



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Cartografía y Geometría

Presentado por:
Jose Manuel García Olcina

Tutor:
Joaquín Pérez Muñoz
Geometría y Topología

Curso académico 2021-2022



Cartografía y Geometría

Jose Manuel García Olcina

Jose Manuel García Olcina *Cartografía y Geometría*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2021-2022.

**Responsable de
tutorización** Joaquín Pérez Muñoz
Geometría y Topología

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Jose Manuel García Olcina

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 13 de junio de 2022

Fdo: Jose Manuel García Olcina

Índice general

Agradecimientos	IX
Summary	XI
Introducción	XIII
1. Útiles previos	1
1.1. Primera Forma Fundamental	1
1.2. Teorema del cambio de variable y determinante Jacobiano	2
1.3. Curvatura de Gauss	3
1.4. Isometrías locales, aplicaciones conformes e isoareales	4
1.5. Geodésicas	7
2. Mapas	9
2.1. Es imposible construir un mapa fiel	9
2.2. Clasificación de las proyecciones cartográficas	10
2.3. Coordenadas esféricas	11
2.3.1. Mapa de Mercator	16
2.4. Una condición suficiente para que un mapa sea conforme	21
2.5. Medidas de distorsión y diagramas de Tissot	23
2.5.1. Medidas de distorsión de un mapa	23
2.5.2. Visualización de la distorsión. Diagramas de Tissot	26
3. Geometría de mapas notables en Cartografía	29
3.1. Mapa cilíndrico de Lambert	29
3.2. Mapa de Bonne	30
3.3. Proyección estereográfica	34
3.4. Mapa de Littrow	37
3.5. Mapa azimutal equidistante	44
3.6. Mapa de Aitov	48
3.7. Mapa Triple de Winkel	49
3.8. Mapa Equal Earth	51
A. Apéndice: Código en Mathematica	55
A.1. Gráficos de los mapas utilizados en este trabajo	55
A.2. Línea de rumbo vs circunferencia máxima	56
Bibliografía	59

Agradecimientos

A mis padres, por todo.

A mi familia y amigos, por los buenos momentos.

A Joaquín, por todos sus consejos y correcciones, y en especial por animarme a confeccionar muchas de las figuras que contiene este trabajo.

A todos los profesores de Matemáticas de mi época pre-universitaria, porque gracias a ellos tomé una de las mejores decisiones de mi vida.

Summary

This work deals with one of the oldest problems in geometry, the construction of maps of the Earth. Although we know that does not have a perfectly spherical shape, we will simplify the problem approximating it by a sphere of radius 1.

Many differential surface Geometry tools are introduced in the first chapter that will be useful in the rest of the work. We remember the concept of the First Fundamental Form, which allows us to calculate the length of curves, and also measure angles and areas on a surface. Later, we will recall the concept of the Jacobian determinant, the change of variable Theorem for integration on surfaces and the concept of Gaussian curvature. After that, we recall the concept of local isometry between surfaces, demonstrating various characterizations of it; one of them involving the concepts of conformal map and isoareal map between surfaces. Finally, we recall the concept of a geodesic curve, along with examples of geodesics in the plane and on the sphere.

At the beginning of the second chapter, we will define a map mathematically, and immediately afterwards, we will give two proofs that there are no maps that we would call true, that is, those whose associated cartographic projection is a local isometry. We will do it using two fundamental results, Gauss's Egregium Theorem and the Gauss-Bonnet Theorem. Based on this result and the characterizations of local isometry obtained in the first chapter, there are no cartographic projections simultaneously conformal and isoareal, nor there are cartographic projections that preserve the length of all the curves. For this reason, we propose a classification of cartographic projections into four types: isoareal, conformal, preserving the length of some curves, and modified. The modified they do not belong to any of the previous categories, so they do not preserve length of curves, areas or angles but try to minimize angular and area distortions (as we will explain later) which means that its use is sometimes highly recommended.

In the next point, we will recall the parameterization of the sphere based on the change to spherical coordinates since it is very common to present the equations of a cartographic projection in these coordinates. Thus, we will characterize conformal and isoareal maps and build the matrix of the First Fundamental Form using spherical coordinates. The spherical coordinates allow us to build the first example of a map, known as equirectangular map. Through a change of variable based on a diffeomorphism of separated variable in the plane, we will obtain the famous Mercator map which, in addition to being conformal, applies rhumb lines on the sphere to straight lines on the plane, which explains the great relevance it has had in navigation. In the final part of the chapter we are dedicated to study local measures of distortion, such as scale factors and angular and area distortion coefficients. Furthermore, we introduce the indicatrix ellipse and Tissot's diagrams, a very useful tool to visualize the distortion introduced by a map.

In the third chapter, eight maps are presented, making a study of their various properties through the various tools developed in the previous two chapters. First, we present a first example of an isoareal map: Lambert's cylindrical map, studying in detail the distortions it introduces. We'll see now a family of maps known as Bonne maps, which depend on one parameter but share the property of being isoareal. Then we will use the well-known stereo-

Summary

graphic projection, to construct a conformal map, we will study the distortions it introduces and recall some interesting properties. Also conformal is the Littrow map, which also has the curious property to be retroazimuthal. We will explain what it is and in what context it is convenient to use maps with this property.

In the next section we will define the concept of azimuthal map, presenting as an example the equidistant azimuthal map, which is part of the logo of the United Nations. We will see that it preserves the distance from any point to the north pole. In particular, it preserves the length of all meridians. Next, we will see the Aitov map as the first example of a modified cartographic projection and how to obtain the Winkel Triple map from it. The Winkel Triple map has been widely used since it was selected in 1998 by the National Geographic Society as the standard for the construction of planispheres. We will finish by commenting on the most relevant aspects of an article from 2019 where the Equal Earth map was presented. It is an isoareal map designed to be used in school environments, and we will see the advantages it offers compared to others with similar characteristics.

Finally, the Appendix contains some Mathematica codes with which many figures included in the work have been obtained, along with a brief comment on their implementation.

Introducción

Este trabajo trata uno de los problemas que ocupó a muchos estudiosos de la geometría diferencial de superficies: la cartografía. Esto es, representar en el plano una porción de la superficie terrestre. Alrededor del año 200 a.C, Eratóstenes de Cirene ya conjeturaba que el planeta en que vivimos tiene forma esférica, dando una aproximación bastante acertada del radio de la misma. Hoy en día sabemos que la superficie de la Tierra toma una forma conocida como geoide, aunque en la práctica se consideran modelos elipsoidales y esféricos (obviando los accidentes geográficos) para poder estudiar el problema de construir mapas de forma sencilla. En este trabajo, consideraremos como aproximación la esfera de radio 1.

En el primer capítulo recordamos conceptos básicos de teoría de superficies, tales como Primera Forma Fundamental, determinante Jacobiano, curvatura de Gauss, isometría local, aplicaciones conformes, aplicaciones isoareales y geodésicas. Se han utilizado fundamentalmente como referencias [1], [8].

En el segundo capítulo definimos rigurosamente el concepto de mapa y lo que entendemos por mapa fiel: aquel cuya proyección cartográfica sea una isometría local. Utilizando de forma independiente los teoremas Egregium de Gauss y de Gauss-Bonnet, daremos dos pruebas de la imposibilidad de construir un mapa fiel. Por este motivo, no existen mapas que conserven la longitud de todas las curvas, ni mapas que sean simultáneamente conformes e isoareales. Llegados a este punto, establecemos una clasificación en virtud de las propiedades geométricas que puede conservar una proyección cartográfica, tales como área, ángulos o la longitud de algunas curvas. En dicha clasificación añadimos un cuarto tipo, las proyecciones cartográficas modificadas, que no conservan ángulos ni área, pero tratan de minimizar las distorsiones, por lo que su uso es más apropiado en muchas ocasiones.

A continuación, recordamos las coordenadas esféricas y la parametrización de la esfera que podemos construir con ellas, ya que en cartografía se suele presentar la proyección cartográfica que define un mapa compuesta con dicha parametrización. Las coordenadas esféricas nos proporcionan un primer ejemplo sencillo de mapa, conocido como mapa Equirrectangular. Tras estudiar sus propiedades, nos interesará transformarlo en un mapa conforme mediante un difeomorfismo de variable separada en el plano. Con ello, obtendremos uno de los mapas más célebres en cartografía: el mapa de Mercator, que ha tenido una gran relevancia histórica por su utilidad en navegación.

En la siguiente sección se estudia una condición suficiente para que una proyección cartográfica expresada en coordenadas esféricas sea conforme. Hasta este punto, se han utilizado como referencia [9], [12], [2].

En lo que queda de capítulo hacemos un tratamiento matemático de las medidas de distorsión local: factores de escala longitudinal y latitudinal, coeficientes de distorsión angular y de área, que se definen en [10], [11], justificando rigurosamente cada una de las fórmulas que allí se presentan. También presentamos la elipse indicatriz y diagramas de Tissot, para los cuales utilizamos como referencia [7] y [1] de nuevo.

Introducción

En el tercer capítulo recogemos una colección de mapas notables en Cartografía, estudiando detalladamente sus propiedades con todas las herramientas desarrolladas en los dos capítulos anteriores. Además, se acompaña cada uno de ellos con una breve nota histórica sobre los autores, para lo cual se ha utilizado como referencia [5].

Los dos primeros mapas que se tratan son el mapa cilíndrico de Lambert y los mapas de Bonne, que pertenecen a la familia de mapas isoareales.

Tras ellos, vemos dos mapas conformes: uno creado con la proyección estereográfica, estudiada durante distintas asignaturas del Grado con otros propósitos y el mapa de Littrow, para el cual se ha utilizado como referencia [3] y [2] de nuevo.

A continuación, presentamos una familia de mapas llamados azimutales y estudiamos en detalle el mapa azimutal equidistante centrado en el polo norte, que sirve como logo de la Organización de las Naciones Unidas.

Como ejemplos de proyecciones cartográficas modificadas presentamos los mapas de Aitov y Triple de Winkel, que es el estándar que utiliza la National Geographic Society para representar nuestro planeta.

Por último, comentamos los detalles más relevantes del mapa Equal Earth, propuesto en el año 2019 en el artículo [4].

En el apéndice, explicamos los códigos con los que se han obtenido algunas figuras, gracias al paquete GeoGraphics del software Mathematica. Se ha utilizado como referencia [13].

En el momento que una persona se interesa por el mundo de la cartografía, ya sea o no matemático, no tardará en encontrar artículos más o menos divulgativos con títulos como

"Todos los mapas mienten".

"Cómo nos engañan los mapas".

El objetivo principal de este trabajo es dar sentido a esas frases, mostrando que la esfera y el plano no son localmente isométricos y presentar una colección de mapas con propiedades muy distintas. Así, lo importante es saber en cada momento la finalidad que perseguimos para utilizar uno u otro y no vender como un error o mentira el uso inadecuado, por ejemplo, de mapas conformes como el de Mercator para comparar el tamaño de los países.

1. Útiles previos

A lo largo del presente trabajo, todas las superficies consideradas son superficies regulares de \mathbb{R}^3 . Identificaremos \mathbb{R}^2 de manera natural con el plano $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, para poder tratarlo como superficie regular.

1.1. Primera Forma Fundamental

Sea S una superficie. Todo punto $p \in S$ admite un plano tangente, al que denotamos $T_p S$. En el caso de la esfera $S^2 = S^2(1)$, $T_p S^2$ se identifica con $\langle p \rangle^\perp$. Restringiendo el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 a $T_p S$, aparece la Primera Forma Fundamental, que es la forma bilineal simétrica

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle.$$

La Primera Forma Fundamental sirve, entre otras cosas, para medir longitudes, ángulos y áreas.

Definición 1.1. Sea S una superficie, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\alpha : J \rightarrow S$ una curva C^1 a trozos. $\forall [a, b] \subset J$, la longitud de la curva α desde a hasta b es:

$$L(\alpha)_a^b = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definición 1.2. Sean S una superficie y $\alpha : J_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, $\beta : J_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ dos curvas regulares. Supongamos que $\exists t_0 \in J_1$, $\exists s_0 \in J_2$ tales que $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$. Se define $\theta = \angle\{\alpha'(t_0), \beta'(s_0)\} \in [0, \pi]$, el ángulo no orientado que forman al cortarse en $\alpha(t_0)$ α y β , a partir de la igualdad

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(s_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(s_0)\|}.$$

Definición 1.3. Una región en una superficie S es un subconjunto $\mathcal{R} \subseteq S$ abierto, conexo, relativamente compacto y con frontera C^1 a trozos.

Definición 1.4. Sean S una superficie orientable, $\mathcal{R} \subset S$ una región. Se define el área de \mathcal{R} como sigue:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} 1 dA,$$

donde dA es el elemento de área en S , es decir, la única 2-forma que a cada base ortonormal positiva de $T_p S$ le asocia el valor 1, $\forall p \in S$.

1. Útiles previos

1.2. Teorema del cambio de variable y determinante Jacobiano

Definición 1.5. Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $f = (f_1, \dots, f_M)$ una aplicación de clase C^1 . La matriz Jacobiana de f es

$$Df = M(df, B_1^u, B_2^u) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, M \\ j=1, \dots, N}} : A \rightarrow \mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{R}),$$

siendo B_1^u, B_2^u las bases usuales de \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^M respectivamente.

En el caso $M = N$, al determinante de la matriz Jacobiana se le denomina determinante Jacobiano, que notaremos $Jac(f)$. Elegimos B_1, B_2, B_1', B_2' bases ortonormales de \mathbb{R}^N y $p \in A$. Se tiene que

$$M(df_p, B_1', B_2') = M(1_{\mathbb{R}^N}, B_2, B_2')M(df_p, B_1, B_2)M(1_{\mathbb{R}^N}, B_1', B_1).$$

Como las bases son ortonormales, las matrices de cambio de base son ortogonales; luego tienen determinante 1 o -1 . Por tanto, el valor absoluto del determinante Jacobiano está bien definido. Tomando cualesquiera B_1, B_2 bases ortonormales,

$$|Jac(f)|(p) = |\det[M(df_p, B_1, B_2)]|.$$

A continuación, extendemos este concepto a aplicaciones entre superficies.

Definición 1.6. Sean $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación C^1 entre superficies y $p \in S_1$. Tomando bases ortonormales B_1^{ort} en $T_p S_1$, y B_2^{ort} en $T_{f(p)} S_2$, la matriz de la diferencial de f en p para dichas bases es $M(df_p, B_1^{ort}, B_2^{ort})$. Al determinante de esta matriz se le denomina determinante Jacobiano, que notaremos $Jac(f)(p)$. Si B_1', B_2' son otras dos bases ortonormales en $T_p S_1$ y $T_{f(p)} S_2$ respectivamente, se tiene:

$$M(df_p, B_1', B_2') = M(1_{T_{f(p)} S_2}, B_2^{ort}, B_2')M(df_p, B_1^{ort}, B_2^{ort})M(1_{T_p S_1}, B_1', B_1^{ort}).$$

Como las bases son ortonormales, las matrices de cambio de base son ortogonales; luego tienen determinante 1 o -1 . Por tanto, el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana, que notaremos $|Jac(f)|(p)$, está bien definido. Tomando cualesquiera B_1, B_2 bases ortonormales en $T_p S_1$ y $T_{f(p)} S_2$ respectivamente,

$$|Jac(f)|(p) = |\det[M(df_p, B_1, B_2)]|.$$

Teorema 1.1 (del cambio de variable). Sean S_1, S_2 superficies, $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo de clase C^1 , $E \subset S_2$ un conjunto medible y $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces h es integrable en E si y sólo si $(h \circ \phi)|Jac(\phi)|$ es integrable en $\phi^{-1}(E)$. En tal caso,

$$\int_E h dA_2 = \int_{\phi^{-1}(E)} (h \circ \phi)|Jac(\phi)| dA_1$$

donde dA_i es el elemento de área en $S_i, i = 1, 2$.

Asociados a una parametrización de S

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S, \quad (u, v) \rightarrow X(u, v),$$

se tienen los coeficientes de la Primera Forma Fundamental:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Proposición 1.1. Sean S una superficie, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ una parametrización de S . Entonces

$$|Jac(X)| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Demostración. Sea $p = (u, v) \in U$. $dX_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(u,v)}S$. Elegimos $B_1 = \{\partial_u, \partial_v\}$ la base usual y $B_2 = \{w_1, w_2\}$ base ortonormal en $T_{X(u,v)}S$. Llamemos

$$M(dX_p, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$X_u = dX_p(\partial_u) = aw_1 + bw_2.$$

$$X_v = dX_p(\partial_v) = cw_1 + dw_2.$$

Entonces,

$$E = \|X_u\|^2 = a^2 + b^2.$$

$$G = \|X_v\|^2 = c^2 + d^2.$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = ac + bd.$$

$$EG - F^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd. \text{ Por otro lado,}$$

$$|Jac(X)|^2(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|^2 = (ad - bc)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.$$

Entonces, $|Jac(X)|^2 = EG - F^2 > 0$ porque la métrica es definida positiva, luego

$$|Jac(X)| = \sqrt{EG - F^2}.$$

□

Corolario 1.1 (Fórmula para el cálculo de áreas). Sea \mathcal{R} una región contenida en una superficie S . Si existe $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ una parametrización en S tal que $\mathcal{R} \subset X(U)$, entonces:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_{X^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

1.3. Curvatura de Gauss

Definición 1.7. Sean S una superficie y $p \in S$. Como S es localmente orientable, existe $U_p \subset S$ entorno de p y una aplicación diferenciable, a la que llamaremos aplicación de Gauss $N : U_p \rightarrow \mathbb{S}^2$, tal que $N(p) \in T_p^\perp S = (T_p S)^\perp$. Se llama operador forma o endomorfismo de Weingarten en p asociado a N a la aplicación lineal

$$A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2.$$

1. Útiles previos

Este operador lineal es un endomorfismo, ya que $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \langle N(p) \rangle^\perp = (T_p^\perp S)^\perp = T_p S$. Además es autoadjunto, porque $\langle dN_p(u), v \rangle = \langle u, dN_p(v) \rangle \forall u, v \in T_p S$. Por tanto, existe una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $T_p S$ en la que A_p viene representado por una matriz diagonal. Los valores propios de dicha matriz $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ son las curvaturas principales respecto de N en p .

Se define la curvatura de Gauss en p como

$$K(p) = \det(A_p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p).$$

Esta definición no depende de la aplicación de Gauss escogida ni de que S sea orientable o no.

$\mathbb{S}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ y \mathbb{R}^2 son superficies orientables.

- La curvatura de Gauss en todos los puntos de una esfera de radio $r > 0$, $\mathbb{S}^2(r)$ es $\frac{1}{r^2}$.
- La curvatura de Gauss en todo punto del plano \mathbb{R}^2 es 0.

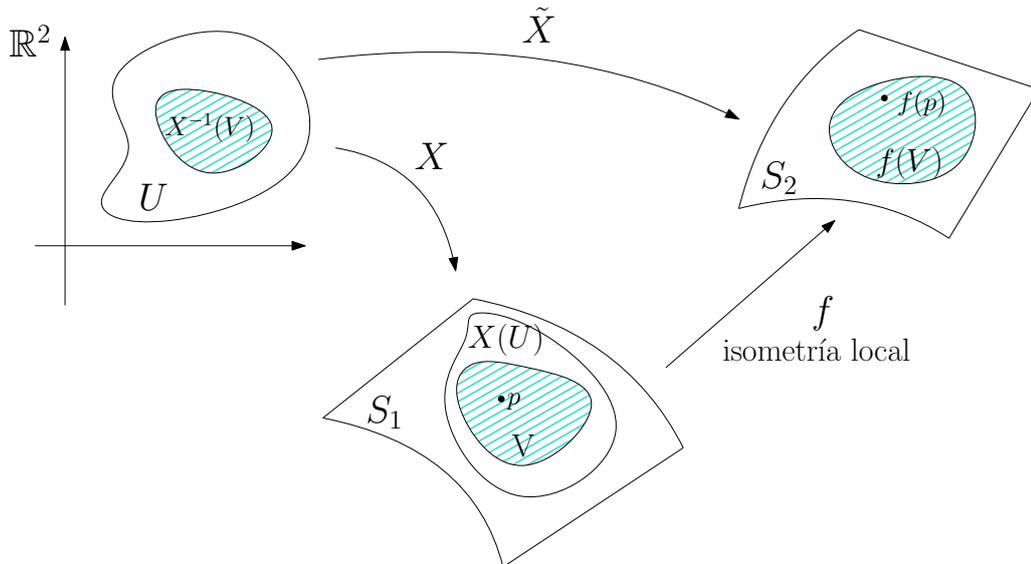
1.4. Isometrías locales, aplicaciones conformes e isoareales

Definición 1.8. Una aplicación diferenciable entre superficies es isometría local si su diferencial en cada punto es una isometría lineal.

Proposición 1.2. Sean S_1 y S_2 superficies y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. f es una isometría local si, y solo si $\forall p \in S_1$, y $\forall X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S_1$ parametrización para S_1 alrededor de p , existe $U_1 \subset U$ abierto tal que $\tilde{X} = f \circ (X|_{U_1}) : U_1 \rightarrow S_2$ es una parametrización en S_2 alrededor de $f(p)$ y $E = \tilde{E}, F = \tilde{F}, G = \tilde{G}$ en U_1 .

Demostración. \Rightarrow

Fijamos $p \in S_1$ y $X : U \rightarrow X(U) \subset S_1$ parametrización de S_1 alrededor de p .



Por el Teorema de la Función Inversa, existe $V \subset X(U)$ abierto que contiene a p tal que $f : V \rightarrow f(V)$ es difeomorfismo. Definimos $U_1 := X^{-1}(V)$. Por composición, $\tilde{X} = f \circ (X|_{U_1})$ es difeomorfismo de U_1 en $\tilde{X}(U_1) \subset S_2$ alrededor de $f(p)$. Por ser f isometría local se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u, v) &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle (u, v) = \langle df_{X(u,v)}(X_u(u, v)), df_{X(u,v)}(X_v(u, v)) \rangle = \langle X_u, X_v \rangle (u, v) = \\ &= E(u, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle (u, v) = \langle df_{X(u,v)}(X_u(u, v)), df_{X(u,v)}(X_v(u, v)) \rangle = \langle X_u, X_v \rangle (u, v) = \\ &= F(u, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(u, v) &= \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle (u, v) = \langle df_{X(u,v)}(X_v(u, v)), df_{X(u,v)}(X_v(u, v)) \rangle = \langle X_v, X_v \rangle (u, v) = \\ &= G(u, v). \end{aligned}$$

\Leftarrow

Tenemos que probar que f es difeomorfismo local y df_p es isometría vectorial $\forall p \in S_1$.

1. (f difeomorfismo local)

Sea $p \in S_1$. Elegimos cualquier parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S_1$ alrededor de p .

Por hipótesis, existe $U_1 \subset U$ abierto tal que $\tilde{X} = f \circ (X|_{U_1}) : U_1 \rightarrow \tilde{X}(U_1) \subset S_2$ es una parametrización de S_2 alrededor de $f(p)$. Como \tilde{X} es un difeomorfismo, $f = \tilde{X} \circ (X|_{U_1})^{-1}$ es difeomorfismo de $X(U_1)$ en $\tilde{X}(U_1)$.

2. (df_p isometría vectorial)

Fijamos $p \in S_1$. Tenemos $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$. Tomamos $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S_1$ parametrización alrededor de p . Elegimos la base de $T_p S_1$ $\{X_u(p), X_v(p)\}$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \langle df_p(X_u(p)), df_p(X_u(p)) \rangle &= \langle X_u(p), X_u(p) \rangle . \\ \langle df_p(X_u(p)), df_p(X_v(p)) \rangle &= \langle X_u(p), X_v(p) \rangle . \\ \langle df_p(X_v(p)), df_p(X_v(p)) \rangle &= \langle X_v(p), X_v(p) \rangle . \end{aligned}$$

Por tanto, df_p es isometría vectorial $\forall p \in S_1$.

□

El resultado que se presenta a continuación se ha demostrado en la asignatura Curvas y Superficies.

Proposición 1.3. Sean S_1 y S_2 superficies y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Entonces, f es isometría local si, y solo si $\forall \alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1$ curva C^1 a trozos y $\forall [a, b] \subset J$, $L(\alpha)_a^b = L(f \circ \alpha)_a^b$.

Definición 1.9. Sean S_1 y S_2 superficies. Un difeomorfismo local $f : S_1 \rightarrow S_2$ se dice conforme si su diferencial conserva ángulos no orientados. Esto es, si para cualesquiera dos curvas regulares $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$, tales que $\alpha(0) = \beta(0)$, se cumple:

$$\angle\{\alpha'(0), \beta'(0)\} = \angle\{(f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)\}.$$

Proposición 1.4. Sean S_1 y S_2 superficies. Un difeomorfismo local $f : S_1 \rightarrow S_2$ es conforme si y sólo si existe una función diferenciable $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\forall p \in S_1$, y $\forall v, w \in T_p S_1$ se cumple:

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \rho(p) \langle v, w \rangle . \quad (1.1)$$

1. Útiles previos

Demostración. \Leftarrow

Supongamos que existe una función diferenciable $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaciendo la ecuación (1.1). Sean $p \in S_1$, $v, w \in T_p S_1$. $\theta = \angle\{v, w\}$, $\theta_1 = \angle\{df_p(v), df_p(w)\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\langle df_p(v), df_p(w) \rangle}{\sqrt{\langle df_p(v), df_p(v) \rangle \langle df_p(w), df_p(w) \rangle}} = \frac{\rho(p) \langle v, w \rangle}{\sqrt{\rho(p) \langle v, v \rangle \rho(p) \langle w, w \rangle}} = \\ &= \frac{\langle v, w \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle}} = \cos \theta. \end{aligned}$$

Luego f es conforme. Veamos el recíproco:

\Rightarrow

Supongamos $f : S_1 \rightarrow S_2$ difeomorfismo local conforme. Denotemos por

$g_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{|T S_1}$ (Primera Forma Fundamental de S_1), $g_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{|T S_2}$ (Primera Forma Fundamental de S_2). Definimos $f^* g_2$ (llamada el pullback de g_2 por f) como la siguiente forma bilineal simétrica sobre S_1 :

$$(f^* g_2)_p(u, v) = (g_2)_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle \quad p \in S_1 \quad u, v \in T_p S_1.$$

Tanto g_1 como $f^* g_2$ son métricas sobre S_1 . Como f es conforme, las dos métricas son conformes. Por tanto, $\exists u \in C^\infty(S_1) : f^* g_2 = e^{2u} g_1$. Por tanto,

$$(g_2)_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = e^{2u(p)} \langle u, v \rangle.$$

Tomamos como ρ la función diferenciable $e^{2u} : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$. □

Definición 1.10. Una parametrización de una superficie se dice isoterma si los coeficientes de la Primera Forma Fundamental asociados verifican $E = G, F = 0$, es decir, si la parametrización es conforme.

Definición 1.11. Sean S_1, S_2 superficies. Una aplicación diferenciable $f : S_1 \rightarrow S_2$ se dice isoareal si conserva áreas. Esto es, si $\forall \mathcal{R}$ región en S_1 se cumple que $\text{Área}(\mathcal{R}) = \text{Área}(f(\mathcal{R}))$.

Proposición 1.5. Sean S_1, S_2 superficies. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo. f es isoareal si y sólo si $|Jac(f)| = 1$.

Demostración. \Leftarrow

Si $|Jac(f)| = 1$, entonces f es isoareal por el Teorema de Cambio de Variable.

\Rightarrow

Suponemos f isoareal. Entonces $\forall \mathcal{R} \subset S_1$, $\text{Área}(\mathcal{R}) = \text{Área}(f(\mathcal{R}))$.

Supongamos que $|Jac(f)| \neq 1$ en S_1 . Entonces, podemos suponer que existe $p \in S_1$ tal que $|Jac(f)|(p) > 1$ (si fuese < 1 el razonamiento sería análogo). Por continuidad, $\exists \mathcal{R}_p \subset S_1$ región que contiene a p tal que $|Jac(f)| > 1$ en \mathcal{R}_p . Entonces,

$$\text{Área}(f(\mathcal{R})) = \int_{f(\mathcal{R})} dA_2 = \int_{\mathcal{R}} |Jac(f)| dA_1 > \int_{\mathcal{R}} dA_1 = \text{Área}(\mathcal{R}).$$

Lo cual contradice que f es isoareal. Por tanto, $|Jac(f)| \equiv 1$ en S_1 . □

Proposición 1.6. Sean S_1, S_2 superficies. Un difeomorfismo local $f : S_1 \rightarrow S_2$ es isometría local si y sólo si es conforme e isoareal.

Demostración. \Rightarrow

Toda isometría local es conforme. Veamos que también conserva áreas. Sea $\mathcal{R} \subset S_1$ región en S_1 . Utilizando el Teorema 1.1,

$$\text{Área}(f(\mathcal{R})) = \int_{f(\mathcal{R})} dA_2 = \int_{\mathcal{R}} |Jac(f)| dA_1.$$

Si f es isometría local, entonces $|Jac(f)| \equiv 1$ en S_1 . Por tanto, $\text{Área}(f(\mathcal{R})) = \text{Área}(\mathcal{R})$.

\Leftarrow

Suponemos ahora que f es difeomorfismo local, conforme e isoareal. Por la Proposición 1.4, existe una aplicación diferenciable $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \rho(p) \langle v, w \rangle \quad \forall p \in S_1, \forall v, w \in T_p S_1.$$

Si probamos que $\rho \equiv 1$ en S_1 , concluimos que f es isometría local.

Fijamos $p \in S_1$. Calculamos $|Jac(f)|(p)$. Sea $B_1 = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $T_p S_1$. $\{df_p(v_1), df_p(v_2)\}$ es base de $T_{f(p)} S_2$ por ser f difeomorfismo local y son ortogonales por ser f conforme. Además, $\|df_p(v_1)\| = \sqrt{\rho} = \|df_p(v_2)\|$. Tomamos $B_2 = \{\frac{1}{\sqrt{\rho}} df_p(v_1), \frac{1}{\sqrt{\rho}} df_p(v_2)\}$, que es una base ortonormal de $T_p S_2$.

$$M(df_p, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho} \end{pmatrix} \Rightarrow |Jac(f)| = \rho.$$

Como f es isoareal, $|Jac(f)| \equiv 1$ en S_1 , luego $\rho \equiv 1$. Por tanto, f es isometría local. \square

1.5. Geodésicas

La siguiente definición introduce el concepto intuitivo de curva que minimiza la distancia entre dos puntos de una superficie.

Observación 1.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Llamemos $\bar{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}^3 . Dados dos campos diferenciables X, Y en \mathbb{R}^3 , tenemos que $\bar{\nabla}_X Y = dY(X)$. Si X, Y son dos campos diferenciables sobre S , entonces descomponiendo $\bar{\nabla}_X Y$ en partes tangente y normal a S :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \text{ donde} \quad (1.2)$$

- ∇ es la conexión de Levi Civita de S (parte tangente de $\bar{\nabla}$).
- σ es la Segunda Forma Fundamental de S (parte normal de $\bar{\nabla}$).

(1.2) se conoce como ecuación de Gauss.

Definición 1.12. Sea S una superficie. Una curva C^2 $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es geodésica si su aceleración tangencial a la superficie es nula:

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0.$$

Proposición 1.7 (Existencia y unicidad de geodésicas). *Dados $p \in S$ y $v \in T_p S$, existe $\varepsilon > 0$ y una única geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ cumpliendo que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$.*

Proposición 1.8. *Sean $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local entre superficies y $\alpha : [a, b] \rightarrow S_1$ una curva C^2 . Entonces, α es una geodésica en S_1 si y sólo si $f \circ \alpha$ es una geodésica en S_2 .*

1. Útiles previos

Se introducen a continuación los ejemplos de geodésicas no constantes que necesitaremos utilizar:

- Las únicas geodésicas no constantes en \mathbb{R}^2 son las rectas afines, recorridas con velocidad constante.
- Las únicas geodésicas no constantes en \mathbb{S}^2 son arcos de circunferencias máximas, que se obtienen al cortar la esfera con un plano que pase por su centro. Además, han de recorrerse con velocidad constante.

2. Mapas

Definición 2.1. Un mapa es una terna (Ω, Δ, f) , donde $\Omega \subset S^2$ es una región, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ es una región acotada y $f : \Omega \rightarrow \Delta$ es un difeomorfismo. A f la llamaremos proyección cartográfica asociada al mapa.

Observación 2.1. La aplicación inversa de una proyección cartográfica f es una parametrización de S^2 con imagen Ω , que se llama la parametrización asociada al mapa. A menudo será útil hablar de las propiedades que tiene dicha parametrización.

El objetivo de este trabajo es analizar y, en cierto modo, clasificar los mapas más usuales desde un punto de vista matemático.

2.1. Es imposible construir un mapa fiel

En esta sección demostraremos que no existe ningún mapa (Ω, Δ, f) tal que f sea una isometría local (lo que llamaríamos un mapa fiel). Lo probaremos de dos formas distintas, utilizando dos resultados fundamentales vistos en las asignaturas Curvas y Superficies y Geometría Global de Curvas y Superficies: el Teorema Egregium de Gauss y el Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 2.1 (Egregium de Gauss). Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local entre superficies de \mathbb{R}^3 . Supongamos que la superficie S_i tiene curvatura de Gauss K_i , $i = 1, 2$. Entonces

$$\forall p \in S_1, \quad K_2(F(p)) = K_1(p).$$

Esto es, las isometrías locales conservan la curvatura de Gauss.

Teorema 2.2 (Gauss-Bonnet). Sean $\mathcal{R} \subset S$ una región compacta en una superficie orientada y C_1, \dots, C_n curvas simples cerradas y C^1 a trozos que constituyen la frontera de \mathcal{R} . Supongamos que cada C_i está orientada positivamente y sean $\theta_1, \dots, \theta_k$ los ángulos exteriores orientados de las curvas C_1, \dots, C_n . Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int_{\mathcal{R}} K dA + \sum_{l=1}^k \theta_l = 2\pi\chi(\mathcal{R}),$$

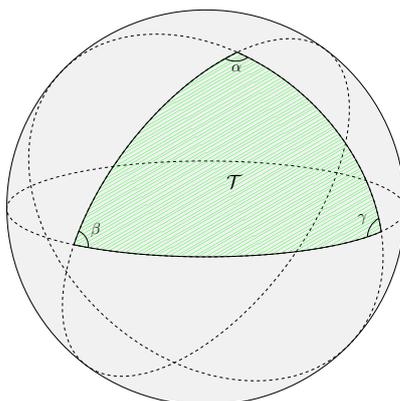
donde κ_g es la curvatura geodésica de C_i , K es la curvatura de Gauss de S y $\chi(\mathcal{R})$ es la característica de Euler de \mathcal{R} .

Corolario 2.1. Es imposible construir un mapa fiel. Equivalentemente, no es posible obtener un mapa de ninguna región de la esfera (ni de la Tierra, considerada esférica), por pequeña que ésta sea, que conserve las longitudes de todas las curvas.

Demostración. Probamos la primera afirmación utilizando los Teoremas 2.1, 2.2 de forma independiente.

2. Mapas

- Utilizando el Teorema Egregium: Si tuvieramos un mapa fiel (Ω, Δ, f) , entonces $f : \Omega \rightarrow \Delta$ sería una isometría local de Ω en Δ . Por ser f isometría local, ha de conservar las curvaturas de Gauss de Ω y Δ , pero la esfera y el plano tienen distinta curvatura de Gauss en todo punto.
- Utilizando Gauss-Bonnet: En primer lugar probaremos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico de la esfera (triángulo formado por arcos de circunferencia de radio máximo) es siempre mayor que π . Consideramos \mathcal{T} un triángulo geodésico en la esfera con ángulos interiores α, β, γ .



Utilizamos el Teorema 2.2 teniendo en cuenta que las curvaturas geodésicas valen 0, la curvatura de Gauss es constante 1 y la Característica de Euler de \mathcal{T} es 1. Obtenemos:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi \Rightarrow \text{Área}(\mathcal{R}) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Como todo triángulo tiene área positiva, concluimos que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Supongamos que existiese $f : \Omega \rightarrow \Delta$ una isometría local entre una región Ω de S^2 y una región acotada $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Tomamos \mathcal{T} un triángulo geodésico en Ω . Por la Proposición 1.8, $f(\mathcal{T})$ es un triángulo formado por rectas afines en el plano. Por lo anterior, la suma de los ángulos interiores de \mathcal{T} es mayor que π mientras que la suma de los ángulos interiores de $f(\mathcal{T})$ es exactamente π , ya que $f(\mathcal{T})$ es un triángulo en un plano euclídeo. Entonces, f no es conforme. Contradicción con que f sea isometría local.

La segunda afirmación del Corolario es consecuencia de lo anterior y de la Proposición 1.3. □

2.2. Clasificación de las proyecciones cartográficas

En el Corolario 2.1 vimos la imposibilidad de que una proyección cartográfica conserve la longitud de todas las curvas. Según las propiedades geométricas que conservan las proyecciones cartográficas, es habitual establecer la siguiente clasificación:

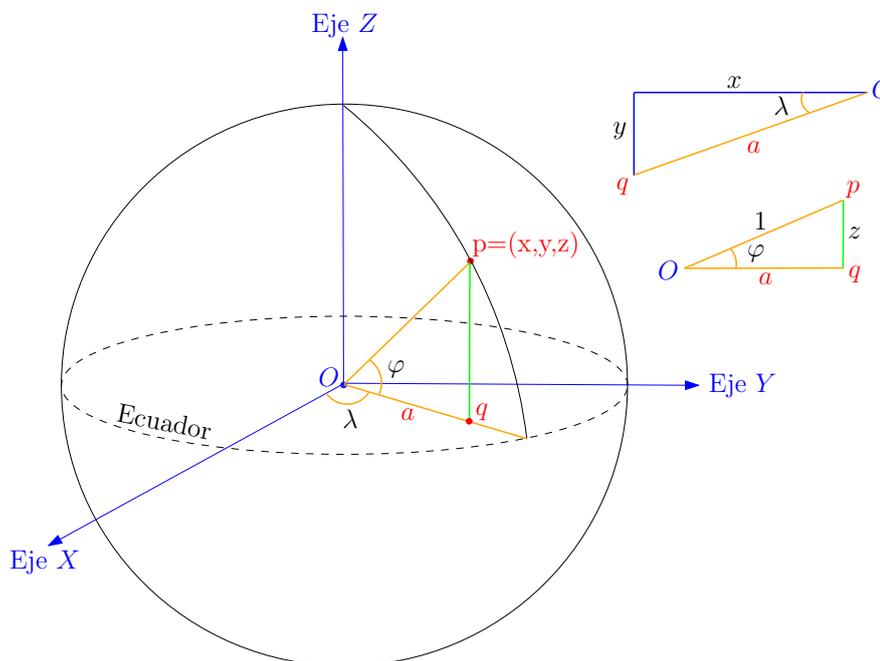
- *Proyecciones equivalentes o isoareales*: Son aquellas que conservan el área. Por la Proposición 1.6 y el Corolario 2.1, no conservan los ángulos; en este sentido, distorsionan la forma de las figuras.

- *Proyecciones cartográficas conformes*: Son aquellas que conservan los ángulos. Por la Proposición 1.6 y el Corolario 2.1, distorsionan el área de las figuras.
- *Proyecciones cartográficas que Conservan la Longitud de Algunas Curvas*: En este tipo de proyecciones cartográficas, existirá una familia de curvas distinguidas cuya longitud se conserva. Nos referiremos a este tipo de proyecciones cartográficas por las siglas C.L.A.C.
- *Proyecciones cartográficas afilácticas o modificadas*: No pertenecen a ninguna de las anteriores, pero tratan de minimizar las distorsiones.

Explicaremos en la Sección 2.5 cómo se miden las distorsiones. Muy a menudo es conveniente utilizar proyecciones cartográficas modificadas puesto que se pretende que las formas de las figuras (continentes) sean lo más parecidas posible a la realidad sin que ello se traduzca en distorsionar en exceso las áreas de algunas regiones. Esto ocasiona incluso problemas geopolíticos, pues la mayoría de mapas conformes distorsionan el área de los países cercanos a los polos, lo que hace que estas regiones (Canadá, Estados Unidos, Europa, el norte de Asia o Australia) parezcan mucho mayores que África o América del Sur.

2.3. Coordenadas esféricas

Llegados a este punto, es interesante recordar las coordenadas esféricas en S^2 . Denotaremos por λ a la longitud y por φ a la latitud. También reciben el nombre de coordenadas geográficas.



Donde $q = (x, y, 0)$, $a = \|\vec{Oq}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se puede deducir que:

2. Mapas

$$\begin{cases} \sin \varphi = z \\ \cos \varphi = a \\ \cos \lambda = \frac{x}{a} \\ \sin \lambda = \frac{y}{a} \end{cases}$$

Y por tanto,

$$x = \cos \lambda \cos \varphi, \quad y = \sin \lambda \cos \varphi, \quad z = \sin \varphi.$$

El cambio de las coordenadas esféricas (longitud, latitud) a las coordenadas cartesianas (x, y, z) define la siguiente parametrización X^e para S^2

$$\begin{cases} \Omega^e := S^2 \setminus \{(\cos \varphi, 0, \sin \varphi) \in S^2 : \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}, \\ X^e : (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \Omega^e, \\ X^e(\lambda, \varphi) = (\cos \lambda \cos \varphi, \sin \lambda \cos \varphi, \sin \varphi). \end{cases}$$

Cabe destacar que Ω^e es todo S^2 , salvo la mitad de un meridiano. A menudo consideraremos mapas (Ω, Δ, f) en los que $\Omega \subset \Omega^e$ para trabajar con coordenadas esféricas. Esto no es restrictivo, ya que a lo sumo eliminamos un meridiano del dominio esférico del mapa.

Calculamos los coeficientes de la Primera Forma Fundamental asociada a esta parametrización:

$$X_\lambda^e = (-\sin \lambda \cos \varphi, \cos \lambda \cos \varphi, 0).$$

$$X_\varphi^e = (-\cos \lambda \sin \varphi, -\sin \lambda \sin \varphi, \cos \varphi).$$

$$E = \langle X_\lambda^e, X_\lambda^e \rangle = \cos^2 \varphi, \quad G = \langle X_\varphi^e, X_\varphi^e \rangle = 1, \quad F = \langle X_\lambda^e, X_\varphi^e \rangle = 0.$$

$$\text{Luego } |Jac(X^e)| = \sqrt{EG - F^2} = \cos \varphi.$$

Podemos estudiar propiedades de mapas (Ω, Δ, f) traduciéndolas a propiedades del difeomorfismo $f \circ X^e$. Por ejemplo:

Proposición 2.1. *Sea (Ω, Δ, f) un mapa con $\Omega \subset \Omega^e$. Entonces f es isoareal si y sólo si*

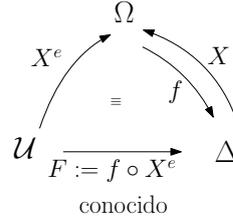
$$|Jac(f \circ X^e)| = \cos \varphi.$$

Demostración. $|Jac(f \circ X^e)| = (|Jac(f)| \circ X^e) |Jac(X^e)| = (|Jac(f)| \circ X^e) \cos \varphi$. Por tanto, $|Jac(f \circ X^e)| = \cos \varphi$ si y sólo si $|Jac(f)| \equiv 1$ en Ω , es decir, si y sólo si f es isoareal. \square

Tomamos un mapa (Ω, Δ, f) con $\Omega \subset \Omega^e$, denotamos por \mathcal{U} al abierto de \mathbb{R}^2 $\mathcal{U} := (X^e)^{-1}(\Omega)$. Supongamos que conocemos la expresión de

$$F := f \circ X^e : \mathcal{U} \rightarrow \Delta, \quad F(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)).$$

Sabemos que $X = f^{-1}$ nos proporciona una parametrización de S^2 con imagen Ω . Nos planteamos el siguiente problema: conocer la matriz de la Primera Forma Fundamental asociada a X a partir de F y de la matriz de la Primera Forma Fundamental asociada a X^e . Lo visualizamos en el siguiente diagrama conmutativo:



Problema: Calcular la Primera Forma Fundamental de X

Consideramos B_u^1, B_u^2 las bases usuales de \mathbb{R}^2 en \mathcal{U} y Δ respectivamente. Notaremos por g_{S^2} a la métrica inducida en la esfera por el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 . Por definición, la matriz de la Primera Forma Fundamental asociada a X es $M(X^*g_{S^2}, B_u^2)$, donde $X^*g_{S^2}$ es el pullback de g_{S^2} por X . Como el diagrama presentado es conmutativo, podemos escribir

$$M(X^*g_{S^2}, B_u^2) = M((X^e \circ F^{-1})^*g_{S^2}, B_u^2) = M((F^{-1})^*[(X^e)^*g_{S^2}], B_u^2) = M(F_*[(X^e)^*g_{S^2}], B_u^2),$$

donde $F_*[(X^e)^*g_{S^2}]$ es el pushforward de $(X^e)^*g_{S^2}$ por F . Consideramos ahora la matriz de la misma métrica en la base $F_*B_u^1$, cuyos elementos son las imágenes por dF de los vectores de B_u^1 . Utilizando propiedades del pushforward, se tiene que:

$$M(F_*[(X^e)^*g_{S^2}], F_*B_u^1) = M((X^e)^*g_{S^2}, B_u^1) = A.$$

Por definición, A es la matriz de la Primera Forma Fundamental asociada a X^e ,

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos ahora el siguiente resultado visto en la asignatura Geometría II:

Lema 2.1. Si (V, g) es un espacio vectorial métrico euclídeo y B_1, B_2 son dos bases de V , entonces

$$M(g, B_1) = P^T M(g, B_2) P, \text{ siendo } P = M(1_V, B_1, B_2).$$

En nuestro caso, tenemos que

$$A = M(F_*[(X^e)^*g_{S^2}], F_*B_u^1) = P^T M(F_*[(X^e)^*g_{S^2}], B_u^2) P,$$

siendo $P = M(1_{\mathbb{R}^2}, F_*B_u^1, B_u^2)$. Concretamente, como $B_u^1 = \{\partial_\lambda, \partial_\varphi\}$, $F_*(B_u^1) = \{dF(\partial_\lambda), dF(\partial_\varphi)\} = \{F_\lambda, F_\varphi\} = \{(x_\lambda, y_\lambda), (x_\varphi, y_\varphi)\}$. Entonces,

$$P = M(1_{\mathbb{R}^2}, F_*B_u^1, B_u^2) = \begin{pmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{pmatrix}.$$

Recogemos toda esta información en la siguiente Proposición.

Proposición 2.2. Sea (Ω, Δ, f) un mapa con $\Omega \subset \Omega^e$, y $X = f^{-1}$ la parametrización asociada. Supongamos que f viene dado en coordenadas esféricas por

$$f \circ X^e : (X^e)^{-1}(\Omega) \rightarrow \Delta, \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)).$$

2. Mapas

Entonces la matriz de la Primera Forma Fundamental asociada a X en la base usual B_u^2 de \mathbb{R}^2 es

$$M(X^* g_{S^2}, B_u^2) = \left(\begin{pmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{pmatrix}^{-1}.$$

Mapa Equirrectangular La inversa del cambio a coordenadas esféricas nos permite definir un mapa, que recibe el nombre de mapa Equirrectangular, o platé carrée (en francés, plano cuadrado). Viene dado por

$$\left(\Omega^e, (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), (X^e)^{-1} \right).$$

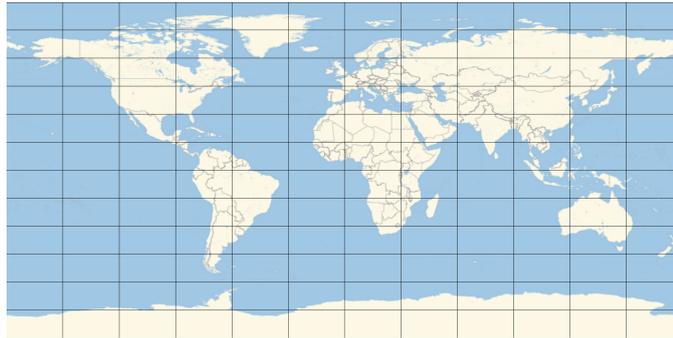


Figura 2.1.: Mapa Equirrectangular

Este mapa no es conforme, ya que $E \neq G$. Tampoco es isoareal, porque $|\text{Jac}((X^e)^{-1})| = \sec(\varphi)$. No obstante, $(X^e)^{-1}$ es una proyección cartográfica C.L.A.C. Veamos que conserva el elemento de longitud a lo largo del ecuador y de los meridianos.

X^e nos permite parametrizar el paralelo situado a latitud fija $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ como

$$X^e(\cdot, \varphi_0) : (-\pi, \pi) \rightarrow S^2, \quad X^e(\lambda, \varphi_0) = (\cos \lambda \cos \varphi_0, \sin \lambda \cos \varphi_0, \sin \varphi_0).$$

Calculamos la velocidad de esta curva:

$$\frac{\partial X^e}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi_0) = (-\sin \lambda \cos \varphi_0, \cos \lambda \cos \varphi_0, 0). \text{ Entonces, } \left\| \frac{\partial X^e}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi_0) \right\| = \cos \varphi_0.$$

Como $\left\| \frac{\partial X^e}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi_0) \right\| = 1 \iff \varphi_0 = 0$, el único paralelo que podemos parametrizar por el arco con X^e es el ecuador, luego el mapa Equirrectangular conserva el elemento de longitud.

De igual modo, podemos parametrizar un meridiano situado a longitud fija $\lambda_0 \in (-\pi, \pi)$ como

$$X^e(\lambda_0, \cdot) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow S^2, \quad X^e(\lambda_0, \varphi) = (\cos \lambda_0 \cos \varphi, \sin \lambda_0 \cos \varphi, \sin \varphi).$$

Calculamos la velocidad de esta curva:

$$\frac{\partial X^e}{\partial \varphi}(\lambda_0, \varphi) = (-\cos \lambda_0 \sin \varphi, -\sin \lambda_0 \sin \varphi, \cos \varphi). \text{ Entonces, } \left\| \frac{\partial X^e}{\partial \varphi}(\lambda_0, \varphi) \right\| = 1.$$

Por tanto, X^e nos proporciona una parametrización por el arco de todos los meridianos, luego el mapa Equirrectangular conserva el elemento de longitud.

La propiedad de ser conforme ha motivado históricamente la construcción de mapas por su utilidad en navegación. Veremos a continuación cómo transformar el mapa Equirrectangular (componiéndolo con un difeomorfismo de variable separada en el plano) en otro que sí es conforme.

Definición 2.2. La función de Gudermann

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \varphi(\tau) = \int_0^\tau \operatorname{sech}(s) ds = \arcsin(\tanh(\tau))$$

es una aplicación derivable y biyectiva:

- Sobreyectiva porque $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ y $\arcsin((-1, 1)) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Inyectiva porque es continua y estrictamente creciente ($\varphi'(\tau) = \operatorname{sech}(\tau) > 0$).

Veamos que su inversa es:

$$\chi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad \chi(\varphi) = \int_0^\varphi \sec(t) dt = \operatorname{arctanh}(\sin \varphi).$$

Como $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\varphi) > -1$, y por tanto, $\sec(\varphi) + \tan(\varphi) > 0$. Integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \chi(\varphi) &= \int_0^\varphi \sec(t) dt = \log(\sec(\varphi) + \tan(\varphi)) = \log\left(\frac{1 + \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{(1 + \sin(\varphi))^2}{1 - \sin^2(\varphi)}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}\right) = \operatorname{arctanh}(\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

De lo anterior, concluimos que $\varphi \circ \chi = \operatorname{Id}_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ y $\chi \circ \varphi = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$.

La derivada de χ es $\chi'(\varphi) = \sec(\varphi)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo.

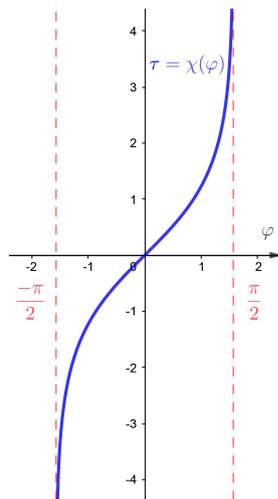


Figura 2.2.: Gráfica de χ

2. Mapas

X^e es una parametrización no conforme de la esfera, ya que $E \neq G$. Haremos un cambio de coordenadas para obtener una parametrización conforme. El cambio es el siguiente:

$$\begin{aligned} \psi : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \\ (\lambda, \varphi) &\xrightarrow{\psi} (\lambda, \tau) = (\lambda, \chi(\varphi)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ψ es biyectiva por serlo componente a componente, es diferenciable y su inversa es $\psi^{-1}(\lambda, \tau) = (\lambda, \varphi(\tau))$, que es diferenciable. Por tanto, ψ es un difeomorfismo.

Proposición 2.3. *Definimos*

$$X := X^e \circ \psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega^e \subset \mathbb{S}^2, \quad X(\lambda, \tau) = X^e(\lambda, \varphi(\tau)).$$

Entonces, X es una parametrización isoterma de la esfera.

Demostración. Utilizando la regla de la cadena para la derivación, vemos que

$$X_\lambda(\lambda, \tau) = X_\lambda^e(\lambda, \varphi(\tau)), \quad X_\tau(\lambda, \tau) = \varphi'(\tau) X_\varphi^e(\lambda, \varphi(\tau)).$$

Calculamos los coeficientes de la Primera Forma Fundamental $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$, asociados a X :

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle X_\lambda, X_\lambda \rangle = \langle X_\lambda^e, X_\lambda^e \rangle = \cos^2(\varphi(\tau)), \\ \tilde{F} &= \langle X_\lambda, X_\tau \rangle = \varphi'(\tau) \langle X_\lambda^e, X_\varphi^e \rangle = 0, \\ \tilde{G} &= \langle X_\tau, X_\tau \rangle = \varphi'(\tau)^2 \langle X_\varphi^e, X_\varphi^e \rangle = \operatorname{sech}^2(\tau). \end{aligned}$$

Comprobamos a continuación que $\cos^2(\varphi(\tau)) = \operatorname{sech}^2(\tau)$.

$\cos(\varphi(\tau)) = \cos(\arcsin(\tanh(\tau))) = \sqrt{1 - \tanh^2(\tau)}$. Como $\forall \tau \in \mathbb{R}, \tanh(\tau) < 1$, se tiene que $1 - \tanh^2(\tau) > 0$. Por tanto, $\cos^2(\varphi(\tau)) = 1 - \tanh^2(\tau) = \operatorname{sech}^2(\tau)$.

Concluimos que $\tilde{E} = \tilde{G}$ y $\tilde{F} = 0$. □

Observación 2.2. La inversa de X definirá un mapa, siempre que lo restrinjamos a un dominio acotado $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ (vemos que el dominio de X es la banda $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$, que no es acotado en \mathbb{R}^2). Este se conoce como mapa de Mercator.

2.3.1. Mapa de Mercator

Gerardus Mercator (1512-1594) fue un cartógrafo y geógrafo flamenco. Estudió matemáticas en la universidad de Lovaina y elaboró mapas de muchas regiones europeas, destacando los de Francia, Flandes y Alemania. Propuso en 1569 la proyección cartográfica que lleva su nombre.

Construcción Reduciendo el dominio del cambio de coordenadas ψ , de $(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ a $(-\pi, \pi) \times (\varphi_-, \varphi_+)$, reduciremos su imagen, que es el dominio de X . Queremos que dicho dominio sea el cuadrado $(0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$. Para ello, resolvemos las siguientes ecuaciones

- $\chi(\varphi_+) = \pi$, cuya solución es $\varphi_+ = \arcsin(\tanh \pi)$.
- $\chi(\varphi_-) = -\pi$, cuya solución es $\varphi_- = -\varphi_+ = -\arcsin(\tanh \pi)$.

El mapa de Mercator es:

$$\left(\Omega_{\mathcal{M}}, \Delta_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} = X_{|(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}^{-1} \right),$$

donde $\Omega_{\mathcal{M}} = \{X^e(\lambda, \varphi) \in \mathbb{S}^2 : \lambda \in (-\pi, \pi), \varphi \in (-\varphi_+, \varphi_+)\}$, y $\Delta_{\mathcal{M}} = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.

La expresión de la proyección cartográfica de Mercator $\mathcal{M} : \Omega_{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta_{\mathcal{M}}$ viene dada por

$$\mathcal{M}(X^e(\lambda, \varphi)) = (\lambda, \chi(\varphi)).$$

Por la Proposición 2.3, es una proyección cartográfica conforme.

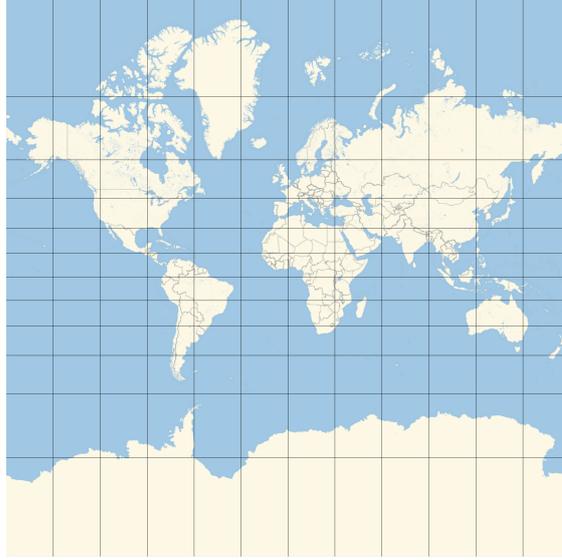


Figura 2.3.: Mapa de Mercator

Propiedades

La proyección de Mercator distorsiona el tamaño, aumentándolo a medida que nos alejamos del ecuador. Por ejemplo, Groenlandia aparece aproximadamente con el mismo tamaño que África, cuando en realidad es aproximadamente 16 veces menor. La mayor distorsión se da en la Antártida, que no se representa entera (si se hiciera, la distorsión sería infinita en el polo sur). Por este motivo, es interesante plantearse qué porción de \mathbb{S}^2 estamos dejando de representar con el mapa de Mercator. Calculamos el área esférica de $\Omega_{\mathcal{M}}$, utilizando el Corolario 1.1.

$$\text{Área}(\Omega_{\mathcal{M}}) = \int_0^{2\pi} \int_{-\varphi_+}^{\varphi_+} \cos \varphi \, d\varphi d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_{\arcsin(-\tanh \pi)}^{\arcsin(\tanh \pi)} \cos \varphi \, d\varphi d\lambda = 4\pi \tanh(\pi).$$

Por tanto, $\frac{\text{Área}(\Omega_{\mathcal{M}})}{\text{Área}(\mathbb{S}^2)} = \tanh(\pi) \approx 0.9963$. Por tanto, dejamos de representar aproximadamente un 0.37% de la superficie de la Tierra, lo que se puede considerar despreciable si además tenemos en cuenta que esa pequeña porción de área no representada se concentra alrededor de los polos norte y sur.

2. Mapas

Definición 2.3. Sea S una superficie de revolución. Una curva regular en S se dice loxodroma si corta a los meridianos formando el mismo ángulo.

Observación 2.3. Como en la esfera los paralelos y meridianos son ortogonales, podemos cambiar los papeles de paralelos y meridianos en la anterior definición y decir que una curva regular en la esfera se dice loxodroma si corta a los paralelos formando el mismo ángulo.

Proposición 2.4. Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva parametrizada por el arco. γ es loxodroma formando un ángulo θ con los paralelos si y solo si

$$\gamma(s) = X^e(\lambda(s), \varphi(s)), \text{ donde } \varphi(s) = \sin(\theta)s + c_1, \lambda(s) = \cos(\theta)\chi(\varphi(s)) + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, la proyección cartográfica de Mercator lleva loxodromas de la esfera en rectas del plano.

Demostración. En primer lugar, observamos que toda curva regular en la esfera $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ puede escribirse como $X^e(\lambda(s), \varphi(s))$, siendo $\lambda, \varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^∞ , cuyas derivadas no se anulan simultáneamente en cada punto, esto es, $\lambda'(s)^2 + \varphi'(s)^2 \neq 0 \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. El vector velocidad de la curva γ viene dado por $\gamma'(s) = \lambda'(s)X_\lambda^e + \varphi'(s)X_\varphi^e$.

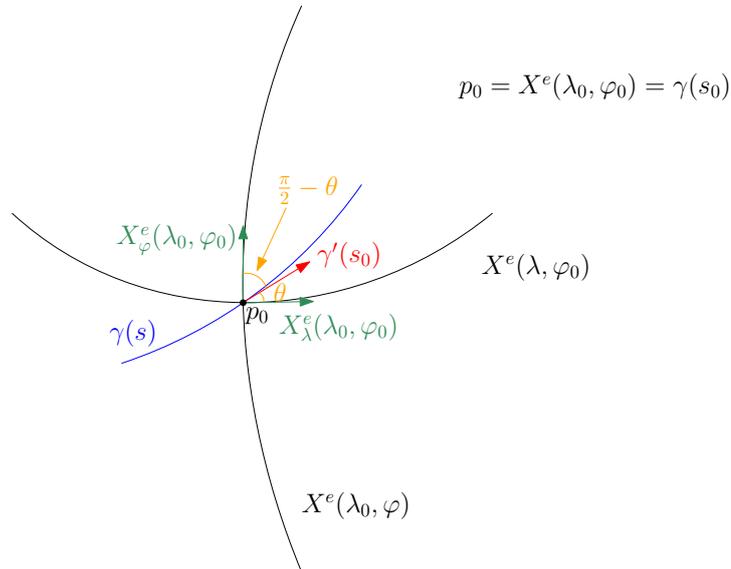
Como vimos en la sección 2.3, un meridiano situado a longitud fija $\lambda_0 \in (-\pi, \pi)$ puede parametrizarse como

$$X^e(\lambda_0, \cdot) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad X^e(\lambda_0, \varphi) = (\cos \lambda_0 \cos \varphi, \sin \lambda_0 \cos \varphi, \sin \varphi).$$

De igual forma, un paralelo situado a latitud fija $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ puede parametrizarse como

$$X^e(\cdot, \varphi_0) : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad X^e(\lambda, \varphi_0) = (\cos \lambda \cos \varphi_0, \sin \lambda \cos \varphi_0, \sin \varphi_0).$$

Imponemos que γ forme un ángulo constante con los paralelos, que llamaremos θ . En consecuencia, forma un ángulo constante $\frac{\pi}{2} - \theta$ con los meridianos.



Entonces, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ se ha de cumplir

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\langle \gamma'(s), X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s)) \rangle}{\|X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s))\|} = \\ &= \frac{\langle \lambda'(s)X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s)) + \varphi'(s)X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s)), X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s)) \rangle}{\|X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s))\|} = \frac{\lambda'(s)E(\lambda(s), \varphi(s))}{\sqrt{E(\lambda(s), \varphi(s))}} = \\ &= \frac{\lambda'(s)\cos^2(\varphi(s))}{\cos(\varphi(s))} = \lambda'(s)\cos(\varphi(s)). \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) = \frac{\langle \gamma'(s), X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s)) \rangle}{\|X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s))\|} = \\ &= \frac{\langle \lambda'(s)X_\lambda^e(\lambda(s), \varphi(s)) + \varphi'(s)X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s)), X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s)) \rangle}{\|X_\varphi^e(\lambda(s), \varphi(s))\|} = \\ &= \frac{\varphi'(s)G(\lambda(s), \varphi(s))}{\sqrt{G(\lambda(s), \varphi(s))}} = \varphi'(s). \end{aligned}$$

Hemos utilizado la hipótesis de que γ es parametrizada por el arco, y recordamos que $E = \langle X_\lambda^e, X_\lambda^e \rangle = \cos^2 \varphi$, $G = \langle X_\varphi^e, X_\varphi^e \rangle = 1$ son los coeficientes de la Primera Forma Fundamental asociada a la parametrización de las coordenadas esféricas X^e .

Integrando, obtenemos $\varphi(s) = \sin(\theta)s + c_1$, con $c_1 \in \mathbb{R}$. Vemos que $\varphi(s)$ es una función afín que no debemos confundir con la función de Gudermann. De igual forma, resolvemos integrando la ecuación diferencial para λ ,

$$\lambda'(s) = \cos(\theta) \sec(\varphi(s)).$$

Sus soluciones son

$$\lambda(s) = \cos(\theta) \int_0^s \sec(\varphi(t)) dt = \cos(\theta)\chi(\varphi(s)) + c_2, \text{ con } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por último, vemos que la imagen por la proyección cartográfica de Mercator \mathcal{M} de una loxodroma es

$$\mathcal{M}(\gamma(s)) = \mathcal{M}(X^e(\lambda(s), \varphi(s))) = (\lambda(s), \chi(\varphi(s))) = (\cos(\theta)\chi(\varphi(s)) + c_2, \chi(\varphi(s))),$$

que es una recta afín en el plano. \square

Este resultado nos da la clave para entender la relevancia histórica que tuvo el mapa de Mercator desde su publicación en 1569 y durante los siglos posteriores. En aquella época, la navegación marítima estaba en pleno apogeo y, esencialmente se realizaba siguiendo líneas de rumbo, lo que hemos llamado loxodromas.

Hoy en día, herramientas de navegación más avanzadas como el posicionamiento por GPS permiten minimizar la distancia recorrida y el gasto en combustible en la ruta que siguen los aviones. Esta se realiza aproximándose lo más posible a un arco de una circunferencia máxima que une origen y destino.

Visualizar geodésicas de la esfera en un mapa de Mercator nos puede dar la idea distorsionada de que recorreremos una distancia mayor con la geodésica que con la loxodroma, al proyectarse la loxodroma en una recta del mapa de Mercator. A continuación, presentamos un ejemplo.

2. Mapas

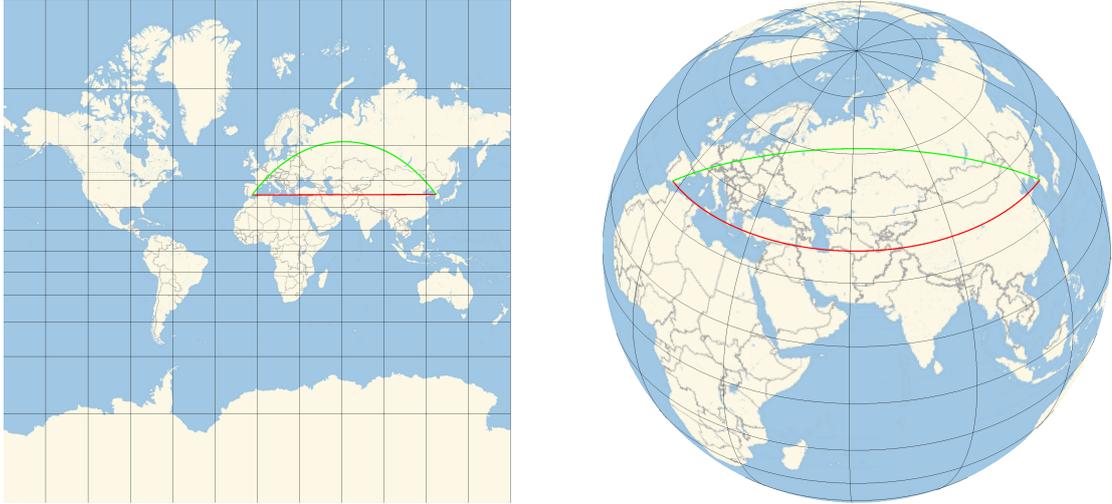


Figura 2.4.: Loxodroma (rojo) y geodésica (verde) que une Granada con Seúl.

Esta distorsión que provoca el mapa de Mercator en las geodésicas es aún mayor cuando consideramos dos puntos $p_1 = X^e(\lambda_1, \varphi)$, $p_2 = X^e(\lambda_2, \varphi)$ que estén situados a la misma latitud pero sus longitudes verifiquen $|\lambda_1 - \lambda_2| = \pi$, es decir, p_1 y p_2 son puntos diametralmente opuestos sobre el paralelo que los contiene. En ese caso, la geodésica que los une pasa por el polo norte y en el mapa de Mercator se proyecta como un par de rectas paralelas. Lo podemos visualizar en la siguiente Figura:

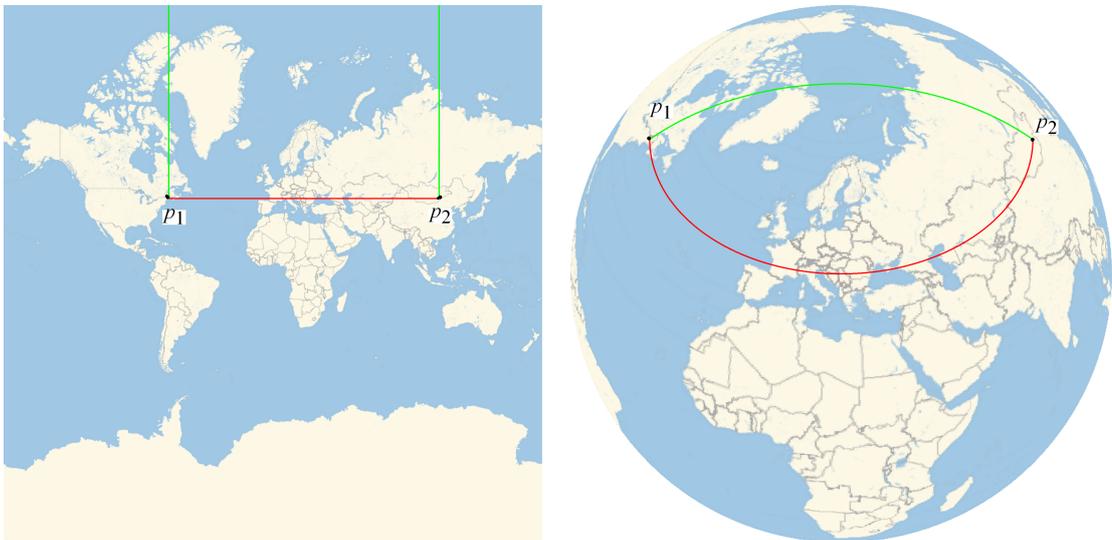


Figura 2.5.: Loxodroma (rojo) y geodésica (verde) que une los puntos $p_1 = X^e(-\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{4})$ y $p_2 = X^e(\frac{11\pi}{18}, \frac{\pi}{4})$.

Para experimentar con este fenómeno, presentamos un código de Mathematica en el Apéndice A.2.

2.4. Una condición suficiente para que un mapa sea conforme

A lo largo de esta sección, identificaremos \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} de forma natural. Recordamos algunos resultados vistos en Variable Compleja.

Proposición 2.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Sea $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función. $\Re h : A \rightarrow \mathbb{R}$ es su parte real, e $\Im h : A \rightarrow \mathbb{R}$, su parte imaginaria. Dado $z_0 = (u_0, v_0) \in A$, equivalen:

1. h es holomorfa en z_0 .
2. $\Re h$ e $\Im h$ son diferenciables en (u_0, v_0) y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} (\Re h)_u(u_0, v_0) = (\Im h)_v(u_0, v_0), \\ (\Re h)_v(u_0, v_0) = -(\Im h)_u(u_0, v_0). \end{cases}$$

Si se cumplen, la derivada compleja de h es $h'(z_0) = ((\Re h)_u, (\Im h)_u)(u_0, v_0) \equiv [(\Re h)_u + i(\Im h)_u](u_0, v_0)$.

En el siguiente resultado, se presenta una caracterización de las funciones conformes entre abiertos de \mathbb{C} .

Proposición 2.6. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Sea $z_0 \in A$. Una función C^1 , $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme en z_0 si y sólo si h es holomorfa (o antiholomorfa) en z_0 y $h'(z_0) \neq 0$ (o $\overline{h'}(z_0) \neq 0$).

Proposición 2.7. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto no vacío, y

$$h : A \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = x + iy = (x, y) \rightarrow (h_1, h_2)(x, y) \text{ una aplicación diferenciable.}$$

Consideramos los operadores $h_z = \frac{1}{2}(h_x - ih_y)$, $h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(h_x + ih_y)$. Supongamos que existe $z_0 = (x_0, y_0) \in A$ tal que $Jac(h)(z_0) > 0$. Entonces,

$$0 \leq \frac{|h_{\bar{z}}|^2}{|h_z|^2}(z_0) = \frac{|dh|^2 - 2Jac(h)}{|dh|^2 + 2Jac(h)}(z_0) < 1.$$

Además, se da la igualdad $0 = \frac{|h_{\bar{z}}|^2}{|h_z|^2}(z_0)$, si y solo si $h_{\bar{z}}(z_0) = 0$, si y solo si h es holomorfa en z_0 .

Demostración. Empezamos calculando h_z , $|h_z|^2$, $h_{\bar{z}}$, y $|h_{\bar{z}}|^2$:

$$\begin{aligned} h_z &= \frac{1}{2}(h_x - ih_y) = \frac{1}{2}((h_1)_x + i(h_2)_x - i(h_1)_y + (h_2)_y). \\ |h_z|^2 &= \frac{1}{4} \left[((h_1)_x + (h_2)_y)^2 + ((h_2)_x - (h_1)_y)^2 \right]. \\ h_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(h_x + ih_y) = \frac{1}{2}((h_1)_x + i(h_2)_x + i(h_1)_y - (h_2)_y). \\ |h_{\bar{z}}|^2 &= \frac{1}{4} \left[((h_1)_x - (h_2)_y)^2 + ((h_2)_x + (h_1)_y)^2 \right]. \end{aligned}$$

Calculamos ahora $|dh|^2$ y $Jac(h)$:

$$\begin{aligned} |dh|^2 &= |h_x|^2 + |h_y|^2 = (h_1)_x^2 + (h_2)_x^2 + (h_1)_y^2 + (h_2)_y^2. \\ Jac(h) &= (h_1)_x(h_2)_y - (h_1)_y(h_2)_x. \end{aligned}$$

2. Mapas

Vemos ahora fácilmente que

$$\begin{aligned} |dh|^2 - 2Jac(h) &= (h_1)_x^2 + (h_2)_y^2 - 2(h_1)_x(h_2)_y + (h_2)_x^2 + (h_1)_y^2 + 2(h_1)_y(h_2)_x = \\ &= ((h_1)_x - (h_2)_y)^2 + ((h_2)_x + (h_1)_y)^2. \\ |dh|^2 + 2Jac(h) &= (h_1)_x^2 + (h_2)_y^2 + 2(h_1)_x(h_2)_y + (h_2)_x^2 + (h_1)_y^2 - 2(h_1)_y(h_2)_x = \\ &= ((h_1)_x + (h_2)_y)^2 + ((h_2)_x - (h_1)_y)^2. \end{aligned}$$

Supongamos que existe $z_0 \in A$ tal que $Jac(h)(z_0) > 0$. Entonces, se tiene que

$$\frac{|h_{\bar{z}}|^2}{|h_z|^2}(z_0) = \frac{|dh|^2 - 2Jac(h)}{|dh|^2 + 2Jac(h)}(z_0).$$

Vemos que $-2Jac(h)(z_0) < 2Jac(h)(z_0)$, sumamos a ambos lados $|dh|^2(z_0)$ y obtenemos que $(|dh|^2 - 2Jac(h))(z_0) < (|dh|^2 + 2Jac(h))(z_0)$. Como $(|dh|^2 + 2Jac(h))(z_0) > 0$, se tiene la desigualdad

$$\frac{|h_{\bar{z}}|^2}{|h_z|^2}(z_0) = \frac{|dh|^2 - 2Jac(h)}{|dh|^2 + 2Jac(h)}(z_0) < 1.$$

La desigualdad $0 \leq \frac{|h_{\bar{z}}|^2}{|h_z|^2}$ es clara. La igualdad se da en un punto z_0 si y solo si $h_{\bar{z}}(z_0) = 0$. Pero esto es equivalente a que h sea holomorfa en z_0 (se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0). \square

Enunciamos ahora una condición suficiente para que un mapa sea conforme:

Proposición 2.8. *Sea (Ω, Δ, f) un mapa, tal que $\Omega \subset \Omega^e$. $\mathcal{U} := (X^e)^{-1}(\Omega)$ es abierto de \mathbb{R}^2 . Supongamos que la proyección cartográfica f viene dada en coordenadas esféricas por*

$$f \circ X^e : \mathcal{U} \rightarrow \Delta, \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)).$$

Si en \mathcal{U} se cumple uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} x_\varphi = -y_\lambda \sec \varphi, \\ y_\varphi = x_\lambda \sec \varphi. \end{cases} \\ 2. \quad & \begin{cases} x_\varphi = y_\lambda \sec \varphi, \\ y_\varphi = -x_\lambda \sec \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

entonces f es una proyección cartográfica conforme.

Demostración. Como $\Omega \subset \Omega^e = \text{Im}(X^e)$, tiene sentido la restricción de $(X^e)^{-1}$ a Ω . Usando el difeomorfismo ψ definido en (2.1), tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Delta \\ \downarrow \psi \circ (X^e)^{-1} & \nearrow & \\ \psi(\mathcal{U}) & \xrightarrow{f \circ X^e \circ \psi^{-1} := h} & \end{array}$$

$h(\lambda, \tau) = (x(\lambda, \tau), y(\lambda, \tau))$

h es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^2 . En particular, x e y son diferenciables. Vimos en la Proposición 2.3 que $X^e \circ \psi^{-1}$ es conforme. Por tanto, si probamos que h es conforme, entonces f será necesariamente conforme.

Calculamos las derivadas parciales de x e y . Vemos que $x(\lambda, \tau) = x(\lambda, \chi(\varphi))$, $y(\lambda, \tau) = y(\lambda, \chi(\varphi))$.

Utilizamos la regla de la cadena para obtener

$$x_\varphi = x_\tau \chi'(\varphi) = x_\tau \sec \varphi, \quad y_\varphi = y_\tau \sec \varphi.$$

Supongamos que ocurre 1. Entonces, $x_\tau \sec \varphi = x_\varphi = -y_\lambda \sec \varphi$. Simplificando $\sec \varphi$ en la igualdad, se cumple que $y_\lambda = -x_\tau$. De igual forma, $x_\lambda = y_\tau$. Entonces, h es holomorfa en $\psi(\mathcal{U})$ y su derivada compleja es $h' \equiv (x_\lambda, y_\lambda) = \cos \varphi (y_\varphi, -x_\varphi)$. Como $\Omega \subset \Omega^e$, $\cos \varphi$ no tiene ceros en \mathcal{U} . $(y_\varphi, -x_\varphi)$ no tiene ceros en \mathcal{U} porque f es difeomorfismo. Concluimos que h' no se anula en ningún punto de $\psi(\mathcal{U})$.

Hacemos un razonamiento análogo si se cumple 2. En este caso, vemos que ha de cumplirse que $y_\lambda = x_\tau$, $x_\lambda = -y_\tau$. Entonces, h es antiholomorfa en $\psi(\mathcal{U})$. La derivada compleja de \bar{h} es $\bar{h}' = \cos \varphi (-y_\varphi, x_\varphi)$, que no se anula en ningún punto de $\psi(\mathcal{U})$.

En cualquiera de los dos casos, se deduce que h es conforme en todo punto de $\psi(\mathcal{U})$, lo cual implica que f es una proyección cartográfica conforme. \square

Observación 2.4. Hemos considerado los casos en que $f \circ X^e \circ \psi^{-1}$ sea holomorfa o antiholomorfa. El caso antiholomorfo proviene de que $Jac(f) < 0$. A partir de ahora, supondremos que $Jac(f) > 0$. Es decir, trabajaremos con proyecciones cartográficas que conservan la orientación.

2.5. Medidas de distorsión y diagramas de Tissot

2.5.1. Medidas de distorsión de un mapa

A lo largo de esta sección, (Ω, Δ, f) será un mapa, con $\Omega \subset \Omega^e$. Sea $\mathcal{U} := (X^e)^{-1}(\Omega)$, que es abierto de \mathbb{R}^2 . La proyección cartográfica f viene dada en coordenadas esféricas por

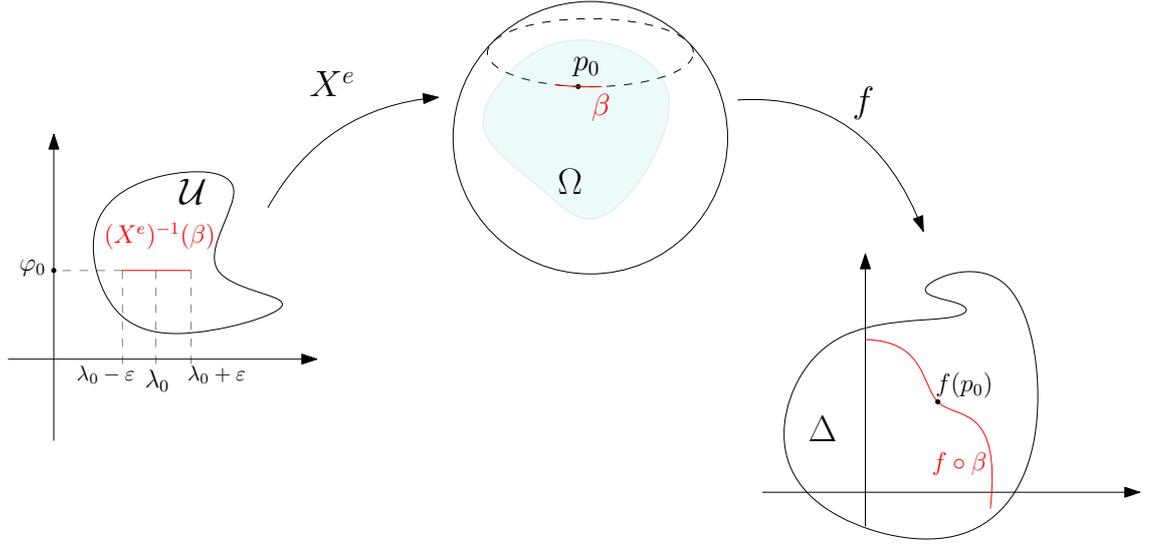
$$f \circ X^e : \mathcal{U} \rightarrow \Delta, \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)).$$

Definición 2.4. El factor de escala longitudinal es la aplicación

$$D_\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad D_\lambda(\lambda, \varphi) = \sec \varphi \left\| \frac{\partial(f \circ X^e)}{\partial \lambda} \right\| (\lambda, \varphi) = \sec \varphi \sqrt{(x_\lambda)^2(\lambda, \varphi) + (y_\lambda)^2(\lambda, \varphi)}.$$

Interpretamos este concepto geoméricamente tomando $p_0 = X^e(\lambda_0, \varphi_0) \in \Omega$. Parametrizamos el paralelo en el que se encuentra p_0 como $\beta : (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$, $\beta(\lambda) = X^e(\lambda, \varphi_0)$, donde tomaremos ε adecuado para que $Im(\beta) \subset \Omega$.

2. Mapas



El módulo de la velocidad de $f \circ \beta$ viene dado por $\|(f \circ \beta)'(\lambda)\| = \left\| \frac{\partial(f \circ X^e)}{\partial \lambda}(\lambda, \varphi_0) \right\|$. Por tanto, $D_\lambda(\lambda_0, \varphi_0) = 1$ si y solo si $\|(f \circ \beta)'(\lambda_0)\| = \cos \varphi_0 = \|\beta'(\lambda_0)\|$, si y solo si $f|_\beta$ cumple que su diferencial en p_0 es una isometría vectorial. En este caso, diremos que la escala longitudinal en p_0 es verdadera.

Definición 2.5. El factor de escala latitudinal es la aplicación

$$D_\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad D_\varphi(\lambda, \varphi) = \left\| \frac{\partial(f \circ X^e)}{\partial \varphi} \right\|(\lambda, \varphi) = \sqrt{(x_\varphi)^2(\lambda, \varphi) + (y_\varphi)^2(\lambda, \varphi)}.$$

La interpretación geométrica del factor de escala latitudinal es análoga a la que hemos hecho del factor de escala longitudinal. Tomamos $p_0 = X^e(\lambda_0, \varphi_0) \in \Omega$ y parametrizamos el meridiano en que se encuentra p_0 como $\sigma : (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$, $\sigma(\varphi) = X^e(\lambda_0, \varphi)$, con ε suficientemente pequeño para que $Im(\sigma) \subset \Omega$. En este caso, $D_\varphi(\lambda_0, \varphi_0) = 1$ si y solo si $\|(f \circ \sigma)'(\varphi_0)\| = 1 = \|\sigma'(\varphi_0)\|$, si y solo si $f|_\sigma$ cumple que su diferencial en p_0 es una isometría vectorial. En este caso, diremos que la escala latitudinal en p_0 es verdadera.

Definición 2.6. Se define el coeficiente de distorsión de área como la aplicación

$$D_A : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad D_A(\lambda, \varphi) = |Jac(f)|(X^e(\lambda, \varphi)) = \sec \varphi |Jac(f \circ X^e)|(\lambda, \varphi).$$

Dado $(\lambda, \varphi) \in \mathcal{U}$, se tiene que $D_A(\lambda, \varphi) = 1$ si y solo si f es isoareal "en el punto" $X^e(\lambda, \varphi)$. Decimos "en el punto" porque habíamos caracterizado un difeomorfismo entre superficies $f : S_1 \rightarrow S_2$ isoareal como aquel que tiene $|Jac(f)| \equiv 1$ en S_1 , y en este caso tenemos una condición puntual.

Observación 2.5. Vemos que esta definición es coherente con la Proposición 2.1, ya que el coeficiente de distorsión de área es 1 en todo punto de \mathcal{U} si y sólo si el mapa es isoareal.

Definición 2.7. Se define el coeficiente de distorsión angular como la aplicación $\omega : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, que viene dada por

$$\sin \omega(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{D_\lambda^2 + D_\varphi^2 - 2D_A}{D_\lambda^2 + D_\varphi^2 + 2D_A}}(\lambda, \varphi).$$

Lema 2.2. *El coeficiente de distorsión angular verifica*

$$0 \leq \sin \omega(\lambda, \varphi) < 1, \quad \forall (\lambda, \varphi) \in \mathcal{U},$$

y la igualdad $0 = \sin \omega(\lambda_0, \varphi_0)$ se da si y solo si f es conforme en $p_0 = X^e(\lambda_0, \varphi_0)$. En ese caso, diremos que f no introduce distorsión angular en p_0 .

Demostración. Recordemos el difeomorfismo h definido en la demostración de la Proposición 2.8 :

$$h := f \circ X^e \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U}) \rightarrow \Delta, \quad h(\lambda, \tau) = (x(\lambda, \tau), y(\lambda, \tau)),$$

donde ψ está dado en (2.1). Hemos supuesto en 2.4 que $Jac(f) > 0$, es decir, la proyección cartográfica f conserva la orientación. Estamos en las hipótesis de la Proposición 2.7, así que siguiendo la notación introducida en dicho resultado, veamos que

$$\sin \omega(\lambda, \varphi) = \frac{|h_{\bar{z}}|}{|h_z|}(\lambda, \varphi).$$

En primer lugar, se tiene que $h(\lambda, \tau) = h(\lambda, \chi(\varphi))$. Por tanto, utilizando la regla de la cadena, $x_\varphi = x_\tau \sec \varphi$, lo cual implica que $x_\tau = x_\varphi \cos \varphi$. De igual forma, $y_\tau = y_\varphi \cos \varphi$. Empezamos calculando $|dh|^2$:

$$|dh|^2 = (x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2 + (x_\tau)^2 + (y_\tau)^2 = (x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2 + \cos^2 \varphi ((x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2).$$

Calculamos ahora $Jac(h)$:

$$Jac(h) = \det \begin{pmatrix} x_\lambda & x_\tau \\ y_\lambda & y_\tau \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_\lambda & x_\varphi \cos \varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi \det \begin{pmatrix} x_\lambda & x_\varphi \\ y_\lambda & y_\varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi Jac(f \circ X^e).$$

Entonces,

$$\frac{|h_{\bar{z}}|}{|h_z|} = \sqrt{\frac{|dh|^2 - 2Jac(h)}{|dh|^2 + 2Jac(h)}} = \sqrt{\frac{(x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2 + \cos^2 \varphi ((x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2) - 2 \cos \varphi Jac(f \circ X^e)}{(x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2 + \cos^2 \varphi ((x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2) + 2 \cos \varphi Jac(f \circ X^e)}}.$$

Ahora, multiplicando numerador y denominador por $\sec \varphi$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{|h_{\bar{z}}|}{|h_z|}(\lambda, \varphi) &= \sqrt{\frac{\sec^2 \varphi ((x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2) + (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 - 2 \sec \varphi Jac(f \circ X^e)}{\sec^2 \varphi ((x_\lambda)^2 + (y_\lambda)^2) + (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 + 2 \sec \varphi Jac(f \circ X^e)}}(\lambda, \varphi) = \\ &= \sqrt{\frac{D_\lambda^2 + D_\varphi^2 - 2D_A}{D_\lambda^2 + D_\varphi^2 + 2D_A}}(\lambda, \varphi) = \sin \omega(\lambda, \varphi). \end{aligned}$$

La Proposición 2.7 nos garantiza que

$$0 \leq \sin \omega(\lambda, \varphi) < 1, \quad \forall (\lambda, \varphi) \in \mathcal{U},$$

y la igualdad $0 = \sin \omega(\lambda_0, \varphi_0)$ se da si y solo si f es conforme en $p_0 = X^e(\lambda_0, \varphi_0)$. \square

2.5.2. Visualización de la distorsión. Diagramas de Tissot

Nicolas Auguste Tissot (1824-1897) fue un matemático y cartógrafo francés. Llegó a ser miembro de la *École Polytechnique*, donde ocupó una plaza como profesor asistente de geodesia. Participó en el tribunal de examen para el acceso de Henri Poincaré.

Aunque Tissot desarrolló una teoría general de la medida de la distorsión para difeomorfismos entre superficies, en este trabajo nos centraremos en aquello que atañe a la esfera y el plano.

Tissot introdujo la elipse indicatriz, una herramienta muy utilizada en cartografía ya que permite apreciar rápidamente el tipo de distorsión que introduce una proyección. Veamos cómo se construyen estas elipses.

Construcción de la elipse indicatriz

Tissot demuestra en su trabajo *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* el siguiente Teorema:

Teorema 2.3 (Tissot). Sean S_1, S_2 superficies, $f : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo local y $p \in S_1$. Entonces, existe una base ortonormal $\{u_1, u_2\} \in T_p S_1$ tales que $df_p(u_1), df_p(u_2) \in T_{f(p)} S_2$ son ortogonales. Además, si f no es conforme, solo existe una pareja de direcciones con esa propiedad.

Demostración. Fijamos e_1, e_2 base ortonormal de $T_p S_1$. Los vectores $v_\alpha = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$, $w_\alpha = -\sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_2$ forman una base ortonormal de $T_p S_1$ para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$. Se trata de elegir α de forma que las imágenes de v_α, w_α por df_p sean ortogonales.

$$\begin{aligned} df_p(v_\alpha) &= \cos \alpha df_p(e_1) + \sin \alpha df_p(e_2). \\ df_p(w_\alpha) &= -\sin \alpha df_p(e_1) + \cos \alpha df_p(e_2). \end{aligned}$$

Definimos $\phi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(\alpha) = \langle df_p(v_\alpha), df_p(w_\alpha) \rangle$. Queremos estudiar los ceros de ϕ .

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= -\sin \alpha \cos \alpha (|df_p(e_1)|^2 - |df_p(e_2)|^2) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \langle df_p(e_1), df_p(e_2) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{(|df_p(e_1)|^2 - |df_p(e_2)|^2)}_A \sin(2\alpha) + \underbrace{\langle df_p(e_1), df_p(e_2) \rangle}_{B} \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Como las funciones seno y coseno son linealmente independientes, concluimos que $\phi \equiv 0$ si y solo si $\langle df_p(e_1), df_p(e_2) \rangle = 0$ y $|df_p(e_1)| = |df_p(e_2)| = 0$, para cualquier base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S_1$, si y solo si f es conforme.

Si $\phi \neq 0$, en primer lugar, vemos que $\phi(\alpha) = \phi(\alpha + \pi)$, así que buscaremos un cero de ϕ en $[0, \pi)$. Vemos además que $\phi(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\phi(\alpha)$ para todo α en $[0, \pi)$.

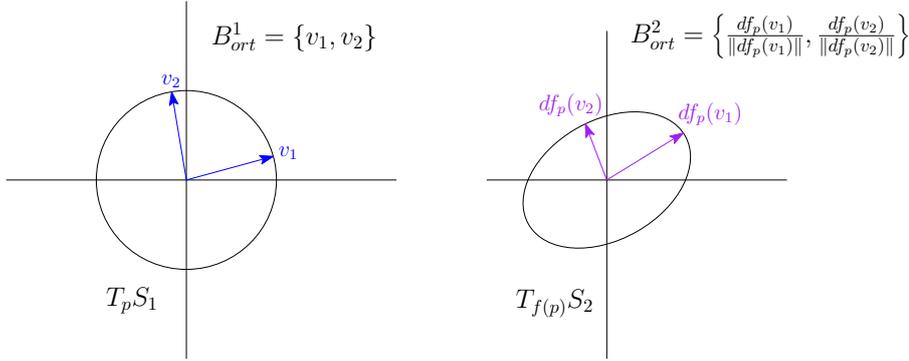
Si $A = 0$, entonces $B \neq 0$, ya que estamos suponiendo que $\phi \neq 0$. Por tanto, $\phi(\alpha) = B \cos(2\alpha)$, y encontramos el único cero de ϕ en $[0, \frac{\pi}{2})$ en el punto $\frac{\pi}{4}$.

Si $A \neq 0$, fijamos $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$. Si $\phi(\alpha_0) = 0$, ya hemos encontrado un cero. Si no, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(\alpha_0) > 0$. Entonces, $\phi(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) < 0$. ϕ es continua en $[\alpha_0, \alpha_0 + \frac{\pi}{2}]$, y el Teorema de Bolzano asegura que $\exists \alpha_1 \in (\alpha_0, \alpha_0 + \frac{\pi}{2})$ tal que $\phi(\alpha_1) = 0$. Ese es el único cero en $[0, \frac{\pi}{2})$, ya que suponemos que $A \neq 0$ y resolver la ecuación $\phi(\alpha) = 0$ equivale a resolver $\tan(2\alpha) = \frac{-B}{A}$. Como $\tan(2\alpha)$ es una biyección de $[0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ en \mathbb{R} , la solución es única.

Con este razonamiento, encontramos un único cero α' de ϕ en $[0, \frac{\pi}{2})$. Todos los ceros de ϕ en $[0, 2\pi)$ son $\alpha' + k\frac{\pi}{2} : k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Por tanto, $v_{\alpha'}, w_{\alpha'}$ es una base ortonormal en $T_p S_1$

tal que $df_p(v_{\alpha'}), df_p(w_{\alpha'})$ son ortogonales en $T_p S_2$ y es la única pareja de direcciones con esa propiedad. \square

Seguimos razonando como hizo Tissot, con S_1, S_2 superficies arbitrarias. Luego particularizaremos al caso de la esfera y el plano. Consideramos $f : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo local y fijamos $p \in S_1$. Por el Teorema 2.3, existe una base ortonormal $B_{ort}^1 = \{v_1, v_2\}$ de $T_p S_1$ tal que $df_p(v_1) \perp df_p(v_2)$. Entonces, $B_{ort}^2 = \left\{ w_1 = \frac{1}{\|df_p(v_1)\|} df_p(v_1), w_2 = \frac{1}{\|df_p(v_2)\|} df_p(v_2) \right\}$ es base ortonormal en $T_{f(p)} S_2$.



Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, la circunferencia de radio ρ en $T_p S_1$ es $S^1(\rho) = \{av_1 + bv_2 : a^2 + b^2 = \rho^2\}$.

$$df_p(av_1 + bv_2) = a \underbrace{df_p(v_1)}_s + b \underbrace{df_p(v_2)}_t = sw_1 + tw_2.$$

Entonces, $df_p(S^1(\rho)) = \left\{ sw_1 + tw_2 : \left(\frac{s}{\|df_p(v_1)\|} \right)^2 + \left(\frac{t}{\|df_p(v_2)\|} \right)^2 = \rho^2 \right\}$. Por tanto, $df_p(S^1(\rho))$ es una elipse en $T_{f(p)} S_2$ de semiejes $\rho \|df_p(v_1)\|$, y $\rho \|df_p(v_2)\|$ en las direcciones ortogonales w_1, w_2 . Además,

$$\text{Área}(df_p(S^1(\rho))) = \rho^2 \pi \|df_p(v_1)\| \|df_p(v_2)\|. \quad (2.2)$$

Llegados a este punto, podemos caracterizar de forma sencilla las aplicaciones isoareales mediante la elipse indicatriz.

Proposición 2.9. Sean $f : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo local entre superficies y $p \in S_1$. Sea $B_{ort}^1 = \{v_1, v_2\}$ la base ortonormal de $T_p S_1$ que nos proporciona el Teorema de Tissot. Entonces, f es isoareal en p si y solo si

$$\|df_p(v_1)\| \|df_p(v_2)\| = 1.$$

Demostración. Sabemos que $M(df_p, B_{ort}^1, B_{ort}^2) = \begin{pmatrix} \|df_p(v_1)\| & 0 \\ 0 & \|df_p(v_2)\| \end{pmatrix}$, y por tanto,

$Jac(f)(p) = \|df_p(v_1)\| \|df_p(v_2)\|$. Utilizando la Proposición 1.5, f es isoareal en p si y solo si $1 = |Jac(f)|(p) = \|df_p(v_1)\| \|df_p(v_2)\|$. \square

Definición 2.8. Sea (Ω, Δ, f) un mapa, $p \in \Omega$, $\rho \in \mathbb{R}^+$. A la elipse $df_p(S^1(\rho))$ así construida la llamaremos indicatriz en el punto p de radio ρ .

Definición 2.9. Un diagrama de Tissot se construye fijando $\rho \in \mathbb{R}^+$ y considerando sobre la esfera una serie de paralelos y meridianos de referencia. En cada punto de intersección de estos paralelos y meridianos, se dibujan las elipses indicatrices de radio ρ .

2. Mapas

¿Cómo visualizar la distorsión de un mapa a partir del diagrama de Tissot?

Al trabajar con diagramas de Tissot, discretizamos el problema de estudiar las elipses indicatrices. Por ello, las propiedades que enunciamos a continuación son implicaciones en un sentido y no caracterizaciones. Para asegurar el recíproco, tendríamos que estudiar el comportamiento de la elipse indicatriz en todos los puntos del dominio del mapa.

- Si un mapa es conforme, entonces todas las elipses indicatrices son circunferencias (los ejes de la elipse tienen igual longitud). El área de éstas aumenta en los puntos donde la distorsión de área es mayor que 1.
- Si un mapa es isoareal, entonces todas las elipses indicatrices tienen la misma área. En virtud de la fórmula (2.2) y de la Proposición 2.9, dicha área vale $\rho^2 \pi$.

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

3.1. Mapa cilíndrico de Lambert

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) fue un matemático suizo. Llegó a ser miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo por recomendación de Euler y trabajó bajo el mecenazgo de Fernando II de Prusia. Entre sus aportaciones a la cartografía se encuentra el mapa cilíndrico de Lambert:

$$(\Omega^e, (-\pi, \pi) \times (-1, 1), f).$$

La proyección cartográfica asociada f viene dada en coordenadas esféricas por:

$$f \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-1, 1), \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (\lambda, \sin \varphi).$$

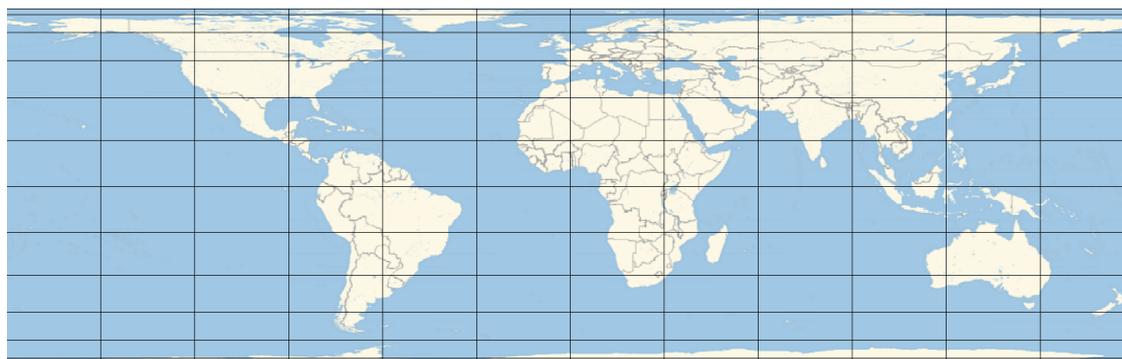


Figura 3.1.: Mapa cilíndrico de Lambert

Nos interesa conocer los coeficientes de la Primera Forma Fundamental asociada a $X = f^{-1}$. Para ello, utilizaremos la Proposición 2.2. La matriz Jacobiana de $f \circ X^e$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Jac}(f \circ X^e) = \cos \varphi.$$

Este cálculo, junto con la Proposición 2.1, nos permite concluir que la proyección cartográfica cilíndrica de Lambert es isoareal. La matriz de la Primera Forma Fundamental de X es

$$M(X^* g_{S^2}, B_u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & \sec^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que f únicamente es conforme a lo largo del ecuador, y por la Proposición 1.6, df_p es isometría vectorial para cada punto p del ecuador. Sin embargo, el mapa de

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

Lambert no es fiel en ninguna banda esférica que contenga al ecuador.

El factor de escala longitudinal es $D_\lambda = \sec \varphi$. Resolvemos $D_\lambda = 1$, donde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Las únicas soluciones son los puntos con latitud $\varphi = 0$. Es decir, la escala longitudinal sólo es verdadera en el ecuador.

El factor de escala latitudinal es $D_\varphi = \cos \varphi$. Resolvemos $D_\varphi = 1$, donde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Las únicas soluciones son los puntos con latitud $\varphi = 0$. Es decir, la escala longitudinal sólo es verdadera en el ecuador.

El coeficiente de distorsión angular ω viene dado por:

$$\sin \omega(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \sec^2 \varphi - 2}{\cos^2 \varphi + \sec^2 \varphi + 2}}$$

Resolvemos $\sin \omega(\lambda, \varphi) = 0$, donde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Las soluciones son los puntos con latitud $\varphi = 0$. Por tanto, el mapa cilíndrico de Lambert no introduce distorsión angular en el ecuador, lo cual es otra forma de decir que f es conforme a lo largo del ecuador.

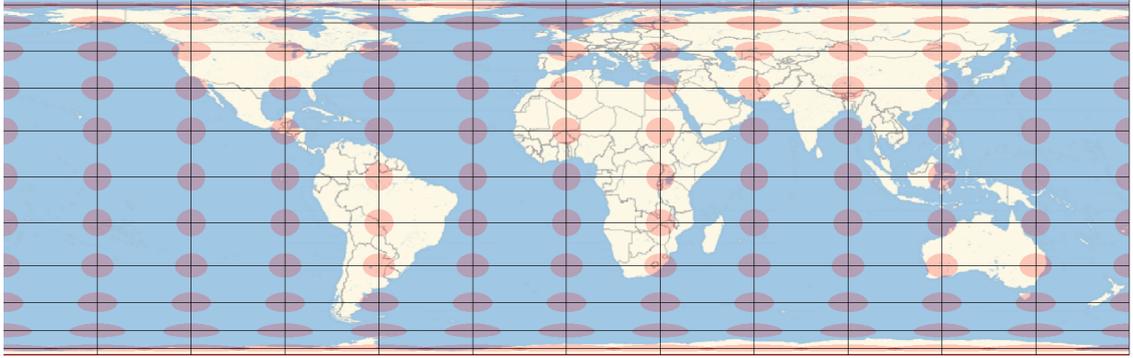


Figura 3.2.: Diagrama de Tissot para el mapa construido a través de la proyección cilíndrica de Lambert. Se han construido los elipses indicatrices con radio $\rho = 0.0785$.

3.2. Mapa de Bonne

Rigobert Bonne (1727-1795) fue un ingeniero y cartógrafo francés e ideó una familia de mapas que llevan su nombre.

Dado $\varphi_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, un mapa $(\Omega^e, \Delta_{\varphi_1}, f_{\varphi_1})$ se dice mapa de Bonne si viene dado en coordenadas esféricas por la siguiente expresión:

$$f_{\varphi_1} \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \Delta_{\varphi_1}, \quad (f_{\varphi_1} \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)),$$

$$\rho = \rho(\varphi) = \cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi, \quad v = v(\lambda, \varphi) = \frac{\lambda \cos \varphi}{\rho}, \quad (3.1)$$

$$x(\lambda, \varphi) = \rho \sin v, \quad y(\lambda, \varphi) = \cot \varphi_1 - \rho \cos v.$$

Lema 3.1. *Todos los mapas de Bonne son isoareales y la escala longitudinal es verdadera en todo punto.*

Demostración. Calculamos x_λ, y_λ :

$$x_\lambda = \cos \varphi \cos \nu, \quad y_\lambda = \cos \varphi \sin \nu.$$

Por tanto, $D_\lambda(\lambda, \varphi) = \sec \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} = 1$, luego la escala longitudinal es verdadera en todo punto.

Calculamos ahora x_φ, y_φ :

$$\begin{aligned} x_\varphi &= -\sin \nu + \lambda \cos \nu \left(\frac{-\lambda \sin \varphi (\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi) + \lambda \cos \varphi}{(\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi)^2} \right) = \\ &= -\sin \nu - \lambda^2 \cos \nu \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi} \right). \\ y_\varphi &= \cos \nu + \lambda^2 \sin \nu \left(\frac{\cos \varphi}{\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi} - \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |Jac(f_{\varphi_1})|(X^e(\lambda, \varphi)) &= \sec \varphi (x_\lambda y_\varphi - x_\varphi y_\lambda) = \\ &= \cos \nu \left(\cos \nu + \lambda^2 \sin \nu \left(\frac{\cos \varphi}{\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi} - \sin \varphi \right) \right) \\ &+ \sin \nu \left(\sin \nu + \lambda^2 \cos \nu \left(\sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\cot \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi} \right) \right) = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Concluimos con esto que los mapas de Bonne son isoareales. □

En 1514, Johannes Werner propuso un mapa conocido como mapa de Werner que se corresponde con el caso particular del mapa de Bonne con $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. En este trabajo, estudiaremos en profundidad el mapa de Bonne construido con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Dicho mapa fue adoptado en 1803 por el ejército francés, que lo utilizó durante todo el siglo XIX. Como los mapas de Bonne no son conformes, dejó de utilizarse en la Primera Guerra Mundial al no poder calcular con él ángulos de tiro de la artillería. Concretamente, estudiaremos

$$(\Omega^e, \Delta_{\frac{\pi}{4}}, f_{\frac{\pi}{4}}).$$

Como $\cot \frac{\pi}{4} = 1$, de (3.1), deducimos que la proyección cartográfica $f_{\frac{\pi}{4}}$ viene dada en coordenadas esféricas por

$$\begin{aligned} f_{\frac{\pi}{4}} \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \Delta_{\frac{\pi}{4}}, \quad (f_{\frac{\pi}{4}} \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)), \\ x(\lambda, \varphi) &= \left(1 + \frac{\pi}{4} - \varphi \right) \sin \left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi} \right), \\ y(\lambda, \varphi) &= 1 - \left(1 + \frac{\pi}{4} - \varphi \right) \cos \left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi} \right). \end{aligned}$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

$\Delta_{\frac{\pi}{4}}$ es el dominio determinado por la curva $\delta : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\delta(t) = \begin{cases} \left(\left(1 + \frac{\pi}{4} - t\right) \sin\left(\frac{\pi \cos t}{1 + \frac{\pi}{4} - t}\right), 1 - \left(1 + \frac{\pi}{4} - t\right) \cos\left(\frac{\pi \cos t}{1 + \frac{\pi}{4} - t}\right) \right) & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \left(\left(1 - \frac{3\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi \cos t}{1 - \frac{3\pi}{4} + t}\right), 1 - \left(1 - \frac{3\pi}{4} + t\right) \cos\left(\frac{\pi \cos t}{1 - \frac{3\pi}{4} + t}\right) \right) & \text{si } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

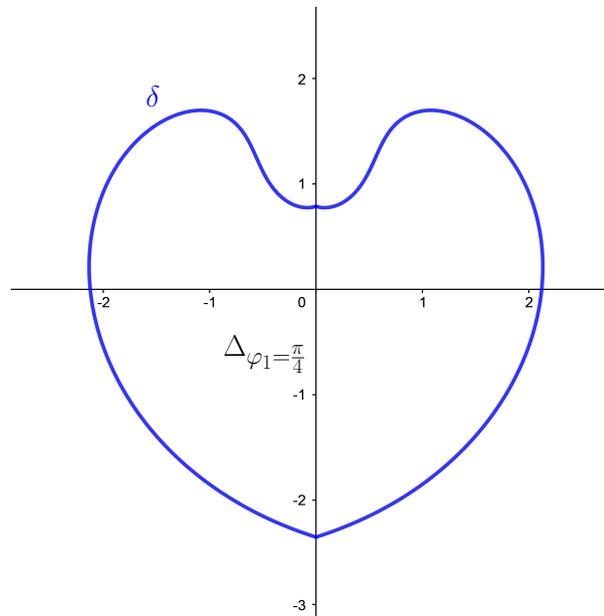


Figura 3.3.: Región $\Delta_{\varphi_1 = \frac{\pi}{4}}$

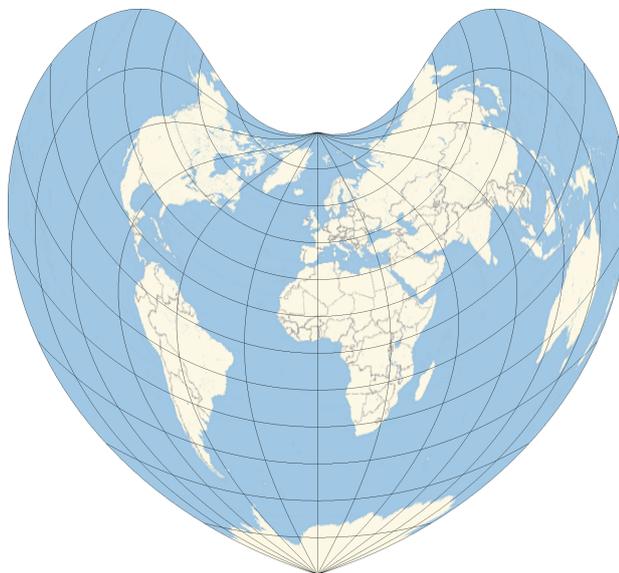


Figura 3.4.: Mapa de Bonne con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

Estudiemos las distorsiones latitudinal y angular que introduce el mapa de Bonne con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Por el cálculo que hicimos en la demostración del Lema 3.1, tenemos que

$$x_\varphi = -\sin\left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi}\right) - \lambda \sin \varphi \cos\left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi}\right).$$

$$y_\varphi = \cos\left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi}\right) - \lambda \sin \varphi \sin\left(\frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \frac{\pi}{4} - \varphi}\right).$$

Por tanto,

$$D_\varphi(\lambda, \varphi) = \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi + \lambda \sin \varphi (\cos \nu \sin \nu - \cos \nu \sin \nu)} = \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Resolviendo la ecuación $D_\varphi(\lambda, \varphi) = 1$, obtenemos como únicas soluciones los puntos con $\lambda = 0$, y los puntos con $\varphi = 0$. Por tanto, la escala latitudinal sólo es verdadera en el ecuador y en el meridiano situado a longitud 0.

Veamos la distorsión angular:

$$\sin \omega(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{1 + 1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi - 2}{1 + 1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi + 2}}.$$

Resolviendo $\sin \omega(\lambda, \varphi) = 0$, obtenemos como soluciones los puntos con $\lambda = 0, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y los que tienen $\varphi = 0, \lambda \in (-\pi, \pi)$. Es decir, el mapa de Bonne con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ no introduce distorsión angular en el ecuador ni en el meridiano situado a longitud 0. En esos puntos, df es isometría vectorial, sin embargo, este mapa no es fiel en ningún abierto que los contenga.

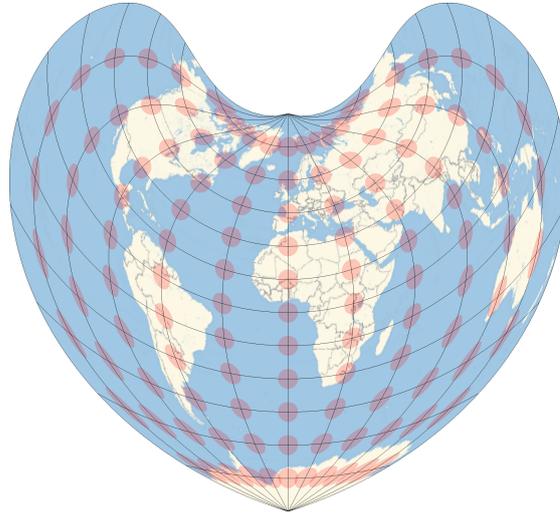


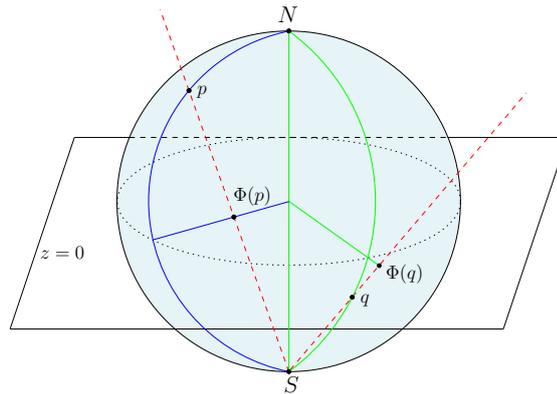
Figura 3.5.: Diagrama de Tissot para el mapa de Bonne con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Se han dibujado las elipses indicatrices usando radio $\rho = 0.0785$

3.3. Proyección estereográfica

Construcción geométrica Aunque esta proyección se ha estudiado en el grado, recordamos aquí su construcción. Denotaremos por $S = (0, 0, -1)$ al polo sur en la esfera. Construimos un difeomorfismo

$$\Phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Dado $q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, $\Phi(q)$ es la intersección del plano $\{z = 0\}$ con la semirrecta con origen S , y vector director \vec{Sq} .



$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

La inversa de Φ es $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$,

$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right),$$

Mapa de la proyección estereográfica Para construir un mapa con la proyección estereográfica, restringimos el dominio de la aplicación Φ a una región de \mathbb{S}^2 que no contenga a S . En un intento por representar la mayor área esférica posible, podríamos considerar como dominio a \mathbb{S}^2 salvo un pequeño entorno de S . No obstante, la gran distorsión de área que introduce la proyección estereográfica en los puntos cercanos a S hace que estos mapas carezcan de utilidad práctica. Como ejemplo, consideraremos como dominio el hemisferio norte, y obtenemos como imagen el disco unidad. Por tanto, el mapa de la proyección estereográfica es

$$(H^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}, \mathbb{D}(0, 1), f = \Phi|_{H^+}).$$



Figura 3.6.: Mapa del hemisferio norte construido con la proyección estereográfica

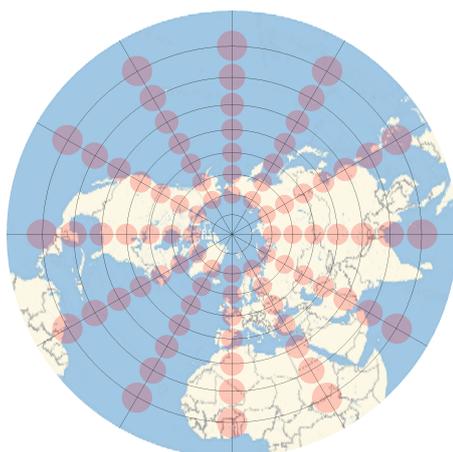


Figura 3.7.: Diagrama de Tissot. Se han construido las elipses indicatrices utilizando radio $\rho = 0.0785$.

Utilizando la parametrización de la esfera que nos da $X = f^{-1}$, podemos comprobar que es un mapa conforme. Calculamos las derivadas parciales:

$$X_u = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (2(1 - u^2 + v^2), -4uv, -4u).$$

$$X_v = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (-4uv, 2(1 + u^2 - v^2), -4v).$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

Calculamos los coeficientes de la Primera Forma Fundamental:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

Por tanto, X es una parametrización isoterma.

Para estudiar las distorsiones de un mapa arbitrario $(\Omega, \Delta, f = \Phi|_{\Omega})$ construido con la proyección estereográfica, lo escribimos en coordenadas esféricas

$$f \circ X^e : (X^e)^{-1}(\Omega) \rightarrow \Delta, \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)) = \left(\frac{\cos \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \right).$$

Empezamos calculando D_λ :

$$x_\lambda = \frac{-\sin \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad y_\lambda = \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

$$D_\lambda = \sec \varphi \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2}} = \frac{1}{1 + \sin \varphi}.$$

Resolviendo $D_\lambda = 1$, obtenemos como únicas soluciones los puntos con $\varphi = 0$. Es decir, los únicos puntos donde la escala longitudinal puede ser verdadera son los del ecuador.

Calculamos ahora D_φ :

$$x_\varphi = \cos \lambda \frac{-\sin \varphi(1 + \sin \varphi) - \cos^2 \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} = \frac{-\cos \lambda}{1 + \sin \varphi}.$$

$$y_\varphi = \frac{-\sin \lambda}{1 + \sin \varphi}.$$

$$D_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\cos \lambda}{1 + \sin \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\sin \lambda}{1 + \sin \varphi} \right)^2} = \frac{1}{1 + \sin \varphi}.$$

Resolviendo $D_\varphi = 1$, obtenemos como únicas soluciones los puntos con $\varphi = 0$. Es decir, los únicos puntos donde la escala latitudinal puede ser verdadera son los del ecuador.

Calculamos el coeficiente de distorsión angular:

$$D_A = \sec \varphi \left| \frac{\sin^2 \lambda \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} + \frac{\cos^2 \lambda \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \right| = \frac{1}{(1 + \sin \varphi)^2}.$$

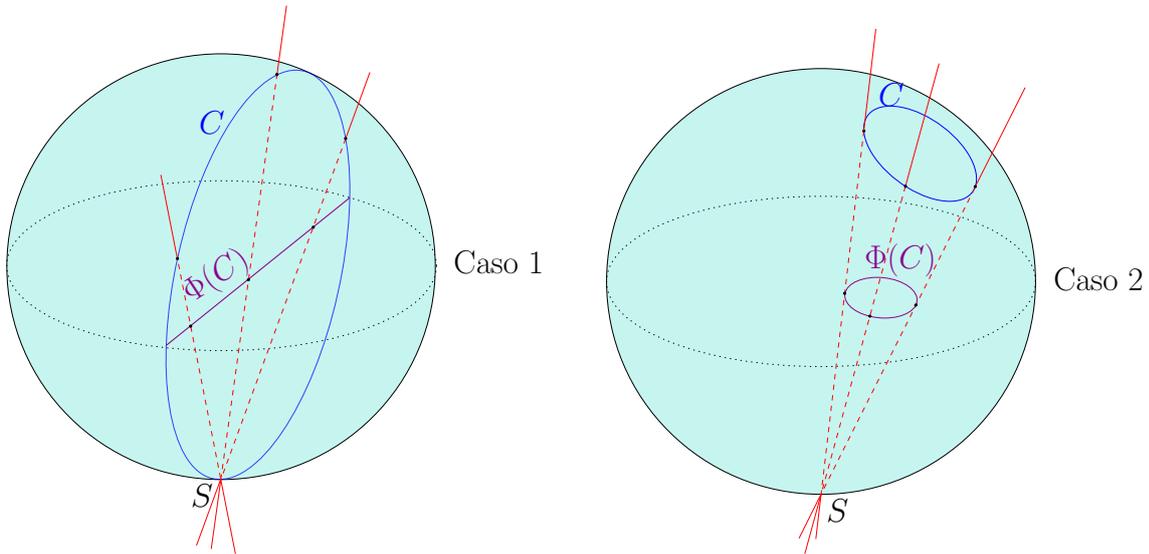
Resolviendo $D_A = 1$, obtenemos como únicas soluciones los puntos con $\varphi = 0$. Es decir, un mapa de la proyección estereográfica solo puede ser isoareal a lo largo del ecuador.

Por último, resaltamos una propiedad interesante de la proyección estereográfica, que se ve en Variable Compleja al estudiar transformaciones de Möbius.

Proposición 3.1. *Sea C una circunferencia en la esfera. Entonces, $\Phi(C)$ es:*

1. Una recta si $S \in C$.

2. Una circunferencia si $S \notin C$.



3.4. Mapa de Littrow

Definición 3.1. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definimos el argumento principal de z como el único $\tilde{\alpha} \in (-\pi, \pi]$ que verifica:

$$\tilde{\alpha} = \operatorname{sgn}(\Im z) \arccos \left(\frac{\Re z}{|z|} \right),$$

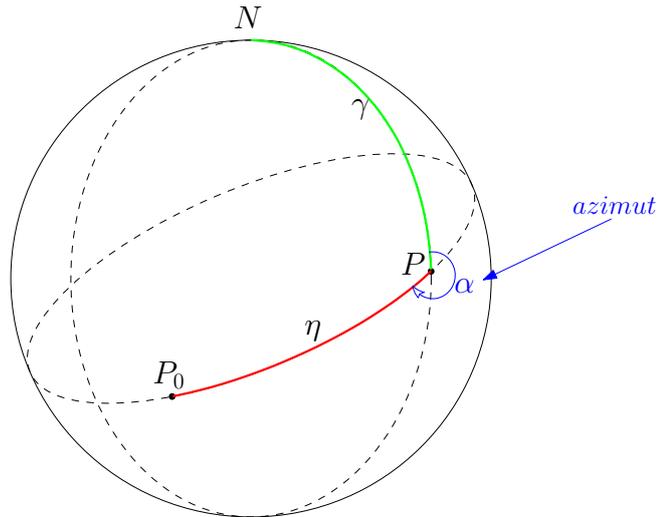
utilizando el convenio de $\operatorname{sgn}(0) = 1$.

En la siguiente definición fijaremos una orientación en $T_p\mathbb{S}^2$ según el normal exterior a la esfera.

Definición 3.2. Sea $p \in \mathbb{S}^2$, $B = \{u, v\}$ base de $T_p\mathbb{S}^2 = \langle p \rangle^\perp$. Diremos que B está orientada positivamente si $\det(u, v, p) > 0$.

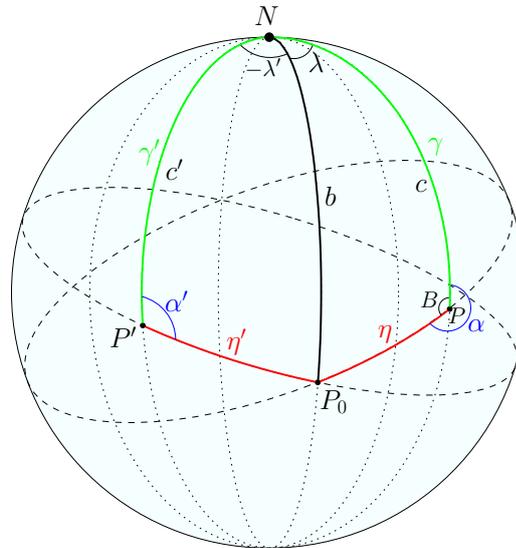
Definición 3.3. Sean $P_0 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, -P_0, N, S\}$. Llamamos $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{S}^2$ al arco de geodésica de menor longitud tal que $\gamma(0) = P$, y $\gamma(\varepsilon) = P_0$, y $\eta : [0, \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{S}^2$ al arco de geodésica de menor longitud tal que $\eta(0) = P$, y $\eta(\varepsilon') = -P_0$. Se define α , el azimut de P desde P_0 , como el ángulo orientado en sentido horario que va de $\gamma'(0)$ a $\eta'(0)$.

3. Geometría de mapas notables en Cartografía



Definición 3.4. Un mapa (Ω, Δ, f) se dice retroazimutal centrado en $P_0 \in \Omega$ si la proyección cartográfica f tiene la propiedad de que el azimut desde P_0 de cualquier punto $P \in \Omega \setminus \{N, S, P_0, -P_0\}$ coincide con $\tilde{\alpha}$, el argumento principal del vector $f(P) - f(P_0)$.

Vamos a formular analíticamente esta propiedad. Para ello, suponemos que $\Omega \subset \Omega^e$ y que la expresión de f en coordenadas esféricas es $(f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi))$.



Suponemos que $P_0 = X^e(0, \varphi_0)$, $P = X^e(\lambda, \varphi)$, con $\lambda > 0$. Denotamos por α el azimut de P desde P_0 , $b = d(N, P_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$, $c = d(N, P) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, y B el ángulo interior al triángulo P_0NP en el punto P . Aplicando la siguiente fórmula de trigonometría esférica a dicho triángulo P_0NP :

$$\cot B = \frac{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \lambda}{\sin b \sin \lambda}.$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \forall x \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\cot B = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi_0 \sin \lambda}.$$

Como $\alpha = 2\pi - B$, se tiene que:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \sin \lambda}.$$

En el caso de $P' = X^e(\lambda', \varphi)$, con $\lambda' < 0$, solo tenemos que aplicar la misma fórmula al triángulo esférico P_0NP' , luego

$$\cot \alpha' = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi \cos(-\lambda')}{\cos \varphi_0 \sin(-\lambda')} = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \lambda' - \cos \varphi_0 \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \sin \lambda'}.$$

Vemos que obtenemos la misma fórmula. Suponemos que $f(P_0) = (0, y_0)$. El argumento principal del vector $f(P) - f(P_0)$, que llamamos $\tilde{\alpha}$, viene dado por $\tan \tilde{\alpha} = \frac{x}{y-y_0}$. Por tanto, la ecuación que debe cumplir un mapa retroazimutal es:

$$\frac{y(\lambda, \varphi) - y_0}{x(\lambda, \varphi)} = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_0 \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \sin \lambda} = \sin \varphi \cot \lambda - \tan \varphi_0 \frac{\cos \varphi}{\sin \lambda}. \quad (3.2)$$

Los musulmanes utilizan mapas retroazimutales centrados en La Meca para orientar su cuerpo en el rezo de las cinco oraciones diarias que realizan. Algunos ejemplos relevantes de mapas retroazimutales son el mapa de Craig, el mapa de Hammer, o el mapa de Littrow, que estudiaremos en detalle. Veremos que además de retroazimutal, el mapa de Littrow es conforme.

Joseph Johann von Littrow (1781-1840) fue un astrónomo austríaco, que llegó a ser director del observatorio de Viena. Propuso el mapa que presentamos a continuación.

Definimos el mapa de Littrow

$$\left(\left\{ X^e(\lambda, \varphi) \in \mathbb{S}^2 : (\lambda, \varphi) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \Delta_L, f \right)$$

siendo $\Delta_L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 < 1 \right\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$, la elipse centrada en el origen de semiejes $\sqrt{2}$ y 1, a la que quitamos dos segmentos en el eje de mayor longitud, desde los focos hasta los vértices horizontales. Concretamente, le quitamos el segmento que une $(-\sqrt{2}, 0)$ con $(-1, 0)$ y el que une $(1, 0)$ con $(\sqrt{2}, 0)$.

La proyección cartográfica asociada f viene dada en dichas coordenadas esféricas por:

$$f \circ X^e : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \Delta_L,$$

$$(f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)) = (\sin \lambda \sec \varphi, \tan \varphi \cos \lambda).$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía



Figura 3.9.: Mapa de Littrow

Comprobemos que el mapa de Littrow es retroazimutal desde cualquier punto del meridiano situado a longitud $\lambda = 0$. Dado un punto $X^e(0, \varphi_0) : \varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de dicho meridiano se tiene que $y_0 = \tan \varphi_0$. Entonces, vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{y(\lambda, \varphi) - y_0}{x(\lambda, \varphi)} &= \frac{\tan \varphi \cos \lambda - \tan \varphi_0}{\sin \lambda \sec \varphi} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi \sin \lambda} - \frac{\tan \varphi_0 \cos \varphi}{\sin \lambda} = \\ &= \sin \varphi \cot \lambda - \tan \varphi_0 \frac{\cos \varphi}{\sin \lambda}, \end{aligned}$$

tal y como requiere la condición (3.2).

Antes de estudiar las distorsiones del mapa de Littrow, conviene estudiar la geometría de la proyección cartográfica f . Para ello, veremos el comportamiento de f en la frontera de Ω , qué papel juegan los segmentos que quitamos en la elipse que da lugar a Δ_L y el comportamiento local de f alrededor de los focos.

Consideramos el difeomorfismo $\zeta : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \rightarrow \zeta((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \subset \mathbb{R}^2$,

$$\zeta(\lambda, \varphi) = (\zeta_1, \zeta_2)(\lambda, \varphi) = \frac{1}{1 + \cos \varphi \cos \lambda} (\cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi).$$

Comprobamos que ζ es conforme:

$$\begin{aligned} (\zeta_1)_\lambda &= \frac{\cos \varphi \cos \lambda + \cos^2 \varphi}{(1 + \cos \lambda \cos \varphi)^2}, & (\zeta_2)_\varphi &= \frac{\cos \varphi + \cos \lambda}{(1 + \cos \lambda \cos \varphi)^2}. \text{ Entonces, } (\zeta_2)_\varphi = (\zeta_1)_\lambda \sec \varphi. \\ (\zeta_1)_\varphi &= \frac{-\sin \varphi \sin \lambda}{(1 + \cos \lambda \cos \varphi)^2}, & (\zeta_2)_\lambda &= \frac{\sin \varphi \sin \lambda \cos \varphi}{(1 + \cos \lambda \cos \varphi)^2}. \text{ Entonces, } (\zeta_1)_\varphi = -(\zeta_2)_\lambda \sec \varphi. \end{aligned}$$

Como además $((\zeta_1)_\varphi, (\zeta_2)_\varphi)$ no se anula en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, por la Proposición 2.8, ζ es conforme. Nuestra intención es poder describir la proyección cartográfica de Littrow en función de ζ . Para ello, hacemos unas comprobaciones previas en las que utilizamos notación

compleja:

$$\begin{aligned}
 |\zeta|^2 &= \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}, \quad \zeta - \bar{\zeta} = \frac{2i}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \\
 \zeta^2 &= \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi \sin \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}, \\
 1 + \zeta^2 &= \frac{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi \sin \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} = \\
 &= \frac{1 + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi \cos \lambda + 2i \cos \varphi \sin \lambda \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} = \\
 &= \frac{2 \cos \varphi (\cos \varphi + \cos \lambda + i \sin \lambda \sin \varphi)}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}. \text{ Entonces,} \\
 |1 + \zeta^2| &= \frac{2 \cos \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \cos^2 \lambda + 2 \cos \varphi \cos \lambda + \sin^2 \lambda (1 - \cos^2 \varphi)} = \\
 &= \frac{2 \cos \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} \sqrt{\cos^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi \cos \lambda - \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \lambda)} = \\
 &= \frac{2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}.
 \end{aligned}$$

Se tienen las siguientes expresiones de $\sin \varphi, \cos \varphi, \sin \lambda, \cos \lambda$ en función de ζ :

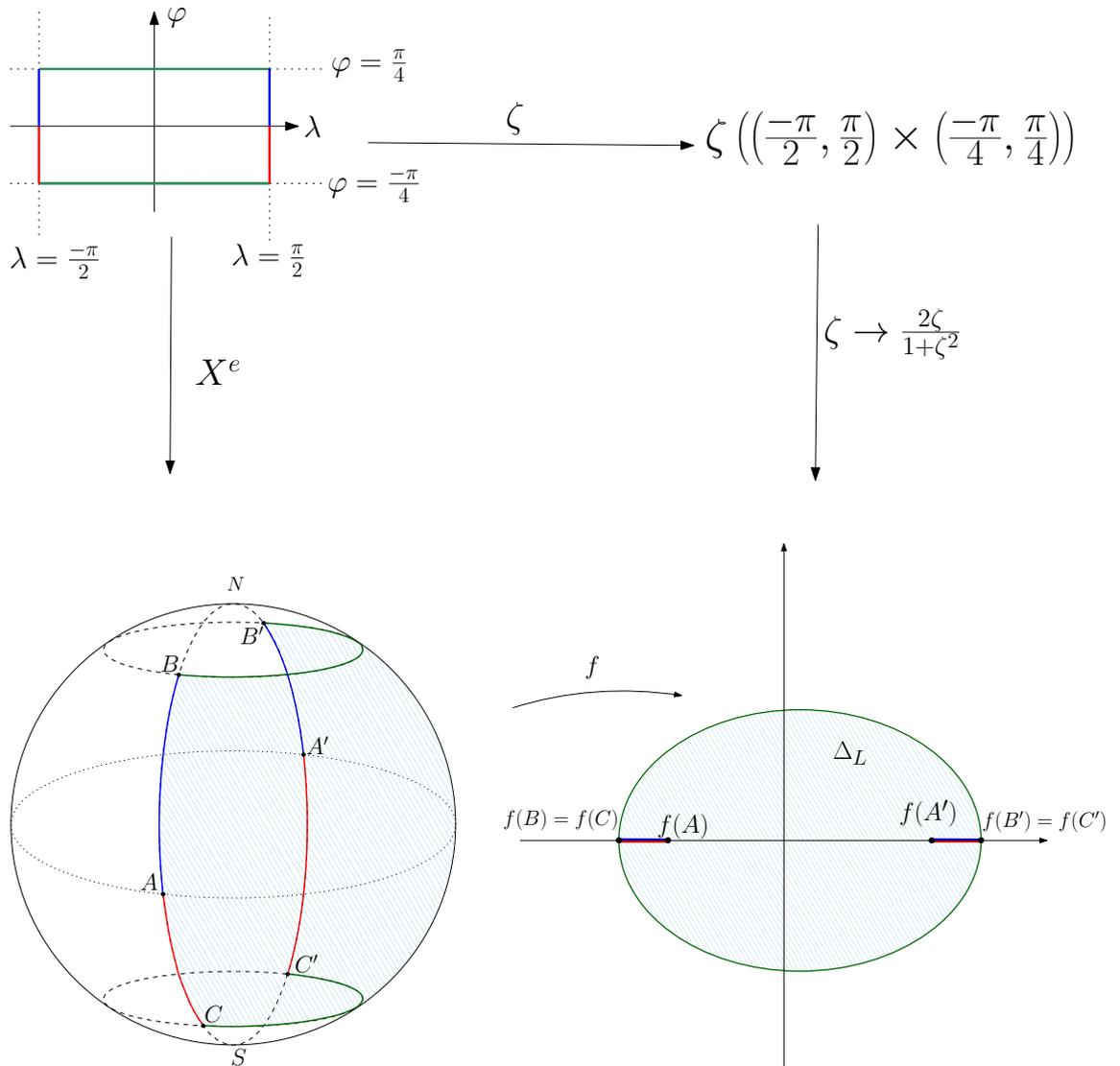
$$\begin{aligned}
 -i \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2} &= \frac{2 \sin \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi + 1 + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + 2 \cos \varphi \cos \lambda} = \\
 &= \frac{2 \sin \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{2(1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \sin \varphi. \\
 \frac{|1 + \zeta^2|}{1 + |\zeta|^2} &= \frac{2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{2(1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \cos \varphi. \\
 \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 + \zeta^2|} &= \frac{1 + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + 2 \cos \varphi \cos \lambda - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - \sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \\
 &= \frac{\cos \varphi + \cos \varphi (2 \cos^2 \lambda - 1) + 2 \cos \lambda}{2(1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \frac{2 \cos \lambda (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{2(1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \cos \lambda. \\
 \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{|1 + \zeta^2|} &= \frac{2 \cos \varphi \sin \lambda (1 + \cos \varphi \cos \lambda)}{2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi \cos \lambda)} = \sin \lambda.
 \end{aligned}$$

Escribamos ahora $(f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = x(\lambda, \varphi) + iy(\lambda, \varphi)$ en función de ζ , utilizando las expresiones para $\sin \lambda, \cos \lambda, \sin \varphi, \cos \varphi$ que acabamos de obtener y operamos.

$$\begin{aligned}
 (x + iy)(\zeta) &= \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi} + i \frac{\sin \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi} = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{|1 + \zeta^2|^2} (1 + |\zeta|^2) + \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{|1 + \zeta^2|^2} (1 - |\zeta|^2) = \\
 &= \frac{\zeta + \bar{\zeta} + \zeta|\zeta|^2 + \bar{\zeta}|\zeta|^2 + \zeta - \bar{\zeta} - \zeta|\zeta|^2 + \bar{\zeta}|\zeta|^2}{|1 + \zeta^2|^2} = \frac{2(\zeta + \bar{\zeta}|\zeta|^2)}{(1 + \zeta^2)(1 + \bar{\zeta}^2)} = \\
 &= \frac{2\zeta(1 + \bar{\zeta}^2)}{(1 + \zeta^2)(1 + \bar{\zeta}^2)} = \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2}.
 \end{aligned}$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

Por tanto, el mapa de Littrow puede escribirse en función de ζ como la aplicación $\zeta \rightarrow \frac{2\zeta}{\zeta^2+1}$. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo.



La derivada compleja de la aplicación $\zeta(\lambda, \varphi) \rightarrow \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}(\lambda, \varphi)$ es $\frac{2(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^2}(\lambda, \varphi)$, que no se anula si $(\lambda, \varphi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$. Por este motivo, f es una proyección cartográfica conforme. En la frontera de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$ hay dos puntos donde la derivada se anula. Estos son $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$. En estos puntos, que se corresponden con A, A' vía X^e , y a su vez con los focos de la elipse vía f , hay un comportamiento del tipo $z \rightarrow z^2$, y por tanto, se doblan los ángulos. Los segmentos azul y rojo en A y A' forman el ángulo π , mientras que sus imágenes por el mapa de Littrow forman el ángulo 2π . En los puntos $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right), \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right)$, que se corresponden con B, B', C, C' respectivamente vía X^e hay conformidad porque la derivada de $\zeta \rightarrow \frac{2\zeta}{\zeta^2+1}$ no se anula. Por tanto, se conserva la ortogonalidad de los segmentos verdes con los rojos y los azules.

Veamos ahora las distorsiones que introduce el mapa de Littrow:

El factor de escala longitudinal es $D_\lambda = \frac{\sqrt{\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi}$. Resolvemos $D_\lambda = 1$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ para calcular los puntos en los que la escala longitudinal es verdadera.

$$D_\lambda = 1 \iff \cos^4 \varphi = \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi = \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda (1 - \cos^2 \varphi) = 1 - \sin \lambda \cos^2 \varphi.$$

Multiplicamos la ecuación por $\sec^2 \varphi$ para obtener

$$\sin^2 \lambda = \sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi.$$

Podremos despejar λ en función de φ si y solo si $\sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi \leq 1$, si y solo si $1 - \sec^2 \varphi + \cos^2 \varphi \geq 0$. Entonces,

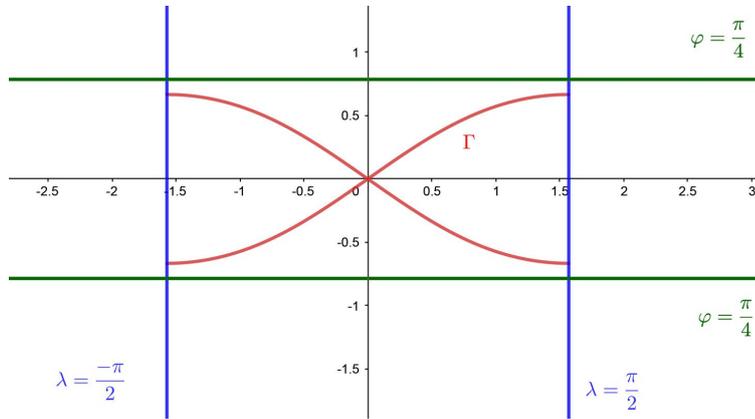
$$\begin{aligned} \sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi \leq 1 &\iff 0 \leq \cos^2 \varphi \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \iff \\ &\iff -\arccos\left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right) \leq \varphi \leq \arccos\left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right). \end{aligned}$$

En ese caso, podemos despejar $\lambda = \pm \arcsin(\sqrt{\sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi})$, y por tanto, llamando

$\varphi_\Gamma = \arccos\left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right)$, tenemos que

$$\Gamma = \left\{ (\pm \arcsin(\sqrt{\sec^2 \varphi - \cos^2 \varphi}), \varphi) : \varphi \in (-\varphi_\Gamma, \varphi_\Gamma) \right\}$$

es la curva de soluciones de la ecuación $D_\lambda = 1$.



El factor de escala latitudinal es $D_\varphi = \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda \sin^2 \varphi + \cos^2 \lambda}{\cos^4 \varphi}}$. Nos damos cuenta de que $D_\varphi = D_\lambda$, y por tanto, Γ es la curva de soluciones de la ecuación $D_\varphi = 1$.

Entonces, la escala longitudinal y latitudinal son verdaderas en los puntos $X^e(\lambda, \varphi)$ si y solo si $(\lambda, \varphi) \in \Gamma$.

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

El coeficiente de distorsión de área es $D_A = \frac{\cos^2 \lambda + \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda}{\cos^4 \varphi}$. Reconocemos ahora que $D_A = D_\lambda^2 = D_\varphi^2$. Por tanto, $D_A(\lambda, \varphi) = 1$ si y solo si $(\lambda, \varphi) \in \Gamma$, y df_p es isometría vectorial si y solo si $p = X^e(\lambda, \varphi)$, con $(\lambda, \varphi) \in \Gamma$, pero f no es fiel en ningún entorno suyo. Fijado λ_0 , vemos que la función $D_A(\lambda_0, \varphi) = \frac{\cos^2 \lambda_0 + \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda_0}{\cos^4 \varphi}$ crece cuando lo hace $|\varphi|$. Podemos hacer la siguiente interpretación: la distorsión de área sobre el meridiano situado a longitud λ_0 aumenta al alejarnos del ecuador, lo cual se ve claramente reflejado en el diagrama de Tissot:

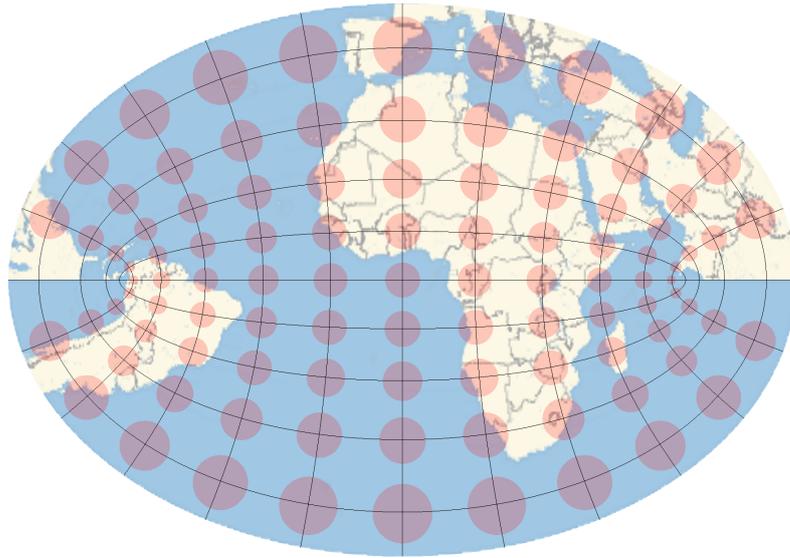
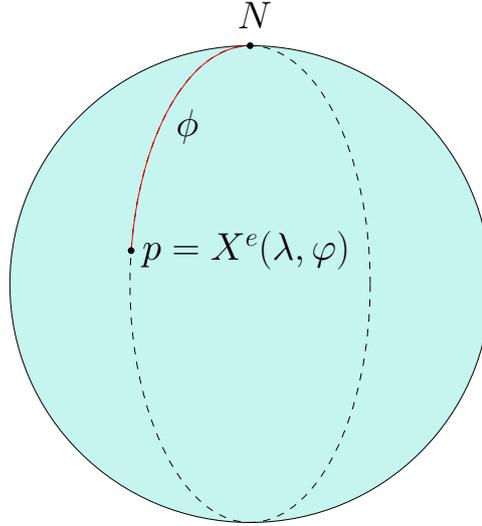


Figura 3.11.: Diagrama de Tissot para el mapa de Littrow. Se han dibujado las elipses indicatrices de radio $\rho = 0.0628$.

3.5. Mapa azimutal equidistante

Construcción de un mapa azimutal Vimos en la sección 2.3 que fijada una longitud λ , $X^e(\lambda, \cdot)$ nos proporciona una parametrización por el arco del meridiano de la esfera situado a longitud λ . Por tanto, si $p = X^e(\lambda, \varphi) \in \Omega^e$, podemos calcular la distancia de p al polo norte $N = (0, 0, 1)$ como

$$d(p, N) = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} ds = \frac{\pi}{2} - \varphi = \phi.$$



Cada punto de Ω^e está determinado únicamente por su distancia al polo norte y por su longitud λ . Por tanto, introducimos la siguiente parametrización de Ω^e :

$$X^N : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \Omega^e, \quad X^N(\lambda, \phi) = (\cos \lambda \sin \phi, \sin \lambda \sin \phi, \cos \phi).$$

Vemos que X^N tiene la misma expresión que X^e , donde hacemos el cambio de variable $\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Consideramos $\phi_0 \in (0, \pi)$, y $r : [0, \phi_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función C^1 estrictamente creciente y tal que $r(0) = 0$. Pretendemos construir un mapa (Ω, Δ, f) tal que

$$\Omega = \{X^N(\lambda, \phi) : \lambda \in (-\pi, \pi), \phi \in (0, \phi_0)\} \cup \{N\},$$

y la proyección cartográfica $f : \Omega \rightarrow \Delta$ venga dada por $f \circ X^N : (-\pi, \pi) \times (0, \phi_0) \rightarrow \Delta$,

$$f \circ X^N(\lambda, \phi) = r(\phi)(\cos \lambda, \sin \lambda), \quad f(N) = 0.$$

Esencialmente, asociamos a cada punto $X^N(\lambda, \phi) \in \Omega^e$ las coordenadas polares $(r(\phi), \lambda)$ en el plano, y por ello, esperaríamos obtener como imagen en el plano el disco $\mathbb{D}(0, r(\phi_0))$. Sin embargo, por construcción nos falta por cubrir el segmento $\{(-r(\phi), 0) : \phi \in (0, \phi_0)\}$ de dicho disco, cuestión que resolveremos tomando dos cartas, que llamaremos $(\Omega_1, \Delta_1, f_1)$, y $(\Omega_2, \Delta_2, f_2)$, siendo $\mathbb{D}(0, r(\phi_0)) = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Concretamente, consideramos

$$\Omega_1 = \{X^N(\lambda, \phi) : \lambda \in (-\pi, \pi), \phi \in (0, \phi_0)\} \cup \{N\}, \quad \Delta_1 = \mathbb{D}(0, r(\phi_0)) \setminus \{(-r(\phi), 0) : \phi \in (0, \phi_0)\},$$

$$\Omega_2 = \{X^N(\lambda, \phi) : \lambda \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \phi_0)\} \cup \{N\}, \quad \Delta_2 = \mathbb{D}(0, r(\phi_0)) \setminus \{(r(\phi), 0) : \phi \in (0, \phi_0)\}.$$

Recubrimos Δ_1 con $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Delta_1$, que viene dada por $f_1 \circ X^N : (-\pi, \pi) \times (0, \phi_0) \rightarrow \Delta_1$

$$f_1 \circ X^N(\lambda, \phi) = r(\phi)(\cos \lambda, \sin \lambda), \quad f_1(N) = 0,$$

y Δ_2 con $f_2 : \Omega_2 \rightarrow \Delta_2$, que viene dada por $f_2 \circ X^N : (0, 2\pi) \times (0, \phi_0) \rightarrow \Delta_2$

$$f_2 \circ X^N(\lambda, \phi) = r(\phi)(\cos \lambda, \sin \lambda), \quad f_2(N) = 0,$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

así que $f_1 = f_2$ en $\Omega_1 \cap \Omega_2$ y hemos cubierto todo el disco $\mathbb{D}(0, r(\phi_0))$.

Definición 3.5. Teniendo en cuenta esta construcción, diremos que un mapa (Ω, Δ, f) es azimutal centrado en el polo norte si

$$\Omega = \{p \in \mathbb{S}^2 : d(p, N) \leq \phi_0\}, \quad \Delta = \mathbb{D}(0, r(\phi_0)),$$

y la proyección cartográfica $f : \Omega \rightarrow \Delta$ viene dada por $f \circ X^N : (-\pi, \pi] \times (0, \phi_0) \rightarrow \Delta$,

$$f \circ X^N(\lambda, \phi) = r(\phi)(\cos \lambda, \sin \lambda), \quad f(N) = 0.$$

El mapa que presentamos a continuación se construye tomando $\phi_0 = \pi$ y la función $r(\phi) = \phi$.

Definición 3.6. Definimos el mapa azimutal equidistante centrado en el polo norte:

$$(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \mathbb{D}(0, \pi), f),$$

donde la proyección cartográfica f viene dada por:

$$f \circ X^N(\lambda, \phi) = \phi(\cos \lambda, \sin \lambda),$$

o alternativamente:

$$f \circ X^e(\lambda, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) (\cos \lambda, \sin \lambda).$$

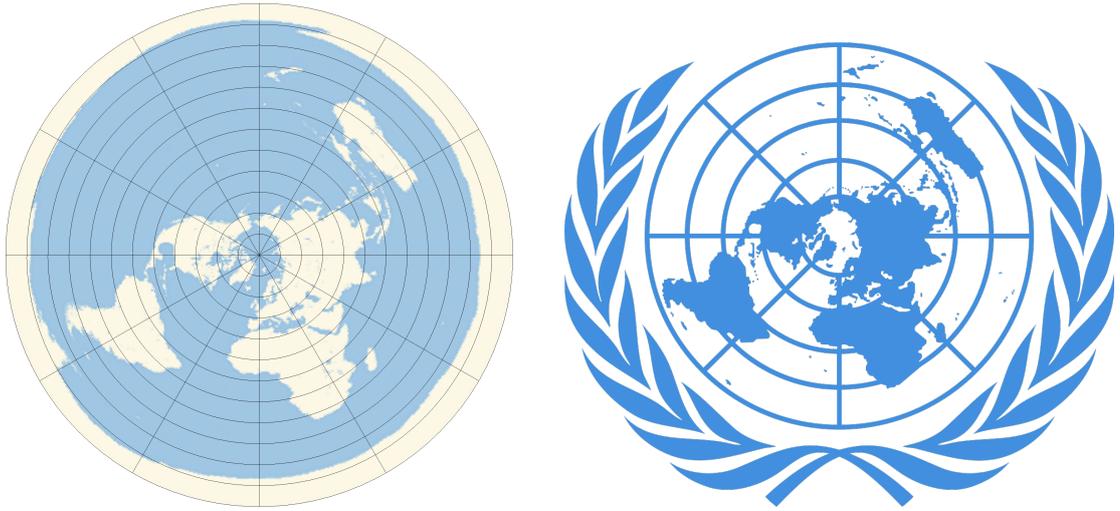


Figura 3.12.: Mapa azimutal equidistante centrado en el polo norte. Forma parte del logo de la Organización de las Naciones Unidas.

El motivo por el cual recibe el nombre de equidistante es que la distancia de cualquier punto al polo norte se conserva. En efecto, si $p = X^N(\lambda, \phi)$, entonces

$$d(p, N) = \phi = d(0, f(p)) = d(f(N), f(p)).$$

Esta proyección cartográfica también conserva la distancia entre cada pareja de puntos

antípodos. La imagen en el plano de la geodésica que une dos antípodos $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, y $-p$ pasando por N es el segmento que une $f(p)$ con $f(-p)$. Este segmento pasa por el origen y mide π . Por tanto, esta proyección cartográfica es C.L.A.C.

Veamos las distorsiones que introduce:

En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned}x_\lambda &= -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin \lambda, & y_\lambda &= \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos \lambda. \\x_\varphi &= -\cos \lambda, & y_\varphi &= -\sin \lambda.\end{aligned}$$

El factor de escala longitudinal es $D_\lambda(\lambda, \varphi) = \sec \varphi \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2} = \sec \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Como la ecuación $D_\lambda(\lambda, \varphi) = 1$ no tiene solución en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, no hay puntos en que la escala longitudinal sea verdadera. Podemos explicar este hecho viendo que la imagen un paralelo situado a latitud φ , que mide $2\pi \cos \varphi$, es una circunferencia de radio $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, que mide $\pi^2 - 2\pi\varphi$, y la ecuación $2\pi \cos \varphi - \pi^2 + 2\pi\varphi = 0$ no tiene solución en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

El factor de escala latitudinal es $D_\varphi(\lambda, \varphi) = 1$, luego la escala latitudinal es verdadera en todo punto. Este hecho no debería sorprendernos, ya que el mapa azimutal equidistante centrado en el polo norte se ha construido para que conserve deliberadamente la longitud de todos los meridianos.

El coeficiente de distorsión de área es $D_A = \sec \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. La ecuación $\cos \varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi = 0$ no tiene solución en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. No obstante, como $D_A(\lambda, \varphi) = D_A(\varphi)$, podemos preguntarnos si hay distorsión angular en N . Aplicando la regla de L'Hôpital, vemos que $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_A(\varphi) = 1$. Por tanto, f es isoareal en N .

El coeficiente de distorsión $\omega(\lambda, \varphi)$ viene dado por:

$$\sin \omega(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)^2 - 2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)}{1 + \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)^2 + 2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)}}.$$

Si intentamos resolver $\sin \omega(\lambda, \varphi) = 0$, obtenemos $0 = 1 + \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)^2 - 2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right) = \left(1 - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}\right)\right)^2$, la cual es equivalente a $\cos \varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi = 0$. Esta ecuación no tiene solución en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pero al igual que hemos hecho con el coeficiente de distorsión angular, vemos que $\sin \omega(\lambda, \varphi) = \sin \omega(\varphi)$, y $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi = 0$, y por tanto, f es conforme en N .

Concluimos con la Proposición 1.6 que df_N es isometría vectorial, pero el mapa azimutal equidistante no es fiel en ningún entorno del polo norte.

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

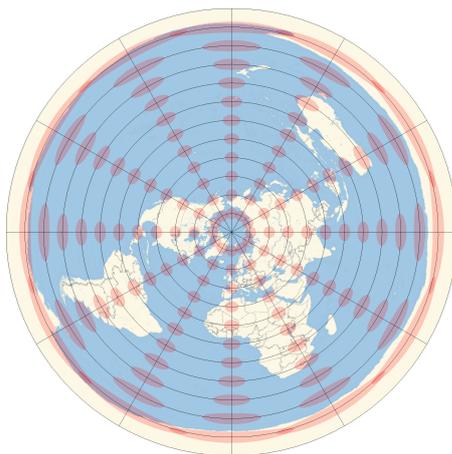


Figura 3.13.: Diagrama de Tissot del mapa azimutal equidistante centrado en el polo norte. Se muestran las elipses indicatrices de radio $\rho = 0.0785$.

3.6. Mapa de Aitov

David Alexandrovich Aitov (1854-1933) fue un cartógrafo ruso que emigró a Francia en 1879 por motivos políticos. Propuso en 1889 el mapa que lleva su nombre:

$$(\Omega^e, \Delta_A, f),$$

siendo Δ_A la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1. La proyección cartográfica $f : \Omega^e \rightarrow \Delta_A$ viene dada en coordenadas esféricas por: $f \circ X^e : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \Delta_A$,

$$(f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = \left(\frac{2 \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\text{sinc}(\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}))}, \frac{\sin \varphi}{\text{sinc}(\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}))} \right),$$

siendo $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función seno cardinal definida como

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

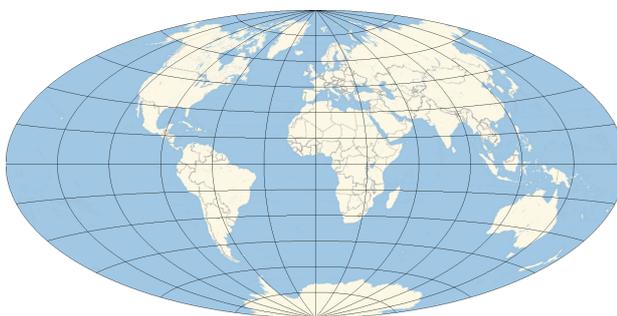


Figura 3.14.: Mapa de Aitov

Este mapa tiene las siguientes características:

- No es isoareal ni conforme.
- Las escalas longitudinal y latitudinal son verdaderas en el ecuador y en el meridiano situado a longitud $\lambda = 0$.

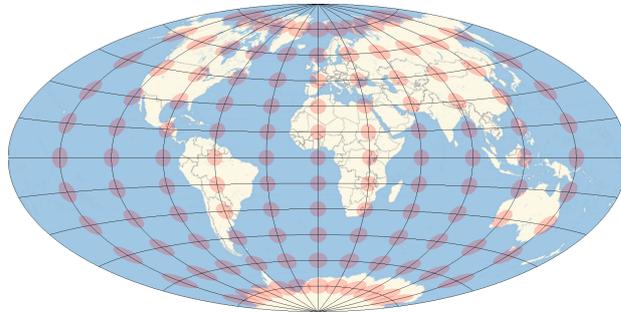


Figura 3.15.: Diagrama de Tissot para el mapa de Aitov. Se han dibujado las elipses indicatrices tomando como radio $\rho = 0.0785$.

3.7. Mapa Triple de Winkel

Oswald Winkel (1873-1953) fue un cartógrafo alemán que trabajó en la editorial Baedeker, una de las pioneras en publicar guías de viaje. En 1921 propuso el mapa Triple:

$$(\Omega^e, \Delta_W, f),$$

siendo Δ_W la región determinada por la curva $\delta_W : [-\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\delta_W(t) = \begin{cases} (\pi(1 + \cos t), \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \sin t), & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{3\pi}{2} - t, \frac{\pi}{2}), & \text{si } t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \\ (\pi(\cos t - 1), \frac{-t}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sin t), & \text{si } t \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \\ (t - \frac{9\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}), & \text{si } t \in [\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}] \end{cases}$$

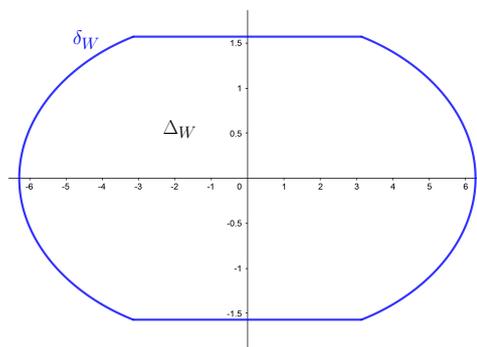


Figura 3.16.: Región Δ_W

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

La proyección cartográfica f viene dada en coordenadas esféricas por la media aritmética de las proyecciones cartográficas Equirrectangular y de Aitov:

$$f \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \Delta_W, \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)), \text{ siendo:}$$

$$x = \frac{\lambda + \frac{2 \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{sinc}(\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}))}}{2},$$

$$y = \frac{\varphi + \frac{\sin \varphi}{\operatorname{sinc}(\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}))}}{2}.$$

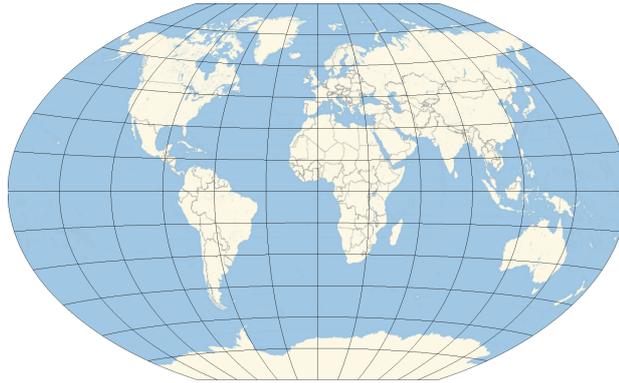


Figura 3.17.: Mapa Triple de Winkel

Aunque parezca un avance poco significativo respecto al mapa de Aitov, lo cierto es que hacer el promedio con una proyección cartográfica tan sencilla como la Equirrectangular, mejora mucho el resultado. Las formas de los continentes se suavizan y la distorsión de área disminuye.

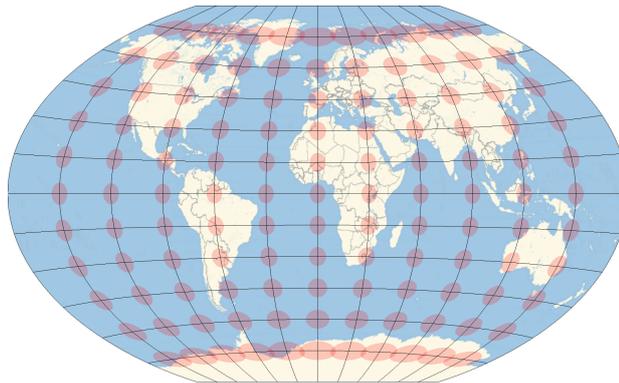


Figura 3.18.: Diagrama de Tissot para el mapa Triple de Winkel. Se han dibujado las elipses indicatrices de radio $\rho = 0.0785$.

Desde el año 1998, el mapa Triple de Winkel es el estándar de la National Geographic

Society para representar nuestro planeta.

3.8. Mapa Equal Earth

Para terminar, comentaremos los aspectos más relevantes del artículo [4], publicado en 2019, en el cual Bernhard Jenny, Tom Patterson y Bojan Šavrič presentaron el mapa Equal Earth. En la primera sección del artículo exponen la motivación por la cual han creado este mapa: la decisión de las escuelas públicas de Boston de utilizar el mapa de Gall-Peters en los mapamundis de sus aulas. El mapa de Gall-Peters es $(\Omega^e, (-\pi, \pi) \times (-2, 2), f)$, donde la proyección cartográfica f viene dada en coordenadas esféricas por:

$$f \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-2, 2), \quad (f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (\lambda, 2 \sin \varphi).$$

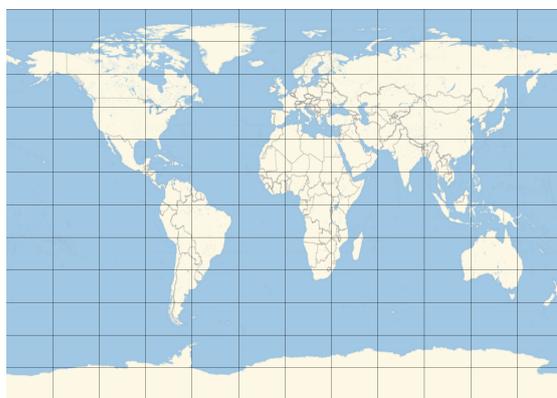


Figura 3.19.: Mapa de Gall-Peters

Vemos que se trata de una modificación del mapa cilíndrico de Lambert, duplicando la escala de los meridianos.

El anuncio de utilizar este mapa, junto con los artículos periodísticos que cubrieron la noticia sin ningún tipo de rigor provocó una gran frustración entre los cartógrafos. Por este motivo, los autores del mapa Equal Earth decidieron diseñar un mapa con una "apariencia agradable" que pudiera utilizarse en ambientes escolares. En primer lugar, concretan las propiedades que dotan a su mapa de esa "apariencia agradable", junto con su caracterización matemática. Por ejemplo, la primera condición que imponen es que el mapa sea isoareal, cuya caracterización vimos en la Proposición 2.1.

Para construir las ecuaciones de la proyección cartográfica asociada, utilizan un cambio de variable conocido en cartografía como transformación de Wagner, que viene dado por:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi.$$

Si la proyección cartográfica f del mapa Equal Earth viene dada en coordenadas esféricas por:

$$(f \circ X^e)(\lambda, \varphi) = (x(\lambda, \varphi), y(\lambda, \varphi)),$$

3. Geometría de mapas notables en Cartografía

consideran $y(\lambda, \varphi) = y(\varphi)$ un polinomio en la variable θ . Concretamente $y = A_1\theta + A_2\theta^3 + A_3\theta^7 + A_4\theta^9$, siendo A_1, A_2, A_3, A_4 coeficientes que fijan utilizando un programa informático llamado *Flex Projector*. Concretamente, toman:

$$A_1 = 1.340264, \quad A_2 = -0.081106, \quad A_3 = 0.000893, \quad A_4 = 0.003796.$$

Entonces, como $y_\lambda = 0$, la función x está determinada por la condición:

$$\cos \varphi = x_\lambda y_\varphi - y_\lambda x_\varphi = x_\lambda y_\varphi.$$

Utilizando la regla de la cadena y que $\theta_\varphi = \frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{2 \cos \theta}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \frac{\cos \varphi}{y_\varphi} = \frac{\cos \varphi}{y_\theta \theta_\varphi} = \frac{2 \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{3}(\cos \varphi(A_1 + 3A_2\theta^2 + 7A_3\theta^6 + 9A_4\theta^8))} = \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{3}(A_1 + 3A_2\theta^2 + 7A_3\theta^6 + 9A_4\theta^8)}. \end{aligned}$$

Por tanto, el mapa Equal Earth es:

$$(\Omega^e, \Delta_E, f),$$

con Δ_E es la región determinada por la curva $\delta_E : [-\frac{\pi}{3}, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\delta_E(t) = \begin{cases} \left(\frac{2\pi \cos t}{\sqrt{3}p'(t)}, p(t) \right), & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right] \\ \left(\frac{\frac{4\pi}{3} - t}{\sqrt{3}p'(\frac{\pi}{3})}, p(\frac{\pi}{3}) \right), & \text{si } t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right] \\ \left(\frac{-2\pi \cos(t - \frac{8\pi}{3})}{\sqrt{3}p'(t - \frac{8\pi}{3})}, -p(t - \frac{8\pi}{3}) \right), & \text{si } t \in \left[\frac{7\pi}{3}, 3\pi \right] \\ \left(\frac{t - 4\pi}{\sqrt{3}p'(\frac{\pi}{3})}, -p(\frac{\pi}{3}) \right), & \text{si } t \in [3\pi, 5\pi] \end{cases}$$

siendo $p(t) = A_1t + A_2t^3 + A_3t^7 + A_4t^9$.

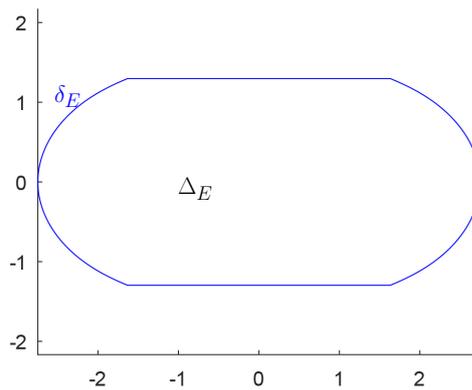


Figura 3.20.: Región Δ_E

La proyección cartográfica f viene dada en coordenadas esféricas por:

$$f \circ X^e : (-\pi, \pi) \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \Delta_E, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi.$$

$$x = \frac{2\lambda \cos \theta}{\sqrt{3}(A_1 + 3A_2\theta^2 + 7A_3\theta^6 + 9A_4\theta^8)},$$

$$y = A_1\theta + A_2\theta^3 + A_3\theta^7 + A_4\theta^9.$$

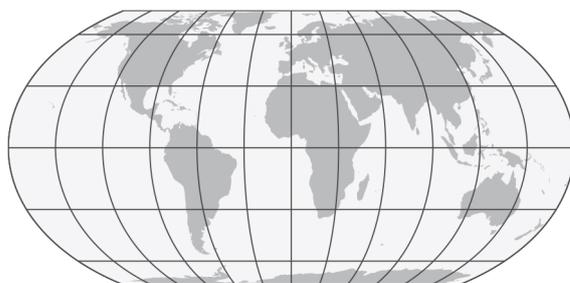


Figura 3.21.: Mapa Equal Earth. Fuente: [4].

En la parte final del artículo, los autores presentan una tabla comparativa con otros mapas de características similares utilizando medidas globales de distorsión angular y de escala que no se han tratado en este trabajo. En dicha tabla, el mapa Equal Earth se encuentra en tercera posición, superado por el mapa McBryde-Thomas Flat-Pole Sine y por el mapa Eckert IV. Tras consultar en [11] las funciones $x(\lambda, \varphi)$, $y(\lambda, \varphi)$ que definen a las proyecciones cartográficas de estos mapas en coordenadas esféricas, vemos que en ambos se requiere resolver una ecuación implícita en la variable φ utilizando el método de Newton-Rhapson a partir de una aproximación inicial dada. Por este motivo, los creadores de Equal Earth destacan que la proyección cartográfica de su mapa es más eficiente desde el punto de vista computacional, porque únicamente requiere evaluar funciones trigonométricas y polinomios.

A. Apéndice: Código en Mathematica

A.1. Gráficos de los mapas utilizados en este trabajo

Los gráficos que aparecen en las figuras 2.1, 2.3, 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.9, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.17, 3.18, 3.19 se han obtenido utilizando el paquete GeoGraphics de Mathematica. Comentaremos el código de las figuras 3.12 y 3.18.

Figura 3.12

```
GeoGraphics[GeoRange -> "World",  
GeoProjection -> "AzimuthalEquidistant", GeoGridLines -> Automatic,  
GeoCenter -> GeoPosition["NorthPole"]]
```

Veamos uno por uno los distintos parámetros que ajustamos para obtener el gráfico.

- El primero es GeoRange, que nos permite fijar el dominio de la proyección cartográfica en coordenadas esféricas $f \circ X^e$. Si ese dominio es Ω^e , podemos poner la opción "World". Si es más reducido, como ocurre con el mapa de Littrow, ponemos $\{\{lat_{min}, lat_{max}\}, \{lon_{min}, lon_{max}\}\}$, teniendo en cuenta que estos parámetros deben introducirse en grados sexagesimales y no en radianes.
- Con GeoProjection elegimos la proyección cartográfica que queremos utilizar. Pueden consultarse todas las proyecciones cartográficas que tiene disponible el paquete GeoGraphics ejecutando los comandos:

```
GeoProjectionData["Cylindrical"]
```

```
GeoProjectionData["Conic"]
```

```
GeoProjectionData["Azimuthal"]
```

```
GeoProjectionData["PseudoCylindrical"]
```

```
GeoProjectionData["Miscellaneous"]
```

- GeoGridLines pinta los paralelos y meridianos. Podemos introducir la opción "Automatic" o elegir un mallado concreto utilizando el siguiente código:

```
{Range[lat_min, lat_max, h1], Range[lon_min, lon_max, h2]}
```

Así pintamos los paralelos situados a latitud $lat_{min}, lat_{min} + h_1, lat_{min} + 2h_1, \dots, lat_{max}$, y los meridianos situados a longitud $lon_{min}, lon_{min} + h_2, lon_{min} + 2h_2, \dots, lon_{max}$.

- Por último, el comando GeoCenter (que solamente se ha usado en esta figura) se utiliza ya que el mapa azimutal equidistante se puede construir centrado en cualquier

A. Apéndice: Código en Mathematica

punto de la esfera. Como queremos el que esta centrado en el polo norte, introducimos `GeoPosition["NorthPole"]`. Vemos que el paquete `GeoGraphics` tiene un comando específico para el polo norte. Si quisieramos centrarlo en otro punto $X^e(lon, lat)$, pondríamos `GeoPosition[{lat, lon}]`, introduciendo dichos parámetros en grados sexagesimales.

Figura 3.18

```
GeoGraphics[
Style[Table[
GeoDisk[{lat, lon}, Quantity[500, "Kilometers"]], {lat, -75, 75,
15}, {lon, -150, 150, 30}], Red], GeoRange -> "World",
GeoProjection -> "WinkelTripel", GeoGridLines -> Automatic, GeoZoomLevel -> 2]
```

De las novedades que contiene este código con respecto al anterior merece la pena comentar con detalle el comando encargado de dibujar las indicatrices de Tissot, ya que `GeoZoomLevel` solo modifica ligeramente el coloreado de los países, siendo 2 el nivel bajo con el que aparecen dibujadas las fronteras.

Para dibujar las elipses indicatrices de Tissot se utiliza el comando:

```
Style[Table[
GeoDisk[{lat, lon}, Quantity[500, "Kilometers"]], {lat, -75, 75,
15}, {lon, -150, 150, 30}], Red]
```

El comando `GeoDisk` pinta una elipse indicatriz. Tiene dos argumentos, el primero es el centro, y el segundo el radio. El radio se introduce utilizando el comando `Quantity[r, "Kilometers"]`, donde r viene dado en kilómetros. Debemos tener en cuenta que Mathematica considera la Tierra como una esfera de aproximadamente 6378 kilómetros, mientras que en todo el trabajo la hemos venido considerando de radio 1. Por ese motivo, en el pie de figura de los diagramas de Tissot especificamos el radio de las elipses indicatrices ρ tras efectuar el cambio de escala oportuno.

Con el comando `Table[GeoDisk[...], {lat, latmin, latmax, h_1 }, {lon, lonmin, lonmax, h_2 }]` dibujamos las elipses indicatrices en las intersecciones de los paralelos y meridianos que nos interese, con un comportamiento similar al del comando `Range` que hemos visto anteriormente. Por último, con `Style[... , Red]` las elipses indicatrices aparecen de color rojo.

A.2. Línea de rumbo vs circunferencia máxima

Con el código de Mathematica que se presenta a continuación pintamos sobre el mapa de Mercator una geodésica y una loxodroma que une los puntos $p_1 = X^e(lon_1, lat_1)$ y $p_2 = X^e(lon_2, lat_2)$. Con el comando `Point[GeoPosition[...]]` pintamos los puntos p_1, p_2 y con `PointSize` ajustamos el grosor. Para pintar curvas, utilizamos el comando `GeoPath` que tiene tres argumentos. Los dos primeros son las coordenadas esféricas de los puntos p_1, p_2 (colocando primero latitud y después longitud, al contrario de como hemos venido haciendo en este trabajo) y el tercero es el tipo de curva que queremos. En este caso, se han pintado la loxodroma (en rojo) y la geodésica (en verde). Gracias al comando `Manipulate`, los parámetros lat_1, lon_1, lat_2 y lon_2 son deslizables por el usuario.

A.2. Línea de rumbo vs circunferencia máxima

```
Manipulate[
GeoGraphics[{{PointSize[0.02], Point[GeoPosition[{lat1, lon1}]},
Point[GeoPosition[{lat2, lon2}]}, Red,
GeoPath[{{lat1, lon1}, {lat2, lon2}}, "Loxodrome"], Green,
GeoPath[{{lat1, lon1}, {lat2, lon2}}, "Geodesic"]},
GeoRange -> "World",
GeoBackground -> GeoStyling["StreetMapNoLabels"],
GeoProjection -> "Mercator"], {{lat1, 45}, -90,
90}, {{lon1, -80}, -180, 180}, {{lat2, -30}, -90,
90}, {{lon2, 80}, -180, 180}]
```

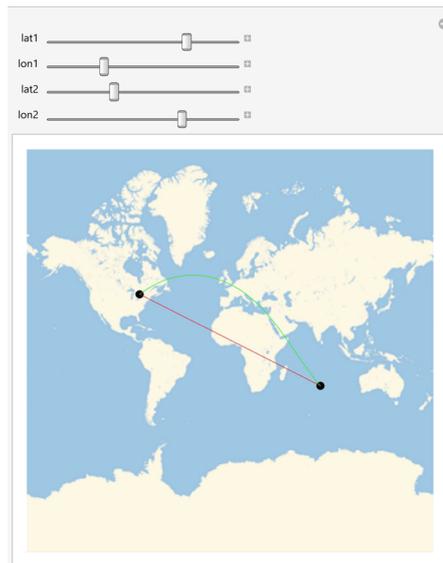


Figura A.1.: Captura de la salida por pantalla

Por supuesto, el paquete GeoGraphics permite hacer muchas más cosas que las que aquí se han expuesto. Una documentación más extensa puede consultarse en [13].

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [1] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces. Revised and updated second edition*. Dover Publications, INC, 2016.
- [2] Maite Fabregat. Conformal Cartographic Representations. TFG. Universitat de Barcelona, 2017.
- [3] Svante Janson. Riemannian Geometry: some examples, including map projections. 2015.
- [4] Bernhard Jenny, Tom Patterson, and Bojan Šavrič. The Equal Earth map projection. *International Journal of Geographical Information Science*, 33, 2019. 51, 53
- [5] José Martín López. Historia de las proyecciones cartográficas. *Catálogo de publicaciones oficiales de la Administración General del Estado*, 2015.
- [6] National Geographic Society. Mapas. Recurso online. <https://www.natgeomaps.com/wall-maps/reference-maps/world>.
- [7] Athanase Papadopoulos. A note on Nicolas-Auguste Tissot: At the origin of quasiconformal mappings. *European Mathematical Society Publishing House*, VII, 2020.
- [8] Joaquín Pérez Muñoz. *Apuntes de Curvas y Superficies*, 2014.
- [9] Carlos Ruiz Vera. Cartografía. TFG. Universidad de Murcia, 2014.
- [10] John P. Snyder. *Map Projections-A Working Manual*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, 1987.
- [11] John P. Snyder and Philip M. Voxland. *An Album of Map Projections*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, 1989. 53
- [12] Thomas F. Sturm. Some principles of Web Mercator maps and their computation. 2020.
- [13] Wolfram. Maps and Cartography. Recurso online. <https://reference.wolfram.com/language/guide/MapsAndCartography.html>. 57