac{1}{12} (0,5 \times 123^3 - 0,5 \times c^3) = 41817,$$

de donde

$$c = 95,$$

y la altura de cada trozo de alma es

$$\frac{123 - 95}{2} = 14 \text{ centímetros.}$$

Del mismo modo se calcularían las demás secciones.

En todo lo que dejamos expuesto nos hemos ocupado del cálculo de los cordones de intradós y trasdós, que es en los que reside la dificultad. Cuanto al alma, ya sea llena ó de celosía, se determinarán sus dimensiones del modo explicado en el núm. 557 para las vigas rectas.

ARMADURA TIPO NÚM. 1

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

Datos:

Luz entre ejes = 20 metros. Separación de armaduras = 5 metros.

Peso por metro cuadrado de proyección de cubierta..... = 80 kilogramos.

Peso p por metro lineal de proyección de armadura..... = $80 \times 5 = 400$ kilogramos.

Viento..... $\left\{ \begin{array}{l} V'' = 400 \\ V' = 72 \end{array} \right\}$ Se supone que actúa sobre la vertiente AH .

Dimensiones principales..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Altura exterior de pilar} = ab = 6 \text{ metros} = 0,6 l. \\ \text{Flecha} = AQ = 10 \text{ metros} = l. \\ ac = 3 \text{ metros} = 0,3 l, \quad bc = bs = 3 \text{ metros} = 0,3 l. \\ bd = de = ec = bh = hl = ls = 1 \text{ metro} = 0,1 l. \\ AB = BC = CD = DE = 2 \text{ metros} = 0,2 l. \end{array} \right.$

	POR LAS CARGAS	POR EL VIENTO
Empuje N en el apoyo izquierdo.....	1817 kilogramos.....	831 kilogramos.
Idem en el derecho. ...	1817 »	- 769 »
Reacción del apoyo izquierdo.....	4000 »	820 »
Idem del derecho.	4000 »	- 100 »

Composición de las secciones..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{De } A \text{ á } E. \dots \text{ Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{De } F \text{ á } S. \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{Almas de } 160 \times 8 \text{ milímetros.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

SECCIONES	ALTURA de las secciones 2 v metros.	ÁREAS ω metros cuadrados.	MOMENTOS de inercia I metros.	MOMENTOS DE FLEXIÓN			COMPRESIONES			TRABAJO debido a la flexión $\frac{\mu_0 v}{I}$ kilogramos por mm. ²	TRABAJO debido a la compresión $\frac{P_0}{\omega}$ kilogramos por mm. ²	COEFICIENTES FINALES DE TRABAJO R		ESFUERZOS CORTANTES TOTALES						
				POR las cargas μ kilogrametros.	POR el viento μ_1 kilogrametros.	TOTALES μ_2 kilogrametros.	POR el viento P_1 kilogramos.	TOTALES P_0 kilogramos.	INTRADÓS kilogramos por mm. ²			TRASDÓS kilogramos por mm. ²	POSITIVOS kilogramos	NEGATIVOS kilogramos						
				S'	0,70	0,006144	0,00058848	»	»			»	820	4820	»	0,78	0,78	0,78	2648	»
				R'	0,70	0,006144	0,00058848	- 5451	- 2493			- 7944	820	4820	4,73	0,78	5,51	3,95	2648	»
O'	0,80	0,006144	0,00079198	- 6928	- 3200	- 10128	1000	5320	6,03	0,86	6,89	5,17	1545	»						
L'	1,10	0,006144	0,00158678	- 8036	- 3947	- 11983	1100	5440	4,15	0,88	5,03	3,27	490	»						
H'	1,60	0,006144	0,00352502	- 8824	- 4348	- 13172	1150	5470	2,99	0,89	3,88	2,10	»	430						
G'	1,10	0,006144	0,00158678	- 7102	- 4178	- 11280	1160	5030	3,91	0,81	4,72	3,10	»	1170						
F'	0,80	0,003584	0,00079198	- 5241	- 3878	- 9119	1150	4550	4,61	0,73	5,34	3,88	»	1910						
E'	0,70	0,003584	0,00039640	- 3605	- 3602	- 7207	1070	3930	6,36	1,10	7,46	5,26	»	2540						
D'	0,70	0,003584	0,00039640	- 295	- 2739	- 3034	1070	3650	2,68	1,02	3,70	1,66	»	1860						
C'	0,65	0,003584	0,00033913	+ 1850	- 1892	- 42	1070	3290	0,04	0,92	0,96	0,88	»	1030						
B'	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2175	- 1043	+ 1132	1070	3070	1,18	0,85	0,33	2,03	»	510						
A	0,60	0,003584	0,00028717	+ 1850	- 110	+ 1740	830	2647	1,80	0,73	1,07	2,53	820	820						
B	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2175	+ 1949	+ 4124	314	2314	4,31	0,64	3,67	4,95	784	»						
C	0,65	0,003584	0,00033913	+ 1850	+ 3303	+ 5153	83	2303	4,94	0,64	4,30	5,58	36	»						
D	0,70	0,003584	0,00039640	- 295	+ 4198	+ 3903	- 138	2442	3,45	0,70	2,75	4,15	»	1015						
E	0,70	0,003584	0,00039640	- 3605	+ 4639	+ 1034	- 401	2459	0,91	0,70	0,21	1,61	»	1919						
F	0,80	0,006144	0,00079198	- 5241	+ 4607	- 634	- 438	2962	0,32	0,48	0,80	0,16	»	1773						
G	1,10	0,006144	0,00158678	- 7102	+ 4478	- 2624	- 472	3398	0,86	0,55	1,41	0,31	»	1866						
H	1,60	0,006144	0,00352502	- 8824	+ 4252	- 4572	- 510	3810	1,03	0,62	1,65	0,41	»	1230						
L	1,10	0,006144	0,00158678	- 8036	+ 3669	- 4367	- 400	3940	1,51	0,64	2,15	0,87	»	590						
O	0,80	0,006144	0,00079198	- 6928	+ 3032	- 3896	- 260	4060	2,00	0,66	2,66	1,34	190	»						
R	0,70	0,006144	0,00058848	- 5451	+ 2307	- 3144	- 100	3900	1,90	0,64	2,54	1,26	1048	»						
S	0,70	0,006144	0,00058848	»	»	»	- 100	3900	»	0,64	0,64	0,64	1048	»						

ARMADURA TIPO NÚM. 2

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

Datos:

Luz entre ejes = 20 metros. Separación de armaduras = 5 metros.

Peso por metro cuadrado de proyección de cubierta..... = 80 kilogramos.

Peso p por metro lineal de proyección de armadura..... = $80 \times 5 = 400$ kilogramos.

Viento..... $\left\{ \begin{array}{l} V'' = 400 \\ V' = 72 \end{array} \right\}$ Se supone que actúa sobre la vertiente AH .

Dimensiones principales..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Altura exterior de pilar} = ab = 7 \text{ metros} = 0,7 l. \\ \text{Flecha} = A Q = 11 \text{ metros} = 1,1 l. \\ ac = 4 \text{ metros} = 0,4 l., \quad bc = bs = 3 \text{ metros} = 0,3 l. \\ bd = de = ec = bh = hl = ls = 1 \text{ metro} = 0,1 l. \\ AB = BC = CD = DE = 2 \text{ metros} = 0,2 l. \end{array} \right.$

	FOR LAS CARGAS	FOR EL VIENTO
Empuje N en el apoyo izquierdo.....	+ 1599 kilogramos.....	+ 847 kilogramos.
Idem en el derecho....	+ 1599 »	- 753 »
Reacción del apoyo izquierdo	+ 4000 »	+ 900 »
Idem del derecho.....	+ 4000 »	- 180 »

Composición de las secciones..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{De } A \text{ á } E.. \quad \text{Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{De } F \text{ á } S.. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{Almas de } 160 \times 8 \text{ milímetros.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

SECCIONES	ALTURA de las secciones 2 v metros.	ÁREAS ω metros cuadrados.	MOMENTOS de inercia I metros	MOMENTOS DE FLEXIÓN			COMPRESIONES		TRABAJO debido a la flexión	TRABAJO debido a la compresión	COEFICIENTES FINALES DE TRABAJO R		ESFUERZOS CORTANTES TOTALES	
				POR las cargas μ kilogrametros.	POR el viento μ_1 kilogrametros.	TOTALES μ_2 kilogrametros.	POR el viento P_1 kilogramos	TOTALES P_0 kilogramos	$\frac{\mu_0 v^2}{I}$ kilogramos por mm. ²	$\frac{P_0}{\omega}$ kilogramos por mm. ²	INTRADÓS kilogramos por mm. ²	TRASDÓS kilogramos por mm. ²	POSITIVOS kilogramos	NEGATIVOS kilogramos
S'	0,70	0,006144	0,00058848	»	»	»	+ 900	4900	»	0,81	0,81	0,81	2446	»
R'	0,70	0,006144	0,00058848	- 6400	- 3388	- 9788	+ 900	4900	5,82	0,81	6,63	5,01	2446	»
O'	0,80	0,006144	0,00079198	- 7642	- 4105	- 11747	+ 1015	5245	5,93	0,85	6,78	5,08	1284	»
L'	1,10	0,006144	0,00158678	- 8606	- 4730	- 13336	+ 1170	5410	4,62	0,88	5,50	3,74	180	»
H'	1,60	0,006144	0,00352502	- 9220	- 5257	- 14477	+ 1220	5320	3,28	0,86	4,14	2,42	»	658
G'	1,10	0,006144	0,00158678	- 7400	- 5041	- 12441	+ 1230	4910	4,31	0,80	5,11	3,51	»	1397
F'	0,80	0,006144	0,00079198	- 5453	- 4687	- 10140	+ 1210	4370	5,12	0,71	5,83	4,41	»	2103
E'	0,70	0,003584	0,00039640	- 3730	- 4358	- 8088	+ 1120	3790	7,14	1,05	8,19	6,09	»	2634
D'	0,70	0,003584	0,00039640	- 146	- 3358	- 3504	+ 1120	3488	3,09	0,95	4,04	2,14	»	1956
C'	0,65	0,003584	0,00033913	+ 2072	- 2377	- 3705	+ 1120	3186	0,28	0,86	1,14	0,58	»	1288
B'	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2960	- 1397	+ 1563	+ 1120	2896	1,63	0,80	0,83	2,43	»	609
A	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2400	- 317	+ 2083	+ 847	2446	2,17	0,63	1,49	2,85	900	900
B	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2960	+ 1915	+ 4875	+ 262	2038	5,09	0,56	4,53	5,65	831	»
C	0,65	0,003584	0,00033913	+ 2072	+ 3426	+ 5498	+ 14	2080	5,27	0,57	4,70	5,84	»	91
D	0,70	0,003584	0,00039640	- 146	+ 4481	+ 4335	- 203	2165	3,82	0,60	3,22	4,42	»	974
E	0,70	0,003584	0,00039640	- 3730	+ 5083	+ 1313	- 420	2250	1,19	0,62	0,57	1,81	»	1868
F	0,80	0,006144	0,00079198	- 5453	+ 5118	- 335	- 478	2682	0,18	0,43	0,61	0,25	»	1879
G	1,10	0,006144	0,00158678	- 7400	+ 5055	- 2345	- 525	3155	0,81	0,51	1,32	0,30	»	1687
H	1,60	0,006144	0,00352502	- 9220	+ 4891	- 4329	- 575	3525	1,21	0,57	1,78	0,64	»	1383
L	1,10	0,006144	0,00158678	- 8606	+ 4334	- 4272	- 480	3760	1,48	0,61	2,09	0,57	»	820
O	0,80	0,006144	0,00079198	- 7642	+ 3718	- 3924	- 350	3880	1,98	0,62	2,60	1,36	»	36
R	0,70	0,006144	0,00058848	- 6400	+ 3012	- 3388	- 180	3820	2,01	0,62	2,63	1,39	846	»
S	0,70	0,006144	0,00058848	»	»	»	- 180	3820	»	0,62	0,62	0,62	846	»

ARMADURA TIPO NÚM. 8

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

Datos:

Luz entre ejes = 20 metros. Separación de armaduras = 5 metros.

Peso por metro cuadrado de proyección de cubierta..... = 80 kilogramos.

Peso p por metro lineal de proyección de armadura..... = $80 \times 5 = 400$ kilogramos.

Viento..... $\left\{ \begin{array}{l} V'' = 400 \\ V' = 72 \end{array} \right\}$ Se supone que actúa sobre la vertiente AH .

Dimensiones principales..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Altura exterior de pilar} = a b = 8 \text{ metros} = 0,8 l. \\ \text{Flecha} = A Q = 12 \text{ metros} = 1,2 l. \\ ac = 5 \text{ metros} = 0,5 l, bc = bs = 3 \text{ metros} = 0,3 l. \\ bd = de = ec = bh = hl = ls = 1 \text{ metro} = 0,1 l. \\ AB = BC = CD = DE = 2 \text{ metros} = 0,2 l. \end{array} \right.$

	POR LAS CARGAS	POR EL VIENTO
Empuje N en el apoyo izquierdo.....	+ 1426 kilogramos.....	+ 884 kilogramos.
Idem en el derecho....	+ 1426 »	- 716 »
Reacción del apoyo izquierdo.....	+ 4000 »	+ 980 »
Idem del derecho.....	+ 4000 »	- 260 »

Composición de las secciones..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{De } A \text{ á } E \dots \text{ Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{De } F \text{ á } S \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Ángulos de } \frac{60 \times 60}{8} \text{ milímetros.} \\ \text{Almas de } 160 \times 8 \text{ milímetros.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

SECCIONES	ALTURA de las secciones 2 v metros.	ÁREAS ω metros cuadrados.	MOMENTOS de inercia I metros.	MOMENTOS DE FLEXIÓN			COMPRESIONES		TRABAJO debido a la flexión $\frac{\mu_0 v}{I}$ kilogramos por mm. ²	TRABAJO debido a la compresión $\frac{P_0}{\omega}$ kilogramos por mm. ²	COEFICIENTES FINALES DE TRABAJO R		ESFUERZOS CORTANTES TOTALES	
				POR las cargas μ kilogrametros.	POR el viento μ_1 kilogrametros.	TOTALES μ_2 kilogrametros.	POR el viento P ₁ kilogramos	TOTALES P ₀ kilogramos			INTRADÓS kilogramos por mm. ²	TRASDÓS kilogramos por mm. ²	POSITIVOS kilogramos	NEGATIVOS kilogramos
S'	0,70	0,006144	0,00058848	»	»	»	+ 980	4980	»	0,81	0,81	0,81	2324	»
R'	0,70	0,006144	0,00058848	- 7130	- 4420	- 11550	+ 980	4980	6,87	0,81	7,68	6,06	2324	»
O'	0,80	0,006144	0,00079198	- 8215	- 5167	- 13382	+ 1155	5323	6,76	0,86	7,62	5,90	1138	»
L'	1,10	0,006144	0,00158678	- 9031	- 5815	- 14846	+ 1260	5418	5,14	0,88	6,02	4,26	24	»
H'	1,60	0,006144	0,00352502	- 9506	- 6356	- 15862	+ 1310	5294	3,60	0,86	4,46	2,74	»	802
G'	1,10	0,006144	0,00158678	- 7608	- 6104	- 13712	+ 1320	4882	4,75	0,79	5,54	3,96	»	1540
F'	0,80	0,006144	0,00079198	- 5521	- 5705	- 11226	+ 1280	4296	5,67	0,70	6,37	4,97	»	2264
E'	0,70	0,003584	0,00039640	- 3798	- 5331	- 9129	+ 1180	3676	8,06	1,02	9,08	7,04	»	2766
D'	0,70	0,003584	0,00039640	- 75	- 4214	- 4139	+ 1180	3380	3,79	0,94	4,73	2,85	»	2082
C'	0,65	0,003584	0,00033913	+ 2282	- 3113	- 885	+ 1180	3100	0,79	0,86	1,65	0,07	»	1412
B'	0,60	0,003584	0,00028717	+ 3300	- 2016	+ 1284	+ 1180	2804	1,44	0,77	0,67	2,21	»	730
A	0,60	0,003584	0,00028717	+ 2888	- 808	+ 2080	+ 884	2310	2,17	0,64	1,53	2,81	980	980
B	0,60	0,003584	0,00028717	+ 3300	+ 1612	+ 4912	+ 262	1886	5,13	0,52	4,61	5,65	860	»
C	0,65	0,003584	0,00033913	+ 2882	+ 3298	+ 6180	+ 14	1934	5,35	0,53	4,82	5,88	»	65
D	0,70	0,003584	0,00039640	- 75	+ 4531	+ 4456	- 203	1997	3,93	0,55	3,38	4,48	»	950
E	0,70	0,003584	0,00039640	- 3798	+ 5310	+ 15312	- 420	2076	1,34	0,57	0,77	1,91	»	1850
F	0,80	0,006144	0,00079198	- 5521	+ 5420	- 10	- 488	2528	0,05	0,41	0,46	0,36	»	1890
G	1,10	0,006144	0,00158678	- 7608	+ 5432	- 2176	- 565	2997	0,75	0,48	1,23	0,27	»	1700
H	1,60	0,006144	0,00352502	- 9506	+ 5338	- 4168	- 620	3364	0,94	0,54	1,48	0,40	»	1432
L	1,10	0,006144	0,00158678	- 9031	+ 4825	- 4206	- 540	3618	1,45	0,58	2,03	0,87	»	906
O	0,80	0,006144	0,00079198	- 8215	+ 4229	- 3986	- 415	3753	2,00	0,61	2,61	1,39	»	102
R	0,70	0,006144	0,00058848	- 7130	+ 3780	- 3350	- 260	3740	1,99	0,61	2,60	1,38	724	»
S	0,70	0,006144	0,00058848	»	»	»	- 260	3740	»	0,61	0,61	0,61	724	»

ARMADURA TIPO NÚM. 4

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

No se tiene en cuenta la acción del viento.

$L = 20$ metros; $S = 5$ metros; $p = 400$ kilogramos; $N = 1812$ kilogramos; $ab = 6$ metros $= 0,6l$ " $ac = bc$
 $= 3$ metros $= 0,3l$ " $AQ = 10$ metros $= l$; $bd = de = \dots = bh = hl = \dots = 1$ metro $= 0,1l$ " $AB = BC$
 $= CD = DE = 2$ metros $= 0,2l$.

Ángulos de $\frac{60 \times 60}{6}$ de A á E " Almas de 100×6 de F á S .

Secciones.	Alturas de las secciones $2l$ Metros.	Áreas ω Metros cuadrados.	Momentos de inercia. I Metros.	Momentos de flexión μ Kilogramómetros.	Compresiones P Kilogramos.	Trabajo debido a la flexión $\frac{\mu \cdot p}{I}$ Kilogramos por mm. ²	Trabajo debido a la compresión $\frac{P}{\omega}$ Kilogramos por mm. ²	Coeficientes finales de trabajo R		Esfuerzos cortantes. Kilogramos.
								Intradós. Kilogramos por mm. ²	Trasdós. Kilogramos por mm. ²	
A	0,60	0,002736	0,00021973	+ 1880	2000	2,60	0,73	1,87	3,33	> 40
B	0,60	0,002736	0,00021973	+ 3020	2000	4,18	0,73	3,45	4,91	— 560
C	0,65	0,002736	0,00026012	+ 1891	2220	2,36	0,81	1,55	3,17	— 1390
D	0,65	0,002736	0,00030394	— 157	2580	0,16	0,94	1,10	0,78	— 2070
E	0,70	0,002736	0,00030394	— 3571	2860	4,11	1,04	5,15	3,07	— 1700
F	0,80	0,003936	0,00054983	— 5209	2400	3,79	0,61	4,40	3,18	— 1200
G	1,10	0,003936	0,00107858	— 7072	3870	3,60	0,97	4,57	2,63	— 660
H	1,60	0,003936	0,00230712	— 8796	4230	3,05	1,07	4,12	1,98	— 60
L	1,10	0,003936	0,00107858	— 8013	4850	4,08	1,10	5,18	3,98	+ 910
O	0,80	0,003936	0,00054983	— 7066	4320	5,14	1,10	6,24	4,04	+ 1812
R	0,70	0,003936	0,00041294	— 5436	4000	4,61	1,01	5,62	3,60	+ 1812
S	0,70	0,003936	0,00041294	>	4000	>	1,01	1,01	1,01	+ 1812

ARMADURA TIPO NÚM. 5

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

No se tiene en cuenta la acción del viento.

$L = 20$ metros; $S = 5$ metros; $p = 400$ kilogramos; $N = 1708$ kilogramos; $ab = 6,5$ metros $= 0,65l$ " $ac = bc$
 $= 3$ metros $= 0,3l$ " $AQ = 10,5$ metros $= 1,05l$; $bd = de = \dots = bh = hl = \dots = 1$ metro $= 0,1l$ " $AB = BC$
 $= CD = DE = 2$ metros $= 0,2l$.

Ángulos de $\frac{60 \times 60}{6}$ de A á E " Almas de 100×6 de F á S .

Secciones.	Alturas de las secciones $2l$ Metros.	Áreas ω Metros cuadrados.	Momentos de inercia I Metros.	Momentos de flexión μ Kilogramómetros.	Compresiones P Kilogramos.	Trabajo debido a la flexión $\frac{\mu \cdot p}{I}$ Kilogramos por mm. ²	Trabajo debido a la compresión $\frac{P}{\omega}$ Kilogramos por mm. ²	Coeficientes finales de trabajo R		Esfuerzos cortantes. Kilogramos.
								Intradós. Kilogramos por mm. ²	Trasdós. Kilogramos por mm. ²	
A	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2066	1708	2,86	0,62	2,24	3,48	> 70
B	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2718	1880	3,76	0,68	3,08	4,44	— 730
C	0,65	0,002736	0,00026012	+ 1921	2120	2,40	0,77	1,63	3,17	— 1400
D	0,65	0,002736	0,00030394	— 221	2440	0,23	0,89	1,12	0,66	— 2100
E	0,70	0,002736	0,00030394	— 3718	2740	4,28	1,00	5,28	3,28	— 1870
F	0,80	0,003936	0,00054983	— 5398	3200	3,92	0,81	4,73	3,11	— 1430
G	1,10	0,003936	0,00107858	— 7302	3700	3,72	0,94	4,66	2,78	— 800
H	1,60	0,003936	0,00230712	— 9073	4130	3,14	1,04	4,18	2,10	— 130
L	1,10	0,003936	0,00107858	— 8373	4260	4,22	1,08	5,30	3,14	+ 740
O	0,80	0,003936	0,00054983	— 7317	4240	5,32	1,07	6,39	4,25	+ 1708
R	0,70	0,003936	0,00041294	— 5978	4000	5,07	1,01	6,08	4,06	+ 1708
S	0,70	0,003936	0,00041294	>	4000	>	1,01	1,01	1,01	+ 1708

ARMADURA TIPO NÚM. 6

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

No se tiene en cuenta la acción del viento.

$L = 20$ metros; $S = 5$ metros; $p = 400$ kilogramos; $N = 1710$ kilogramos; $ab = 7$ metros $= 0,7l$ " $ac = bc$
 $= 3$ metros $= 0,3l$ " $AQ = 11$ metros $= 1,1l$; $bd = dc = \dots = bh = hl = \dots = 1$ metro $= 0,1l$ " $AB = BC$
 $= CD = DE = 2$ metros $= 0,2l$.

Ángulos de $\frac{60 \times 60}{6}$ de A á E " Almas de 100×6 de F á S .

Secciones.	Alturas de las secciones $2r$ Metros.	Áreas ω Metros cuadrados.	Momentos de inercia I Metros.	Momentos de flexión μ Kilogrametros.	Compresiones P Kilogramos.	Trabajo debido á la flexión $\frac{\mu r}{I}$ Kilogramos por mm. ²		Trabajo debido á la compresión $\frac{P}{\omega}$ Kilogramos por mm. ²	Coeficientes finales de trabajo R Kilogramos por mm. ²		Esfuerzos cortantes. Kilogramos.
						Intrados.	Trasdos.		Intrados.	Trasdos.	
A	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2290	1610	3,17	0,58	0,58	2,59	3,75	80
B	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2859	1780	3,95	0,65	0,65	3,30	4,60	700
C	0,65	0,002736	0,00026012	+ 1978	2070	2,47	0,75	0,75	1,72	3,22	1430
D	0,65	0,002736	0,00030394	— 232	2370	0,24	0,86	0,86	1,10	0,62	2110
E	0,70	0,002736	0,00030394	— 3808	2670	4,38	0,97	0,97	5,35	3,41	1860
F	0,80	0,003936	0,00054983	— 5527	3160	4,02	0,80	0,80	4,82	3,22	1400
G	1,10	0,003936	0,00107858	— 7470	3680	3,50	0,93	0,93	4,73	2,87	870
H	1,60	0,003936	0,00230712	— 9285	4100	3,22	1,04	1,04	4,26	2,18	220
L	1,10	0,003936	0,00107858	— 8663	4240	4,41	1,07	1,07	5,48	3,34	660
O	0,80	0,003936	0,00054983	— 7691	4230	5,60	1,07	1,07	6,67	4,53	1610
R	0,70	0,003936	0,00041294	— 6440	4000	5,46	1,01	1,01	6,47	4,45	1610
S	0,70	0,003936	0,00041294	—	4000	—	1,01	1,01	1,01	1,01	—

ARMADURA TIPO NÚM. 7

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 46).

No se tiene en cuenta la acción del viento.

$L = 20$ metros; $S = 5$ metros; $p = 400$ kilogramos; $N = 1522$ kilogramos; $ab = 7,5$ metros $= 0,75l$ " $ac = bc$
 $= 3$ metros $= 0,3l$ " $AQ = 11,5$ metros $= 1,15l$; $bd = de = \dots = bh = hl = \dots = 1$ metro $= 0,1l$ " $AB = BC$
 $= CD = DE = 2$ metros $= 0,2l$.

Ángulos de $\frac{60 \times 60}{6}$ de A á E " Almas de 100×6 de F á S .

Secciones.	Alturas de las secciones $2r$ Metros.	Áreas ω Metros cuadrados.	Momentos de inercia I Metros.	Momentos de flexión μ Kilogrametros.	Compresiones P Kilogramos.	Trabajo debido á la flexión $\frac{\mu r}{I}$ Kilogramos por mm. ²		Trabajo debido á la compresión $\frac{P}{\omega}$ Kilogramos por mm. ²	Coeficientes finales de trabajo R Kilogramos por mm. ²		Esfuerzos cortantes. Kilogramos.
						Intrados.	Trasdos.		Intrados.	Trasdos.	
A	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2497	1520	3,45	0,55	0,55	2,90	4,00	120
B	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2991	1780	4,14	0,65	0,65	3,40	4,79	500
C	0,65	0,002736	0,00026012	+ 2045	2080	2,55	0,76	0,76	1,79	3,51	1480
D	0,65	0,002736	0,00030394	— 236	2380	0,25	0,87	0,87	1,12	0,62	2160
E	0,70	0,002736	0,00030394	— 3882	2680	4,47	0,97	0,97	5,44	3,50	1910
F	0,80	0,003936	0,00054983	— 5636	3080	4,10	0,78	0,78	4,88	3,32	1480
G	1,10	0,003936	0,00107858	— 7615	3600	3,88	0,91	0,91	4,79	2,97	960
H	1,60	0,003936	0,00230712	— 9470	4040	3,28	1,01	1,01	4,29	2,27	320
L	1,10	0,003936	0,00107858	— 8918	4210	4,54	1,06	1,06	5,60	3,48	540
O	0,80	0,003936	0,00054983	— 8020	4200	5,83	1,06	1,06	6,89	4,77	1322
R	0,70	0,003936	0,00041294	— 6849	4000	5,80	1,01	1,01	6,81	4,79	1322
S	0,70	0,003936	0,00041294	—	4000	—	1,01	1,01	1,01	1,01	—

ARMADURA TIPO NÚM. 8.

CUBIERTA METÁLICA (fig. 12, lám. 36).

No se tiene en cuenta la acción del viento.

$L = 20$ metros; $S = 5$ metros; $p = 400$ kilogramos; $N = 1442$ kilogramos; $a b = 8$ metros $= 0,8 l$ " $a c = b c$
 $= 3$ metros $= 0,3 l$ " $A Q = 12$ metros $= 1,2 l$; $b d = d e = \dots = b h = h l = \dots = 0,1 l$ " $AB = BC$
 $= C D = D E = 2$ metros $= 0,2 l$.

Ángulos de $\frac{60 \times 60}{6}$ de A á E " Almas de 100×6 de F á S .

- 1126 -

Secciones.	Alturas de las secciones $2r$ Metros.	Áreas ω Metros cuadrados.	Momentos de inercia. I Metros.	Momentos de flexión μ Kilogrametros.	Compresiones P Kilogramos.	Trabajo debido á la flexión $\frac{\mu p}{I}$ Kilogramos por mm. ²	Trabajo debido á la compresión $\frac{P \omega}{I}$ Kilogramos por mm. ²	Coeeficientes finales de trabajo R		Esfuerzos cortantes. Kilogramos.
								Intrados. Kilogramos por mm. ²	Trasdos. Kilogramos por mm. ²	
A	0,60	0,002736	0,00021973	+ 2696	1442	3,73	0,52	3,21	4,25	150
B	0,60	0,002736	0,00021973	+ 3122	1640	4,32	0,59	3,73	4,81	830
C	0,65	0,002736	0,00026011	+ 2116	1930	2,64	0,70	1,94	3,34	1500
D	0,65	0,002736	0,00030394	- 229	2210	6,24	0,80	1,04	0,56	2180
E	0,70	0,002736	0,00030394	- 3939	2510	4,53	0,89	5,42	3,64	1960
F	0,80	0,003936	0,00054983	- 5725	3030	4,16	0,77	4,93	3,39	1510
G	1,10	0,003936	0,00107858	- 7736	3570	3,94	0,90	4,84	3,04	1000
H	1,60	0,003936	0,00230712	- 9627	4000	3,33	1,01	4,34	2,32	370
L	1,10	0,003936	0,00107858	- 9139	4170	4,66	1,05	5,71	3,61	530
O	0,80	0,003936	0,00054983	- 8309	4180	6,04	1,05	7,09	4,99	1442
R	0,70	0,003936	0,00041294	- 7210	4000	6,11	1,01	7,12	5,10	1442
S	0,70	0,003936	0,00041294	- 7210	4000	6,11	1,01	1,01	1,01	1442

XIII
MUROS

1. PRELIMINARES
2. MUROS DE SOSTENIMIENTO DE TIERRAS
3. MUROS SOMETIDOS Á LA PRESIÓN DEL AGUA
Ó DEL VIENTO
4. MUROS SOMETIDOS Á PRESIONES EN SU PARTE SUPERIOR. MUROS DE EDIFICIOS
5. CIMIENTOS

1. PRELIMINARES

PRISMAS CARGADOS EN UNA PARTE DE SU BASE CÁLCULO DE SU RESISTENCIA

989. En los problemas de compresión resueltos hasta aquí, hemos supuesto que toda la sección recta del prisma estaba comprimida, esto es, que la compresión total P estaba distribuída en toda el área de dicha sección (fig. 13, lám. 46).

No siempre sucede así, y muchas veces (fig. 14, lám. 46), la fuerza P se trasmite al prisma $ABHI'$ por una superficie $ab, a'b'e'd'$ menor que la base $AB, A'D'$; por ejemplo, cuando una piedra ó macizo de mampostería sirve de base á una columna ó pie derecho.

Si el prisma es de mampostería aparejada por hiladas regulares, en la superior recibe la presión únicamente el sillar, sillarejo ó ladrillo, que está colocado inmediatamente debajo de la superficie $a'b'e'd'$ y se trasmite á los próximos de las hiladas inferiores, comprimiéndose el mortero de los tendeles y rompiéndose por esfuerzo cortante el de las llagas ó juntas verticales inmediatas, dislocándose el macizo si P es grande y $a'b'e'd'$ pequeño. En la base superior del prisma, la parte $MNRS$ no trabaja, y se separa del resto abriéndose las grietas que señala la figura.

En la mampostería ordinaria, los resultados son igualmente destructores, y en todos casos es de necesidad repartir las presiones sobre toda la base del macizo interponiéndole una pieza única, por ejemplo, una piedra que reciba la presión P y la comunique á toda la base del prisma (fig. 15, lám. 46).

Ahora es la piedra la que resulta cargada parcialmente, y al aplicar al cálculo de su resistencia la conocida fórmula $P = R' \omega$, ¿qué valor se debe dar á ω ? ¿El del área de la base total $A'B'D'E'$, el de la superficie de ocupación $a'b'e'd'$, ó uno intermedio?

Esta duda solamente puede resolverse experimentalmente, rompiendo por aplastamiento prismas cargados del modo indicado.

Según las experiencias de M. Durand Claye realizadas con prismas de sección cuadrada $A'B'D'E'$, de piedra caliza unos y de cemento otros, siendo también cuadrada la superficie $a'b'd'e'$ de aplicación y concéntrica con la anterior, la carga P de fractura está comprendida entre las correspondientes á los prismas de base $A'B'D'E'$ y $a'b'd'e'$, cargados con fuerzas repartidas uniformemente en toda la superficie de dichas bases, y puede expresarse por la fórmula empírica

$$\bar{P} = \bar{R}' C c \quad (1),$$

en que \bar{R}' es el coeficiente de fractura por compresión del material que se ensaya, C el lado $A'B'$ del cuadrado sección del prisma, y c el $a'b'$ de la superficie de ocupación de la carga.

Para la carga ordinaria, la fórmula que resuelve los problemas de resistencia es

$$P = R' C c \quad (2);$$

P es la fuerza de compresión, R' el coeficiente de trabajo correspondiente, C el lado del cuadrado sección del prisma y c el del cuadrado de la superficie de aplicación de la compresión P .

Cuanto al grueso ó altura AF del prisma, es necesario que sea suficientemente grande para alejar todo peligro de fractura por flexión, debida á la inevitable desigualdad de asiento del sillar sobre su lecho FH , por consecuencia de los defectos de labra. Como límite inferior, es práctica tomar la dimensión AF que resulta de trazar la bisectriz $F'a$ del ángulo Aah .

M. Durand Claye halló próximamente los mismos resultados cuando la carga ocupaba la posición que, en proyección horizontal, señala la fig. 16 (lám. 46).

Es de sentir que estas experiencias no sean más completas, haciéndolas extensivas á todos los materiales. Mientras se realizan, se aplicará la fórmula empírica (2) (*).

Ejemplo. — Columna de hierro, cuya base $ab = c$ es cuadrada, de 20

(*) Recordaremos que las cantidades P' , R' , C y c deben referirse siempre á las mismas unidades de medida. Si R' es dado en kilogramos por metro cuadrado ó centímetro cuadrado, C y c representarán metros ó centímetros y P kilogramos.

centímetros de lado, y soporta un peso $P = 20000$ kilogramos (fig. 15, lámina 46). Se quiere saber la magnitud $AB = C$ que habrá que asignar al lado del cuadrado base de un prisma de piedra caliza, cuyo coeficiente de trabajo por compresión es $R' = 16$ kilogramos por cm.²

Aplicando la fórmula (2)

$$P = R' C c \quad \text{,,} \quad 20000 = 16 \times 20 \times C \\ C = 62,5 \text{ centímetros.}$$

Con igual facilidad se resuelven los problemas cuando las incógnitas son P , c ó R' .

ASIENTO DE LAS MAMPOSTERÍAS

990. Asiento de las mamposterías, su causa y medida. — El asiento de las mamposterías, eliminando todo descenso de los cimientos, se debe á la contracción de los morteros y á la disminución de altura que por efecto de las sobrecargas y del peso propio de los materiales, morteros, piedras, ladrillos, etc., se produce en el macizo á causa de la elasticidad de estos elementos.

La contracción de los morteros por la desecación y fraguado depende de la naturaleza de la cal ó cemento y de las cantidades de agua y de arena; aumenta con la proporción de agua empleada en la fabricación de los morteros, y disminuye cuando crece la proporción de arena. En orden creciente las materias que producen contracción son: cemento de fraguado rápido, ídem de ídem lento, cal hidráulica, cal grasa, arcilla.

Las piedras y los morteros son materiales dotados de cierta elasticidad y susceptibles de experimentar deformaciones por efecto de las fuerzas que les están aplicadas, y, por tanto, las mamposterías pueden sufrir acortamiento y alargamiento, si bien muy pequeños, que serán medidos por la fórmula (2) del núm. 185.

Sea $ACDB$ (fig. 17, lám. 46) un muro de altura h , cuya sección tiene por área ω , y llamemos t' al peso del metro cúbico de mampostería.

A medida que el muro avanza en su construcción, las hiladas situadas debajo de la que se está fabricando sufren asientos por efecto de la contracción del mortero y de la reducción de altura, ó deformación, debida al peso de las hiladas superiores.

Una vez terminado el muro, las diversas hiladas habrán sufrido asientos

diferentes durante el curso de la obra; por ejemplo, la que ocupaba la posición $M'N'$, cuando en la construcción se llegó á esta altura, ocupará la posición MN en el muro $ACDB$, habiendo sufrido un asiento $l = M'a$.

Fácil es calcular el asiento l para las diversas hiladas, y con este propósito llamaremos E al coeficiente de elasticidad de la mampostería, incluyendo en este valor la influencia de los fenómenos relativos á la contracción de los morteros (*). Aplicando á la hilada MN , de altura $z = AM$, la fórmula (2) del núm. 185, y teniendo presente que AM , $A'M'$ son muy poco diferentes, por lo que supondremos $AM = A'M' = z$, y que además

$$P = \text{peso de } MCDN = (h - z) \omega t'$$

$$L = AM = z$$

$$l = \text{asiento } M'a,$$

se obtiene

$$l = (h - z) z \frac{t'}{E}.$$

El máximo de l corresponde á $z = \frac{1}{2} h$, para cuyo valor

$$l = \frac{h^2 t'}{4 E},$$

que demuestra que los asientos son proporcionales á los cuadrados de las alturas h .

La hilada central RS , correspondiente á la mitad de altura, es, pues, la que sufre más asiento, desde que se puso en obra hasta la terminación del muro y contracción definitiva de los morteros, y es proporcional al cuadrado de dicha altura. Para $x = 0$ y $x = h$ (hiladas AB y CD), l es cero también, es decir, que las hiladas de la base y de la coronación no experimentan asiento alguno.

(*) Faltan experiencias para determinar el coeficiente de elasticidad de las diferentes clases de mamposterías. De las practicadas por MM. Féline Romany y Vaudrey en las canteras de Souppes, con un arco rebajado de 37,58 metros de luz y 2,12 de flecha, construido con sillería caliza de Château-Landon y mortero de cemento en las juntas, deduce Résal que, por metro cuadrado, el coeficiente de elasticidad de esta clase de mamposterías es $2,5 \times 10^6$. Para la mampostería de ladrillo y de cemento halló M. Perrotil que $E = 3 \times 10^8$, cantidad mucho menor que la anterior, lo cual no debe sorprender porque el ladrillo es mucho más elástico y mucho menos resistente que la piedra.

En tanto que experiencias detalladas determinen el valor de E para las diversas clases de mampostería, admitiremos que este coeficiente está comprendido entre 2×10^8 y 3×10^6 , y varía del mismo modo que la resistencia á la fractura por compresión.

991. Efectos perjudiciales de los asientos y modo de evitarlos. — Si la contracción del mortero empleado en la mampostería puede efectuarse libremente, no resulta perjuicio alguno para su resistencia, y esto es lo que sucede en los tendeles ó lechos horizontales, cuya disminución de espesor puede tener lugar con toda libertad, y es facilitada por el peso de las hiladas superiores. Pero cuando no es posible la contracción, como sucede en las llagas ó juntas verticales, ó en las inclinadas que sufren presiones, se desarrollan en el interior de la masa de mortero tensiones, pues una contracción no efectuada equivale á una extensión, de modo análogo á lo que sucede con un roblón remachado en caliente, ó con una barra de hierro al rojo, asegurada invariablemente por sus extremos y enfriada después.

Debe, por tanto, procurarse que las contracciones sean poco sensibles y que se operen libremente; de aquí la conveniencia de emplear poca agua en la manipulación de los morteros, de apretar y aun golpear las piedras ó ladrillos, sobre el tendel, al ponerlos en obra y de apisonar los hormigones durante la construcción de los macizos.

Los asientos pueden producir grietas en los macizos, en los casos siguientes:

1.º Cuando se unen á una base ó fundamento rígido, formando escalones. Esto puede suceder en el muro DH (fig. 18, lám. 46), pues mientras la hilada AB sufre asientos proporcionales al cuadrado de la altura h del escalón, la hilada BC permanece inalterable de posición, dándose así origen á la grieta Bm , que arranca de B .

Lo mismo sucedería á la bóveda de la fig. 19 (lám. 46) en a y b , siendo preferible disponer el arranque en un solo plano, como se ve en A .

2.º Cuando se une obra nueva con obra antigua que ha hecho todo su asiento, ó con roca ú otro macizo incomprensible. Como ejemplo, puede presentarse el muro de depósito de agua citado por M. Guillemain (fig. 20, lámina 46) construido sobre el pico A de una roca; los asientos en a y en b no continuaron igualmente en c , y el descenso de las partes a y b produjo la grieta AH .

3.º Cuando se emplean mamposterías de asientos muy diferentes, por ejemplo, sillería ó ladrillo en las caras y relleno de hormigón en el centro (fig. 21, lám. 46), ó muros de sillería ligados perpendicular ú oblicuamente á otros de mampostería ordinaria.

La mayor diferencia de asientos tendrá lugar en el punto medio de la altura (núm. 990) si es que las dos mamposterías se levantan á un tiempo, y de allí partirá la grieta.

El empleo de capas delgadas de mortero, el apisonado ó compresión de las hiladas y la elección de materiales de elasticidad poco diferente, son los medios que deben emplearse para evitar ó hacer menores las dislocaciones producidas por los asientos.

DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN UN PRISMA CUANDO EL PUNTO DE APLICACIÓN NO COINCIDE CON EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA SECCIÓN

992. Resultante y centro de presiones que varían de un modo cualquiera (fig. 1.^a, lám. 47). — En cada elemento H que tiene por área $dx dy$, obra una presión p por unidad superficial conocida, representada por la ordenada mn . Se piden las coordenadas $x_1 = Os$, $y_1 = as$ del centro de presión a ó sea del punto de aplicación de la resultante P de las presiones parciales.

En un elemento de área $dx dy$ obrará una fuerza $p dx dy$; y sus momentos con relación á los ejes OX , OY serán, respectivamente, $yp dx dy$ y $xp dx dy$.

En los diversos puntos H , levantemos perpendiculares de magnitud igual á las fuerzas $p dx dy$ que obran en ellos. Los extremos de estas perpendiculares formarán la superficie MnN .

La mecánica da las tres ecuaciones

$$P = \iint p dy dx \quad (1).$$

$$Py_1 = \iint p y dy dx \quad (2).$$

$$Px_1 = \iint p x dy dx \quad (3).$$

La (1) expresa que la resultante P es la suma de las componentes. Esta resultante no es otra cosa que el volumen de la figura $ABCD$, $A'MNC'$.

La (2) y la (3) establecen que el momento de la resultante P , con respecto á los ejes coordenados, es igual á la suma de momentos de las componentes.

Si son conocidas las fuerzas p , y, por tanto, su variación de un punto á otro, se conocerá $p = f(x, y)$ que no es más que la ecuación de la superficie MN . Entonces se podrán hacer las integraciones indicadas en las ecuaciones (1) á (3), y obtener P y las ordenadas x_1 , y_1 de su punto de aplicación.

Cuando p es constante, la superficie MN se convierte en un plano paralelo al de la sección $ABCD$. La resultante P pasa por el centro de gravedad de esta sección y tiene por valor $p\omega$, siendo ω su área.

Recíprocamente: una fuerza P aplicada al centro de gravedad de una sección, produce en ella presiones iguales en todos los puntos, cuyo valor, por unidad superficial, es $p = \frac{P}{\omega}$.

993. Distribución de fuerzas, por unidad superficial, cuando la resultante no está aplicada en el centro de gravedad de una sección. — Este problema es recíproco del anterior; se conocen P y las coordenadas x_1 , y_1 de su punto de aplicación y se trata de hallar la presión p por unidad superficial en un punto cualquiera de ordenadas x ó y , es decir, la relación que liga á p con x ó y , ó la función $p = f(x, y)$.

El problema, analíticamente considerado, es indeterminado, pues no es posible efectuar las integraciones indicadas en las ecuaciones (1) á (3), porque se desconoce la función $p = f(x, y)$.

Estas ecuaciones expresan:

La (1), que el volumen comprendido por la superficie MN de ordenadas $p dx dy$ (fig. 1.^a, lám. 47) y la superficie cilíndrica de base $ABCD$ ha de valer P .

Las (2) y (3) manifiestan que el centro de gravedad de este volumen ha de hallarse en la vertical que pasa por el punto a , a' de aplicación de P .

Hay infinitas superficies que satisfacen á estas condiciones, y, por lo tanto, otras tantas reparticiones del peso P en los elementos de área de la sección. El problema es, pues, indeterminado, analíticamente; y, sin embargo, la distribución de presiones, en el orden físico, no se opera de modo caprichoso, sino obedeciendo á una cierta ley.

Salvaremos la dificultad aplicando al problema que nos ocupa la teoría de la flexión explicada en los capítulos IV y V.

Supongamos (fig. 2.^a, lám. 47) un sólido prismático $EABF$, $HMLN$ sometido á la acción de la fuerza P aplicada al punto a' , a . Sea ω el área de la sección, O su centro de gravedad, y tracemos por él los dos ejes XX , YY .

Aplicando en O , O' dos fuerzas $P'' = P' = P$, iguales y contrarias, la fuerza P puede sustituirse por otra $P' = P$ aplicada al centro de gravedad O , O' , y por el par P, P'' , cuyo brazo de palanca es $O'a' = Oa = x$ y cuyo momento es $M = Px$.

La acción de un par es la misma cualquiera que sea la posición que ocupe en el plano en que se halla, y, por lo tanto, el sólido está en el mismo

caso que el que representa la fig. 3.^a (lám. 47), es decir, sometido á la flexión que produce el momento $M = P x$. Las fibras situadas á la izquierda del plano $O' Z$ estarán extendidas y las de la derecha comprimidas.

En suma, el sólido está sujeto:

1.º A una compresión uniformemente repartida $\frac{P}{\omega}$ por unidad superficial de su sección recta, causada por la fuerza P aplicada en su centro de gravedad.

2.º A extensiones en las fibras de la parte $H M N$ (fig. 2.^a, lám. 47) y compresiones en las de $M N L$, ocasionadas por el momento de flexión $M = P x$.

Estudiemos las deformaciones como si los efectos anteriores se produjesen sucesiva y no simultáneamente.

Obedeciendo á la compresión P aplicada al centro de gravedad de la sección, todas las fibras elementales se comprimen igualmente, pues que están sujetas á la misma fuerza $\frac{P}{\omega}$, y la sección $A B$ (fig. 4.^a, lám. 47) se trasladará paralelamente á $A' B'$.

El momento de flexión $M = P x$ hace girar la sección $A' B'$ alrededor del eje proyectado en O'' (núm. 305), y la coloca en $A'' B''$; en una palabra, la base superior $A B$ del prisma viene á ocupar la posición $A'' B''$, y esto indica claramente que las compresiones de las fibras son desiguales, puesto que los acortamientos lo son también y aumentan de A á B , alcanzando su máximo valor en B .

La posición final $A'' B''$ de la base depende de la deformación lineal $AA' = BB'$ y de la angular $A'' O'' A'$, esto es, de la elasticidad del material, del valor de P y del momento $P x$, ó sea también de la distancia x á que se halla del centro de gravedad O' de $A B$ el punto de aplicación de P .

Puede suceder, para valores grandes de x , que la situación definitiva de la base $A B$ sea $A B''$ (fig. 5.^a, lám. 47) ó $A''' B'''$. En el primer caso, todas las fibras proyectadas en $A E$ no han sufrido deformación, lo que demuestra que no han experimentado compresiones ni extensiones, y las demás comprendidas entre los planos $A E$, $B F$, resultan comprimidas, siendo estas compresiones proporcionales á las distancias de las fibras á $A E$, pudiendo estar representadas por las ordenadas de $A B''$ con respecto á $A B$. En el segundo caso, las fibras comprendidas entre $A E$ y $C D$ se han extendido; las $C D$ no han experimentado esfuerzo alguno, y las situadas entre $C D$ y $B F$ se han comprimido.

Como vemos, una compresión puede originar extensiones.

Siendo desiguales las compresiones en las diversas fibras que componen el sólido, interesa el conocimiento de la compresión en un punto cualquiera de la sección, para que, cuando se resuelvan problemas de resistencia, no resulte ninguna compresión elemental, por unidad de superficie, mayor que el coeficiente de trabajo R' .

Llamemos:

I = momento de inercia de la sección del prisma con respecto al eje $Y Y$ (fig. 2.^a, lám. 47).

v = distancia variable á $Y Y$ de una capa de fibras $e f$, $c d$, etc., cualquiera.

$v' = H O$ } Distancias, al eje $Y Y$, de las fibras más alejadas.
 $v'' = L O$ }

p' = compresión por unidad superficial que sufren todas las fibras por efecto de la fuerza $P' = P$ aplicada al centro de gravedad O' , O . Es constante.

p'' = compresión ó extensión por unidad superficial que resulta á las fibras distantes v del eje $Y Y$, por efecto del momento de flexión $M = P x$.

Tendremos:

$$P = p' \omega \quad \text{,,} \quad p' = \frac{P}{\omega} \quad (\text{núms. 185 y 199}).$$

$$M = P x = \frac{p'' I}{v} \quad \text{,,} \quad p'' = \frac{P x v}{I} \quad (\text{núm. 460}).$$

Si asignamos signo positivo á las compresiones y negativo á las extensiones, p'' deberá llevar el doble signo \pm ; y llamando p á la compresión ó tensión definitiva para una fibra cualquiera que diste v del eje $Y Y$, tendremos

$$p = \frac{P}{\omega} \left(1 \pm \frac{x v \omega}{I} \right) \quad (1)$$

aplicando el signo $+$ para todas las fibras de la parte $M N L$, $O' B F Z$, y el signo $-$ á las de $M H N$, $A E Z O'$.

Para las fibras $M N$, $O' Z$, como $v = 0$, es $R' = \frac{P}{\omega}$ que es la misma

compresión por unidad superficial que resulta en el caso de $x = 0$, es decir, cuando la fuerza P está aplicada al centro de gravedad O' , O .

$$\text{En } H, v = v' \text{ y } p = \frac{P}{\omega} \left(1 - \frac{x v' \omega}{I} \right) \quad (2).$$

$$\text{En } L, v = v'' \text{ y } p = \frac{P}{\omega} \left(1 + \frac{x v'' \omega}{I} \right) \quad (3);$$

en este punto la compresión es un máximo.

Los valores de p son funciones lineales de v , y la ecuación (1) es la de un plano DC , normal al de la figura, cuyas ordenadas AD, mn, \dots, BC representan las compresiones por unidad superficial en los diversos puntos de la sección recta del prisma. Por esta razón la ley de distribución de presiones se denominaba *ley del plano*.

Se puede preguntar cuál ha de ser el valor de la distancia x del punto de aplicación de P al centro de gravedad O de la sección para que la presión en H se anule. Igualando á cero el valor (2) de p , se obtiene

$$x = \frac{I}{v' \omega} \quad (4).$$

Entonces la presión en L sería, substituyendo x en (3),

$$p = \frac{P}{\omega} \left(1 + \frac{v''}{v'} \right) \quad (5).$$

Cuando $x < \frac{I}{v' \omega}$, será p siempre positivo (fórmula 2), lo que equivale á decir que toda la sección está comprimida, si bien desigualmente, pudiendo estar representadas las compresiones por unidad superficial en los diferentes puntos por las ordenadas de DC , siendo AD y CB los valores que, respectivamente, dan las fórmulas (2) y (3). Representando por intensidades diversas de tintas las magnitudes de las compresiones, su distribución está expresada en la fig. 12 (lám. 47).

Si $x > \frac{I}{v' \omega}$, es negativo p en H (fig. 8.^a, lám. 47); el plano DC corta á AB en S , y únicamente estará comprimida la parte de sección SB, VUL . La distancia $v = O'S$, que fija la posición de la línea de separación S, VU , se obtiene por la ecuación

$$1 - \frac{x v \omega}{I} = 0.$$

El máximo de la compresión ocurre en L , como antes, y tiene el valor (3). La parte AS, VHU , está extendida, siendo dada la extensión máxima AD por la fórmula (2).

994. Núcleo central. — Si suponemos que la fuerza P está situada á la izquierda de O en el plano XX , hallaríamos un valor análogo al (4) de x correspondiente á un punto de aplicación a_1 (fig. 6.^a, lám. 47), para el cual la compresión en L sería cero é iría creciendo hasta H en que alcanza su máximo valor.

Para otro plano diametral $X'X'$, hallaríamos de igual modo un punto a' de aplicación de la fuerza P , para el cual la presión en H' es cero y en L' un máximo, y otro a'_1 que da presión cero en L' y máxima en H' . Uniendo todos estos puntos, resulta una figura $aa'a_1a'_1$, que se denomina *núcleo central*, y cuyas propiedades son las siguientes:

Si la fuerza P está aplicada en un punto a de la línea $aa'a_1a'_1$, la sección sufre compresiones por unidad superficial que están comprendidas entre cero en un punto H del perímetro, y un máximo en el otro extremo del diámetro que pasa por O .

Cuando el punto de aplicación P es uno interior del núcleo central, toda la sección está comprimida, y si está al exterior, resulta comprimida en una parte y extendida en la restante.

Si se quiere, pues, que toda la sección esté comprimida, es necesario que el punto de aplicación de P , ó sea el llamado *centro de presión*, sea punto del núcleo central, ó esté á lo más en la curva que limita este núcleo.

995. Aplicaciones. — Como conocemos los momentos de inercia I de las diversas figuras que puede tener la sección trasversal de los sólidos empleados en construcciones (núm. 477), fácil es aplicar las fórmulas anteriores á cada caso particular.

1.^a *Sección rectangular de lados $HR = a$ y $HL = b$* (fig. 7.^a, lám. 47) (*).

Para esta sección.

$$I = \frac{1}{12} a b^3 \quad \omega = ab \quad c' = c'' = \frac{1}{2} b.$$

Fuerza P contenida en el plano de simetría XX , aplicada en s á la distancia $Os = x$ del centro de gravedad del rectángulo.

(*) Entre los varios casos que pueden presentarse, á más de los que estudiaremos en muros y bóvedas, citaremos los representados en la fig. 2.^a (lám. 5), que ponen de manifiesto la disposición de retallos interiores ó exteriores que sue'le darse á los muros de los edificios. Las presiones P se reparten desigualmente en los muros interiores

Compresión por unidad superficial en un punto cualquiera distante v del eje neutro MN , O' . — Sustituyendo los valores de I y ω en la fórmula (1), hallamos

$$p = \frac{P}{ab} \left(1 \pm \frac{12 xv}{b^2} \right) \quad (6).$$

El signo $+$ corresponde á los puntos situados á la derecha de MN , como los de la zona ef , y el signo $-$ á los de la izquierda, como los de cd . La presión en un punto cualquiera de MN ($v = 0$) es $p = \frac{P}{ab}$, es decir, que en la zona MN las presiones por unidad superficial son las mismas que en el caso de estar aplicada la fuerza P en el eje O , $O'Z$ del prisma.

Dividiendo el área $HLRS$ de la sección recta en elementos rectangulares cd , ef , paralelos á MN , la presión R' es igual en un punto cualquiera, dentro de cada elemento, y está representada por la ordenada rs del trapecio $ADCB$; de aquí el nombre de *ley del trapecio* que se da á la distribución de presiones en la sección.

En un punto cualquiera de HL , de ordenada $v' = \frac{1}{2} b$, el valor (6) de la compresión por unidad superficial es

$$p = \frac{P}{ab} \left(1 - \frac{6x}{b} \right) \quad (7);$$

y en RS ,

$$p = \frac{P}{ab} \left(1 + \frac{6x}{b} \right) \quad (8).$$

Núcleo central. Para que R' sea cero en HL , es preciso (fórmula 4) que

$$Os = x = \frac{1}{6} b \quad (9);$$

y la presión en RS , que es la máxima, será, haciendo $v' = v''$ en la fórmula (5),

$$p = 2 \frac{P}{\omega},$$

esto es, doble de la uniformemente repartida correspondiente al caso de estar P aplicada á O' .

Las presiones estarán representadas por las ordenadas del triángulo ABC (fig. 9.^a, lám. 47), en que $BC = 2 \times \frac{P}{\omega}$. Fácilmente se ve que $O'm = \frac{P}{\omega}$.

Si el punto de aplicación está á la izquierda de MN , deberá ser t á la distancia $O't = \frac{1}{6} b$; de modo que

$$st = \frac{1}{3} TV = \frac{1}{3} b.$$

Cuando la fuerza P esté aplicada entre t y s , esto es, en el tercio medio de la dimensión TV , toda la sección resultará comprimida, hallándose los valores de p por las fórmulas (7) y (8).

Si el punto de aplicación es el s ó el t , uno de los lados HL , RS , el más distante del punto de aplicación, sufrirá compresiones $p = 0$, y el otro la compresión máxima por unidad superficial $p = 2 \frac{P}{\omega}$.

Finalmente, si el punto de aplicación es exterior á ts , por ejemplo u (fig. 10, lám. 47), habrá fibras extendidas en las inmediaciones de HS , calculándose la extensión por la fórmula (6), en la que se tomará el signo $-$ del paréntesis.

996. Cuando no se quieran tener en cuenta estas extensiones y sí solamente las compresiones, se tomará $Vd = 3 \times Vu$, y considerando el rectángulo $RmnS$, la arista mn sufrirá una compresión $p = 0$, y la RS otra $p = 2 \times \frac{P}{Rm \times mn}$, porque el rectángulo citado está en el mismo caso $HRSL$ (fig. 9.^a, lám. 47) cuando P estaba aplicado á s .

Si se tiene en cuenta que (fig. 10, lám. 47)

$$Bu' = BO' - O'u' = \frac{1}{2} b - x$$

$$Rm = Bt' = 3 \times Bu' = \frac{3(b - 2x)}{2}$$

$$mn = a;$$

el valor anterior de p puede ponerse bajo la forma

$$p = \frac{4P}{3(b - 2x)a} \quad (10).$$

Puede preguntarse cuál ha de ser el valor de la fuerza total de compresión P aplicada en un punto cualquiera distante x del centro de gravedad O' de la superficie rectangular proyectada en AB (fig. 24, lám. 51) para que la presión máxima por unidad superficial p (que ha de tener lugar en B ó en A) sea igual á una cierta cantidad, por ejemplo, al coeficiente R' de trabajo por compresión.

Dividamos AB en tres partes iguales, AC , CD , DB . Si el punto de aplicación de P está en la parte DB , en m por ejemplo, de modo que $O'm = x$ sea mayor que la tercera parte de AB , ó $x > \frac{1}{3}b$, la ecuación (10) anterior, haciendo $p = R'$, dará la relación que debe existir entre P y x para que p , presión máxima en B , sea constante é igual á R' , y tendremos

$$P = \frac{3}{4} R' a (b - 2x) \quad (11),$$

ecuación de una recta BF que pasa por B , pues para $x = O'B = \frac{1}{2}b$, resulta $P = 0$, es decir, que para que la presión máxima por unidad superficial, que tendrá lugar en B , sea igual á R' , la fuerza total P de compresión aplicada en un punto cualquiera m del tercio extremo DB ha de tener por valor la ordenada mn de la recta FB , cuya ecuación es la (11).

Si el punto de aplicación r está entre O' y D , haríamos uso de la fórmula (8), sustituyendo p por R' , y resulta

$$R' a b^2 = P (b + 6x) \quad (12),$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera FH , cuyas asíntotas son AB y CE .

Del mismo modo hallaríamos la recta AE para la parte AC y la hipérbola equilátera EH para CO'

Resumiendo: la presión total P aplicada en un punto cualquiera de $AB = b$, ha de ser igual á la ordenada de la línea $A E H F B$, si se quiere que la presión máxima por unidad superficial en A ó en B sea constantemente igual á R' .

Haciendo $x = 0$ en la ecuación (12) resulta $P = R' a b$; esto nos dice que la ordenada $O'H$ es igual á la fuerza total de compresión que puede resistir el rectángulo de lados a y b , para un coeficiente de trabajo R' , cuando aqué-

lla está aplicada en el centro de gravedad de éste. Las curvas HE , HF , pueden sustituirse sin error sensible, en obsequio á la sencillez, por las rectas que unan los extremos.

Los puntos del eje MN que tienen propiedades iguales á las de t y s (fig. 9.^a, lám. 47) son c y d , siendo $Oc = Od = \frac{1}{6} MN = \frac{1}{6} a$. En un eje cualquiera $A'B'$, el punto de aplicación n que hace $p = 0$ en R , está en la línea recta td ; en efecto, descomponiendo la fuerza P aplicada en n en otras dos P' y P'' aplicadas respectivamente á t y d , las compresiones en RS y HR , y por lo tanto en R , son cero.

Resumiendo: el núcleo central es, para el rectángulo, un rombo $tcsd$, cuyas diagonales ts , cd son el tercio de las líneas medias $TV = b$ y $MN = a$.

2.^a Sección circular de radio r (fig. 1.^a, lám. 50):

$$I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad v' = v'' = r, \quad \omega = \pi r^2.$$

Presión en un punto cualquiera distante v del centro O , cuando el punto de aplicación de P dista x de dicho centro:

$$p = \frac{P}{\pi r^2} \left(1 \pm \frac{4xv}{r^2} \right) \quad (13).$$

Presión en la circunferencia:

$$p = \frac{P}{\pi r^2} \left(1 \pm \frac{4x}{r} \right) \quad (14),$$

correspondiendo el signo positivo al punto L y el negativo al H .

Núcleo central. — Es un círculo de radio $\alpha = \frac{1}{4} r$.

3.^a Corona circular de radios exterior r é interior r' (fig. 1.^a, lám. 50):

$$I = \frac{\pi (r^4 - r'^4)}{4} \quad v' = v'' = r \quad \omega = \pi (r^2 - r'^2).$$

Presión en un punto cualquiera distante v del centro O , cuando el punto de aplicación de P dista x de dicho centro:

$$p = \frac{P}{\pi (r^2 - r'^2)} \left(1 \pm \frac{4xv}{r^2 + r'^2} \right) \quad (15).$$

Presión en la circunferencia:

$$p = \frac{P}{\pi(r^2 - r'^2)} \left(1 \pm \frac{4xr}{r^2 + r'^2} \right) \quad (16),$$

correspondiendo el signo + al punto *L* y el signo - al *H*.

Núcleo central. — Es un círculo de radio $\frac{r^2 + r'^2}{4r}$.

996'. Por medio de una sencilla construcción gráfica, puede determinarse el plano de presiones *DC* (figs. 1.^a y 2.^a, lám. 55).

Supongamos que la fuerza *P* tiene su punto de aplicación *a* en un plano de simetría. Sea *O'* el centro de gravedad de la sección *AB*, y *s* el punto del núcleo central situado en el eje *AB*. La distancia *O's* nos es conocida para las secciones rectangular y circular, según hemos visto en los núms. 995 y 996.

Hágase $O'M = \frac{P}{\omega}$, únense los puntos *M* y *s*, y por el de intersección *L* con *P* trácese *LD* paralela á *AB*. Uniendo *D* y *M*, la recta *DC* será la traza vertical del plano de presiones.

Quedará esto demostrado si probamos que *AD* representa el valor de la presión en *A*, cuyo valor es, según la fórmula (1) del núm. 993,

$$p = \frac{P}{\omega} \left(1 - \frac{xv\omega}{I} \right).$$

En efecto: la comparación de los triángulos semejantes *MO's* y *MNL*, da

$$MO' : MN :: O's : NL.$$

O's vale $\frac{I}{v\omega}$, según la expresión (4) del núm. 993; además, $MO' = \frac{P}{\omega}$ y *NL* = *x*, de modo que substituyendo en la proporción anterior y despejando *MN*, se encuentra:

$$MN = \frac{Pxv}{I}.$$

Ahora bien; $AD = MO' - MN$, ó, substituyendo valores,

$$AD = \frac{P}{\omega} \left(1 - \frac{xv\omega}{I} \right).$$

Si el punto de aplicación *a* de la fuerza *P* está fuera del núcleo central (fig. 2.^a, lám. 55), la construcción es exactamente igual.

CONDICIONES GENERALES DE ESTABILIDAD Y RESISTENCIA DE UN MACIZO

997. Condiciones de estabilidad y resistencia de un conjunto de sillares superpuestos. — Sean *M, N, R, S* (fig. 13, lám. 47) varios sillares superpuestos, sin interposición de mortero ni cemento; de modo que en los planos de junta no hay cohesión, y obra únicamente el rozamiento cuando uno de ellos resbale sobre el inmediato.

Supongamos conocida la fuerza *F* que actúa en el plano de junta *HD* del primer sillar *M*, y que nos son conocidas también las fuerzas exteriores (peso propio, presiones ó empujes) aplicadas á los sillares restantes. Componiendo *F* con las fuerzas que actúan sobre el sillar *N*, obtendremos la resultante *F'*, que obra en la junta *PO*, en el punto de aplicación *A*, y del mismo modo obtendríamos las fuerzas *F''*, *F'''* y sus puntos de aplicación *B* y *C* en los planos de junta de los sillares *R* y *S*.

Las fuerzas *F, F', etc.*, se cortan formando el polígono *Ocd e C* que se denomina polígono de las presiones. El polígono *OABC*, que se obtiene uniendo los puntos de aplicación de dichas fuerzas, es conocido con el nombre de polígono de los centros de presión. Ambos, cuando los planos de junta estén infinitamente próximos, se convierten en curvas que reciben los nombres precedentes.

Veamos las condiciones á que ha de satisfacer el conjunto de sillares superpuestos, para obtener á un tiempo estabilidad y resistencia.

Si la fuerza *F* estuviese en *F'*, siendo *T* su punto de aplicación, el sillar *M* giraría alrededor de la arista *D*, y esto mismo sucederá siempre que *T* esté fuera del plano *HD* de ocupación del sillar *M* sobre el *N*.

Descomponiendo *F* perpendicular y tangencialmente al plano de junta, y llamando α al ángulo *aOm*, φ'' al rozamiento de piedra sobre piedra y *f* al coeficiente correspondiente, tendremos:

Componente tangencial.....	$Ob = F \text{ sen } \alpha.$
Componente normal.....	$Oa = F \text{ cos } \alpha.$
Fuerza de rozamiento engendrada por la componente normal.....	$Z = f \times F \text{ cos } \alpha.$

Para que el sillar M no tenga movimiento es preciso que $Z > O b$, ó que $f' > \operatorname{tg} \alpha$, es decir, que α ha de ser menor que el ángulo cuya tangente es f , ó sea $\alpha < \varphi''$.

La componente $O a$ ocasiona en la junta $H D$ presiones variables, que dependen de la distancia $O O' = x$ (fig. 14, lám. 47) á que se encuentra el centro de presión O del de gravedad O' . Lo que interesa es conocer la presión máxima por unidad superficial en D , que no ha de exceder del valor que se asigna al coeficiente de trabajo por compresión en la piedra (R') (números 141 y 163), y esta presión se calculará por la fórmula (8) del núm. 995, en la que se conoce $b = H D$, $x = O O'$, $P =$ componente $O a$, y a es la dimensión normal al plano de la figura, debiendo verificarse $p \leq R'$, ó

$$\text{sea } R' \leq \frac{P}{a b} \left(1 + \frac{6 x}{b} \right).$$

En H no pueden desarrollarse extensiones, porque hay una solución de continuidad causada por el plano de junta $H D$ y hemos prescindido de la adherencia de los morteros. Así, pues, cuando $O O'$ sea mayor que $\frac{1}{6} \times D H$, tomaremos $D H' = 3 \times O D$ (núm. 996), prescindiremos de la parte $H H'$ y calcularemos la presión en D por la fórmula $p = R' = 2 \times \frac{P}{H' D \times a}$ (núm. 996), siendo a la dimensión perpendicular al plano del dibujo, como ya hemos dicho, y P igual á la componente de la presión normal al plano de junta. Para que no se desperdicie material, es decir, para que no resulte sin acción la parte $H H'$ de la junta, es conveniente que $O O'$ sea menor ó á lo más igual á $\frac{1}{3}$ de $H D$, con lo cual todo el plano $H D$ estará comprimido.

998. Resumiendo: las condiciones de estabilidad y resistencia del conjunto de sillares $M N R S'$ (fig. 13, lám. 47), no adheridos por cementos ni morteros, son las siguientes:

- 1.^a (Estabilidad.) La presión, en cada junta, ha de formar con la normal á ésta un ángulo menor que el φ de rozamiento de piedra sobre piedra.
- 2.^a (Estabilidad y resistencia.) El polígono de los centros de presión ha de estar comprendido en el conjunto de sillares, y en cuanto sea posible, es conveniente que esté en el tercio medio del espesor del macizo.
- 3.^a (Resistencia.) La presión máxima por unidad superficial en una junta cualquiera no ha de exceder del coeficiente de trabajo por compresión R' correspondiente al material que se emplee (números 141 y 163). Esta

presión se debe á la componente de la compresión total perpendicular al plano de junta.

999. Condiciones de estabilidad y resistencia de un macizo de mampostería. — Cuando los materiales están unidos con morteros ó cementos, las condiciones de estabilidad y resistencia del macizo son algo diferentes de las antes expuestas.

Si las mamposterías son frescas, de modo que no puede contarse con la adherencia de los morteros, las tres condiciones del número anterior son de necesario cumplimiento. Cuando el macizo esta aparejado por hiladas horizontales regulares (mampostería de ladrillo, sillarejo, sillería, etc.), la primera condición debe ser escrupulosamente comprobada, porque es más fácil el resbalamiento de los materiales sobre el mortero fresco, es decir, que siendo el ángulo φ de rozamiento de pequeño valor (tabla del núm. 32), la dirección de las presiones ha de ser poco diferente de la perpendicular á la hilada; pero si el macizo es de hormigón ó de mampostería ordinaria, su resistencia á la componente tangencial $O b$ (fig. 13, lám. 47) es suficientemente grande para que no sea de temer el resbalamiento á lo largo de un plano transversal ideal, así es que se puede prescindir de esta condición.

Cuando las mamposterías tienen alguna edad, la suficiente para que el mortero ó cemento haya fraguado, con mayor razón se podrá prescindir de la primera condición, porque las mamposterías presentan ahora al esfuerzo tangencial una resistencia que no es de resbalamiento sino de esfuerzo cortante (números 169 y 170).

Cuanto á la segunda condición, observaremos que si se cuenta con la adherencia de los morteros, las mamposterías son susceptibles de resistir á la extensión, especialmente las ordinarias, y los hormigones, cuando se emplea mortero de cemento. En este caso importa poco la posición del centro de presión en una junta, y aun puede admitirse que el polígono de presiones $a c d e h$ (fig. 6.^a, lám. 45) se salga parcialmente del macizo, siempre que éste resista á las extensiones que se desarrollan.

En el plano transversal $A B$, por ejemplo (fig. 15, lám. 47), la presión $c d$ de magnitud $m' c$ está aplicada en m' , y su componente $m' n$ normal á $A' B'$ tiene el brazo de palanca $O' m' = x$. Haciendo $P = m' n$ y $x = O' m'$, la fórmula (7) del núm. 995 dará la extensión por unidad superficial en la arista proyectada en B' (*), y la (8) la compresión en A' . Si el hormigón ó

(*) Como x es mayor que $\frac{1}{6} A' B' = \frac{1}{6} b$, resulta negativo R' lo cual indica que R' es fuerza de extensión.

mampostería puede resistir la extensión en B' , es decir, si su coeficiente de trabajo es igual ó menor que el valor de p hallado por la fórmula (7), el macizo tiene resistencia.

Ya dijimos en el núm. 168 que si bien puede considerarse como nula la resistencia á la extensión de las mamposterías aparejadas por hiladas regulares, las mamposterías ordinarias y los hormigones fabricados con mortero de cemento pueden resistir perfectamente esfuerzos de extensión, siendo, como promedio, el coeficiente de trabajo que por este concepto se les puede aplicar $\frac{1}{20}$ del de fractura correspondiente al cemento ó mortero de cemento empleados (*). Así, pues, en macizos de esta especie (muros ó bóvedas) la curva de presiones puede muy bien no estar contenida en el espesor de dicho macizo, y salir fuera siempre que ofrezca resistencia suficiente á las extensiones y compresiones que se desarrollan, debiendo tener presente para fijar el coeficiente de trabajo de estas últimas, las observaciones expuestas en los núms. 164, 165 y 166 (**).

Resumiendo: en los macizos de mampostería con mortero las condiciones de estabilidad y resistencia son:

- 1.^a En un plano transversal cualquiera la componente tangencial de la presión ha de ser menor que la resistencia al esfuerzo cortante de la mampostería.
- 2.^a Es conveniente que el polígono de presiones esté contenido en el interior del macizo, pero no es condición precisa, siempre que quede satisfecha la condición 3.^a.

(*) Refiriéndonos á las experiencias del Sr. García Arenal (núm. 157), el cemento Portland, puro, después de una inmersión de tres años, tiene un coeficiente de fractura por extensión de 48 á 50 kilogramos por cm.²; de modo que se podría contar con 2,5 kilogramos por cm.² como coeficiente de trabajo por extensión, cantidad de valor notable. En general, no deberá admitirse valor superior al de 1 á 1,5 kilogramos por cm.², y esto cuando los materiales y mano de obra sean buenos.

(**) El coeficiente R' de trabajo por compresión varía, no solamente con la calidad de los materiales, sino también con la de la mano de obra. El empleo de los cementos permite emplear valores de R' más elevados, sobre todo cuando se ejecutan las mamposterías con esmero.

Los valores de R' que contiene la tabla del núm. 166, y que pueden aceptarse desde luego, se refieren á obras ordinarias, de ejecución corriente, en que la bondad de los materiales y de la mano de obra sean un término medio. Á los datos contenidos en esta tabla se pueden agregar los siguientes:

	R' en kilogramos por cm. ²
Mampostería ordinaria con morteros ordinarios y piedras tiernas.	5 á 10
" " " " " duras..	10 á 15
" " " mortero hidráulico y piedras blandas.	15 á 20
" " " " " duras..	20 á 30

3.^a Las extensiones y compresiones máximas por unidad superficial que en un plano transversal cualquiera se desarrollen, no han de exceder de los valores de los coeficientes de trabajo respectivos R y R' , teniendo en cuenta, para la formación de estos últimos, las observaciones de los núms. 164 á 166.

De todas las mamposterías, las ordinarias tomadas con cemento, y aun mejor los hormigones de cemento, son las que mejor resisten á los esfuerzos cortantes y á las extensiones, y tienen, por tanto, aptitud para permitir que los polígonos de presión, no solamente se salgan del tercio medio de espesor del macizo, sino también á veces sean exteriores á todo él.

Recordaremos, sin embargo, que la resistencia á la extensión en estas obras depende principalmente de la bondad de los materiales y del esmero en la mano de obra, y así los resultados pueden ser muy variables por la variación de estos elementos.

2. MUROS DE SOSTENIMIENTO

DE TIERRAS

IDEAS GENERALES SOBRE LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA RELATIVO A LA ESTABILIDAD Y RESISTENCIA DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO DE TIERRAS

1000. Talud natural. — Consideremos un macizo de tierras recientemente removidas y reducidas á pequeñas partículas, de modo que se pueda prescindir de su cohesión, como sucede á la arena seca. Este macizo, abandonado á sí mismo, queda limitado lateralmente por la superficie plana inclinada OC (fig. 16, lám. 47), llamada *talud natural*. El ángulo φ que en este estado de equilibrio estricto forma el *talud natural* OC con el horizonte, se puede determinar del modo siguiente:

Llamemos f al coeficiente de rozamiento de resbalamiento de las partículas entre sí; la a , de peso $ab = p$, está sometida á la componente $ac = ab \sin \varphi$ que tiende á hacerla resbalar por el plano OC y está retenida por el rozamiento engendrado por la componente $ad = ab \cos \varphi$ normal á este plano, rozamiento que tiene por valor $f \times ad = f \times ab \cos \varphi$. Para que el equilibrio exista es preciso que las dos fuerzas sean iguales, esto es, que

$$ab \sin \varphi = f \times ab \cos \varphi$$

ó

$$f = \operatorname{tg} \varphi \quad \varphi = \text{ángulo de tangente } f.$$

El ángulo φ del talud natural de las tierras tiene por tangente el coeficiente de rozamiento f ; la tabla del núm. 32 contiene los valores de f y φ para diversas clases de tierras y los de t , peso del metro cúbico de éstas.

1001. Cohesión. — Los macizos no removidos, provistos de cohesión, pueden sostenerse con inclinaciones mayores que la de los taludes naturales,

como es fácil ver en tierras que se mantienen con superficies laterales verticales, ó muy inclinadas con respecto al horizonte.

1002. Muros de sostenimiento. — Cuando la cohesión no existe, ó se supone que puede faltar, y se quiere que las tierras se limiten lateralmente por superficies verticales ó de inclinación mayor que la del talud natural, hay que contenerlas por medio de *muros de sostenimiento*. El problema que consiste en la determinación de las formas y dimensiones más convenientes de estos muros, es muy interesante, porque se presenta frecuentemente en construcciones de todo género, civiles y militares, ordinarias é hidráulicas.

Del macizo total de tierras (fig. 17, lám. 47) tiende á desprenderse una parte OAF que se separa del resto por la superficie OF que llamaremos *superficie de fractura*, produciendo en el muro presiones elementales, las cuales, así como su resultante E , atentan á su estabilidad y resistencia.

1003. Condiciones de estabilidad y resistencia. — Puede perder el muro su estabilidad de uno de los modos siguientes:

1.º Por asientos desiguales del cimiento.

2.º Por rotación del muro alrededor de la arista inferior é interior O de la base (fig. 18, lám. 47), producida por la combinación de asiento del cimiento en la parte anterior y de empuje de las tierras. El prisma OAF se convierte en el $O'A'a$, viniendo F á a ; las tierras siguen adheridas al paramento interior $O'A'$ del muro y resbalan sobre la superficie de fractura OF .

3.º Por rotación del muro alrededor de la arista exterior H de la base (fig. 19, lám. 47), obedeciendo al empuje E de momento $E \times Hd$. La superficie AF se convierte en la ba , desarrollándose rozamiento de las tierras con el paramento interior $O'A'$ del muro y con la superficie de fractura OF .

4.º El empuje de las tierras produce en el muro una traslación paralela á la posición primitiva (fig. 20, lám. 47), haciéndole resbalar sobre el fondo de la caja de cimientos ó sobre éstos. El prisma de tierras AOF se convierte en el $A'O'a$ que ha resbalado sobre OF .

Prescindiremos de los casos 1.º y 2.º porque supondremos á los cimientos resistencia suficiente, y admitiremos tan sólo la pérdida de estabilidad de los modos 3.º y 4.º, esto es, por resbalamiento ó por rotación alrededor de la arista exterior. El peso P del muro, aplicado á su centro de gravedad G (fig. 17, lám. 47), se opone á estos movimientos, y combinado con el empuje E da una resultante Z aplicada en el punto r de la base.

Para que no haya resbalamiento es preciso que el ángulo GrS sea menor que φ , que es el de rozamiento de mampostería, si se trata de la base On , ó de mampostería sobre tierra si atendemos á la base ed (núm. 998).

Para que la rotación alrededor de la arista n sea imposible, es necesario que el momento $E \times nt$ del empuje sea menor que el $P \times nx$ del peso, ó, en otros términos,

$$P \times nx = m \times E \times nt;$$

m es lo que se llama *coeficiente de estabilidad*, y su valor suele estar comprendido entre 2 y 3.

Estas condiciones han de hacerse extensivas á una parte cualquiera del muro á partir de la parte superior, pues que no se trata de *monolitos*, sino de construcciones compuestas de piedras, ladrillos ó sillares, unidos con mortero; de modo que los resbalamientos ó rotaciones pueden tener lugar en una hilada, ó en un plano trasversal ideal cualquiera.

Cuanto á la resistencia, no se alcanzará en grado suficiente si en la base, ó en otra hilada, las presiones por unidad superficial que se produzcan son superiores al valor del coeficiente R' de trabajo por compresión, correspondiente á los materiales empleados; en una palabra, ha de satisfacerse á las condiciones enunciadas en los núms. 998 y 999.

Resumiendo: las condiciones de estabilidad y resistencia de los muros de sostenimiento, son:

Por lo que se refiere á todo el muro, considerado como monolito:

1.^a Que no pueda tener lugar el resbalamiento sobre la base, para lo cual el ángulo GrS de la resultante Z con la perpendicular á On ha de ser menor que φ (fig. 17, lám. 47).

2.^a Que sea imposible la rotación alrededor de la arista exterior n , á cuyo efecto el momento del peso P del muro con respecto á n ha de ser m veces mayor que el del empuje E , siendo m un coeficiente numérico que mide el grado de estabilidad de la construcción.

3.^a Que la componente de la resultante Z perpendicular á la base Om no produzca en O ni en m presiones por unidad superficial mayores que el coeficiente de trabajo R' aplicable á las mamposterías.

Considerando el muro como un conjunto de elementos superpuestos, las condiciones anteriores han de verificarse no solamente en la base, sino en un plano trasversal ó hilada cualquiera.

4.^a La presión, en cada junta, ha de formar con la normal á ésta un ángulo menor que φ' (ángulo de rozamiento de piedra sobre piedra, ó de piedra sobre mortero), si es que no se tiene en cuenta la adherencia de los morteros (núm. 998); ó bien la componente de la presión, en cada junta ó plano

ideal, ha de ser menor que la resistencia de la mampostería al esfuerzo cortante, si se toma en consideración la adherencia (núm. 999).

5.^a El polígono de los centros de presión ha de estar comprendido en el espesor del muro, y de ser posible es conveniente que esté inscrito en el tercio medio de dicho espesor. Por excepción, en muros de hormigón ó de mampostería con cemento ó mortero de cemento, puede aceptarse que el polígono de los centros de presión se salga en parte del perfil del muro, y para esto han de quedar satisfechas las condiciones precedentes y la siguiente.

6.^a La presión máxima por unidad superficial en una junta cualquiera, y la extensión en el caso particular de que el polígono de los centros de presión esté fuera del muro, no han de exceder de los coeficientes de trabajo admitidos para las mamposterías.

1004. Método general para la determinación de las dimensiones de un muro de sostenimiento. — Los espesores de un muro de sostenimiento no se obtienen por una fórmula, sino que, partiendo de un cierto perfil trasversal de muro, fijado de antemano arbitrariamente, ó, lo que es mejor, por fórmulas empíricas que daremos más adelante (núm. 1044), se traza el polígono de los centros de presión, se determinan las presiones en cada junta y se comprueba si se realizan en el muro dibujado las condiciones de estabilidad y resistencia enunciadas en el número anterior, modificando el perfil, en caso negativo, hasta que aquéllas queden satisfechas. En los proyectos se presenta el perfil del muro adoptado, y todas las operaciones gráficas y analíticas de comprobación de las condiciones de estabilidad y resistencia que posee.

Pero el trazado del polígono de los centros de presiones y la determinación de la magnitud de éstas exige el conocimiento previo de los empujes máximos que las tierras producen en cada hilada, el total empuje de todo el muro, su dirección y punto de aplicación. Por esto el orden de operaciones en la resolución del problema general de *muros de sostenimiento*, es el siguiente:

1.^o Determinación del empuje total máximo que producen las tierras, en dirección, magnitud y punto de aplicación, y de la distribución de este empuje en toda la altura del muro.

2.^o Comprobación de las condiciones de estabilidad y resistencia en el muro elegido.

1005. Empuje máximo. — Las diversas superficies de fractura que, como la OF (fig. 17, lám. 47), pueden tomarse en consideración, pasan todas por el pie O del muro, y limitan prismas de tierra AOF que producen empujes

de magnitud variable, y es necesario hallar la posición de la superficie OF correspondiente al prisma que dé empuje máximo, y la magnitud, dirección y punto de aplicación de este empuje.

Este problema es uno de los que más han ocupado y ocupa á los constructores, y su solución se obtiene mediante ciertas hipótesis, en las que, por cierto, reina gran diversidad de criterios. A este efecto, se estudia el equilibrio de un prisma AOF limitado por una superficie plana cualquiera OF en el momento de iniciarse su movimiento; se determina el empuje E que produce en el muro, que vendrá dado en función del ángulo AOF , y se encuentra cuál es el valor de AOF que convierte E en un máximo. Al estudiar el equilibrio del prisma AOF (fig. 21, lám. 47), las presiones en AO y OF se substituyen por las reacciones del muro y de la superficie de fractura, que son respectivamente iguales y de signo contrario.

Algunos ingenieros tienen en cuenta el rozamiento de las tierras con el paramento interior del muro OA y con la superficie de fractura OF . La reacción Sc normal al paramento, combinada con el rozamiento $Sd = Sc \times f'$, produce una reacción definitiva Sm , lo cual equivale á decir que el empuje máximo verdadero E_0 , igual y contrario á dicha reacción, es oblicuo al paramento interior OA y forma con la normal Sr un ángulo $XSr = mSc$, cuya tangente $\frac{mc}{Sc} = \frac{Sc \times f'}{Sc} = f'$ es el coeficiente de rozamiento de las tierras con el muro, es decir, que el ángulo XSr que forma el empuje con la normal al paramento es igual al ángulo φ' de rozamiento de tierras con mampostería (*). Del mismo modo, la reacción R de la superficie OF es resultante de la reacción normal Zt y del rozamiento $Zn = Zt \times f$, siendo f el coeficiente de rozamiento de resbalamiento de tierras sobre tierras, y el ángulo rZt que forma R con la normal á OF es igual á φ , ángulo de rozamiento de tierras sobre tierras.

Otros ingenieros admiten el rozamiento de tierras con el muro, pero únicamente en el caso de que éste gire alrededor de la arista exterior (figura 19, lám. 47), y hay quien no lo admite nunca, y supone, por tanto, que el empuje es siempre normal al paramento interior, aceptando, no obstante, el rozamiento de resbalamiento del prisma de empuje sobre la superficie de fractura, y que la reacción R (fig. 21, lám. 47) forma el ángulo φ con la normal á dicha superficie.

(*) Se hace generalmente $\varphi' = \varphi$, porque se supone adherida á las mamposterías una delgada capa de tierra.

Finalmente, algunos autores establecen que el empuje es siempre horizontal, cualquiera que sea la inclinación del paramento interior del muro y la forma del macizo de tierras.

La influencia de la superficie superior del terraplén y de las sobrecargas, naturaleza de las tierras, edad y detalles de construcción del macizo y otras muchas circunstancias, son apreciadas de modo diverso por los ingenieros.

En cambio, en todas las teorías relativas al sostenimiento de tierras aparece casi absoluta conformidad en los puntos siguientes:

1.º Considerar que las tierras están desprovistas de cohesión, no solamente porque al establecer las ecuaciones de equilibrio se supone que el prisma de empuje ha iniciado su movimiento á lo largo de la superficie de fractura, y, por lo tanto, ha dejado de obrar la cohesión, sino también porque ésta es una fuerza variable que puede disminuir, y aun desaparecer por efecto de la humedad y otras influencias atmosféricas, en los terraplenes colocados al descubierto, y es prudente no contar con ella y que el constructor se coloque en las peores condiciones.

2.º Suponer plana la superficie de fractura. Esta hipótesis se separa algo de la realidad, pues según algunas experiencias, la superficie de fractura es ligeramente curva (núm. 1014).

3.º En el caso de ser plana la superficie superior de las tierras, admitir una repartición de presiones en el paramento interior del muro semejante á la que se deriva de la ley hidrostática, es decir, que las presiones producidas por las tierras en los diversos elementos de área del paramento interior del muro, son proporcionales á las distancias verticales de estos elementos á la parte superior de aquél. Si dividimos la altura OA (fig. 17, lám. 47) en partes iguales, las presiones $p, p', p'',$ etc., en cada una de ellas guardarán la misma relación que las alturas $Aa, Ab, Ac,$ etc.

1006. A continuación damos una breve noticia histórica de los procedimientos empleados para la determinación de la magnitud, dirección y punto de aplicación del empuje máximo; pero antes expondremos las notaciones que hemos de emplear en cuanto sigue: Supondremos que el macizo de tierras y el muro son indefinidos en dirección normal al plano del dibujo (fig. 17, lám. 47), y consideremos la parte comprendida por dos planos verticales, paralelos, normales al muro y distante entre sí la unidad longitudinal. Llamaremos:

E = empuje total producido en el muro por un prisma AOB cualquiera (fig. 22, lám. 47) ó su igual y contraria la reacción del muro.

- E_0 = empuje máximo.
- R = reacción total de la superficie OB .
- P = peso del prisma de tierras de base AOB y altura 1.
- t = peso del metro cúbico de tierra del macizo.
- t' = peso del metro cúbico de la mampostería del muro.
- f = coeficiente de rozamiento de resbalamiento de tierra sobre tierra.
- φ = ángulo de rozamiento ó del talud natural de las tierras.
- f' = coeficiente de rozamiento de resbalamiento de tierras sobre el muro.
- φ' = ángulo de rozamiento correspondiente.
- α = ángulo que forma un plano de fractura cualquiera OB con el paramento interior OA .
- ϵ = ángulo BAH (fig. 23, lám. 47) que forma con el horizonte el plano superior del macizo.
- δ = ángulo VAO que forma con la vertical el paramento interior del muro.
- h = altura total del muro. Las alturas parciales se contarán á partir del coronamiento A .

1007. Teoría antigua.—El prisma OAF (fig. 17, lám. 47) desprendiéndose del resto del macizo según la superficie de fractura OF , y sometido á la acción de su peso, obra como una cuña de material incompresible, sólido, ejerciendo presiones en el muro.

Coulomb, que fué el primero que expuso esta teoría de modo científico (1773), consideraba el prisma OAF en equilibrio (fig. 25, lám. 47) bajo la acción del peso P , de las reacciones E y R iguales y de signo contrario á los empujes, y de la cohesión C en el plano OF , deduciendo de las ecuaciones de equilibrio el ángulo $\alpha = AOF$ para el cual es un máximo E , y el valor E_0 de este máximo. En estos cálculos se tenía en cuenta la cohesión y el rozamiento en OF , pero se prescindía del rozamiento en OA ; así es que el empuje se suponía perpendicular al paramento interior OA , mientras que R forma el ángulo φ con la perpendicular al plano de fractura OF .

Los complicados cálculos analíticos de Coulomb fueron simplificados por *Prony* (1802) y *François* (1820). Dedujo *Prony* que en el caso de paramento interior vertical y superficie de macizo AC horizontal (fig. 24, lám. 47), el prisma de máximo empuje AOF es dado por el plano OF bisector del diedro AOC , siendo OC el talud natural de las tierras, es decir, $COT = \varphi$; y *François* lo hizo extensivo al caso de paramento interior inclinado (fig. 26, lám. 47).

Poncelet (1840) substituyó los procedimientos analíticos por uno gráfico (*) para obtener el prisma de máximo empuje; *Belanger* (1848-1866) siguió el camino de *Poncelet* y sus predecesores, así como *M. Hallade* (1885), autor de otro procedimiento gráfico para hallar el prisma de empuje máximo (**).

Todos los autores precedentes suponen que la superficie de fractura es plana y que el prisma de máximo empuje obra como pudiera hacerlo una cuña sólida que tratase de separar el muro y el macizo de tierras.

Poncelet y *Hallade* hacen caso omiso de la cohesión; en cambio, toman en cuenta el rozamiento de las tierras con el muro y suponen que el empuje forma el ángulo φ' de rozamiento con la normal al paramento interior. Deducen asimismo, en el caso de que las tierras se limiten en la parte superior por un solo plano horizontal ó inclinado, que el punto de aplicación del empuje se halla situado á una distancia del pie del muro igual á la tercera parte de la altura, de modo que $OS = \frac{1}{3} OA$ (fig. 27, lám. 47).

1008. Nueva teoría.—Otros ingenieros, en estos últimos años, siguen camino diferente del antes explicado para la resolución del problema. En lugar de calcular los efectos producidos por el prisma de empuje, considerado como cuña sólida, suponen al macizo dotado de las cualidades de la arena perfectamente limpia y seca, esto es, como si fuera pulverulento, compuesto de partículas que ejercen entre sí rozamientos, pero con toda ausencia de cohesión, y tratan de estudiar analíticamente las leyes que rigen á las presiones interiores en un punto cualquiera del macizo, de modo parecido á lo que se hace en hidráulica al determinar las presiones de una masa líquida en equilibrio, deduciendo de aquí las presiones en un plano trasversal ideal cualquiera y las que experimentaría un muro que substituyese al plano.

En esta teoría las tierras que forman el prisma de máximo empuje no se portan como un cuerpo sólido sino que todas sus partículas se mueven continua y progresivamente cuando el muro se mueve.

(*) Siendo OC el talud natural de las tierras (fig. 28, lám. 47), de modo que $COT = \varphi$, se hace $AOm = \varphi + \varphi'$, ó mejor igual á 2φ , puesto que el rozamiento de tierras sobre el muro es substituido por el de tierras sobre tierras. Trazando Aa paralela á OC , y la tangente Mm al arco de circunferencia que pase por O y a , abatiendo Mm sobre MO , de modo que $Mb = Mm$, y dibujando δF paralela á OC , se tendrá, uniendo F y O , el prisma AOF de máximo empuje.

Cuando hay un terraplén de la forma $A'BDDH$ (fig. 29, lám. 47), se prolonga una de las líneas, la HF por ejemplo, y se traza OA de modo que el área $OA'H$ sea equivalente al área $O'A'BDDH$. La recta OA desempeña el mismo papel que la OA de la fig. 28, de modo que por idéntica construcción geométrica se obtendrá el prisma de máximo empuje $OA'BDF$. Si el punto F cayese á la izquierda de H se ensayaría otra recta, la HD ó la DB .

(**) *Nouvelles Annales de la construction*, 1855.

Si las pequeñas partículas de que se supone compuesto el macizo no rozasen entre sí, la ley de las presiones sería la de los fluidos, es decir, que las presiones serían normales á las paredes y proporcionales á la altura del fluido, de modo que en cada unidad superficial, situada á la profundidad Z , la presión tendría por valor $Z \times 1000$, siendo 1000 kilogramos el peso del metro cúbico de agua y tomando todas las dimensiones en metros, y la presión total para el muro de altura h y de longitud 1, sería $\frac{h^2}{2} \times 1000$ (1) y estaría aplicada en un punto situado á la distancia $\frac{1}{3} h$ á partir del pie, ó á $\frac{2}{3} h$ á contar desde el coronamiento.

Pero existe el rozamiento, y esto ha de modificar la ley hidrostática. No obstante, se supone una repartición de presiones proporcional á las alturas, y que el empuje total E_0 se obtiene aplicando al valor de la presión total hidrostática un coeficiente A' menor que la unidad, es decir, que

$$E_0 = A' \times \frac{h^2}{2} \times 1000 = A \frac{h^2}{2} \quad (2).$$

Este camino fué iniciado por Rankine (1856) (*), al cual se unieron bien pronto Levy (1869) (**) y otros, siendo, sobre todo, notables los trabajos de M. Boussinesq (***) .

Rankine prescindió del rozamiento de las tierras con el muro, y dedujo para el caso de macizos de superficie horizontal, sostenidos por muros de paramento interior vertical (fig. 22, lám. 47), que el máximo E_0 del empuje, en 1 metro de longitud de muro, obraba normalmente á éste y tenía por valor

$$E_0 = \frac{h^2 t}{2} \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad (3),$$

ó

$$E_0 = \frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4).$$

El prisma de máximo empuje es dado por la bisectriz OB del ángulo AOC , siendo OC el talud natural de las tierras.

El punto de aplicación S del empuje está situado á $OS = \frac{1}{3} OA$.

(*) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1854.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1873.

(***) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1882.

Si se compara el valor (4) con la presión hidrostática (1), de lucimos que E_0 es igual á la presión hidrostática ejercida por un líquido de densidad $\frac{t}{1000} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$.

Este valor del empuje, y el punto de aplicación, son los mismos que para el caso particular considerado de paramento interior vertical y superficie de tierras horizontal, se obtienen por los métodos antiguos, suponiendo horizontal el empuje. Pero cuando el plano superior AB de las tierras (fig. 23, lám. 47) forma un ángulo ℓ con el horizonte, la teoría de Rankine conduce á resultados contrarios á lo que la experiencia y el razonamiento establecen, pues llega á deducir que la dirección del empuje es paralela á OB , es decir, que á mayor valor de ℓ corresponde mayor estabilidad al muro.

M. Boussinesq, merced á cálculos complicados, encuentra para valor del empuje máximo E_0 , en el caso general de superficie superior AB inclinada ℓ grados (fig. 23, lám. 47) y paramento AO que forma el ángulo δ con la vertical,

$$E_0 = \frac{B}{\cos^2 \delta} \frac{h^2 t}{2} = K \frac{h^2 t}{2} \quad (5),$$

siendo B un coeficiente numérico que no puede calcularse exactamente, pero cuyos límites superior é inferior son:

$$\text{Límite inferior } B' = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\cos \omega \cos (\varphi + \rho) \cos (\ell + \delta)}{\cos (\varphi - \rho) \cos (\ell + \omega)},$$

ω y ρ son ángulos auxiliares dados por las ecuaciones

$$\operatorname{sen} (\ell + 2\omega) = \frac{\operatorname{sen} \ell}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \text{''} \quad \rho = 45^\circ - \frac{\varphi}{2} - \omega - \delta.$$

Límite superior B'' : se obtiene por las fórmulas y ecuaciones anteriores, sin más que sustituir en ellas el ángulo φ por otro φ'' un poco más pequeño, dado por la ecuación

$$\operatorname{sen} \varphi'' = \operatorname{sen} \varphi \cos \rho.$$

Estos dos límites son poco diferentes, y el verdadero valor de B se obtiene por la fórmula

$$B = B' + \frac{9}{22} (B'' - B').$$

Las fórmulas anteriores no son aplicables sino en tanto que el ángulo φ es positivo.

El empuje forma un ángulo φ (del talud natural de las tierras) con la perpendicular al paramento interior del muro, y el punto de aplicación S está situado á $\frac{1}{3} h$ á partir del pie O .

En el caso de paramento interior vertical y superficie de tierras horizontal, es decir, $\delta = 0$ y $\delta = 0$, resulta

$$E_0 = \frac{h^2 t}{2} \times \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\cos \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \left[\varphi - \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right]} \quad (6).$$

Comparando esta fórmula con la (4) obtenida por Rankine, y por el método de la cuña, se deducen los valores siguientes para el coeficiente K de $\frac{h^2 t}{2}$:

	PIEDRA machacada.	ARENA gruesa.	ARENA fina.	TIERRA	ARCILLAS	
$f = \operatorname{tg} \varphi \dots\dots$	1	$\frac{1}{1,2}$	0,795	0,74	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{5}$
$K \left\{ \begin{array}{l} \text{Rankine} \dots \\ \text{Boussinesq} \dots \end{array} \right.$	0,1715	0,2195	0,2328	0,2540	0,2867	0,5198 0,6720
	0,1715	0,2055	0,2149	0,2308	0,2539	0,4418 0,5888

Estos valores, que han de multiplicar al factor $\frac{h^2 t}{2}$, son poco diferentes. Así, en el caso de tierras de talud natural $\frac{2}{3}$ (3 de base por 2 de altura) que pesen 1800 kilogramos por metro cúbico, y muro de 10 metros de altura, sería:

$$\left. \begin{array}{l} t = 1800 \\ h = 10 \end{array} \right\} \frac{h^2 t}{2} = 90000;$$

y el empuje máximo, por metro de longitud de muro,

$$E_0 = 90000 \times 0,2867 = 25800 \text{ kilogramos (Rankine).}$$

$$E_0 = 90000 \times 0,2539 = 22850 \text{ (Boussinesq).}$$

Las fórmulas de M. Boussinesq son complicadas y dan lugar á cálculos muy prolijos, y para facilitarlos ha calculado Mr. Flamant los valores numéricos del coeficiente K que multiplica á $\frac{h^2 t}{2}$ [fórmula (5)] para los valores siguientes de las variables δ , δ y φ :

$\delta \dots\dots\dots$	comprendido entre	0° y 25° .
$\varphi \dots\dots\dots$	»	» 21° y 45° .
$\delta \dots\dots\dots$	»	» 0° y φ .

Según la teoría de M. Boussinesq, el ángulo que forma la dirección del empuje máximo con la perpendicular al paramento interior del muro no es siempre igual á φ . Representándolo por la letra V , sus valores, cuando son diferentes de φ , aparecen en las tablas que á continuación copiamos, debajo de los de K correspondientes. Por ejemplo, cuando $\delta = 15^\circ$, $\varphi = 39^\circ$ y $\delta = 35^\circ$ (tabla núm. 4), es $V = 37^\circ 50'$ y $K = 0,850$.

La magnitud del empuje máximo E_0 por metro de longitud de muro, se obtendrá multiplicando el coeficiente K que dan las tablas por $\frac{h^2 t}{2}$; así, para un muro de altura $h = 8$ metros, siendo el peso del metro cúbico de tierras $t = 1800$ kilogramos y

$$\delta = 25^\circ \quad \varphi = 36^\circ \quad \delta = 30^\circ,$$

tendremos (tabla núm. 6)

$$E_0 = K \frac{h^2 t}{2} = 1,087 \times \frac{8^2 \times 1800}{2} = 31305 \text{ kilogramos.}$$

El muro sufre por metro de longitud, ó sea entre cada dos planos verticales transversales distantes 1 metro, un empuje máximo de 31305 kilogramos, aplicados á $\frac{1}{3}$ de la altura y dirigido según una recta que forma el ángulo $V = 33^\circ 10'$ con la perpendicular al paramento.

Las tablas están calculadas para el caso que representa la fig. 23 de la lám. 47, esto es, para macizos de tierra limitados en la parte superior por un solo plano AB , y paramento interior del muro en talud de δ grados.

Cuando debajo de los valores de K no aparezca ningún valor gradual, como sucede en la tabla 1.^a y en una parte de las restantes, es prueba de que V es igual á φ .

TABLA NÚM. 1

$\delta = 0^\circ$.

ϵ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,439	0,391	0,354	0,319	0,289	0,261	0,236	0,213	0,192
5°	0,468	0,419	0,376	0,338	0,305	0,275	0,247	0,223	0,201
10°	0,514	0,455	0,406	0,363	0,324	0,290	0,261	0,234	0,209
15°	0,587	0,509	0,447	0,395	0,349	0,310	0,277	0,248	0,221
20°	0,758	0,602	0,510	0,440	0,384	0,337	0,299	0,264	0,223
25°	»	»	0,642	0,519	0,438	0,376	0,327	0,285	0,250
30°	»	»	»	0,866	0,541	0,446	0,371	0,318	0,273
35°	»	»	»	»	»	0,611	0,453	0,369	0,308
40°	»	»	»	»	»	»	»	0,487	0,371
$\epsilon = \varphi$	0,934	0,914	0,891	0,866	0,839	0,809	0,777	0,743	0,707

TABLA NÚM. 2

$\delta = 5^\circ$.

ϵ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,476	0,425	0,387	0,352	0,324	0,297	0,272	0,249	0,230
5°	0,506	0,458	0,416	0,378	0,344	0,314	0,287	0,263	0,239
10°	0,559	0,501	0,451	0,407	0,370	0,335	0,305	0,278	0,252
15°	0,641	0,561	0,499	0,446	0,400	0,360	0,325	0,296	0,266
20°	0,832	0,670	0,572	0,500	0,442	0,394	0,353	0,307	0,285
25°	»	»	0,725	0,593	0,507	0,442	0,389	0,346	0,308
30°	»	»	»	1,003	0,631	0,521	0,445	0,386	0,339
35°	»	»	»	»	»	0,730	0,584	0,453	0,385
40°	»	»	»	»	»	»	»	0,605	0,469
$\epsilon = \varphi$	1,034	1,028	1,015	1,003	0,988	0,974	0,953	0,932	0,904
	20°40'	23°40'	36°35'	29°35'	32°30'	35°25'	38°25'	41°20'	44°15'

TABLA NÚM. 3

$\delta = 10^\circ$.

δ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,506	0,464	0,428	0,393	0,366	0,340	0,316	0,294	0,275
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
5°	0,550	0,503	0,462	0,425	0,391	0,362	0,333	0,311	0,290
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
10°	0,611	0,553	0,503	0,460	0,422	0,387	0,358	0,330	0,310
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
15°	0,703	0,624	0,506	0,502	0,460	0,419	0,385	0,353	0,327
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
20°	0,928	0,748	0,647	0,573	0,513	0,463	0,419	0,383	0,350
	20°55'	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
25°	»	»	0,832	0,683	0,591	0,523	0,467	0,420	0,382
	»	»	27°0'	φ	φ	φ	φ	φ	φ
30°	»	»	»	1,164	0,746	0,621	0,537	0,474	0,423
	»	»	»	28°28'	φ	φ	φ	φ	φ
35°	»	»	»	»	0,885	0,670	0,561	0,486	
	»	»	»	»	35°35'	φ	φ	φ	
40°	»	»	»	»	»	»	0,761	0,599	
	»	»	»	»	»	»	41°45'	45°0'	
$\delta = \varphi$	1,145	1,153	1,158	1,164	1,160	1,159	1,151	1,146	1,134
	19°50'	20°40'	25°30'	28°20'	31°10'	34°0'	36°50'	39°35'	42°25'

TABLA NÚM. 4

$\delta = 15^\circ$.

δ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,551	0,512	0,475	0,445	0,418	0,392	0,370	0,350	0,333
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
5°	0,603	0,557	0,516	0,480	0,450	0,419	0,394	0,372	0,352
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
10°	0,674	0,617	0,568	0,528	0,487	0,453	0,425	0,398	0,376
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
15°	0,765	0,701	0,636	0,582	0,534	0,494	0,461	0,430	0,403
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
20°	1,038	0,849	0,741	0,662	0,601	0,548	0,505	0,469	0,473
	20°25'	24°0'	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
25°	»	»	0,959	0,800	0,699	0,625	0,567	0,519	0,479
	»	»	26°35'	30°0'	φ	φ	φ	φ	φ
30°	»	»	»	1,136	0,889	0,752	0,659	0,591	0,536
	»	»	»	26°35'	32°35'	35°50'	39°0'	42°0'	45°0'
35°	»	»	»	»	»	1,057	0,850	0,703	0,620
	»	»	»	»	»	34°15'	37°50'	41°45'	44°50'
40°	»	»	»	»	»	»	»	0,946	0,785
	»	»	»	»	»	»	»	40°25'	43°40'
$\delta = \varphi$	1,271	1,297	1,318	1,336	1,352	1,367	1,380	1,389	1,397
	18°30'	21°10'	23°55'	26°35'	29°15'	31°55'	34°35'	37°15'	39°55'

TABLA NÚM. 5

$\delta = 20^\circ$.

ϵ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,605	0,566	0,533	0,503	0,476	0,455	0,436	0,419	0,405
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
5°	0,666	0,622	0,583	0,549	0,518	0,493	0,475	0,449	0,432
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
10°	0,751	0,694	0,646	0,603	0,567	0,536	0,509	0,484	0,466
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ
15°	0,845	0,796	0,729	0,675	0,628	0,589	0,557	0,527	0,493
	20°0'	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	44°55'
20°	1,153	0,947	0,838	0,758	0,695	0,644	0,602	0,566	0,536
	19°10'	23°35'	26°50'	29°58'	33°0'	36°0'	39°0'	42°0'	44°55'
25°	»	»	1,081	0,917	0,814	0,738	0,679	0,631	0,591
	»	»	25°25'	29°15'	32°35'	35°45'	38°45'	41°45'	44°40'
30°	»	»	»	1,502	1,208	0,885	0,801	0,718	0,662
	»	»	»	24°20'	31°15'	34°55'	37°45'	41°15'	44°15'
35°	»	»	»	»	»	1,231	0,982	0,852	0,764
	»	»	»	»	»	32°15'	36°50'	40°25'	43°35'
40°	»	»	»	»	»	»	»	1,133	0,935
	»	»	»	»	»	»	»	38°20'	42°20'
$\epsilon = \varphi$	1,383	1,425	1,464	1,502	1,537	1,572	1,607	1,638	1,664
	16°55'	19°20'	21°50'	24°20'	26°55'	29°25'	31°55'	34°25'	36°55'

TABLA NÚM. 6

$\delta = 25^\circ$.

ϵ	VALORES DE φ								
	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
0°	0,668	0,634	0,603	0,576	0,552	0,535	0,519	0,506	0,497
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	φ	42°0'	44°50'
5°	0,744	0,702	0,665	0,634	0,607	0,584	0,565	0,549	0,536
	φ	φ	φ	φ	φ	φ	38°55'	41°45'	44°25'
10°	0,865	0,790	0,743	0,703	0,669	0,641	0,616	0,595	0,578
	φ	φ	φ	30°0'	33°0'	33°55'	38°50'	41°40'	44°20'
15°	0,997	0,912	0,846	0,791	0,746	0,707	0,676	0,649	0,626
	20°30'	23°45'	26°50'	29°50'	32°45'	35°55'	38°30'	41°20'	44°0'
20°	1,314	1,109	0,995	0,911	0,846	0,793	0,750	0,713	0,683
	18°0'	22°30'	26°0'	29°15'	32°20'	35°15'	38°50'	40°55'	43°40'
25°	»	»	1,277	1,100	0,989	0,908	0,845	0,794	0,752
	»	»	23°45'	27°55'	31°20'	34°30'	37°30'	40°25'	43°10'
30°	»	»	»	1,766	1,243	1,087	0,981	0,904	0,843
	»	»	»	21°50'	29°20'	33°10'	36°10'	39°30'	42°25'
35°	»	»	»	»	»	1,493	1,214	1,070	0,972
	»	»	»	»	»	29°50'	34°40'	38°15'	41°25'
40°	»	»	»	»	»	»	»	1,411	1,185
	»	»	»	»	»	»	»	35°35'	39°50'
$\epsilon = \varphi$	1,581	1,644	1,708	1,766	1,826	1,886	1,945	2,003	2,061
	14°55'	14°15'	19°30'	21°50'	24°10'	26°30'	28°55'	31°15'	33°35'

1009. Experiencias.—Se ha querido deducir de la observación las leyes que rigen al equilibrio de los macizos pulverulentos, la dirección, magnitud y punto de aplicación del empuje y cuantas circunstancias influyen en el valor de estas incógnitas. A este efecto se han empleado pequeños terraplenes, generalmente de arena fina, seca y de grano igual, sustituyendo el muro por un bastidor giratorio, cuyo equilibrio se obtiene por medio de resortes ó contrapesos.

Entre el número de experimentadores, merecen especial mención Ardent, Gobin, Siégler, Leigue y Darwin. Los resultados de estas experiencias no son, hasta ahora, tan decisivos como pudiera esperarse, á causa de haberse realizado en pequeña escala, y no haber eliminado, como se debiera, varias causas de error. A continuación damos un extracto de las más interesantes.

1010. Experiencias de Gobin.—He aquí, en resumen, los resultados de las experiencias de Gobin (*).

1.º *Plano de fractura.*—En el caso de muro vertical y superficie horizontal de terraplén, el plano de fractura OF (fig. 1.ª, lám. 48) es bisector del diedro AOC , siendo COT igual á φ ángulo del talud natural de la arena empleada.

2.º *Constancia del talud natural.*—El talud natural de las tierras no cambia aunque aumente la altura del terraplén, ó aunque se cargue, en la parte superior, con pesos adicionales.

Sobre el talud natural AB del macizo ABC (fig. 2.ª, lám. 48) se colocó, tocando ligeramente por el borde inferior, el bastidor MN , y se recargó el plano BC con el macizo NMC . El talud AB no sufrió alteración.

3.º *Dirección del empuje.*—El empuje ejercido por un terraplén en un muro de paramento vertical, es horizontal, cualquiera que sea la inclinación de la superficie superior del macizo de tierras.

A través del fondo BF de la caja $ABFD$ (fig. 3.ª, lám. 48) pasa un bastidor suspendido por una cuerda. Llena la caja de arena, limitando el macizo por un plano horizontal AD , ó por planos inclinados CB , CF , CA , CD , si los empujes c , d fueren oblicuos, darían una resultante que tendería á hacer descender el bastidor MN ; de modo que la fuerza Q necesaria para hacer descender el bastidor, venciendo el rozamiento en sus paredes, sería menor que la P necesaria para hacerlo subir. Esto no es así, según Gobin, y teniendo en cuenta el peso propio del bastidor MN , y la rigidez

(*) *Annales des Ponts et Chaussées.* 1888.

de los cordones R , se desarrolla la misma resistencia al movimiento ascensional que al de descenso, lo que prueba que las presiones a , b , son horizontales.

Ya haremos más adelante (núm. 1012) alguna objeción á esta deducción de Gobin.

4.º *Intensidad del empuje.*—Valiéndose de una caja en que una de sus paredes podía girar alrededor de la arista inferior (fig. 4.ª, lám. 48), y equilibrando el empuje E con pesos, halló, en la hipótesis de muro vertical y superficie horizontal de macizo, para valor de empuje máximo, el mismo que da la fórmula (4) del núm. 1008, suponiéndolo aplicado á $\frac{1}{3}$ de la altura á partir del pie.

Para el caso de superficie inclinada de macizo, la fórmula que admite Gobin para valor de E_0 es muy complicada.

Si el paramento del muro forma ángulo AOT menor que 90° (fig. 26, lám. 47), el empuje máximo E_0 es, según Gobin, llamando δ al ángulo OAD ,

$$E_0 = \frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) (1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi).$$

Cuando AOT es mayor que 90° , supone dividido el macizo por el plano vertical OH , y combina el empuje horizontal en OH con el peso del prisma de tierras AOH .

5.º *Influencia que en la dirección del empuje tiene el rozamiento de las tierras con el paramento interior del muro.*—Cuando el eje de rotación está situado en O , pie del paramento interior (fig. 4.ª, lám. 48), Gobin dedujo que el rozamiento no influye, por cuanto el momento del empuje, en el caso de pared lisa, resultó ser igual á la del caso en que esta pared era rugosa y daba lugar á grandes rozamientos con la tierra. Esto no quiere decir que no exista el rozamiento de resbalamiento, y sí, únicamente que su momento es cero, porque su brazo de palanca lo es. Por esto, cuando la rotación tiene lugar alrededor de la arista exterior A (fig. 5.ª, lám. 48), el rozamiento R obra con un brazo de palanca AB , y su momento $R \times AB$ es favorable á la estabilidad.

Gobin admite que el empuje E es siempre horizontal, pero al establecer el equilibrio por rotación del muro alrededor de la arista exterior, resta del momento activo del empuje ($E \times Ab$) el momento pasivo del rozamiento ($R \times AB$); esto equivale á componer las fuerzas E y R y tomar

en cuenta únicamente el momento de la resultante E' , que es $E' \times Aa$.

1011. Experiencias de Siègler. — Son muy interesantes las experiencias realizadas por el ingeniero francés M. Siègler (*), como que abren un nuevo camino á las investigaciones, y dan un nuevo aspecto á la cuestión de la dirección y magnitud de las presiones.

Según M. Siègler existe una componente T tangencial al paramento interior del muro (fig. 6.^a, lám. 48) que es debida á que las diversas capas de tierra, al asentarse, quedan como suspendidas de dicho paramento, de modo que una parte del peso del macizo se trasmite al muro.

Hay una diferencia esencial entre ésta componente tangencial T y la que se atribuye por otros ingenieros al rozamiento de las tierras con el muro: esta última no se desarrolla sino cuando el muro se mueve, mientras que la componente T descubierta por Siègler existe aunque el muro esté perfectamente inmóvil y en equilibrio estable.

Si en un recipiente de vidrio se vierte arena, por capas horizontales (figura 7.^a, lám. 48), teniendo cuidado de interponer otras más delgadas de diverso color, puede observarse que los asientos producidos por el peso propio de la arena no se realizan por capas horizontales, sino que, cerca de las paredes presentan una cierta concavidad, tanto más pronunciada cuanto más cerca de la superficie esté la capa considerada, lo que demuestra que quedan como adheridas á dichas paredes, á las cuales transmiten, sin duda, una parte de su peso. Claro es, que cuanto más diste una capa del fondo de la caja, mayor será su descenso, porque se suman los asientos de todas las que están debajo de ella, y es por tanto más señalada la curvatura de los bordes.

Es interesante el conocimiento de este fenómeno, por más de un concepto. Si el prisma de máximo empuje (fig. 22, lám. 47), fuese incomprensible, es indudable que obrando como cuña causaría presión, en el muro, normal al paramento interior; pero si hay asientos en el macizo, aparece la componente tangencial, la cual, á más de combinarse con el empuje normal y dar una resultante inclinada, hace recaer sobre los cimientos una parte del peso del terraplén, que se sumará al peso propio del muro, y ocasionará presiones mayores en aquéllos, que deberán tenerse en cuenta.

La existencia de la componente tangencial está comprobada por las experiencias siguientes, en las cuales empleó M. Siègler lo que llama *dinamómetro de rozamiento*, y está compuesto (fig. 8.^a, lám. 48) de una placa C de hierro que resbala entre otras dos fijas A y B , recibiendo la A normalmente la pre-

(*) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1887.

sión engendrada por la componente que se trata de medir. La placa móvil C está unida al platillo b por un cordón que pasa por la polea a . Conociendo el coeficiente de rozamiento de hierro sobre hierro, de los pesos P del platillo se puede deducir la presión T por la conocida fórmula $Tf = P$.

En la caja $DEFH$ se hace pasar por una ranura abierta en su fondo el bastidor MN que descansa en la placa A del dinamómetro; y para que no se mueva lateralmente cuando la caja está vacía, se le aplican los cordones horizontales Dd , Hh . Determinase en seguida los pesos que hay necesidad de poner en el platillo b para iniciar el resbalamiento de la placa C .

Se llena la caja de arena seca y se encuentra de nuevo el peso del platillo que produce el resbalamiento de la placa C . Este peso debiera ser igual al de la experiencia anterior si no existiere componente tangencial; pero no es así, y cuando la caja está llena de arena, es necesario, para mover la placa C , un peso mucho mayor que en el caso de estar vacía, debido á la fuerza T que obra en las dos caras del bastidor.

Para ponerse en el caso de un muro de sostenimiento, que está en contacto con las tierras únicamente por el paramento interior, M. Siègler empleó la caja $DEFH$ (fig. 9.^a, lám. 48), á la que falta la pared lateral HF que fué sustituida por un bastidor HM independiente de la caja, y unido á ella por los cordones mn , rs que no pueden dar reacción vertical ninguna y no influyen en la componente tangencial.

La sección recta de la caja era un cuadrado de 0,30 metros de lado. Llenándola de arena, con alturas diversas, las componentes tangenciales acusadas por el dinamómetro fueron:

Altura de arena.	Componente vertical.
—	T
0,10.....	0,300 kilogramos.
0,20.....	0,800 »
0,30.....	1,800 »

La experiencia siguiente (fig. 10, lám. 48) demuestra palpablemente que la componente tangencial T se debe á una parte del peso de la arena que viene á cargar sobre las paredes. La caja DF se hizo descansar sobre dos cuchillos, uno fijo M y otro a colocado sobre el dinamómetro S , y el fondo movable EF apoyaba en otro dinamómetro N .

Se introdujo primero en la caja 8 kilogramos de arena y otros 8 después.

De la presión en *a* se dedujo la de las paredes, y deduciendo el peso de la caja vacía, resultó la repartición siguiente:

PESO DE LA ARENA	PRESIONES VERTICALES		TOTALES
	En las paredes.	En el fondo.	
8 kilogramos.....	4	4	8
16 kilogramos.....	10	5,8	15,8

Errores de apreciación hacen que las presiones totales sean un poco diferentes del peso de la arena, pero no por esto queda menos demostrado lo que enunciamos anteriormente.

Los lados de la sección recta de la caja, eran de 0,15 metros y 0,25 metros.

1012. Los resultados de estas experiencias parecen estar en contradicción con los obtenidos por Gobin (núm. **1010**), pero no es así. Obedeciendo á las componentes tangenciales *T*, el bastidor *MN* (fig. 3.^a, lám. 48) descendía de modo poco visible, hasta que desapareciendo la curvatura de las capas cerca de las paredes (fig. 7.^a, lám. 48) quedaba anulado *T*, y claro es que entonces el rozamiento de *MN* con la arena, al ascender ó descender, tiene el mismo valor.

Las experiencias de Siègler adolecen del defecto, común á todas, de ser hechas en pequeña escala, influyendo notablemente en los resultados los rozamientos de la arena con las paredes laterales de las pequeñas cajas empleadas.

La altura del terraplén, naturaleza de las tierras, más ó menos aptas para sufrir asientos de consideración y otras muchas causas, influyen en el resultado. Si se trata de tierras ya asentadas, la componente *T* es cero, y aun en las que no lo están en un principio, *T* disminuye con el tiempo y puede llegar á desaparecer.

1013. Experiencias de Darwin. — Opina M. Darwin, como resultado de sus experiencias, que es difícil encontrar con rigor matemático la ley de presiones interiores, como la establecen Rankine y Boussinesq, pues el coeficiente de rozamiento interior de la arena es variable de un punto á otro del macizo, según la presión local que sufre en el momento y las que ha sufrido anteriormente al formarse el terraplén.

Es decir, que ejerce una gran influencia en los resultados la edad del

terraplén y los detalles de construcción, como son la disposición de las capas, espesores, asientos, etc., en una palabra, lo que llama *elemento histórico*; y así, dos terraplenes de formas exteriores iguales pueden producir empujes muy diversos.

Deduco asimismo, de sus experiencias, que es más aplicable la teoría de la cuña de Coulomb y Poncelet que la de Rankine y Boussinesq, pues el resbalamiento de las tierras se produce por la presencia de grietas longitudinales que producen el desprendimiento de prismas, y no por movimientos de toda la masa.

M. Darwin opina, en conclusión, que las experiencias hasta ahora realizadas son deficientes para comprobar ninguna teoría, ni la de Coulomb ni la de Rankine, y que en tanto no se posean más datos experimentales, deben proibirse las teorías y fórmulas complicadas, y aceptar, en obsequio á la sencillez, la antigua de la cuña.

1014. Experiencia de Leigue. — Según M. Leigue, únicamente en el caso de terraplén de superficie horizontal, concuerdan los resultados de la teoría y de la práctica, en cuanto á la magnitud y punto de aplicación de los empujes. Además, la superficie real de fractura no es plana, sino ligeramente curva.

Cuando el macizo lleva una sobrecarga, ó se limita por un plano superior inclinado, la concordancia anterior cesa. El brazo de palanca del empuje teórico es $\frac{1}{3} h$, y según las experiencias varía entre $\frac{1}{3} h$ y $\frac{1}{2} h$ (siendo *h* la altura del muro), influyendo en este valor la naturaleza de las tierras, la inclinación del plano superior y la del paramento interior del muro. M. Leigue deduce que las presiones en el interior de los terraplenes se alejan notablemente de la ley hidrostática.

Los empujes teóricos son mayores que los reales, siendo la diferencia tanto mayor cuanto más inclinada esté la superficie superior con el horizonte, y disminuyendo á medida que es menor el coeficiente de rozamiento de las tierras ($f = \text{tg } \varphi$) ó su talud natural (φ).

Finalmente, las sobrecargas uniformemente repartidas tienen sobre los empujes menos influencia que la que determina la teoría.

1015. Hipótesis de que haremos uso. — De las experiencias de que hemos hecho mención en los núms. **1010** á **1014** no se pueden deducir consecuencias concretas, porque se han hecho en pequeña escala, con arena de condiciones especiales y no con las tierras de que ordinariamente se forman los terraplenes, y no se ha conseguido eliminar varias causas de error.

Además, no se conoce bien la influencia de muchas circunstancias, tales como la calidad de las tierras, modo de construir el terraplén, talud superior, talud del paramento interior del muro, etc., etc.

Por otra parte, los cálculos á que dan lugar las teorías, como las de Rankine y Boussinesq que se fundan en las experiencias citadas, son muy complicados y poco prácticos. Por todas estas razones nos atenderemos á las teorías que suponen la existencia de un prisma de empuje que obra como cuña, tanto más cuanto que el tipo de terraplén admitido por Rankine y Boussinesq, la arena limpia, seca, fina y de grano homogéneo, es teórico, y en la práctica, la cohesión que siempre existe hace más posibles los desprendimientos por prismas que el derrumbamiento general y progresivo de toda la masa como se supone en los macizos de arena.

Cuanto á la dirección del empuje, observaremos lo siguiente:

No cabe duda de que existe una componente T tangencial al paramento interior (fig. 11, lám. 48), ya tenga por origen el rozamiento de las tierras con este paramento, cuando el muro inicie su movimiento de rotación alrededor de la arista exterior (fig. 19, lám. 47), ya se deba á que una parte del peso de las tierras se trasmite al muro, como resulta de las experiencias de Siègler. De tomarse en consideración la componente T , compuesta con el empuje H perpendicular á la cara OA (fig. 11, lám. 48), da una resultante ó empuje definitivo E de dirección oblicua á dicha cara.

Pero ¿debe tenerse en cuenta la fuerza T ?

Si reconocemos como origen de esta fuerza el rozamiento, observaremos que éste tendrá lugar únicamente si el muro, como un monolito, gira alrededor de la arista exterior de su pie, porque en los casos representados en las figs. 18 y 20 (lám. 47), las tierras siguen adheridas al paramento interior y no hay rozamiento. Ahora bien; en la mayor parte de los casos, la rotación no tendrá lugar del modo teórico supuesto en la fig. 19 (lám. 47), porque el muro se romperá en alguno ó algunos puntos de su altura, sobre todo si los morteros son frescos ó no han fraguado.

Además, cuando los macizos de tierras están sujetos á vibraciones, como sucede en los muros de sostenimiento de vías férreas y en los de terraplenes que llevan baterías en las obras de fortificación, el rozamiento puede quedar destruído por efecto de las trepidaciones, del mismo modo que un cuerpo que está en equilibrio en un plano inclinado llega á moverse, á pesar del rozamiento, si se somete dicho plano á vibraciones fuertes. Las influencias atmosféricas pueden producir igual resultado, especialmente en los terraplenes que sean algo arcillosos.

Si la fuerza T se debe á una parte del peso de las tierras que están como suspendidas del muro, según dedujo Siègler de sus experiencias, puede desaparecer también con el tiempo por efecto de los asientos, de trepidaciones ó de las influencias atmosféricas.

En suma: únicamente en el caso de terraplén de arena no arcillosa, á cubierto de las trepidaciones y de la intemperie, se puede admitir la existencia de la componente tangencial T ; y como al aceptar la hipótesis de Siègler, desconocemos la relación de T y del peso del prisma del empuje, así como la influencia de la altura h del terraplén y de otras varias causas, supondremos que dicha fuerza tangencial es debida al rozamiento de las tierras sobre la mampostería del muro, ó mejor de tierras sobre tierras, porque una delgada capa de éstas queda adherida á aquéllas; de modo que T será igual á $H \times f$ ó $\text{tg. } aSb = f$, es decir, que $aSb = \varphi$. Pero, en general, es conveniente prescindir de la componente T , y suponer que el empuje es perpendicular al paramento interior del muro, con lo cual nos colocamos en las circunstancias más desfavorables, en beneficio de la estabilidad. De todos modos, daremos los medios de determinar el empuje máximo en las dos hipótesis de ser normal al paramento del muro, y de formar con esta normal el ángulo φ de rozamientos de tierras sobre tierras.

Resumiendo: la teoría que á continuación exponemos, se funda en las hipótesis siguientes:

1.^a Las tierras desprendidas del macizo obran como cuña que tiende á separar del muro las partes restantes del terraplén.

2.^a El empuje que producen las tierras es, en general, perpendicular al paramento interior del muro. Cuando el terraplén se encuentre á cubierto de las trepidaciones, de las influencias atmosféricas y de la humedad, se podrá suponer que la dirección del empuje forma con la perpendicular al paramento el ángulo φ de rozamiento de tierras sobre tierras.

3.^a Las tierras están desprovistas de cohesión.

4.^a La superficie de fractura es plana.

5.^a Los empujes parciales, en los diversos elementos de altura de muro, siguen la ley de las presiones hidrostáticas, esto es, que son proporcionales á los cuadrados de las alturas. Para las partes AB , AC , AD (fig. 16, lám. 48), los prismas de fractura están limitados por planos BB' , CC' , DD' , paralelos al OF correspondiente á la altura total del muro, es decir, que los desprendimientos parciales se hacen por capas paralelas al plano de fractura del total del macizo.

DETERMINACIÓN DEL EMPUJE MÁXIMO Y DEL MOMENTO MÁXIMO
DEL EMPUJE

1016. Terraplén limitado por un solo plano en la parte superior. Valor general del empuje. — Sea $A'O$ (fig. 12, lám. 48) el paramento interior del muro, y $A'B$ la superficie de terraplén, y veamos el modo de determinar el empuje normal á dicho paramento $A'O$ que produce un prisma $A'OB$, de longitud unidad, aislado del macizo de tierras por un plano OB cualquiera.

Considerando el prisma en el momento en que se inicia su separación del resto del muro, su equilibrio depende del de las tres fuerzas siguientes:

P = peso del prisma $A'OB$, de longitud unidad, aplicado á su centro de gravedad.

E = reacción del muro, de valor igual y de dirección contraria al empuje que se busca. E es perpendicular á OA' , según hemos supuesto anteriormente.

R = reacción del macizo BOT en el plano OB ; forma con la perpendicular á este plano el ángulo φ de rozamiento de tierra sobre tierra (número 1005).

Si desde los extremos a y b de la magnitud lineal ab , igual á P , con arreglo á una cierta escala de fuerzas, trazamos ac y bc respectivamente paralelas á R y E , el triángulo abc de fuerzas da $E = bc$ y $R = ca$.

Dibujemos la horizontal BA á partir de B hasta su encuentro con la prolongación del paramento interior OA' , y tracemos asimismo BD de modo que el ángulo DBO sea igual á φ , talud natural de las tierras.

Los triángulos ABD y abc son semejantes. En efecto; el ángulo $ABD = ABO - \varphi$, $bac = bar - \varphi$, y como ABO y bar son iguales por perpendicularidad de sus lados, resulta $ABD = bac$; también son iguales los ángulos DAB y abc por tener sus lados perpendiculares. Podremos, pues, establecer

$$\frac{ab = P}{AB} = \frac{bc = E}{AD}$$

de donde

$$E = P \times \frac{AD}{AB}$$

Pero el peso P , siendo t el del metro cúbico de tierras y h la altura del

muro, es igual á *área de $A'OB \times t$* ; y como *área de $A'OB = \text{área de } A'OL = A'L \times \frac{h}{2} = AB \times \frac{h}{2}$* , será

$$E = \frac{ht}{2} \times AD \quad (1).$$

Si, por ejemplo, $h = 8$ metros, $t = 1800$ kilogramos, y la construcción geométrica da $AD = 1,6$ metros, el empuje que por metro de longitud de muro producirá el prisma limitado por el plano OB , será

$$E = \frac{8 \times 1800}{2} \times 1,6 = 11520 \text{ kilogramos.}$$

Cuanto antecede es aplicable al paramento inclinado al exterior OA' (fig. 13, lám. 48), y al caso representado en la fig. 14 (lám. 48), en el cual la línea quebrada se puede suponer sustituida por la recta $A'O$.

1017. Si se toma en consideración el rozamiento de las tierras con el muro, se formará en A (fig. 13, lám. 48) el ángulo $D'AD = \varphi$ (*), y el empuje E , cuya dirección formará este ángulo φ con la normal al paramento $A'O$, tendrá por valor

$$E = \frac{ht}{2} \times AD' \quad (2).$$

Se demostraría por la comparación de los triángulos semejantes ABD' y abc .

1018. Máximo del empuje. — El máximo E_0 del empuje E depende del máximo de la magnitud lineal AD (fórmula 1); por esto para determinar el prisma que produce E_0 , trazaremos varios planos OB_1, OB_2 (fig. 15, lámina 48), y compararemos las longitudes A_1D_1, A_2D_2 , etc. Puede hacerse esta comparación tomándolas como ordenadas B_1a, B_2b , etc., sobre un eje XX , y uniendo los puntos a, b, \dots , con lo cual se obtiene una curva cuya tangente paralela á XX determinará el máximo Fc , y será

$$E_0 = \frac{ht}{2} \times Fc.$$

(*) Se supone que una delgada capa de tierras queda adherida al muro, de modo que tiene lugar rozamiento de tierras sobre tierras, y por esta razón admitimos el ángulo φ y no el φ' .

El plano OF que limita el prisma $A'OF$ de máximo empuje, se aparta poco del plano OH bisector del diedro $A'OC$, siendo OC el talud natural de las tierras. Si suponemos que el plano OC gire alrededor de O hasta confundirse con OA' , los prismas que limita dan empujes crecientes á medida que se aproxima á OF , y decrecientes cuando se separa de OF y se aproxima á OA' .

1019. Influencia del talud natural de las tierras (ángulo φ) en el valor de los empujes. — Cuanto menor sea φ , el ángulo $DBO = \varphi$ formado sobre OB (figs. 12 y 13, lám. 48) dará un punto D (fig. 12) ó D' (fig. 13) más apartado de A , de modo que las magnitudes lineales AD , AD' , aumentarán y con ellas el empuje del prisma $OA'B$. Se deduce, pues, que el empuje producido por un prisma cualquiera, y, por tanto, el empuje máximo, son mayores, á igualdad de las demás circunstancias, cuando las tierras sostenidas tienen un ángulo φ de talud natural más pequeño.

Esto mismo se puede observar examinando las fórmulas (3), (4) y (5) de los núms. 1022 y 1023.

1020. Muros de sostenimiento de terraplenes á media ladera. — Si el terraplén AOB (fig. 1.^a, lám. 49) se apoya sobre la ladera DB de terreno consistente, y es el ángulo AOB menor que la mitad de AOL , el empuje máximo será producido por el prisma AOB , y para determinarlo se formará el triángulo abc de fuerzas sobre el lado $ab = P$, peso de dicho prisma, con lo cual se obtendrá $E_0 = bc$, ó bien se hará uso de las fórmulas (1), (2) y (3).

1021. Punto de aplicación del empuje. — El problema estaría resuelto si se conociese el modo de repartición de la presión total en el paramento interior AO del muro (fig. 16, lám. 48). Esta distribución se desconoce, y acudiremos á la hipótesis de que si OF es el plano de fractura correspondiente al empuje máximo para todo el muro AO , serán DD' , CC' , BB' , paralelos á OF , los planos de fractura correspondientes á las partes de muro AD , AC , AB ; de modo que en cada elemento de muro AB , BC , CD , ejercen máximo empuje las capas ABB' , $BB'C'C$, $CC'D'D$, etc., resbalando cada una sobre la inferior, como lo haría el prisma total AOF sobre el plano de fractura OF .

Partiendo de esta distribución de presiones, determinemos los valores de los empujes parciales correspondientes á las partes iguales de muro AB , BC , etc., y supongamos aplicados dichos empujes á los puntos medios de estas partes.

Para la parte AB , el triángulo de fuerzas aMN construido sobre el lado aM , igual al peso del prisma ABB' , da el empuje representado por la mag-

nitud MN . Para la parte AC , el triángulo de fuerzas es aTU construido sobre aT , igual al peso del prisma ACC' , y el lado aU coincide con el aN del triángulo aMN , porque siendo paralelos los planos BB' y CC' lo han de ser las reacciones de estos planos y sus paralelas aN , aU , que parten del punto común a .

Ahora bien; si MN es el empuje en AB , y TU el correspondiente á AC , en el elemento BC el empuje será $uU = TU - MN$, y del mismo modo veríamos que siendo aX , ab los pesos de los prismas ADD' y AOF , los empujes en los elementos de muro CD , DO , están representados por las magnitudes lineales vV , xc .

Pero MN , uU , etc., son proporcionales á aM , Mt , etc., y estas últimas cantidades no son otra cosa que los pesos de las capas ABB' , $BB'C'C$, $CC'D'D$, etc., los cuales son á su vez proporcionales á las áreas ABB' , $BB'C'C$, etc., y pueden estar representados por las líneas medias ed , mt , etc. Resulta que los empujes parciales ee' , mm' , etc., son proporcionales á ed , mt , etc., y, por lo tanto, á las magnitudes Ae , Am , An , etc., de donde se deduce que los puntos e' , m' , etc., están en una línea recta que pasa por A .

Los empujes parciales están, pues, representados por las ordenadas mm' , nn' , etc., del triángulo AHO ; de modo que su resultante, ó sea el empuje total E_0 , pasará por el centro de gravedad G del triángulo, y como sabemos que AG es los $\frac{2}{3}$ de la mediana AZ , será $AS = \frac{2}{3} AO$.

Los razonamientos precedentes son independientes de la dirección que se suponga á los empujes, y aplicables, por lo tanto, al caso de tomarse en consideración el rozamiento de las tierras con el muro, esto es, cuando el empuje se suponga que forma el ángulo φ con la normal al paramento interior de aquél.

Son también independientes de la inclinación del plano OF , y únicamente se fundan en que la superficie AF del terraplén es plana.

Podemos, pues, decir que en los terraplenes limitados por superficies planas, cualquiera que sea su inclinación, así como la del paramento interior del muro, el punto de aplicación S del empuje, ó de su igual y contraria la reacción del muro, está situado á $\frac{2}{3}$ de la altura de éste, á partir de la coronación, ó á $\frac{1}{3}$ si se cuenta desde el pie.

Observaremos que si desde G' , centro de gravedad del triángulo AOF ,

trazamos $G'S$ paralela á OF , encontrará á AO en el punto S de intersección de esta recta con GS (*).

1022. Casos particulares. — 1.º El paramento interior del muro es vertical, y la superficie del terraplén forma el ángulo θ con el horizonte.

El valor del empuje producido por un prisma cualquiera $A'OB$ (fig. 20, lám. 48) es, como sabemos, dado por la fórmula (1) del núm. 1016, la cual puede expresarse algebraicamente de este modo:

$$E = \frac{h^2 t}{2} \times \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \times \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha)} \quad (**) \quad (3).$$

Puede hallarse analíticamente el máximo de E por las variaciones de α , pero son necesarios cálculos prolijos que se evitan empleando la fórmula (1) y buscando gráficamente el máximo de AD .

1023. 2.º El paramento interior del muro es vertical y la superficie de terraplén es horizontal (fig. 24, lám. 47).

La magnitud AD vale

$$AD = AF \operatorname{tg} AFD.$$

(*) La hipótesis de que la superficie de fractura es plana no se compeadece con la de distribución de presiones que acabamos de hacer, y de la cual deducimos que el centro de presión está situado al tercio de la altura del muro á partir de su pie. En efecto; los razonamientos anteriores conducen también á la deducción de que la reacción R (fig. 22, lám. 47) está aplicada al tercio de OB á partir de O . Las tres fuerzas R , P y E han de concurrir en un punto, de modo que si el punto de encuentro de R y P lo unimos con S , obtendremos para E una línea de acción diferente de la supuesta.

Únicamente en el caso de superficie OB curva podrá tener lugar la concurrencia de las tres fuerzas P , E y R , conservando á estas últimas las direcciones que les hemos asignado en los números anteriores.

$$(**) \quad AD = AB \operatorname{tg} ABD = \frac{AB}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

por ser

$$ABD = 90^\circ - ADB = 90 - (\alpha + \varphi);$$

y puesto que

$$AB = AO \operatorname{tg} \alpha$$

resulta

$$AD = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} AO$$

Pero

$$AA' = AB \operatorname{tg} \theta = AO \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta$$

$$h = A'O = AO - AA' = AO(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta);$$

luego

$$AD = h \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta)},$$

y substituyendo este valor en la fórmula (1), se obtiene la (3).

Pero

$$AFD = 90 - ADF = 90 - (\alpha + \varphi)$$

$$AF = h \operatorname{tg} \alpha,$$

de modo que

$$AD = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

y

$$E = \frac{h^2 t}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (4);$$

E depende de α , y el máximo E_0 se obtiene para $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$, es decir para el plano OF bisector del diedro AOC que forma el paramento OA con el talud natural de las tierras OC , y tiene por valor.

$$E_0 = \frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (5).$$

En este caso no son necesarios tanteos para determinar el máximo, y se puede emplear la fórmula anterior, ó bien la (1), substituyendo AD por el valor lineal que resulte de trazar OF bisectriz de AOC y formar $DFO = \varphi$.

Cuando se tome en cuenta el rozamiento de las tierras con el muro (figura 27, lám. 47), habrá de hacerse uso de la fórmula (2) (núm. 1017), y determinar el máximo de AD' por tanteos.

1024. 3.º Paramento interior inclinado y superficie de terraplén horizontal.

Se emplearán las fórmulas (1) ó (2), según que se haga aprecio ó no del rozamiento de tierras con el muro, y se determinarán gráficamente por tanteos los máximos de AD y AD' .

La operación se simplifica empleando una plantilla del ángulo φ (fig. 21, lám. 48), la cual, una vez trazadas las rectas OA , AC , AL , se aplicará de modo que el vértice B sea punto de AC , y el lado OB pase por O .

1025. Terraplenes con sobrecargas. — Según las experiencias de Gobin (núm. 1010), ni el talud natural de las tierras OC (fig. 17, lám. 48), ni el plano de fractura, cambian por efecto de la sobrecarga, y esto mismo demuestra el cálculo.

Supongamos que se trata de una sobrecarga uniformemente repartida sobre el plano AC , formada por un macizo de tierras $AHL C$ de igual den-

sidad que las del terraplén y de altura constante h' (*), y formemos el ángulo $OBD = \varphi$. La comparación de los triángulos semejantes abc y ABD da para valor del empuje E' producido por el prisma AOB y sobrecarga correspondiente $ABNH$,

$$E' = P \times \frac{AD}{AB};$$

P es el peso de los prismas OAB y $AHNB$; de modo que

$$P = \text{superficie } OAB \times t + AB \times h' \times t;$$

y como

$$OAB = \frac{AB \times h}{2},$$

$$P = AB \left(\frac{ht}{2} + h't \right)$$

y

$$E' = \left(\frac{ht}{2} + h't \right) AD \quad (6).$$

El máximo de E' depende exclusivamente de AD , y, por lo tanto, del plano OB . Así, pues, los tanteos para la determinación de dicho máximo E'_o , se limitarán al valor de AD , y se harán del modo explicado en el número 1018.

Si comparamos E' con E , valor del empuje en el caso de no existir sobrecarga (núm. 1016), hallamos que $E' = E \left(\frac{1 + 2h'}{h} \right)$ (7); el aumento de empuje debido á la sobrecarga es $E \times \frac{2h'}{h}$; y como estas relaciones entre E' y E son independientes del valor de AD y comunes á todos los prismas AOB , cualquiera que sea el ángulo $AOB = \alpha$, subsistirán para el prisma de máximo empuje. Será, pues,

$$E'_o = E_o \left(1 + \frac{2h'}{h} \right) \quad (8),$$

y el aumento de empuje máximo producido por la sobrecarga tendrá por valor $E_o \times \frac{2h'}{h}$.

(*) Cuando la sobrecarga sea producida por una vía férrea, ó por una construcción cualquiera, el peso total que carga sobre AC , en un metro de longitud de muro, se dividirá por el producto $AC \times t$ (siendo t el peso del metro cúbico de las tierras del terraplén), y así se obtendrá h' .

1026. Punto de aplicación del empuje. — Suponiendo que la sobrecarga se divida por los planos verticales bb' , dd' , etc. (fig. 18, lám. 48), las presiones que engendrará en los elementos Aa , ac , etc., de muro serán iguales, y su resultante, cuyo valor es $E_o \times \frac{2h'}{h}$, según acabamos de ver, pasará por C , punto medio de AO (fig. 19, lám. 48). El empuje E_o , producido por el prisma AOB , está aplicado en B , siendo $OB = \frac{1}{3} OA$.

El punto de aplicación S de la resultante $E'_o = E_o \left(1 + \frac{2h'}{h} \right)$ está á la distancia $x = OS$ del pie, y x es dada por la ecuación de momentos

$$E_o \frac{h}{3} + E_o \frac{2h'}{h} \frac{h}{2} = E'_o x = E_o \left(1 + \frac{2h'}{h} \right) x.$$

de donde

$$x = h \frac{\frac{1}{3} h + h'}{h + 2h'} \quad (9).$$

El mismo punto de aplicación se encuentra para otro prisma diferente de AOB con su sobrecarga correspondiente.

1027. Casos particulares. — Si el paramento interior del muro es vertical y el plano superior del terraplén horizontal (fig. 24, lám. 47), el valor de AD es, según hemos visto en el núm. 1022, $AD = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}$; de modo que

$$E' = \left(\frac{ht}{2} + h't \right) \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad (10),$$

y el máximo E'_o corresponderá á $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$, es decir, al plano bisector del diedro AOC , lo mismo que en el caso de no existir sobrecargas. Sustituyendo este valor de α , se obtiene

$$E'_o = th \left(\frac{h}{2} + h' \right) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (11),$$

y comparando este valor con el E_o , para el caso de no existir sobrecarga (núm. 1022), resulta

$$E'_o = E_o \left(1 + \frac{2h'}{h} \right) \quad (12),$$

es decir, que el aumento de empuje producido por la sobrecarga es

$$E_0 \times \frac{2h'}{h}.$$

La abscisa del punto de aplicación será, como en el caso general (número 1026).

$$x = h \frac{\frac{1}{3}h + h'}{h + 2h'}$$

1028. Terraplén entre dos muros. — Un macizo de tierras comprendido por dos muros de acompañamiento (fig. 27, lám. 48), aunque su espesor AD sea pequeño, puede dar lugar á empujes muy considerables. Es conveniente determinar la intensidad del empuje, porque este caso se encuentra con frecuencia en la cimentación de los edificios, en el relleno de tímpanos de los arcos y en los de los estribos en los puentes, cuando no se emplean bóvedas de aligeramiento, y en otros varios casos de construcción.

Para el cálculo supondremos que uno de los muros, el DN , por ejemplo, es de posición invariable, y que el otro es susceptible de resbalar sobre su base ó de girar alrededor de la arista exterior inferior.

Tracemos OL de modo que $LON = \varphi$, y sea OF la bisectriz del ángulo COL . La parte CO de muro sufre un empuje máximo E'_0 producido por el prisma COF y la sobrecarga de tierras $ACFD$. Tanto E'_0 como su brazo de palanca Oa , serán determinados por las fórmulas del núm. 1027, teniendo en cuenta que la altura OC que se designaba con la letra h es ahora h'' .

La parte AC de muro se halla sometida al empuje máximo E''_0 debido al prisma ACB , siendo CB paralelo á OF , y el brazo de palanca Cb vale $\frac{1}{3}$

de AC ó sea $\frac{1}{3}h'$. La cantidad E''_0 es dada por la fórmula (5) del número 1022.

El empuje definitivo E_0 es igual á la suma $E'_0 + E''_0$, y su brazo de palanca OS se obtendrá por la ecuación de momentos

$$(E'_0 + E''_0) \times OS = E'_0 \times Oa + E''_0 \times Ob.$$

Más sencillo es suponer que el plano OF se prolonga hasta Z , y conside-

rar como prisma único de máximo empuje en toda la altura $h = h' + h''$ al $A O Z$, como si existiese la parte de terraplén DFZ , pues el error resulta en beneficio de la resistencia y estabilidad de AO . El empuje máximo E_0 será dado por la fórmula (5) del núm. 1022, ó por la (1) del núm. 1016, tomando al efecto el plano OZ bisector del diedro AOL ; el punto de aplicación estará á $\frac{1}{3}h$ á partir de la base.

Si sobre la superficie AD hubiese una sobrecarga, se convertiría en macizo de tierra de altura h' , y se tendría en cuenta para el cálculo de los empujes.

1029. Empuje de un muro sobre la tierra de un macizo. — Este problema es inverso del tratado en los números anteriores. El muro empujado por una fuerza E (fig. 23, lám. 48) rompe, según el plano OB , el macizo de tierras que se opone á su movimiento, y el prisma AOB tiende á resbalar, subiendo á lo largo de OB . Así sucede en los cimientos de un muro sometido á empujes (fig. 24, lám. 48).

Para la determinación de la resistencia que opone un prisma cualquiera $A'OB$, y la del prisma que la opone mayor, se procede exactamente como queda explicado en los núms. 1016 á 1024, sin más diferencia que la de estar el rozamiento Z en el plano OB (fig. 23, lám. 48), dirigido en sentido contrario, puesto que el prisma se mueve en opuesta dirección, de modo que la reacción resultante R forma el ángulo φ con la normal mn al plano OB , pero por la parte superior de esta recta.

Trazando la horizontal AB y formando el ángulo $OB D$ igual á φ , tendríamos de la comparación de los triángulos semejantes ABD y abc , repitiendo los cálculos del núm. 1016, sin más que cambiar el signo á φ , la fórmula (1) de este número

$$E = \frac{ht}{2} \times AD.$$

La diferencia de procedimiento consiste en formar el ángulo $OB D = \varphi$ por debajo de OB .

Si se apreciase el rozamiento de tierras con el muro, esto es, si se admitiese una dirección de fuerza E inclinada φ^0 con la perpendicular á AO , se tendría como en el núm. 1017

$$E = \frac{ht}{2} \times AD',$$

siendo $O A D' = \varphi$.

El máximo de E corresponderá al de AD ó AD' , y se determinará por tanteos (núm. 1018).

En el caso particular de ser AO vertical y AF horizontal (fig. 25, lámina 48), deduciríamos, como en el núm. 1022 (segundo caso), sin más que cambiar el signo de φ ,

$$E = \frac{h^2 t}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}$$

y el máximo corresponde á $\alpha = \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi)$, esto es, al plano bisector del diedro $AON = 90 + \varphi$, y tiene por valor

$$E_o = \frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right).$$

Fácil es construir el máximo de AD , que, sustituido en la fórmula $E = \frac{ht}{2} \times AD$, ha de dar el máximo E_o . Se forma $TON = \varphi$, se traza la bisectriz OF del ángulo AON y se dibuja el ángulo $OFD = \varphi$.

1030. Sobrecarga que puede resistir un terreno. — Si tomamos el punto medio B (fig. 26, lám. 48) de la anchura AC que ha de ocupar la sobrecarga, y trazamos BO de modo que $BOA = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$, el prisma BOA será el de máximo empuje sobre el plano vertical ideal AO , y el empuje causado por la sobrecarga $BAND$ y el peso del prisma AOB será, traduciendo en altura h' de tierra la de la sobrecarga (núm. 1027).

$$E'_o = E_o \left(1 + \frac{2h'}{h} \right),$$

siendo

$$h = AO.$$

$$E_o = \text{empuje del prisma } AOB = \frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right).$$

$h' =$ altura AN de tierra equivalente á la sobrecarga.

El empuje en AO está equilibrado por la resistencia que opone el prisma AOF á ser movido á lo largo de OF . El ángulo $AOF = 45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$, y la

expresada resistencia es (núm. 1029) $\frac{h^2 t}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right)$, ó $\frac{ht}{2} \times AD$, trazando FD de modo que $OFD = \varphi$.

Igualándola á E'_o , se despejará h' , que se podrá traducir después en altura de otra sobrecarga que no sea tierra.

Puede hacerse un trazado geométrico sencillo para determinar h' . El empuje E'_o ha de valer $\frac{ht}{2} \times AD$; pero si formamos el triángulo abc de fuerzas, correspondiente al prisma ABO y sobrecarga $BDNA$, sobre ab igual á la suma P de estos dos pesos, se obtiene, para empuje, $E'_o = bc = P \operatorname{tg} cab$ y deberá ser

$$P \operatorname{tg} cab = AD \times \frac{ht}{2} \quad \text{ó} \quad P = \frac{AD}{\operatorname{tg} cab} \times \frac{ht}{2}.$$

Pero si trazamos DH paralela á OB , como son iguales los ángulos ADH y cab porque los dos valen $45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$, y además $\frac{AD}{\operatorname{tg} cab} = \frac{AD}{\operatorname{tg} ADH} = AH$, tendremos

$$P = AH \times \frac{ht}{2};$$

luego si por el punto medio de $AO = h$ trazamos mn paralela á AH , el rectángulo $HAmn$ representará el peso total P , y si restamos el área de AOB obtendremos la de la sobrecarga de tierra, que después se podrá convertir en peso cualquiera.

1031. Momento máximo del empuje. — En todos los casos hasta aquí considerados, caracterizados por la condición de que las tierras se limiten en la parte superior del terraplén por un solo plano de inclinación cualquiera, la dirección del empuje E (fig. 22, lám. 48) y el punto de aplicación S' son los mismos para todos los prismas AOB , AOB' , etc., y constante será también el brazo de palanca HN , supuesta la posibilidad de rotación del muro alrededor de la arista exterior H . Dedúcese de aquí que el momento del empuje, $M = E \times HN$, depende exclusivamente de E , y su máximo M_o corresponderá al máximo E_o de E , es decir, $M_o = E_o \times HN$.

Así, pues, ya se considere la posibilidad de rotación del muro alrededor del pie del paramento exterior, ya se tome en cuenta tan sólo el resbalamiento sobre la base obedeciendo al simple empuje, cuando el macizo de tierras se limita por un solo plano en la parte superior, interesa el conoci-

miento del máximo del empuje E_0 para resolver el problema de estabilidad, obteniéndose el máximo del momento del empuje, M_0 , por el producto $E_0 \times H n$.

1032. Terraplén limitado por una superficie cualquiera $A'BB'$ (fig. 2.^a, lám. 49). — El empuje causado por un prisma cualquiera $A'OB$ se encuentra prolongando OB y determinando el punto B_1 , de modo que el área del triángulo $OA'B_1$ sea igual á la de la superficie $OA'dB$ (*), trazando la horizontal B_1A y construyendo el ángulo $DB_1O = \varphi$, porque el triángulo de fuerzas abc es el mismo para ambos casos. Aplicando la fórmula (1) del núm. 1016, se tendrá $E = \frac{ht}{2} \times AD$ ó $E = \frac{ht}{2} \times AD'$ si se toma en cuenta el rozamiento de las tierras con el muro, es decir, si suponemos que la perpendicular á éste forma con E el ángulo φ .

Repetiendo los razonamientos del núm. 1021 hallaríamos (fig. 3.^a, lám. 49) que tomando $e'e', m'm' \dots r'r'$ proporcionales á $ed, mt \dots rs$, uniendo los puntos $e', m' \dots r'$, y trazando por el centro de gravedad G de la superficie EAO la paralela GS á $r'r'$, se obtiene el punto de aplicación del empuje, y que la línea $G'S$ paralela al plano OB que limita el prisma, trazada por el centro de gravedad de $OA'dB$, pasa por S .

Según esto, si G (fig. 2.^a, lám. 49) es el centro de gravedad de $OA'dB$, S será el punto de aplicación de E , y el momento del empuje con respecto á H tendrá por valor $M = E \times Hn$.

Para otro plano OB' , haciendo la superficie $OA'B'_1$ igual á $OA'BB'$, el empuje será

$$E' = \frac{ht}{2} \times A_1D_1 \text{ ó } E' = \frac{ht}{2} \times A_1D'_1$$

y el punto de aplicación, el S' ; de modo que el momento valdrá

$$M' = E' \times Hn'$$

Por tanteos, empleando varios planos OB, OB' , etc., y comparando los resultados, se obtendrá el que da un máximo M_0 del momento de empuje.

(*) No habrá más que dividir el área $OA'dB$ por $\frac{1}{2} OA'$, y se tendrá la distancia de B_1 á OA , contada perpendicularmente á esta recta.

MUROS SIN CONTRAFUERTE. — COMPROBACIÓN DE SU ESTABILIDAD Y RESISTENCIA

1033. Resolución del problema. — Ya hemos indicado en el núm. 1004 la índole especial del problema y el método general de resolución. Se dibujarán dos escalas, una $L'L''$ de longitudes (figs. 4.^a á 8.^a, lám. 49) y otra $F'F''$ de fuerzas, y con arreglo á la primera se trazará un perfil $AODN$ (fig. 4.^a) arbitrario del muro, valiéndose al efecto de las fórmulas empíricas que damos en los núms. 1044 y siguientes. Hay necesidad de comprobar si el muro que hemos dibujado cumple satisfactoriamente las condiciones de estabilidad y resistencia enunciadas en el núm. 1003, y si esto no se realiza, modificar su forma ó sus dimensiones hasta conseguirlo.

Operaciones preliminares. — Se empezará por determinar el empuje máximo E_0 en magnitud, dirección y punto de aplicación, haciendo uso al efecto de las reglas dadas en los números siguientes:

Superficie de terraplén limitada por un solo plano en la parte superior.

Caso general: núms. 1018 y 1021:

Paramento vertical y superficie de terraplén horizontal.	} Empuje máximo = fórmula (5) del núm. 1022. Punto de aplicación = á $\frac{1}{3}$ de h á partir del pie.
Terraplenes con sobrecargas; caso general.	
Idem en el caso de paramento vertical y superficie horizontal de terraplén.....	} Empuje máximo = fórmula (8) del núm. 1025. Punto de aplicación = fórmula (9) del núm. 1026. Empuje máximo = fórmula (11) del núm. 1027. Punto de aplicación = fórmula (9) del núm. 1026.

Superficie de terraplén de forma cualquiera:

Momento máximo del empuje; empuje y brazo de palanca que lo producen (núm. 1032).

Cuando se admita que el empuje forma con la normal al paramento interior del muro un ángulo φ , ó poco diferente de φ , se pueden utilizar con éxito las tablas de Flamant (núm. 1008), que dan el coeficiente K del valor E_0 del empuje máximo

$$E_0 = K \frac{h^2 t}{2},$$

representando h la altura del muro en metros y t el peso del metro cúbico de tierras en kilogramos.

El empuje máximo E_0 , obtenido por cualquiera de los métodos indicados, es el que corresponde á un metro de longitud de muro, contado normalmente al plano del dibujo, y viene expresado en kilogramos.

Los valores de φ y de t , así como el de f , están contenidos en la tabla del núm. 32.

Una vez conocidos el empuje máximo E_0 y su punto de aplicación (*), se determinará el centro de gravedad G de la figura $AODN$, perfil del muro (fig. 4.^a, lám. 49), en cuyo punto se puede suponer aplicado el peso P de un metro de longitud de dicho muro. El valor de P es

$$P = \text{superficie } AODN \times 1 \times t'$$

siendo t' el peso del metro cúbico de mampostería.

Para formar t' se tienen los datos suficientes en los núms. 140 y 144, y en la tabla del núm. 166.

E_0 y P se encuentran en r , y formando el paralelogramo de fuerzas r u FM con arreglo á la escala $F'F''$, se obtiene la resultante Fr que corta á la base del muro en x . En este punto hay, pues, una componente tangencial $T = FM$ y otra $V = Hr = rM$ perpendicular á la base, que producen los efectos siguientes:

Componente tangencial. — (a) Resbalamiento de todo el muro, y de su cimientto $D'QLO$, sobre el fondo de la trinchera QL . A ello se opone el rozamiento de mampostería sobre tierra, cuyo ángulo es $\varphi = 27^\circ$ á 29° , y cuyo coeficiente vale $f = 0,50$ á $0,55$ (núm. 32, tabla); de modo que no habrá resbalamiento si el ángulo txr es menor que 27° á 29° para tierra seca, y 19° para la arcilla húmeda y reblandecida, que es caso desfavorable. También se opone al resbalamiento la resistencia que ofrece al movimiento el prisma de tierras $D'QR$ (núm. 1029), pero no se la suele tener en cuenta.

(b) Resbalamiento del muro $NAOD$ sobre los cimientos, en el plano OD , venciendo la resistencia que presenta el rozamiento en este plano y también la resistencia de la mampostería al esfuerzo cortante, si es apreciable. En las mamposterías aparejadas por hiladas horizontales regulares no se debe contar con la adherencia y cohesión de los morteros, que es en general débil (núm. 169); y atendiendo solamente al rozamiento de resbalamiento de ángulo φ , deberá ser $txr < \varphi$, teniendo φ los valores consignados en la tabla del núm. 32, es decir, de 27° á 45° , según que el tendel sea de mortero fresco,

(*) Cuanto decimos es independiente de la dirección del empuje; de modo que el método que deberá seguirse en la resolución del problema será siempre el mismo.

fraguado ó endurecido. En las mamposterías ordinarias, y, sobre todo, en los hormigones, la resistencia al esfuerzo cortante es de alguna consideración (núm. 170), pero no se la tiene en cuenta, en general, porque basta con la resistencia que ofrece el rozamiento para impedir todo movimiento de resbalamiento del muro.

Componente perpendicular á la base. — La componente $V = Hr = Mr$, aplicada en x , produce compresiones p por unidad superficial en la base DO que varían de un punto á otro (núm. 993), teniendo lugar en D la compresión máxima p_0 .

Con todos los datos precedentes se puede pasar á la comprobación de la estabilidad y resistencia del muro.

Comprobación de la estabilidad. — El resbalamiento del muro sobre los cimientos, ó de éstos sobre el fondo de la caja, no tendrá lugar si el ángulo txr es menor que φ , ángulo de rozamiento de mampostería sobre mampostería, ó de mampostería sobre tierra.

La rotación del muro alrededor de la arista exterior proyectada en D no es posible, puesto que la resultante pasa á la derecha de D , ó, lo que es lo mismo, su punto de aplicación x está contenido en la base DO , y esta condición es de necesario cumplimiento; pero es preciso conocer el grado de estabilidad del muro, determinando el *coeficiente de estabilidad* (núm. 1003) que como sabemos no es otra cosa que la relación entre el momento del peso P y el del empuje E_0 con respecto á D , es decir,

$$P \times Dn = m \times E_0 \times Du \quad m = \frac{P \times Dn}{E_0 \times Du}$$

Es conveniente que m esté comprendido entre 2 y 3 para que el muro pueda considerarse con grado de estabilidad suficiente.

Comprobación de la resistencia. — Aplicaremos las fórmulas del núm. 995. La base DO del muro, en un metro de longitud, está representada en proyección horizontal por el rectángulo A_1B_1 (fig. 4.^a, lám. 49). La presión p por unidad superficial en la arista D, A_1H_1 , que es la máxima, es dada por la fórmula (8) del núm. 995, teniendo presente las equivalencias siguientes:

- P componente $V = Mr$.
- b lado $DO = H_1B_1 = e$.
- a lado $A_1H_1 = 1$.
- x distancia $Ux_1 = \frac{1}{2} b - Dx$.

Tendremos, pues, para valor de la presión máxima por unidad superficial que sufre la base DO (arista D, D_1, H_1)

$$p = \frac{V}{e} \left(1 + \frac{6}{e} \times Ux_1 \right) \quad (1);$$

este valor de p ha de ser igual ó menor que el coeficiente R' de trabajo por compresión, relativo á la mampostería del muro. A R' se le asignarán los valores de la tabla del núm. 166 y nota del núm: 999 (*), si es que no se forman con arreglo á las prescripciones del núm. 165.

En el caso que Dx fuese menor que $\frac{1}{3} \times DO$ se supondría que el lado e de la base es tan sólo de magnitud $3 \times Dx$ (núm. 996), y la presión máxima por unidad superficial p , que tendría lugar en D , valdría

$$p = 2 \times \frac{V}{3 \times Dx}.$$

1034. Las condiciones de estabilidad y resistencia, no solamente han de verificarse en la base, sino también en una hilada ó plano horizontal cualquiera. En el Ba , por ejemplo, se operará como si fuese la base del muro $NBaA$; se hallará el empuje máximo E' correspondiente á la altura Aa , el peso P' de $NBaA$ y la resultante dl de estas dos fuerzas que corta en c al plano Ba , haciendo las comprobaciones de estabilidad y resistencia explicadas en el número anterior.

En general, las comprobaciones se hacen únicamente en la base del muro, ó á lo más en otras dos ó tres hiladas. Verificándolo en las hiladas Ba, Cb, DO (fig. 5.^a, lám. 49), sería:

Plano Ba.—Muro $NBaB$ de peso P' que pasa por el centro de gravedad de $ANaB$. Empuje E' correspondiente á la altura Aa , aplicado en e á la distancia $ae = \frac{1}{3} Aa$, ó á la que corresponda, según la superficie que limita el terraplén por la parte superior. Resultante de E' y P' , de dirección dl y punto de aplicación c .

(*) Los valores de R' que contiene esta tabla vienen dados en kilogramos por centímetro cuadrado. Si las dimensiones, en la fórmula (1), se toman en metros, R' deberá representar kilogramos por metro cuadrado al compararlo con p , y habrá que multiplicar por 10000 los números de la tabla citada.

Plano Cb.—Muro $NCbA$ de peso P'' , aplicado á su centro de gravedad, y empuje E'' correspondiente á la altura Ab , aplicado en t . La resultante de E'' y P'' tiene la dirección ns , y su punto de aplicación en CB es m .

Base DO.—Muro total: empuje E_0 y peso P totales; resultante rx y punto de aplicación x .

Cada dos resultantes sucesivas se cortan en los puntos l, s , etc., y forman el polígono de presiones $dl sx$. Uniendo los puntos de aplicación c, m, x , se obtiene el polígono de los centros de presión $dcmx$ (fig. 6.^a, lám. 49) que presenta su concavidad al exterior del muro.

Si hacemos (fig. 7.^a, lám. 49) $Sb' = P'$, $Sa' = P''$, $SR = P$ y además Sc', Sd', ST paralelas é iguales, respectivamente, á los empujes E', E'', E_0 , las rectas $b'c', a'd', RT$ representarán en magnitud y dirección las resultantes dl, ns, rx (fig. 5.^a, lám. 49), porque (fig. 7.^a) los triángulos $b'Sc', a'Sd', RST$, son los relativos á las fuerzas que obran en las partes de muro BA, CA, DA , (fig. 5.^a). También se puede hacer la construcción representada en la fig. 8.^a (lám. 49), tomando $O'b = E'$, $O'c = E''$, $Oe = E_0$ y $ba = P'$, $cm = P''$, $er = P$, y así se obtienen las resultantes $O'a, O'm, O'r$.

Cualquiera de estas dos construcciones (figs. 7.^a y 8.^a) facilita el trazado del polígono de presiones, una vez dibujadas las líneas de acción de los empujes E', E'', E_0 y de los pesos P', P'' y P . Por el punto de encuentro d de E' y P' (fig. 5.^a) se trazará dl paralela á $b'c'$ (fig. 7.^a) ó á $O'a$ (fig. 8.^a), y del mismo modo por los puntos n y r (fig. 5.^a) se harán pasar paralelas á $a'd'$, RT (fig. 7.^a) ó á $O'm, O'r$ (fig. 8.^a). Del polígono de presiones se deduce en seguida el de los centros de presión.

Del examen de las figs. 5.^a, 7.^a y 8.^a (lám. 49), se deduce que las presiones van aumentando en magnitud y en inclinación con respecto á la vertical desde el coronamiento del muro hasta la base, acercándose los centros de presión cada vez más al paramento exterior (fig. 6.^a). He aquí la razón de que se comprueben principalmente en la base del muro las condiciones de estabilidad y resistencia.

1035. Si el punto x (fig. 4.^a, lám. 49) estuviese muy próximo al D , ó la resultante $F'r$ fuese de magnitud é inclinación poco convenientes, de modo que no se cumplan satisfactoriamente las condiciones de estabilidad y resistencia, habrá necesidad de modificar el perfil del muro y comprobar de nuevo sus cualidades mecánicas.

La distancia Dx aumentará si se hace más grueso el muro, ó se aumenta solamente el ancho de la base DO , ó se inclina todo el muro del lado de las tierras. El ángulo txr se hará menor haciendo girar la base DO alrededor

de O , levantando la parte D , ó bien aumentando el espesor del muro, porque entonces (fig. 7.^a, lám. 49) serán mayores las dimensiones Sb' , Sa' , etc., sin que hayan variado las Sc' , Sd' , etc., que representan los empujes, de modo que los ángulos $c'b'S$, $d'a'S$, etc., disminuirán de valor.

1036. Investigación del perfil más económico. — La curva de los centros de presión es una hipérbola, según se demuestra analíticamente, de concavidad dirigida al exterior del muro. Por la forma de esta curva, y por el aumento de valor de las presiones desde el coronamiento del muro hasta su pie, se comprende la conveniencia de que el perfil aumente de anchura hacia la base.

Partiendo del muro $ABCD$ (fig. 9.^a, lám. 49), de paramentos verticales, podemos trasformarle, sin aumento de volumen, en el $A'C'D$, más conveniente, trazando el paramento exterior $A'C'$ en talud por el punto medio M de la altura, con lo cual las áreas $A'C'D$ y $ABCD$ son equivalentes.

También se podría poner en talud el paramento interior (fig. 11, tipo 5), ó los dos (tipo 3); pero entonces el empuje E'_0 de las tierras aumenta considerablemente. Se concibe fácilmente, en efecto, que desde el muro OA (figura 12, lám. 49), acostado sobre el talud natural de las tierras, que no recibe de éstas empuje ninguno hasta el OA'' , los empujes van siendo cada vez mayores.

Por estas razones, á igualdad de área de perfil transversal de muro, y, por lo tanto, de volumen de mamposterías, el perfil 2 (fig. 11, lám. 49) es preferible al 3, y éste lo es al 5. En el perfil 5 el punto de aplicación de la resultante en la base se acerca al pie del paramento exterior.

Sin variar de forma y dimensiones del muro $ABCD$ (fig. 10, lám. 49) de paramentos paralelos, se pueden mejorar sus condiciones de estabilidad y resistencia, sin más que hacerlo girar alrededor de su centro de gravedad G , desplomándolo del lado de las tierras, de modo que ocupe la posición $A'B'C'D$. La vertical Gr del peso no varía de posición; el empuje E_0 es ahora E'_0 , y la resultante On se convierte en la $O'n'$, de modo que la distancia $A'x'$ es mucho mayor que la Ax y además el ángulo $O'x'D'$ es mayor que el OxD .

Lo mismo sucede en las demás hiladas: el polígono de los centros de presión se aleja poco del eje ó parte media del muro, y las presiones tienen direcciones poco diferentes de la perpendicular á los planos de las hiladas, en una palabra, las presiones se distribuyen más uniformemente, son menores también porque los empujes disminuyen de valor á causa de la inclina-

ción del paramento interior, y están dirigidas de manera que las componentes tangenciales tienen pequeña magnitud.

Resumiendo: los muros desplomados al interior de los terraplenes encierran mejor el polígono de presiones, aumentan el momento del peso, disminuyen el empuje y su momento y ocasionan una distribución de presiones en su interior menos desigual que en los demás tipos. Con menor peso satisfacen mejor las condiciones de estabilidad y resistencia.

En el mismo caso se encuentran los muros de dos paramentos curvos (fig. 13, lám. 49) de Brunnel, y los de Robaglia y Pader (fig. 14, lám. 49), que tienen curvo solamente el paramento exterior.

El desplome se puede hacer de modo que la vertical que pasa por el centro de gravedad de perfil no salga de la base (fig. 15, lám. 49), á fin de que el muro pueda mantenerse en equilibrio él solo antes de adosarle el terraplén, ó bien se aumenta la inclinación, pero entonces los terraplenes, muy apisonados, deben ir acompañando al muro á medida que se fabrica (fig. 16, lám. 49), y se provee á éste de ligeros contrafuertes interiores C , siquiera cada 8 á 10 metros, para sostenerle durante su construcción y precaverse de los asientos desiguales de las tierras sobre las cuales se apoya. Los contrafuertes no tienen más misión que la de hacer el papel de tornapuntas; pero no intervienen en la estabilidad del muro en lo relativo á los empujes de las tierras, como veremos más adelante (núm. 1039), ó por lo menos no se tienen en cuenta en los cálculos de equilibrio y resistencia.

Los muros desplomados son muy ventajosos en el concepto económico, y su uso se extiende desde hace pocos años, habiendo sido empleados con éxito en grandes terraplenes de vías férreas. La fig. 17 (lám. 49) representa un muro de tipo Siben, sin contrafuertes, de paramento exterior con inclinaciones variables, que para una altura de 20 metros no tiene más que 1 metro de espesor en el coronamiento y 3,50 metros en la base.

Resumiendo: el perfil más económico es el de muros en desplome del lado de las tierras; siguen á éstos los de paramento exterior en talud é interior vertical, y son menos económicos los de paramentos verticales que los de paramento interior en talud (véanse los tipos 1 á 5 de la fig. 11, lámina 49).

1037. Tabla de Leigue. — Este mismo resultado obtuvo M. Leigue, según se puede observar en la tabla adjunta, que contiene los valores del coeficiente C correspondiente al volumen V' de un metro de longitud de muro, dado por la fórmula

$$V' = Ch^2,$$

siendo h la altura expresada en metros. V' representa metros cúbicos. El volumen V' , que á igual valor de h depende de C , es menor para los muros desplomados (tipo 1, fig. 11, lám. 49) que para los de otra forma, y siguen en orden creciente los tipos 2 á 5 de la fig. 11 (lám. 49), de modo que el perfil menos económico es el 5, de paramento exterior vertical é interior en talud.

En esta tabla, representan:

- δ = ángulo de inclinación, con la vertical del paramento interior.
- δ' = ídem íd. del paramento exterior.
- ϵ = ángulo que forma con la horizontal el plano superior del terraplén.
- m = coeficiente de estabilidad.
- e = ancho del muro cotando horizontalmente en la base: e es igual á Ah .
- A = coeficiente de h para obtener el espesor e en la base.
- V' = volumen de un metro lineal de muro, de altura h ; es igual á Ch^2 .
- C = coeficiente de h^2 para obtener el volumen V' .
- φ = ángulo del talud natural de las tierras.

M. Leigue supuso en sus cálculos:

$$\begin{aligned} \text{tg } \delta = \text{tg } \delta' &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{5} \end{array} \right. \\ \text{tg } \epsilon &= \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$m = 1 \text{ á } 3.$$

Además, admitió un talud natural de tierras φ tal que $\text{tg } \varphi = \frac{2}{3}$, que es un término medio aplicable á la mayor parte de los casos, y que la relación de densidades de mamposterías y tierras es $\frac{t'}{t} = 1,25$.

Con estas tablas y con las fórmulas

$$\begin{aligned} e &= Ah \\ V' &= Ch^2 \end{aligned}$$

se puede obtener un primer valor de las dimensiones del muro y del volumen de mamposterías, sin perjuicio de comprobar después si quedan satisfechas las condiciones de estabilidad y resistencia del modo explicado en el número 1033.

A y C han sido determinados para coeficiente m de estabilidad 1 y 3, y para el caso de que la presión en la base esté aplicada al tercio de e , en cuyo caso el coeficiente de estabilidad m tiene los valores que aparecen en la tabla.

En un muro del tipo 2 (fig. 11, lám. 49) de altura $h = 10$ metros, siendo $\text{tg } \delta = \frac{1}{5}$ y $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{2}$, y en el caso de que se desee que el centro de presión en la base esté en el tercio del ancho e de ésta á partir del pie exterior, tendríamos:

$$\begin{aligned} A &= 0,345 & C &= 0,245 \\ e &= 3,45 \text{ metros} & V' &= 24,5 \text{ metros cúbicos.} \end{aligned}$$

TABLA DE LEIGUE

Forma de la sección del muro (fig. 11, lám. 49)	Inclinación del paramento interior $\text{tg } \delta$	Inclinación del paramento exterior $\text{tg } \delta'$	Inclinación de la superficie del terraplén $\text{tg } \epsilon$	COEFICIENTE A			COEFICIENTE C			m cuando el centro de presión está al tercio de la base
				Coeficiente de estabilidad $m = 1$	Centro de presión al tercio de la base	Coeficiente de estabilidad $m = 3$	Coeficiente de estabilidad $m = 1$	Centro de presión de la base	Coeficiente de estabilidad $m = 3$	
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0,093	0,121	0,223	0,093	0,121	0,223	1,331
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0,124	0,166	0,289	0,124	0,166	0,289	1,410
2	0	$\frac{1}{5}$	3	0,154	0,208	0,349	0,154	0,208	0,349	1,460
2	0	$\frac{1}{5}$	0	0,212	0,288	0,360	0,112	0,188	0,260	1,903
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0,247	0,345	0,437	0,147	0,245	0,327	1,914
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3	0,277	0,396	0,502	0,177	0,296	0,402	1,937
4	0	0	0	»	0,434	0,471	0,142	0,234	0,271	2,480
4	0	0	1	»	0,488	0,538	0,161	0,288	0,338	2,380
4	0	0	2	»	0,529	0,592	0,176	0,329	0,392	2,320
4	0	0	3	0,184	0,312	0,343	0,184	0,312	0,343	2,510
5	$\frac{1}{5}$	0	1	0,224	0,376	0,424	0,224	0,376	0,424	2,440
5	$\frac{1}{5}$	0	2	0,258	0,431	0,490	0,258	0,431	0,490	2,400
5	$\frac{1}{5}$	0	3	0,278	0,494	0,457	0,178	0,394	0,357	3,570
5	$\frac{1}{5}$	0	0	0,314	0,542	0,527	0,214	0,442	0,427	3,190
5	$\frac{1}{5}$	0	3	0,311	0,580	0,582	0,241	0,480	0,482	2,950

1038. Problema. — Se trata de construir un muro de sostenimiento, de altura $h = 10$ metros, para un terraplén limitado en su parte superior por un plano inclinado al $\frac{1}{4}$ (4 de base por uno de altura, ó sea $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{4}$, ó $\epsilon = 14^\circ$).

Datos :

Talud natural de las tierras que forman el terraplén..... $\varphi = 35^\circ$ „ $\text{tg } \varphi = f = 0,70$.
 Peso del m^3 de tierras..... $t = 1500$ kilogramos.
 El muro es de hormigón fabricado con mortero ordinario, y pesa el metro cúbico..... $t' = 2300$ „
 El coeficiente de trabajo por compresión, de este material..... $R' = 5$ kgs. por cm^2 . ó 50000 kgs. por m^2 .

Primer tanteo. — Perfil del muro. — Hemos de empezar por determinar un perfil de muro que sirva de punto de partida, valiéndonos al efecto de las fórmulas empíricas, y comprobar en él las condiciones de estabilidad y resistencia.

Supongamos que el muro ha de ser de paramentos verticales (tipo 4 de la fig. 11, lám. 49), es decir, que $\delta = 0$, $\delta' = 0$. La fórmula de Navier (número 1045) asigna un espesor constante e , que tiene por valor

$$e = 0,594 \sqrt{\frac{t'}{t}} \text{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right)$$

$$e = 0,594 \sqrt{\frac{2300}{1500}} \text{tg} 27^\circ 30' = 3,84 \text{ metros.}$$

La tabla de Leigue (núm. 1037) da para este tipo de muros (tipo número 4) un coeficiente $A = 0,344$ (*); de modo que resulta

$$e = A h = 0,344 \times 10 = 3,44 \text{ metros.}$$

Haremos $e = 3,50$ metros, y previo el trazado de dos escalas, una de fuerzas y otra de longitudes, dibujaremos, con arreglo á esta última, el perfil $ABCD$ (fig. 9.^a, lám. 49).

(*) Este valor de A , correspondiente al caso de centro de presión en el tercio de la base, lo hemos formado dividiendo por 2 la suma de los correspondientes á $\text{tg } \epsilon = 0$ y $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{4}$

Empuje máximo. — Para efectuar las comprobaciones de estabilidad y resistencia, es necesario determinar el valor del empuje máximo E_0 , que supondremos perpendicular al paramento interior del muro, esto es, horizontal.

Empleando la fórmula (1) del núm. 1016, $E = \frac{ht}{2} \times AD$, y haciendo las operaciones geométricas explicadas en el núm. 1018, encontramos para máximo de la dimensión AD (fig. 15, lám. 48), $AD = 3,15$ metros, de modo que el empuje máximo por metro de longitud de muro, tiene por valor

$$E_0 = \frac{ht}{2} \times 3,15 = \frac{10 \times 1500}{2} \times 3,15 = 23625 \text{ kilogramos.}$$

Si hubiésemos hecho uso de las tablas de Flamant (núm. 1008) hallaríamos para valor del coeficiente K , en el caso de $\delta = 0$, $\varphi = 36^\circ$, $\theta = 15^\circ$, que es el más aproximado al del problema (tabla 1.^a) $K = 0,31$, resultando para E_0

$$E_0 = K \frac{h^2 t}{2} = 0,31 \times \frac{10^2 \times 1500}{2} = 23250 \text{ kilogramos,}$$

cantidad próximamente igual á la determinada anteriormente.

Para ponernos en las condiciones más desfavorables, haremos $E_0 = 23600$ kilogramos, y este empuje estará aplicado en S (fig. 9.^a, lám. 49) á la distancia de D igual á $DS = \frac{1}{3} h = 3,33$ metros.

El peso P de un metro de longitud de muro es

$$P = h \times e \times t' = 10 \times 3,5 \times 2300 = 80500 \text{ kilogramos,}$$

ó, en números redondos, 80000 kilogramos.

Comprobación de la estabilidad. — Hallando la resultante On de E_0 y P , encontramos que su punto de aplicación x en el plano AD está situado dentro de la base, á la distancia $Ax = 0,78$ metros de la arista exterior A .

El coeficiente de estabilidad es, teniendo en cuenta que $Ab = \frac{1}{2} e = 1,75$ metros,

$$m = \frac{P \times Ab}{E_0 \times DS} = \frac{80000 \times 1,75}{23600 \times 3,33} = 1,77.$$

Comprobación de la resistencia. — Como quiera que Ax es menor que $\frac{1}{3} \times AD$, consideraremos tan sólo, para los efectos de la resistencia, una longitud de base, á partir de A , igual á $3 \times Ax = 3 \times 0,78 = 2,34$ metros (núms. 997 y 1033).

La componente vertical de la resultante On , es $Or = P$, y la presión máxima en A , por metro cuadrado, será

$$p = \frac{2P}{3 \times Ax} = \frac{160000}{2,34} = 6,83 \times 10^4 \text{ kilogramos por m.}^2,$$

ó sea

$$p = 6,83 \text{ kilogramos por cm.}^2.$$

Las condiciones del muro no son tan satisfactorias como fuera de desear. El coeficiente de estabilidad $m = 1,77$ es pequeño, y la presión por cm.^2 , en la arista exterior de la base, ó sea el coeficiente de trabajo por compresión, tiene por valor $p = R' = 6,83$ kilogramos por cm.^2 , algo mayor que lo que ordinariamente se acepta para esta clase de fábricas. El volumen de mampostería por metro de longitud de muro, es

$$3,50 \times 10 \times 1 = 35 \text{ metros cúbicos.}$$

Segundo tanteo. — Sin variar el área del perfil del muro, demos talud al paramento exterior, á cuyo efecto (fig. 9.^a, lám. 49), tracemos $A'C'$ por el punto medio M de la altura AB . La sección es ahora $A'C'CD$, y hemos hecho $CC' = 2,50$ metros y $A'D = 4,50$ metros. El centro de gravedad es G' (*) y en él estará aplicado el peso $O'r' = P$, que tienen el mismo valor anterior (80000 kilogramos). Tampoco ha variado E_0 , y componiéndolo con P , se obtiene la resultante $O'n'$, y se deduce:

$$\begin{aligned} A'x' &= 1,55 \text{ metros} & A'b' &= 2,65 \\ m &= \frac{P \times A'b'}{E_0 \times DS} = \frac{80000 \times 2,65}{23600 \times 3,33} = 2,94. \end{aligned}$$

La estabilidad es mucho mayor que en el muro de paramentos verticales.

(*) Recordaremos que G' (fig. 19, lám. 51), es la intersección de la línea medida ch con la an que se traza haciendo $ab = em$ y $mn = bd$.

El triplo de $A'x'$ es mayor que $A'D$. Para determinar la presión máxima p en A' , se hará uso de la fórmula (1) del núm. 1033, teniendo en cuenta que V , componente vertical del peso, es aquí igual á P , y que la distancia x del centro de presión x' al punto medio de la base $A'D$ es

$$x = \frac{1}{2} A'D - A'x' = 2,25 - 1,65 = 0,60;$$

así obtendremos

$$p = \frac{P}{e} \left(1 + \frac{6x}{e} \right) = \frac{80000}{4,50} \left(1 + \frac{6 \times 0,6}{4,5} \right) = 31700 \text{ kilogs. por m.}^2$$

ó sea

$$p = 3,17 \text{ kilogramos por cm.}^2$$

Como vemos, las condiciones de estabilidad y resistencia son mucho más favorables, y puede reducirse el espesor del muro en obsequio á la economía.

Tercer tanteo. — Conservando el talud exterior $A'C'$ con igual inclinación, hagamos $C'C = 1,80$ metros, y $A'D = 3,80$ metros, con lo cual el volumen de mampostería, por metro de longitud de muro, es

$$\frac{1,80 + 3,80}{2} \times 10 \times 1 = 28 \text{ metros cúbicos, y su peso } P = 64.400 \text{ kilogs.}$$

Repitiendo las operaciones anteriores, hallamos $A'x' = 1,20$ metros, $A'b' = 2,40$ metros; y como $3 \times A'x' < A'D$, será $p = \frac{2 \times P}{3 \times A'x'} = 3,6$ kilogramos por cm.² Además, $m = 1,92$. Las condiciones de estabilidad y resistencia pueden aceptarse, aunque m es algo menor que 2.

Cuarto tanteo. — Supondremos que el muro de paramentos paralelos está desplomado del lado de las tierras (tipo 1, fig. 11, lám. 49) con inclinación de $\frac{1}{5}$ (ángulo de 11° con la vertical). Empleando las tablas de Leigue (número 1037) hallamos $A = 0,261$, y $e = Ah = 2,61$ metros.

Dibujando el perfil $LMB A$ del muro (fig. 18, lám. 51), y determinando el empuje máximo E_0 (núm. 1017), el cual tendrá ahora la dirección SH perpendicular á MB , y estará aplicado en S , siendo $BS = \frac{1}{3} BM$, hallamos:

$$E_0 = \frac{ht}{2} \times AD = \frac{10 \times 1500}{2} \times 2,35 = 17625 \text{ kilogramos.}$$

$$P = 59800 \text{ kilogramos.}$$

$$Ad = 4 \text{ metros.}$$

$$Ac = 0,50 \text{ metros.}$$

$$Ar = 2,05 \text{ metros.}$$

Componente vertical de $OF = V = 57000$ kilogramos.

$$m = \frac{P \times Ar}{E_0 \times Ad} = 1,73$$

$$p = \frac{V}{AB} \left(1 + \frac{6 \times cb}{AB} \right) = 42000 \text{ kilogs. por m.}^2 \text{ (4,20 kilogs. por cm.}^2\text{)}$$

Volumen de mampostería por metro cúbico = $2,60 \times 10 = 26 \text{ m.}^3$

Se obtiene economía de material, pero el coeficiente de estabilidad es pequeño. Para hacerlo mayor se puede aumentar el desplome del muro, ó el espesor $AB = e$ de la base.

Con lo expuesto es suficiente para darse cuenta exacta de los detalles de procedimiento, y por esto no continuaremos el número de tanteos aplicados á perfiles diferentes.

MUROS CON CONTRAFUERTE. — COMPROBACIÓN DE SU ESTABILIDAD Y RESISTENCIA

1039. Para reforzar los muros de sostenimiento de tierras se les provee de contrafuertes de forma triangular ó rectangular, que pueden colocarse al exterior (fig. 3.^a, lám. 50) ó al interior (figs. 12 y 13, lám. 50). El empleo de los contrafuertes supone que el muro no tiene estabilidad y resistencia propias en grado suficiente, puesto que hay necesidad de reforzarlo.

1040. Contrafuertes exteriores. — (Fig. 4.^a, lám. 50.) El muro AB , de espesor e en la base, y de altura h , está reforzado por contrafuertes de espesor $uu = c$ y longitud $OO' = b$, colocados á la distancia d entre ejes. Para el cálculo, se toma en consideración la parte AB de muro y los semicontrafuertes contiguos, comprendidos entre los planos $CD, C'D'$, que en planta afecta la forma de una U (fig. 5.^a); ó bien un contrafuerte y las mitades de los muros próximos, en cuyo caso resulta un T (fig. 6.^a).

Condiciones de estabilidad. De suponer solidez perfecta al conjunto considerado como monolito, el efecto de los contrafuertes exteriores es trasladar de O' á O (fig. 4.^a, lám. 50) el eje de la rotación producida por el empuje E_0 .

Si es G el centro de gravedad de los semicontrafuertes y muro intermedio, y P el peso de estas partes, la resultante GQ de E_0 y P debe pasar por el punto a' á la derecha de O , y el coeficiente de estabilidad será

$$m = \frac{P \times O O'}{E_0 \times O r}$$

A causa de los contrafuertes, ha aumentado considerablemente el brazo de palanca del peso P , en beneficio de la estabilidad.

Condiciones de resistencia.—Si el muro fuese de resistencia ilimitada, cualquiera que fuese su espesor resolvería el problema, con tal de que las dimensiones de los contrafuertes fuesen tales que entre el muro y uno de ellos quedase satisfecha la igualdad anterior.

Pero no es así, y es necesario atender también á las dimensiones del muro, por los motivos siguientes relacionados con la resistencia:

1.^o El muro, entre dos contrafuertes, sometido á los empujes p (figs. 4.^a y 5.^a, lám. 50), actúa como si fuera un dintel ó bóveda plana, y ya veremos que se desarrollan en su interior presiones por las cuales, si su espesor fuese deficiente, puede perecer.

2.^o Sea G' el centro de gravedad de la base (dos semicontrafuertes y el muro intermedio), y a' , a el centro de presión. Con arreglo á la ley del trapecio, las presiones en esta base estarán representadas por las ordenadas del plano de , y es preciso que la compresión dc que sufre el material en las aristas exteriores A, B del contrafuerte no sea mayor que R' , coeficiente de trabajo por compresión de las mamposterías.

Con objeto de no disminuir exageradamente el espesor del muro, le asignaremos el necesario para que, considerado aisladamente, sin contrafuertes, se halle en el límite de estabilidad, esto es, que el coeficiente de estabilidad sea $m = 1$; y daremos á los contrafuertes dimensiones tales que el conjunto de éstos y del muro tenga una estabilidad representada por un valor de m comprendido entre 2 y 3.

Detalle de las operaciones de comprobación de la estabilidad y resistencia.—

Se dibujan el perfil y planta de un contrafuerte y de la parte de muro inmediato, utilizando al efecto las fórmulas empíricas de los núms. 1050 y siguientes.

Se halla el peso P' de la parte de muro (fig. 7.^a, lám. 50), que estará aplicado á su centro de gravedad, y el P'' del contrafuerte, aplicado en el centro

de gravedad del triángulo OMO' ; P'' pasará por el punto x , siendo Mx los $\frac{2}{3}$ de la mediana MN .

Determinase á continuación la posición de la resultante $P = P' + P''$, empleando al efecto el procedimiento analítico

$$\frac{ac}{cb} = \frac{P'}{P''} \quad , \quad \frac{ac}{ab} = \frac{P'}{P} \quad , \quad ac = \frac{P' \times ab}{P}$$

ó haciendo uso del método gráfico explicado en el núm. 411.

Ha de verificarse

$$P \times O' t \geq E_0 \times O' s$$

$$m = \frac{P \times O l}{E_0 \times O r} \geq 2$$

Cuanto á la resistencia (figs. 4.^a y 5.^a, lám. 50), una vez hallados la resultante GQ de E_0 y P , y su punto de aplicación a' , a , haremos uso de la fórmula (3) del núm. 993, teniendo presente que $x = G'a$, $v'' = G'r$, $\omega =$ área de nD' , $I =$ momento de inercia de nD' con respecto al eje $YY =$ momento de inercia de H (fig. 6.^a) con respecto á YY (24, tabla del número 477), y hallaremos la presión p por unidad superficial en A, B (fig. 5.^a). Ha de verificarse

$$p \leq R'$$

teniendo R' los valores que hemos dado en el núm. 166 y nota del número 999.

1041. Muros con contrafuertes interiores.— Si se considera como un monolito el conjunto de contrafuertes y muro, habrá que hallar el centro de gravedad del conjunto y suponer que el peso está aplicado en este punto, componiéndolo después con el empuje máximo para obtener la resultante definitiva.

Siendo P' y P'' los pesos de un contrafuerte y de la parte de muro adyacente (fig. 9.^a, lám. 50), los cuales pasan por los centros de gravedad respectivos, se hallará gráficamente ó por el cálculo la posición de la resultante $P = P' + P''$. Este peso total P y el empuje máximo E_0 correspondiente á todo el intervalo Aa, Bb , esto es, á la longitud d , que se supone aplicado

al paramento interior en z , darán la resultante y su punto de aplicación x en la base, debiendo comprobarse, como en el caso de contrafuertes exteriores, la estabilidad y resistencia; para lo primero, el momento de P con respecto á la arista exterior del muro O debe ser m veces mayor que el momento del empuje E_0 , siendo m el coeficiente de estabilidad, y para lo segundo se aplicará la fórmula (3) del núm. 993, en la cual I será el momento de inercia de la T que forma un contrafuerte y su muro inmediato. El efecto del contrafuerte interior ha sido alejar en una pequeña cantidad del pie O del muro la fuerza P , y, por lo tanto, el centro de presión x de la base. Es más favorable el resultado de los contrafuertes exteriores.

Pero este procedimiento, seguido por algunos ingenieros; es defectuoso, por más de un concepto. En primer lugar, la construcción total no puede asimilarse á un monolito, y dada la situación de muro y contrafuertes con respecto al empuje, el primero tiende á separarse del segundo (fig. 10, lámina 50); además el empuje no está aplicado solamente al paramento interior del muro, sino que actúa también en el del contrafuerte.

El muro MC (fig. 11, lám. 50) soporta el empuje de la parte MCT (prisma cab), y el contrafuerte el del prisma cmn , $DHQO$; pero esta distribución de presiones no se verifica en realidad de este modo, por efecto de los rozamientos laterales que se desarrollan en los planos MT , CV , entre los macizos, y en virtud de los cuales se disminuye el empuje en el muro MC y se aumenta el que corresponde al contrafuerte $RSMN$. La disminución de presiones en MC es la ventaja que se obtiene con el empleo de los contrafuertes interiores.

Debe, pues, calcularse el muro con arreglo á las presiones efectivas; pero como se desconoce la disminución que éstas experimentan por efecto de los rozamientos laterales, muchos ingenieros calculan el espesor de los muros haciendo abstracción de los contrafuertes, y cuando más, admiten en este cálculo un coeficiente de estabilidad algo menor que de ordinario, pero sin disminuirlo demasiado, porque entonces, obedeciendo el muro á las presiones que, recién construido el terraplén, se ejercen entre los planos MT , CV , se separará de los contrafuertes, mientras que éstos, sometidos á las componentes verticales de los rozamientos que se desarrollan en todos sus paramentos, podrán hacer asientos de consideración al mismo tiempo que el macizo de tierras, si los cimientos no son sólidos, de modo que la separación de contrafuerte y muro tendrá lugar también en sentido vertical.

1042. Contrafuertes interiores con relleno intermedio. — En estos últimos años se han construído numerosos muros de sostenimiento de tierras en

desplome del lado de éstas, y provistos de contrafuertes que generalmente parten de la arista superior interior del muro, limitándose por un plano vertical (fig. 13, lám. 50), pero con la novedad de rellenar los espacios A, B entre los contrafuertes con tierra y arena cuidadosamente apisonadas, ó con macizos de piedra en seco, perfectamente acuñada con ripio. En una palabra: el relleno ha de estar formado de modo que constituya un macizo incapaz de tener asientos ni movimientos que produzca empujes.

Con este sistema se han construído muros elevados de sostenimiento, de pequeño grueso, pudiendo citarse, entre otros, uno de 18 metros de altura que no tiene más que 1,50 metros de espesor (línea férrea de Eyguerande á Vendes).

Se explica fácilmente la ventaja del macizado entre los contrafuertes; el punto S de aplicación del empuje se separa á la derecha, y al peso del muro hay que agregar el del relleno, al establecer el equilibrio alrededor de la arista exterior O , de modo que P , peso de muro y relleno, es ahora mayor y está situado á mayor distancia de O . En una palabra, han aumentado el peso P y su brazo de palanca Or , es decir, el momento de estabilidad $P \times Or$.

Para los efectos de estabilidad, se obtiene el mismo resultado que si se construye un muro de sección constante é igual á Oab ; en cambio, la economía que se alcanza es grande, porque el coste de los rellenos, aun los de piedra en seco en que se pueden utilizar los productos de los desmontes en los grandes trabajos de explanación, es muy inferior al de la mampostería tomada con mortero.

Cuanto á la resistencia, y operando como se ha hecho en el núm. 1040, hay necesidad de comprobar que las presiones, en una hilada cualquiera, no exceden del coeficiente de trabajo ordinario. Para estas operaciones se parte de un cierto perfil que puede ser dado por las fórmulas empíricas de los núms. 1052 y siguientes.

1043. Precauciones que deben tomarse en la construcción de muros de sostenimiento y en la de los terraplenes adosados. — Es necesario evitar, en cuanto sea posible, que el terraplén haga asientos de consideración, porque el movimiento del macizo de tierras produce una fuerza viva cuyo equivalente, en trabajo dinámico, es origen de empujes de gran valor, que sumados al empuje estático E_0 , pueden ocasionar la ruina de la obra. Si el asiento del terraplén es grande, y se opera bruscamente, la destrucción del muro es segura, aunque su espesor se haya calculado con todas las reglas mecánicas que hemos dado en los números precedentes:

Por estas razones es de la mayor importancia impedir el asiento de las tierras en las inmediaciones del muro, apisonándolas cuidadosamente por capas delgadas, regándolas durante la construcción, especialmente cuando el terraplén es de arena, y practicando cuantas operaciones tengan por objeto proporcionar al macizo el asiento definitivo.

No es menos interesante proporcionar fácil salida á las aguas que puedan alojarse en el macizo de tierras detrás del muro, porque si éstas absorben gran cantidad de aquéllas, disminuye considerablemente el valor del ángulo del talud natural $\varphi = C O T$ (fig. 24, lám. 47), lo que equivale á decir que aumenta el prisma de empuje máximo $A O F$, y, por tanto, este empuje E_0 . Si las aguas retenidas por el muro son abundantes, el empuje máximo es el mismo que produciría una masa líquida de densidad igual á la de las tierras, de modo que el muro se encontrará en condiciones muy desfavorables de resistencia.

Para sanear el macizo, cuando las aguas procedan inmediatamente de las de lluvia recibidas por la superficie superior del terraplén, se provee el muro de aberturas en todo su espesor (barbacanas ó cantimploras) de sección rectangular ó triangular. Si son rectangulares, se les da 4 á 6 centímetros de lado horizontal y 20 á 30 centímetros de lado vertical, colocando por término medio una por cada 10 metros cuadrados de paramento, sin perjuicio de aumentar su número si fuese necesario.

Si se trata de aguas subterráneas de origen lejano y mayor caudal, habrá que apelar á todos los trabajos de saneamiento que describen los tratados especiales.

El saneamiento de los terraplenes es todavía más necesario cuando las tierras son arcillosas. Si la capa arcillosa $Z Z$ (fig. 6.^a, lám. 49) está humedecida, hace las veces de materia lubricante, y todo el macizo M empuja al muro.

FÓRMULAS EMPÍRICAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS DIMENSIONES DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO DE TIERRAS

1044. En las fórmulas que á continuación copiamos, e representa el espesor en la base del muro, medido horizontalmente; e' el espesor en el coronamiento y e'' el correspondiente al punto intermedio que se indique; h la altura del muro y h' la de la sobrecarga de tierras, cuando la haya. Si la sobrecarga no es de tierras, se determinará la altura h' del prisma de tierras equivalente, del modo explicado en la nota del núm. **1025**.

1045. Casos ordinarios. — 1.^o *Muros de paramento exterior en talud al $\frac{1}{5}$ y de paramento interior en talud al $\frac{1}{10}$* (fig 21, lám. 49).

Tierras ordinarias, arena, grava ó cascajo.

Sin sobrecarga de tierras (tipo A):

$$\begin{aligned} h < 2 \text{ metros} & \quad \text{''} \quad e' = 0,10 \text{ metros} + 0,20 h \\ h > 2 \text{ metros} & \quad \text{''} \quad e' = 0,20 h. \end{aligned}$$

Con sobrecarga de tierras, de altura h' :

$$\begin{aligned} h < 2 \text{ metros} & \quad \text{''} \quad e' = 0,10 + 0,20 (h + h') \\ h > 2 \text{ metros} & \quad \text{''} \quad e' = 0,20 (h + h'). \end{aligned}$$

Estas fórmulas no tienen en cuenta la relación $\frac{h'}{h}$, y dan, en general, espesores algo exagerados.

2.^o *Muros de paramentos verticales* (tipo 4, fig. 11, lám. 49), *superficie horizontal de terraplén, sin sobrecarga. Fórmula de Navier:*

$$e = 0,59 h \sqrt{\frac{t'}{t}} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right);$$

t' y t son, respectivamente, los pesos del metro cúbico de mampostería y de tierras, y φ el ángulo del talud natural de éstas.

3.^o *Muros desplomados de caras paralelas* (fig. 16, lám. 49). *Fórmula de M. Leigue.*

e , espesor medido horizontalmente en la base, tiene por valor $e = A h$, siendo h la altura y A un coeficiente dado por la fórmula

$$A = \left(0,405 + 0,08 m + \frac{\operatorname{tg}^2 \zeta}{6,5 - m} \right) (1 - \operatorname{tg} \delta) - 0,30 (1 - \operatorname{tg}^2 \delta);$$

δ es el ángulo que forma el paramento interior con la vertical, ζ el ángulo que forma con el horizonte el plano superior del terraplén y m el coeficiente de estabilidad (*).

(*) Se supone se construirán con el muro ligeros contrafuertes para sostenerlo, tan separados como posible sea.

1046. Muros de sostenimiento en vías férreas. Se cuenta con la sobrecarga producida por el peso de los trenes. -- Paramento interior vertical, y exterior en talud á $\frac{1}{6}$ (fig. 19, lám. 49).

(1) *Fórmulas de Nordling* (muros construidos en la línea férrea de Arvant á Aurillac).

Muro sin sobrecarga de tierras (A):

$$e' = 0,40 \text{ metros} + 0,25 h \quad e = 0,40 + 0,41 h.$$

Muro con sobrecarga de altura h' (B):

$$e' = 0,40 \text{ metros} + 0,25 h + 0,133 h' \quad e = 0,40 \text{ metros} + 0,41 h + 0,113 h'.$$

Los espesores dados por estas fórmulas son exagerados.

(2) *Muros de paramento interior en desplome. Tipo Chauvisé* (línea férrea de Latour á Milhau), fig. 20, lám. 49.

Muros sin sobrecarga (A). Paramento exterior en talud al $\frac{1}{3}$. Paramento interior en desplome al $\frac{1}{8}$, á partir de la base, y vertical cerca del coronamiento:

$$\begin{aligned} \text{Para } h < 6 \text{ metros..... } e' &= 0,40 & e &= 0,40 + 0,21 h. \\ * \quad h > 6 \text{ metros..... } e' &= 0,40 & e &= 0,30 h - 0,14 \text{ metros.} \end{aligned}$$

Muros con sobrecarga de tierras de altura h' (B). Paramento exterior en talud al $\frac{1}{3}$, é interior en desplome al $\frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} \text{Para } h < 6 \text{ metros..... } e &= (0,40 + 0,21 h) \left(1 + \frac{h'}{20}\right). \\ * \quad h > 6 \text{ metros..... } e &= (0,30 h - 0,14) \left(1 + \frac{h'}{25}\right). \end{aligned}$$

(3) *Muros de paramento exterior curvo. Tipo Robaglia y Pader* (línea férrea de Rodez á Milhau), fig. 14, lám. 49.

Muros sin sobrecarga de tierra.

Tipo C. -- Paramento interior vertical, al que se adosa un espesor T de

pedra en seco de 0,50 metros. Paramento exterior curvo, cuya cuerda está en talud de $\frac{1}{5}$:

$$e' = 0,50 + 0,10 h.$$

Tipo D. -- Paramento interior en desplome al $\frac{1}{10}$. Paramento exterior, curvo, cuya cuerda está en talud al $\frac{1}{3}$:

$$e' = 0,30 + 0,08 h.$$

1047. Muros de sostenimiento de terraplenes á media ladera (fig. 1.^a, lám. 49). -- *Fórmula de M. Vigan:*

$$e' = 0,25 h \left(1 - 0,10 \operatorname{tg} \delta' \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta'}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta'}\right),$$

en la cual:

e' = espesor del muro en el coronamiento = AC .

h = altura CN .

δ' = ángulo FDC del talud exterior.

α = ángulo CBD que forma la ladera con el horizonte.

Para que sea aplicable la fórmula, ha de ser α igual ó mayor que 30° .

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{1}{10} \text{ para muros de mampostería.}$$

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{1}{5} \text{ para muros de piedra en seco.}$$

La construcción geométrica, que da los mismos espesores que la fórmula anterior, es muy sencilla. Sea CB el ancho del terraplén; se traza CD con la inclinación $CDF = \delta'$ antes indicada (al $\frac{1}{10}$ ó al $\frac{1}{5}$), y se toma

$$CH = \frac{1}{10} \times FD; \text{ dibújase la vertical } HM \text{ y se hace } e' = CA = \frac{1}{4} \times HM.$$

El paramento interior AQ es vertical.

1048. Obras de fortificación. Escarpas adosadas (fig. 18, lám. 49):

h = altura del muro.

h' = ídem de la sobrecarga, limitada por la línea media AB .

e'' = espesor del muro, medido á una altura $a = \frac{1}{10} h$.

El paramento interior es vertical, y el exterior ligeramente en talud.

Fórmula de Poncelet:

$$e'' = 0,285 (h + h').$$

Esta fórmula conviene para valores de h' comprendidos entre $h' = 0$ y $h' = h$.

Fórmula de Dambrun:

$$e'' = 0,333 h + 0,2 h'.$$

Aplicable y preferible á la de Poncelet, cuando h' está comprendido entre $0,5 h$ y h .

Fórmulas de la Escuela de aplicación francesa ().* — Es muy frecuente hoy, en las obras de fortificación, que la altura h' de sobrecarga sea mucho mayor que la h del muro, y en tales casos las fórmulas anteriores dan espesores exagerados.

Según los cálculos de estabilidad verificados en la Escuela de aplicación militar francesa para valores diferentes de h y h' , conviene emplear las fórmulas siguientes:

$$e'' = 0,333 h + 0,1 h' \dots \text{ para } h' \begin{matrix} > h \\ < 2h \end{matrix}$$

$$e'' = 0,333 h + 0,066 h' \dots \text{ para } h' > 2h \text{ en cantidad notable.}$$

1049. Muros y revestimientos de taludes de piedra en seco. — *Muros de piedra en seco.* — Paramento interior vertical, y el exterior inclinado á $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{6}$.

(*) *Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie. Cours de fortification permanente, 1882.*

Espesor e'' contado en la mitad de la altura h :

$$e'' = 0,5 h.$$

Cuando $h > 6$ metros, no es conveniente este revestimiento, porque los materiales de las hiladas inferiores pueden aplastarse, sobre todo cuando la superficie de contacto en los lechos es pequeña. Además, á no emplear la piedra producto de los desmontes en las grandes explanaciones, resultan caros por el gran cubo de material que exigen.

Revestimiento de taludes con piedra en seco (fig. 22, lám. 49):

e' = espesor *a m* en el coronamiento, contado perpendicularmente al talud.

i = aumento de espesor (*s u*) por cada metro de altura de terraplén.

$$\left. \begin{matrix} e' = 0,30 \\ i = 0,05 \end{matrix} \right\} \text{ Para taludes á } 45^\circ$$

$$\left. \begin{matrix} e' = 0,60 \\ i = 0,02 \end{matrix} \right\} \text{ Para taludes de 1 de base por 2 de altura.}$$

1050. Muros con contrafuertes. — Llamaremos:

e = espesor del muro entre dos contrafuertes, medido horizontalmente en la base.

h = altura del muro.

c = espesor del contrafuerte.

b = longitud del contrafuerte en la base.

d = distancia entre los ejes ó planos medios de dos contrafuertes contiguos.

ζ = ángulo que forma con el horizonte el plano superior del terraplén.

$\hat{\sigma}$ = ángulo que forma con la vertical el paramento interior del muro.

V = volumen total de mampostería por metro de longitud de muro (comprendiendo muro y contrafuertes).

1051. Contrafuertes exteriores. — Muro de paramentos verticales (figura 4.^a, lám. 50):

e = $A \times h$ (espesor $O' H$).

c = $0,5 (1 + 0,1 h)$ (espesor $n u$).

d = $5 c$ (distancia $C C'$).

b = $B \times h$ (longitud $A u$).

V = $C \times h^2$.

Los coeficientes A , B y C , han sido calculados por M. Leigue en la hipótesis de $f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$ y $\frac{f'}{f} = 1,25$ (núm. 1057), y están contenidos en la tabla adjunta. Para la determinación del coeficiente A se ha supuesto que se concede al muro, entre cada dos contrafuertes, un coeficiente de estabilidad $m = 1$; pero si se creyese conveniente aumentar este valor, se haría uso de los valores de A que tiene la tabla del núm. 1037. B y C están calculados para $m = 2$ y $m = 3$.

Las longitudes están expresadas en metros, los volúmenes en metros cúbicos y los pesos en kilogramos.

Tg ϕ	A		B		C	
	Para $m = 1$	Para $m = 2$	Para $m = 2$	Para $m = 3$	Para $m = 2$	Para $m = 3$
0	0,184	0,108	0,216	0,195	0,206	
$\frac{1}{2}$	0,224	0,135	0,270	0,237	0,251	
$\frac{2}{3}$	0,258	0,157	0,314	0,274	0,289	

Ejemplo de aplicación de las fórmulas anteriores.

Muro de $h = 10$ metros de altura, sosteniendo un macizo de tierras inclinadas por la parte superior á $\frac{1}{2}$. Se quiere que el coeficiente de estabilidad del conjunto (muros y contrafuertes) sea $m = 3$.

Valor de los coeficientes:

$$A = 0,224.$$

$$B = 0,270.$$

$$C = 0,251.$$

Contrafuertes:

$$\text{Espesor} = e = 0,5 (1 + 0,1 h) = 0,5 (1 + 0,1 \times 10) = 1 \text{ metro.}$$

$$\text{Distancia entre ejes} = d = 5 e = 5 \text{ metros.}$$

$$\text{Salida del contrafuerte en la base} = b = B h = 0,270 \times 10 = 2,70 \text{ metros.}$$

Muros:

$$\text{Espesor } e = A h = 0,224 \times 10 = 2,24 \text{ metros.}$$

Volumen de mamposterías (en total, de muros y contrafuertes) por metro lineal:

$$V' = C h^2 = 0,251 \times 10^2 = 25 \text{ m}^3.$$

Muros desplomados. — Si el muro está desplomado δ grados sobre el macizo de tierras (fig. 8.^a, lám. 50), disposición que no es tan empleada como la anterior por las dificultades de construcción á que da lugar, los coeficientes A , B y C tienen los valores siguientes:

Tg δ	Tg ϕ	A		B		C	
		Para $m = 1$	Para $m = 2$	Para $m = 3$	Para $m = 2$	Para $m = 3$	
$\frac{1}{5}$	0	0,093	0,162	0,351	0,109	0,128	
	$\frac{1}{2}$	0,124	0,183	0,397	0,142	0,164	
	$\frac{2}{3}$	0,154	0,202	0,441	0,174	0,198	

1052. Contrafuertes interiores. — *Muros en talud, de paramento interior vertical. Contrafuertes rectangulares.*

Fórmula de Vauban (fig. 12, lám. 50). — Talud exterior $\frac{1}{5}$ á $\frac{1}{6}$:

$$e = 0,18 h + 1,25.$$

$$d = 4,5 \text{ metros á } 6 \text{ metros.}$$

$$b = \text{un poco menor que } e.$$

$$b = 0,65 + 0,20 h.$$

$$c = \text{espesor menor del contrafuerte} = 0,66 (0,65 + 0,10 h).$$

$$c' = \text{espesor del contrafuerte junto al muro} = 0,65 + 0,10 h.$$

1053. Contrafuertes interiores en las obras militares. — En los muros de sostenimiento sometidos á la acción de los proyectiles de artillería, como sucede á las escarpas adosadas, se suelen emplear contrafuertes interiores. En este caso, ha sido costumbre calcular el espesor del muro como si él solo tuviese que soportar el empuje de las tierras, y el exceso de estabilidad y resistencia que proporcionan los contrafuertes sirve para resistir mejor el efecto destructor de los proyectiles y hacer más rígido é impracticable el talud de las tierras en la brecha que pueda formarse.

1054. Contrafuertes triangulares (fig. 13, lám. 49). — *Reglas de Brunel.* — Este notable ingeniero inglés, que construyó numerosos muros de

sostenimiento, empleaba para determinar sus dimensiones las reglas siguientes:

Paramento exterior plano, en talud de $\frac{1}{5}$ á $\frac{1}{6}$, ó curvo de radio $5 h$,

cuya cuerda AB tenga dicha inclinación ($\frac{1}{5}$ á $\frac{1}{6}$).

Espesor, normalmente al paramento, constante é igual á $\frac{1}{6} h$.

$$\text{Contrafuertes...} \begin{cases} d = 3 \text{ metros.} \\ c = 0,75 \text{ metros.} \end{cases}$$

1055. Contrafuertes interiores y relleno de tierra apisonada ó de piedra en seco. — Fórmulas de Leigue (fig. 13, lám. 50).

Para tierras de $f = \text{tg } \varphi = \frac{2}{3}$ y $\frac{t'}{t} = 1,25$ (núm. 1037):

$$\begin{aligned} e &= A \times h \\ c &= 0,5 (1 + 0,1 h) \\ d &= 5 c. \end{aligned}$$

El coeficiente A tiene los valores consignados en esta tabla:

Tg ϕ	A			
	Tg $\delta = \frac{1}{5}$		Tg $\delta = \frac{1}{3}$	
	m = 2	m = 3	m = 2	m = 3
0	0,110	0,176	0,017	0,080
$\frac{1}{2}$	0,168	0,252	0,069	0,151
$\frac{2}{3}$	0,218	0,318	0,116	0,213

También puede obtenerse A , aproximadamente, por la fórmula

$$A = \left(1,305 + 0,08 m + \frac{\text{tg}^2 \phi}{6,5 - m} \right) \left(1 - \frac{\text{tg } \delta}{2} \right) - 1,20.$$

Á veces se añade del lado de las tierras un espesor L , de 0,50 metros, de tierra apisonada.

1056. Muros con bóvedas en descarga. — Si los contrafuertes $BD, B'H'$ (fig. 14, lám. 50) se unen por medio de uno ó más órdenes de bóvedas, se obtiene el revestimiento llamado de *arcos en descarga*, que ha sido empleado algunas veces en obras de fortificación.

Los espacios interiores que forman las bóvedas pueden estar ocupados por las tierras del macizo, ó libres de ellas. En el primer caso (fig. 14, lám. 50), si se asigna valores convenientes á las dimensiones ab y ac , puede obtenerse que el talud natural bc de las tierras termine en c , y entonces el muro de máscara A puede tener espesor tan pequeño como se quiera, puesto que no sufre empujes de las tierras en su paramento interior.

En lo relativo á la estabilidad del conjunto, al determinar el coeficiente m , cuando las tierras causan presión en el muro, habrá que sumar el peso de éste, el de las bóvedas y de las tierras que sobre ellas cargan, y este último sumando contribuye poderosa y económicamente á la estabilidad. La fig. 15 (lám. 50) representa un muro de esta especie construído en Chalons por Gauthey, cuyas dimensiones son:

$$\begin{aligned} \text{Contrafuertes...} & \begin{cases} \text{Distancia entre ejes} = 5,30 \text{ metros.} \\ \text{Longitud} = 1 \text{ metro.} \end{cases} \\ \text{Bóvedas...} & \begin{cases} 0,20 \text{ metros de espesor en la clave.} \\ \text{Altura} = 6 \text{ metros.} \end{cases} \\ \text{Muro...} & \begin{cases} \text{Espesor en la base} = 1,15. \\ \text{Idem en el coronamiento} = 0,65. \end{cases} \end{aligned}$$

Los espacios que forman las bóvedas pueden aprovecharse como galerías de escarpa ó de contraescarpa, ó para otros usos militares, y entonces se unen los contrafuertes, del lado de las tierras, por muros cilíndricos que hacen el papel de bóvedas que transmiten á aquéllos los empujes que reciben éstas.

Para galerías de 4 metros de altura en la clave, 3 á 4 metros de longitud y otros tantos de anchura (fig. 16, lám. 50), pueden aceptarse las dimensiones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Muro...} & \begin{cases} \text{En la parte } AB: \text{ espesor} = 0,6 \text{ metros á } 1,20 \text{ metros.} \\ \text{En la parte } BC = \text{el que le corresponda como muro de} \\ \text{sostenimiento del macizo de tierras } M. \end{cases} \\ \text{Contrafuertes...} & \begin{cases} \text{Espesor} = 1 \text{ metro á } 1,50 \text{ metros.} \\ \text{Distancia entre ejes} = 3 \text{ á } 4 \text{ metros.} \end{cases} \end{aligned}$$

Muros cilíndricos N : espesor = 0,40 metros á 0,50 metros.

Bóvedas S : espesor de la clave = 0,6 metros á 1 metro.

3. MUROS SOMETIDOS Á LA PRESIÓN DEL AGUA Ó DEL VIENTO

MUROS SOMETIDOS Á LA PRESIÓN DEL AGUA

1057. En este caso se encuentran las presas de los estanques, pantanos, depósitos de agua, etc. El problema de comprobación de la estabilidad y resistencia de un muro de esta clase, se resuelve siguiendo el método explicado en los núms. **1033** á **1036**, debiendo observar que el empuje producido por el agua, mucho mayor que el causado por las tierras, tiene por valor, según se demuestra en hidráulica,

$$E = \frac{1000 h'^2}{2} = 500 h'^2;$$

obra perpendicularmente al paramento interior y está aplicado al tercio de la altura h' , á partir de la base del muro (fig. 18, lám. 50).

E , que representa kilogramos, es el empuje en un metro de longitud de muro (dimensión perpendicular al plano de la figura); h' es la altura de agua expresada en metros.

En los muros de sostenimiento de tierras vimos la conveniencia de que el polígono de los centros de presión esté contenido en el tercio medio del espesor del muro, á fin de que toda la hilada trabaje por compresión, del modo más uniforme que posible sea, y que la mampostería no se encuentre sometida á esfuerzo de extensión alguno. Esta condición es todavía de más interesante cumplimiento en el caso presente, pues si por estar el centro de presión n en la hilada As (fig. 19, lám. 50), muy próximo á s se desarrollan extensiones en A y se originase una grieta, introduciéndose en ella el agua

produciría una presión R de abajo á arriba que podría acarrear la ruina del muro. El valor de R , llamando ω al área de la base de la grieta, es $R = 1000 \omega h''$ kilogramos, llamando h'' á la altura Ar .

Para evitar estos efectos, se procura dar al muro una forma tal que la línea de presiones cd se separe poco del eje, y así resulta el perfil dibujado en la fig. 20 (lám. 50).

Si para el trazado del polígono de los centros de presión se consideran secciones ideales oblicuas $A'B'$ (fig. 21, lám. 50), en lugar de las horizontales AB de las hiladas, M. Guillemin ha deducido que el paramento exterior ha de tener la forma MAS en vez de la MNS .

El paramento interior es generalmente en talud ó ligeramente cóncavo. No es posible adoptar los muros en desplome, como se hace para las tierras, porque ha de contarse con la posibilidad de que el depósito de agua se vacíe, y el muro ha de sostenerse por sí solo en este caso.

A fin de dejar toda probabilidad de formación de grietas en el muro, del lado de las aguas, las mamposterías se construirán cuidadosamente, no empleando aparejos de hiladas horizontales regulares en el centro del muro ni menos en el paramento interior, sino, por el contrario, aparejos de juntas irregulares y cruzadas, como en la mampostería ordinaria, y retundiéndose éstas juntas á gran profundidad, después de terminado el muro, con mortero de cemento en todo el paramento interior.

1058. Muros de los muelles. — Estos muros tienen su paramento exterior bañado por el agua (fig. 1.^a, lám. 51) que ejecuta en él las presiones hidrostáticas, cuyo valor conocemos ya (núm. **1057**), y están sometidos al empuje de las tierras en el paramento interior; de modo que estas presiones, de opuesta dirección, se contrarrestan en parte.

En los ríos y en los puertos de marea, el nivel del agua es variable y puede quedar sin bañar el paramento exterior en parte ó totalmente; y este mismo efecto puede producirse, aun en los muelles de los puertos no sujetos á mareas, á causa de las oscilaciones de la masa líquida, por lo menos en una cierta parte de la altura. En ambos casos, es prudente calcular el espesor del muro partiendo de las siguientes hipótesis:

1.^a Que el muro sufre únicamente el empuje de las tierras, sin que esta fuerza se halle equilibrada parcial ni totalmente por la presión que el líquido ejerce en el paramento exterior.

2.^a Que las tierras del terraplén están mojadas por el agua por efecto de las filtraciones de fondo, y desprovistas de toda cohesión, de modo que el muro está en el caso de las presas ó muros de depósito (núm. **1057**),

con la diferencia de ser la densidad del líquido igual á la de las tierras.

Según esto, el empuje máximo E_0 tendrá por valor $E_0 = \frac{h^2 t}{2}$, siendo t el peso del metro cúbico de tierra. Su dirección es perpendicular al paramento interior del muro, y el punto de aplicación está al tercio de la altura á partir de la base.

Con estos datos se hará la comprobación de la estabilidad y resistencia del muro por el método explicado en los núms. 1033 y 1057, partiendo de un cierto perfil que puede dibujarse utilizando la fórmula empírica $e = 0,454 h$ para determinar el espesor en la base, dando á los dos paramentos un ligero talud.

Las mamposterías, cuando están bañadas por el agua en todas sus caras, pierden una parte de su peso igual á la del volumen de agua que desalojan, de modo que su estabilidad es menor, ó en otros términos, hay que contar con la supresión, ó presión de abajo á arriba, que el líquido ejerce en la base del cimientto del muro.

Sea MN esta base (fig. 17, lám. 50); consideremos una longitud, contada normalmente al plano de la figura, igual á la unidad lineal, y llamemos:

F = presión en MN , producida por el peso del muro y empuje de las tierras ó del agua.

P = componente de F perpendicular á MN .

Q = supresión del líquido: estará aplicada en h punto medio de MN .

R = reacción de las tierras en MN , resultante de P y Q , ó, su igual y contraria, presión efectiva en MN .

e = espesor MN .

z = distancia Mr .

d = distancia Ma .

h'' = distancia vertical de MN al nivel del agua.

Tendremos:

$$Q = 1000 h e \quad R = P - Q,$$

y z será dada por la ecuación de momentos

$$P z = P d - \frac{1}{2} Q e,$$

de lo que se deduce

$$z = \frac{2 P d - Q e}{2 (P - Q)}.$$

La distancia br al centro de gravedad de MN es $br = \frac{1}{2} e - z$. La fórmula (8) del núm. 995 determinará la presión máxima p por unidad superficial en M (*). Si $Mr = z$ fuese menor que $\frac{1}{3} e$, será $p = \frac{2R}{3z}$ (núm. 996).

1059. Dársenas de flotación, cuencos de exclusiva y muros de depósito de distribución.—Como la altura de agua es variable, y aun puede ser cero, están estos muros en el caso de los de presas ó depósitos (núm. 1057).

1060. Muros sometidos á la presión del agua en movimiento y á la acción de las olas.—La presión ejercida por el agua en movimiento sobre un plano normal á su dirección es, en kilogramos por metro cuadrado,

$$p = 60 V^2;$$

V representa la velocidad del agua en metros por segundo. Para $V = 1$ metro, $p = 60$ kilogramos.

El empuje total E , correspondiente á la altura $ab = h'$ (fig. 25, lám. 50), será por metro de longitud de muro (dimensión perpendicular al plano del dibujo):

$$E = 60 V^2 h' \text{ kilogramos.}$$

Este empuje, compuesto con el peso P del muro, dará la resultante AL , y se comprobarán las condiciones de estabilidad y resistencia del modo explicado en los núms. 1033 á 1036.

La presión producida por las olas es mucho mayor que la causada por las corrientes. Según M. Leferme (**), el valor de la presión p por metro cuadrado, en las tempestades más violentas, está comprendido entre 3000 y 4000 kilogramos, lo cual representa una velocidad V de 9 metros por 1". En circunstancias muy excepcionales, p llega, y aun excede, á 30000 kilogramos, lo que supone $V = 25$ metros por 1" próximamente.

En todos estos casos el problema de estabilidad y resistencia se resolverá del modo que hemos indicado anteriormente.

1061. Semejanza de muros sometidos al empuje de tierras ó del agua.—Sean $ABCD$, $A'bc'd'$ (fig. 16, lám. 51) dos muros cuyas secciones son homoté-

(*) Habría que hacer $P = R$, $a = 1$, $b = e$, $z = br = \frac{1}{2} e - z$.

(**) *Annales des Ponts et Chaussées.*

ticas, y A el centro de semejanza. Los dos muros están dibujados, separados, en la fig. 17 (lám. 51). Llamemos:

	Muro $ABCD$.	Muro $abcd$.
Altura.....	$AD = H$	$ad = h$
Espesor de la base.....	$CD = E$	$cd = e$
Distancia del centro de presión en la base (N, n) al centro de gravedad de ésta.....	X	x
Superficie de la sección.....	S	s
Peso de un metro de longitud de muro.....	P'	p'
Empuje máximo.....	E_0	e_0
Momento del empuje máximo con respecto á la arista exterior inferior.....	M'	m'
Momento del peso con respecto á esta misma arista.....	M''	m''
Presión máxima por unidad superficial en los pun- tos C, c	P	p

Las longitudes de todas las líneas de las dos secciones están en la misma relación que las alturas H y h , ó sea en la relación de semejanza $\frac{H}{h} = n$.

Supondremos que la inclinación (θ°) del plano superior del terraplén, la naturaleza de las tierras y de la mampostería del muro, esto es, los valores de φ, t y t' (núm. 1006) son iguales para los dos muros.

Los brazos de palanca DK, dk de los empujes guardan la misma relación n de las alturas H y h , y los empujes E_0 y e_0 son entre sí como los cuadrados de estas alturas (núms. 1008, 1022, 1023 y 1057), es decir, que

$$\frac{E_0}{e_0} = \frac{H^2}{h^2} = n^2.$$

Dedúcese de aquí que los momentos M' y m' están en la relación

$$\frac{M'}{m'} = \frac{H^3}{h^3} = n^3.$$

También se tiene

$$\frac{P'}{p'} = \frac{S}{s} = \frac{H^2}{h^2} = n^2;$$

de modo que al obtener las resultantes OF, of , de los empujes y los pe-

sos, se encuentra que los triángulos OZF y ozf son semejantes, porque

$$\frac{OZ = P'}{oz = p'} = \frac{ZF = E_0}{zf = e_0}.$$

Las rectas OF, of , son, pues, paralelas; y como están trazadas por los puntos homólogos O, o , lo serán también los centros de presión N, n , y será

$$\frac{CN}{CD = E} = \frac{cn}{cd = e} = \frac{H}{h} = n, \quad \frac{X}{x} = \frac{N}{n} = n, \quad \frac{Ct}{ct} = \frac{H}{h} = n.$$

En vista de la relación que guardan los pesos P' y p' y la de su brazo de palanca Ct, ct , resulta para los momentos

$$\frac{M''}{m''} = \frac{H^3}{h^3} = n^3,$$

es decir, la misma relación que hemos hallado para los momentos M' y m' de los empujes. Tendremos, por lo tanto,

$$\frac{M'}{m'} = \frac{M''}{m''} \quad \text{ó} \quad \frac{M''}{M'} = \frac{m''}{m'},$$

lo cual equivale á decir que el coeficiente de estabilidad es el mismo. Luego para iguales valores de θ, φ, t y t' , si las secciones trasversales de los muros son figuras semejantes, los muros poseerán el mismo coeficiente de estabilidad m .

Cuanto á la resistencia, recordaremos que la presión máxima por unidad superficial en la arista exterior (C, c) es (núm. 995):

$$\text{En } C \text{ (muro } ABCD) \dots\dots\dots P = \frac{P'}{E} \left(1 + \frac{6X}{E} \right),$$

$$\text{En } c \text{ (muro } abcd) \dots\dots\dots p = \frac{p'}{e} \left(1 + \frac{6x}{e} \right);$$

y como

$$\frac{X}{E} = \frac{x}{e} = \frac{H}{h},$$

será

$$P : p :: \frac{P'}{E} : \frac{p'}{e}$$

ó

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h} = n.$$

Deducimos de aquí que para iguales valores de ϕ , φ , t y t' , si las secciones transversales de los muros son figuras semejantes, las presiones máximas por unidad superficial, en las bases, son proporcionales á las alturas de dichos muros.

MUROS SOMETIDOS Á LA PRESIÓN DEL VIENTO

1062. Muros aislados. — Ya dijimos en el núm. 903 que la presión que por metro cuadrado de superficie produce el viento, sobre un plano normal á su dirección, es, en kilogramos, $r = 0,113 V^2$, siendo V la velocidad del viento en metros por segundo; y admitimos que su línea de acción forma un ángulo de 10° con el horizonte. Para ponernos en las condiciones más desfavorables, supondremos aquí que la dirección del viento es horizontal; y llamando E á la resultante de las presiones r (fig. 2.^a, lám. 51) en toda la altura h de muro, para un metro de longitud de éste, resultante que estará aplicada en el punto medio S de dicha altura, y siendo e el espesor OC y t' el peso del metro cúbico de mampostería, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Empuje} \dots\dots\dots E &= h \times r. \\ \text{Peso del m.l. de muro} \dots\dots\dots P &= e \times h \times t'. \end{aligned}$$

Tomando los momentos de E y P con respecto á O , y llamando m al coeficiente de estabilidad, será

$$P \times \frac{1}{2} e = m \times \frac{Eh}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{he^2 t'}{2} = m \frac{h^2 r}{2},$$

de donde

$$e = \sqrt{\frac{mhr}{t'}} \quad \text{ó} \quad m = \frac{e^2 t'}{hr};$$

la primera fórmula da el espesor e del muro en función de la presión del viento r y del coeficiente m de estabilidad, y la segunda hace conocer el coeficiente de estabilidad de un muro de espesor e para una cierta presión r del viento por metro cuadrado.

Para comprobar la resistencia del muro se elegirá la hilada OC de la base, que es la que está en peores circunstancias; y una vez determinada la resultante Gd de las fuerzas E y P y su punto de aplicación a' , a , se aplicará la

fórmula (8) del núm. 996, que dará la presión p por unidad superficial en O . Esta fórmula es para este caso, teniendo en cuenta que la componente vertical de Gd tiene por valor el peso P del muro por metro de longitud, y que $x = Ba'$,

$$p = \frac{P}{e} \left(1 + \frac{6 \times Ba'}{e} \right).$$

Para el punto C de la base, sería

$$p' = \frac{P}{e} \left(1 - \frac{6 \times Ba'}{e} \right)$$

y puede resultar p' negativo, en cuyo caso la mampostería sufrirá extensiones en C , que serán admisibles siempre que p' sea menor que el coeficiente R de trabajo por extensión correspondiente.

1062'. Puede generalizarse más el procedimiento, con el objeto de poder determinar las presiones máximas y mínimas, p y p' , por unidad superficial, en una hilada ó sección horizontal cualquiera, del muro, torre, pilar, etc., sometido á la acción del viento y á la de un peso que actúa en el eje, ya sea solamente el peso propio de las mamposterías, ya exista, además, una sobrecarga.

Sea AB (fig. 3.^a, lám. 55) la sección considerada, P la carga y E el empuje del viento sobre la cara SB . Podremos siempre suponer, sin error sensible, que $Ba = d = \frac{1}{2} BS$. Llamemos M al momento de flexión que produce en la sección AB el empuje E ; M es igual en este caso á $E \times d$.

De acuerdo con lo expuesto en el núm. 993, en un punto de la sección AB , que diste v de su centro de gravedad, se desarrollará una presión por unidad superficial $\frac{P}{\omega}$ por efecto de la carga P , y una presión, ó extensión, $\pm \frac{Mv}{I}$ por efecto del empuje del viento.

En suma, llamando, en general, R á la acción por unidad superficial, será

$$R = \frac{P}{\omega} \pm \frac{Mv}{I},$$

siendo I el momento de inercia de la sección AB con respecto al eje proyectado en c .

Haciendo $r = Ac$, se obtendrá la presión p por unidad de superficie en A , y tendremos:

$$p = \frac{P}{\omega} + \frac{M \times Ac}{I}$$

Por el punto B , será:

$$p' = \frac{P}{\omega} - \frac{M \times Bc}{I}$$

Si se quiere que la mampostería no sufra extensiones, será preciso que $\frac{P}{\omega}$ sea mayor que $\frac{M \times Bc}{I}$.

Considerando la construcción en conjunto, y suponiéndola dividida en varias partes por los planos AB , CD , TF (fig. 4.^a, lám. 55), y determinando las fuerzas 1, 2, 3, 4, 5, correspondientes al empuje del viento en las partes NB , BD , DF , etc., podremos formar el polígono de fuerzas, y el funicular $abcde$. Las ordenadas de este polígono, con respecto á la recta HL , multiplicadas por la distancia polar On , darán los valores del momento de flexión M en las diversas secciones AB , CD , etc., y sustituidos en las fórmulas precedentes se obtendrán los valores de p y p' .

Por el punto L pasa la resultante E del empuje total del viento.

1063. Torres. — La comprobación de su estabilidad y resistencia se hará del mismo modo que para los muros. Para la torre de sección cuadrada, de lado c (fig. 3.^a, lám. 51), será

$$m = \frac{P \times \frac{1}{2} c}{E \times \frac{1}{2} h} = \frac{Pc}{Eh} \quad \text{y} \quad p = \frac{P}{c} \left(1 \pm \frac{6 \times Ba'}{c} \right),$$

siendo P el peso total de la torre, y E la presión total causada por el viento en una cara, ó sea $E = h \times c \times r$.

Para la torre de sección circular, de diámetro D , se emplearían las mismas fórmulas, sustituyendo c por D y teniendo presente que la presión del viento en una superficie cilíndrica es 0,6 de la que corresponde al plano diametral, esto es, $E = 0,6 \times h \times D$. Sería, pues,

$$m = \frac{PD}{Eh} \quad \text{y} \quad p = \frac{P}{D} \left(1 \pm \frac{6 \times Ba'}{D} \right).$$

Si comparamos una torre de sección cuadrada con otra de sección circular, siendo el lado c de la primera igual al diámetro D de la segunda, resulta

que, á iguales valores de P y de h , para esta última es mayor el valor de m y menor el de Ba' , y, por tanto, el de p ; ó, lo que es lo mismo, la estabilidad y resistencia de la torre cilíndrica son mayores que las de la torre prismática de sección cuadrada.

Los espesores de las torres no son constantes, sino que disminuyen con la altura, y es necesario hacer la comprobación de estabilidad y resistencia para las alturas DN , DF , en los planos MN , HF , en que se verifica el cambio de espesor. En el plano MN , por ejemplo, P' es el peso de la parte de torre MD , y E' el empuje correspondiente á la altura DN , aplicado al punto medio.

Es aplicable el procedimiento explicado en el núm. 1062'.

1064. Chimeneas. — Dibujada la sección vertical de la chimenea, se comprobarán las condiciones de su estabilidad y resistencia, determinando los valores de m y p por medio de las fórmulas del número anterior, y atendiendo al doble signo del paréntesis en el valor de p , porque á causa de la magnitud considerable de h , se producirán muchas veces extensiones en la mampostería.

Llamaremos (fig. 4.^a, lám. 51):

- D diámetro ó lado exteriores en la base, por encima del zócalo (dimensión sc).
- d diámetro ó lado exteriores en el coronamiento (dimensión au), descontando la salida de la cornisa.
- D' dimensión tl en la base.
- d' dimensión bx en el coronamiento.
- e espesor st por encima del zócalo $= \frac{1}{2} (D - D')$.
- e' espesor ab en la parte superior $= \frac{1}{2} (d - d')$.
- h altura total.
- h' altura del zócalo.

La sección horizontal de la chimenea puede ser cuadrada, poligonal ó circular, siendo estas dos últimas formas las más ventajosas en cuanto á la estabilidad y resistencia, según hemos visto en el número anterior.

La altura h de la chimenea y el diámetro ó lado d' del orificio de salida de los gases, se determinan por la condición de obtener un tiro suficiente para que la combustión en los hogares sea activa y regular.

Las proporciones siguientes, muy empleadas, están relacionadas con la

fuerza, en caballos, del generador de vapor á cuyo hogar pertenece la chimenea:

ALTURA		SECCIONES		FUERZA de la caldera. — Caballos de vapor.
TOTAL h metros.	DEL ZÓCALO h' metros.	CIRCULAR diámetro d' metros.	CUADRADA lado d'' metros.	
16	3,60	0,35	0,30	6
18	3,80	0,40	0,35	8
20	3,90	0,42	0,38	10
22	4,00	0,44	0,40	12
24	4,20	0,48	0,43	15
25	4,30	0,54	0,48	20
25	4,30	0,60	0,53	25
28	4,60	0,66	0,58	30
30	4,80	0,70	0,62	35
30	4,80	0,75	0,67	40

El diámetro ó lado interiores, en la parte inferior, $tl = D'$, se determina por la fórmula empírica

$$D' = d' + 0,017 h.$$

Los espesores e y e' se subordinan á las dimensiones del ladrillo, que es el material que generalmente se emplea. Suponiendo ladrillos de la marca ordinaria (0,28 metros \times 0,14 metros \times 0,05 metros), se suele dar á la chimenea en la base del fuste, ó sea en la primera hilada por encima del zócalo, el espesor siguiente:

Altura total h .	Espesor e en la base del fuste.
$h < 16$ metros.....	asta y media (0,42 metros).
16 á 30.....	dos astas (0,56 metros).
30 á 50.....	dos astas y media (0,70 metros).
De 50 en adelante....	tres astas (0,84 metros).

En la parte superior del fuste, el espesor e' es de medio ladrillo para h menor que 30 metros, y de un ladrillo cuando $h > 30$ metros. Los diámetros exteriores son:

$$D = D' + 2e$$

$$d = d' + 2e'.$$

Para el trazado del perfil de la chimenea se dibujarán el eje AN (fig. 4.^a, lám. 51), diámetros $bx = d'$, $au = d$ en el coronamiento, $tl = D'$, $sc = D$ en la parte inferior y las líneas as , bt , etc. Después se dividirá la altura AN en un cierto número de partes, AB , BC , etc., de dimensiones tales que siendo bm , nz paralelas á as , los retallos mn sean de espesor de medio ladrillo, es decir, que los espesores del fuste de la chimenea no varían gradualmente, sino por retallos de medio ladrillo.

Deberán comprobarse las condiciones de estabilidad y resistencia en todos los planos Br , Cz , etc., según hemos dicho para las torres (núms. 1062' y 1063).

En las chimeneas, á causa de su gran altura, son de temer los asientos del cimientto, y por esto, aun en los terrenos duros y coherentes, no deberá excederse de una presión de 2 kilogramos por cm^2 . La base QQ' será, pues, de área ω tal, que el peso total P' de la chimenea y de sus cimientos produzca en QQ' una presión $\frac{P'}{\omega} = 2$ kilogramos por cm^2 , ó sea 20000 kilogramos por metro cuadrado.

4. MUROS SOMETIDOS Á PRESIONES

EN SU PARTE SUPERIOR. MUROS DE EDIFICIO

MUROS SOMETIDOS Á PRESIONES EN SU PARTE SUPERIOR

1065. Sea F , de magnitud AO (fig. 22, lám. 50), la fuerza aplicada en a en la superficie superior del muro. F puede provenir de empujes producidos por una bóveda, una armadura, tornapunta ó pieza inclinada, etc.

Los empujes causados por una bóveda se ejercen en toda la longitud del estribo, y por esto, en tal caso, consideraremos una longitud de muro de un metro, y F' representará el empuje de la bóveda por metro lineal de estribo.

Cuando el empuje se debe á piezas aisladas A, B , etc. (fig. 24, lám. 50), cuyos pies están unidos por una solera $C C''$, suficientemente rígida para que las presiones se repartan en toda la longitud $C C''$ se dividirá cada uno de los intervalos $ab, bc.$, etc., en partes tales que

$$\frac{Ma}{Mb} = \frac{F'}{F''} \quad " \quad \frac{Sb}{Sc} = \frac{F''}{F''}$$

y se supondrá que el empuje F' es contrarrestado por la parte de muro $LMSN$. Generalmente $F' = F'' = F''$; de modo que $Ma = Mb, Sb = Sc$.

Una vez conocida la longitud de muro que corresponde á la fuerza F , dividiremos el macizo de mampostería en un cierto número de hiladas por planos horizontales ideales, en tres, por ejemplo (fig. 22, lám. 50), y llevaremos los pesos correspondientes $AB = 1, BC = 2, CD = 3$, con arreglo á la escala elegida, sobre la recta AD trazada por el extremo A de $AO = F$; después se unirán los puntos B, C y D con el O . Los pesos **1, 2** y **3** tienen por línea de acción nR que pasa por el centro del rectángulo MN .

La resultante de las fuerzas F y **1** es OB , en magnitud y dirección; luego si por n , punto de intersección de F y de **1**, trazamos nb paralela á OB , será b el centro de presión en la hilada HL . La resultante de nb y de **2** dará la presión en ST , y como **2** pasa por n , trazando nc paralela á OC tendremos que la presión en el plano ST es de magnitud y dirección OC y está aplicada en c . Del mismo modo hallaríamos, trazando nd paralela á OD , que la presión en XN es OD y su punto de aplicación es d .

El polígono de los centros de presión es $abcd$.

Fácil es comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia del muro. Cuanto á las primeras, el coeficiente de estabilidad m se obtiene por el cociente

$$m = \frac{P \times RX}{F \times Xr}$$

siendo P el peso total de la parte de muro considerada, ó $P = 1 + 2 + 3$. Por lo que se refiere á la resistencia en una hilada cualquiera, en la XN , por ejemplo, descompondremos perpendicular y paralelamente á este plano la presión nd , que tiene la magnitud OD , y se comprobará que la presión máxima p por unidad superficial no excede del coeficiente de trabajo R' , obteniendo al efecto p por la fórmula (8) del núm. **995**, que escribiremos así

$$p = \frac{V}{\omega} \left(1 + \frac{6}{XN} \times Rd \right),$$

siendo ω el área de la base XN , llamando V á la componente vertical de OD y tomando todas las dimensiones en metros.

Cuando sea de temer el resbalamiento de una hilada sobre la inmediata inferior, deberá verificarse también que los ángulos bnR, enR, dnR , sean menores que φ , ángulo de rozamiento de piedra sobre piedra, ó de piedra sobre mortero fresco (núm. **1033**).

1066. En la fig. 23 (lám. 50) aparece el trazado de la curva de centros de presión, en el caso de muros de perfil trapecial. La construcción es la misma, con la sola diferencia de que las líneas de acción de los pesos **1, 2** y **3** de las hiladas, que pasan por los centros de gravedad de los trapecios respectivos AB, BD, DE , no coinciden.

MUROS DE EDIFICIOS

1067. Fórmulas de Rondelet.—Las siguientes fórmulas empíricas han sido dadas por M. Rondelet:

1. *Muros aislados* (fig. 5.^a, lám. 51).—El espesor e , en función de la altura h , es

$$e = \frac{h}{n} \quad (1),$$

siendo n un coeficiente que se hace igual á 12, 10 ú 8, según que se quiera obtener poca, mediana ó mucha estabilidad.

Los muros aislados no están apoyados por sus extremos á ninguna otra construcción, ni sufren más peso que el de las mamposterías que lo forman.

Si fuese de temer la acción del viento, se comprobará si el espesor dado por la fórmula (1) proporciona estabilidad y resistencia convenientes (número 1062).

La fórmula es aplicable á los pilares aislados.

2. *Muros apoyados en sus extremos.*—En este caso se encuentra el muro AB , representando en planta en la fig. 6.^a (lám. 51), que se apoya por sus extremos en los macizos M y N , y también los AB , BC , etc. (fig. 7.^a, lám. 51), pertenecientes al recinto no cubierto $DABC$. La fórmula que da el espesor e uniforme del muro en función de su altura h y de su longitud l , es

$$e = \frac{h}{n} \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \quad (2),$$

asignando á n los valores 12, 10, 8, según el grado de estabilidad que se desee obtener (*).

Cuando el muro se compone de pilares ó cadenas verticales A , B y muros intermedios C (fig. 8.^a, lám. 51), se calcularán éstos por la fórmula (2) y aquéllos por la (1). Esta disposición es económica y se aplica también cuando el muro ha de soportar cargas extraordinarias en algunos puntos, en cuyo

(*) Se puede obtener gráficamente e (fig. 7.^a, lám. 51) haciendo $ma = h$, $nr = l$, $ab = \frac{h}{n}$ y trazando cb paralela á nr . Resulta $e = cb$.

caso los pilares reciben inmediatamente la acción de dichas cargas, y habrá de comprobarse que la compresión por unidad superficial en su base no excede del coeficiente de trabajo R' de las mamposterías. Los muros intermedios, que no reciban carga, se calculan por la fórmula (2), según ya hemos dicho.

Si los muros son de planta curva, la aplicación de la fórmula (2) daría $e = 0$, por ser $l = 0$, pues que la línea curva puede considerarse como un polígono de lados infinitamente pequeños. En este caso, llamando r al radio de la curva, se admite que el espesor ha de ser igual al de un muro rectilíneo, apoyado en sus extremos, de longitud $l = \frac{1}{2} r$ de modo que

$$e = \frac{h}{n} \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4h^2}} \quad (3),$$

3. *Crujías cubiertas, sin pisos* (fig. 9.^a, lám. 51).—Se emplea la fórmula (2), representando h la altura total del muro y l la luz ó anchura de la crujía.

Deberá comprobarse, en todos casos, que la presión por unidad superficial, en la base del muro, no excede de R' , teniendo en cuenta el peso de la cubierta y el de las mamposterías.

4. *Crujías cubiertas, con suelos.*— Cuando la crujía es sencilla (fig. 10.^a, lám. 51), es decir, que está formada por dos muros de fachada BA , CD , el espesor e de estos muros en la base es

$$e = \frac{2l + h}{48} \quad (4),$$

siendo l la luz ó anchura de la crujía y h la altura total del muro, igual, por lo tanto, á la suma de las alturas parciales de los diversos pisos. Los muros AB y CD son de carga, esto es, que sobre ellos descansan los suelos y la cubierta.

La misma fórmula (4) puede servir para determinar el espesor del muro en los pisos 1.º, 2.º, etc., sustituyendo h por la altura que sobre estos pisos tiene la cornisa de coronación.

Si la crujía es doble (fig. 11, lám. 51) y está formada por los dos muros

de fachada AB , FH y el de traviesa ó carga CD , la fórmula que da el espesor e en la base para aquellos es

$$e = \frac{l + h}{48} \quad (5),$$

siendo l la luz BH total, suma de las dos parciales BD , DH , y h la altura total, desde la base hasta la cornisa de coronación. Esta fórmula es aplicable cualquiera que sea la relación $BD : DH$.

En los diversos pisos, el espesor se determinará por la misma fórmula (5), representando h la altura del muro por encima de estos pisos.

A los espesores dados por las fórmulas (4) y (5) se añadirá 0,06 metros si se quiere mayor solidez.

Si siendo muros de fachada cargados con suelos, los BD y AC , hubiese tres ó más crujías formadas por los muros de traviesa ac , bd , etc., se calculará el espesor del BD por la fórmula (4), haciendo $l = Bb$, y el del muro AC por la misma fórmula, siendo $l = Aa$.

5. *Muros de traviesa.* — Los muros de traviesa (CD , fig. 11, lám. 51) se encuentran mejor sostenidos que los de fachada, puesto que están asegurados por las viguetas de piso de las dos crujías inmediatas, mientras que éstos solamente están sostenidos por un lado. En cambio, la carga que soportan por efecto de los suelos es mayor, pero este sumando es pequeño comparado con el de las mamposterías.

El espesor e en la base es

$$e = \frac{l + h'}{36} + n \times 0,014 \text{ metros,}$$

siendo l la longitud AF del espacio dividido por el muro de traviesa CD , h' la altura del piso que sea más alto, ya sea el primero ó el último, y n el número de pisos.

Si los muros de traviesa estuviesen en la posición ac , bd , ef , el valor de l que habrá que sustituir en la fórmula anterior, es:

$l = Ab$ para el muro ac .
 $l = Ba$ para el muro bd .
 $l = CD$ para el muro ef .

Suponiendo alturas de piso de 4 metros, de la fórmula (4) se deducen los espesores siguientes para los muros de fachada, siendo la luz de la crujía de 6 metros, 8 metros, 10 metros ó 12 metros:

VALOR h metros.	NÚMERO del piso.	ESPESOR DEL MURO, EN METROS, PARA ANCHURAS DE CRUJÍA DE			
		6 metros.	8 metros.	10 metros.	12 metros.
4	4.º	0,33	0,41	0,50	0,58
8	3.º	0,41	0,50	0,58	0,66
12	2.º	0,50	0,58	0,66	0,75
16	1.º	0,58	0,66	0,75	0,83
20	Bajo.	0,66	0,75	0,83	0,91

1068. Fórmulas de Redtenbacher. — Sean (fig. 12, lám. 51):

l = luz de la crujía, que puede estar formada por un muro de fachada y otro de traviesa, ó por dos de fachada.

h_1 = altura del piso más elevado (1) inmediato á la cubierta.

h_2 = ídem del inmediato inferior (2).

h_3 = ídem del que sigue al anterior (3).

e_1 = espesor del muro de fachada en el piso más elevado (1).

e_2 = ídem del piso (2).

e_3 = ídem del piso (3).

⋮

Los espesores se obtienen por las fórmulas siguientes:

$$e_1 = \frac{l}{40} + \frac{h_1}{25}$$

$$e_2 = \frac{l}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25}$$

$$e_3 = \frac{l}{40} + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{25}$$

⋮

⋮

Suponiendo $h_1 = h_2 = h_3 = \dots = 4$ metros, se obtiene para luces de 6, 8, 10 y 12 metros, los espesores que contiene la siguiente tabla:

NÚMERO de pisos.	ESPEZOR e DE LOS MUROS EN LA PARTE INFERIOR SIENDO LA LUZ l DE LA CRUJÍA			
	6 metros.	8 metros.	10 metros.	11 metros.
1	0,31	0,36	0,41	0,46
2	0,47	0,52	0,57	0,62
3	0,63	0,68	0,73	0,78
4	0,79	0,84	0,89	0,94
5	0,95	1,00	1,05	1,10
6	1,11	1,16	1,21	1,26

En un edificio de 5 pisos, siendo la crujía de 8 metros, por ejemplo, los espesores del muro de fachada serían:

En el piso más elevado (4.º piso).....	0,36
En el inmediato inferior (3.º).....	0,52
En el inmediato íd. (2.º).....	0,68
En el íd. íd. (1.º).....	0,84
En el piso bajo.....	1,000

1069. Espesor de los muros de fachada en las casas de Madrid.—Según Valdés (*), los espesores prácticos empleados en la construcción de casas en Madrid, que á continuación se expresan, debieran disminuirse algo:

PISOS	ESPEORES usuales.	ESPEORES según Valdés.
	Metros.	Metros.
Sótano.....	1,12	1,00
Bajo.....	0,84	0,70
Entresuelo.....	0,80	0,66
Principal.....	0,77	0,62
Segundo.....	0,73	0,56
Tercero.....	0,70	0,50

(*) *Manual del Ingeniero y Arquitecto.*

La disminución de espesor en los diversos pisos se hace por retallos interiores. En el último piso, el espesor ha de ser de 0,75 del correspondiente al piso bajo en los edificios de 2 á 3 pisos, y de 0,66 de dicho espesor en los elevados.

1070. Observaciones á las fórmulas anteriores.— Las fórmulas de Redtenbacher dan en general espesores algo superiores á los obtenidos por las de Rondelet. Unas y otras no tienen en cuenta la naturaleza más ó menos resistente de las mamposterías que forman el muro, ni la diferencia de peso de los suelos, y son aplicables solamente á los edificios ordinarios, medianamente cargados.

En edificios cuyos suelos están expuestos á grandes cargas y fuertes vibraciones como cuarteles, teatros, almacenes, fábricas, etc., conviene reforzar los espesores que dan las fórmulas anteriores.

En todos casos hay que comprobar que la presión por unidad superficial, en la base del muro, es menor ó igual que el coeficiente R' de trabajo por compresión correspondiente á la mampostería empleada; y á este efecto se calculará la resultante P del peso propio del muro, de los suelos y cubierta, se determinará su punto de aplicación en la base y se deducirá la presión máxima p por unidad superficial, haciendo uso de la fórmula (8) del número 995.

Al calcular el peso de las mamposterías se prescinde de los vanos y se considera que el muro es perfectamente macizo. El peso de las armaduras y cubierta se toma igual al de un suelo.

El área de la base del muro que soporta las presiones, se determinará con exactitud, descontando al efecto los vanos del piso bajo, y contando únicamente como sección resistente, la de los entrepaños, pilares ó columnas.

Para determinar el centro de presión a de la resultante P (fig. 12, lámina 51), se empezará por fijar la posición de los pesos P'_1, P'_2, \dots de las diversas partes de muro correspondientes á cada piso, que pasarán por los centros de gravedad respectivos, y la de las cargas P_1, P_2, \dots , correspondientes á los suelos, las cuales se supondrán aplicadas en el punto medio de la longitud empotrada de las vigas de piso, ó en el centro del marco de soleras sobre que se apoyan éstas. La distancia $Oa = z$ se hallará analíticamente sumando los momentos de todas las fuerzas con relación á un punto cualquiera, al O por ejemplo, é igualando esta suma al momento de la resultante P , ó sea á $(P'_1 + P'_2 + \dots + P_1 + P_2 + \dots) \times Oa$. También se puede emplear el procedimiento gráfico explicado en el núm. 410.

Si interesante es, en toda clase de muros, que el centro de presión en la

base se aleje poco del centro de gravedad de ésta, puesto que así las presiones se reparten menos desigualmente y son de menor valor, lo es mucho más en los muros de los edificios, cuyo espesor es en general más pequeño; de modo que la irregularidad en la distribución de presiones, que depende de la excentricidad del punto de aplicación a de P , tiene consecuencias más desfavorables para la estabilidad y para la resistencia. Por una parte, el peligro de aplastamiento del material aumenta con la excentricidad de a , como sabemos, y además, á excepción del caso en que el terreno sobre que se fundamenta la obra sea incompresible, es de temer que los asientos desiguales del cimiento ocasionen desplomes en el muro.

Por estas razones, de las tres disposiciones empleadas para disminuir el espesor del muro con la altura, y que son:

- 1.^a, retallos en el paramento exterior, disimulados por los plintos ó impostas (fig. 14, lám. 51);
- 2.^a, muro exterior en talud (fig. 13, lám. 51);
- 3.^a, retallos en el paramento interior (fig. 12, lám. 51),

es preferible la 3.^a, porque a se aproxima al centro de OH , mientras que en las otras dos se aproxima al pie interior H , sin perjuicio de dar al paramento exterior un pequeñísimo talud para contar con desplomes imprevistos.

Es asimismo conveniente anclar sólidamente las viguetas de piso en el muro y darles dimensiones verticales que les aseguren rigidez suficiente, pues de lo contrario al flexarse (fig. 15, lám. 51), la presión oblicua A engendra una componente horizontal H que da empuje al exterior. Esta precaución es más necesaria en los edificios expuestos á trepidaciones fuertes, ya provengan del suelo exterior por efecto del paso de carruajes, ya sean causadas por pesos móviles en los suelos.

1071. Tabicones entramados.—En éstos, la resistencia á la compresión la proporcionan las piezas verticales del entramado ya sean de madera ó de hierro; el forjado ó relleno no produce otro resultado, en lo relativo á la resistencia, que el de evitar las flexiones laterales de los pies derechos embebidos en el macizo, en sentido longitudinal al muro pero no perpendicularmente al paramento. El cálculo de la resistencia se hará del modo explicado en el capítulo VII.

1072. Reglas prácticas para determinar los espesores de los muros.—Las dimensiones obtenidas por las fórmulas anteriores se modifican subordinándolas á la naturaleza y dimensiones de los materiales empleados. Por

ejemplo, si se hace uso del ladrillo, las variaciones de espesor, al pasar de un piso al inmediato, deben ser cuando menos del ancho del ladrillo, que es generalmente igual á la mitad de su longitud. Tomando, pues, como unidad la longitud de un ladrillo, los espesores deberán ser de $1, 1 \frac{1}{2}, 2, 2 \frac{1}{2}$, etc., ladrillos.

En los muros de fachada, el piso más elevado, ó el primero si no hay más que éste y el bajo, pueden recibir espesor de 1 ladrillo (0,28 metros), á excepción de las partes en que descansen las armaduras, que deben tener $1 \frac{1}{2}$ ladrillos. Generalmente se da este espesor en toda la longitud del muro, sobre todo si ha de soportar cornisa de piedra que tenga salida algo grande sobre el paramento exterior.

A medida que se descende, á partir del piso más elevado, se aumenta el espesor del muro en medio ladrillo. Sin embargo, en edificios ordinarios, cuando la luz l de la crujía no excede de 5 metros ni la altura de los pisos es mayor de 4 metros, la regla anterior daría espesores demasiado grandes para los muros de los pisos inferiores, y con objeto de evitarlo se conserva espesor uniforme en dos pisos consecutivos; por ejemplo, se hace de $1 \frac{1}{2}$ ladrillos el muro de los pisos 3.^o y 2.^o, y de dos ladrillos el de los pisos 1.^o y bajo.

Los muros de travesía no entramados, cuando no hay más que uno, como el CD de la fig. 11 (lám. 51), reciben el mismo espesor que los de fachada. Si hay dos, que dividen en tres crujías el espacio comprendido por los muros de fachada, se les puede asignar espesor uniforme de $1 \frac{1}{2}$ ladrillos en toda la altura, y si uno de dichos dos muros de travesía está á poca distancia del muro exterior, mientras que el otro se halla próximamente en el eje del espacio comprendido por los dos muros exteriores, se reduce el espesor del primero á 1 ladrillo.

El espesor de los muros de cajas de escalera depende de las dimensiones y naturaleza de ésta. En las escaleras rectas de dos tramos y mesilla intermedia por piso, se les da, en casa de 4 pisos, $1 \frac{1}{2}$ ladrillos en los 3.^o y 2.^o, y 2 ladrillos en los 1.^o y bajo.

Los muros de piñón, cuando están cargados con suelos y cubierta, deben tener el mismo espesor que los de fachada. Si no lo estuvieran, se les con-

cede $1 \frac{1}{2}$ ladrillos para los pisos 3.º y 2.º, y 2 ladrillos para los pisos 1.º y bajo.

Los tabicones de distribución, que se corresponden en todos los pisos, suelen tener $\frac{1}{2}$ ladrillo de espesor en los altos y 1 ladrillo en los bajos cuando las piezas son grandes, y $\frac{1}{2}$ ladrillo en todos los pisos si las habitaciones son pequeñas. Los tabiques panderetes se hacen sencillos ó dobles, según su dimensión.

En las torres de ladrillo se divide su altura en partes de 6 metros á 10 metros, se da $2 \frac{1}{2}$ á 3 ladrillos de espesor á la parte superior y se añade $\frac{1}{2}$ ladrillo para cada una de las partes, ó cada dos, según la altura de la torre.

Todas las dimensiones que acabamos de citar están reunidas en la tabla adjunta, en la cual se hace la distinción de piezas grandes y piezas pequeñas, sirviendo de punto de separación de unas y otras las dimensiones siguientes:

Altura.....	3,50 metros.
Ancho.....	6,00 »
Longitud.....	7,00 »

MUROS DE FACHADA	ESPESOR DEL MURO EN LONGITUDES DE LADRILLO				
	Tercer piso.	Segundo piso.	Primer p'iso.	Piso bajo.	Sótano.
4 pisos.. { piezas grandes.....	$1 \frac{1}{2}$	2	$2 \frac{1}{2}$	3	$3 \frac{1}{2}$
{ ídem pequeñas.....	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2	2	$2 \frac{1}{2}$
3 pisos.. { piezas grandes.....	»	$1 \frac{1}{2}$	2	$2 \frac{1}{2}$	3
{ ídem pequeñas.....	»	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2	$2 \frac{1}{2}$
2 pisos.. { piezas grandes.....	»	»	$1 \frac{1}{2}$	2	$2 \frac{1}{2}$
{ ídem pequeñas.....	»	»	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2
1 piso... { piezas grandes.....	»	»	»	$1 \frac{1}{2}$	2
{ ídem pequeñas.....	»	»	»	1 á $1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$
MUROS DE TRAVIESA					
1 piso.....	»	»	»	1	$1 \frac{1}{2}$
2 y 3 pisos.....	»	»	1	$1 \frac{1}{2}$	2
Si no hay más que un muro de traviesa se le da el mismo espesor que á los de fachada, excepto en la parte inferior, que puede tener medio ladrillo menos. Por ejemplo, para el caso de 4 pisos y grandes piezas.....	$1 \frac{1}{2}$	2	2	$2 \frac{1}{2}$	3
Si hay dos muros de traviesa, separados 3 metros á 4,50 metros....	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2
Cuando estos dos muros distan 1,50 metros á 2,50 metros entre sí, se da al primero.....	1	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2
Y al segundo.....	1	1	1	1	$1 \frac{1}{2}$
TABICONES					
Para piezas grandes.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$1 \frac{1}{2}$
Idem íd. pequeñas.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
MUROS DE PIÑÓN					
El mismo espesor que los de fachada si están cargados.					
Cuando no lo están:					
4 pisos.....	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2	2	$2 \frac{1}{2}$
3 íd.....	»	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2	$2 \frac{1}{2}$
2 íd.....	»	»	$1 \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2}$	2
1 íd.....	»	»	»	1 á $1 \frac{1}{2}$	2

Cuando los muros son de mampostería ordinaria, el espesor mínimo que es costumbre concederles es de 0,40 metros, dándoles un aumento de 0,12 metros por piso si la luz de la crujía es grande, ó por cada dos cuando sea pequeña.

Los muros de sillería pueden recibir un espesor mínimo de 0,20 metros. Para obtener resistencia igual, los espesores de las diversas clases de fábrica deben ser, representando por 1 el espesor de la sillería:

Sillería.....	1.
Ladrillos.....	1,40 á 1,60.
Mampostería concertada.....	1,60 á 2.
Mampostería ordinaria.....	2,50 á 3.

5. CIMIENTOS

1073. Presión que puede resistir el terreno en el fondo de la caja de cimientos. — Este dato es muy interesante y conviene obtenerlo por experiencia directa, siempre que sea posible.

El cimiento sufre en la cara FB (fig. 23, lám. 51) el empuje E del prisma FLB limitado por el plano BL , que forma el ángulo $FBL = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$ (núm. 1023). La base AB ocasiona un empuje E' en el plano vertical BD , comunicado por el prisma CBD , en el cual el ángulo CDB es igual á $45^\circ - \frac{1}{2} \varphi$ (núm. 1025), y por efecto de este empuje, el prisma $BDHL$ tiende á resbalar, de abajo á arriba, entre los planos BL y DH . El ángulo BDH es igual á $45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$ (núm. 1029).

La resistencia que opone el prisma $BLHD$ á los asientos de la base AB , depende de la densidad de las tierras y de la inclinación y magnitud de las líneas BL y DH , esto es, de t (peso del metro cúbico de tierras), φ (ángulo del talud natural) y $h' = FB$ (profundidad del cimiento).

Rankine dedujo, por consideraciones teóricas, que la mayor carga P por metro cuadrado que puede resistir un terreno en los puntos más fatigados, es

$$P = th' \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2},$$

y que el máximo de la relación $k = \frac{ar}{MN}$ (fig. 17, lám. 50) entre la distan-

cia del centro de presión al de gravedad de la base y el ancho de ésta; debe ser

$$k = \frac{\text{sen } \varphi}{3(1 + \text{sen}^2 \varphi)}$$

Estas fórmulas no toman en cuenta todas las circunstancias que pueden influir en los valores de P y k , y por esto sus resultados deben considerarse tan sólo como aproximados. En términos generales, se pueden admitir los siguientes valores de P :

NATURALEZA DE LOS TERRENOS	CARGAS QUE PUEDEN RECIBIR por cm. ² en kilogramos P
Tierras muy flojas.....	0,27
Idem flojas.....	0,50
Idem de resistencia media.....	1 á 1,50
Idem duras y coherentes.....	2 á 3
Grava ó arena á cubierto de corrientes subterráneas.....	4 á 5
Roca.....	Igual á la del muro en la base.

Para obtener las presiones máximas P contenidas en esta tabla, hay necesidad de dar á la base del cimiento ancho mayor que el del muro, á excepción de los terrenos de roca, y para conseguirlo se hacen retallos en los macizos por uno ó por más lados (figs. 4.^a, 12, 13 y 14, lám. 51). Debe procurarse que el punto de aplicación b de la resultante P pase por el punto medio de la base ó muy cerca de él, á fin de que las presiones se distribuyan uniformemente y no se produzcan asientos desiguales en el terreno, que son más de temer que los asientos uniformes. El punto b ha de estar contenido en el tercio central del ancho de la base.

1074. Cimentación sobre macizo de hormigón.—Si el terreno es compresible y no puede soportar mayor carga que p por metro cuadrado, será preciso proporcionar al muro un cimiento de base suficientemente ancha para conseguirlo, y se emplea con este objeto un macizo $CDHN$ de hormigón (fig. 22, lám. 51). Siendo P el peso del muro por metro de longitud, ha de ser $DH = \frac{P}{p}$; sólo falta conocer la altura $CD = b$, ó espesor del macizo

y su relación con el ancho l de la berma AC .

La parte $ABDC$, de sección rectangular X , está en el caso de pieza de

longitud l empotrada en AB y sometida á las fuerzas uniformemente repartidas p , las cuales producen en AB un momento máximo de flexión

$M_0 = \frac{1}{2} p l^2$ (núm. 367). Tendremos, pues, aplicando la fórmula (3) del núm. 501, y teniendo presente que $a = 1$:

$$\frac{R b^2}{8} = \frac{1}{2} p l^2$$

$$\frac{b^2}{l^2} = \frac{3p}{R}$$

R es aquí el coeficiente de trabajo por extensión de que el hormigón es susceptible. Haciéndolo igual á 10^4 kilogramos por metro cuadrado (1 kilogramo por cm.², se deducen de la ecuación anterior los valores siguientes de l y b para otros de p iguales á 0,5 kilogramos por centímetro cuadrado, ó á 1 kilogramo por cm.²:

b	VALORES DE l PARA	
	$p = 0,50$ kilogramos.	$p = 1$ kilogramos.
0,30 metros.	0,24 metros.	0,17
0,40 »	0,31 »	0,23
0,50 »	0,40 »	0,28
0,60 »	0,49 »	0,34

Esta disposición aparece en A (fig. 14, lám. 51); pero si la berma l , y, por lo tanto, el espesor b del macizo fueren demasiado grandes, se hará uso de dos ó más retallos (B , fig. 13, lám. 51; y S , fig. 4.^a, lám. 51) por los dos lados, ó por uno solo cuando hay sótanos ú otra construcción que obligue á conservar plano uno de los paramentos (C , fig. 12, lám. 51).

1075. Cimentación sobre macizo de arena.—No es de este lugar demostrar las ventajas del empleo de macizos de arena, cuando se quiere repartir las presiones en una gran base CD (fig. 21, lám. 51) en el caso de terrenos compresibles.

Llamemos:

P = carga total de la construcción por metro lineal de muro (contado perpendicularmente al plano de la figura).

$AB = e =$ espesor en la base.

$p =$ carga por metro cuadrado que puede resistir el terreno.

$h'' =$ profundidad NC que ha de tener la caja de cimientos.

Se trata de determinar h'' , y para esto admitiremos que las presiones se transmiten de una capa á otra, en la arena, por planos inclinados á 45° (planos AC, BD); de modo que

$$CL = MD = h'' \quad CD = e + 2h''.$$

La presión en CD , por metro de longitud de cimiento contado normalmente al plano del dibujo, tiene por valor $p(e + 2h'')$, y ha de ser igual á P ; luego

$$P = p(e + 2h'') \quad h'' = \frac{P - pe}{2p}.$$

1076. Pilotajes. Cargas que puede resistir un pilote. — Un pilote de longitud L y sección transversal resistente de área ω opone una cierta resistencia á introducirse en el terreno, producida por la dureza de éste que presenta obstáculos á la penetración de la punta del pilote y por el rozamiento de la superficie lateral con las paredes del orificio. Esta resistencia, que representaremos por R , es vencida por el choque de la maza.

El choque de la maza, al caer sobre la cabeza del pilote, produce en ésta una presión que crece á partir de cero muy rápidamente en un tiempo pequeñísimo. En los primeros momentos, la presión es menor que la resistencia R á la hincá, y el pilote, cuyo extremo inferior está inmóvil y el superior comprimido, sufre un acortamiento l . La compresión tiene un límite superior que es R , pues cuando llega á este valor el pilote se introduce en el terreno.

Dedúcese de aquí que el trabajo PH que la maza de peso P , cayendo de la altura H , ha almacenado al llegar á la cabeza del pilote, se emplea en comprimirle primero y en introducirlo en el terreno después.

El acortamiento l del pilote, por efecto de una compresión igual á R , es en el caso presente,

$$l = \frac{RL}{2E\omega} \quad (*),$$

y el trabajo debido á este acortamiento, $\frac{RL}{2E\omega} \times R = \frac{R^2 L}{2E\omega}$.

(*) Como la compresión R se reparte en toda la longitud L del pilote, suponiendo distribución uniforme será $\frac{R}{L}$ la presión correspondiente á la unidad lineal, y $\frac{Rx}{L}$ (fig. 20, lám. 51), la que

Si el pilote se ha introducido en el terreno la cantidad c , venciendo la resistencia R , el trabajo de esta resistencia es Rc . Resulta, pues,

$$PH = \frac{R^2 L}{2E\omega} + Rc$$

que es una ecuación que determina la resistencia R que ofrece un pilote para introducirse en el terreno en función de la penetración c originada por un golpe de maza.

Tomando una fracción $\frac{1}{m}$ de R , como hacíamos (núm. 48) para formar los coeficientes de trabajo en función de los de fractura respectivos, tendremos la carga que puede recibir un pilote, deduciéndola de la penetración media por golpe de maza que ha tenido en la última andanada. El límite superior de $\frac{1}{m}$ es $\frac{1}{5}$, lo cual equivale á decir que el coeficiente de seguridad m es 5 ó mayor que 5.

Por ejemplo: si la penetración, en la última andanada de 30 golpes, causada por una maza de 500 kilogramos que cae de 1,20 metros de altura, es de 0,12 metros, á cada golpe le corresponde, como término medio, $\frac{0,12}{30} = 0,004$ metros, y tendremos, suponiendo que los pilotes tienen $L = 8$ metros de longitud y 0,25 metros de diámetro, y haciendo $E = 10^9$ kilogramos por m.² (núm. 175):

$$L = 8 \quad \omega = 0,05 \text{ m.}^2 \quad P = 500 \quad H = 1,20 \quad c = 0,004$$

$$8R^2 + 4 \times 10^3 \times R - 6 \times 10^{10} = 0$$

$$R = 65000 \text{ kilogramos.}$$

experimenta el elemento ab de longitud dz situado á la distancia z del extremo superior. El acortamiento que se produce en el elemento ab es (núm. 51, fórmula (3)):

$$\frac{Rz}{L} dz = \frac{R}{LE\omega} z dz,$$

y en la altura $ab = z$,

$$\frac{R}{LE\omega} \int_0^z z dz = \frac{Rz^2}{2LE\omega}.$$

Para todo el pilote es $z = L$, y el acortamiento total l tiene por valor

$$l = \frac{RL}{2E\omega}.$$

Si se toma $m = 8$, la carga permanente que se podría hacer soportar al pilote, vale $\frac{65000}{8} = 8125$ kilogramos.

Cuando se llega al *rechazo absoluto* es cero c , y entonces

$$P H = \frac{R^2 L}{2 E \omega}.$$

La presión que sufre la madera es igual á R ; así, en el ejemplo anterior tendrá por valor $\frac{R}{\omega} = \frac{65000}{0,05} = 130 \times 10^4$ kilogramos por metro cuadrado (130 kilogramos por cm.^2), cantidad muy considerable que indica lo que padece el material durante la hinca.

Un pilote de $L = 8$ metros de longitud y $\omega = 0,05$ metros cuadrados de sección, hincado con maza de $P = 600$ kilogramos que cae de $H = 1,20$ metros de altura, puede ser cargado con los pesos siguientes, para diversos valores de la penetración c obtenida, por golpe de maza, en la última andanada, tomando como coeficiente de seguridad para formar las cargas permanentes $m = 5$:

HINCA		CARGAS		
POR ANDANADA de 30 golpes	POR CADA golpe	TOTAL extrema	TOTAL permanente.	PERMANENTE por cm.^2 de sección de pilote.
—	c	R	—	—
Metros.	Metros.	Kilogramos.	Kilogramos.	Kilogramos.
0,01	0,00033	112500	22500	45
0,06	0,00200	98325	19671	39
0,12	0,00400	84000	16800	35
0,24	0,00800	62810	12562	25
0,36	0,01200	48750	9750	20
0,48	0,01600	37500	7500	15

1076'. Los ingenieros holandeses prescinden del trabajo debido al acortamiento del pilote, que hemos expresado por el término $\frac{F^2 L}{2 E \omega}$, y em-

plean, para determinar la resistencia F' extrema que un pilote ofrece á la penetración en el terreno, la fórmula

$$P H = F c,$$

pero toman, como coeficiente de seguridad, $m = \frac{1}{20}$; de modo que la carga permanente P' que podrá soportar un pilote, será

$$P' = \frac{F}{20} \quad \text{ó} \quad P' = \frac{P H}{20 c};$$

siendo, como ya hemos dicho:

P = peso de la maza.

H = altura de caída.

c = penetración del pilote, originada por un golpe de maza. Se obtiene dividiendo la penetración total obtenida en una andanada de n golpes, por el número n .

Siendo ω el área de la sección transversal del pilote, y R' el coeficiente de trabajo, tendremos, además:

$$P' = R' \omega \quad \text{ó} \quad \frac{P H}{20 c} = R' \omega.$$

A R' se le suele hacer igual á 30, 35 ó 40 kilogramos por centímetro cuadrado; y, en general, es prudente contar con las causas de destrucción de los pilotes, como la humedad y otras, y aceptar coeficientes no muy elevados.

XIV

BÓVEDAS

1. BÓVEDAS CILÍNDRICAS Ó DE CAÑÓN SEGUIDO

2. BÓVEDAS DE VARIAS CLASES

1. BÓVEDAS CILÍNDRICAS

Ó DE CAÑÓN SEGUIDO

GENERALIDADES

1077. Resolución general del problema. — Las bóvedas son unos macizos á los cuales se les puede aplicar cuanto queda dicho en los núms. 997 á 999. El problema mecánico se resuelve del mismo modo que en los muros (núms. 1004 y 1033); se parte de un cierto perfil trasversal de bóveda, cuyas dimensiones se determinan preliminarmente por medio de fórmulas empíricas (núms. 1082 y siguientes), y se comprueban las condiciones de estabilidad y resistencia que tiene, modificando el perfil en el caso de que éstas no sean satisfactorias.

Las bóvedas son generalmente simétricas, y están simétricamente cargadas con respecto al plano vertical que pasa por su eje. Para el cálculo se toma únicamente media bóveda comprendida entre uno de los arranques y el plano vertical medio, ó *junta de clave*, ideal AB (fig. 25, lám. 51). Si N es la resultante de las presiones en la clave, la acción de cada semibóveda sobre la inmediata puede ser sustituida por la reacción N en el plano AB , y por esto en las operaciones de comprobación del equilibrio y resistencia de la semibóveda $ABDC$ se parte del conocimiento de la reacción N , que se denomina *empuje en la clave*.

Componiendo N con el peso P de la dovela 1, obtendremos la presión ab en la junta de las dovelas 1 y 2 y su punto de aplicación ó centro de presión m . La resultante ab , compuesta con P' , peso de la dovela 2, dará bc , presión en el plano de junta de las dovelas 2 y 3, y continuando estas operaciones obtendremos el *polígono de presiones* $Sabcd$ y el *polígono de centros de presión* $Smnr$, los cuales se convertirán en curvas que reciben estos mismos nombres cuando las dovelas 1, 2, etc., sean infinitamente pequeñas por la pequeñez de separación de los planos de junta.

El polígono de presiones puede en algunos casos quedar situado parcial-

mente fuera del espesor de la bóveda, como se ve en $a c d e h b$, fig. 6.^a, lámina 45 (núm. 950).

Sustituyendo la presión Q en el arranque CD , por su igual y contraria la reacción en este plano, podremos suponer (fig. 26, lám. 51) que la semibóveda $ABDC$ está en equilibrio en el espacio, bajo la acción de la reacción Q en el arranque, del empuje N en la clave y de los pesos P, P' , etc., ó de su resultante R_1 . El equilibrio exige que las tres fuerzas N, Q y R_1 concurren en un punto H .

Si sobre $ab = R_1$ se construye el triángulo de fuerzas abc por medio de las rectas ac, bc paralelas respectivamente á Hu, HS , obtendremos las magnitudes $Q = ac$ y $N = cb$. La componente de Q paralela á N es la misma fuerza N , y la componente vertical es R_1 ; esto equivale á decir que al arranque se transmiten íntegros el peso R_1 de la semibóveda y el empuje N en la clave. El peso R_1 contribuye á la estabilidad del estribo ó del apoyo de la bóveda, mientras que el empuje se opone á ella.

Las magnitudes de N y Q dependen, á igual valor y situación de R_1 , de la posición que se asigne á los puntos de aplicación respectivos S y u , pues de ellos depende la posición del punto H , la dirección de Hu y la de su paralela ac , lado del triángulo construido sobre $ab = R_1$. El polígono de presiones ha de pasar por S y u , y en su trazado y forma influyen también la magnitud de N y la posición de S y u ; de modo que á cada situación diferente de estos puntos corresponde un polígono ó curva de presiones diferente también.

1078. Modo de fractura de las bóvedas cilíndricas. — Las experiencias realizadas para descubrir el modo de fractura de las bóvedas, han demostrado que las de medio punto se rompen como indica la fig. 1.^a (lám. 52), abriéndose por el intradós en la clave y en los arranques, mientras que en los riñones de la bóveda ($b b', c c'$), situados próximamente á mitad de altura de la clave sobre los arranques, aparece la grieta en el trasdós. Los estribos, si son de espesor deficiente, giran al exterior, obedeciendo al empuje N . De modo igual se rompen las bóvedas carpancles y elípticas. En las bóvedas escarzanas (fig. 2.^a, lám. 52) se abre la clave por el intradós y los arranques por el trasdós. Las bóvedas ojivas, por el contrario, se abren por el trasdós en la clave y por el intradós en los riñones (b', c' , fig. 3.^a, lám. 52).

Los planos $b b', c c'$ (figs. 1.^a á 3.^a, lám. 52) se llaman *juntas de fractura*, porque en ellas se opera ésta, á causa de alcanzar su máximo valor la presión y la extensión por unidad superficial que sufren los materiales. Se deduce de este examen que la curva de los centros de presión, en las bóvedas de medio punto, se aproximan al trasdós en la clave y en los arranques, y al

intradós en las juntas de fractura (fig. 1.^a, lám. 52), mientras que en las ojivales sucede todo lo contrario. En las bóvedas escarzanas se acerca al trasdós en la clave y al intradós en los arranques, que hacen de juntas de fractura.

1079. Determinación de la junta de fractura.—Si conservado el punto S de aplicación del empuje en la clave (fig. 29, lám. 51) se varía la posición del punto u en el arranque, obtendremos, para una cierta situación de este punto, una curva de presiones $S'u$ tangente al intradós en un cierto punto H' , en el cual se rompería la bóveda por aplastamiento, de ser exacta la posición de S , puesto que allí la presión por unidad superficial es un máximo, como que el centro de presión está en la arista extrema de la junta (número 993). El plano de junta $H'H$ que pasa por H' es el de *fractura* correspondiente á la posición de S en la clave.

Cambiando de lugar S , y repitiendo las operaciones, obtendríamos nuevas juntas de fractura, pero todas ellas poco distantes entre sí; de modo que los puntos M, L , extremos, de tangencia de las diversas curvas de presiones con el intradós, forman una región en que la fractura de la bóveda, caso de verificarse, tendrá lugar, y la verdadera junta de fractura pasará por uno de los puntos de esta región LM . He aquí el procedimiento de MM. Lamé y Clapeyron para determinar la junta de fractura:

Tómese una cierta junta plana a (fig. 4.^a, lám. 52), trácese la tangente al intradós en a y la resultante A del peso y cargas que actúan entre esta junta y la clave: la intersección de estas líneas da un punto a' .

Hágase igual operación para otras secciones b , etc., con lo cual obtendremos nuevos puntos b', \dots . Únanse todos ellos por medio de una curva $a'b' \dots$, y por el punto de intersección c' de esta curva con la horizontal mc' que pasa por el punto extremo m de la clave, trácese la tangente $c'c$ al intradós; por el punto c pasa la junta de fractura.

El fundamento del método es sencillo. Consideremos la posición extrema mc' de la reacción en el plano de la clave: esta reacción, la de un plano de junta cualquiera, a por ejemplo, y el peso A del trozo de bóveda comprendido por ambas han de cortarse en un punto. Ahora bien: la dirección de la reacción en las juntas a, b , etc., se obtiene por la tangente á la curva de las presiones; y como en la junta de fractura esta curva es tangente al intradós, se deduce que la tangente del intradós en la junta de fractura, la resultante de las cargas comprendidas entre esta junta y la clave y la reacción de esta última han de concurrir en un punto. Si, pues, la curva $a'c'b'$ es el lugar geométrico de las intersecciones de las tangentes al intradós con las resultantes de las cargas, el punto c' es el de concurrencia de éstas con la reacción

mc' en la clave, y, por tanto, la tangente $c'e$ determinará la junta de fractura.

1080. Método práctico de determinación de la junta de fractura.— Generalmente no se sigue el procedimiento anterior, sino que se fija desde luego la posición de la junta de fractura del siguiente modo:

Bóvedas de medio punto, elípticas ó carpaneles (fig. 5.^a, lám. 52).—Por el punto medio A de la altura ó flecha ON de la bóveda, trázese la horizontal BC . Las juntas de fractura serán BD y CM . Los ángulos BOR y COR son de 60° .

Bóvedas rebajadas.—Si el ángulo en el centro BOC es igual ó menor que 120° (fig. 6.^a, lám. 52), las juntas de fractura estarán en los arranques BD, CM . Cuando el ángulo en el centro sea mayor que 120° (fig. 7.^a, lám. 52), se terminará el arco de intradós SBE y se operará como en el primer caso, esto es, se tomará A punto medio de OE y se trazará BO . Las juntas de fractura serán las BD .

Según M. E. Roy, siempre que el ángulo FOM en el centro (fig. 8.^a, lámina 52) sea mayor que 120° , las juntas de fractura BD, CH , estarán en la horizontal BC distante de la línea FM de los arranques la cantidad AN dada por la proporción

$$\frac{AN}{NE=f} = \frac{NE=f}{FM=L};$$

es decir, que si la flecha es $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ de la luz L , será AN igual á $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ de la flecha $NE=f$.

He aquí la situación de las juntas de fractura según algunos ingenieros, definida por el ángulo que forman con el plano horizontal:

BÓVEDAS	AUTORES		
	Gauthey.	Reynaud.	Morandière.
Medio punto	27°	30°	30°
Carpaneles rebajadas al $\frac{1}{3}$	45°	50°	45°
» » al $\frac{1}{4}$	54°	50°	50°
Escarzanas rebajadas al $\frac{1}{5}$ ó más ...	Plano de los arranques.		

1081. Comprobación del equilibrio y resistencia de una bóveda. Hipótesis fundamentales.— Las condiciones de estabilidad y resistencia que ha de satisfacer un macizo de mampostería son diferentes, según que se prescindá en el cálculo de la adherencia de los morteros (núms. 997 y 998), ó que se tenga en cuenta. Por esta razón consideraremos separadamente los siguientes casos:

1.º No se aprecia la adherencia de los morteros. La bóveda se considera formada, para los efectos mecánicos, por dovelas simplemente superpuestas, capaces únicamente de resistir compresiones, pero no esfuerzos de extensión, porque las dovelas se separarían en los planos de junta, que son verdaderas soluciones de continuidad.

En este caso se encuentran las bóvedas de sillería ó ladrillo tomado con mortero ordinario.

2.º Se tiene en cuenta la adherencia de los morteros y su resistencia á la tracción, así como la de los materiales que une. La bóveda se porta como un arco metálico y puede resistir esfuerzos de extensión, aunque moderados.

Tal sucede con las bóvedas de mampostería, hormigón ó ladrillo, cuando se emplea el cemento ó morteros de cemento.

FÓRMULAS EMPÍRICAS. — BÓVEDAS DE PUENTES Y TÚNELES.

BÓVEDAS CON GRANDES SOBRECARGAS DE TIERRAS

1082. Llamaremos:

- $L = 2l =$ luz de la bóveda.
- $r =$ radio de curvatura del intradós en la clave.
- $f =$ flecha ó montea.
- $e =$ espesor de la bóveda en la clave, contada normalmente al intradós.
- $e' =$ ídem íd. en la junta de fractura.
- $e'' =$ ídem íd. en los arranques.
- $c =$ espesor del estribo en los arranques de la bóveda.
- $c' =$ espesor del estribo en su base.
- $h =$ altura de la sobrecarga de tierra por encima del trasdós, en la clave (*).
- $h' =$ altura del estribo desde la base hasta el arranque de la bóveda.
- $H =$ altura total de la obra desde el plano superior de la sobrecarga de tierras hasta la base del estribo; de modo que $H = h + e + f + h'$.

(*) Si la sobrecarga es de otra especie, se buscará su equivalente en peso de tierra y se determinará

1083. Espesor en la clave. — *Bóvedas de medio punto.* — En ellas es $r = l = \frac{1}{2} L$.

Caso de no haber sobrecarga de tierra:

AUTORES	FÓRMULAS	
Perronet.....	$e = 0,325 + 0,035 L$	
Gauthey.....	$L < 16$	$e = 0,33 + 0,021 L$
	$16 < L < 32$	$e = 0,42 L$
	$L > 32$	$e = 0,67 + 0,021 L$
Léveillé.....	$e = 0,33 + 0,033 L$	
Lesguillier.....	$e = 0,10 + 0,20 \sqrt{L}$	
Déjardin.....	$e = 0,30 + 0,05 L$	
Dupuit.....	$e = 0,20 \sqrt{L}$	
Ingenieros rusos y alemanes.....	$e = 0,43 + 0,05 L$	
E. Roy.....	$e = 0,30 + 0,04 L$	
Michon.....	$e = 0,40 + 0,04 L$	
Croizette-Desnoyers.....	Puentes de carretera..	$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{L}$
	Puentes de vía férrea..	$e = 0,20 + 0,17 \sqrt{L}$

Quando haya sobrecarga de tierra, de altura h , los espesores dados por las fórmulas anteriores se aumentarán en la cantidad $0,02 h$. Si la sobrecarga no es de tierra se calculará su equivalente en este material y se determinará h .

Bóvedas escarzanas:

AUTORES	FÓRMULAS	
Léveillé.....	$e = 0,33 + 0,033 L$	
Lesguillier.....	$e = 0,10 + 0,20 \sqrt{L}$	
Déjardin..	Bóveda rebajada al $\frac{1}{3}$ ($f = \frac{1}{3} L$).	$e = 0,30 + 0,07 r$
	» » al $\frac{1}{6}$ ($f = \frac{1}{6} L$).	$e = 0,30 + 0,05 r$
	» » al $\frac{1}{8}$ ($f = \frac{1}{8} L$).	$e = 0,30 + 0,035 r$
	» » al $\frac{1}{10}$ ($f = \frac{1}{10} L$).	$e = 0,30 + 0,02 r$

AUTORES	FÓRMULAS	
Ingenieros rusos y alemanes.....	$e = 0,43 + 0,10 r$	
Dupuit.....	$e = 0,15 \sqrt{L}$	
Michon...	Cuando $\frac{f}{L} \geq \frac{1}{3}$	$e = 0,40 + 0,08 r$
	Cuando $\frac{f}{L} < \frac{1}{3}$	$e = 0,40 + 0,04 r$

Puentes de carretera:

Croizette-Desnoyers.....	Bóvedas rebajadas al $\frac{1}{4}$ ($f = \frac{1}{4} L$)	$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{6}$	$e = 0,15 + 0,14 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{8}$	$e = 0,15 + 0,13 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{10}$	$e = 0,15 + 0,12 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{12}$	$e = 0,15 + 0,11 \sqrt{2 r}$

Puentes de vía férrea:

Croizette-Desnoyers.....	Bóvedas rebajadas al $\frac{1}{4}$	$e = 0,20 + 0,17 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{6}$	$e = 0,20 + 0,16 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{8}$	$e = 0,20 + 0,15 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{10}$	$e = 0,20 + 0,14 \sqrt{2 r}$
	» » al $\frac{1}{12}$	$e = 0,20 + 0,13 \sqrt{2 r}$

Si hay sobrecarga se aumentarán los espesores en la cantidad $0,02 h$, como para las bóvedas de medio punto.

Bóvedas elípticas:

AUTORES	FÓRMULAS	
Ingenieros rusos y alemanes.....	$e = 0,43 + 0,10 r$	
Dupuit.....	$e = 0,20 \sqrt{L}$	
Croizette-Desnoyers..	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Puentes de carretera...} \\ \text{Idem de vía férrea....} \end{array} \right.$	$e = 0,15 + 0,15 \sqrt{2r}$
		$e = 0,20 + 0,17 \sqrt{2r}$
Déjardin.....	$e = 0,30 + 0,07 r$	
E. Roy.....	$e = 0,30 + 0,05 r$	

Para sobrecargas de tierra se aumentará al espesor la cantidad $0,02 h$.

Bóvedas carpaneles:

Saint-Guilhem.....	$e = 0,30 + 0,07 r$
Si hay sobrecarga de tierra.....	$e = 0,30 + 0,07 r + 0,02 h$

Bóvedas ojivales. — Ojiva equilátera.

E. Roy.....	$e = 0,30 + 0,04 r$
Déjardin.....	$e = 0,30 + 0,05 r$

Se añadirá á e la cantidad $0,02 h$ cuando haya sobrecarga de tierra.

Bóvedas peraltadas, ojivales ó elípticas:

Croizette-Desnoyers.....	$e = 0,15 + 0,20 \frac{L}{2 \sqrt{f}}$
--------------------------	----------------------------------------

Se aumentará e en $0,02 h$ cuando haya sobrecarga de tierra de altura h .

Bóvedas oblicuas:

Résal.....	$e_1 = \frac{e}{\sqrt{\text{sen } \alpha}}$
------------	---------------------------------------------

e_1 = espesor en la clave de la bóveda oblicua.

e = espesor en la clave de la bóveda recta, cuyo perfil de intradós sea igual al del plano oblicuo de cabeza de la bóveda oblicua.

α = ángulo agudo que forma el plano de cabeza con el eje de la bóveda, medida de la oblicuidad.

Fórmula de Planat para toda clase de bóvedas:

$$e = 0,333 + \left(0,023 + 0,10 \times \frac{f}{L} \right) r;$$

r es el radio de curvatura del intradós en la clave, f la flecha y L la luz. Es aplicable esta fórmula á las bóvedas de medio punto, escarzanas, carpaneles y elípticas, debiendo aumentarse e en $0,02 h$ para el caso de una sobrecarga de tierra de altura h .

1084. Espesor en los arranques y en las juntas de fractura. — *Bóvedas de medio punto, carpaneles y elípticas completas.* — En esta clase de bóvedas las juntas de fractura están situadas á la mitad de altura de la flecha (número 1080).

Llamando e' al espesor en estos planos de fractura, siendo e el espesor en la clave, debe hacerse:

Medios puntos.....	$e' = 2 e.$	
Carpaneles y elípticas.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rebajadas al } \frac{1}{3} \dots \\ \text{» al } \frac{1}{4} \dots \\ \text{» al } \frac{1}{5} \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} e' = 1,80 e \\ e' = 1,60 e \\ e' = 1,40 e \end{array} \right.$

Bóvedas escarzanas. — El espesor e'' en los arranques debe ser, según M. Croizette Desnoyers:

Bóvedas rebajadas al $\frac{1}{4}$	$e'' = 1,80 e$
» al $\frac{1}{6}$	$e'' = 1,40 e$
» al $\frac{1}{8}$	$e'' = 1,25 e$
» al $\frac{1}{10}$	$e'' = 1,15 e$
» al $\frac{1}{12}$	$e'' = 1,10 e$

OTRA CLASE DE BÓVEDAS

1085. Obras de fortificación. — Si la bóveda ha de estar sometida al peso de una sobrecarga de tierra de altura h , se hará uso de las fórmulas de los núms. 1083 y 1084. Para bóvedas á prueba, sometidas á la acción destructura de los proyectiles, se emplean las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{Michon} & \dots\dots\dots e = 0,50 + 0,06 L \\ \text{Valdés} & \dots\dots\dots e = 0,66 + (0,15 + 0,015 h) \frac{L}{2} \\ & \text{»} \dots\dots\dots e = 0,342 \sqrt{L} \end{aligned}$$

Para bóvedas de medio punto á prueba de los nuevos proyectiles, cargados con pólvoras vivas (melinita, ecrasita, algodón pólvora, etc.), empleando el hormigón de cemento, ha dado Figari la fórmula siguiente:

$$e = 1^m,5 + 0,5 r,$$

siendo e el espesor en la clave, y r el radio de intradós.

En las bóvedas de medio punto de hormigón de cemento Zumaya, con sobrecarga de tierra, construídas en el fuerte de San Cristóbal (Pamplona), ha hecho uso el coronel Luna de la fórmula

$$e = 1^m,6 + 0,4 \sqrt{r},$$

tomando el resultado por exceso, hasta obtener un número entero de decímetros.

1086. Bóvedas de edificios. — Fórmulas de M. Michon:

	Bóvedas de medio punto, carpaneles ó escazanas de ángulo en el centro mayor que 120°.	Bóvedas escazanas de ángulo en el centro menor que 120°.
Bóvedas de sótanos, almace- nes y grandes edificios....	$e = 0,20 + 0,02 L$	$e = 0,20 + 0,01 L$
Bóvedas ligeras, para iglesias y otros edificios, que no han de soportar más que su pro- pio peso.....	$e = 0,10 + 0,01 L$	$e = 0,10 + 0,05 L$

Reglas de Wanderley. — Cuando las bóvedas, de medio punto ó carpaneles, no soportan más que un piso, se les da medio ladrillo de espesor en la clave para luces menores de 4,50 metros. Si la luz es mayor que 4,50 metros, el espesor de la clave será de un ladrillo, aumentándolo hacia los arranques, ó se reforzará la bóveda con arcos torales.

El espesor que debe darse á los estribos para estas bóvedas, siendo L la luz, es:

Bóvedas ojivas.....	$\frac{1}{6} L$ á $\frac{1}{7} L$
» de medio punto.....	$\frac{1}{5,5} L$ á $\frac{1}{6} L$
» rebajadas al $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} L$ á $\frac{1}{5} L$
» ídem al $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3} L$ á $\frac{1}{3,3} L$

Cuando la altura del estribo es mayor de 5 metros, se aumentará su espesor en $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{8}$ de la altura.

Para las bóvedas rebajadas, el espesor de la clave deberá ser:

Hasta $L = 2,50$ metros, rebajadas al $\frac{1}{8}$ á $\frac{1}{10}$...	$e = \frac{1}{2}$ ladrillo.
» $L = 3$ » » al $\frac{1}{6}$ á $\frac{1}{8}$...	} $e = \frac{1}{2}$ ladrillo, pero em- pleando arcos torales.
» $L = 4$ » » al $\frac{1}{6}$	
» $L > 4$	} $e = 1$ ladrillo. $e' = 1$ ladrillo. $e = 1$ ladrillo. $e' = 1 \frac{1}{2}$ ladrillo.

1087. Observaciones á las fórmulas empíricas que dan el espesor e de la bóveda en la clave. — En la resistencia y equilibrio de una bóveda, y, por lo tanto, en el espesor en la clave de que dependen las dimensiones resistentes, ejercen influencia un gran número de circunstancias, entre las cuales debe contarse la luz de la bóveda, la longitud de la flecha y forma de la curva

de intradós, la distribución y magnitud de las cargas y la naturaleza de los materiales.

Es muy difícil tener en cuenta todas estas circunstancias al establecer la fórmula empírica del espesor *e*. La forma general dada á estas fórmulas es una de las siguientes:

$e = m + n L$ (1) " $e = m + n r$ (3)

$e = m + n \sqrt{L}$ (2) " $e = m + n \sqrt{r}$ (4),

añadiendo, en el caso de sobrecarga de tierra de altura *h* sobre la clave, un tercer término *p h*. El primer sumando *m* es relativo á la dificultad práctica de ejecución de las mamposterías, y los otros sumandos manifiestan la influencia de la luz *L* ó del radio de curvatura *r* del intradós en la clave y de la sobrecarga de altura *h*.

Las fórmulas (1) y (2) presentan el defecto de hacer depender el espesor *e* en la clave únicamente de la luz *L* de la bóveda, prescindiendo de la flecha y de la forma de la curva de intradós. Según estas fórmulas, el mismo espesor ha de darse á las bóvedas de medio punto que á las carpaneles, elípticas, escarzanas ó peraltadas, y esto es erróneo, como lo es también eliminar la influencia que deben tener las sobrecargas y la resistencia al aplastamiento del material empleado en la construcción. Tal sucede con las fórmulas de Perronet, Gauthey, Lèveillé y Lesguillier.

Más racional es la estructura de las fórmulas (3) y (4), sobre todo con la adición del término *p h* referente á sobrecargas, porque dando valores diferentes á los coeficientes *n*, según la relación de la flecha *f* á la luz *L*, se toma en consideración á un tiempo la forma de la curva de intradós, la luz y la flecha. Por esta razón son recomendables las fórmulas de Croizette-Desnoyers, que tienen en cuenta al propio tiempo la naturaleza de la sobrecarga que ha de sufrir la bóveda.

De todos modos, estas fórmulas suponen que las cargas están distribuídas en toda la superficie de trasdós. Los resultados á que conducen serán inexactos cuando las cargas estén concentradas en puntos determinados (figuras 9.ª, 23 y 24, lám. 52).

En todos casos es necesario comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia de la bóveda, según se explica en los núms. 1093, 1099, y 1100.

ESTRIBOS

1088. **Espesor de los estribos.** — Conservando las notaciones del número 1082, damos á continuación las fórmulas empíricas más usuales que determinan el espesor de los estribos según la clase de bóveda.

Fórmulas de M. Lèveillé. — Estribos de espesor *c* uniforme (fig. 10, lámina 52):

Bóvedas de medio punto..... } $c = (0,30 + 0,162 L) \sqrt{\frac{h' + 0,25 L}{H}} \times \frac{0,865 L}{0,25 L + r}$

Idem escarzanas. $c = (0,33 + 0,212 L) \sqrt{\frac{L h'}{H(f + e)}}$

Idem elípticas ó carpaneles } $c = (0,43 + 0,153 L) \sqrt{\frac{h' + 0,54 f}{H}} \times \frac{0,84 L}{0,465 f + e}$

Fórmulas de M. Lesguillier. — Estribo de espesor *c* uniforme:

Bóvedas de medio punto. ... $c = \sqrt{L} (0,60 + 0,04 h')$

Idem escarzanas. $c = \sqrt{L} \left(0,60 + 0,10 \left(\frac{L}{f} - 2 \right) + 0,04 h' \right)$

Idem carpaneles y elípticas.. $c = \sqrt{L} \left(0,60 + 0,05 \left(\frac{L}{f} - 2 \right) + 0,04 h' \right)$

Ingenieros rusos y alemanes:

Bóvedas de medio punto. ... $c = 0,305 + 0,209 L + 0,166 h' + 0,083 h$

Idem escarzanas y elípticas. $c = 0,305 + \left(\frac{3 L - f}{L + f} \right) + 0,166 h' + 0,083 h$

Fórmulas de E. Roy. — Estribo de espesor *c'* en la base y espesor *c* en los arranques de la bóveda (fig. 5.ª, lám. 52). Límite superior de *h'* = 2 *L*:

Para bóvedas de medio punto, escarzanas, carpaneles y elípticas..... } $c = 0,20 + 0,30 (r + 2 e)$
 $c' = c + 0,2 h'$

Para ojivas equiláteras..... } $c = 0,20 + 0,30 (0,5 r + 2 e)$
 $c' = c + 0,2 h'$

Si se quiere que el espesor del estribo sea uniforme é igual á c_1 , se hará

$$c_1 = c + 0,1 h'$$

Según Rondelet, si el espesor de los estribos de una bóveda de medio punto, de luz L , se representa por 1, y también se expresa por esta misma cifra el empuje á que se hallan sujetos, que es el empuje en la clave, los espesores y empujes para las demás bóvedas de igual luz L , serán:

PERFIL DE LA BÓVEDA	ESPESOR del estribo.	EMPUJE
Ojival equilátera.	0,7	0,50
Rebajada al $\frac{1}{3}$	1,18	1,40
Idem al $\frac{1}{6}$	1,35	1,91
Idem al $\frac{1}{10}$	1,40	1,93
Dintel.....	1,42	1,95

OPERACIONES PRELIMINARES

1089. Trazado de la curva de trasdós y de los estribos. — *Bóvedas de medio punto.* Se toma en la junta de la clave NR (fig. 5.^a, lám. 52) y en la de fractura BD el espesor que asignan las fórmulas empíricas (núms. 1082 á 1084). La perpendicular levantada á DR en su punto medio determina el centro O' del arco de trasdós DR limitado por la junta de fractura. En el punto D se traza DG tangente al trasdós hasta que corte á la vertical TG del estribo que dista de AS la cantidad c que dan las fórmulas correspondientes (núm. 1088).

Si para trazar el estribo se siguen las fórmulas de Roy (núm. 1088), el punto de encuentro N resulta más elevado. Algunas veces la curva de trasdós se prolonga hasta el plano horizontal nm que pasa por el punto b del arranque (fig. 10, lám. 52), obteniéndose así una economía insignificante de mampostería representada por el área nrm . Es preferible terminar el trasdós en rn porque se aumenta la resistencia de la bóveda.

El método de Rondelet consiste (fig. 11, lám. 52) en tomar EO' igual á vez y media EO y trazar el arco de trasdós TM con el radio $O'T$ hasta su encuentro con la vertical RM . Se continúa el trasdós por la tangente MN hasta su encuentro con el paramento del estribo, como en los casos anteriores. El método de Déjardin (fig. 5.^a, lám. 52) es también empleado. Trazados los radios $Od, OC.....$ y las rectas $Ca, dm.....$ paralelas é iguales á RN (espesor en la clave determinado por las fórmulas), se proyectan estas magnitudes sobre aquéllos; después se unen los puntos R, b, M así obtenidos.

Bóvedas escarzanas, elípticas ó carpaneles — Se emplea el mismo procedimiento que para las de medio punto, sea ó no el plano de arranque la junta de fractura (figs. 6.^a y 7.^a, lám. 52). La tangente Db (fig. 6.^a) forma á veces con el paramento exterior bc del estribo un ángulo poco obtuso que facilita en cierto modo el que aquél se introduzca á guisa de cuña en las tierras.

Se puede prevenir esta circunstancia dando al trasdós la forma circular Da , tomando por radio $O''D$ la parte del $O'D$ prolongado, comprendido por el trasdós D y la vertical ad del estribo, ó bien con la forma Mns , dando á Mn una ligera inclinación, 0,05 por metro, por ejemplo.

El trazado indicado por la fig. 5.^a (parte de la derecha) es ventajoso en este concepto, porque resulta más obtuso el ángulo en F .

Arcos carpaneles y elípticos. — El trasdós es generalmente circular, y se traza como en los arcos de medio punto, después de haber dado espesores á las juntas de clave y de fractura por medio de las fórmulas empíricas correspondientes.

1090. Determinación de la sobrecarga permanente. — Supondremos que la sobrecarga correspondiente á cada dovela $EFLH$ (fig. 12, lám. 52) está limitada por los planos verticales FF'', LL'' que pasan por las aristas de trasdós proyectadas en F y L , y esta hipótesis se funda en la observación de las bóvedas al romperse, porque en ellas, al dislocarse la carga siguiendo el movimiento de las dovelas, queda ésta dividida por superficies poco diferentes de los planos FF'', LL'' .

La sobrecarga es comunmente de tierra, y para mayor facilidad de las operaciones de comprobación del equilibrio y resistencia se reduce su volumen á otro equivalente en peso del mismo material que constituye la bóveda, sillería, ladrillo, hormigón, etc. Esta reducción se opera fácilmente tomando AZ, FF', LL' , etc., de modo que se verifique

$$\frac{AZ}{AZ''} = \frac{FF'}{FF''} = \frac{LL'}{LL''} = \dots = \frac{t}{t'}$$

siendo t' y t el peso del metro cúbico de mampostería de la bóveda y de la tierra, respectivamente.

El volumen comprendido por la superficie $XL'Z$ y el trasdós, equivale en peso al de la sobrecarga de tierra limitada por el plano $Z''X''$. En efecto; el peso del prisma de tierra de base $LL'F''F' = \omega$ y altura unidad vale ωt , y el del prisma de mampostería de igual altura y base $LL'F'F'' = \omega'$ es $\omega' t'$, y estos pesos son iguales porque ω y ω' , áreas de los cuadriláteros LF'' , LF' que tienen igual altura $L''F''$, son proporcionales á los lados; de modo que

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{LL''}{LL'} = \frac{t'}{t},$$

de donde se deduce que $\omega t = \omega' t'$.

Podemos, pues, suponer que la fuerza exterior que obra permanentemente sobre la bóveda, peso propio y sobrecarga, es el peso de un volumen de piedra ó mampostería limitado por la superficie XZ y la de intradós $N'B$, no olvidando que para los efectos de la resistencia no ha de contarse sino con la bóveda propiamente dicha, ó sea con el material comprendido por las superficies de intradós y trasdós. Del mismo modo se operaría si la sobrecarga fuese de fábrica, ya continua, ya con intervalos ó huecos, como los que se practican para aligerar los tímpanos y relleno de los arcos en los puentes.

1091. Sobrecarga accidental. — Cuando se trata de un puente de vía férrea, se calculará la sobrecarga que corresponde al caso en que esté ocupado por las más pesadas locomotoras, dividiendo el peso total por la proyección horizontal $2 \times X''Z''$. Un ejemplo pondrá de manifiesto el método que debe emplearse.

Sea un puente para dos vías: la longitud del eje proyectado en O_1 es de 7 metros; la distancia $2 \times X''Z''$, luz del arco aumentado con el grueso de estribos, vale 16 metros. Las locomotoras más pesadas, con su ténder, pesan 50000 kilogramos y ocupan 14 metros de longitud de vía; de modo que á cada metro lineal de vía corresponde $\frac{50000}{14} = 3571$ kilogramos, y á cada metro de longitud de puente, pues que hay dos vías, $2 \times 3571 = 7142$ kilogramos. Sobre la superficie $2 \times Z''X''$ que tiene 16 metros de longitud, pesará, suponiéndola completamente ocupada de locomotoras con su ténder, $16 \times 7142 = 114272$ kilogramos.

Fácil es ahora convertir esta sobrecarga en otra equivalente de piedra. Si es de 2000 kilogramos el peso del metro cúbico de ésta, y llamamos x á la

altura del prisma equivalente que tiene por base la superficie $2 \times Z''X'' = 16 \times 7 = 112$ m.², tendremos

$$112 \times x \times 2000 = 114272,$$

de donde $x = 0,50$ metros.

A las ordenadas de la línea XZ que representa la sobrecarga de tierra convertida en piedra, tendremos que añadir magnitudes Zz , $F'f'$, etc., iguales á 0,50 metros para obtener en piedra la sobrecarga total.

El ejemplo anterior hace ver el pequeño valor que tienen las mayores sobrecargas si se comparan con el peso propio del material que constituye la bóveda y el de la carga de tierra que ordinariamente la cubre. Por esta misma razón no suele tenerse en cuenta la diferente posición que las cargas móviles pueden tener en el puente, como en los de madera y hierro, en los cuales las sobrecargas accidentales forman el principal sumando, sino que se supone todo aquel ocupado por ellas. Las modificaciones que por este concepto ha de sufrir el polígono de las presiones son poco sensibles.

1092. División en dovelas. — El macizo de la bóveda puede dividirse en dovelas de dos modos: por juntas reales normales al intradós (AB , FE , etc., fig. 12, lám. 52), ó por planos ideales verticales $a''b''$, $d''e''$, etc.

El segundo método de división es más seguido, porque abrevia las operaciones que tienen por objeto determinar la intensidad y posición de las cargas **1**, **2**, ..., según se verá en los núms. **1093** y **1094**.

COMPROBACIÓN DE LA ESTABILIDAD Y RESISTENCIA DE UNA BÓVEDA
CUANDO SE PRESCINDE DE LA INFLUENCIA DE LOS MORTEROS

1093. Orden de las operaciones. — Han de ejecutarse, por su orden, las operaciones siguientes:

1.^a Trazado del perfil transversal de la bóveda, intradós, trasdós y estribos, valiéndose para determinar los espesores, de las fórmulas empíricas correspondientes (núm. **1082** y siguientes).

2.^a Cálculo de las cargas (peso propio de la bóveda y sobrecargas permanentes ó accidentales). Se considera, como en los muros, una longitud de bóveda de 1 metro.

3.^a Trazado del polígono de las presiones y comprobación de las condi-

ciones de estabilidad y resistencia que, según vimos en el núm. 998, son:

(a) (Estabilidad.) La presión ad en una junta (fig. 30, lám. 51), ha de formar con la normal á ésta un ángulo dac menor que el ángulo φ de rozamiento de piedra sobre piedra.

(b) (Estabilidad y resistencia.) El polígono de los centros de presión ha de estar comprendido en el espesor de la bóveda, y en cuanto sea posible es conveniente que se halle situado en el tercio medio del espesor del macizo.

(c) (Resistencia.) La presión máxima por unidad superficial en una junta cualquiera AB , no ha de ser mayor que el coeficiente R' de trabajo por compresión correspondiente al material que se emplee. Si llamamos V á la componente ac de la compresión ad , deberá ser (núm. 1033):

$$p = \frac{V}{e} \left(1 + \frac{6x}{e} \right) \leq R'$$

e = espesor AB de la junta.

x = distancia Oa del centro de presión al punto medio O de la junta AB .

Ya hemos dado en una de las notas del núm. 999 los valores de R' . He aquí los que tiene en algunos puentes y viaductos:

NOMBRES DE LOS PUENTES Y VIADUCTOS	LUZ de los arcos. — Metros.	ALTURA total de la obra. — Metros.	ESPESOR de la pila en los arraigues. — Metros.	COEFICIENTE DE TRABAJO POR COMPRESIÓN R' KILOGRAMOS POR CM. ²			
				En la clave. — Kilogramos.	En los arraigues. — Kilogramos.	En el basamento. — Kilogramos.	En el cimicuto. — Kilogramos.
Puente de Neuilly.....	39,00	14,65	4,20	12,78	11,68	11,68	7,69
» de la Concordia.....	31,18	12,96	2,92	17,00	9,96	11,37	5,16
» de la Trinidad (Floren- cia).....	29,19	9,00	7,88	15,46	3,95	4,65	»
» del Alma.....	43,00	11,50	4,60	12,47	9,07	9,07	7,92
» de Austerlitz.....	32,16	11,84	3,10	11,61	8,42	8,98	6,31
» de Luis Felipe.....	32,00	10,47	4,00	9,70	7,52	6,43	4,81
» de Cinq-Mars, sobre el Loire.....	20,00	11,20	3,50	5,23	5,47	5,76	3,79
Viaducto de Dinan.....	16,00	41,30	4,00	4,66	6,50	9,50	8,80
» de Port-Lauuay.....	22,00	52,50	4,80	4,83	5,84	9,12	7,29
» de Pont-de-Buis.....	18,00	40,00	4,00	4,37	5,09	7,86	6,06
» de Morlaix.....	15,00	58,00	4,25	3,70	4,35	7,50	8,12

1094. Trazado del polígono de las presiones. Método de M. Méry. - En cuanto sigue, consideraremos únicamente un metro de longitud de bóveda, ó sea la parte comprendida por dos planos paralelos á los de cabeza distantes una unidad lineal, porque de verificarse el equilibrio y resistencia en esta parte se verificará en el resto. El trazado del polígono de presiones se funda en el conocimiento del empuje N en la clave (núm. 1077), en dirección, magnitud y punto de aplicación.

En la magnitud de N influyen su dirección y la situación de los puntos de aplicación de N y de Q ; su dirección, porque en el triángulo de fuerzas abc (fig. 26, lám. 51) la longitud $bc = N$ depende del ángulo cba ; y la posición de los puntos de aplicación en la clave, y en el plano CD , de las reacciones N y Q (puntos S y u), porque siendo de grandes dimensiones, en general, los espesores SS' , uu' (fig. 28, lám. 51) de los planos de junta en las bóvedas, de elegir los puntos S y u ó los S' y u' resultan triángulos de fuerzas HAB , $H'A'B'$ muy diferentes en cuanto á la magnitud de los catetos horizontales AB , $A'B'$, representantes de los empujes N en la clave.

La dirección del empuje N depende también del conocimiento del punto C de aplicación de la presión en la clave y en dos juntas cualquiera A y B (fig. 14, lám. 52), porque aplicando el procedimiento explicado y demostrado en el núm. 957, siendo H y T las resultantes de las cargas en las partes de bóveda AC , CB , y h y t sus distancias á los puntos A y B , se unirán los A y C , se dividiría AC en partes DC , AD , tales que $\frac{CA}{CD} = \frac{H \times h}{T \times t}$ y uniendo D y B y trazando Ca paralelamente á BD , obtendríamos la línea de acción del empuje N . Cuando la bóveda es simétrica, y simétricamente cargada, de modo que siendo A y B los arranques, se verifica $H = T$, $h = t$, el punto D coincide con A , y Ca es paralela á la línea AB de los arranques, que es ahora horizontal, por lo que también lo será N .

Deducimos de cuanto dejamos expuesto que el problema de la comprobación del equilibrio y resistencia de una bóveda de perfil conocido es indeterminado, porque se funda en el conocimiento del polígono de las presiones; y al trazar este polígono, para lo cual hay que partir de la posición y magnitud del empuje N en la clave, se obtienen resultados muy diferentes.

Para que la indeterminación cese, es preciso conocer en la semibóveda considerada dos puntos de paso del polígono de presiones, ó sea los centros de presiones en dos juntas, en la clave y en otro plano cualquiera, porque entonces se podrá determinar, conforme hemos visto anteriormente, la posición y magnitud de N .

Para salvar la indeterminación, supone M. Méry, fundado en las experiencias de fractura de bóvedas (núm. 1078), que el centro de presión a en la clave (fig. 12, lám. 52) está situado á la distancia $Aa = \frac{1}{3} AB$ del trasdós, y que en la junta de fractura CD , es s , á la distancia $Ds = \frac{1}{3} DC$ del intradós.

Admitida esta hipótesis, y después de convertir las sobrecargas de toda especie en sobrecarga de mampostería $NXZA$ (núms. 1090 y 1091), y de limitar la parte correspondiente á cada dovela por medio de los planos verticales CC' , LL' , etc., se determinarán los pesos de los volúmenes $EBZF'$, $EFF'L'LH$, etc., que representaremos por los núms. 1, 2..... 5, y los centros de gravedad de dichos volúmenes, á los cuales se considerarán aplicados dichos pesos.

Puesto que se toma en consideración la unidad lineal de bóveda, los pesos 1, 2..... 5 pueden estar representados por las áreas de los polígonos $F'B$, $L'E$, etc. El centro de gravedad de estas figuras se determinará por los procedimientos conocidos (*).

Conocida la magnitud y posición de los pesos 1, 2..... 5, se hallará analítica ó gráficamente la resultante R_1 de los 1, 2 y 3, comprendidos entre la junta de clave y la de fractura CD , determinada preliminarmente del modo indicado en los números 1079 y 1080. Eligiendo el procedimiento gráfico para la determinación de R_1 se construirá el polígono $P'S$ de fuerzas, y eligiendo un polo cualquiera O' se trazará el polígono funicular $a'b'e'$, y se obtendrá, prolongando los lados extremos, el punto d' de paso de la resultante.

Suponiendo que la bóveda es simétrica y está simétricamente cargada con respecto al plano vertical medio BZ , el empuje en la clave es horizontal, siendo su línea de acción aH_1 . Uniendo H_1 y s y haciendo $H_1E_1 = R_1$, el triángulo $H_1E_1F_1$ da en F_1E_1 el valor del empuje N en la clave.

Una vez determinado el valor de N , llevemos su valor lineal de P' á O ; y tomando el punto O como polo unámosle con los de división de las fuer-

(*) Si se trata de la dovela $ABCD$ (fig. 15, lám. 52), se sustituirán los lados curvos de intradós y trasdós por las cuerdas respectivas; se trazará la diagonal BD y las medianas Ac , Cc de los triángulos AED , CBD que tienen común el lado BD . Tomando $cb = \frac{1}{3} Ac$, $cd = \frac{1}{3} Cc$, uniendo b y d y determinando el punto a de modo que $ba : ad :: dm : bm$, se obtendrá en a el centro de gravedad del trapecio.

Cuando la figura sea la $ABEFC$ (fig. 16, lám. 52) se hallarán por el método que acabamos de explicar los centros de gravedad g y g' de los trapecios EC , AC ; se unirán g y g' y los puntos a y b que resultan de tomar sobre las verticales que pasan por g y g' magnitudes lineales ga , $g'b$ proporcionales á las áreas de AC y EC . El punto G de intersección de gg' y ab es el centro de gravedad buscado.

zas **1**, **2**,..... **5** del polígono de fuerzas $P' F''$. Las rectas Ox , Oz , OS , etcétera, representan en magnitud y en dirección las fuerzas de presión que actúan en los planos de junta FE , LH , CD , etc.; y, en efecto, Ox es la resultante de las fuerzas N y **1**, la recta Oz es la resultante de Ox y **2**, ó de las fuerzas N , **1** y **2**, y así sucesivamente.

El trazado del polígono de presiones es ya fácil. Por el punto c de intersección de N y **1** se trazará la recta cd paralela al radio polar Ox hasta que encuentre en d á la fuerza **2**; por el punto d se trazará de paralela á Oz hasta su intersección en e con la fuerza **3**, y continuando la operación se obtendrá el polígono de presiones $acdepn$, que no es más que el polígono funicular correspondiente al de fuerzas $P' F''$ y polo O . Los centros de presión en los diversos planos de junta son a , o , f , s , r y l ; uniendo estos puntos se obtendrá el polígono de centros de presión.

Como comprobación del trazado, el lado ep del polígono de presiones debe pasar por el punto s de la junta de fractura, á la distancia $Ds = \frac{1}{3} DC$ del intradós.

Si se traza la curva $mnhl$ (línea de puntos) que pasa por los puntos medios de los planos de junta, se encuentra que el polígono de presiones la corta en un punto n situado entre la clave y la junta de fractura, como tiene que ser, puesto que se ha partido de la hipótesis de ser centros de presión en aquellos planos, respectivamente, los puntos a y s que están situados á distinto lado de la línea media mnh . Resulta, pues, que los centros de presión se aproximan al trasdós, entre la junta de clave y la que pasase por n , y al intradós desde n hacia el arranque, lo cual demuestra que en la región nn la compresión máxima por unidad superficial tiene lugar en el trasdós, y en la parte np en el intradós. En la junta que pasase por n , la presión se reparte de modo uniforme, porque coinciden el centro de presión y el de gravedad.

El polígono de presiones se puede continuar dentro del estribo NV . Es el caso del núm. **1065**, siendo aquí v el punto de aplicación, pu la dirección y OF'' la magnitud de la fuerza que obra en la hilada superior, análoga á la F' de las figs. 22 y 23 (lám. 50).

1095. El trazado del polígono de presiones, según lo hemos explicado en el número anterior, no es muy exacto, porque al dibujar cada uno de los lados se parte de un punto del último lado construído, los errores se suman, y en las inmediaciones del arranque de la bóveda pueden resultar desviaciones notables de dicho polígono.

Para evitar estos errores, se determina la posición de las resultantes **1**

dovela $ABEF'$ (fig. 27, lám. 51), **2'** (parte $ABHL$ de bóveda), **3'** (parte $ABDC$) correspondientes á las cargas que actúan en las partes de bóveda comprendidas entre la junta de clave y los diversos planos de junta. La fuerza **2'** es igual en magnitud á $\mathbf{1} + \mathbf{2}$ y $\mathbf{3}' = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}$.

Por los puntos c , M , N , etc., de intersección de N con **1**, **2'**, **3'**, etc., se trazarán las rectas cd , Mc , Np , etc., paralelas á los radios polares Ox , Oz , OS , etc., y así se obtendrá el polígono de presiones $cdelp$.

1096. Regla de Navier para determinar el empuje en la clave. — Navier ha dado una fórmula práctica muy sencilla para determinar el valor del empuje N en la clave, correspondiente á una bóveda de longitud de eje igual á 1 metro. Llamando R_2 la carga total por metro cuadrado que actúa sobre el intradós en la clave (peso propio, sobrecargas permanentes y accidentales) y r el radio de curvatura del intradós en este punto, será

$$N = R_2 r.$$

Si e es el espesor de la bóveda en la clave, h la altura de la sobrecarga de tierra en este punto y k la sobrecarga accidental por metro cuadrado, y llamando t' y t á los pesos del metro cúbico de mampostería y de tierra, tenemos

$$R_2 = et' + ht + k$$

$$N = (et' + ht + k)r.$$

El valor de N obtenido por esta fórmula, puede servir para hacer el trazado de la curva de presiones, según se ha explicado en el núm. **1094**.

1097. Reglas prácticas de M. Kleitz para la comprobación de la estabilidad y resistencia de una bóveda. — 1.^a Se tomará como punto de paso del polígono de presiones el situado en el tercio superior de la junta de clave.

2.^a En la junta de fractura se situará el centro de presión á una distancia del intradós igual á $\frac{1}{4}$ del espesor de esta junta en las bóvedas de pequeña luz, y á $\frac{1}{5}$ en las grandes.

3.^a La parte de bóveda situada por debajo del plano de fractura se considerará como una continuación del estribo ó pila, y la estabilidad de este conjunto, estribo y arranques, se determinará como si se tratase de un monolito; pero el empuje horizontal á que se halla expuesto se supondrá ser, no el deducido de la hipótesis de un centro de presión en el plano de fractura

tal como marca la regla 2.^a, sino el que resultaría de tener en cuenta toda la semibóveda y de hacer pasar la curva de presiones por el punto medio del arranque.

4.^a En dos arcos contiguos se combinará el máximo empuje de uno con el mínimo del otro para colocarse en las condiciones más desfavorables.

1098. Observaciones al método de M. Méry. — Si el polígono de presiones trazado según la hipótesis de ser puntos de paso obligados, el a en el tercio superior de la junta de clave (fig. 12, lám. 52) y el s en el tercio inferior de la junta de fractura, no satisficiera las condiciones de equilibrio y resistencia expuestas en los núms. **998** y **1093**, no por esto podrá decirse que la bóveda sometida á comprobación es incapaz de cumplir dichas condiciones. En efecto; variando la posición de los puntos a y s se altera el valor del empuje N y la posición del polígono de presiones; de modo que antes de desechar un perfil de bóveda deberían en rigor ensayarse todas las posiciones admisibles de a y s , y, por lo tanto, todos los posibles polígonos de presiones, para ver si alguno satisfacía las condiciones exigidas.

El verdadero carácter distintivo del método de M. Méry está bien definido diciendo, con M. Durand-Claye, que lo que con él se busca es la *posibilidad de una solución de equilibrio y resistencia*. Pero entonces el número de tanteos necesarios es infinito, tantos como posiciones diversas se pueden atribuir á los puntos a y s ; y para limitar este número, los ingenieros no admiten más posiciones, para el polígono de centros de presiones, que las comprendidas en el tercio medio del espesor de la bóveda, á fin de que las juntas estén comprimidas en toda su superficie (núm. **995**).

Con arreglo á esta base, si se dividen en tres partes iguales las juntas de clave y de arranque (fig. 17, lám. 52), las posiciones límites de los centros de presión en estos planos serán a , a' y c , c' . Aun así, sería indefinido el número de tanteos y por esto se limita á las cuatro correspondientes á las cuatro curvas de presión ac , ac' , $a'c$, $a'c'$.

Generalmente se traza un solo polígono de presiones que pase por a y el punto medio b del arranque, ó, mejor, según ya hemos hecho en el número **1094**, por los puntos a y s (fig. 12, lám. 52).

Este método es bastante exacto para bóvedas de intradós circular ó de forma muy aproximada á ésta entre la clave y junta inclinada á 60° con la vertical (arcos de medio punto, escarznos, carpaneles, elipses rebajadas), siempre por supuesto que las sobrecargas estén representadas por una superficie limitada por una línea XZ no muy diferente de la horizontal, como resulta generalmente en el cálculo de puentes. La exactitud es deficiente

cuando el intradós es diferente del antes indicado, como sucede en las ojivas, arcos peraltados y dinteles, ó cuando las cargas están aplicadas de modo anormal, como en el caso de que actúen en puntos aislados del trasdós.

1099. Método de Durand-Claye. — El objeto que se alcanza con el procedimiento que vamos á exponer, debido á M. Durand-Claye, es limitar la indeterminación del problema, fijando límites de las posiciones de los centros de presión en las juntas de clave y de fractura, para que puedan quedar satisfechas las condiciones de equilibrio y de resistencia.

Equilibrio.—Sea $A'B'$ un plano ideal de junta en la clave (fig. 18, lámina 52), AB otra junta cualquiera y R_1 la resultante de todas las fuerzas que obran en el trozo de bóveda $ABBA'$; y supongamos que las presiones en $A'B'$ y AB pasan, respectivamente, por los puntos A'_1 y A_1 .

Trazando A'_1N , presión en $A'B'$, ó sea la reacción en la clave, hasta que corte en N á la fuerza R_1 , uniendo N y A_1 y construyendo el triángulo NOR sobre $NO = R_1$, resulta ser OR la magnitud de la presión en A_1 , y NR la magnitud y dirección de la presión en A_1 , ó de su igual y contraria la reacción de la junta AB . Tomando $A'B'$ como eje de abscisas, llevaremos como ordenada la magnitud A'_1K igual al empuje ó presión OR que corresponde á la hipótesis de ser A'_1 y A_1 los centros de presión en la clave y en el plano de junta AB . Si permaneciendo invariable el centro de presión A'_1 , variamos la posición del A_1 , en el triángulo de fuerzas construído sobre NO cambiará la magnitud del cateto OR y la dirección y magnitud de la hipotenusa. A medida que A_1 se aproxime á B aumentarán las dimensiones de OR y NR , disminuyendo en cambio cuando se aproxime A_1 á A .

Ahora bien: el equilibrio exige que A_1 esté dentro de AB (núms. **998** y **1093**); de modo que las direcciones límites de la reacción en el plano AB serán AN , BN , y los valores límites correspondientes del empuje ó reacción en la clave estarán representados por las magnitudes OT , OS que trasladaremos á A'_1x' y A'_1z' . Diremos, en consecuencia, que para que el centro de presión AB esté contenido en el espesor de la bóveda, siendo A'_1 el punto de aplicación de la presión en la clave, es preciso que la magnitud de esta última presión esté comprendida entre A'_1x' y A'_1z' , y es fácil comprobar que si la presión ó empuje en A'_1 es menor que A'_1x' , ó que su igual OT , la hipotenusa del triángulo de fuerzas resultaría á la izquierda de NT , y, por lo tanto, el punto de aplicación de la presión en AB , estaría á la izquierda de A , fuera del espesor AB ; y del mismo modo si el empuje en la clave fuese mayor que A'_1z' , ó que su igual OS , el centro de presión en AB quedaría fuera de AB , á la derecha.

Esta construcción puede repetirse para otro punto distinto del A'_1 . En el A' , por ejemplo, hallaríamos para valores límites del empuje en la clave, correspondientes á presiones en AB que pasan por A y por B , los $A'D'$ y $A'F'$; y en el punto B' , los $B'C'$, $B'E'$. Uniendo los puntos E', z', F' y los C', x', D' , obtenemos las curvas $E'F'$, $C'D'$; y no consideraremos puntos exteriores á $A'B'$, porque la condición de equilibrio exige que los centros de presión estén contenidos en el espesor de la bóveda.

Resulta de cuanto antecede que si los centros de presión en $A'B'$ y AB han de estar dentro del espesor de la bóveda, como es indispensable para el equilibrio, la magnitud del empuje ó presión en la clave ha de estar comprendida entre la de las ordenadas de las curvas $E'F'$, $C'D'$ con respecto al eje $A'B'$. Para un centro de presión A'_1 , y una magnitud cualquiera de empuje A'_1K , es fácil encontrar la presión y punto de aplicación correspondiente en AB ; no hay más que hacer $NO = R_1$ y $OR = A'_1K$ y unir N y R , con lo cual se obtendrá A_1 y la magnitud NR .

Operemos en AB como lo hemos hecho en la junta de clave $A'B'$, y á este efecto tracemos la ordenada A_1Q de valor igual á la componente de la compresión NR perpendicular á AB , y sin variar la posición de A_1 , consideremos todas las posiciones de A' , dentro de $A'B'$. Para los puntos A' y B' , los triángulos de fuerzas tuv y $N'O'S'$ construídos sobre los catetos $tu = N'O' = R_1$, dan para magnitudes límites de presión en A_1 , las rectas tv y $N'S'$, y sus componentes perpendiculares á AB se trasladarán á A_1b'' , A_1a'' .

Repetiendo esta construcción en todos los demás puntos de AB se obtendrán las curvas CE , DF , cuyas ordenadas representan los valores límites que pueden tener las componentes de las presiones normales á AB , si, como exige el equilibrio, los centros de presión en los planos $A'B'$, AB no salen del espesor de la bóveda. El área del cuadrilátero $CEFD$ goza con respecto al plano de junta AB de las mismas propiedades que el área del cuadrilátero $C'E'F'D'$ con respecto á la junta de clave $A'B'$, y diremos, en conclusión, que para que haya equilibrio es necesario que el empuje en la clave $A'B'$ y la compresión normal á AB tengan valores comprendidos entre los de las ordenadas del perímetro de dichas áreas.

Observaremos que los lados de los dos cuadriláteros se corresponden, así como los vértices; y para evitar confusión hemos empleado las mismas letras en los puntos correspondientes. A los lados $C'E'$, $E'F'$, etc., corresponden los CE , EF , etc.

Resistencia. — No es suficiente, para que la bóveda pueda subsistir, que

las presiones correspondientes en la junta de clave y en la AB tengan los valores anteriores, sino que también ha de satisfacerse á la condición de que las presiones p máximas por unidad superficial engendradas por las compresiones totales, no excedan del coeficiente de trabajo por compresión R' , á fin de que la obra sea á un tiempo estable y resistente. Recordaremos á este propósito [núm. 996, ecuaciones (11) y (12)] que para conseguir este resultado es preciso que la compresión total P tenga, como valores máximos, los de las ordenadas de la línea $A''H''B''$ (fig. 19, lám. 52) compuesta de las rectas $A''F''_1$, $B''E''_1$, correspondientes á los tercios extremos $A''D''_1$, $C''B''_1$, y de las dos ramas de hipérbola equilátera $H''F''_1$, $H''E''_1$, que se cortan en la ordenada del punto medio O'' de la junta $A''B''$.

Según esto, las condiciones de estabilidad y resistencia exigen que las presiones en $A'B'$ y su punto de aplicación estén dadas por abscisas y ordenadas del área $b'a'c'd'$ que es común á la $F'E'C'D'$, relativa á la estabilidad, y á la $A''H''B''$ correspondiente á la resistencia. El punto de paso del empuje en la clave deberá estar, por lo tanto, comprendido entre los a'' y c'' .

Haciendo igual construcción en la junta AB (fig. 18, lám. 52), obtendríamos el área $hers$, y diremos, en conclusión, que el cumplimiento de las condiciones de estabilidad y resistencia exige que las presiones y su punto de aplicación en las juntas $A'B'$ y AB sean, respectivamente, ordenadas y abscisas de las áreas $b'a'c'd'$ y $hers$, á las cuales se les da el nombre de *áreas de estabilidad*.

Las dos condiciones precedentes pueden reducirse á una. Si determinamos las curvas $h'l'$, $e'f'$ en la clave, correspondientes á las hl , ef de la junta AB , todo empuje en $A'B'$ que caiga dentro del cuadrilátero $m'n's'r'$ dará en AB una presión de punto de aplicación y magnitud correspondientes al cuadrilátero $hers$, de modo que no habrá más que atender á que la presión en la clave tenga por magnitud y punto de aplicación ordenadas y abscisas del área $m'n's'r'$.

Se hubiera podido igualmente obtener el cuadrilátero $n'm'r's$ en el plano de junta AB por medio de las líneas ab , cd correspondientes á la $a'b'$, $c'd'$ de la junta de clave, y prescindir del área de estabilidad $a'b'c'd'$; pero nos atenderemos al cuadrilátero $m'n's'r'$.

Repetidas las construcciones anteriores para otros planos de junta AB , obtendríamos otros tantos cuadriláteros como el $m'n's'r'$, los cuales se superpondrán parcialmente. Si consideramos la parte de área común á todos ellos, ésta será el área de estabilidad definitiva, que gozará de la importante propiedad siguiente: siempre que el empuje en la clave y su punto de aplicación

sean las ordenadas y abscisas de un punto cualquiera de esta superficie, las condiciones de equilibrio y resistencia quedarán satisfechas en toda la bóveda en un plano de junta cualquiera.

Si no hay parte común á todos los cuadriláteros, es decir, si no hay *área de estabilidad* definitiva, no es posible la estabilidad de la bóveda en las condiciones que han servido de base á estas operaciones gráficas, esto es, trabajando el material únicamente por compresión con un coeficiente máximo R' por unidad superficial.

Cuando el área definitiva de estabilidad queda reducida á un punto m (fig. 20, lám. 52), la estabilidad es sólo posible siendo el empuje ó presión en la clave de magnitud $m c$ y c el punto de aplicación. Trazando $c D$ en dirección del empuje hasta su encuentro con la resultante R_1 de las cargas, y construyendo el triángulo rectángulo $D E F$, en el que $D E = R_1$ y $E F = m c$, obtendremos la dirección y magnitud $D F$ de la presión en $A B$ y su punto p de aplicación, siendo entonces fácil trazar la curva de presiones $c N p$ que corresponde á la única solución que tiene el problema de estabilidad y resistencia.

En el caso de que el área definitiva de estabilidad sea el cuadrilátero $m n r s$, se construirán las curvas de presiones correspondientes á sus cuatro vértices; y en los puntos en que las curvas extremas se aproximen al intradós y al trasdós, el trabajo del material será un máximo; pero el equilibrio y resistencia es posible con cualquiera de ellas y todas las intermedias, de modo que la bóveda sometida á comprobación es estable y resistente.

Todas las construcciones gráficas que acabamos de describir no presentan dificultades, pero son muy laboriosas y prolijas, razón por la cual el método de M. Durand-Claye es rara vez empleado, siendo preferido el de M. Méry, menos exacto pero más sencillo.

1100. Método exacto para la construcción del polígono de presiones.— Se puede emplear el método que explicamos más adelante (núm. 1110), pero no será aplicable sino en tanto que el polígono de presiones no salga del espesor de la bóveda, porque haciéndose abstracción de la adherencia de los morteros, y existiendo verdadera solución de continuidad en las juntas de las dovelas, no es posible aceptar esfuerzos de extensión en éstas, y el área de los planos de junta debe limitarse á la parte comprimida.

1101. Semejanza de bóvedas.— Hemos visto que el polígono de presiones correspondiente á las fuerzas **1, 2..... 5** (fig. 12, lám. 52) es el $a c d..... v$. Si conservando los mismos puntos de paso a y s y la misma línea de acción

de las fuerzas **1..... 5**, suponemos que las magnitudes de estas fuerzas varían proporcionalmente, de modo que se verifique

$$\frac{P'_1 x'_1}{P' x} = \frac{x'_1 z'_1}{x z} = \dots = \frac{P'_5 F''_5}{P' F''} = \frac{m}{n},$$

las figuras $O P' F''$ y $O'_1 P'_1 F''_1$ serán semejantes, y paralelos los radios polares. Las magnitudes de las presiones en cada junta habrán variado en la relación $\frac{m}{n}$, pero su dirección es la misma, y al construir el polígono de presiones se obtendrá el mismo $a c d..... v$ hallado anteriormente. Se deduce que las presiones totales en cada junta y las presiones máximas por unidad superficial están en la misma relación $\frac{m}{n}$.

Supongamos ahora dos bóvedas de luces L y l , cuyas secciones transversales sean semejantes, de modo que el espesor en la clave y todas las demás dimensiones estén en la relación $\frac{L}{l} = r$ de las luces, y admitamos que dichas bóvedas están sometidas únicamente á su propio peso, ó bien que las alturas de sobrecarga de tierras en las dos, guarden la razón r .

Los pesos de las dovelas homólogas que están representados por las áreas de su sección transversal, son entre sí como los cuadrados de las líneas correspondientes, es decir, que su relación será r^2 , y lo mismo sucede con las sobrecargas parciales. Si, pues, llamamos **1, 2..... 5** á los pesos que actúan en cada dovela de la bóveda de luz L , y **1', 2'..... 5'** á los de las dovelas homólogas de la bóveda de la luz l , será

$$\frac{1}{1'} = \frac{2}{2'} = \dots = \frac{5}{5'} = r^2.$$

Por las razones antes expuestas, los polígonos de presión de las dos bóvedas serán semejantes, y las distancias $E O, H f$, etc. (fig. 12, lám. 52), en los planos de junta correspondientes guardarán la relación $\frac{L}{l} = r$.

Dedúcese de aquí que las presiones p por unidad superficial en los planos de junta homólogos de las dos bóvedas estarán en la relación $\frac{r^2}{r} = r = \frac{L}{l}$,

la misma de las luces; de modo que á luces dobles, triples, corresponde rán presiones p dobles, triples también.

1102. Forma más conveniente del perfil de una bóveda. — La forma más conveniente de una bóveda será aquella en que la línea media $mnhl$ (fig. 12, lám. 52) coincida con el polígono de presiones ó se separe poco de él, porque entonces el punto de aplicación de éstas es el medio de cada junta, ó muy próximo á este punto medio, y, por lo tanto, las presiones se distribuirán uniformemente en toda la superficie común, utilizándose toda ella para la resistencia, y disminuyendo, como consecuencia, el coeficiente de trabajo R' respectivo.

Sea $A O'$ la semiluz y $O' a$ la flecha de la línea media trazada en el espesor de la bóveda (fig. 21, lám. 52), **1, 2, 3, 4** las fuerzas que sobre ésta actúan; hallemos su resultante R_1 , el triángulo de fuerzas OPF y el polígono funicular $Aedcba$. Si consideramos como línea media este polígono funicular, y tomando á uno y otro lado de ella los semiespesores de la bóveda, dibujamos su perfil, el polígono de las presiones se separará muy poco del $Aedcba$, que es el que se quiere conseguir.

Para determinar la posición y magnitud de las fuerzas **1, 2, 3, 4**, se empieza por trazar un perfil cualquiera de bóveda, haciendo uso de las fórmulas empíricas para determinar los espesores. Este perfil no se tiene en cuenta nada más que para estos efectos, pues el definitivo es el que tiene por línea media el polígono funicular $Aed\dots a$.

1103. Relación entre el perfil más conveniente de la bóveda y la distribución de las cargas. — A todo cambio brusco de magnitud de las fuerzas exteriores corresponde un ángulo menos obtuso en el polígono funicular, es decir, en la línea media trazada en el espesor de la bóveda. Así vemos, figura 21, lám. 52) que el ángulo dcb es más cerrado que los demás del polígono, porque corresponde á un cambio brusco de inclinación de los radios polares Om, On , debido á la notable diferencia de magnitudes de las fuerzas **1 y 2**. En cambio, como las fuerzas **3 y 4** son pequeñas y poco diferentes, el ángulo Aed es muy obtuso.

En la fig. 22 (lám. 52), á la fuerza **3**, mucho mayor que las restantes, corresponde un ángulo edc más cerrado que los demás del polígono. Diremos, pues, que el radio de curvatura del intradós en los diversos puntos, para una cierta distribución de fuerzas, ha de ser inversamente proporcional á la magnitud de las que están aplicadas en dichos puntos.

La forma racional de la bóveda, en el caso de estar concentrada la carga en la clave, sería, pues, la que manifiesta la fig. 23 (lám. 52); y en el caso

que la carga esté aplicada en los riñones, la que indica la fig. 24 (lám. 52).

Estudiemos ahora el problema recíproco, el de hallar la carga más conveniente para un cierto perfil de intradós.

1104. Bóvedas de medio punto (fig. 1.^a, lám. 53). — Admítase que si se convierte en volumen de mampostería la sobrecarga soportada por un medio punto, las cargas que producen efecto más favorable, esto es, las que dan lugar á una curva de presiones que coincide sensiblemente con la línea media trazada en el espesor de la bóveda, están representadas por el área de la superficie limitada por el intradós AMa y la horizontal NH , trazada por un punto H que dista de a la cantidad $Ha = \frac{1}{8} \times Fa$.

Supongamos que por los métodos que se explican en los núms. **1099 y 1110**, se ha determinado esta línea más conveniente NH , sea cualquiera la relación $\frac{Ha}{Fa}$, que es independiente de los razonamientos que vamos á exponer, y llamemos *carga normal* á la $NHaA$. Las fuerzas ó cargas parciales están representadas por las ordenadas inscritas Ha, EM , etc.

Si la recta horizontal que limita la carga es superior á HN , por ejemplo la RT' (fig. 2.^a, lám. 53), la resultante R_1 se aproxima al plano vertical medio HF , y determinando la curva de presiones se halla que la nr , correspondiente á la sobrecarga HN , se convierte en la ns . El centro de presión n en la clave se acerca al trasdós, y el plano de fractura que antes era z ocupa ahora la posición z' más próxima á la clave.

A medida que el plano RT' se aleja de la clave, esto es, cuando las cargas aumentan y tienden á distribuirse uniformemente, el centro de presión n en la clave se acerca á b y llega á salir del espesor de la bóveda, y el correspondiente á la junta de fractura se aproxima al intradós, rompiéndose la bóveda del modo que señala la fig. 1.^a (lám. 52). Cuando la sobrecarga está limitada por la curva ST (fig. 2.^a, lám. 53), con mayor razón se verificarán los hechos que dejamos consignados.

Si se quiere obtener una curva de presiones igual á la correspondiente á la carga normal NH , será preciso que la superficie límite de las cargas, superior al plano NH , tenga la forma fDe (fig. 1.^a, lám. 53), de modo que se verifique

$$\frac{ea}{Ha} = \frac{DM}{EM} = \dots$$

porque entonces estamos en el caso explicado en el núm. **1101**.

Cuando el plano eL es inferior al MN (fig. 3.^a, lám. 53), la resultante R' se aleja del plano vertical medio, y la curva de presiones mr correspondiente á la carga normal se convierte en la ns que se acerca al trasdós en los riñones de la bóveda y al intradós en la clave y arranques; de modo que la fractura llegaría á operarse como manifiesta la fig. 4.^a (lám. 53). Con mayor razón sucedería esto mismo si la superficie límite de las cargas que pasa por el punto e inferior al M fuese el eH (fig. 3.^a, lám. 53). La superficie conveniente es la cd (fig. 1.^a, lám. 53), siendo

$$\frac{ca}{Ha} = \frac{VM}{EM} = \dots$$

Dedúcese de lo que antecede, lo siguiente: Para las bóvedas de medio punto hay una sobrecarga, convertida en mampostería, limitada por un plano horizontal NH , que produce una curva de presiones conveniente, poco diferente de la línea media trazada en el espesor de la bóveda.

Si la sobrecarga, convertida en mampostería, está limitada por una superficie que pasa por un punto e superior al H , conviene sea ésta la curva fDe , lo cual equivale á decir que habrán de practicarse aligeramientos en los tímpanos cerca de la clave.

En el caso de que la superficie límite sea inferior al plano NH , deberá tener la forma cVd , es decir, habrán de aligerarse los riñones de la bóveda.

Los aligeramientos que se practican en los tímpanos por medio de arcos transversales ó longitudinales son, pues, convenientes, pero no pueden hacerse de modo cualquiera, porque lejos de favorecer á la estabilidad y resistencia de la bóveda pueden perjudicarla si se practican arbitrariamente, modificando desfavorablemente la posición de la curva de presiones.

Por iguales motivos no es conveniente la disposición de cargas concentradas dibujadas en la fig. 5.^a (lám. 53), que es caso análogo al de la curva ST de la fig. 2.^a (lám. 53); ni tampoco el que representa la fig. 6.^a (lám. 53), parecido al de la curva eH de la fig. 3.^a (lám. 53). En estos casos es preferible que la clave y los riñones estén cargados, dividiendo al efecto la luz de la bóveda inferior en cuatro ó más partes, cuantas más mejor, para obtener la distancia entre ejes de las pilas de las bóvedas superiores (fig. 9.^a, lám. 52).

1105. Bóvedas escarzanas. — La horizontal NH que limita la carga normal (fig. 1.^a, lám. 53) está más próxima al punto a en los arcos escarzanos que en los de medio punto; pero en cambio las variaciones en la magnitud de la sobrecarga, esto es, en la posición de la línea NH , modifican de modo

mucho menos sensible la forma y situación del polígono de presiones, y estas particularidades se acentúan tanto más cuanto más rebajada sea la bóveda.

Resulta, por lo tanto, que las bóvedas escarzanas tienen mayor aptitud que las de medio punto para recibir sobrecargas de altura variable. También puede, en las bóvedas escarzanas, recargarse los riñones sin que el centro de presión en la clave se acerque al trasdós demasiado.

Por estas razones es conveniente el trazado de la curva de trasdós que representa la fig. 7.^a (lám. 53) en los arcos de medio punto, pues el arranque de la bóveda puede considerarse trasladado á CD , á causa del sobreespesor dado á la región AC , y para los efectos del trazado de la curva de presiones y los que se derivan relativos á la estabilidad y resistencia de la bóveda, el medio punto MA está sustituido por el arco escarzano MC . Del mismo modo el trazado rn (fig. 10, lám. 52) es preferible al rmn .

En las pilas (fig. 8.^a, lám. 53), los planos de arranque pueden suponerse trasladados á AB , AC , pasando por el punto A de intersección de los trasdoses, ó á DF , EH , en el caso de que éstos se unan por el plano DE .

1106. Elipses rebajadas. Arcos carponeles. — El radio de curvatura del intradós es un máximo en la clave y un mínimo en los arranques. Según lo demostrado en el núm. **1103**, estas bóvedas son á propósito para cargas que se distribuyan desigualmente, de modo que tengan pequeño valor en la clave y sean de gran magnitud en los riñones. En este caso se encuentran las bóvedas de puente, porque la sobrecarga en la clave es pequeña en general y crece rápidamente hacia los arranques.

1107. Ojivas. Arcos peraltados de todas formas. — Como ya dijimos en el núm. **1103**, esta clase de bóvedas es á propósito para resistir cargas que aumenten desde los arranques á la clave, siendo un máximo en este último punto.

En una bóveda ojival sometida á la acción de su propio peso, la curva de presiones man (fig. 9.^a, lám. 53) se acerca al intradós en la clave y arranques y al intradós en los riñones, y la fractura tiende á operarse del modo representado por la fig. 3.^a (lám. 52). Si las cargas se distribuyen de modo desigual, aumentando hacia la clave (fig. 9.^a, lám. 53), la curva de presiones rcs se aproxima á la línea media, acercándose al trasdós el centro de presión r en la clave, y al intradós el correspondiente á la junta de fractura (*).

Las bóvedas ojivales agudas son muy á propósito para soportar cargas

(*) Por esta razón los arquitectos de la Edad Media cargaban las claves de los arcos ojivos con florones y adornos de gran peso.

concentradas en la clave, y tanto éstas como las peraltadas de forma cualquiera, dan menor empuje N en los arranques.

1108. Dinteles. — Los dinteles tienden á abrirse por el intradós en a y b (fig. 10, lám. 53) y por el trasdós en B y C . Su resistencia es pequeña: en realidad, la del arco $EMHDNA$ inscrito; de modo que las partes AND de intradós y BME, MCH de trasdós son inútiles para la resistencia; de aquí la forma que representa la fig. 11 (lám. 53) dada por algunos constructores.

1109. Límite superior de la luz en las grandes bóvedas. — La mayor bóveda cilíndrica construída hasta hoy, se debe á los ingenieros italianos del siglo XIV, que construyeron en Trezzo, sobre el Adda, un puente, destruído en 1416, de 72,15 metros de luz y 20,70 metros de flecha. Siguen á éste los puentes de Cabin John, cerca de Washington (67 metros de luz y 17,60 metros de flecha); de Lavour, en Francia (61,50 metros de luz y 27,50 metros de flecha), y de Chester, en Inglaterra (61 metros de luz y 12,81 metros de flecha).

M. Résal ha verificado los cálculos de una bóveda de medio punto de 150 metros de luz, siendo de 2 metros el espesor en la clave y 4 metros en las juntas de fractura, y ha hallado que las presiones máximas por centímetro cuadrado, desarrolladas por el peso propio de las dovelas en la hipótesis de emplear piedra de 2500 kilogramos de peso por metro cúbico, son:

Clave.....	83 kilogramos.
Junta inclinada á 60°.....	41 »
Junta de fractura (inclinada á 49°).....	65 »

Deduca la posibilidad de construir bóvedas cilíndricas de luces superiores á 100 metros.

COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO Y RESISTENCIA DE UNA BÓVEDA CUANDO SE TIENE EN CUENTA LA ADHERENCIA DE LOS MORTEROS

1110. Trazado exacto del polígono de presiones. — Si conociésemos el empuje horizontal N en la clave y un punto de paso del polígono de presiones, se podría hacer el trazado de éste con toda exactitud. Al efecto (figura 13, lám. 52), se construiría el triángulo de fuerzas de catetos $OA = N$ y $AB =$ resultante R , de las cargas, se dibujarían los radios polares correspondientes OC, OD , etc., y por el punto dado de paso de uno de los lados del polígono de presiones se trazaría la paralela al radio polar correspon-

diente hasta que cortase á la fuerza próxima, continuándose el trazado de la parte restante como ya sabemos. Por ejemplo, si el punto dado es el c , correspondiente al último lado del polígono de presiones y situado en la vertical mc que pasa por el punto medio del arranque, se dibujaría cd paralela á OB , y de, er , etc., paralelas á OE, OD , etc.

La determinación del valor de N y de la posición del punto de paso de uno cualquiera de los lados del polígono de presiones, se hace aplicando á las bóvedas la teoría de los arcos metálicos explicada en el capítulo XII, como vamos á ver. Antes manifestaremos que las bóvedas de hormigón ó mampostería, cuando se emplean morteros cuya adherencia á los materiales y resistencia á la extensión son apreciables, especialmente si se hace uso de los cementos ó morteros de cemento, pueden considerarse como monolitos cuya capacidad para resistir extensiones permite asimilarlos á los arcos metálicos, siéndoles perfectamente aplicable la teoría de las piezas curvas antes citada.

Hemos visto en el núm. 951 (fig. 12, lám. 45) que el momento de flexión μ en una sección cualquiera CD es igual al producto del empuje horizontal N por la distancia vertical $om = z$ del centro de gravedad de la sección al polígono de presiones; de modo que

$$\mu = Nz \quad \text{ó} \quad z = \frac{\mu}{N}$$

Según esto, si dibujamos la línea media mne del espesor de la bóveda (fig. 13, lám. 52), la distancia nh , que proporciona un punto de paso h del polígono de presiones, se obtendrá dividiendo el momento de flexión μ , relativo á la sección HL que pasa por n , por el empuje N .

En el plano de arranque ab , la ordenada $mc = z_0$ será, llamando μ_0 al momento de flexión en ab , que no es otra cosa que el momento de empujamiento,

$$z_0 = \frac{\mu_0}{N};$$

N y μ_0 se determinan por las ecuaciones (20) y (21) del núm. 968, del modo que se explica en el núm. 975 [ecuaciones (25) y (26)]. Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} A - BN + C\mu_0 &= 0 \\ D - CN + E\mu_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mu_0 = \frac{BD - AC}{C^2 - BE} \quad N = \frac{CD - AE}{C^2 - BE}$$

siendo A, B, C , etc., los valores hallados por cuadraturas, de las integrales que hacen de coeficientes en las ecuaciones (20) y (21) del núm. 968 (véase también el núm. 975). Será, en definitiva,

$$z_0 = mc = \frac{BD - AC}{CD - AE}.$$

1111. Comprobación de la estabilidad y resistencia. — Trazado el polígono de presiones, la estabilidad y resistencia se comprobarán del modo explicado en los núms. 1094 y 1099. Por lo demás, el trabajo por extensión y compresión en el intradós y trasdós puede determinarse, sin necesidad de trazar dicho polígono, por la fórmula del núm. 972

$$R = \frac{\mu v}{I} \pm \frac{P}{\omega}$$

como si se tratase de un arco metálico, siendo dado μ , momento de flexión en un plano de junta ideal cualquiera, por la ecuación (19) del núm. 968,

$$\mu = M - Ny + \mu_0.$$

1112. Resistencia considerable de las bóvedas de cemento. — En las bóvedas de materiales cualquiera unidos con mortero de cemento, como la resistencia á la extensión puede alcanzar valor no despreciable, no es condición precisa que el polígono de presiones esté contenido en el tercio medio del espesor de la bóveda, sino que puede estar fuera de este tercio medio, y aun de la bóveda misma, como en los arcos metálicos, y ésta es la explicación de la resistencia grande que se obtiene con espesores pequeños (*).

(*) Entre los numerosos ejemplos que podríamos citar en demostración de la resistencia considerable de esta clase de bóvedas, mencionaremos la siguiente experiencia que hemos presenciado, preparada por el comandante Ripollés, ingeniero director de las obras del cuartel de María Cristina. Se construyeron dos bovedillas contiguas sobre hierros doble T , como en los 1.º y 2.º; la luz era de 1,94 metros y la flecha de 0,02 metros en una de las bovedillas y de 0,016 en otra, es decir, casi planas. Estaban construidas con rasilla hueca de Santigós, formando dos tabicas á juntas encontradas, recibidas con mortero de cemento Zumaya, de 1 de cemento y 1 de arena. La bovedilla de 0,02 metros de luz (número 1) estaba guarnecida en el intradós y trasdós con un tendido de mortero de cemento de igual composición, y la de 0,016 metros de flecha (número 2) tenía únicamente en el intradós un tendido de yeso, resultando á la número 1 un espesor de 0,073 metros, comprendiendo rasillas y enlucido, y á la número 2 un yeso de 0,076 metros.

Fueron cargadas con ladrillos ordinarios, colocados de modo que pesasen por completo sobre las bovedillas sin que pudiesen descargar una parte del peso sobre los hierros doble T de donde arrancaban. Recibieron primeramente, y de modo gradual, una carga de 581 kilogramos por metro cuadrado,

1112' Bóvedas articuladas. — La teoría de la estabilidad de las bóvedas de mampostería encierra mucha indeterminación, y no se tiene en cuenta en ella, como fuera de desear, la resistencia de los materiales ni la adherencia de los morteros. Y, sin embargo, hoy es frecuente el empleo de materiales de pequeño volumen, ligados por morteros enérgicos, en sustitución de las enormes dovelas de sillería empleadas por Perronet, y las bóvedas de cemento se portan como verdaderos arcos metálicos, de modo que podrían calcularse como éstos, siempre que se tuviese perfecto conocimiento del coeficiente de elasticidad de las mamposterías.

Pero aun limitándonos á las antiguas teorías y prescindiendo de toda adherencia de los morteros, no hay modo de saber con fijeza la posición del polígono de presiones. Como ya hemos visto (núm. 1094), Méry salva la indeterminación suponiendo que pasa por el tercio superior de la junta de clave y por el tercio inferior de las juntas de fractura. Esta posición límite está fijada arbitrariamente, para hacer trabajar por compresión toda la superficie de las juntas, admitiendo la repartición de fuerzas según la ley del trapecio.

M. Durand-Clay (núm. 1099) disminuye la indeterminación fijando límites de las posiciones de los centros de presión en los puntos de clave y de fractura, es decir, determinando los polígonos de presiones entre los cuales están comprendidos todos aquellos que aseguran el equilibrio de una bóveda. Pero subsiste la indeterminación en cuanto al verdadero polígono de presión, que debe ser único para una carga dada.

Como vemos, en ambos métodos se desconoce el polígono de presiones verdadero, y, por lo tanto, la repartición de presiones en cada junta y la presión máxima por unidad superficial que soporta el material. No se podrá, así, conocer cuál es el coeficiente de seguridad de la construcción.

Si fuese posible establecer articulaciones en algunas juntas, á semejanza de lo que se hace en los arcos metálicos, que se articulan en los arranques y en la clave, el problema del equilibrio y resistencia de las bóvedas quedaría resuelto; pues estas articulaciones son puntos de paso obligados del polígono de presiones, y ya hemos visto en el núm. 1094, que una vez conocidos tres puntos, el problema es determinado. Pero las articulaciones no pueden establecerse en los puentes de mampostería, como se hace en los arcos metálicos.

descendiendo la clave de la bovedilla número 1 milímetro y medio, y dos milímetros la 2. Esta gran carga pesó sobre las bovedillas durante doce horas, al cabo de las cuales la número 2 había sufrido un descenso en la clave de 1 centímetro. Aumentando los pesos en los dos, la fractura de la número 2 tuvo lugar con 1100 kilogramos por metro cuadrado y determinó la de la número 1.

Son también notables los resultados de las experiencias practicadas en la comandancia de Barcelona. (Véase el Memorial de Ingenieros.)

En éstos, mediante nervios y refuerzos concentrados cerca del eje de rotación, puede obtenerse en él una sección resistente á las compresiones, equivalente en superficie á la de cualquiera junta ó sección transversal del arco; mientras que en las mamposterías, la reducción de sección necesaria para facilitar la rotación entre dos dovelas ocasionaría el aplastamiento de la piedra. Esta es la causa de que no hayan tenido éxito las tentativas de M. Dupuit y otros ingenieros que se han ocupado de esta cuestión.

El ingeniero alemán Liebrand, ha resuelto satisfactoriamente el problema, valiéndose al efecto de cuñas de plomo interpuestas en la junta *a* de clave y en las *b* de fractura (fig. 12, lám. 55). Estas cuñas, que generalmente ocupan el tercio central de la junta, tienen 20 á 22 milímetros de grueso; los otros dos tercios de longitud de junta en el trasdós é intradós, quedan libres, y como el plomo tiene, según veremos, la propiedad de no ceder lateralmente sino por efecto de una presión considerable, y ni aun entonces pierde su cohesión, resultan una especie de articulaciones, y se localiza el punto de paso de las presiones en las juntas de fractura y de clave, circunscribiendo, en límites estrechos, la zona dentro de la cual puede pasar el polígono de presiones bajo la acción de las cargas permanentes ó accidentales á que se halle sometida la bóveda.

Hemos de empezar por estudiar si el plomo y piedra son susceptibles de resistir las presiones localizadas en la superficie reducida de la junta.

1112". De las experiencias realizadas en el gabinete de ensayo de materiales de la Escuela Politécnica de Stuttgart, se deduce:

El plomo fundido, ordinario, de densidad 11,3, en forma de cubos de 0,08 metros de lado, puede soportar, durante veintiséis horas, sin ceder lateralmente, presiones de 70 kilogramos por cm.². A 72 kilogramos por cm.², empieza á ceder lentamente. Aumentando la carga de diez en diez minutos hasta 300 kilogramos por cm.² de la sección primitiva, aumenta ésta, aunque no considerablemente, pasando de 64 cm.² á 83 cm.², y la carga por cm.² de sección final, resulta ser así de 231 kilogramos. De 300 á 900 kilogramos por cm.² de superficie primitiva, la sección horizontal aumenta rápidamente, de tal modo, que la carga por unidad de superficie final no cambia sensiblemente; pasa de 231 á 294 kilogramos por cm.², y puede considerarse como constante.

El mismo plomo, en discos de 0,16 metros de diámetro y 0,015 metros de grueso, resiste todavía más á la compresión, y puede soportar, sin ceder, una presión de 100 kilogramos por cm.², no empezando á ceder hasta 150 kilogramos por cm.²

Si el plomo es duro, la resistencia es mucho mayor. En cubos de 0,08 metros de lado, resiste, sin deformarse, una presión permanente de 250 kilogramos por cm.², y la deformación empieza á 300 kilogramos por cm.²

Estas propiedades del plomo satisfacen por completo el fin á que se le destina; pequeñas planchas pueden soportar sin deformarse grandes presiones, y cuando éstas alcanzan valor considerable, el plomo cede, se ensancha lateralmente sin perder su cohesión, y al aumentar la superficie comprimida disminuye la presión por unidad de área, cesando la deformación cuando esta presión se reduce á los límites convenientes.

Los ingenieros alemanes, en sus cálculos, suponen que el plomo ordinario, en planchas de 15 á 20 milímetros de espesor, resiste, sin ceder lateralmente, una presión de 120 kilogramos por cm.², y esta cifra admitiremos también en lo que sigue, considerándola como el límite superior de las compresiones por cm.² en la plancha de plomo, para lo cual se dará á ésta las dimensiones de base convenientes, que, según ya hemos dicho, podemos fijar en $\frac{1}{3}$ de las de la junta. En bóvedas de gran luz, en las que las presiones son considerables, habrá que emplear plomo duro, y la presión límite será mayor de 120 kilogramos.

Cuanto á la piedra de las dovelas entre las cuales se intercalan las planchas, resultan comprimidas en una parte de su base; y según lo que hemos dicho en el núm. 982 [(fórmula (1))] la carga de fractura será, llamando *C* á la longitud de la junta, y *c* á la de la plancha de plomo,

$$\bar{P} = \bar{R}' \times C \times c;$$

ó, puesto que $C = 3c$

$$P = \bar{R}' \times 3c^2 \quad \text{,,} \quad \frac{\bar{P}}{c^2} = 3\bar{R}'.$$

Esto nos dice que la carga de fractura de la piedra, por unidad de superficie, en la parte en contacto con la plancha de plomo, puede ser tres veces mayor que el coeficiente \bar{R}' de fractura de la piedra por compresión.

Supongamos que se trata de una piedra cuyo coeficiente de fractura \bar{R}' sea de 576 kilogramos por cm.² (*). Cargada por intermedio de la plancha de

(*) Esta clase de piedras fué la que empleó M. Durand-Claye para la determinación de la fórmula (1) del núm. 982.

plomo, se romperá con una presión de $3 \times 576 = 1728$ kilogramos por centímetro cuadrado; y como dicha plancha no ha de transmitirle presiones mayores de 120 kilogramos por cm.², el coeficiente de seguridad resulta ser $\frac{120}{1728} = \frac{1}{14}$. Con piedras como las empleadas por Leibbrand en sus puentes, en que \bar{R} es de 760 á 1000 kilogramos, resultan coeficientes de seguridad de $\frac{1}{19}$ á $\frac{1}{25}$.

Vemos, pues, que sin emplear piedras de resistencia excepcional, se obtienen coeficientes de seguridad grandes. Cuando las presiones en las juntas sean muy considerables, como sucede en las bóvedas de gran luz, y haya necesidad de emplear láminas de plomo duro, capaces de admitir presiones superiores á 120 kilogramos, se podrán emplear para las juntas de fractura y de clave piedras más resistentes, tales como el granito, basalto, etc.

1112''. Veamos el procedimiento que debe seguirse para la verificación de la resistencia y estabilidad de las bóvedas articuladas, y cómo queda limitada la indeterminación en lo que respecta á la posición del polígono de presiones y á los valores máximos de la compresión por unidad superficial que sufre el material.

Supondremos que las reacciones en la junta de clave y en las de fractura pasan por los puntos medios de estas juntas. Si hay simetría de cargas, fácil es hallar la resultante R ; y, mediante el triángulo de fuerzas MON , en que $MN = R$, encontraremos el empuje ON en la clave, y la reacción OM en la junta de fractura. Cuando no hay simetría de cargas, se podrá determinar, muy fácilmente también, la dirección y magnitud de las reacciones en la clave y en las juntas de fractura (núms. 956, 957 y 1094).

Ya se trate de la junta de clave, ya de la de fractura, conocemos la compresión, normal á dicha junta, que llamaremos en general P (figs. 13, 14 y 15, lám. 55). Calcularemos la longitud ab de la cuña de plomo para que la presión por cm.² en dicha cuña, suponiéndola uniformemente repartida, sea igual á 60 kilogramos por cm.² Claro es que llamando ω' al área ab , ha de ser $\omega' = \frac{P}{60}$.

Generalmente, para luces de bóveda no muy grandes, resulta ab menor que $\frac{1}{3}$ de AB ; pero haremos $ab = \frac{1}{3} AB$.

Cargada la bóveda y hecho el descimbre, tienen lugar los inevitables asentamientos y descenso de la clave, y las cuñas de plomo quedan fuertemen-

te comprimidas entre las piedras de la clave y de las juntas de fractura.

Puede suceder:

1.º Las cuñas de plomo no se deforman, y están comprimidas en toda su base (fig. 13, lám. 55). Como partimos del supuesto de que el plomo dulce se deforma y cede lateralmente por compresiones de 120 kilogramos por cm.², esto nos prueba que no se ha rebasado esta presión y que, en el caso más desfavorable, esto es, de mayor excentricidad posible del centro de presión, este centro está en n , siendo $On = Om = \frac{1}{6} ab$, ó bien $mn = \frac{1}{3} ab$. En efecto; estando el núcleo central proyectado en mn (núm. 995), si el punto de aplicación de la fuerza P fuese exterior á mn , no estará comprimida toda la base ab , como ha resultado. Así, pues, lo más que puede suceder es que la presión por unidad superficial sea cero en a y aumente gradualmente hasta b según la ley del trapecio, estando representadas las presiones por las ordenadas de la recta ac , lo cual supone (núm. 995) que P está aplicada en n , y que $bc = 2 \times Od$, esto es, que la presión por cm.² en b es de $2 \times 60 = 120$ kilogramos. He aquí la razón de haber calculado la dimensión ab de modo que resultase una presión uniforme, media, Od de 60 kilogramos por cm.²; así la compresión máxima no puede exceder de 120 kilogramos por cm.², que es la máxima que soporta el plomo dulce sin ceder lateralmente.

Claro es que puede suceder que la presión en a no sea cero, y entonces la presión en b será menor de 120 kilogramos por cm.² En suma: el centro de presión ó punto de paso de la reacción en la clave está entre O y n ; y como $On = \frac{1}{6} ab$, y ab es, á lo más, igual á $\frac{1}{3} AB$, resulta $On < \frac{1}{18} AB$. Quiere esto decir que el error que hemos cometido al suponer como punto de paso del polígono de presiones el centro O de la junta es, á lo más, igual á $\frac{1}{18}$ de la longitud de esta junta.

Este error es insignificante; para $AB = 1$ metro, es $On = 0,055$ metros; y si $AB = 0,8$ metros resulta $On = 0,044$ metros.

Cuanto dejamos dicho, es aplicable á la junta de fractura (fig. 14, lámina 55).

2.º La cuña no resulta comprimida en toda su base (fig. 15, lám. 55). Concéntrase la presión P en pequeña superficie; la presión por cm.² es superior á 120 kilogramos, y el plomo cede lateralmente hasta que la compresión es menor que esta cantidad.

En la base $a'b'$, las presiones por cm.^2 varían como las ordenadas de la recta $a'd$, siendo cero en a' , 120 kilogramos en b y 60 kilogramos en O' . La resultante P de las presiones pasa por n , siendo

$$O'n = \frac{1}{6} a'b.$$

Generalmente es pequeña la parte de cuña aa' no comprimida, de modo que el error On cometido en la posición del centro de presión, es también una pequeña fracción de la longitud AB de la junta.

Conocidos los verdaderos puntos de paso de las presiones en la junta de clave y en las de fractura, puntos que, según hemos visto, distan muy poco de los centros de dichas juntas, podremos determinar con toda exactitud el valor de las reacciones en la clave y juntas de fractura, el polígono de presiones y el valor de éstas en cada junta, y calcular, por lo tanto, de modo racional el espesor que ha de darse á la bóveda; pues si resultasen pequeñas ó grandes estas presiones, se modificaría por un nuevo tanteo el perfil transversal, para que en él quede inscrito, de modo conveniente, el polígono de las presiones, procurando siempre que las posiciones límites de estos polígonos, correspondientes á las diversas combinaciones de sobrecargas permanentes ó accidentales, pasen á tal distancia del intradós ó del trasdós, que el coeficiente de seguridad aceptado para las juntas de fractura y de clave, se mantengan con igual valor, cuando menos, en las demás juntas.

CÁLCULO DE LOS ESTRIBOS

1113. Cálculo de los estribos. Coeficiente de estabilidad. — Una vez conocida la presión F en el arranque, en magnitud, posición y dirección (fig. 12, lám. 53), se continuará la construcción del polígono de las presiones en el espesor del estribo del modo explicado en los núms. 1065 y 1066, comprobando las condiciones de su estabilidad y resistencia según ya se ha explicado en otro lugar (núms. 995, 1005 y 1066). El último lado de este polígono, ó sea la presión H en la base ed del estribo, se puede obtener directamente componiendo la fuerza F con el peso P de un metro de longitud del estribo, contado perpendicularmente al plano de la figura.

El centro de presión c ha de estar contenido en la base ed y lo más cerca

que posible sea de su punto medio. La relación $\frac{ed}{cd} = K$ es llamada por algunos ingenieros *coeficiente de estabilidad*. La cantidad K tendrá por valor la unidad cuando c y e coinciden, y será menor que 1 si c está situado al exterior, á la izquierda de e .

En general, se considera como valor conveniente $K = 1,50$; pero debe comprobarse, en todos casos, que la presión por unidad superficial en e no excede del coeficiente de trabajo ordinario.

Para las pilas de los puentes se hace $K = 1$; y si las bóvedas son rebajadas, $K = 0,80$ á $0,90$.

El coeficiente de estabilidad, según otros ingenieros, está expresado por el cociente $\frac{P \times es}{E \times rd}$, cuyo dividendo es el momento del peso del estribo con relación á la arista exterior e de su pie, siendo el divisor el momento del empuje E de la bóveda, es decir, de la componente horizontal de la presión F , con respecto á la misma recta proyectada en e .

1114. Estribo sometido al empuje de tierras. — Se compondrá la fuerza F con el peso P (fig. 13, lám. 53), y su resultante R con el empuje E_0 de las tierras correspondiente á toda la altura eu de estribo. Así obtendremos la resultante final H y su punto de aplicación c . Haciendo igual construcción para otro plano horizontal cualquiera AB sin más diferencia que la de ser P' y E'_0 , respectivamente, el peso de $AurB$ y el empuje en la parte Au , se hallaría en posición y magnitud la presión en dicho plano, y repitiendo la operación en otras hiladas se trazaría el polígono de presiones, que en el límite se convierte en la curva ac (fig. 14, lám. 53).

Es suficiente hacer la construcción precedente en la base, y una ó dos hiladas comprobando después en cada una de ellas las condiciones de estabilidad y resistencia.

Cuando la luz y sobrecargas son de consideración, el empuje de las tierras es de poca importancia, porque el espesor que ha de darse á los estribos en razón al empuje considerable de la bóveda, pone éstos á cubierto de los efectos perjudiciales que el de las tierras es capaz de causar; pero en bóvedas de pequeña luz y altura grande de estribos, puede ocurrir la ruina de la obra de uno de los modos siguientes:

1.º (Fig. 15, lám. 53.) Se abren los estribos por los paramentos interiores y la bóveda por el intradós en la clave. Se evita dando espesor suficiente á los estribos ó construyendo la bóveda A (fig. 16, lám. 53), cuyos empujes contrarrestan los de las tierras.

2.º (Fig. 17, lám. 53.) Los dos estribos se acercan en A y en B , disminuye la distancia AB y la bóveda se abre en el trasdós en C . Se evita cargando la clave ó empleando una bóveda más rebajada que dé mayores empujes en los arranques.

3.º (Fig. 18, lám. 53.) Se acercan los estribos por sus bases. Se evita estableciendo un emparrillado ó un zampeado en forma de bóveda invertida (líneas de puntos).

4.º (Fig. 19, lám. 53.) La bóveda y estribos giran alrededor de la arista A . Se evita terraplenando á un tiempo por las dos caras AC , BD , y asentando preliminarmente la base AB .

2. BÓVEDAS DE VARIAS CLASES

1115. Bóvedas por arista. — Las figs. 20 á 24, lám. 53, representan, en proyecciones horizontal y verticales, la cuarta parte de una bóveda por arista, cuyo aristón es CO , $C'O'$, $C''O''$. Para considerar el caso más general, hemos supuesto que la línea XO , X_1O_1 , no es recta, como correspondería á bóvedas de cañón horizontal, sino curva.

La parte de bóveda OCX se puede considerar dividida en una serie de arcos bcc_1b_1 , $xyzb_1$, etc., cuyos arranques están en el aristón CO , y lo mismo diremos de la bóveda DCO . Todos estos arcos se calcularán aparte, como ya se ha explicado en los núms. 1094, 1099 y 1110. El problema nuevo es el del cálculo del aristón CO .

Consideremos la dovela $mabcd$; el arco bcc_1b_1 la transmitirá su peso P' y un empuje horizontal F' , y el arco $maru$ producirá una compresión vertical P igual á su peso y un empuje horizontal F .

Los empujes horizontales F , F' están generalmente contrarrestados por las partes de bóveda A' , B' inmediatas; de modo que el aristón CO puede considerarse como un arco sometido á fuerzas verticales $P + P'$ en cada dovela, es decir, al peso de las semibóvedas CDO , COX . En vista de esto (fig. 23, lám. 53), se determinarán las fuerzas 1, 2, 3, etc., y se construirá la curva de presiones del modo ya explicado en el núm. 1094, comprobándose así las condiciones de estabilidad y resistencia.

Si por circunstancias especiales hay que tomar en consideración los empujes horizontales F , F' de los arcos (fig. 20, lám. 53), se determinará su resultante, la cual ha de estar contenida en el plano vertical que contiene el aristón CO (*), y se combinará con el peso de la dovela $mabcd$; y proce-

(*) Suponiendo que la bóveda está sometida á la acción de su peso solamente, los empujes, F , F' son proporcionales á las luces dc_1 , bb_1 , etc., ó au , av , etc.; y como estas magnitudes lo son á la distancia Oc_1 , etc., Ov , etc., al formar los paralelógramos de fuerzas las resultantes parciales de F , F' y la final E , resultan en la misma dirección CO .

diendo de este modo en todas las dovelas, obtendremos las fuerzas $1', 2', \dots$ etcétera (fig. 24, lám. 53), que obran en cada una, y su resultante TZ . Tomando los centros de presión n y o en la clave y en la junta de fractura, se construirá el triángulo TZV , que dará el valor del empuje VZ , así como los radios polares $O'N, O'M$, etc., representarán las presiones en las juntas, siendo fácil, con todos estos datos, dibujar el polígono de presiones y comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia del arístón.

Para examinar las condiciones de estabilidad y resistencia del pilar C , es necesario conocer previamente la resultante E de todos los empujes horizontales F, F' de las diversas partes en que hemos supuesto divididas las bóvedas. Los empujes causados por los diversos arcos Cc_1, cb_1, bz , etc., disminuyen gradualmente, en la misma razón que las luces CX, dc_1 , etc., desde el máximo que corresponde al arco CX , hasta el punto O en que el empuje es cero; de modo que si hallamos el empuje horizontal del arco de semiluz CX y longitud unidad, y lo multiplicamos por la mitad de la longitud OX , obtendremos el empuje total horizontal que produce en el pilar C la bóveda COX , y de la misma manera se determinaría el causado por la bóveda CDO y la resultante E de los dos empujes, que estará contenida en el plano proyectado en CO (*).

Al pilar C se trasmite el peso de toda la parte $CDOX$, ó sea la cuarta parte de la bóveda por arista. El conocimiento de este peso y el del empuje E permitirá comprobar la estabilidad y resistencia del pilar (núm. 1113).

Si existen los arcos formeros K y K' , deberán tenerse en cuenta también sus empujes.

Cuando á la izquierda de A' haya otra bóveda por arista, los empujes H'' de las dos se contrarrestan, y no existen más que los F . Si, además, existiese otra bóveda en B' , también se equilibrarían los empujes H' , y el pilar estaría sometido tan sólo al peso de todas las semibóvedas que de él arrancan.

1116. Bóvedas de revolución.—Cualquiera que sea la forma de la línea generatriz, las bóvedas de revolución se aparejan por superficies cónicas de lecho y sobrelecho y planos de junta que pasan por el eje (fig. 25, lám. 53).

Una dovela cualquiera $mnrs, m'n'r's'$, recibe de las inmediatas de la misma hilada presiones F normales á los planos de junta, cuya resultante H está situada en el plano medio OM . La dovela, obedeciendo á su propio peso P' tiende á girar alrededor de la recta proyectada en n ; pero entonces,

(*) Por las razones expuestas en la nota anterior.

acuciándose entre las dos inmediatas, se desarrollan las fuerzas F , y su resultante horizontal H se opone á la rotación.

Resulta de cuanto precede que las bóvedas de revolución gozan de la propiedad de estar sus hiladas independientemente en equilibrio, y que la cimbra no es necesaria sino para la construcción de cada una de estas hiladas, pues cerrada ó completada que sea, se mantiene en equilibrio aunque falten nuevas hiladas para la terminación de la bóveda. Puede, por tanto, considerarse una bóveda de revolución como compuesta de una serie de anillos superpuestos; el primero descansa sobre los arranques, el segundo sobre el primero, y así sucesivamente, pudiendo dejar, si se quiere, un hueco ó linterna en la parte superior cargado con cimborio ó de otro modo, pues que, á diferencia de las bóvedas cilíndricas, no necesitan cerrarse en la clave para estar en equilibrio.

En vista de lo expuesto, las presiones que cada hilada ó anillo ejerce sobre la inmediata inferior han de ser normales á las superficies cónicas de lecho, pues cada hilada descansa sobre la inferior como las de un muro recto.

Para construir la curva de las presiones es necesario el conocimiento de un punto de paso. Lo supondremos comprendido en el tercio medio de la junta rn superior: por ejemplo, que sea el a , medio de dicha junta; y trazando la perpendicular ab hasta su encuentro con P , peso de np en la parte comprendida por los planos meridianos OA, OC , que consideramos, se podrá construir el triángulo de fuerzas obc que da la presión normal ob en la junta y la fuerza horizontal oc , que es la H resultante de las presiones F laterales, correspondiente á la dovela np .

Prolongando ob hasta su encuentro con P' , peso de la dovela inmediata, y componiendo estas dos fuerzas, obtendremos la de que se descompondrá en otras dos; la df , perpendicular á sm , y la horizontal ef . La perpendicular df es la presión desarrollada en sm por la parte superior de bóveda mnp , y la magnitud ef es la fuerza horizontal que proviene de las presiones laterales en los planos de junta OA, OC .

Del mismo modo, combinando df con P'' , que es el peso de la dovela inmediata inferior limitada por los planos OA, OC , se obtendrá tx que se descompondrá en la fuerza horizontal zx y en la presión normal tz . El polígono de presiones es $bdtz\dots$ y servirá para la comprobación de las condiciones de estabilidad y resistencia de la bóveda, según ya hemos explicado en las bóvedas cilíndricas.

1117. Arcos botaretes.—La bóveda KS produce un empuje oblicuo Q (fig. 26, lám. 53) que es la resultante de su peso y del empuje horizontal

en *S*. Para contrarrestar *Q* se construye el arco botarete *AB* que va desde el arranque *S* hasta el botarel *Z*.

Fijada la posición de la junta *CD* de fractura, correspondiente al semiarco *AB* (núms. 1079 y 1080), se tomará el tercio inferior *CE*, así como el superior *Am* de la junta *An* de clave, y una vez determinada la magnitud y posición de la resultante *HL* de los pesos de la parte comprendida por los planos *nr*, *Ct*, se construirá el triángulo de fuerzas *LHM* que da el empuje *LM* en *A* y el oblicuo *HM* en *CD*.

El empuje $LM = ac$, compuesto con el peso ac' de *FO*, da la resultante $T = ad$, que ha de contrarrestar el empuje *Q*. Componiendo *T* y *Q* se obtiene la resultante definitiva *X* que da la magnitud de la compresión en el plano *A'B'* y su punto de aplicación.

El empuje *HM*, combinado con el peso *P* de la parte *C'CDM'*, da á conocer la compresión *R* en el plano *C'D'* y su punto de aplicación. Con estos datos se puede efectuar la comprobación de la estabilidad y resistencia del botarete y del botarel.

XV

PILAS

1. PILAS METÁLICAS
2. PILAS DE MAMPOSTERÍA

1. PILAS METALICAS

1118. Generalidades. — Las pilas metálicas están sometidas:

- 1.º Á esfuerzos verticales ó cargas.
- 2.º Á esfuerzos horizontales, producidos por el viento.

Para el cálculo de resistencia de todas las piezas de una pila hay que tomar en cuenta la combinación de estos esfuerzos.

Una pila metálica se compone, principalmente, de cuatro montantes *A* (figs. 5.ª y 6.ª, lám. 55), rectos ó curvos, que forman como las aristas de un cuerpo cuyas secciones horizontales son rectángulos que tienen su lado mayor en sentido trasversal al viaducto. Los montantes están ligados por una triangulación ó celosía, formada de riostras horizontales *a* y cruces de San Andrés *b*. En la parte superior hay un capitel metálico *C*, y toda la pila descansa sobre una base *B* de mampostería, á la cual están empotrados los montantes, y asegurados por medio de anclas *m*, todo con objeto de resistir á la rotación motivada por la presión del viento.

El cálculo de una pila metálica comprende no solamente el de los montantes y celosía, sino también la comprobación de la estabilidad, cálculo de las anclas y determinación de las deformaciones.

1119. Acción de las cargas verticales. — Si llamamos *P* á la carga que suministran á la pila los tramos inmediatos, incluyendo en ella el peso muerto y el peso móvil, y por *p* el peso propio de la pila por metro corriente, para una sección cualquiera situada á la distancia *h'* del capitel (fig. 5.ª, lám. 55), la carga total *T* vale

$$T = P + p h'.$$

La pila (figs. 5.ª, 6.ª y 7.ª, lám. 55) puede considerarse compuesta, para los efectos de la carga, de dos sistemas: uno el de los montantes (fig. 6.ª), y otro el que forman las celosías (fig. 7.ª).

Veamos de qué modo se reparte esta carga entre los montantes y las pie-

zas de la triangulación, y si las compresiones á que da nacimiento las soportan solamente los primeros, ó si es absorbida alguna parte por las segundas.

Supongamos que los montantes son verticales (*), y consideremos (figuras 8.^a y 9.^a, lám. 55) la parte comprendida por las secciones HL , $H'L'$ que pasan por los puntos inmediatos de cruce de las barras de celosía. Llamemos:

- R'_m = coeficiente de trabajo, por compresión, de los montantes.
- R'_c = íd. íd. por íd. de las barras de celosía.
- R_r = íd. íd. por extensión, de las riostras horizontales.
- ω_m = área de la sección trasversal de un montante.
- ω_c = íd. de íd. de una barra de celosía.
- ω_r = íd. de íd. de una riostra.
- l_m = longitud HH' de montante, comprendida entre las secciones HL y $H'L'$.
- l_c = longitud de una semibarra ab .
- l_r = íd. de la riostra ac .
- α = ángulo que forman las barras de la celosía con la horizontal.

Por efecto de las cargas, las deformaciones longitudinales de las diversas piezas (núm. 185), son:

$$\begin{aligned} \text{Montantes.....} \quad \text{acortamiento} &= \frac{R'_m l_m}{E} \\ \text{Semibarra de celosía.} \quad \text{acortamiento} &= \frac{R'_c l_c}{E} \\ \text{Riostra.....} \quad \text{alargamiento} &= \frac{R_r l_r}{E} \end{aligned}$$

El acortamiento de las barras de celosía, supone un descenso de su punto de cruce que es fácil calcular. Supongamos que la semibarra ab (fig. 9.^a, lám. 55) ha venido á parar á am . Bajemos la perpendicular mn á ab ; y en el triángulo rectángulo $bm n$, se tiene $bm = \frac{bn}{\sin \alpha}$. Si consideramos las otras dos semibarras ab' , $b'c$ (fig. 8.^a, lám. 55), obtendremos otro descenso igual debido á su acortamiento; luego, en definitiva, el descenso entre los

(*) Las deducciones serán aproximadamente las mismas cuando los montantes estén inclinados.

planos HL y $H'L'$ por efecto del acortamiento de las barras de celosía vale

$$\frac{2 \times bn}{\sin \alpha} = \frac{2 R'_c l_c}{E \sin \alpha}$$

Con igual facilidad se determinaría que el descenso del plano HL debido al alargamiento de la riostra ac , considerando solamente el sistema formado por esta pieza y las barras $abc b'$, vale $\frac{R_r l_r}{E \operatorname{tg} \alpha}$.

En suma; si se atiende tan sólo á las piezas que forman la triangulación, la disminución de distancia entre los planos HL y $H'L'$ será la suma de los dos valores precedentes, y esta suma ha de ser igual al descenso del plano HL con respecto al $H'L'$ debido al acortamiento de los montantes. Tendremos, pues,

$$\frac{R'_m l_m}{E} = \frac{2 R'_c l_c}{E \sin \alpha} + \frac{R_r l_r}{E \operatorname{tg} \alpha} \quad (1)$$

Formando el paralelogramo $L'tec$ (fig. 8.^a, lám. 55), en que $ce = R'_c \omega_c$ y $ct = R_r \omega_r$, tenemos

$$R_r \omega_r = 2 R'_c \omega_c \cos \alpha,$$

de donde

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{2 R'_c \omega_c \cos \alpha}{\omega_r} \\ R'_c &= \frac{R_r \omega_r}{2 \omega_c \cos \alpha} \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la fórmula (1), y recordando que

$$l_c = \frac{l_m}{2 \sin \alpha} \quad \text{y} \quad l_r = \frac{l_m}{\operatorname{tg} \alpha},$$

se deduce

$$R_r = \frac{R'_m}{\frac{\omega_r}{2 \omega_c \cos \alpha \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (2)$$

$$R'_c = \frac{R'_m}{\frac{2 \omega_c \cos \alpha}{\omega_r \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (3)$$

Para $\alpha = 45^\circ$ y $\omega_r = \omega_c$, lo cual es sensiblemente exacto,

$$R_r = 0,41 R'_m$$

$$R'_r = 0,30 R'_m.$$

Para $\alpha = 60^\circ$,

$$R_r = 0,60 R'_m$$

$$R'_r = 0,60 R'_m.$$

Para $\alpha = 30^\circ$,

$$R_r = 0,19 R'_m$$

$$R'_r = 0,11 R'_m.$$

La parte de carga que soporta cada uno de los dos sistemas, montantes (fig. 6.^a) y triangulación (fig. 7.^a), puede deducirse de estos coeficientes y de la relación de secciones. Un esfuerzo vertical P' produce en las barras de celosía un coeficiente de trabajo

$$R'_c = \frac{P'}{\omega_c \sin \alpha}, \text{ de donde } P' = R'_c \omega_c \sin \alpha;$$

y una carga P'' , produce, en los montantes,

$$R'_m = \frac{P''}{\omega_m}, \text{ de donde } P'' = R'_m \omega_m.$$

La relación de esfuerzos, es, pues,

$$\frac{P'}{P''} = \frac{\omega_c R'_r \sin \alpha}{\omega_m R'_m}.$$

Admitiendo para $\frac{\omega_c}{\omega_m}$ un valor medio $\frac{1}{8}$, que es todavía superior al que en muchos casos se emplea, y dando á α los tres valores antes indicados, resulta:

α	$\frac{P'}{P''}$
45°	0,026
60°	0,065
30°	0,007

1120. De todo cuanto antecede se deducen las importantes consecuencias siguientes:

1.^a Las barras de la triangulación alivian muy poco á los montantes de la carga vertical que pesa sobre la pila (6,5 por 100 á lo más). *Se supondrá, pues, en el cálculo, que los montantes llevan toda la carga*, y se calculará el área de la sección transversal de cada uno por la fórmula (7) de la compresión en piezas de gran longitud (núm. 730), pero aceptando para coeficiente de trabajo R' un valor R' , menor que el definitivo, no olvidando que á la fatiga molecular debida á las cargas verticales, hay que sumar la R'_2 que produce la flexión ejercida en las pilas por el viento, de modo que el coeficiente de trabajo final R' ha de ser igual á $R'_1 + R'_2$.

2.^a La fatiga molecular que producen en las barras de la triangulación las cargas verticales, se determinará por las fórmulas (2) y (3). Tiene por valor máximo 0,60 R'_m .

3.^a Si se quiere reducir, en lo posible, los esfuerzos que las cargas engendran en las barras de la triangulación, se hará poco diferente de 45° el ángulo α y se disminuirá cuanto se pueda la sección de las riostras. Hemos supuesto anteriormente que $\omega_r = \omega_c$, y no suele hacerse mayor.

1121. Esfuerzos engendrados por el viento.—Estudiaremos la acción del viento cuando su dirección es perpendicular á la del viaducto. En dirección de éste, está contrarrestada por los estribos.

Sobre cada pila actúa la resultante de las presiones del viento en los dos semitramos inmediatos del viaducto, y la presión en la pila. Esta, trabajará, por lo tanto, como una viga empotrada en la base, libre en el extremo superior y solicitada por fuerzas normales á la dirección del viaducto.

Veamos el modo de calcular las presiones del viento. En los tramos del viaducto, se harán dos hipótesis; que circulen trenes ó que esté libre la vía. En el primer caso se supone que el viento actúa con una fuerza de 150 kilogramos por m.² sobre un rectángulo vertical alargado, de 2 metros de altura y de longitud igual á la de los tramos, que representa la superficie lateral de los carruajes. El lado inferior del rectángulo se supone que está distante un metro del piso de la vía. En el segundo caso, se admite una presión p , por metro cuadrado, de 270 kilogramos, y se supone que el viento obra sobre toda la superficie de las barras y cordones, ó sea de la parte llena, de la viga ó cuchillo que recibe primero la acción de dicho viento, y más atenuadamente sobre la parte llena de la segunda viga. Si llamamos

S = superficie llena que ofrece al viento la primera viga.

H = área de los claros formados por el eureka en dicha primera viga.

S' = superficie de la parte llena que presenta al viento la segunda viga,

la presión total del viento, en la hipótesis que estamos considerando de vía libre, será

$$p \times S + p \frac{H}{S} \times S' = p \left(S + \frac{HS'}{S} \right),$$

siendo $p = 270$ kilogramos por metro cuadrado.

De las dos hipótesis se aceptará la que dé presiones mayores; generalmente es la segunda.

En las pilas, la evaluación de la superficie expuesta á la presión del viento se hace del mismo modo; pero atendiendo á la mayor separación de las caras opuestas, en la base, y contando con que si la dirección del viento se separa algo de la perpendicular á la longitud del viaducto actuará sobre las caras laterales también, no se hace uso de la presión reducida sobre la segunda cara, sino que se considera que las dos, de superficies S y S' , están sometidas á la misma presión $p = 270$ kilogramos por m.², de modo que la total será $p(S + S')$.

1122. Sea X (fig. 10, lám. 55) la pila vista lateralmente, es decir, que la dirección del viaducto es perpendicular al plano del dibujo. El viento sopla en dirección V , y ejerce presión sobre las caras proyectadas en $L'A'$ y $M'N'$.

Las dos caras laterales proyectadas en $A'N'$, y compuestas cada una de dos cordones $A'L'$, $M'N'$ y un alma calada formada por las barras $A'B'$, $C'M'$, etc., y las riostras $C'B'$ forman dos vigas empotradas en $A'M'$. La mitad de la presión del viento corresponderá á cada una de las dos vigas proyectadas en $A'L'N'M'$.

A su vez, cada viga $A'L'N'M'$, puede suponerse formada de dos: una la X con los montantes, riostras $B'C'$ y barras $A'M'$ (líneas gruesas), y otra la Z , con montantes, riostras y barras inclinadas según AB . Cada una de estas vigas elementales soportará la mitad de las presiones correspondientes á la viga completa, ó sea la cuarta parte de las que sufre la pila.

Calculando separadamente los esfuerzos interiores que desarrolla la presión del viento en las piezas de las vigas X y Z , no habrá más que sumarlas algebráicamente después, por lo que respecta á las piezas comunes tales como los montantes y riostras, para tener en definitiva las compresiones y extensiones que se desarrollan en dichas piezas. Las barras AB , $M'C'$ de la celosía estarán sometidas á las extensiones y compresiones que separadamente se obtengan en cada una de las vigas elementales X y Z .

1123. Veamos el modo de determinar estos esfuerzos interiores, y con este objeto consideremos primeramente la semiviga Z .

La presión P del viento en el intervalo LQ , puede suponerse dividida en dos mitades que actúan en L y en Q , y lo mismo puede hacerse para los intervalos restantes. La presión correspondiente al viaducto será la **1**, á una distancia de L que es fácil determinar.

En definitiva, podremos suponer que las presiones del viento correspondientes á cada una de las dos vigas totales $A'L'N'M'$, son las fuerzas **1**, **2**, **3**..... **7**, que actúan en las secciones L , Q A . Estas fuerzas, que hemos sumado en ST' , son la mitad de las totales de la pila.

Tomando el polo en O , es fácil trazar el polígono funicular $Ttsrohgf$, por medio de rectas paralelas á los radios polares OT' OS .

Consideremos diversas secciones transversales I , II V , de la viga Z . Para el cálculo de las fuerzas interiores en los montantes y barras cortadas por la sección V , hemos de considerar la resultante de las fuerzas **1** á **6** que están por encima; esta resultante, que vale $1 + 2 + \dots + 6$, pasa por el punto $5'$ que se obtiene prolongando el lado fg del polígono funicular hasta su encuentro con la prolongación del Tt (núms. **410** y **416**).

Del mismo modo hallaríamos en $4'$, $3'$ $1'$, los puntos de paso de las resultantes correspondientes á las secciones IV , III I .

Volvamos á la sección V ; la resultante $1 + \dots + 6$, que pasa por $5'$, la contaremos á partir de C , punto de encuentro de la recta $5'C$ con la prolongación de la barra AB .

Recordaremos que, puesto que se trata de la semiviga $ALNM$, hemos de tomar la mitad de esta resultante, de modo que $CD = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + 6)$.

Descomponiendo la fuerza CD en dirección de la barra AB y de los dos montantes AL , MN , obtendremos las fuerzas interiores que actúan en estas piezas. La descomposición de CD en las tres direcciones indicadas es fácil (núm. **806**); uniremos el punto C con el F de encuentro de la prolongación de los montantes, y descompondremos primero CD en las dos direcciones CE y CF , trazando DE paralela á esta última recta. A su vez, se descompondrá DE en dirección de los dos montantes trazando rectas EH , DH paralelas á AF , FM .

Resulta en definitiva:

$$CD = 8 = \text{compresión de la riostra } Bx.$$

$$CE = 9 = \text{extensión de la barra } AB.$$

$EH = 10 =$ extensión de la parte Ax de montante.
 $D'H = 11 =$ compresión de la parte MB de montante.

Si hubiéramos hecho el cálculo para la semiviga $A'L'N'M'$ (X de la fig. 10, lám. 55) y barra $C'M'$, en la misma sección V , haciendo la construcción por la parte izquierda de la figura, pues así lo exige la prolongación de la barra $C'M'$, hubiéramos obtenido una figura simétrica de la $CEDH$ con respecto á la vertical, y sería entonces:

Extensión de la riostra.....	$B'C' = 8$
Compresión de la barra.....	$C'M' = 9$
Extensión del montante.....	$A'C' = 11$
Compresión del montante.....	$M'B' = 10.$

Haciendo la suma algebraica de esfuerzos interiores correspondientes á las piezas cortadas por la sección V , y á la riostra superior inmediata, resulta:

Riostra $C'B'$	$+ 8 - 8 = 0$
Barra $A'B'$	Extensión = 9
Barra $C'M'$	Compresión = 9
Montante $A'C'$	Extensión = 10 + 11
Montante $M'B'$	Compresión = 10 + 11.

Conociendo estos esfuerzos, se determinarán las escuadrías de las piezas. El montante $M'N'$ está sujeto, además, á la compresión producida por las cargas verticales, y habrá que sumar esta compresión con la 10 + 11 para el cálculo de la escuadría.

Como el viento puede soplar en dirección contraria á la supuesta anteriormente, daremos también á los montantes $A'L'$ la misma escuadría.

Iguales procedimientos emplearíamos para otra sección trasversal cualquiera de las vigas. En la fig. 10 (lám. 55) se ha hecho en $C'E'D'H'$ las construcciones para la sección III.

1124. Estabilidad de la pila y cálculo de los amarres. — Las fuerzas 1 á 6 inclusive (fig. 10, lám. 55), que son las que intervienen en la rotación de la pila alrededor de la arista proyectada en M , tienen una resultante $ab = 1 + 2 + \dots + 6$, que pasa por el punto 5'. Componiéndola con el peso ad de la sobrecarga, de la pila y de los dos semitramos inmediatos, ob-

tenemos la resultante final ac , cuyo momento con respecto á M es $ac \times Mm$. Tenemos que oponer, en el montante AQ , una fuerza F' cuyo momento $F' \times Mn$ equilibre al par de rotación $ac \times Mm$; es más, como no es posible aceptar el equilibrio estricto, y adoptando un coeficiente de seguridad igual á 2, deberá verificarse

$$F' \times Mn = 2 \times ac \times Mm,$$

de donde

$$F' = \frac{2 \times ac \times Mm}{Mn}.$$

Los montantes están anclados en la mampostería de la base según se ve en m en la fig. 5.^a (lám. 55), oponiéndose al arranque el peso de la parte situada por encima. Si, pues, apreciamos en 2500 kilogramos el peso de la mampostería, deberá haber $\frac{F'}{2500}$ metros cúbicos encima de los extremos de las anclas.

1125. Deformaciones. — Las causas de las deformaciones son: los cambios de temperatura, las cargas verticales y la acción del viento.

El acortamiento de los montantes, por efecto de las cargas verticales, se calcula por la fórmula (2) del núm. 185.

Por efecto de los descensos de temperatura, el acortamiento de los montantes es Ltr , siendo L la longitud de los montantes, r el coeficiente de dilatación (núm. 172) y t la diferencia de temperatura entre la que había en el momento del montaje de la pila, y la más baja que puede alcanzar, expresada en grados centígrados.

Cuanto á las deformaciones producidas por la presión del viento, son las que corresponden á vigas empotradas y flexadas por la acción de fuerzas normales á su eje, y la flecha se calculará por las fórmulas del cap. V (artículo 2, pág. 301), dando al coeficiente de elasticidad E los valores consignados en el núm. 860'.

2. PILAS DE MAMPOSTERÍA

1126. Pilas de puente en arco. — En los arranques NT , VS de la pila FTH (fig. 16, lám. 55), apoyan arcos que dan los empujes N' y N'' . La pila es simétrica con respecto al plano vertical XX ; dividámosla en las partes 1, 2, 3, 6, y determinemos los pesos de la mampostería de estas partes, que consideraremos como otras tantas fuerzas que han de combinarse con los empujes N' y N'' .

Seguiremos el procedimiento ya explicado en el núm. 1065.

Supondremos, para colocarnos en la hipótesis más desfavorable, que los empujes N' y N'' son diferentes, correspondiendo el N'' , por ejemplo, al caso de estar cargado el arco de la derecha, y el N' al arco de la izquierda descargado.

Fórmese el triángulo de fuerzas Oab con $Oa = N''$ y $ab = N'$; tendremos en Ob la resultante, que habrá que componer con los pesos 1, 2, 6 de los diversos elementos de la pila. A este efecto, tomaremos como polo el punto O , sumaremos los seis pesos en bc , y trazaremos los diversos radios polares, de los cuales, el último, Oc nos da la resultante final en magnitud y dirección, y los demás las resultantes parciales en las diversas hiladas. Por ejemplo: Om , es resultante de las fuerzas Ob , 1, 2, 5, de modo que si trazamos por A la paralela AD á Om , será AD la verdadera posición de la resultante en el plano KY , la magnitud de ésta es Om , y el punto de aplicación ó centro de presión el D .

Trazando por A paralelas á los diversos radios polares On , Oc , obtendremos los centros de presión B , C , etc., que unidos, nos darán el polígono de presiones $BCDE$.

Con todos estos datos, podremos comprobar las condiciones de estabilidad y resistencia de la pila (núms. 1033 á 1039).

Esta comprobación debe hacerse, principalmente, en la base de cimientos FH , para ver si las presiones por unidad superficial en F y H , son suficien-

temente pequeñas para que el terreno no sufra asientos, y en las hiladas LM , NS en que varía la anchura.

La presión máxima por centímetro cuadrado en la base FH , debe estar comprendida entre 2 y 8 kilogramos, correspondiendo el límite inferior á los terrenos malos.

Se procura que el punto E esté comprendido en el tercio medio de la base FH , pero esto no será posible cuando el cimiento sea muy profundo (LF muy grande), á menos de dar una anchura FH excesivamente grande.

Algunas veces se tiene en cuenta la subpresión P' que en el plano FH de la base causa el agua, y que depende de la altura LF del nivel del líquido sobre dicha base. Se resta entonces la subpresión P' del peso del muro; pero entonces, disminuído bc en esta cantidad, los radios polares On , Om , Oc , formarán ángulos menores con la horizontal, y los centros de presión C , D , E , se acercarán más al paramento LF , lo cual es un inconveniente.

1127. Estribo de puente en arco. — No existe simetría en la figura del estribo, con respecto á la vertical media, como en las pilas. Se desconoce la posición de la resultante de los pesos, pero puede determinarse (fig. 17, lámina 55), haciendo OA igual al empuje N del arco, dibujando el polígono de fuerzas 1, 2, 5, correspondiente á los pesos de los elementos 1, 2, 5 del estribo, tomando O como polo y dibujando el polígono funicular mn , s . El último lado da directamente la posición de la resultante final que obra sobre la base.

El polígono funicular mn , s , es una línea de presión, pero no representa la dirección de las fuerzas interiores en el macizo, y es interesante conocer esta dirección para arreglar la inclinación de los lechos, de modo que sean perpendiculares á las compresiones (líneas de puntos de la fig. 18, lámina 55). Para ello se divide el macizo del estribo en elementos verticales, (fig. 19, lám. 55), pero terminándolos un poco debajo de la línea de los esfuerzos interiores, según está marcado con pequeñas rayas en el dibujo. Esto es más exacto que el considerar prolongados estos elementos hasta la base; porque de ser así, la mampostería que se halla por debajo del paso de la reacción no podría obrar sino por tracción, lo cual no admitimos.

Con el peso de los elementos verticales 1', 2', 3', y el empuje N , tomando O como polo, se traza el polígono funicular $abcd$, que da aproximadamente la dirección media de las fuerzas interiores. Solamente interesa el trazado de esta línea en las partes próximas al apoyo; más lejos es su dirección algo indeterminada. Se terminará el trazado cuando los lados del polígono formen con la horizontal ángulos mayores que los de rozamiento de pie-

drá sobre piedra, porque entonces no son ya de temer los resbalamientos; y en la parte anterior, se aparejará el macizo según se ve en la fig. 18 (lám. 55), esto es, de modo que las hiladas sean perpendiculares á los lados del polígono de presiones.

1128. Pilas de gran altura. — Hay que tener en cuenta la acción del viento, que se ejerce sobre ella y sobre los semitramos del viaducto, y además las cargas verticales que provienen de los tramos contiguos y del peso propio de la mampostería de la pila.

Se procederá del modo explicado en el núm. **1062'** (figs. 3.^a y 4.^a, lámina 55). El polígono de presiones puede obtenerse por un procedimiento semejante al empleado en los muros de sostenimiento (núm. **1034**, figs. 5.^a y 6.^a, lám. 49), sin más que sustituir los empujes parciales E' , E'' , etc., de las tierras por las presiones del viento.

FIN

ÍNDICE DE LOS CAPÍTULOS

CAPÍTULO PRIMERO

INTRODUCCIÓN

	Páginas.
<i>Artículo 1.º — Definiciones</i>	3
Mecánica aplicada á las construcciones.....	3
Naturaleza de las fuerzas	4
Naturaleza de los cuerpos.....	7
<i>Art. 2.º — Condiciones de equilibrio y resistencia que ha de cumplir una construcción</i>	17
Orden que se sigue en este libro para la resolución de los problemas.....	20

CAPÍTULO II

CONSTANTES ESPECÍFICAS

<i>Artículo 1.º — Definiciones</i>	25
<i>Art. 2.º — Estudio de las deformaciones y de la fractura</i>	28
Deformaciones y fractura por extensión.....	28
Deformaciones y fractura por compresión.....	50
Deformaciones y fractura por esfuerzo cortante y por desgarramiento longitudinal.....	55
<i>Art. 3.º — Materiales metálicos</i>	57
Hierro	57
Acero.....	65
Fundición.....	78
Otros metales.....	82
<i>Art. 4.º — Materiales de origen pétreo</i>	93
Piedras	93
Ladrillos.....	98

	Páginas.
Morteros y yesos.....	99
Cementos.....	102
Mamposterías.....	116
Art. 5.º — <i>Materiales de origen vegetal</i>	126
Maderas.....	126
Cuerdas.....	130
Cola, clavos y tornillos.....	134

CAPÍTULO III

EXTENSIÓN Y COMPRESIÓN SIMPLES. — ESFUERZO CORTANTE Y DESGARRAMIENTO LONGITUDINAL

Artículo 1.º — <i>Extensión</i>	141
Art. 2.º — <i>Compresión</i>	150
Art. 3.º — <i>Esfuerzo cortante y desgarramiento longitudinal</i>	151
Art. 4.º — <i>Aplicación de los problemas de extensión, compresión y esfuerzo cortante</i>	152
Cuerdas de cáñamo.....	152
Piezas de madera. — Barras metálicas.....	154
Cables de alambre.....	161
Cadenas.....	164
Envolturas cilíndricas y esféricas, calderas, tubos, depósitos, etc.....	174
Pernos.....	183
Extensiones y compresiones producidas por los cambios de temperatura.....	190
Enlace de barras planas y de varillas por medio de pasadores.....	191
Rodillos.....	198
Vigas de hierro ensambladas y empalmadas. — Cálculo de las roblonaduras.....	207
Vigas de madera empalmadas y ensambladas sometidas a extensión ó compresión.....	244

CAPÍTULO IV

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS SOMETIDAS Á FUERZAS ESTÁTICAS NORMALES Á SU EJE. — FUERZAS ELÁSTICAS QUE SE DESARROLLAN

Art. 1.º — <i>Definiciones</i>	255
Art. 2.º — <i>Expresiones diversas del momento de las fuerzas elásticas</i>	257

CAPÍTULO V

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS SOMETIDAS Á FUERZAS ESTÁTICAS NORMALES Á SU EJE. — DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN, ESFUERZOS CORTANTES Y FLECHAS

	Páginas.
Artículo 1.º — <i>Piezas apoyadas en dos puntos. — Cálculo analítico</i>	267
Piezas apoyadas en dos puntos. — Cargas aisladas estáticas.....	267
Piezas apoyadas en dos puntos. — Cargas repartidas.....	274
Prismas apoyados en dos puntos. — Combinación de cargas aisladas y cargas repartidas.....	281
Piezas apoyadas en dos puntos. — Fuerzas repartidas que varían de modo uniforme.....	284
Piezas apoyadas en dos puntos. — Estudio de las deformaciones en la flexión.....	287
Art. 2.º — <i>Piezas empotradas. — Cálculo analítico</i>	301
Teoría general.....	301
Casos particulares.....	306
Art. 3.º — <i>Piezas apoyadas en varios puntos. — Cálculo analítico</i>	328
Teoría general.....	328
Casos particulares.....	336
Art. 4.º — <i>Determinación por el cálculo gráfico de los momentos de flexión M y de los esfuerzos cortantes C</i>	354
Piezas apoyadas. — Cargas aisladas y repartidas.....	354
Piezas empotradas.....	377

CAPÍTULO VI

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS SOMETIDAS Á FUERZAS NORMALES Á SU EJE. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE RESISTENCIA Y RIGIDEZ

Artículo 1.º — <i>Fuerzas interiores que se desarrollan en la flexión. — Su distribución y medida</i>	387
Extensión y compresión de las fibras.....	387
Esfuerzo rasante ó de desgarramiento longitudinal producido en la flexión.....	391
Fuerzas tangencial y de compresión producidas por la flexión en un plano de dirección cualquiera.....	403
Art. 2.º — <i>Momentos de inercia</i>	407

<i>Art. 3.º—Resolución general de los problemas de resistencia y rigidez relativos á piezas de sección constante y de sección variable.....</i>	468
Vigas de una sola pieza. — Sección constante.....	476
Vigas compuestas, de madera ó de hierro, de pequeña altura.	512
Vigas compuestas de gran altura. — Sección constante.....	551
Vigas de sección variable. — Sólidos de igual resistencia....	578
Piezas flexadas sometidas á extensión ó compresión simples.	590
<i>Art. 4.º—Aplicaciones de la flexión plana.....</i>	599
Suelos.....	599
Dinteles. — Cargaderos.....	619
Otras aplicaciones.....	623
<i>Art. 5.º—Cargas en movimiento.....</i>	631
Piezas apoyadas en sus extremos, sujetas á la acción de cargas móviles. — Momentos de flexión y esfuerzos cortantes....	631
Piezas apoyadas en los dos extremos, sometidas á choque...	672
<i>Art. 6.º—Estudio de la flexión cuando se altera el límite de elasticidad del material.—Efecto de las cargas repetidas un gran número de veces.....</i>	676
Flexión cuando se rebasa el límite de elasticidad. — Modificación de las fórmulas.....	676
Fuerzas repetidas un gran número de veces. — Coeficientes de trabajo que deben emplearse.....	690

CAPÍTULO VII

PIEZAS COMPRIMIDAS SEGÚN SU EJE, DE LONGITUD MUCHO MAYOR QUE LAS DIMENSIONES DE SU SECCIÓN TRASVERSAL

<i>Artículo 1.º—Fórmulas teóricas.....</i>	727
Resolución general del problema.....	727
Resumen de los preceptos de la teoría.	740
<i>Art. 2.º—Fórmulas prácticas.—Resolución de los problemas.....</i>	746
Construcción de las fórmulas. — Determinación de los coeficientes prácticos.....	746
Madera.....	750
Fundición.....	777
Hierro ó acero.....	806
<i>Art. 3.º—Otros casos de piezas comprimidas. — Piezas sometidas á compresión y á flexión.....</i>	819
Piezas comprimidas por fuerzas repartidas á lo largo del eje.	819
Piezas sometidas á compresión y á flexión.....	821

CAPÍTULO VIII

FLEXIÓN PLANA DE VIGAS RECTAS SOMETIDAS Á FUERZAS OBLICUAS Á SU EJE

<i>Teoría general.....</i>	833
Fuerzas paralelas.....	838
Piezas inclinadas sometidas á la acción de fuerzas verticales.	848
Aplicaciones. Cálculo de escaleras.....	868

CAPÍTULO IX

TORSIÓN

Expresión del momento de las fuerzas elásticas.....	883
Resolución de los problemas de resistencia y rigidez.....	886

CAPÍTULO X

VIGAS RECTAS DE ALMA CALADA Ó DISCONTINUA, ARTICULADAS Ó DE ENLACES RÍGIDOS

<i>Artículo 1.º—Vigas rectas articuladas sometidas á cargas estáticas.</i>	903
Preliminares.....	903
Método de Culmann.....	910
Método de Cremona ó de las figuras recíprocas.....	913
Aplicaciones.—Vigas poligonales y parabólicas. — Consolas y gruas. — Vigas armadas.—Vigas rectas de todos sistemas.	927
Método de Ritter.....	963
Trasformación de entramados.—Vigas semejantes.....	974
<i>Art. 2.º—Vigas rectas articuladas sometidas á cargas en movimiento.</i>	982
<i>Art. 3.º—Vigas de enlaces rígidos.....</i>	993

CAPÍTULO XI

ARMADURAS Y CIMBRAS

<i>Artículo 1.º—Preliminares.....</i>	997
Procedimientos generales de cálculo.....	997

	Páginas.
Determinación de las fuerzas exteriores.....	1012
Art. 2.º—Cálculo de las fuerzas interiores.....	1021
Método de Culmann.....	1021
Método de Cremona.....	1021
Método de Ritter.....	1050
Trasformación de armaduras.....	1062
Cimbras.....	1066

CAPÍTULO XII

PIEZAS CURVAS

^l Piezas curvas.....	1071
---------------------------------	------

CAPÍTULO XIII

MUROS

Artículo 1.º—Preliminares.....	1129
Prismas cargados en una parte de su base. — Cálculo de su resistencia.....	1129
Asiento de las mamposterías.....	1131
Distribución de presiones en un prisma cuando el punto de aplicación no coincide con el centro de gravedad de la sección transversal.—Núcleo central.....	1134
Condiciones generales de estabilidad y resistencia de un macizo.....	1145
Art. 2.º—Muros de sostenimiento de tierras.....	1150
Ideas generales sobre la resolución del problema.....	1150
Determinación del empuje máximo y del momento máximo del empuje.....	1176
Muros sin contrafuertes. — Comprobación de su estabilidad y resistencia.....	1189
Muros con contrafuertes. — Comprobación de su estabilidad y resistencia.....	1203
Fórmulas empíricas para la determinación de las dimensiones de los muros de sostenimiento.....	1208
Art. 3.º—Muros sometidos á la presión del agua ó del viento.....	1218
Muros sometidos á la presión del agua.....	1218
Semejanza de muros sometidos al empuje de tierras ó del agua.....	1221

	Páginas.
Muros sometidos á la presión del viento.....	1224
Art. 4.º— Muros sometidos á presiones en su parte superior. — Muros de edificios.....	1230
Muros sometidos á presiones en su parte superior.....	1230
Muros de edificios.....	1232
Art. 5.º— Cimientos.....	1243

CAPÍTULO XIV

BÓVEDAS

Artículo 1.º — Bóvedas cilíndricas ó de cañón seguido.....	1253
Generalidades.....	1253
Fórmulas empíricas. — Bóvedas de puentes y túneles. — Bóvedas con grandes sobrecargas de tierra.....	1257
Otras clases de bóvedas. — Fórmulas empíricas.....	1262
Estribos. — Fórmulas empíricas.....	1265
Operaciones preliminares. — Trazado del perfil transversal de la bóveda.....	1266
Comprobación de la estabilidad y resistencia de una bóveda cuando se prescinde de la influencia de los morteros.....	1269
Comprobación del equilibrio y resistencia de una bóveda cuando se tiene en cuenta la adherencia de los morteros.....	1286
Bóvedas articuladas de mampostería.....	1289
Cálculo de los estribos.....	1294
Art. 2.º— Bóvedas de varias clases.....	1297

CAPÍTULO XV

PILAS

Artículo 1.º — Pilas metálicas.....	1303
Art. 2.º — Pilas de mampostería.....	1312

ÍNDICE DE LAS TABLAS

	<u>Páginas.</u>
Tabla de valores de coeficientes de rozamiento f y de ángulos de rozamiento φ	15
— de experiencias de tracción..... 37, 39, 44, 60 y	63
— de clasificación de los hierros españoles.....	65
— de clasificación de aceros, en Francia, Bélgica y España....	67
— de constantes específicas de los metales.....	89
— de pesos y coeficientes de fractura por compresión de piedras españolas.....	95
— de coeficientes de fractura por extensión de varias clases de piedra.....	97
— de coeficientes de fractura por extensión y por compresión de ladrillos..... 98 y	99
— de coeficientes de fractura por extensión y por compresión de morteros y cementos..... 100 á	114
— de adherencia de los morteros y cementos.....	115
— de coeficientes de trabajo en las obras de sillería.....	120
— de coeficientes de dilatación..... 123 y	124
— de poderes conductores caloríficos de los materiales de construcción.....	125
— de coeficientes de elasticidad, fractura, trabajo y otras constantes específicas de la madera..... 127 á	129
— de coeficientes de fractura de cabos blancos elaborados en la fábrica de jarcias del arsenal de Cartagena.....	131
— de resistencia de cáñamos extranjeros.....	132
— de resistencia de la cola, clavos y tornillos..... 135 á	137
— de longitudes máximas de barras sometidas á extensión producida por su propio peso.....	145
— de resistencia á la extensión de barras de hierro de sección circular y rectangular..... 158 á	160

	Páginas
Tabla de resistencias y pesos de cables redondos y planos de alambre.....	163
— de resistencias de cadenas ordinarias de eslabones soldados..	166
— de resistencias de las cadenas articuladas, sistema Neustadt.	173
— de pesos de los tubos de fundición.....	177
— de la escala Whitworth para pernos.....	187
— de la escala Sellers para íd.....	189
— de los sistemas métricos para íd.....	190
— de coeficientes de trabajo de tirantes y barras metálicas debidos á cambios de temperatura.....	191
— de dimensiones de barras unidas con pasadores.....	194
— de experiencias relativas á roblonaduras.....	217 á 221
— de dimensiones de roblones.....	229, 230 y 239
— de momentos de flexión, esfuerzos cortantes, ecuaciones de elásticas y flechas para los diversos casos de flexión.....	348
— de fórmulas del momento de inercia I , área de sección ω , y valores v é $\frac{I}{v}$ para las formas de viga empleadas en construcciones.....	412
— de valores de $\frac{I}{v}$ y del peso del metro lineal para:	
Hierros en escuadra ó T sencilla.....	432
Hierros en U	436
Viguetas laminadas doble T	438
Almas llenas de palastro.....	459
Tablas sencillas de palastro.....	460
Almas verticales discontinuas.....	462
Cuatro escuadras, de ramas iguales, en una doble T compuesta, de palastro.....	463
— de escuadras de prismas de madera y de hierro sometidos á flexión para valores variables de carga total P y longitud l .	486
— de resistencias de vigas laminadas de hierro de forma doble T	494
— de resistencias de vigas compuestas, de palastro, de doble T .	524
— de peso máximo de cabios y viguetas de hierro en los suelos, por m. ² de piso.....	604
— de forjados, guarnecidos, solados, etc., por m. ² de piso.....	605
— de los tabiques de distribución por m. ² de tabique.....	607
— de la sobrecarga en los suelos.....	608
— de pesos totales, por m. ² de piso, para el cálculo de las viguetas, no comprendiendo el peso de los tabiques.....	609
— de equivalencia del peso de los tabiques trasversales y de las sobrecargas por metro cuadrado de piso.....	613

	Páginas
Tabla de equivalencias de pesos móviles y uniformemente repartidos para el cálculo de puentes:	
De Hausser y Cung, para vía férrea.....	650
De Schmidt, para íd.....	651
— de la fuerza de tracción, por tonelada, en rampas.....	653
— del peso por metro lineal de vigas de puente.....	654
— de valores de α en la fórmula $\alpha \frac{RI}{v} = \frac{1}{n} Pl$	678 á 685
— de experiencias de Woehler y Spangenberg.....	696 á 700
— de piezas comprimidas:	
Madera: Tabla de Rondelet.....	750
Tabla de Morin.....	752
— de coeficientes A de Hodgkinson.....	753
— de coeficientes de trabajo correspondientes á diversos valores de $\frac{l}{b}$	756
— de cargas que pueden soportar piezas comprimidas de madera de sección cuadrada y bases planas.....	772 á 776
— de valores de $d^{5,6}$ y $l^{4,7}$ para las aplicaciones de la fórmula de Hodgkinson, relativas á columnas de fundición comprimidas.....	779 y 780
— de coeficientes de fractura y trabajo para el cálculo de columnas y piezas macizas de fundición de bases planas por la fórmula $P = R\omega$	784 y 885
— de valores de P , carga de trabajo ordinario, para columnas macizas de bases planas, de fundición y de hierro, calculados por la fórmula de Love.....	788
— de resistencias de las columnas huecas de fundición, de bases planas.....	794
— de resistencias de columnas huecas de hierro, de bases planas.	810
— de alturas de las vigas armadas, en función de la luz.....	971
— de pesos de materiales para cubiertas.....	1013
— de relaciones entre la flecha f y la luz l de una armadura para diversas inclinaciones de pares con el horizonte.....	1015
— de inclinación de las vertientes según la naturaleza de la cubierta.....	1016
— de los pesos propios por metro cuadrado de vertiente, incluyendo los de la cubierta y armadura.....	1016
— del peso de la nieve por metro cuadrado de vertiente.....	1017
— de presiones por metro cuadrado, producidas por el viento.....	1018 y 1019
— de carga total por metro cuadrado de cubierta.....	1020

	Páginas.
Tabla de coeficientes finales de trabajo en algunas armaduras sin tirante.....	1111
— de Flamant para determinar el factor K que da el empuje máximo $E_0 = K \frac{h^2 t}{2}$ en un muro de sostenimiento de tierras.....	1162
— de Leigue para el cálculo de muros de sostenimiento.....	1198
— de dimensiones de las chimeneas.....	1228
— de espesores de muros de edificio.....	1236
— de espesores de muros de ladrillo en los edificios.....	1241
— de cargas por metro cuadrado que pueden recibir los diversos terrenos en la cimentación de obras.....	1244
— de dimensiones de los macizos de hormigón, en los cimientos.....	1245
— de cargas que pueden resistir los pilotes.....	1248

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

	NÚMEROS DE LOS PÁRRAFOS.
Adherencia de los cementos y morteros.....	161
— de la cola.....	182
Altura de las vigas rectas.....	859
Ángulos de rozamiento.....	32
Apoyos.....	34
Arcos metálicos y de madera.....	948 á 988
Armaduras.....	877 á 943
— rígidas.....	895
— semejantes.....	943
— sin tirante.....	948 á 988
Articulaciones de barras planas y cilíndricas.....	239 á 245
Asiento de las mamposterías.....	990 y 991

B

Barras unidas con pasadores.....	239 á 245
— sometidas á extensión.....	202
Botaretes.....	1117
Bóvedas de todas clases.....	1077 á 1117
— articuladas de mampostería.....	1112'

C

Cables de alambre.....	203 á 206
------------------------	-----------

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Cadenas.....	207 á 216
Cálculo gráfico:	
Flexión.....	406 á 457
Centros de gravedad.....	411
Deformaciones en la flexión, elástica y flechas.....	445
Determinación de las fuerzas interiores en un entramado cualquiera.....	810 á 817
Vigas poligonales y parabólicas.....	818 á 826
— armadas. — Vigas Fink y Bollmann.....	827 á 838
— rectas Warren, Murphy - Wipple, Howe, Post, Linville, Pauli, de arco atirantado.....	839 á 853
— Armaduras de todas clases.....	906 á 928
Cálculo de las vigas que adquieren, al flexarse, flechas determinadas.....	513 á 516
— de las fuerzas interiores en una armadura:	
Método de Culmann.....	905
— de Cremona ó de las figuras reciprocas.....	906 á 928
— de Ritter.....	929 á 942
Cambios de temperatura: su efecto en las piezas metálicas.....	238
Carga de fractura.....	47
Cargaderos.....	606 á 613
Cargas uniformemente repartidas equivalentes á cargas móviles, en los puentes.....	621
Cementos.....	151 á 161
Cilindros de prensa hidráulica.....	224 y 225
Cimbras.....	944 á 947
Cimientos.....	1073 á 1076
Circunstancias que influyen en el valor de las constantes específicas del hierro, acero y fundición.....	92 á 98, 107 á 114, 118 á 122
Clasificación de los hierros y aceros.....	102 y 106
— de las vigas.....	840 á 843
Clavos.....	183 y 184
Coefficientes de elasticidad.....	18, 20 y 45
— de seguridad.....	48
— de trabajo y de fractura.....	47, 48, 136 á 161
— de trabajo en obras de mampostería reputadas de atrevidas.....	167
— de dilatación de las mamposterías.....	172

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Coefficientes de trabajo cuando las fuerzas se repiten un número indefinido de veces.....	647 á 673
— de estabilidad de un muro.....	1003
— de estabilidad, en los estribos de una bóveda.....	1113
Condiciones de equilibrio de una construcción.....	37
— de resistencia y rigidez.....	39
— de estabilidad y resistencia de un macizo.....	997 á 999
— de estabilidad y resistencia de un muro.....	1003
— de estabilidad y resistencia de una bóveda.....	1077
Consolas.....	835 y 836
Constantes específicas del hierro.....	99 á 101
— del acero.....	116 á 118
— de la fundición.....	119 á 123
— de otros metales y aleaciones.....	124 á 135
— de la piedras.....	136 á 143
— de los ladrillos.....	144 á 145
— de los morteros y yesos.....	146 á 151
— de los cementos.....	151 á 161
— de las maderas.....	174 á 179
Cúpulas.....	919 y 1116

D

Deformaciones por extensión y por compresión.....	19, 27, 57 á 59, 80 á 90
— por flexión; elásticas y flechas.....	339 á 385
— de las vigas articuladas sometidas á flexión.....	860
Depósitos de agua.....	229
Determinación de las cargas que actúan en una armadura.....	897 á 904
Dilatación de las mamposterías.....	171 y 172
Dinteles.....	1108
Distribución de presiones en un prisma cuando el punto de aplicación de la resultante no coincide con el centro de gravedad.....	992 á 996

E

Ecuaciones de resistencia en los problemas de flexión.....	458 á 462, 490 á 495
------------------------------------------------------------	----------------------

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Efecto de las fuerzas de extensión, compresión ó flexión, repetidas un gran número de veces.	647 á 673
Elasticidad.	14 á 17
Empalmes y ensambladuras.	250 á 284 y 542
Empuje máximo en los muros de sostenimiento.	1016 á 1028
Ensayo de los materiales por extensión y compresión.	50 á 88
Envoltentes esféricas.	227
Escaleras.	773 á 779
Esfuerzos á que puede verse sometida una pieza prismática.	41
Esfuerzo cortante en las piezas sometidas á flexión.	309 á 385
— rasante producido en la flexión.	463 á 474
Estribos de bóvedas.	1113 y 1114
Experiencias de Wertheim, sobre extensión de alambres.	54
— de Duguet, sobre extensión de prismas. . .	54, 72 y 75
— de Barba, sobre íd.	75
— de Tresca, sobre compresión de prismas. . .	84
— de M. Considère, sobre extensión y compresión de prismas.	68, 96 y 97
— del mismo, sobre roblonaduras.	252, 257 y 258
— de Knütt-Styffe y Kollman, sobre extensión y compresión de metales á temperaturas diferentes de la ordinaria.	96 y 114
— de varios autores, sobre constantes específicas.	92 y 184
— del ingeniero García Arenal, sobre cementos.	157
— de M. Perrodil, sobre cementos.	158
— de M. Tourtay, sobre aplastamiento de mamposterías.	164
— de Smith, sobre resistencia de cabezas de barras planas articuladas.	239
— de Adamson, Barba y otros, sobre disminución de resistencia de los palastros perforados.	259
— de Dupin, Duleaux y otros, sobre flexión de prismas.	304
— de Woehler y Spangenberg, sobre la acción de fuerzas de tracción y compresión repetidas un gran número de veces.	653 á 656
— de Bauschinger, sobre las alteraciones de la elasticidad de hierros y aceros.	661 á 666

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Experiencias de Rondelet, sobre resistencia de piezas de madera sometidas á compresión.	695
— de Hodgkinson, sobre resistencia de piezas comprimidas de madera y columnas de fundición.	697 y 712
— de Gobin, sobre empuje de tierras en los muros de sostenimiento.	1010
— de Siègler, sobre íd.	1011 y 1012
— de Darwin y Leygue, sobre íd.	1013 y 1014

F

Flexión plana de vigas rectas cuando las fuerzas son normales al eje.	300
— — cuando las fuerzas son oblicuas al eje.	741 á 771
— — de piezas inclinadas sometidas á la acción de fuerzas verticales.	760 á 772
— cuando se rebasa el límite de elasticidad.	635 á 646
Forma más conveniente del perfil de una bóveda.	1102 á 1107
Fórmula empírica de Weyrauch, para determinar el coeficiente de fractura por extensión del acero Bessemer.	108
— de Deshayes, para íd. íd.	109
— para determinar el coeficiente de trabajo por compresión en las mamposterías.	165
— de resistencia de cuerdas, de la marina francesa.	180
— de Reuleux, para calcular el peso de las cuerdas por m. l.	180
— de proporciones de las cadenas.	210
— de dimensiones de las cadenas de Neustadt. . .	213
— de espesores de tubos de conducción de aguas. .	218 y 219
— de espesores de tubos para conducción de gases y vapores, y de espesores de calderas.	221
— de espesores de tubos de vapor sometidos á presiones exteriores.	222
— de Lamé, para determinar espesores de tubos gruesos.	223 á 226
— de presión entre pernos y tuercas.	233

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Fórmulas empíricas de dimensiones de pernos y tuercas, sistemas Whitworth, Sellers y otros.	231 á 238
— de dimensiones de cabezas de barra plana y de los pasadores.....	259
— de Résal, para el cálculo de diámetro de los rodillos.	247
— de Laisle y Schwebler, para determinar el peso propio de los cuchillos ó vigas de puente. .	622
— de Croizette-Desnoyers, para íd.....	622
— de Résal, para íd.....	622
— de Phillips y Renaudot, para determinar el momento máximo de flexión producido por una carga en movimiento.....	629
— de Launhardt y de Weyrauch, de Almgvist y de Heinzerling, para formar los coeficientes de fractura y de trabajo cuando las fuerzas se repiten.	657 y 659
— de Séjourné, para íd.....	659, 667 y 673
— de Redtenbacher, para los sólidos de igual resistencia comprimidos según su eje.	694
— de Hodgkinson, para piezas de madera comprimidas.	697
— — para columnas de fundición.	712 y 713
— de M. Barré, para piezas comprimidas de madera.....	699
— para piezas comprimidas de madera, de sección cualquiera.	700 á 702
— de Love, para columnas de fundición y de hierro.....	714 y 726
— de Gordon, para columnas de fundición.....	716
— para una pieza de fundición de sección cualquiera.	717
— de Morín, para columnas de hierro.	726
— para piezas de acero.	726
— de Rankine, para piezas de hierro ó de acero de sección cualquiera.	730
— de Coulomb, para la torsión de alambres.....	783
— para determinar la presión en la cimbra por m. ² de intradós.....	946
— de Durand-Claye, sobre prismas cargados en una parte de su base.....	989
— de dimensiones de muros de sostenimiento...	1044 á 1056

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Fórmulas empíricas para determinar el valor del empuje del agua en movimiento.....	1060
— para determinar las dimensiones de las chimeneas.....	1064
— de Rondelet, de espesores de muros de edificios.....	1067
— de Redtenbacher, para íd.....	1068
— de Valdés, para íd.....	1069
— de Navier, para determinar el empuje en la clave.....	1096
— de espesores de bóvedas de todas clases.....	1082 á 1086
— de espesores de estribos.....	1088
Fuerza límite de elasticidad.....	25
— de rozamiento.....	32

G

Grúas.....	837 y 838
------------	-----------

J

Junta de fractura en las bóvedas.....	1078 y 1080
---------------------------------------	-------------

L

Ladrillos.....	144 y 145
Límite de elasticidad	46
— superior de la luz en las grandes bóvedas.....	1109

M

Mamposterías.....	162 á 170
Máquinas para ensayar materiales.....	50 y 80
Momentos de las fuerzas elásticas en la flexión.....	300 á 308
— de flexión en las piezas apoyadas en dos puntos.....	309 á 338
— — en las piezas empotradas.....	365 á 385

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Momentos de flexión cuando el empotramiento es im- perfecto.....	375 y 380
— — en piezas apoyadas en varios pun- tos.....	386 y 403
— — determinados por el cálculo gráfico.....	406 á 457
— de inercia.....	475 á 489
— de torsión.....	787
Morteros y yesos.....	146 á 151
Muros de sostenimiento de tierras.....	1000 á 1056
— sometidos á la presión del agua.....	1057 á 1061
— aislados.....	1062
— sometidos á presiones en su parte superior.....	1065 y 1066
— de edificios.....	1067 á 1072

N

Núcleo central.....	994
---------------------	-----

P

Pabellones.....	919
Pasadores en las articulaciones.....	239 á 245
Pernos.....	230 á 237
Período elástico.....	25
Pesos específicos.....	44 y tabla del 135
Peso propio de los cuchillos de puente.....	622
Piedras.....	136 á 143
Piezas de artillería.....	225 y 226
— curvas sometidas á la flexión.....	948 á 988
— apoyadas en sus extremos, sujetas á la acción de cargas móviles.....	618 á 631
— apoyadas en los extremos, sometidas á choques..	632 á 634
— comprimidas según su eje.....	674 á 740
— flexadas sometidas á extensión ó compresión sim- ples.....	566
Pilas.....	1118
Pilotes.....	1076'
Planchas metálicas para pavimentos de edificios ó de puentes.....	617'

NÚMEROS
DE LOS PÁRRAFOS

Poder conductor relativo de algunos materiales.....	173
Procedimiento general de cálculo de una armadura....	880 á 899

R

Regla práctica para formar los momentos de flexión en los casos principales.....	405
Repisas.....	614
Resistencia viva.....	31, 115 y 634
— de los clavos y tornillos.....	183 y 184
— de la mampostería á la extensión, compre- sión y esfuerzo cortante.....	162 á 170
Rigidez.....	13 y 28
Roblones y roblonaduras.....	250 á 284
Rodillos.....	246 y 247

S

Semejanza de vigas flexadas.....	496
— de entramados.....	861 y 866
— de armaduras.....	943
— de muros.....	1061
— de bóvedas.....	1101
Soportes esféricos.....	248
Suelos.....	590 á 605
— voladizos.....	615

T

Tabiques, en los suelos.....	596 á 599
Talud natural de las tierras.....	1000
Tirantes de madera y de hierro.....	202, 238 y 249
Tornillos.....	183 y 184
Torres.....	1063
Torsión.....	780 á 795
Trasformación de entramados.....	861 á 866
Trasformación de armaduras.....	942
Trazado del intradós, en las bóvedas y de los estribos..	1102 á 1107
Tubos.....	217

V

Vigas rectas flexadas, de una sola pieza, de sección cuadrada, rectangular ó circular.....	498 á 507, 517 y 521
— — de sección cualquiera.—Vigas laminadas...	508 á 522
— — compuestas, de hierro, de pequeña altura.— Vigas de palastro.....	522 á 532
— superpuestas y yustapuestas.....	533 á 537
— empalmadas y ensambladas, de madera, sometidas á flexión.....	538 á 543
— hechas con tablas.....	544
— compuestas, de gran altura.....	545
— de palastro, de alma llena.....	545 á 554
— de celosía, de hierro, de sección constante.....	555 á 569
— de celosía, de madera.....	570 á 572
— de sección variable.—Sólidos de igual resistencia.....	573 á 585
— de carga común.....	616
— metálicas de sección variable.—Distribución de palastros.....	583 á 585
— rectas articuladas sometidas á cargas estáticas....	807 á 858
— armadas.....	827 á 834
— poligonales y parabólicas.....	815
— rectas de todas clases.....	839 á 853
— rectas articuladas sometidas á cargas en movimiento.....	867 á 874
— de enlaces rígidos.....	875 y 876