UNIVERSIDAD DE GRANADA

Máster en Didáctica de la Matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2021/2022

Trabajo Fin de Máster

Una Mirada a los Números Pares, Impares e Igualdades Numéricas: ¿Cómo Justifican Generalizaciones los Niños de 9-10 años según su Pensamiento Algebraico?

Sara Embid Solano

Granada, 2022

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Máster en Didáctica de la Matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2021/2022

Trabajo Fin de Máster

Una mirada a los números pares, impares e igualdades numéricas: ¿cómo justifican generalizaciones los niños de 9-10 años según su pensamiento algebraico?

Presentado por

Sara Embid Solano

Fdo.: D. ª Sara Embid Solano

Dirigido por

Marta Molina González **Eder Pinto Marín**

Fdo.: Marta Molina González Fdo.: Eder Pinto Marín

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mis directores Marta Molina y Eder Pinto por permitirme investigar junto a ellos y mostrarme los entresijos de su trabajo. Gracias por las palabras de ánimo, la confianza depositada en mí, los consejos para el futuro y el tiempo dedicado. Sin su orientación, esta memoria sería otro objeto y su contenido una incógnita.

Asimismo, gracias al personal de la Escuela de Verano de Chile por diseñar una experiencia formativa tan valiosa para la educación matemática. Gracias a los niños por participar en la escuela y comunicar, desde su mirada curiosa y sincera, todas las ideas matemáticas que iban desarrollando. Al grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) por mantenerme al tanto de las tendencias en investigación educativa y brindarme la oportunidad de conocer sus proyectos, gracias. A las doctorandas Sandra y Estefanía con las que compartí un espacio muy breve y a las que solo puedo desearle éxitos en la finalización de sus tesis doctorales, gracias.

A mis compañeros de máster con los que tantas inquietudes y buenos momentos he compartido. A Víctor, Aurora, Jesús, Gema, Jorge, Farah y Elizabeth, gracias. Sois unas personas maravillosas que vais a contribuir a la mejora de la educación matemática desde las aulas de secundaria, los salones universitarios, las salas donde se diseñan materiales educativos o los despachos donde se escribe la investigación. Allá donde crezcáis profesionalmente, el mundo será un lugar mejor. Mención especial tienen Farah y Elizabeth por ser compañeras, amigas y familia el tiempo que viví en Granada.

Por supuesto, agradecer al resto de familia que fui construyendo en la ciudad que me acogió durante mi formación de posgrado. A Estrella, Guille, Marina, Berna, Cata, Jaime, Alejandro, José Luis y Ana, gracias. Hemos conocido juntos los recovecos de una ciudad fascinante llena de rincones imperdibles. Hemos agotado las tapas de tanto beber, los miradores de tanto admirar y los bares con futbolín de tanta diversión. Zaragoza fue mi alma máter, pero Granada tiene ya parte de mi esencia.

Agradecer a mi familia que tanto esperaba mi vuelta y a la que he visto en cada viaje. A mis amigos maños que me perdían la pista y ya no sabían cuando estaba aquí o allí. A todo aquel que me ha escuchado hablar de educación matemática, gracias.

Enormemente agradecida a todos.

Este trabajo fin de máster se ha realizado en el marco del proyecto de investigación 23.400.173, financiado por la Universidad del Desarrollo de Chile y del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España. Todo ello en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Resumen

La agenda investigadora del *early algebra* tiene entre sus horizontes ampliar los estudios sobre generalización matemática y aritmética generalizada. Tras aplicar un experimento de enseñanza, evidenciamos cómo los estudiantes chilenos de 9-10 años justifican relaciones matemáticas generales sobre números pares, impares e igualdades numéricas en un contexto que fomenta la comunicación y debate de ideas matemáticas. Este trabajo aporta una caracterización novedosa para las justificaciones de generalizaciones en función del pensamiento algebraico evidenciado y las representaciones empleadas. Nuestros resultados muestran una gran riqueza en la construcción de argumentos de enfoque relacional que se sofistican a medida que avanza la instrucción.

Palabras clave: early algebra; aritmética generalizada; representaciones; pensamiento algebraico; generalización matemática; justificación; pensamiento relacional.

Abstract

The early algebra research agenda needs studies on mathematical generalization and generalized arithmetic to expand its horizons. After carrying a teaching experiment, we show evidences about the justifications of general mathematical relationships performed by Chilean students aged 9-10 years. Tasks involved even and odd numbers and numerical equalities in a context that encourages communication and discussion of mathematical ideas. This work provides a novel characterization for the justifications of generalizations based on algebraic thinking and representations. Our results enhaces a great richness in the construction of arguments with a relational focus that become more sophisticated as the instruction progresses.

Keywords: early algebra; generalized arithmetic; representations; algebraic thinking; mathematical generalization; justification; relational thinking.

ÍNDICE

Presentación

Este documento recoge el *Trabajo Fin de Máster* que he realizado en el marco de un proyecto de investigación titulado *Summer School 2021: Álgebra más allá de letras y números* y organizado por la Facultad de Educación de la Universidad del Desarrollo de Chile en enero de 2021. Este proyecto se planteó con objeto de indagar en la capacidad de generalización evidenciada por estudiantes chilenos de 9-10 años al trabajar con diferentes contenidos de carácter algebraico. La memoria se acoge a los requisitos técnicos formulados desde la asignatura *Trabajo Fin de Máster* del Máster de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada durante el curso 2021-2022.

El escrito se estructura en cinco capítulos. En el primero de ellos, se presenta el problema de estudio, se formulan los objetivos generales y específicos que guían el desarrollo de este trabajo y se justifica su pertinencia según los antecedentes y las prioridades de la Educación Matemática desde dos perspectivas: (a) curricular y (b) docente-investigadora. En el segundo, se amplía la recogida de antecedentes y se propone el marco conceptual que delimita una propuesta de investigación encuadrada en un área de contenido específica del pensamiento algebraico: la aritmética generalizada. En el tercero, se describe la metodología empleada incidiendo en los principales aspectos que configuran el diseño e implementación de la investigación, recogida y análisis de datos. En el cuarto, se exponen y discuten los resultados de las sesiones de aritmética generalizada (números pares e impares; igualdades numéricas) con el fin de mostrar las justificaciones de generalizaciones matemáticas manifestadas por los estudiantes chilenos de 9-10 años en función del pensamiento algebraico evidenciado y las representaciones utilizadas. Por último, en el quinto capítulo, se plantean las principales aportaciones de este estudio, se analiza la consecución de los objetivos de investigación y se señalan las limitaciones de la propuesta junto con las perspectivas futuras.

Introducción

En este capítulo, se presenta el problema de investigación, se propone un objetivo general y dos específicos que guían la propuesta y se justifica su pertinencia desde dos perspectivas: (a) curricular y (b) docente-investigadora.

Problema de Investigación

Investigadores y diseñadores curriculares están trabajando en qué significa para los niños de la escuela primaria (6-12 años) estudiar las leyes de la aritmética de enteros desde una visión algebraica de la aritmética (Blanton et al., 2018; Fonger et al., 2018). Particularmente, se están examinando marcos integrados en la perspectiva del *early algebra* para guiar los procesos de identificación, representación, justificación y razonamiento de generalizaciones sobre números y operaciones.

Si atendemos a investigaciones realizadas en diferentes países, encontramos numerosas evidencias de estudiantes de 6-12 años capaces de identificar, expresar y generalizar regularidades presentes en diversos problemas con carácter algebraico (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Blanton et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2021; Radford, 2018; Strachota, 2020). Sin embargo, se requieren más estudios que aborden el pensamiento algebraico en primaria desde múltiples perspectivas. Kieran (2018a) reflexiona sobre las líneas de ampliación de este campo emergente en un monográfico del *ICME-13* y sugiere que la generalización debe ser estudiada con sentido estructural reparando en las relaciones entre ideas matemáticas. De este modo, la aritmética generalizada se convierte en un objetivo preferente en la agenda investigadora del *early algebra* y justificar reaparece como la vía de acceso predilecta para explorar la generalización.

En esta tesitura incipiente, se encuentran, entre otros, los trabajos de Blanton et al. (2022) y Schifter y Russell (2022) al aportar evidencias de escolares capaces de justificar y representar generalizaciones al trabajar en tareas aritméticas. Con todo, los antecedentes recogidos en el capítulo siguiente sugieren la necesidad de más investigaciones en las que se analicen las justificaciones de generalizaciones en función del pensamiento algebraico evidenciado y las representaciones utilizadas. Este escrito se instala en ese espacio aportando un estudio original al campo de investigación del *early algebra*.

Objetivos de Investigación

Se establecen los objetivos de investigación que guían esta memoria. Específicamente, se formula un objetivo general desglosado en dos específicos a su vez (OE).

Analizar las justificaciones de generalizaciones matemáticas manifestadas por estudiantes chilenos de 9-10 años al trabajar con expresiones aritméticas en tareas de aritmética generalizada.

OE1. Clasificar las justificaciones de generalizaciones en niveles según el pensamiento algebraico que evidencian.

OE2. Analizar las representaciones que emplean los estudiantes para expresar dichas justificaciones.

La medida en que se han cumplido los objetivos de investigación propuestos en este capítulo puede consultarse en las Conclusiones.

Pertinencia de la Investigación

Cuando inicié mi aventura en la instrucción matemática, vivencié una experiencia que sentó los indicios de una reflexión que me lleva acompañando diez años: ¿cómo podría instruir a otra persona para que desarrollara su sentido algebraico? Aunque esta pregunta haya necesitado varias reformulaciones, su razón primigenia aún se conserva: qué es aquello que se despierta en las personas que se acercan al álgebra y cómo podría esta autora potenciarlo. Tras esta coyuntura, siguieron los pasos previos al inicio de la carrera investigadora en educación matemática: (a) Grado en Matemáticas; (b) Máster de Profesorado y (c) Máster de Investigación en Didáctica de la Matemática. Más allá de este hecho anecdótico, reparamos en dos perspectivas en las que merece la pena fijarse para situar la pertinencia de esta memoria: la curricular y la docente-investigadora.

Justificación desde la Propuesta Curricular Early Algebra

Al presentar el problema de investigación (Introducción), todos los estudios compartían un aspecto crucial: operar bajo la perspectiva del *early algebra*; una perspectiva ampliamente respaldada por la comunidad científica (Kieran et al., 2016). Así, las razones que impulsan esta investigación aparecen directamente asociadas a esta línea de investigación y propuesta que se nutre de la integración curricular del álgebra en los primeros cursos escolares promoviendo la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas (Molina, 2009).

Actualmente, países tan variados como Estados Unidos, Australia, Canadá, Chile, China, Corea, Japón y Portugal incluyen en sus orientaciones curriculares la idea de que el pensamiento algebraico debe fomentarse desde, al menos, la educación primaria (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2020; Canavaro, 2007; Ferrucci et al., 2004; Ministerio de Educación, 2018; National Governors Association, 2010; Ontario Public Service, 2020; Watanabe, 2008). Sin ir más lejos, las directrices de los *Common Core State Standard for Mathematics* de EE. UU. (National Governors Association, 2010) sugieren fomentar el uso de justificaciones matemáticas que emanen del revelado de estructuras subyacentes a prácticas algebraicas. Este hecho se vincula con las aspiraciones del objetivo general que guía esta investigación pues, gracias a ella, se pretende arrojar luz acerca de las justificaciones de generalizaciones matemáticas manifestadas por estudiantes chilenos que han terminado 4.º de primaria (9-10 años). Al final, toda propuesta curricular de esta índole es el resultado del esfuerzo de una comunidad investigadora que lleva décadas mostrando evidencias de generalización en niños que cursan la educación infantil y primaria y realizando estudios curriculares comparativos (Mejías y Alsina, 2020).

El tratamiento que recibe el álgebra en el currículo chileno para la educación primaria se fundamenta a partir de las *Bases Curriculares de Primero a Sexto Básico* (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2018) viéndose fuertemente influenciado por los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000). En el currículo chileno, existe un bloque temático denominado “Patrones y álgebra” que está presente desde 1.º a 6.º curso de la educación primaria (educación básica). En particular, en 4.º de primaria (4.º básico), este bloque resulta contundente en cuanto a sus pretensiones sobre el estudio de patrones: “una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como el pensamiento algebraico”(MINEDUC, 2013, p.33). En términos generales, este currículo centra sus esfuerzos en transitar de lo concreto a lo pictórico y de lo pictórico a lo simbólico (modelo COPISI, también conocido como CPA en el contexto del método Singapur) con base en las relaciones entre números, formas, objetos y conceptos matemáticos. Esta investigación cumple con las expectativas curriculares de Chile: (a) entrega evidencias de desarrollo del pensamiento algebraico en alumnado chileno al trabajar con expresiones aritméticas (Resultados) y (b) entrega herramientas para que los maestros puedan potenciar el pensamiento algebraico a través de planificaciones detalladas (Anexo A).

El paradigma curricular de España ha sufrido transformaciones recientes (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022) incorporando saberes básicos que se estructuran en torno al concepto de sentido matemático. Si bien el sentido matemático se desglosa a su vez en otros sentidos, la incorporación del sentido algebraico ha sentado las bases necesarias para reconocer la importancia del pensamiento algebraico en la educación primaria. Según las directrices para primaria, el sentido algebraico se trabaja desde el reconocimiento de patrones y relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas. Asimismo, la generalización aparece tratada como la “identificación, descripción verbal, representación y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes” (MEFP, 2022, p. 24486). Esta memoria contribuye a tomar conciencia acerca de regularidades presentes en el sistema numérico decimal con foco en la generalización y, en última instancia, el sentido algebraico.

Justificación desde la Perspectiva Docente-Investigadora

Las últimas décadas han sido testigo de numerosas investigaciones destinadas a enfatizar el papel del álgebra en los primeros años de escolarización. Parte de las investigaciones de principios de los 2000 han cuestionado las dificultades que tradicionalmente se han atribuido a estudiantes de primaria al trabajar con contenidos algebraicos (Blanton y Kaput, 2004; Radford, 2003). Demostrar que grupos de estudiantes variados razonan, construyen relaciones sofisticadas y generalizan al trabajar con elementos algebraicos ha sido clave en el paradigma de la educación matemática (Molina et al., 2006; Rivera y Becker, 2008; Warren y Cooper, 2008) .Por supuesto, a estas investigaciones le siguen otras más recientes que han posibilitado ampliar los horizontes de la perspectiva *early algebra* y continuar indagando en las capacidades de generalización evidenciadas por los estudiantes (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Radford, 2018; Schifter y Russell, 2022; Strachota, 2020). Sin embargo, se deben retomar las líneas que señalaba Kieran (2018a) y ampliar el campo con estudios de aritmética generalizada que pongan el foco en las relaciones entre objetos y las justificaciones de generalizaciones. Schifter y Russell (2020) señalan que esta área, la aritmética generaliza, permite a los estudiantes darse cuenta de que una operación es más que un proceso o algoritmo.

Los estudiantes aprenden y razonan gracias a docentes que fomentan y dirigen su aprendizaje. Schifter y Russell (2020) sostienen que incluso los maestros que se esfuerzan para dar sentido a las ideas y justificaciones matemáticas de sus estudiantes se muestran inseguros en la forma de dar continuidad a esas generalizaciones incipientes. Este punto resulta especialmente problemático y justifica la necesidad de resultados de investigación que sirvan de guía instruccional para los maestros. Los docentes que no sean conocedores de buenas prácticas de enseñanza de la aritmética generalizada tendrán más dificultades para fomentar el pensamiento algebraico y aunque en la investigación de principios de los 2000 ya se recogían ejemplos útiles (Bastable y Schifter, 2008; Blanton y Kaput, 2005), no deben escatimarse recursos para mejorar la formación docente. Incluso presentar manuales específicos que dediquen parte de sus páginas a trabajar la aritmética generalizada desde una visión algebraica (ver, por ejemplo, Isoda y Katagiri, 2012; Russell et al., 2011). Con todo, si bien no es la finalidad principal de este trabajo, su diseño instruccional (Marco Metodológico) puede mostrar caminos efectivos para ayudar a los maestros a desarrollar el pensamiento algebraico en sus aulas.

En esencia, se presenta una memoria que complementa investigaciones previas adoptando el enfoque de la aritmética generalizada para el pensamiento algebraico (Bastable y Schifter, 2008; Russell et al., 2011; Schifter et al., 2008; Schifter y Russell, 2020) y contribuyendo a ampliar el conjunto de estudios centrados en la justificación y representación de generalizaciones (Radford, 2010, 2018; Russell et al., 2017; Schifter y Russell, 2022; Stylianides et al., 2016).

Marco Conceptual y Antecedentes

Dedicamos este capítulo a examinar la caracterización de pensamiento algebraico en la que se posiciona esta memoria, esclarecer qué se entiende por aritmética generalizada y proporcionar estudios que tratan con dos elementos clave: números pares e impares, e igualdades numéricas. Para facilitar la lectura, realizamos un recorrido guiado a través de dos subcapítulos: (a) aspectos centrales del pensamiento algebraico y prácticas derivadas y (b) aritmética generalizada y sentido estructural del álgebra.

Aspectos Centrales del Pensamiento Algebraico y Prácticas Derivadas

La comunidad científica parece haber llegado a acuerdos al señalar que las rutas para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico se dirigen hacia pensar: (a) percibiendo lo general en lo particular; (b) siguiendo reglas sobre patrones; (c) conceptualmente sobre lo procedimental; (d) representativamente sobre las relaciones en situaciones problemáticas y (e) relacionalmente sobre cantidades, números y operaciones (Kieran, 2011, p.581). Sin embargo, presentar una definición única para este tipo de pensamiento en el marco del *early algebra* no es una tarea fácil (Kieran, 2018a). En esta memoria, caracterizamos el pensamiento algebraico como un tipo particular de pensamiento matemático que involucra el trabajo con cantidades variables y generales (no específicas) poniendo el énfasis en las relaciones entre ellas, las generalizaciones, la resolución de problemas, la modelización y la justificación (Blanton et al., 2011; Kieran, 2004). En particular, nos movemos en un marco en el que la acción de pensar algebraicamente se vincula estrechamente con pensar sobre lo general (Kieran, 2004).

Esta investigación toma como referente principal el marco conceptual sobre *early algebra* de Blanton et al. (2011, 2018) donde se establecen las bases del álgebra para la educación primaria. Este marco se basa en las ideas de Kaput (2008), quien asume que "el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con generalizaciones" (p.9). La simbolización se interpreta de forma holgada incluyendo ya no solo la notación algebraica sino también otras representaciones como pueden ser gráficos, tablas y lenguaje natural. En esta línea, Blanton et al. (2011) proponen el uso de representaciones diversas (pictóricas, manipulativas, numéricas, etc.).

Kaput (2008) delimita el contenido del álgebra a través de dos aspectos centrales y tres ramas (ver Tabla 1). De la expresión de estos dos aspectos centrales (A y B) surge el interés por la generalización, la representación, la justificación y el razonamiento. En particular, las dos primeras prácticas se relacionan más íntimamente con el aspecto central A (*hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales*) y las dos últimas con el aspecto central B (*actuar sobre símbolos dentro de un sistema simbólico organizado a través de una sintaxis establecida*). Respecto a las tres hebras o ramas en que se desglosan dichos aspectos, nos interesa específicamente la número 1: *álgebra como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en el razonamiento cuantitativo.*

Tabla 1

Aspectos Centrales y Ramas del Pensamiento Algebraico

Aspectos centrales
A. Hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales
B. Actuar sobre símbolos dentro de un sistema simbólico organizado a través de una sintaxis establecida
Ramas
1. Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en el razonamiento cuantitativo.
2. Álgebra como estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas.
3. Álgebra como la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelado tanto dentro como fuera de las matemáticas.

Nota. Traducido y adaptado de Kaput (2008, pp. 10-11).

Si bien Kaput (2008) refiere a tres ramas del álgebra escolar relacionadas con estructuras, funciones y modelización; en esta memoria referiremos a tres áreas de contenido o enfoques del pensamiento algebraico: (a) aritmética generalizada (rama 1); (b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones (rama 1); y (c) pensamiento funcional (ramas 2 y 3). La clave del álgebra como aritmética generalizada reside en trabajar la generalización de operaciones y propiedades aritméticas, las relaciones entre números particulares y el razonamiento sobre números generalizados con enfoque relacional. Análogamente, en el área de equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones, se busca trabajar la generalización de estos contenidos mientras se fomenta el uso de pensamiento relacional. En el área de pensamiento funcional, la generalización se trabaja a través de las relaciones entre variables dependientes e independientes en problemas contextualizados. Más adelante, en este mismo capítulo, dedicaremos una sección a la aritmética generalizada por ser el área de contenido en este trabajo

Blanton et al. (2011, 2018) asocian a todas estas áreas de contenido cuatro prácticas esenciales del pensamiento algebraico: (a) generalización; (b) representación de generalizaciones; (c) justificación de generalizaciones y (d) razonamiento con generalizaciones. Particularmente, entienden generalizar como un proceso mental por el cual un sujeto comprime múltiples casos en uno solo, representar como un proceso en el cual el pensamiento sobre el símbolo y el referente se transforma iterativamente, justificar como un proceso empleado para defender o refutar la validez de las generalizaciones y razonar como el proceso de considerar la generalización como un objeto en sí mismo.

Generalización

Mason (1996) considera la generalización como "un proceso natural, endémico y ubicuo; una forma de pensar y actuar en la que los alumnos son partícipes de un proceso de enculturación que debiera ser tan natural como escuchar y hablar su lengua materna" (p. 66). Por su parte, Kaput (2008) centra la mirada en el reconocimiento de una regularidad que va más allá de casos particulares ya sea explicitándola o ampliando el razonamiento hacia los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones subyacentes. De manera amplia, la generalización es una actividad que promueve la identificación de relaciones matemáticas y estructurales incluyendo acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Blanton, 2008). Reconocer que ciertos atributos pueden cambiar mientras otros permanecen invariables es otra de las características notables de la generalización (Mason, 2017) permitiendo a los estudiantes razonar más allá de lo particular.

Radford (2003) indaga en los enfoques pedagógicos para generalizar y sostiene que el análisis de la estructura numérica de expresiones aritméticas facilita el revelado de la estructura algebraica. Particularmente, Radford (2003, 2010) distingue entre tres tipos de generalizaciones: (a) factual; (b) contextual; (c) simbólica. En la generalización factual, a la formulación verbal general le siguen acciones concretas ilustrativas complementadas con movimientos, uso de símbolos numéricos y gestos. Por otro lado, en la generalización contextual aparece una abstracción de acciones donde lo indeterminado que no se explicitaba en lo factual se revela visible. Este tipo de abstracción se realiza sobre objetos conceptuales con una situación espacio-temporal específica. Finalmente, en la generalización simbólica se explicita asimismo la indeterminación, pero se expresa en el sistema semiótico alfanumérico del álgebra. Como puede apreciarse, cada nivel supone un grado más sofisticado que el anterior ya que de lo implícito se avanza hacia lo explícito primero con sostén en lo espacio-temporal y después desligado de este.

Representación de Generalizaciones

Si la acción de generalizar era clave, representar o simbolizar dichas generalizaciones no va a ser menos importante (Kaput, 2008). La representación nos sirve para revelar las afirmaciones generales que los niños advierten a través de diferentes sistemas de notación entre los que se incluye el lenguaje natural, el uso de variables, los gráficos y los dibujos. (Blanton, Isler-Baykal, et al., 2019). Por su parte, Morris (2009) afirma que representar generalizaciones ayuda a entender que las acciones se aplican a una amplia clase de objetos y no solo a una instancia particular. Como señalábamos anteriormente, es importante tener presente que el pensamiento algebraico puede tener cabida antes incluso de introducir la notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2007) por lo que la expresión de generalizaciones variará en su grado de sofisticación según las representaciones empleadas. Nos interesan las representaciones ligadas al lenguaje verbal, el lenguaje numérico-simbólico y el uso de manipulativos dadas las características de la recogida de datos (Marco Metodológico).

Una de las peculiares que atribuimos al lenguaje verbal es su inherente ambigüedad al suceder que una misma frase puede ser interpretada de más de una manera (Molina, 2014). La inclusión de terminología matemática específica permite complementar este lenguaje verbal o cotidiano dando atisbos de un refinamiento superior. Radford (2003) es consistente con estas apreciaciones y manifiesta la necesidad de desarrollar intervenciones específicas que fomenten de algún modo una verbalización espontánea de las regularidades o patrones. De igual modo, señala que el uso coordinado de palabras y gestos facilita la forma en que los niños pueden hacer visibles sus intenciones sobre generalizar regularidades o patrones.

Sobre el lenguaje numérico-simbólico, Molina (2014) destaca que sus elementos característicos son numerales, letras y signos propios de la aritmética y el álgebra tales como signos operacionales o el signo igual. Arcavi et al. (2017) señalan la conveniencia de los números generalizados para describir propiedades generales. Estos términos no refieren a uno o más valores numéricos específicos, sino que pueden tomar cualquier valor dentro de un conjunto numérico siendo el medio ideal para formular declaraciones (leyes, propiedades) que se cumplen para todos los números que nombran. Además, no solo las letras pueden usarse con este significado, Mason et al. (2005) destacan que el uso de imágenes (p.ej. una nube o un cuadrado) son herramientas igualmente valiosas en esa transición del lenguaje natural al lenguaje formal de las letras. En caso de emplear letras con esta acepción, conviene tener presente los múltiples significados que los niños pueden atribuirles. A este respecto, Ayala-Altamirano y Molina (2020) realizan un análisis detallado indicando que los niños pueden asignar espontáneamente valores de acuerdo con su posición en el alfabeto o valores específicos elegidos al azar confirmando trabajos previos de Brizuela et al. (2015).

Por último, nos interesan las representaciones con manipulativos. Para Larbi y Mavis (2016), un manipulativo es "cualquier material u objeto que ayuda al alumno a comprender las matemáticas" (p.55). Según Moss y London McNab (2011), los manipulativos proporcionan soportes que permiten a los alumnos tomar consciencia de regularidades que, de otro modo, es posible que hubiesen pasado desapercibidas. Mason (1996), por su parte, señala que los manipulativos pueden actuar como indicadores de percepción de la generalidad si bien su uso podría enfatizar simplemente aspectos particulares. Schifter y Russell (2022) advierten que, para que sean efectivos, los manipulativos deben usarse siguiendo un proceso de instrucción dirigido donde los maestros fomenten vías de acceso a la generalidad cada vez más sofisticadas entre su alumnado

Justificación de Generalizaciones

Las justificaciones son el medio por excelencia para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos (Hanna, 2000). En términos de Schoenfeld (2009), las justificaciones son un subproducto natural de por qué algo funciona. Stylianides et al. (2016) lo identifican con "el discurso o medio retórico (no necesariamente matemático) utilizado por un individuo o un grupo para convencer a otros de que una declaración es verdadera o falsa". Desde nuestra postura, las justificaciones provienen de los saberes y prácticas discursivas compartidos por la comunidad (Simon y Blume, 1996). Crear oportunidades para justificar seleccionando tareas que inciten a hacerlo y proponiendo conjeturas es valioso para la educación matemática (Thanheiser y Sugimoto, 2022).

Desde que Pólya (1954) sentara las bases para analizar el proceso de conjeturar, varios han sido los acercamientos a este término. En nuestro estudio, por conjetura entendemos una proposición que se prevé verdadera, pero está pendiente de ser sometida a un examen que puede conducir a su aceptación o rechazo (Lakatos, 1978). Más allá de aspectos formales, de lo que no cabe duda, según Mason (2003), es del potencial de la formulación de conjeturas como proceso esencial en la actividad matemática.

A este respecto, Schifter y Russell (2020) han desarrollado un modelo de enseñanza que ayuda a los maestros y niños de primaria a enfocarse en los aspectos clave del proceso de formulación y justificación de conjeturas sobre operaciones. Este modelo se basa a su vez en las investigaciones previas de Russell et al. (2017) y se compone de cinco fases: 1) notar regularidades y patrones a través de múltiples ejemplos; 2) articular conjeturas basadas en lo que los estudiantes perciben; 3) representar ejemplos con diagramas, imágenes, modelos físicos y contextuales para comprender la estructura matemática de sus conjeturas; 4) construir argumentos basados en representaciones para una clase de números y 5) comparar y contrastar operaciones investigando generalizaciones análogas para otra operación, reciclando a través de las fases anteriores.

Siguiendo las investigaciones realizadas por Schifter (2009), podemos trazar, asimismo, cuatro categorías esperables para las justificaciones dadas por alumnos de entre 8 y 9 años: 1) apelación a la autoridad; 2) inferencia a partir de casos particulares; 3) afirmación sobre un conjunto numérico infinito cuya prueba se asume que no es posible; 4) razonamiento a partir de la representación o el contexto. Estas apreciaciones contribuirán a la propuesta de categorización que más adelante se muestre en la Tabla 2.

Razonamiento con Generalizaciones

El pensamiento algebraico sofisticado implica razonar con generalizaciones como objetos matemáticos en sí mismos (Blanton et al., 2018). Cognitivamente, el uso de conocimientos previos se sitúa como un punto avanzado de formación de conceptos contribuyendo a su reificación en el pensamiento del niño (Sfard, 1991). Desde la perspectiva de esta autora, un concepto no llega a ser comprendido hasta ser procesado como objeto. Los niños actúan sobre las generalizaciones que han notado, representado y justificado e incluso razonan con estructuras sin incluir necesariamente números particulares (Carpenter et al., 2003). El razonamiento es necesario para desarrollar el pensamiento algebraico ya que a través del álgebra se entregan significados a objetos del entorno, se descubren regularidades y se puede aplicar la lógica (Drijvers et al., 2011).

Elementos Clave de la Aritmética Generalizada

En la aritmética tradicional, se operaba una colección de números a través una serie de pasos para generar otro número: la respuesta al cálculo. En el álgebra, en cambio, el enfoque estaba puesto en las relaciones (Carpenter et al., 2005). Ciertamente, estos procesos se veían de forma aislada; de ahí que la instrucción fuese encaminada a enseñar primero aritmética, luego álgebra. Sin embargo, los esfuerzos de la comunidad investigadora permitieron que esta separación se fuese diluyendo, siendo visible, por ejemplo, en bloques como el de “Patrones y Álgebra” que aparece en el currículo chileno de primaria (MINEDUC, 2013). No obstante, Kieran et al. (2016) señalan que este proceso no fue fácil pues las primeras referencias a aritmética generalizada asociaban esta disciplina al álgebra simbólica y la presencia indiscutible de letras. La propuesta del *early algebra* permitió, en esencia, que la noción de aritmética generalizada se ampliara hasta comprender la exploración de relaciones y propiedades de operaciones aritméticas y clases de números (p ej. números pares e impares) sin incluir *per se* símbolos alfanuméricos o notación numérico-algebraica. Schifter y Russell (2020), en quienes nos basamos para definir la aritmética generalizada, identifican esta área con “el estudio de la estructura que surge en el razonamiento aritmético y cuantitativo permitiendo a los estudiantes darse cuenta de que una operación es más que un proceso o algoritmo” (p. 16).

Investigadores y diseñadores curriculares llevan analizando cómo trabajar los conceptos aritméticos desde el pensamiento algebraico desde principios de los 2000, pero el momento actual precisa dar continuidad a esos estudios (Kieran, 2018a). Para desarrollar formas algebraicas de pensar, Kieran (2004) proponía poner el énfasis en estos aspectos: (a) las relaciones por encima de los cómputos numéricos ; (b) las operaciones con sus inversas y correspondencias; (c) la representación junto con la resolución de problemas; (d) números y letras aceptando expresiones literales como respuesta; (e) el significado del signo igual y (f) la comparación de expresiones de equivalencia con base en propiedades aritméticas. Blanton (2008), en cambio, proporcionaba situaciones concretas que permitían a los niños redirigir su atención hacia la generalización. Esta autora señala que un contexto aritmético que facilita pensar algebraicamente es el dado por los números pares e impares. A través de preguntas dirigidas (p.ej. "¿qué sucede al sumar un número par y un número impar?"), los niños tienen oportunidades para comunicar sus ideas matemáticas y desarrollar su pensamiento algebraico. Mason et al. (2005), por su parte, eran contundentes: "una de las fuentes más importantes de generalizaciones es el dominio del número: la detección y expresión de patrones numéricos" (p.3). En ambas publicaciones (Blanton, 2008; Mason et al., 2005) se presentaban tareas que invitaban a la generalización de propiedades numéricas destacando, por ejemplo, una serie de sumas en las que pueda evidenciarse que el orden de los sumandos no altera el resultado (propiedad conmutativa de la suma).

Carpenter et al. (2003) proponían tareas con igualdades numéricas que es preciso completar para dar sentido a las expresiones (p.ej. "*18+27=□ +29*"). La forma de interrogar a los estudiantes, en este caso, se tenía como sigue: "¿qué número pondrías en la caja para que esa sentencia sea verdadera?" También, discutían sobre la veracidad o falsedad de sentencias como "*5+3=8*","*8=5+3*" o "*8=8*". Observando las respuestas de los estudiantes, buscaban ver si reconocen que el signo igual representa una relación entre dos números revelando aspectos encaminados a detectar si existe una comprensión de la estructura matemática. Pensar relacionalmente es sinónimo de examinar dos o más conceptos o ideas matemáticas para apreciar (recordar o detectar) sus relaciones (Molina et al., 2006). Esta forma de pensamiento, el pensamiento relacional, favorece que las relaciones puedan usarse para resolver un problema, tomar una decisión o aprender sobre las situaciones o conceptos matemáticos involucrados mejorando el aprendizaje de la aritmética (Carpenter et al., 2005).

Si bien estos estudios gozan de cierta actualidad e incluso proporcionan un sustento adecuado para el diseño de tareas presente en el Marco Metodológico, mostraremos otros que abordan, de manera más específica, el trabajo con las expresiones aritméticas clave para esta memoria: (a) números pares e impares y (b) igualdades numéricas.

Números Pares e Impares

La distinción entre número par e impar es una de las nociones básicas a la que todo docente se enfrenta cuando trata de introducir la aritmética entre sus estudiantes. Isler et al. (2013) exploran la capacidad de los estudiantes de 8-9 años para desarrollar y justificar conjeturas sobre generalizaciones aritméticas relacionadas con la suma de números pares e impares. Estos autores plantean un estudio comparativo entre el alumnado que lleva un año recibiendo un proceso instruccional basado en la propuesta LEAP y aquel que no lo ha recibido. Concluyen que, con una instrucción adecuada basada en dicha propuesta, los estudiantes son capaces de desarrollar conjeturas, investigar los porqués de su veracidad y generalizar. Por su parte, Lin (2016) investiga cómo los maestros diseñan tareas que faciliten el proceso de conjetura contribuyendo a que estos estén cada vez más dispuestos a incorporar las conjeturas en el aula y discutir juntos los objetivos didácticos de la instrucción. Por último, Blanton et al. (2022) indagan acerca de los niveles de pensamiento que exhiben los estudiantes de 6-7 años en su comprensión de los argumentos de paridad a medida que avanzan en una secuencia de instrucción. Como resultado, estos autores consiguen informar sobre la capacidad evidenciada por los estudiantes para razonar sobre la paridad utilizando representaciones variadas y desarrollando argumentos de paridad basados en dichas representaciones.

Estos estudios sobre paridad se relacionan con el estudio de patrones numérico-geométricos ya que, en numerosas ocasiones, los procesos de instrucción involucran sistemas de representación visuales que incluyen disposiciones espaciales (material manipulativo, representaciones pictóricas, diagramas, etc.). Sobre actividades basadas en generalización de patrones hay mucha literatura siendo un medio poderoso para ayudar a los estudiantes a detectar la estructura (Mason, 1996; Radford, 2010). Marjanović y Zeljić (2013), por ejemplo, introducen fichas de dominó y otros medios pictóricos muy similares a las tarjetas par-impar (ver Figura 1) para representar números pares e impares. Blanton et al. (2022), por su parte, utilizan también una representación pictórica similar basada en círculos distribuidos espacialmente para ilustrar sumas.

Igualdades Numéricas

Las igualdades numéricas proporcionan un medio propicio desde el que fomentar el pensamiento relacional al trabajar la aritmética generalizada. En un artículo publicado por Molina y Castro (2021), se señala que utilizar pensamiento relacional implica considerar igualdades de forma global y aplicar perspectivas estructurales. Las autoras proponen un experimento de enseñanza para fomentar entre niños de 8-9 años el uso de pensamiento relacional al resolver igualdades numéricas. Con este experimento, caracterizan el uso de pensamiento de pensamiento relacional de los estudiantes a través de cuatro perfiles dependiendo de si es inexistente (ausencia), aplica directamente una ley general (perfil simple) o manifiesta un uso flexible de relaciones y propiedades aritméticas (perfiles de igualdad y estructurales). Sus resultados contribuyen a comprender el proceso de desarrollo del componente algebraico al trabajar con igualdades numéricas. De forma análoga, Kieran y Martínez-Hernández (2022) centran su atención en la dimensión estructural de las igualdades numéricas con énfasis en propiedades como la asociativa de la suma y las estrategias de composición y descomposición. En sus tareas, piden a los estudiantes que demuestren la veracidad de una igualdad numérica sin calcular el total para cada miembro de la igualdad.

Blanton, Stroud, et al. (2019), por su parte, proponen un estudio para examinar la eficacia de una intervención de álgebra temprana con estudiantes de entre 8 y 11 años. Entre las componentes que seleccionan, destacan las propiedades fundamentales del número y la operación (p.ej. la propiedad conmutativa de la suma) y la relación inversa entre la suma y la resta. Durante la intervención, los estudiantes (grupo experimental y grupo control) exploran diversas formas de justificar las generalizaciones aritméticas partiendo de argumentos empíricos y avanzando hacia argumentos cada vez más generales. Los resultados ponen de manifiesto que: (a) los estudiantes del grupo experimental son más exitosos que los del grupo control en el reconocimiento y uso de propiedades estructurales del sistema numérico; (b) los estudiantes del grupo experimental tienen más éxito que los del grupo control en la construcción de argumentos generales para justificar relaciones aritméticas; y (c) los estudiantes del grupo experimental resolvieron con más éxito ecuaciones con estrategias que involucran la relación inversa entre la suma y la resta.

Marco Metodológico

En este capítulo, describimos los elementos que conforman el marco metodológico de esta investigación. Detallamos su tipología, diseño, sujetos participantes, la recogida y el análisis de los datos. Más concretamente, describimos los aspectos metodológicos de una Escuela de Verano implementada por la Facultad de Educación de la Universidad del Desarrollo de Chile y concebida como un espacio de discusión en el que niños de 9-10 años pueden justificar, representar y generalizar ideas matemáticas.

Diseño de la Investigación y Métodos

Esta investigación tiene carácter *cualitativo*, *descriptivo* y *exploratorio* (Hernández et al., 2010) ya que busca comprender y describir los procesos de generalización matemática evidenciados por un grupo de estudiantes chilenos, que tienen entre 9 y 10 años, al trabajar diferentes contenidos algebraicos. La investigación se enmarca, además, en un paradigma metodológico ampliamente aceptado en la comunidad investigadora, la *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño* (Reimann, 2013). Si bien es cierto que este paradigma sigue evolucionando y no dispone de límites cerrados hasta el momento (Molina, 2021), uno de sus aspectos clave es explicar cómo las teorías educativas se relacionan con las prácticas de enseñanza-aprendizaje (Cobb et al., 2003). En particular, la investigación de diseño que presentamos se concreta a través de un tipo de estudio característico de este paradigma: el *experimento de enseñanza*.

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en la que participan uno o más investigadores-educadores, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. Estos experimentos ponen el foco en la naturaleza del desarrollo de ideas, herramientas o modelos manifestados por alumnos, profesores o grupos (Steffe y Thompson, 2000). A este respecto, se nos presenta como un marco idóneo para profundizar en las ideas matemáticas generales que los estudiantes manifiestan a través de respuestas orales y escritas.

De manera general, esta investigación se estructuró en 10 sesiones a través de una serie de etapas: a) pretest (sesión 0); b) intervención (sesiones 1 a 3) y c) postest (sesión 9). Con el pretest, se buscó medir los conocimientos y habilidades algebraicas presentes en los estudiantes de forma previa a la intervención basando dicho instrumento en investigaciones previas (ver, por ejemplo, Blanton et al., 2015; Carraher y Schliemann, 2015). La prueba se aplicó de manera remota y permitió conocer, en una primera instancia, cómo los estudiantes generalizan en situaciones algebraicas diversas. La intervención, por su parte, se desarrolló a través de ocho sesiones de aula que permitieron abordar las tres áreas de contenido del pensamiento algebraico: aritmética generalizada (sesiones 1 a 3), equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones (sesiones 4 a 5) y pensamiento funcional (sesiones 6 a 8). Los profesores trabajaron en todo momento en colaboración con los estudiantes promoviendo la discusión de ideas y el uso de argumentos cada vez más sofisticados. En particular, centraron su atención en crear un ambiente de diálogo y contraste de estrategias para que los estudiantes aprendiesen también unos de otros. Transversalmente, se trabajaron las cuatro prácticas del pensamiento algebraico descritas en el marco teórico: generalización, representación, justificación y razonamiento. En el postest, se aplicó el mismo instrumento del pretest para medir el impacto inmediato de las sesiones.

En lo que respecta a la organización de las sesiones de la intervención, todas se realizaron mediante la plataforma Zoom comenzando a las 10:00 a.m. y finalizando a las 13:00 p.m. Estas sesiones se distribuyeron según tres bloques (B1='Bloque 1', B2='Bloque 2', B3='Bloque 3') con dos actividades recreacionales intermedias. En el primer bloque, los escolares examinaron individualmente las regularidades que perciben en el problema presentado y las expresaron en grupos pequeños (4-5 estudiantes). En el segundo bloque, los estudiantes investigaron acerca de la veracidad de conjeturas previas tratando de articular y compartir afirmaciones generales con el grupo completo (21 estudiantes). Por último, en el tercer bloque, el alumnado trató de extender lo aprendido a casos aún más generales refinando hallazgos previos y compartiéndolos en grupos medianos (10-11 estudiantes). En total, se dispuso de 135 minutos de trabajo activo por sesión (45 minutos por bloque) para abordar los distintos elementos de interés que conforman cada una de las áreas de pensamiento algebraico señaladas. Por las características de la memoria, centraremos el análisis en la aritmética generalizada (sesiones 1 a 3).

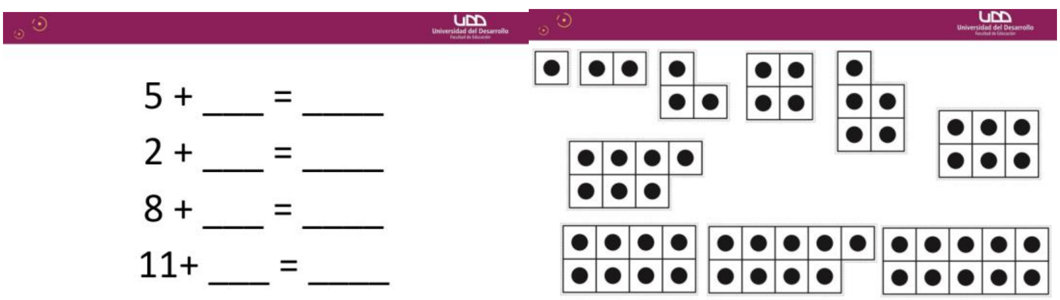
A continuación, describimos brevemente el contenido relativo a estas sesiones (S1=’Sesión 1’, S3=’Sesión 2’, S4=’Sesión 3’). Por su temática común, S2 y S3 se agrupan bajo un único epígrafe. Un plan detallado de cada sesión puede consultarse en el Anexo A.

Números Pares e Impares

La sesión 1 se diseñó con base en tres objetivos de enseñanza: (a) potenciar la generalización de las regularidades observadas al sumar números pares e impares con vocabulario matemático; (b) explorar cómo los estudiantes refieren a lo general y cómo lo representan y (c) caracterizar/discutir el significado de una justificación que permita explicar por qué una conjetura es verdadera para todos los números. Al inicio del bloque 1 (grupos pequeños de 4-5 estudiantes), se propone un juego en el que el profesor dice un número y los estudiantes otro. Si al sumar los números resulta un número par, el profesor gana un punto, pero si resulta impar el punto lo ganan los estudiantes. Esta dinámica fomenta la búsqueda y comunicación de estrategias ganadoras que permitan a los estudiantes maximizar los puntos que obtienen. La articulación de afirmaciones generales puede hacerse a través de diferentes representaciones: (a) lenguaje verbal; (b) lenguaje numérico-simbólico; (c) material manipulativo (tarjetas par-impar). Para refinar las justificaciones matemáticas, se introduce vocabulario matemático específico (p.ej. número par, número impar, sumandos, sumas y conjetura). El material manipulativo (tarjetas par-impar) que se facilita y algunas de las sentencias numéricas que se proponen se ilustran en la Figura 1.

Figura 1

Material empleado para la Representación de Números Pares e Impares en S1



Al final del bloque 1, los estudiantes escogen uno o dos portavoces de grupo para exponer las conclusiones generales en el bloque 2. Estos alumnos exhiben resultados grupales relativos a: (a) estrategias ganadoras; (b) suma de dos números impares; (c) suma de dos números pares y (d) suma de un número impar y un número par. Ya en el bloque 2, los portavoces muestran sus descubrimientos por turnos y, con ayuda de los profesores responsables, redactan una afirmación colaborativa que resuma y justifique las conjeturas del grupo completo. Por último, en el bloque 3 se discute acerca de la suma de tres números pares y tres números impares.

Igualdades Numéricas

Las sesiones 2 y 3 se diseñaron, nuevamente, con base en tres objetivos de enseñanza: (a) potenciar la generalización de las regularidades observadas en igualdades basadas en propiedades aritméticas de la suma y la resta; (b) explorar cómo los estudiantes refieren a lo general y cómo lo representan; (c) fomentar una visión relacional (no computacional/operacional) de las expresiones aritméticas horizontales y el uso de pensamiento relacional. La sesión 4 presentó un objetivo didáctico específico: emplear la letra como representación de número generalizado. Para conseguir todos estos objetivos, se instruyó a los profesores en que no derivasen la atención a los errores de cálculo, sino que la reenfocaran hacia un ambiente de diálogo y contraste de estrategias basadas en pensamiento relacional según las demandas de las actividades.

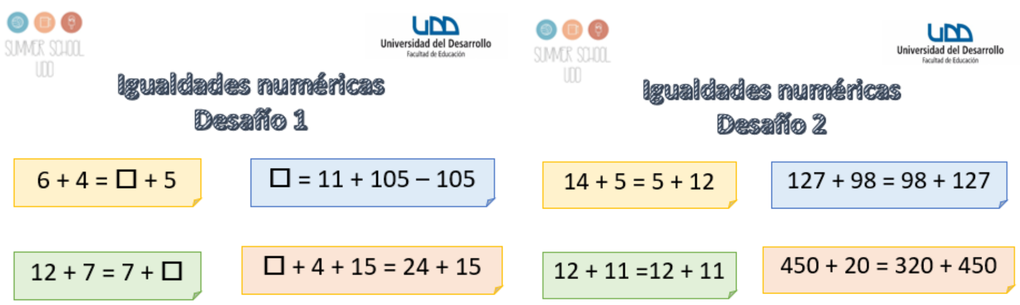
Durante los bloques 1 y 2 de ambas sesiones, se propone explorar cómo los estudiantes se enfrentan a igualdades basadas en propiedades aritméticas de la suma y la resta y qué tipo de comprensión manifiestan respecto al signo ”=”. Para ello, se pide a los escolares que respondan a una serie de sentencias, bien completándolas (p.ej. 6+4= $\square$ *+5*), bien manifestando y justificando su carácter de verdad o falsedad (p.ej. *14+5=5+12*). Una vez identificadas todas las sentencias verdaderas, se pide también que discutan usando lenguaje específico aspectos comunes a todas ellas de manera que se revelen propiedades aritméticas presentes en dichas expresiones. El profesor guía en todo momento la resolución de las tareas fomentando un uso relacional del signo ”=” e introduciendo vocabulario específico (sumando, suma, igualdad, conmutativa, composición, descomposición, sentencia). En el bloque 3, se insta a los estudiantes a que diseñen sentencias verdaderas o falsas con sumas y restas en orden creciente de dificultad y pidan a sus compañeros que juzguen su carácter de verdad o falsedad.

La diferencia entre las sesiones 2 y 3 radica en la tipología de la representación matemática introducida. Mientras que en S2 se trabaja el uso de lenguaje numérico-simbólico sin incluir letras, en S3 aparece la letra en su acepción de número generalizado. La introducción de la letra para representar cualquier número natural permite incluir ciertas sentencias que, según la interpretación que los estudiantes hagan de las letras, pueden ser verdaderas o falsas. Además, incluir letras sirve a la comunicación y debate de ideas matemáticas sofisticadas: ¿cómo podemos representar un número cualquiera? ¿es posible que una misma letra represente dos cosas distintas en la misma igualdad? ¿dos letras distintas pueden representar la misma cantidad? En la Figura 2, ejemplificamos sentencias numéricas que se muestran a los estudiantes durante S2 y S3.

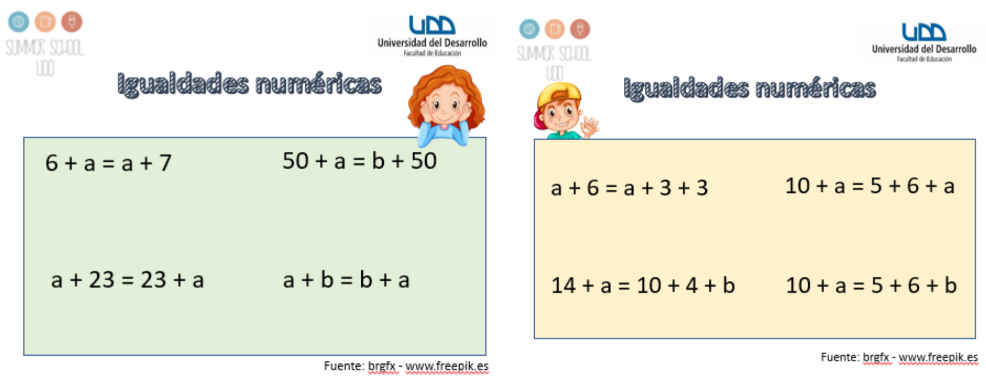
Figura 2

Ejemplos de Sentencias Numéricas empleadas en la Sesión 2 (a) y en la Sesión 3 (b)

(a)



(b)



Participantes y Contexto

Dado el contexto de pandemia de COVID-19, los 21 estudiantes de la Escuela de Verano tuvieron que acceder virtualmente a las distintas sesiones. Desde la organización de la escuela, se facilitó a cada estudiante pizarras con rotuladores de diferentes colores, figuras de papel a modo de material manipulativo y carpetas con hojas de trabajo para registrar sus avances. Estos 21 estudiantes pertenecían a una Fundación Educacional para niños y jóvenes de sectores con escasos recursos. En particular, provenían de dos centros educativos municipales situados a las afueras de la provincia de Santiago en la Región Metropolitana de Chile. La selección se realizó por parte de sus profesores habituales siguiendo tres criterios para una mayor heterogeneidad en el aula: (a) paridad de género; (b) disposición para trabajar; y (c) intereses y ritmos de aprendizaje diferentes.

A lo largo de la experiencia, contamos con 10 niñas y 11 niños de entre 9 y 10 años que habían terminado hace un mes el equivalente a 4.º de educación primaria (4º básico) de manera totalmente virtual. La situación sanitaria había propiciado que ambos grupos se viesen enfrentados a una educación a distancia que priorizaba ciertos contenidos curriculares centrales. Principalmente, este alumnado se había visto expuesto a clases de aritmética alineadas con los objetivos de aprendizaje que refieren al eje de Números y Operaciones. Por tanto, sus conocimientos previos incluían la operatoria con números naturales (suma, resta, multiplicación y división) y un acercamiento a la operatoria con fracciones y números decimales. En lo que respecta específicamente al eje de Patrones y Álgebra, no se llegaron a abordar la totalidad de objetivos que recoge el currículo trabajando exclusivamente con patrones numéricos en tablas que involucran una operación. Previo a su participación en el experimento de enseñanza (4º básico), ningún grupo de estudiantes había trabajado con problemas que involucren el uso de letras en su acepción de número generalizado. En el curso anterior (3º básico) sí que resolvieron ecuaciones con adiciones y sustracciones de un paso empleando estrategias de ensayo-error y operaciones inversas.

Respecto a protocolos éticos, se aplicó un Consentimiento Informado (para padres) y un Asentimiento Informado (para niños) de Participación en un Proyecto de Investigación aprobado por la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad del Desarrollo de Chile (UDD).

Recogida y Análisis de Datos

La totalidad de los datos recogidos *in situ* quedó registrada bajo una única forma documental: videograbaciones de las sesiones de Zoom. Todas las clases fueron transcritas y para respetar el anonimato se codificaron asignando la inicial “A” de alumno y la inicial “P” de profesor. En total, el registro de intervenciones comprendió veintiún alumnos numerados según su orden de aparición en las transcripciones (Ai, con i=1, …, 21) y seis profesores numerados de igual modo (Pi, con i=1, …, 6).

Guiados por la planificación de las sesiones, seleccionamos una serie de cuestiones (Sij, i=1,2,3, 1≤ j ≤7) por su potencial para recoger las justificaciones generales que surgen gracias a la instalación de espacios de discusión de ideas matemáticas en la Escuela de Verano. Por ejemplo, a la quinta pregunta de interés de la sesión 1 se le asignó el código S15. Las cuestiones se organizaron en grupos (Gi, i=1, …,6) siguiendo un criterio de afinidad. De esta manera, G1, G2, G3 proporcionaban información sobre S1 y G4, G5 y G6 sobre S2-S3.

(G1) S11 / S12 ¿Esta suma es par o impar? / ¿Cuál es tu estrategia para ganar?

(G2) S13 /S14 /S15 ¿Qué obtienes al sumar dos impares /dos pares /impar y par?

(G3) S16 / S17 ¿Qué obtienes al sumar tres números pares / impares?

(G4) S21 ¿Cómo podrías encontrar el número que falta?

(G5) S22 / S23 ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Qué tienen en común las sentencias verdaderas?

(G6) S31 / S32 ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Cómo harías para que sea verdadera?

Con estas cuestiones identificadas, refinamos un documento *.xls* para albergar las respuestas que incluyen justificaciones sobre lo general y atender a su tipificación por niveles. Asimismo, cruzamos una segunda variable para evaluar el rol que ejerce la representación empleada para expresar la justificación. Las influencias más directas para la delimitación de los niveles las encontramos en los estudios sobre representación de generalizaciones de Blanton, Isler-Baykal, et al. (2019), justificaciones basadas en representaciones de Schifter (2009) y argumentación en contextos numéricos de Blanton et al. (2022). Asimismo, influyeron en la propuesta de categorización modelos desarrollados en el marco conceptual (Blanton et al., 2018; Russell et al., 2017; Schifter y Russell, 2020).

Diseñamos una tabla con el siguiente encabezado (‘sesión’, ‘bloque’, ‘pregunta’, ‘ID profesor’, ‘ID alumno’, ‘respuesta’, ‘nivel’, ‘representación’, ‘observación’). En la columna ‘sesión’, se indicó la pertenencia de la justificación a S1, S2 o S3. En la columna ‘bloque’, a B1, B2 o B3. En la columna ‘pregunta’, su relación con S11, S12, S13 y S14, S15, S16, S17, S21, S22, S.23, S31 o S32. En la columna ‘ID profesor’, se indicó quién hacía la pregunta según P1, …, P6 y en ‘ID alumno’ quién respondía según A1, …, A21. La columna ‘respuesta’ contenía la respuesta del alumno Ai a la pregunta formulada por el profesor Pi. Bajo la entrada ‘nivel’, recogimos si una justificación tenía o no un enfoque estructural o lógico. Por su parte, en la columna ‘representación’, se señaló si había un uso destacable de alguna representación. Por último, en la columna ‘observación’ se recogió otra información relevante para el análisis.

En general, no nos interesaba tanto la dicotomía respuesta correcta/incorrecta sino la justificación que dicha respuesta incluía con énfasis en: (a) su grado de sofisticación; y (b) su medio de representación. Los niveles de la justificación de generalizaciones los organizamos en orden ascendente según su grado de sofisticación con relación a la generalización observada situando un nivel base de generalización limitada (J0), un primer nivel basado en enfoque no estructural (J1), un segundo nivel con enfoque estructural (J2) y un tercer nivel con enfoque lógico (J3). De esta manera, clasificamos las justificaciones de generalizaciones en niveles según el pensamiento algebraico que evidenciaban. Estas clasificaciones se realizaron partiendo de interpretaciones con base en las producciones fundamentalmente orales (también escritas) de los estudiantes. Además, cada nivel fue dividido en dos subniveles a su vez diferenciando así el tipo de justificación empleada según criterios específicos. Las representaciones de generalizaciones los organizamos en lenguaje verbal (V), lenguaje numérico-simbólico (NS) y material manipulativo (MM) sin añadir categorías mixtas que precisasen las posibles combinaciones que pueden darse entre ellos.

Para mostrar específicamente los niveles y subniveles de justificación de generalizaciones y las representaciones de generalizaciones, proporcionamos la Tabla 2.

Tabla 2

Categorías de Análisis de Datos en el marco de la Justificación de Generalizaciones

Niveles de Justificación de Generalizaciones	
Nivel J0. Factores externos / limitantes	
J0-A. Atribuciones (p.ej. suerte, azar, etc.)	J0-B. Contexto (p ej. “depende”)
Nivel J1. Enfoque no estructural: cómputo directo	
J1-A. Caso Único (p. ej número específico)	J1-B. Varios Casos (p.ej. inferencia)
Nivel J2. Enfoque estructural: pensamiento relacional	
J2-A. Patrones (p. ej. último dígito)	J2-B. Propiedades (p.ej. conmutativa)
Nivel J3. Enfoque lógico: razonamiento	
J3-A. Supuestos Previos (p.ej. ya probado)	J3-B. Simplificación (p.ej. reducir expresiones)

Representaciones de Generalizaciones		
V. Verbal	NS. Numérico-Simbólico	MM. Material Manipulativo

Niveles de Justificación de Generalizaciones

Describimos los distintos niveles y subniveles en que se clasifican la variedad de justificaciones de ideas matemáticas generales. Estos niveles dependen directamente de la interpretación que hace la autora de las respuestas proporcionadas por los estudiantes siendo una clasificación no excluyente. En particular, si los alumnos plantean justificaciones que combinan más de un enfoque, referiremos al nivel de orden superior con mención al inferior. Asimismo, se indicará cuando una respuesta no presente indicios suficientes para pertenecer a un nivel y su clasificación resulte confusa. Al final de cada una de las descripciones para los niveles J0, J1, J2 y J3 (y subniveles A, B respectivos), se proporciona una tabla que incluye ejemplos de respuestas. En dicha tabla, se marcan en negrita las expresiones verbales que motivan la clasificación de justificaciones.

Nivel J0. Factores Externos / Limitantes. Las respuestas que aglutinamos bajo este nivel base responden a las producciones matemáticas de niños que, o bien basan su respuesta en atribuciones externas o bien asumen una dependencia contextual que limita la aceptación de la generalidad.

Subnivel J0-A. Atribuciones. La respuesta proporcionada por el alumno muestra escasa información acerca de por qué está en lo cierto respecto al juicio emitido. Esto se traduce en el revelado de intuiciones que no se sostienen bajo ningún otro soporte argumentativo que no sea la atribución a entes externos. Argumentan que es una cuestión de instinto, de lógica, de suerte, de sentimiento o simplemente responden con expresiones dubitativas ("no sé") o taxativas sin argumentar ("sí/no", "par/impar", "verdadero/falso").

Subnivel J0-B. Contexto. Las justificaciones se basan en dependencias contextuales que limitan la aceptación de la generalidad. Schifter (2009) relaciona estas respuestas con afirmaciones sobre un conjunto numérico infinito cuya prueba se asume que no es posible. Esto se manifiesta entre las respuestas como "depende de los números" o "depende de la posición de la letra en el alfabeto".

Tabla 3

Ejemplos de Respuestas en el Nivel J0. Factores Externos/Limitantes

J0-A. Atribuciones	J0-B. Contexto
P4: 1970 + 1200 = 179 +200. *¿Es verdadera o falsa? (S22)* *A9:* ***Mmm…*** *¿Falsa?* *P4: ¿Por qué?* *A9: Pues, ahora es que no quiero hacer cálculo porque sería media trampa, pero no sé,* ***siento que no****,* ***no sé****, falsa.*	*P2: ¿Si sumas dos números impares que tipo de número obtienes? (S12)* *A1: Es que* ***depende*** *del número que sea que esté sumando.* *P4: 50+a=b+50 (S31)* *A1: Falsa,* ***por el abecedario*** *la b es mayor que la a.*

Nivel J1. Enfoque No Estructural: Cómputo Directo. Empleamos este nivel para agrupar aquellas justificaciones basadas en números específicos que sirven como soporte para probar la validez de enunciados generales. Como esta clase de argumentos están ligados de forma directa a aspectos computacionales (operatoria con números naturales), el grado de sofisticación con que las agrupamos corresponde al primer nivel.

Subnivel J1-A. Caso Único. Las respuestas evidencian resultados obtenidos por procedimientos de cómputo directo (p ej. suma mental, suma en pizarra, etc.) que sirven al alumno tanto para convencerse a sí mismo como para convencer a los demás.

Subnivel J1-B. Varios Casos. Las respuestas contienen muy similares a las del subnivel nivel J1-A solo que, en vez de incluir un único caso particular, contienen un número superior de casos organizados de cierta forma (generalmente ascendente o descendente). Esta categoría alberga tanto comprobaciones por inferencia a partir de un cierto número de instancias ("lo comprobé hasta … y debería seguir así") como aportaciones con varios casos aislados.

Tabla 4

Ejemplos para el Nivel J1. Enfoque No Estructural: Cómputo Directo

J1-A. Caso Único	J1-B. Varios Casos
P4: Y ¿cuál es la teoría? ahora son 3 pares (...) ¿Qué dice el resto? (S16) *A1: Sí, que también da un número par, porque yo también* ***hice una operación*** *y* ***me dio*** *número* ***par****.* *P4: ¿Qué operación hiciste?* *A1: Hice* ***12+30+50*** *y me dio* ***92****.*	*P4: ¿Cuál es la teoría? Son 3 pares (S16)* *A20:* ***Llegué*** *hasta* ***cuarenta*** *y* ***todos*** *son números* ***pares****, entonces si* ***seguimos igual*** *van a* ***seguir*** *dando números* ***pares.*** *P4: ¿En qué te fijas para ganar? (S15)* *A8: No se pueden repetir los mismos números porque* ***8+8 es 16, 7+7 es 14, 2+2 es 4, 4+4 es 8****.*

Nivel J2. Enfoque Estructural: Pensamiento Relacional. Este nivel recoge las respuestas de los estudiantes que ponen el énfasis en las relaciones por encima de los cómputos operacionales aceptando expresiones literales como respuesta y comparando sentencias sin necesidad de evaluarlas numéricamente (Kieran, 2004). Las estrategias que se agrupan bajo este nivel suponen un grado de sofisticación mayor al que se tiene con justificaciones basadas exclusivamente en cálculos operacionales pues exigen la transición a maneras algebraicas de pensar. Si los alumnos plantean justificaciones que combinan el aspecto computacional y el aspecto relacional referiremos a J2 con mención a J1 (p.ej. operan todos los términos y reconocen la propiedad). Tras explicar los subniveles (J2-A y J2-B), mostramos ejemplos de respuestas en la Tabla 5.

Subnivel J2-A. Patrones. Las justificaciones revelan la exploración de patrones inherentes a los elementos del conjunto numérico sobre el que está trabajando (números naturales). Particularizando, en sus argumentos se hace visible: a) el sistema de numeración decimal; b) la focalización en el dígito que marcan las unidades para un menor esfuerzo computacional; c) la elección del menor número par o impar del conjunto; d) el reconocimiento de que dos números consecutivos distan una unidad y tienen distinta paridad; e) la completación de rectángulos (o no) para la determinación de la paridad.

Subnivel J2-B. Propiedades. Las justificaciones se basan en relaciones visiblemente explicitadas (a través de un lenguaje más o menos refinado) sobre los elementos del conjunto numérico. El énfasis se pone en el significado del signo igual y la comparación de expresiones de equivalencia basadas en propiedades en lugar de evaluaciones numéricas. Estas propiedades son: a) compensación; b) complementariedad de la suma y la resta; c) conmutativa de la suma; d) composición/descomposición de la suma. Esta subcategoría incluye también estrategias de comparación donde los miembros de las igualdades son considerados uno a uno con su homólogo reconociendo (o no) relaciones cuantitativas o de orden.

Tabla 5

Ejemplos para el Nivel J2. Enfoque Estructural: Pensamiento Relacional

J2-A. Patrones	J2-B. Propiedades
P1: ¿Por qué dirías que 15 es un número impar? (S11) *A20: Impar, porque si se da cuenta, por ejemplo, siempre cuando vamos contando, el 1 siempre es impar y entonces, **1 impar, 2 par**... entonces 7 + 7 seria 14 que sería par y entonces **si le agregas 1,** que seria 7 + 8**, daría un numero impar** que sería 15.*	*P4: ¿Qué encontraste en común? (S23)* *A1: Vi que había los mismos números, solo que en **distintos lados**.* *A11: El **orden** de los sumandos va en distinta **dirección.*** *A3: El orden de los sumandos solo está **invertido** y **no altera** el resultado.* *A12: Los **sumandos** son los **mismos**, pero están **cambiados de posición**.*

Nivel J3. Enfoque Lógico: Razonamiento. Este nivel recoge las respuestas de los estudiantes que razonan sobre las generalizaciones que han percibido. Se pone el énfasis en las relaciones lógicas o usar conjeturas previas ya probadas ya sea realizar transformaciones sobre sentencias con letras hasta alcanzar su mínima expresión. Las estrategias evidenciadas en este nivel suponen el grado de sofisticación más elevado puesto que razonar con generalizaciones como objetos matemáticos en sí mismos contribuye notablemente al desarrollo del pensamiento algebraico (Blanton et al., 2018).

Subnivel J3-A. Supuestos Previos. Agrupa las respuestas de alumnos que aprovechan conjeturas previas ya probadas para razonar sobre nuevas conjeturas. En este modo de proceder, la consideración de supuestos anteriores ahorra esfuerzos computacionales y emerge como una forma de justificación muy sofisticada.

Subnivel J3-B. Simplificación. Aglutina las justificaciones de alumnos que realizan transformaciones sobre sentencias literales de manera que las rectifican admitiendo la expresión más simple posible. Asimismo, incluye las respuestas donde se reconoce que la admisión del carácter de verdad o falsedad de determinadas expresiones literales está condicionada por la relación entre las letras.

Tabla 6

Ejemplos para el Nivel J3. Enfoque Lógico: Razonamiento

J3-A. Supuestos previos	J3-B. Simplificación
P4: par+par+par= … (S16) *A1: Yo digo que par+par+par = par porque* ***si le quitas****, aunque sea un* ***par****,* ***igual va a dar resultado par****, entonces para mi es casi lo mismo agregarle otro.*	*P5: 10+a=5+6+b ¿Verdadero o falso? (S31)* *A11: Yo digo que es* ***falso****, aunque tal vez b representa un número más bajo que a. Si* ***la a es mayor y b es un numero 1 menor*** *sería* ***correcta****.*

Representaciones de Generalizaciones

Seguidamente, se complementan los niveles de la justificación de generalizaciones con las representaciones de generalizaciones valorando el papel que estas ejercen para la expresión de lo general. Al final de las descripciones para las representaciones verbal (V), numérico-simbólica (NS) y material manipulativo (MM), se proporciona la Tabla 7 con ejemplos de uso de dichas representaciones en subniveles concretos.

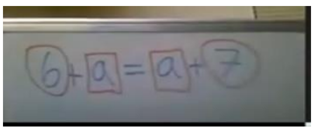
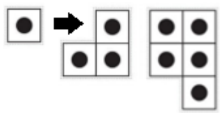
V. Verbal. Se incide en las expresiones verbales que emplean los niños para justificar sus acciones matemáticas. El uso de expresiones como “siempre” o “cualquiera” revelan atisbos de generalidad. Asimismo, expresiones dubitativas (“no sé”) o taxativas sin argumentar (“sí / no”) limitan la interpretación que se hace de la respuesta clasificándola en el nivel base J0.

NS. Numérico-Simbólico. Se incluyen numerales, letras y signos propios de la aritmética y el álgebra tales como operadores y signos específicos como es el “cuadradito” (□). Asimismo, destacamos el papel que ejerce la letra tanto si se está usando en su acepción de número generalizado como si se está evaluando con algún tipo de lógica argumental (p.ej. el orden en el alfabeto o el menor número natural). Cuando incluyamos letras, referiremos más específicamente a lenguaje numérico-algebraico.

MM. Material Manipulativo. Se incluyen las tarjetas par-impar de la Figura 1. Estas tarjetas proporcionan un soporte físico al que referirse pudiendo complementar los argumentos con referencias espaciales que aludan directamente a la forma y disposición (“juntar”, “sobrar”, “sobresalir”, “separar”, “unir”, etc.).

Tabla 7

Ejemplos de Representaciones de Generalizaciones

V. Verbal (J2-A)	NS. Numérico-Simbólico (J1-A)	MM. Material Manipulativo (J3-A)
P3: par+impar (S15) *A2: **Siempre** que suman un impar, un impar va a par, par impar, par impar, con los números, o sea **siempre** que sumen un par a un impar va a dar impar.* *A1: **Siempre** que sume un número par con uno impar siempre dará impar, la unidad siempre mandará.*	*P5: **6+a=a+7**, ¿Verdadero o falso? (S31)*  *A20: Falso, simplemente la **a** puede representar cualquier número. Lo **representé** de una manera fácil y puse no sé**, 1** entonces te iba a dar **8** y no es lo mismo.*	*P1: ¿Qué pasa si sumamos impar + impar + impar? (S16)*  *A9: Impar, porque no se alcanza a **juntar** todo, si junto un impar con un impar, me da par, pero si junto con otro impar, ahí no se alcanza a juntar todo.*

Resultados y Discusión

En este capítulo, se presentan los resultados del análisis de los datos y se discuten en base a la literatura previa. En particular, se proporcionan los principales hallazgos sobre las justificaciones de generalizaciones organizados por temática: (a) números pares e impares y (b) igualdades numéricas. Para guiar análisis posteriores y poder manifestar tendencias entre los sujetos participantes, mostramos la relación de alumnos que justifica relaciones matemáticas generales evidenciando como mínimo nivel J1 (si no aparece marcado con “X” el alumno manifiesta nivel base J0). Estos resultados son visibles en la Tabla 8 y están organizados por cuestiones y grupos de cuestiones.

Tabla 8

Relación de Alumnos que Justifica Generalizaciones evidenciado como mínimo Nivel J1

	G1		G2			G3		G4	G5		G6	
	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S21	S22	S23	S31	S32
A1	X	X	X		X	X		X	X	X	X	X
A2		X			X						X	
A3	X	X	X		X			X	X	X	X	
A4					X		X				X	X
A5								X	X	X	X	
A6	X			X		X			X		X	
A7		X				X			X			
A8	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	
A9		X					X	X	X			
A10			X				X		X		X	
A11				X	X				X	X	X	X
A12								X	X	X	X	
A13			X		X						X	
A14			X		X						X	
A15									X		X	X
A16				X							X	X
A17		X				X		X	X		X	X
A18		X				X		X	X	X	X	X
A19		X						X	X			X
A20	X		X				X	X	X	X	X	
A21									X	X		

Nota. La falta de asistencia se indica con fondo gris. Las cuestiones a las que refieren los códigos Sij (i=1,2,3, 1≤ j ≤7) pueden consultarse en el Marco Metodológico.

Resultados por Temática y Grupos de Cuestiones

En este subcapítulo, se muestra la clasificación de las justificaciones de generalizaciones en niveles según el pensamiento algebraico que evidencian, así como las representaciones empleadas para justificar. Los resultados se presentan de manera organizada revelando aspectos generales por temática y aspectos específicos por grupos de cuestiones. El análisis global y discusión se proporciona en el subcapítulo siguiente.

Números Pares e Impares

Analizamos las justificaciones sobre ideas matemáticas generales acerca de la suma de números pares e impares. En primer lugar, señalamos que el uso de material manipulativo (tarjetas par-impar) es exclusivo de esta primera sesión. De hecho, el uso de esta representación se traduce en justificaciones de máximo nivel J2 (nivel J3 exclusivo en preguntas de G3). De manera global, de los 19 estudiantes que asisten a S1, 17 muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para alguno de los grupos de cuestiones G1, G2 y G3 (ver Tabla 8). De estos 17 alumnos, cinco aportan respuestas que alcanzan como mucho nivel J1, nueve aportan como mucho de nivel J2 y tres como mucho nivel J3. Todas estas apreciaciones pueden comprobarse a través del análisis detallado según los grupos de preguntas (G1, G2 y G3).

G1. ¿Esta Suma es Par o Impar? ¿Cuál es tu Estrategia para Ganar? Con este grupo de preguntas, se inician las sesiones de intervención de la Escuela de Verano. Estas cuestiones se plantean en el primer bloque de la primera sesión continuando la discusión de estrategias en el segundo bloque. De los 19 estudiantes que asisten a la sesión, 11 muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S11 o S12 en alguna de sus respuestas (ver Tabla 8). Por aportar una visión global antes de detallar en qué consisten estas justificaciones, señalamos que, de estos 11 estudiantes, tres aportan respuestas que alcanzan como mucho nivel J1 y ocho como mucho nivel J2. No aparecen justificaciones que evidencien nivel J3.

Se han situado en el nivel base las respuestas que apenas proporcionan información acerca de por qué ese estudiante está en lo cierto respecto al juicio emitido (nivel J0-A) y no han aparecido respuestas de nivel J0-B. Por ejemplo, para S11 se identifican respuestas que comparten este patrón:

P3: ¿Cuánto es 4+3?
A2: 7, tía.
P3: Entonces 4+3=7, ¿es par o impar?
A2: Impar.
P3: ¿Y si ponemos 4+15?
A2: 19.
P3: ¿Y eso da par o impar?
A2: Impar, punto para nosotros.

A continuación, mostramos el análisis detallado. En una primera instancia, se evidencian estrategias motivadas por el cálculo operacional o conteo sin enfoque estructural (nivel J1). Los estudiantes se basan en números específicos que son capaces de sumar mentalmente para responder a S12. Por lo general, realizan una única operación (J1-A) y hay una única mención a cálculos reiterados (J1-B). Solo A18 suma de manera iterativa ("sumo de dos en dos"). Lo ilustramos:

A2: La mía fue sumar, casi siempre yo ponía un 3 o un 2, esa era mi respuesta.
A7: Yo pienso en dos impares para ver si me da impar o par y hago suma mental.
A17: Sumaba el número que tenía, si daba impar lo dejaba, si daba par no lo dejaba.
A18: Yo sumo, por ejemplo, usted me pone 2 y yo, por ejemplo, sumo de 2 en 2.

Respecto a las representaciones empleadas, predomina el uso de lenguaje verbal (V) seguido del lenguaje numérico-simbólico (NS). En lo verbal, apreciamos fórmulas orales que nos remiten a la técnica de tanteo ("pienso en…para ver si me da", "si daba impar lo dejaba, si daba par no lo dejaba"). Estas justificaciones tienen un componente claramente operacional por lo que el grado de pensamiento algebraico que evidencian corresponde, como se ha señalado, a uno de los niveles menos sofisticados (nivel J1). En lo numérico-simbólico, se aprecian menciones a números bajos por lo general, siendo 2 el número que aparece con más frecuencia en las transcripciones. A este respecto, la estrategia que emplea A2 es significativa puesto que escoge el segundo menor par del conjunto de los naturales, es decir, (2,3) en lugar de (1,2). Se necesitaría más información para clasificar dicha respuesta en un nivel J2-A.

Asimismo, al preguntar si un número era impar (S11), se encontraron respuestas basadas en la observación de patrones. Particularmente, los cinco alumnos que justificaron generalizaciones emplearon justificaciones de nivel J2-A. Ilustramos dos ejemplos.

A3: Impar porque si juntamos el 4 con el 4, nos da 8… y si juntamos el 3 con el 3 nos da 6, entonces el del medio de esos números es el 7, que no se puede sumar de ningún par para que de ese resultado.

A20: Impar porque si se da cuenta, por ejemplo, siempre cuando vamos contando, el 1 siempre es impar y entonces, 1 impar, 2 par... entonces 7 + 7 seria 14 que sería par y entonces si le agregas 1, que seria 7 + 8, daría un numero impar que sería 15.

Las representaciones empleadas por estos alumnos fueron verbales y numérico-simbólicas. En lo verbal, se aprecia una identificación de la suma con la acción de "juntar" aun cuando no se proporciona un soporte físico (tarjetas par-impar). Asimismo, hay alusiones específicas a "dividir", "mitad" y "medio" entre las justificaciones proporcionadas. Sobre la generalidad, se recoge el término "ningún" en la respuesta dada por A3 y "siempre" en la dada por A20. En lo numérico-simbólico, se reconoce el uso frecuente de sumandos menores que 10. Asimismo, se percibe la expresión del patrón "dos números consecutivos distan una unidad y tienen distinta paridad" en comentarios como el de A20: "sería par y si le agregas 1 impar", lo que indica un pensamiento algebraico más desarrollado por tener en cuenta la estructura y las relaciones entre elementos del conjunto numérico.

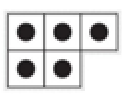
En este mismo nivel J2-A, se incluyen respuestas a S12 que evidencian prácticas de pensamiento algebraico con un nivel de sofisticación mayor que el que proporcionan los cómputos aislados (4 de los 9 alumnos). En las reflexiones sobre las estrategias, encontramos tres prácticas distintivas: (b) fijarse si la división por 2 es o no exacta; (b) fijarse en la paridad del dígito ubicado en la posición de las unidades; y (c) tomar el menor elemento del conjunto de los naturales que al ser sumado con otro da como resultado un número impar. La primera práctica es usada por A2 y A9 mientras que la segunda la usa A7 y la tercera A8. Lo ilustramos omitiendo la respuesta proporcionada por A9 por similitud con la de A2.

A2: Yo hice que un número sea impar intentando que las 2 mitades no sean iguales, por ejemplo, si lo dejas a la mitad, en una parte 3 y en la otra 2.
A7: Yo hago suma mental y me fijo en el último número si es par o impar.

P4: ¿Cómo tiene que ser el número para ganar? ¿En qué te fijas?
A8: Yo pensé en un número impar y pensé en el 1, así que puse el 1.
P4: ¿Ah sí?, ¿Seguro?... ¿241 + 1?
A8: Ahí hubiese puesto 2.

El uso de representaciones es prácticamente idéntico al que registramos con las respuestas a S11 analizadas previamente. Resulta significativa la ausencia de uso de material manipulativo para responder a S12. Las únicas menciones explícitas a material manipulativo (MM) las encontramos en respuestas dadas por A3 y A8 a S11 y exclusivamente para justificar si un número es impar.

A8: Impar porque no tiene la misma cantidad de números en cada lado y aparte es 5.



A3: Profe, nosotros tenemos una trampa con las tarjetitas, porque si se fija, sobra uno cuando es impar.

En estas respuestas, se aprecia la percepción de determinados patrones relativos a la disposición de puntos asociando el atributo “ser impar” con “no tener la misma cantidad de números a cada lado” o “sobrar uno” (nivel J2-A). Con el término “nosotros”, A3 refiere a los integrantes su grupo del bloque 1 (A3, A8 y A10). Sin embargo, A10 no mostró justificaciones de nivel superior a J0.

G2. ¿Qué Obtienes al Sumar Dos Impares / Dos Pares / Impar y Par? Este grupo de preguntas permite que el grupo de estudiantes afine las tres conjeturas (“impar+impar=par”, “par+par=par”, “impar+par=impar”) previstas para S1 discutiéndose tanto en el bloque 1 como en el bloque 2. De los 19 estudiantes que asisten a la sesión, 12 muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S13 o S14 o S15 en alguna de sus respuestas (ver Tabla 8). De estos 12 estudiantes, cuatro aportan respuestas a G2 que alcanzan como mucho nivel J1 y ocho de nivel J2 como máximo. No aparecen justificaciones que evidencien nivel J3.

Nuevamente, se han situado en el nivel base las respuestas que apenas proporcionan información acerca de por qué ese estudiante está en lo cierto (J0-A) junto con otras en las que la aceptación de la generalidad se ha visto limitada (J0-B). Si bien A1, A2 y A9 asumen una dependencia contextual al inicio, la evidencia de un pensamiento algebraico más sofisticado en respuestas posteriores ha permitido que A1 y A2 sean reconsiderados en este análisis. Con relación a A9, no encontramos registros que posicionen sus respuestas en un nivel J1 al menos. Proporcionamos ejemplos (J0-B):

A1: Depende del número que sea que esté sumando.	*A2: Depende del número, ¿puede ser un 3 o un 2?*	*A9: Depende del número, puede dar par o impar.*

De entre las respuestas consideradas, analizamos aquellas que resultan más interesantes para ejemplificar los distintos subniveles. En el caso del nivel J1, tenemos registros de cinco alumnos que se basan en un único caso particular para justificar la veracidad de alguna de las tres conjeturas (J1-A) y un solo alumno, A8, que emplea varios casos particulares (J1-B) sin realizar una inferencia completa. Los tres ejemplos que proporcionamos por columnas corresponden a S14, S15 y S13, respectivamente.

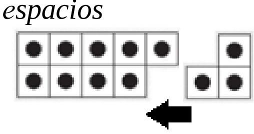
A8: Par porque si al 2 le sumamos 4, da 6, al 6 si le sumamos 2 da 8, al 2 le sumamos 2 da 4.	*A11: Si sumo un número par más un número impar es impar, porque por ejemplo 8 + 7 es 15 y 15 es impar.*	*A20: Un número par, por ejemplo, 9 con 7 daba 16 si los juntábamos…dos números impares que daban uno par.*

En cuanto a las representaciones empleadas para justificar, se combina el uso de lenguaje verbal con lenguaje numérico-simbólico (NS). En lo verbal, la suma vuelve a aparecer como la acción de “juntar” con el significado “dar un resultado”. Como hay un componente operacional claro y las respuestas se basan en casos particulares, lo más habitual es encontrar la expresión “por ejemplo”. En lo numérico-simbólico, se aprecia de nuevo la mención a números que no superan la decena como sumandos.

Ubicadas en un nivel de sofisticación superior según el pensamiento algebraico que evidencian, estarían las estrategias en las que domina el enfoque estructural (J2). Estas estrategias son empleadas por 8 de los 12 alumnos para responder al menos una de las cuestiones de G1. Por ejemplo, A8 respondía a S14 evidenciando un nivel J1-B mientras que a S13 lo hace con nivel J2-A. Lo ilustramos para S15 y S13 por columnas ya que no existen evidencias de respuestas situadas en este nivel para S14.

A1: Siempre que sume un número par con uno impar siempre dará impar, porque la unidad siempre mandará.
A2: Siempre que suman un impar, sí porque, un impar va a par, par impar, par impar, con los números, o sea siempre que sumen un par a un impar va a dar impar.

A3: Par porque lo miro... no estoy contando y pienso que, si hay uno más y en el otro hay uno más, entonces ese uno más y el otro uno más caben justito.
A8: Sí… se juntan los espacios
A20: Pasa que ya no sobresalen los puntitos.



De los ocho alumnos que usan argumentos con un nivel de sofisticación J2-A, A1 y A2 son los dos únicos estudiantes que emplean exclusivamente el lenguaje verbal. Manifiestan la generalidad a través del vocablo “siempre” y toman en consideración que dos números consecutivos distan una unidad y tienen paridad alterna. Los seis alumnos restantes se apoyan en el material manipulativo. Para especificar que está dominando el enfoque relacional sobre el enfoque operacional, los alumnos verbalizan, por ejemplo, “solamente miro” o “no estoy contando”. Haciendo alusión al soporte físico y conectando ideas que previamente habían considerado para S11, llegan a conclusiones como: “si los huecos se juntan o los puntitos ya no sobresalen el resultado es par”.

G3. ¿Qué Obtienes al Sumar Tres Números Pares / Impares? Con este grupo de preguntas (G3) planteadas en el tercer bloque, se termina la sesión sobre paridad. De los 19 estudiantes que asisten a la sesión, diez muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S16 o S17 en alguna de sus respuestas (ver Tabla 8).

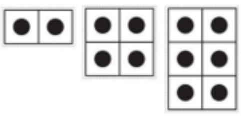
De estos diez estudiantes, cuatro aportan respuestas que alcanzan como mucho nivel J1, tres que alcanzan como máximo nivel J2 y otros tres máximo nivel J3.

Una primera distinción entre respuestas nos revela aquellas menos sofisticadas que contienen meras comprobaciones empíricas (nivel J1). Tres estudiantes se basan en números específicos para responder a S16 y dos actúan análogamente con S17. En general, realizan una única cuenta (J1-A). Solamente A6 emplea cálculo reiterado (J1-B). Respecto a las representaciones, emplean lenguaje verbal y numérico-simbólico. Lo llamativo respecto a análisis anteriores es la argumentación verbal de A6 pues explicita la generalidad bajo la forma "si seguimos igual van a seguir dando" pues asume que lo que es cierto para unos casos, será cierto para el resto. Es lo más cercano a una inferencia (no formal) que hemos registrado en las respuestas. En lo numérico, aparecen por primera vez sumandos mayores que 10 ("12", "30" y "50"). Lo ejemplificamos por columnas que contienen respuestas a S16 y S17, respectivamente

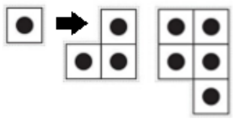
A6: Llegué hasta cuarenta y todos son pares. Si seguimos igual van a seguir dando pares.
A8: Me dio par…el 2,4 y 6.
A18: Hice 12+30+50 y dio 92 número par.

A4: Impar, si juntamos el 7 con el 5, nos daría 12 y si le agregamos el 3, daría 15.
A20: Ocupé el 8, el 7 y el 3 y da un número impar.

En la segunda distinción, aparecen las respuestas con enfoque estructural y lógico. Las diferenciamos en los ejemplos a través de la línea punteada. Mientras que A7, A8 y A17 se basan en patrones percibidos gracias a la disposición y configuración de las figuras (nivel J2-A), las respuestas proporcionadas por A1, A9 y A10 muestran indicios de un pensamiento algebraico más sofisticado (nivel J3-A). El pensamiento evidenciado en las respuestas de nivel J3 se considera más refinado por apoyarse en resultados previos ya probados ("par+par=par", "impar+impar=par") para justificar una información más general. Estas justificaciones se basan en material manipulativo (MM).



A7: Par porque todos tienen una pareja.
A17: Es par, no hay uno que esté solito.



A8: Es impar, porque como se ve, se junta una parte con la parte de la otra y otra parte va a quedar sobrando, sobraría uno.

…………………………………………………………

A1: Yo digo que par+par+par=par porque si le quitas, aunque sea un par, igual va a dar resultado par, entonces para mi es casi lo mismo agregarle otro.

A9: Impar, porque si junto un impar con un impar, me da par, pero si junto con otro impar, no se alcanza a juntar todo.

Igualdades Numéricas

Analizamos las justificaciones sobre ideas matemáticas generales acerca de igualdades numéricas. En primer lugar, señalamos que el uso de letras como número generalizado no se introduce, por parte de los profesores, hasta la tercera sesión. De manera global, todos los estudiantes que asisten a la sesión 2 muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para alguno de los grupos de cuestiones G4 y G5 (ver Tabla 8). De estos 16 alumnos, solamente uno aporta respuestas que alcanzan como mucho nivel J1; el resto aporta justificaciones de generalizaciones que tienen como mucho nivel J2. En la sesión 2, no hay evidencias de respuestas con justificaciones de nivel J3. Análogamente, de los 19 estudiantes que asisten a la sesión 3, 17 justifican hasta nivel J2 y dos hasta nivel J3 en cuestiones exclusivas de G6. Lo mostramos con un análisis detallado por grupos.

G4. ¿Cómo Podrías Encontrar el Número que Falta? Con esta pregunta se inician las dos sesiones de igualdades numéricas planteándose en el primer bloque de S2. De los 16 estudiantes que asisten a la sesión 2, diez muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S21 en alguna de sus respuestas (ver Tabla 8). Por aportar una visión global, señalamos que, de estos diez estudiantes, uno aporta respuestas cuyas justificaciones alcanzan como mucho nivel J1 y nueve de nivel J2 máximo. No aparecen justificaciones con nivel J3.

Se han situado en el nivel base las respuestas en las que para encontrar el número buscado se recurre al instinto, la lógica o el azar (nivel J0-A) y no se han registrado respuestas de nivel J0-B. Si bien A7, A12 y A17 y A21 recurren a este tipo de argumentación al inicio, la evidencia de un pensamiento algebraico más sofisticado en respuestas posteriores ha permitido que A12 y A17 sean reconsiderados en este análisis. Con relación a A7 y A21, no encontramos registros que posicionen sus respuestas en un nivel J1 al menos. Ilustramos ejemplos de respuestas de nivel J0:

A12: Puse un numero aleatorio.
A17: No sé, puse un número al azar, lo más lógico, pero no estoy muy segura.
A7: Fue instinto.
A21: No se me ocurrió otro número.

Por su parte, la única evidencia de respuestas de alumnos que no superan el nivel J1, situándose en un enfoque no estructural, la encontramos en A19, quien para "$6+4=\square+5$" A19 señala "yo lo hice restando el 10 con el 5 y me dio 5".

En todo momento, los profesores animan a los estudiantes a trabajar desde el reconocimiento de propiedades sin usar cómputos directos. Este hecho explica que nueve de los diez alumnos hayan verbalizado aspectos relacionales de las expresiones aritméticas en al menos una de sus respuestas (nivel J2-B). Las cuatro propiedades que se trabajan con las igualdades del desafío 1 (Figura 2 (a)) son: (a) compensación; (b) complementariedad de la suma y la resta; (c) conmutativa de la suma; y (d) composición/descomposición de la suma. Lo ilustramos con dos ejemplos para cada una.

6 + 4 = □ + 5

A3: Solo tenemos en la primera suma quitarle uno al 6 y dárselo al 4 y ahí queda 5 + 5.
A17: Viendo es 6 + 4 y al lado hay un 5 y entonces puse un 5 porque como es 6 + 4 al 6 le quito 1 y se lo pongo al 4 entonces puse 5

□ = 11 + 105 – 105

A12: Vi que te quedaba 11 de una, porque le restaste lo que le sumaste.
A1: El cuadrito vacío es igual que 11 + 105 – 105 y esos 105 que agregamos luego se quitan porque después viene un – 105.

12 + 7 = 7 + □

A8: Me fijé en 12 + 7 y después 7 + 12 tenía que ser, es lo mismo pero invertido.
A18: Que nos dé el resultado con el 7, encontrar un número que dé mismo resultado porque para mí es como dar vuelta los números.

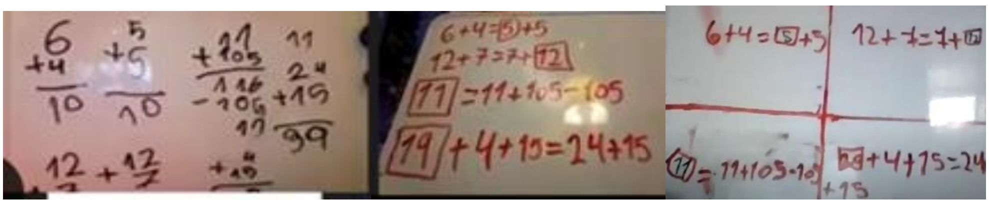
□ + 4 + 15 = 24 + 15

A3: Vi el 4 + 15 y después 24 + 15 y dije ah le falta un 20 ahí para ser 24.
A9: Yo puse 20 porque decía 24 + 15 y el 4 con el 20 era separar más el número, lo separaba con la decena, la unidad y me dio 20.

Respecto a las representaciones empleadas para justificar, el lenguaje numérico-simbólico adquiere más importancia que en la sesión anterior (ver Figura 3). Los números que faltan son representados simbólicamente bajo el signo "□" al que refieren como "cuadradito" o "cuadrito". Más concretamente, manifiestan el pensamiento relacional con expresiones verbales como "vi" o "me fijé" y se apoyan en las pizarras tanto para hacer cuentas y registrar los números encontrados. En los siguientes subcapítulos profundizaremos en cómo se van refinando estas propiedades a través de G5 y G6.

Figura 3

Ejemplos de Representaciones Numérico-Simbólicas en la Sesión 2



G5. ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Qué tienen en común las verdaderas? Con este grupo de preguntas del segundo y tercer bloque de S2, se termina la sesión sobre igualdades que no contienen letras en su enunciado. De los 16 estudiantes que asisten a la sesión, todos muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S22 y nueve lo hacen para S23 (ver Tabla 8). Por otro lado, 15 de los 16 estudiantes aportan respuestas que alcanzan nivel J2, siendo un único estudiante el que justifica hasta nivel J1. No se evidencias respuestas de nivel J3.

Se han situado en el nivel base las respuestas que no recurrían a ningún tipo de argumentación y eran taxativas (verdadero/falso) junto con aquellas en que se invocaba al azar o la lógica ("lo más lógico para mí", "lo hice al achunté"). Todas ellas corresponden al nivel J0-A, no habiendo registros de respuestas de nivel J0-B. La única evidencia de respuestas de alumnos que no superan el nivel J1 al emplear siempre un enfoque operacional, la encontramos en A15. En particular, para *"1 899 000 + 789 000 = 798 000 + 1899 000"* A15 señala "verdadero porque nos da el mismo resultado…hice cálculo mental, porque yo ya conocía". Si bien esta respuesta es incorrecta (*789 000 ≠ 798 000*), muestra una estrategia que involucra un desarrollo del pensamiento algebraico menos sofisticado que aquel que se evidencia a través del manejo de propiedades aritméticas de la suma.

Antes de indagar en las justificaciones de generalizaciones que refieren a aspectos comunes de varias sentencias (S23), mostramos ejemplos de cómo se trabajan las igualdades del desafío 2 (Figura 2 (a)) con enfoque estructural (nivel J2).

14 + 5 = 5 + 12

A6: Sumé el 5 con el 4 y después sumé el 5 con el 2, que es el 2 del 12 y bueno, si no te da el mismo número es porque no está bien.

127 + 98 = 98 + 127

A1: Da vuelta la secuencia numérica, el 127 está primero en la izquierda, pero en la derecha al final, va a dar el mismo resultado.

12 + 11 =12 + 11

A20: Es verdadera porque son los mismos números que cambiaron de sitio.

450 + 20 = 320 + 450

A18: Me fijé en los números, 20 y 320 no calzaban, quitando el 3 habrían calzado.

Las representaciones empleadas por los alumnos fueron lenguaje verbal y lenguaje numérico-simbólico (V, NS). En lo verbal, se aprecia una identificación de la propiedad conmutativa con los términos "dar la vuelta" y "cambiar de sitio". Además de los ejemplos, al interrogar sobre lo común (S23) respecto “*127+98=98+127*” y “12+11=11+12” aparecieron también “invierten el número”, “son números invertidos”, “números del revés” o “números en distinto orden”. En lo numérico-simbólico, se reconoce el uso de cifras ligadas a su posición numérica. Si los números no “calzan” como señala A18, se marca la cifra que debe suprimirse (“*3*”) para así tener el mismo resultado en ambos miembros de la igualdad. Como los profesores tratan de fomentar el pensamiento relacional en sus alumnos, apenas se usan las pizarras para cómputos. Por lo general, se proporciona una gran variedad de argumentos sofisticados que, en la mayoría de las ocasiones, se traducen en un ahorro computacional. Encontramos tanto justificaciones que se basan en patrones percibidos (J2-A) (p.ej. A6 con la suma de los últimos dígitos o A18 con la eliminación de la cifra de la centena) como en propiedades aritméticas (J2-B) (p.ej. A1 y A20 con la conmutativa).

Si bien casi todas las respuestas se clasifican según el nivel más alto evidenciado (J2), ciertos estudiantes verbalizan que, además de reconocer cierta propiedad, han operado todos los números (J1-A). Este es el caso de A1, quien en varias ocasiones justifica combinando lo operacional y lo estructural. El aspecto operacional se refleja con las expresiones “sumé”, “calcular” y “resultado” mientras que el estructural se revela con “estuve viendo”, “me di cuenta”, “los números estaban descompuestos” y “quitamos dos unidades”. Lo ilustramos.

P1: 6300+5600=2000+4300+5600
A1: Verdadera, estuve viendo y me di cuenta de que los números estaban descompuestos… es que yo sumé los dos primeros números y me dio un resultado y después sumé los últimos tres sumandos y me dio el mismo resultado.

P1: 28+14=26+7+7
A1: Falsa, aquí tuve que calcular, pero se me olvidó que le quitamos 2 unidades al 28, entonces el 28 + 14 es 42 y el 26 + 14 porque 7 + 7 es 14 da 40.

Sobre la propiedad asociativa, también se interroga en S23 alentando a buscar lo común entre “*16+4+5=20+5*” y “*100+94+37=194+37*”. En estos casos, aparece la expresión: “son los mismos números solo que en una están unidos y en otra separados”. Por último, proporcionamos un ejemplo para una sentencia en la que no se cumple la asociativa, por lo que la justificación se enfoca en la comparación de cantidades (J2-B).

P1: 1 400 + 12 000 + 1 000 =12 000 + 1 500
A11: Tengo dos maneras: primera, miras el 1400 y después el 1500 y no hay más de 100, entonces ya sabes que es falso y la segunda, hay otros 1000 aparte.

G6. ¿La sentencia es verdadera o falsa? ¿Cómo harías para que sea verdadera? A través de este grupo de preguntas, se introduce por primera vez la letra como número generalizado. De los 19 estudiantes que asisten a la sesión, todos muestran evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales para S31 o S32 en alguna de sus respuestas. Particularmente, 17 aportan respuestas que alcanzan como mucho nivel J2 y dos estudiantes nivel máximo J3.

Los argumentos menos sofisticados se basan en dependencias contextuales (nivel J0-B). La aceptación de la letra como número generalizado se ve limitada al conjunto finito de las posiciones de las letras de las que se compone el alfabeto, en lugar de aceptar su pertenencia al conjunto infinito de los números naturales. Lo ilustramos con un extracto de una discusión acerca de los significados atribuidos a letras distintas. Esta discusión surge en uno de los grupos pequeños durante el primer bloque de la sesión 3.

P4: 50+a=b+50, ¿por qué es falsa?
A5: Porque la a no es igual que la b.
P4: ¿Y el resto de la sentencia?
A5: Es igual porque 50 es igual a 50.
P4: ¿La a y la b no pueden representar el mismo número?
A5: No porque la b es mayor que la a porque la b viene después de la a.
A1: Por el abecedario la b es mayor que la a
A17: También me fijé en eso porque en el abecedario va la a primero.
A3: Le encuentro toda la razón, la b esta después en el abecedario que la a.
P4: ¿Y si dijéramos que a y b pueden ser iguales?
A17: Pero si son iguales, ¿por qué la b no estaría como la a o la a como la b?

Con estas reflexiones, los estudiantes justificaban la falsedad de la sentencia “*50+a=b+50*”. A17 iba un paso más allá y se planteaba qué haría que la sentencia fuese verdadera concluyendo que debería aparecer “*50+a=a+50*” o “*50+b=b+50*”. Al parecer, la introducción de la letra se habría asumido con naturalidad y el lenguaje numérico-algebraico se habría asimilado. Los estudiantes refieren a las letras involucradas en las sentencias y discuten con ellas como si de números se tratara integrándolas en sus discursos y realizando las comparaciones oportunas. En lo verbal, es habitual que aparezcan los términos “iguales” y “diferentes” dadas las comparaciones que realizan.

Las instrucciones entregadas por los profesores iban encaminadas a determinar la veracidad o falsedad de una sentencia con foco relacional por lo que las evaluaciones numéricas fueron residuales. Si bien sigue habiendo alumnos que evalúan, al menos uno de los argumentos que presentan para una sentencia concreta tiene enfoque estructural.

Por esa razón, señalábamos al inicio que todos los asistentes tienen respuestas que alcanzan nivel J2 siendo el nivel J3 exclusivo de respuestas dadas por A11 y A20. Ilustramos justificaciones dadas a las ocho sentencias que aparecen en la Figura 2 (b).

$6 + a = a + 7$

A16: Falso, porque a sigue igual, mientras que 6 se convirtió en 7, le sumaron una unidad.

A20: Falso, de todas maneras, va a terminar quedando uno más que el otro.

A21: Falso porque en una sale el 6 y en otra el 7, eso los diferencia.

$50 + a = b + 50$

A6: Supongo que a y b tienen valores distintos, eso es necesario para saber que es falso.

A17: Falsa porque los dos lados no son iguales, para ser verdadera debía ser a en vez de b.

A18: Si fuera b con b sería igual, pues aplicamos la comunidad conmutativa.

$a + 23 = 23 + a$

A4: Verdadero, porque todo es igual… 23 es igual a 23 y aunque las "a" están sumándose, igual son iguales.
A14: Verdadero, los sumandos tienen los mismos valores, por eso da la misma respuesta, aunque estén en distinta posición.

$a + b = b + a$

A2: Verdadera, porque a + b = b + a, sería lo mismo porque está invertido. Si o si lo mismo.
A15: Verdadero, porque, aunque no tengamos un número, las letras siguen siendo iguales.

$a + 6 = a + 3 + 3$

A5: Las a no cambiaron y el 6 se descompuso así que el número no cambio nada.
A13: Yo digo que es verdadero, porque ahí está el 6 y 3+3 es 6… es lo mismo, solo que esta descompuesto.

$10 + a = 5 + 6 + a$

A10: Falso porque la a y la a son lo mismo, pero 5 + 6 no da 10.
A12: Para que sea verdadera, que 5 + 6 sea 10 pero como no lo hace pues es falso.

$14 + a = 10 + 4 + b$

A3: Porque aquí el 14 se descompuso a diferencia del lado izquierdo del igual y ahí queda la a y b.
A8: Porque 10 + 4 es 14 pero a y b son letras distintas no es seguro que valen lo mismo.

$10 + a = 5 + 6 + b$

A1: 5 + 6 es 11 y a la izquierda está el 10. Para que sea verdadero cambiaria el 5 + 6 por 5 + 5 o 6 +4 y pondría a.
A11: Yo digo que es falso, aunque tal vez b representa un número más bajo que a. Si a es mayor y b es un numero 1 menor sería cierto.

Para evidenciar que todos los alumnos proporcionan justificaciones que tienen al menos nivel J2, hemos seleccionado una respuesta de cada uno de los 19 alumnos combinando aspectos de S31 y S32 ya que los debates sobre la rectificación de las sentencias se integran con las preguntas sobre su veracidad o falsedad. Conforme avanza la sesión sobre igualdades, los estudiantes van refinando el grado de sofisticación en la elaboración de sus respuestas a través de lenguaje matemático específico que ha sido discutido previamente con sus profesores (V). En particular, A18 no solo reconoce la propiedad conmutativa, sino que refiere a ella específicamente por su nombre. Lo mismo sucede con A3 y A8, quienes, si bien no emplean la expresión "propiedad asociativa", son capaces de basarse en ella y usar el término "descomposición". En general, "orden", "dirección", "invertido" y "posición" son términos habituales para la conmutativa y "unido", "separado", "compuesto" y "descompuesto" para la asociativa.

Sobre el uso de la representación numérico-simbólica y, más particularmente, numérico-algebraica, se mantiene la naturalidad señalada con anterioridad. Los alumnos aceptan que a y b representan cualquier número dentro del conjunto numérico de los naturales. Incluso un alumno, A1, señala que para escribir un número que no se conoce se puede emplear la "*x*" sin que nadie le hubiese mencionado eso durante las sesiones. En las rectificaciones de las sentencias "$50+a=b+50$" y "$14+a=10+4+b$" se señala que para que fuesen ciertas debería aparecer solamente la "a" o solamente la "b" identificando la condición "$a=b$". Asimismo, con respecto a la única sentencia que no contiene números en su expresión ($a+b=b+a$), los alumnos justifican con su *modus operandi* habitual. A15 señala "aunque no tengamos un número las letras siguen siendo iguales".

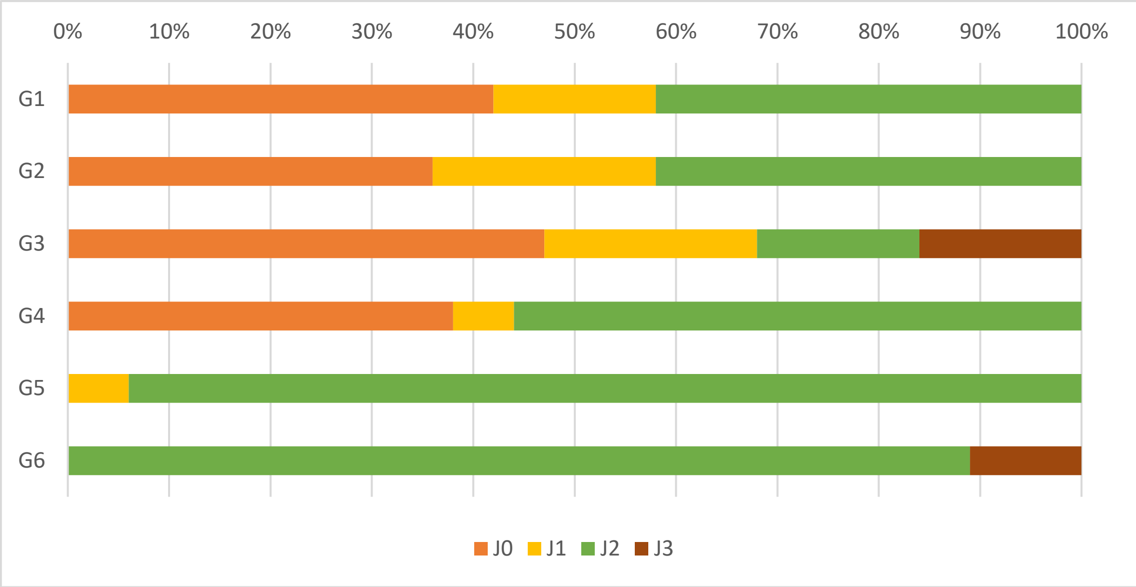
Por último, consideramos el análisis de las justificaciones mostradas por A20 y A11 en sus respuestas sobre las sentencias "$6+a=a+7$" y "$10+a=5+6+b$", respectivamente. Estas justificaciones evidencian el grado de pensamiento algebraico más sofisticado ya que manifiestan una simplificación (nivel J3-B). Estos alumnos han verbalizado que es posible transformar dichas expresiones en otras más sencillas sin impedimento del simbolismo algebraico. Señalan "de todas maneras, va a terminar quedando uno más que el otro" y "si a es mayor y b un número 1 menor sería cierto". En el caso particular de A11, alberga también un razonamiento enfocado en admitir si bajo determinados supuestos la veracidad/falsedad cambia. Razonamientos de este nivel los hemos encontrado exclusivamente con la presencia de letras en su acepción de número generalizado.

Resultados Globales y Discusión

Aunque se han mostrado los resultados del análisis dando una visión general al inicio de cada apartado, conviene detenerse proporcionando y explicando un gráfico que recoja una panorámica de los niveles de la justificación de generalizaciones manifestados a través de los diversos grupos de cuestiones (Figura 4).

Figura 4

Niveles para la Justificación de Generalizaciones manifestados a través de G1, ..., G6



Tal y como recoge la Figura 4, todos los estudiantes que participaron en la Escuela de Verano terminaron mostrando evidencias de justificaciones a ideas matemáticas generales de nivel mínimo J2. Este hecho se consigue gracias a una secuencia de instrucción específicamente diseñada para fomentar el pensamiento relacional en las sesiones 2 y 3 (grupos de cuestiones G4, G5 y G6). Al final, dieciséis alumnos aportaron respuestas de nivel J2 y cinco de nivel J3. Todas las justificaciones de nivel J3 fueron registradas gracias a preguntas del bloque 3 de S1 y S3, respectivamente. Como se señaló en el Marco Metodológico, este bloque tenía como finalidad que el alumnado extendiera lo aprendido a casos más generales por lo que resultaba más probable que las justificaciones más sofisticadas basadas en supuestos previos o simplificaciones se manifestasen en este bloque. Las respuestas de alumnos que sólo justificaron con nivel J0 son notorias a lo largo de S1 e inicios de S2, pero desaparecen por completo conforme se realizan preguntas más refinadas en S2 y S3. También el nivel J1 va adquiriendo cada vez menos protagonismo, lo que indica que el enfoque basado en cómputos directos deja de ser la única forma escogida por los alumnos para justificar generalizaciones. Si bien alumnos que justifican con nivel J2 y J3 pueden acudir, en ocasiones, a números específicos para argumentar, las pruebas que proporcionan reflejan un enfoque relacional marcado, generalmente, por el reconocimiento de propiedades aritméticas.

Respecto a las representaciones empleadas para justificar (V, NS, MM), estas han permitido reflejar cómo los estudiantes comunican sus estrategias. Moss y London McNab (2011), señalaban que trabajar desde la fusión entre lo numérico y lo visual permite a los estudiantes acogerse a nuevas ideas que complementan su aprendizaje. De igual modo, la investigación de Schifter y Russell (2022) ponía de relevancia que las representaciones guiadas por manipulativos facilitan mecanismos para expresar regularidades. En nuestro estudio, las tarjetas par-impar facilitaron que los escolares elaboraran justificaciones más sofisticadas (nivel J2) que las que obtenían exclusivamente por procedimientos operacionales (nivel J1). Asimismo, en lo verbal, modos estructurales de proceder quedaron registrados bajo formas que atendían a la mirada: “vi”, “me fijé”, “miré”, etc. Los niños que capturaron lo general en las igualdades numéricas pudieron comunicar ideas matemáticas cuyo lenguaje era cada vez más refinado. Sin ir más lejos, “orden”, “dirección”, “invertido”, “posición” e incluso “conmutativa” y “sumandos” fueron términos habituales para expresar lo que sucedía con sentencias de la forma “$a+b=b+a$”. Con la asociativa sucedió algo similar y los términos “unido” y “separado” fueron sustituidos por “compuesto” y “descompuesto”. En lo número-simbólico y, más particularmente, en lo numérico-algebraico, la letra se asumió, por lo general, con total naturalidad. Salvo en uno de los grupos donde la aceptación de la letra como número generalizado se vio limitada al asignar un orden coincidente con las posiciones en el alfabeto ($a<b$), esta no ocasionó perturbaciones para la generalización. No obstante, esta tesitura ya estaba prevista pues investigaciones previas confirmaban que cuando se introducen letras por primera vez pueden vincularse al alfabeto (Brizuela et al., 2015).

Por otro lado, las tareas propuestas para cada temática (números pares e impares; igualdades numéricas) se complementaron tal y como reflejan la gran variedad de respuestas mostradas según los distintos subniveles. Con carácter general, S1 obtuvo respuestas que correspondían a los subniveles A y S2 a los subniveles B si bien respuestas con subnivel B son visibles en S1 y respuestas con subnivel A en S2. Por ejemplo, en las sesiones de igualdades numéricas no se buscó ampliar la suma de dos a tres términos, lo que propició que no se dieran argumentos basados en supuestos previos (J3-A). Asimismo, las pruebas basadas en propiedades aritméticas específicas (J2-B) no se dieron en S1 ya que la percepción de patrones se adecuaba mejor a lo evidenciado en las respuestas. Un aspecto común a las tres sesiones se recoge con las respuestas de nivel J0 pues en ambas temáticas la generalización se ve limitada tanto por factores de A y de B.

Con especificidad en la sesión de números pares e impares, compartimos con los estudios de Blanton et al. (2022) que las formas primitivas de justificación (J1) tuvieron sus raíces en la aritmética incluyendo modos de proceder empíricos basados en la manipulación operacional de uno o más términos. Las diferentes estrategias facilitadas por los estudiantes revelaron la riqueza de sus justificaciones, hecho que estaba presente en otros estudios con tareas de índole similar (Isler et al., 2013; Lin, 2016). En particular, Lin (2016) señalaba que el alcance de justificaciones que clasificamos según J2 se debía, en parte, a las oportunidades brindadas por los maestros a sus alumnos. De esta manera, hacer a los alumnos partícipes en el proceso de desarrollo y prueba de conjeturas favorecería un enfoque basado en el uso de pensamiento relacional tal y como reflejan los resultados obtenidos tras la implementación de la Escuela de Verano. Análogamente, Isler et al., (2013) volvían a poner el foco en que, con la instrucción adecuada, los estudiantes de entre 8 y 9 años – un curso académico por debajo de los sujetos participantes - ya eran capaces de desarrollar conjeturas, investigar por qué y generalizar. Si bien el nivel J3 tuvo un alcance minoritario, los vestigios de este razonamiento lógico mostraron que existen escolares capaces de apoyarse en resultados previos ya probados ("par+par=par", "impar+impar=par") para justificar aspectos de carácter más general.

La variedad de respuestas manifestadas al trabajar con igualdades numéricas está en consonancia con estudios previos sobre cómo se enfrentan los niños de primaria al signo igual al proponerles tareas específicas que promueven el pensamiento relacional (Blanton, Stroud, et al., 2019; Molina y Castro, 2021). Todos los escolares aportaron justificaciones de generalizaciones de enfoque estructural en S2-S3, lo que es un buen indicador de las potencialidades de la propuesta. Tal y como concluían Schifter y Russell (2020), las prácticas de discusión guiadas por el profesorado permiten a los estudiantes verbalizar una comprensión más sofisticada de las propiedades de las operaciones de suma y resta que pudo ser analizada con base en las representaciones.

Nuestros resultados ponen de manifiesto que la construcción de argumentos viables para justificar aspectos generales de expresiones aritméticas es posible con alumnado de 9-10 años. Es más, muestran que es posible caracterizar este tipo de interacciones orales en términos del pensamiento algebraico evidenciado. De esta manera, se puede cumplir con los compromisos con las justificaciones matemáticas manifestados desde los *Common Core State Standard for Mathematics* (National Governors Association, 2010) y las directrices curriculares chilenas (MINEDUC, 2013).

Conclusiones

Con este capítulo, se pone fin a esta memoria recopilando los principales aportes de la investigación, el logro de los objetivos de investigación, las limitaciones del estudio y posibles líneas abiertas de continuación. Las siguientes páginas sirven como reflexión acerca de la contribución de este estudio a la comunidad científica de investigación en educación matemática y, particularmente, en pensamiento numérico y algebraico.

Principales Aportes y Logro de los Objetivos de Investigación

Este estudio viene a complementar, con sus resultados, las investigaciones previas en aritmética generalizada que se han ido realizando los últimos quince años (Bastable y Schifter, 2008; Kieran, 2018; Marjanović y Zeljić, 2013; Russell et al., 2011; Schifter et al., 2008; Schifter y Russell, 2020; Schwarzkopf et al., 2018). Nuestra principal aportación es una clasificación novedosa para las justificaciones de generalizaciones centrada en grados de sofisticación e inspirada, fundamentalmente, por los estudios de argumentación en contextos numéricos de Blanton et al. (2022).

En particular, los resultados de este estudio han permitido evidenciar, a través del análisis de respuestas, que todos los estudiantes han aplicado un enfoque estructural en alguna de sus justificaciones sobre generalizaciones al finalizar las sesiones de aritmética generalizada. Clasificando las justificaciones en niveles según el pensamiento algebraico evidenciado (J0, J1, J2 y J3), hemos puesto de manifiesto la importancia de centrar la atención más allá del cálculo generando espacios de debate y promocionando formas estructurales de pensamiento. Analizando asimismo las representaciones que emplean los estudiantes para expresar dichas justificaciones (V, NS, MM), vimos que, en el contexto de la Escuela de Verano, los estudiantes aportan terminología matemática cada vez más refinada alentados por sus maestros. Este hecho se tradujo en referir a las propiedades asociativa y conmutativa de la suma con mayor precisión en lo verbal en el último bloque de S2 y S3. Por su parte, las tarjetas par-impar facilitaron el revelado de patrones y la elaboración de argumentos más sofisticados y la letra fue aceptada con naturalidad integrándose como otro elemento más en el contexto de la veracidad y falsedad de igualdades numéricas de S3.

Sobre aportaciones para la docencia, las tareas descritas en la Metodología y expuestas con más detalle en el Anexo A, podrían ser útiles para promover el desarrollo algebraico en niños de edades similares a los participantes de la Escuela de Verano (9-10 años). Se podría considerar la misma planificación detallada dado que en las discusiones entre profesorado y alumnado surgieron justificaciones de alto nivel que pusieron en evidencia las capacidades argumentativas de los estudiantes. Además, las prácticas matemáticas que se trabajaron con estas tareas de aritméticas generalizada estaban respaldadas por investigaciones previas (ver, por ejemplo, Blanton et al., 2015; Carraher y Schliemann, 2015) y marcos conceptuales específicos (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Con todo, es preciso valorar la medida en que se han cumplido los objetivos de investigación propuestos en la Introducción .

En primer lugar, nos planteábamos analizar las justificaciones de generalizaciones matemáticas manifestadas por estudiantes chilenos de 9-10 años al trabajar con expresiones aritméticas en tareas de aritmética generalizada. Este objetivo general guio la memoria de investigación y facilitó la delimitación de una serie de categorías en las que situamos las respuestas orales de los estudiantes con énfasis en: (a) su grado de sofisticación según el pensamiento algebraico evidenciado; y (b) la representación empleada. Para diferenciar aquellas justificaciones en las que la generalización no era concluyente situamos un nivel base J0. Con los criterios fijados para ese nivel, se pudo determinar qué porcentaje de estudiantes justificaba generalizaciones con nivel mínimo J1 por cuestión, grupo de cuestiones, sesiones y área de la aritmética generalizada. Sin embargo, el objetivo general era más pretencioso puesto que no se solo buscaba “identificar” sino también “analizar”. Por esta razón, antes de valorar su logro se debe evaluar por separado el logro de cada uno de los dos objetivos específicos (OE1 y OE2) a los que el objetivo general da respuesta.

Como primer objetivo específico (OE1), nos propusimos clasificar las justificaciones de generalizaciones en niveles según el pensamiento algebraico que evidencian. Para ello, los niveles se definieron de forma amplia buscando abarcar la totalidad de sesiones de aritmética generalizada. Estos niveles respondieron de forma adecuada permitiendo filtrar las justificaciones sobre números pares e impares y las justificaciones sobre igualdades numéricas. La mayoría de estudiantes mostró haber proporcionado respuestas de nivel medio (J2) al terminar las sesiones, con lo que, consideramos que una visión relacional de la aritmética ha sido alcanzada con ayuda del proceso de instrucción y el entorno de la Escuela de Verano. De hecho, ningún estudiante manifestó haber terminado el experimento de enseñanza aportando solamente respuestas de nivel inicial (J1) siendo las de nivel superior (J3) las que acompañaron a las de nivel medio. En particular, se tomaron numerosas decisiones que condicionaron la forma en que se analizaron los datos contribuyendo así al logro de este objetivo específico. A través de las interpretaciones de la autora se pudo mostrar que el enfoque estructural se revelaba visible en, al menos, una justificación de ideas matemáticas generales dada por cada estudiante.

Como segundo objetivo específico (OE2), nos propusimos analizar las representaciones que emplean los estudiantes para expresar dichas justificaciones. Distinguimos entre lenguaje verbal, lenguaje numérico-simbólico y material manipulativo. Al introducir la letra, señalamos un lenguaje más específico contenido en el numérico-simbólico, el numérico-algebraico. Se recogieron evidencias de distintos usos y mostramos los términos que indicaban un refinamiento a medida que se avanzaba en las sesiones. Al disponer de respuestas fundamentalmente orales y tener que interpretarlas, asumimos el riesgo de la inherente ambigüedad que proporciona este soporte tratando de acotar los términos que daban evidencias de uno u otro enfoque. Sin ir más lejos, consideramos "miré", "vi", "me fijé" para lo estructural y "calculé", "sumé", "operé" para lo operacional siempre atendiendo al contexto en que aparecían. Todo ello contribuyó al logro del objetivo.

En suma, consideramos que hemos cumplido la totalidad de objetivos específicos contribuyendo así a la consecución del objetivo general.

Limitaciones del Estudio y Futuras Líneas de Investigación

Existen multitud de posibles enfoques a la hora de realizar un análisis retrospectivo de los datos recogidos a través de las videograbaciones. Si bien ha querido darse un tratamiento global a todo el bloque de aritmética generalizada, las dos partes diferenciadas de las que se compone (números pares e impares; igualdades) admitirían un tratamiento específico. Es más, podrían realizarse incluso trabajos de fin de máster donde se aborde de manera exclusiva la gestión de igualdades numéricas que empleen la letra en su acepción de número generalizado. Más allá de aspectos del análisis de contenidos matemáticos concretos, esta propuesta de intervención nos incita a interrogarnos acerca del papel del profesor y el papel de la interacción que surge entre los alumnos que participan de los distintos grupos de discusión. Consideramos como una limitación el tiempo disponible para la realización de la memoria y su extensión, lo que no permite explorar todos los aspectos de interés que detallo ni dar mayor profundidad al análisis conjunto de las tres sesiones de aritmética generalizada.

En cuanto a aspectos formales, consideramos de utilidad la réplica de esta investigación con otros participantes y contextos como pueden ser el alumnado de centros públicos españoles, el alumnado con talento matemático o el alumnado que cursa educación infantil. Son necesarios más estudios que pongan de manifiesto evidencias de pensamiento relacional al trabajar con expresiones aritméticas desde un punto de vista algebraico. Particularmente, convendría diseñar experimentos longitudinales que permitiesen obtener conclusiones a largo plazo para valorar el grado en que un enfoque algebraico de la aritmética contribuye al desarrollo de formas más sofisticadas de pensamiento algebraico.

Dado el contexto sanitario motivado por la pandemia de COVID-19, los instrumentos para la recogida de la información se vieron limitados al igual que el proceso específico de instrucción y el acceso a determinado material que debía facilitarse a los estudiantes en sus hogares. Si bien el diseño que exponemos en esta memoria contempló el manejo de diferentes representaciones, sería conveniente añadir otro tipo de material manipulativo con la finalidad de que los estudiantes puedan hacer uso de otros soportes para justificar las generalizaciones que ellos perciben. Este material (p.ej. policubos o cubos multilink) podría facilitarse entre los grupos de escolares para que lo manipulen de forma conjunta y controlada en un ambiente de aula presencial. También, podrían realizarse cuestionarios cerrados en papel. Estos serían facilitados durante las sesiones de aula y permitirían arrojar luz para futuros análisis que involucren una gestión mixta de los datos: cuantitativa y cualitativa. Desde luego, dado que la interacción con ideas generales constituye el corazón del pensamiento matemático (Kieran, 2004), las apreciaciones que se han realizado para la aritmética generalizada son extensibles a otros temas de la matemática escolar. En particular, su campo de aplicación inmediato es: a) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y b) pensamiento funcional.

Referencias

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). Seeing algebra through the eyes of a learner. En T. Dreyfus, F. L. Lester y G. Törner (Eds.), *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights, and Activities* (pp. 48–79). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315545189

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2020). *Mathematics F-10 curriculum*. https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings Attributed to Letters in Functional Contexts by Primary School Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA*, *15*(3), 211–241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Bastable, V. y Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165–184). Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E. y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–32. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Blanton, M. L. (2008). Generalizing Arithmetic: Finding Algebra in Arithmetic. En V. Merecki (Ed.), *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice* (pp. 11–29). Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 27–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M. L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(2), 193–219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen University College.

Blanton, M. L., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I. y Strachota, S. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, *56*(5), 1930–1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings.* NCTM.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation. *Studies in Psicology*, *36*(1), 138–165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Canavaro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante: Revista de Investigação Em Educação Matemática*, *XVI*(2), 81–118.

Carpenter, T. P., Franke, M. . y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic y Algebra in Elementary School*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D.W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *2*, 669–705. https://ci.nii.ac.jp/naid/20001342446/en/

Carraher, David W y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191–218). Taylor y Francis New York.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Drijvers, Paul, Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 5–26). Sense Publisher.

Ferrucci, B. J., College, K. S. y Hampshire, N. (2004). Gateways to Algebra at the Primary Level. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 131–138.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 5–23.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* (5ª). McGraw Hill Education.

Isler, I., Stephens, A. C., Gardiner, A., Knuth, E. J. y Blanton, M. L. (2013). Third-graders' generalizations about even numbers and odd numbers: The impact of an early algebra intervention. *Proceedings of the 35th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, November*, 140–143.

Isoda, M. y Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking: How to Develop It in the Classroom.* World Scientific. https://doi.org/10.1142/8163

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En James J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 579–593). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_29

Kieran, C. (2018a). Conclusions and Looking Ahead. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 427–438). Springer.

Kieran, C. (2018b). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. En *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 79–105). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Kieran, C. y Martínez-Hernández, C. (2022). Structure sense at early ages: The case of equivalence of numerical expressions and equalities. En T. Rojano (Ed.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners: Theoretical and Empirical Insights to Support In-Person and Remote Learning* (pp. 35–66). Routledge.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). Survey of the State of the Art. In *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (pp. 3–32). https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2_2

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, Science and Epistemology. Philosophical Papers* (Vol. 2). Cambridge University Press.

Larbi, E. y Mavis, O. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*, *7*(36), 53–61.

Lin, P. (2016). Enhancing Students ' Mathematical Conjecturing and Justification in Third-Grade Classrooms : The Sum of Even / Odd Numbers. *Journal of Mathematics Education*, *9*(1), 1–15.

Marjanović, M. M. y Zeljić, M. (2013). Algebra as a tool for structuring number systems. *Teaching of Mathematics*, *16*(2), 47–66. https://scindeks.ceon.rs/article.aspx?artid=1451-49661302047M

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65–86). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (2003). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice* (pp. 105–120). Routledge.

Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra Barrier: Being Particular About the General, and Generally Looking Beyond the Particular, in Homage to Mary Boole. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 97–117). https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). First Encounters With Expressing Generality. En J. Mason, A. Graham y S. Johnston-Wilder (Eds.), *Developing Thinking in Algebra* (Vol. 1, 69, pp. 5–24). SAGE Publications.

Mejías, C. y Alsina, À. (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de Educación Primaria. *Números: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *105*(noviembre), 81–102. http://hdl.handle.net/10256/18672

MINEDUC. (2013). *Bases curriculares Matemática. Programa de Estudio. Cuarto año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/Matematica-4-basico/#tabs_0

Ministerio de Educación, C. (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*, 414.

https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial Del Estado*, 26798–26800.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135–156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de La RSME*, *17*(3), 559–579. http://funes.uniandes.edu.co/6498/1/Gac173molina.pdf

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83–97). SEIEM.

Molina, M. y Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics*, *9*(2), 1–15. https://doi.org/10.3390/math9020187

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 33–46. https://doi.org/10.30827/pna.v1i1.6218

Morris, A. (2009). Representations that Enable Children to Engage in Deductive Argument. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades : A K-16 Perspective* (pp. 87–101). Routledge.

Moss, J. y London McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277–301). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

National Governors Association. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* National Governors Association http://www.corestandards.org/

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Ontario Public Service, . (2020). *The Ontario Curriculum Grades 1-8. Mathematics Curriculum Context*.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62. http://hdl.handle.net/10481/3505

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 3–25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Reimann, P. (2013). Design-based research—Designing as research. En R. Luckin, S. Puntambekar, P. Goodyear, B. L. Grabowski, J. Underwood y N. Winters (Eds.), *Handbook of design in educational technology* (pp. 56–64). Routledge.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 65–82. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0062-z

Russell, S. J., Schifter, D. y Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 43–69). Springer.

Russell, S. J., Schifter, D., Kasman, R., Bastable, V. y Higgings, T. (2017). *But Why Does It work ? Mathematical Argument in the elementary classroom*. Heinemann.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. En D.

Stylianou, M. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades : A K-16 Perspective* (pp. 71–86). Routledge.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades. In J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 413–447). Lawrence Erlbaum Associates.

Schifter, D. y Russell, S. J. (2020). A Model for Teaching Mathematical Argument at the Elementary Grades. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *30*(SP1), 15–28. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.15

Schifter, D. y Russell, S. J. (2022). The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM – Mathematics Education*, 1–14. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x

Schoenfeld, A. (2009). The soul of mathematics. En D. Stylianou, M. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades : A K-16 Perspective* (pp. xii–xvi). Routledge.

Schwarzkopf, R., Nührenbörger, M. y Mayer, C. (2018). Algebraic Understanding of Equalities in Primary Classes. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 195–212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_8

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3–31.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 267–306.

Strachota, S. (2020). Generalizing in the context of an early algebra intervention. *Journal for the Study of Education and Development*, *43*(2), 347–394. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1732611

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in Mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315–351). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Sumpter, L. y Löwenhielm, A. (2022). Differences in grade 7 students' understanding of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning*, *00*(00), 1–16. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2058160

Thanheiser, E. y Sugimoto, A. (2022). Justification in the Context of Elementary Grades: Justification to Develop and Provide Access to Mathematical Reasoning. En K. N. Bieda, A. M. Conner, K. W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof* (pp. 35–48). Springer.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. In C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 183–193). NCTM.

Anexos

A. Planificación de las sesiones

Haciendo clic en enlace será redirigido a la planificación detallada de S1, S2 y S3.