Análisis Matemático Avanzado

Juan Francisco Mena Jurado

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **armónica** si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **armónica** si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Ejemplos

Las funciones constantes son funciones armónicas en $\mathbb{C}$, así como la función que cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ le asigna su parte real $Re(z) = x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ también es armónica en $\mathbb{C}$

Proposición (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Son equivalentes :

1. f es derivable en z_0.

Proposición (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Son equivalentes :

1. f es derivable en z_0.
2. f es diferenciable en (x_0, y_0) y se verifica: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Proposición (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Son equivalentes :

1. f es derivable en z_0.
2. f es diferenciable en (x_0, y_0) y se verifica: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

En cuyo caso,
$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Teorema

Si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces *Ref* y *Imf* son armónicas en Ω.

Teorema

Si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces *Ref* y *Imf* son armónicas en Ω.

Teorema

Si u es una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces $f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ es holomorfa en Ω.

Corolario

Si u es una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces u es de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Corolario

Si u es una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces u es de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Corolario

Si u es una función armónica en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, entonces existe F holomorfa en D tal que $ReF = u$. Además dicha función F es única salvo adición de constantes (puramente imaginarias).

Corolario

Si u es una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces u es de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Corolario

Si u es una función armónica en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, entonces existe F holomorfa en D tal que $ReF = u$. Además dicha función F es única salvo adición de constantes (puramente imaginarias).

Corolario

Si u es una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, y z_0 y $R > 0$ son tales que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$, entonces existe f función holomorfa en $D(z_0, R)$ tal que $Ref = u$ en $D(z_0, R)$.

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **función conjugada armónica de** u si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **función conjugada armónica de** u si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Observaciones

1. La conjugada armónica de una función armónica, si existe, es armónica.

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **función conjugada armónica de** u si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Observaciones

1. La conjugada armónica de una función armónica, si existe, es armónica.
2. La conjugada armónica de una función armónica en un dominio, si existe, es única salvo adición de constantes.

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **función conjugada armónica de** u si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Observaciones

1. La conjugada armónica de una función armónica, si existe, es armónica.
2. La conjugada armónica de una función armónica en un dominio, si existe, es única salvo adición de constantes.
3. Si D es un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$, entonces toda función armónica en D tiene conjugada armónica y, por tanto, es la parte real de una función holomorfa definida en D.

Definición

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica. Una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **función conjugada armónica de** u si $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Observaciones

1. La conjugada armónica de una función armónica, si existe, es armónica.
2. La conjugada armónica de una función armónica en un dominio, si existe, es única salvo adición de constantes.
3. Si D es un dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}$, entonces toda función armónica en D tiene conjugada armónica y, por tanto, es la parte real de una función holomorfa definida en D.
4. Existen funciones armónicas que no tienen conjugada armónica.

Teorema

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio tal que toda función armónica en D tiene conjugada armónica. Entonces D es simplemente conexo.

Teorema (Propiedad del Valor Medio)

Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $r \in [0, R[$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Teorema (Propiedad del Valor Medio)

Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $r \in [0, R[$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Teorema (Versión local del Principio del Máximo)

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y tiene máximo local en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces existe $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$ y u es constante en $D(z_0, R)$.

Teorema (Propiedad del Valor Medio)

Sea u una función armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $r \in [0, R[$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Teorema (Versión local del Principio del Máximo)

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y tiene máximo local en algún punto $z_0 \in \Omega$, entonces existe $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$ y u es constante en $D(z_0, R)$.

Ejemplo

La función $u(z) = x$ es armónica en $\mathbb{C}$, se anula en el eje imaginario y no es idénticamente nula.

Teorema (Teorema de identidad)

Si u es una función armónica en un dominio D, que es idénticamente nula en un subconjunto abierto $G \subseteq D$, entonces es idénticamente nula en D.

Teorema (Teorema de identidad)

Si u es una función armónica en un dominio D, que es idénticamente nula en un subconjunto abierto $G \subseteq D$, entonces es idénticamente nula en D.

Corolario (Teorema de identidad)

Si u y v son funciones armónicas en un dominio D, que son idénticas en un subconjunto abierto $G \subseteq D$, entonces son idénticas en D.

Teorema (Teorema de identidad)

Si u es una función armónica en un dominio D, que es idénticamente nula en un subconjunto abierto $G \subseteq D$, entonces es idénticamente nula en D.

Corolario (Teorema de identidad)

Si u y v son funciones armónicas en un dominio D, que son idénticas en un subconjunto abierto $G \subseteq D$, entonces son idénticas en D.

Teorema (Principio del Máximo. Versión 1)

Si u es armónica en un dominio D y tiene máximo local en algún punto $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Teorema (Principio del Máximo. Versión 2)

Si u es armónica en un dominio D y $M \in \mathbb{R}$ es tal que

$$\limsup_{z \to \xi} u(z) \leq M \qquad \forall \xi \in \partial_\infty D,$$

entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$. Además, si se da la igualdad para algún $z_0 \in D$ entonces u es constante en D.

Teorema (Principio del Mínimo)

Sea u armónica en un dominio D.

Versión 1. Si u tiene un mínimo local en algún punto $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Teorema (Principio del Mínimo)

Sea u armónica en un dominio D.

Versión 1. Si u tiene un mínimo local en algún punto $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Versión 2. Si $m \in \mathbb{R}$ es tal que

$$\liminf_{z \to \xi} u(z) \geq m \quad \forall \xi \in \partial_\infty D,$$

entonces $u(z) \geq m$ para todo $z \in D$. Además, si se da la igualdad para algún $z_0 \in D$ entonces u es constante en D.

Corolario

Si u es armónica en un dominio D y continua en $\overline{D}$, entonces

$$\max_{z\in\overline{D}} u(z) = \max_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

$$\min_{z\in\overline{D}} u(z) = \min_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

Corolario

Si u es armónica en un dominio D y continua en $\overline{D}$, entonces

$$\max_{z\in\overline{D}} u(z) = \max_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

$$\min_{z\in\overline{D}} u(z) = \min_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

Corolario

Si u es armónica en un dominio D, continua en $\overline{D}$, y $u \equiv 0$ en $\partial_\infty D$ entonces $u \equiv 0$ en D.

Corolario

Si u es armónica en un dominio D y continua en $\overline{D}$, entonces

$$\max_{z\in\overline{D}} u(z) = \max_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

$$\min_{z\in\overline{D}} u(z) = \min_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

Corolario

Si u es armónica en un dominio D, continua en $\overline{D}$, y $u \equiv 0$ en $\partial_\infty D$ entonces $u \equiv 0$ en D.

Corolario

Si u y v son armónicas en un dominio D, continuas en $\overline{D}$, y $u(\xi) = v(\xi)$ para todo $\xi \in \partial_\infty D$, entonces $u \equiv v$ en D.

EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Dado un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, **el problema de Dirichlet** consiste en encontrar una función armónica u en D tal que u se extienda continuamente a $\overline{D}$ y de manera que los valores que tome en la frontera hayan sido predeterminados de antemano. Cuando el problema de Dirichlet siempre tenga solución, en un dominio D, para cualquier función continua en la frontera del dominio, se dice que dicho dominio es **regular para el problema de Dirichlet** .

Lema

Sea f una función continua en $\overline{D}(z_0, R)$ y holomorfa en $D(z_0, R)$. Entonces:

1. $\int_{C(z_0,R)} f(z)dz = 0$.
2. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

Lema

Sea f una función continua en $\overline{D}(z_0, R)$ y holomorfa en $D(z_0, R)$. Entonces:

1. $\int_{C(z_0,R)} f(z)dz = 0.$
2. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

Lema (Integrales de tipo Cauchy)

Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\phi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua. Entonces la función $h(z) = \int_\gamma \frac{\phi(w)}{w-z}dw$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Fórmula de Poisson

Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua y holomorfa en $D(0,1)$. Entonces para todo $z \in D(0,1)$ se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) f(e^{it})dt.$$

Fórmula de Poisson

Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua y holomorfa en $D(0,1)$. Entonces para todo $z \in D(0,1)$ se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) f(e^{it})dt.$$

En particular si $u(z) = Ref(z)$, para todo $z \in D(0,1)$ se verifica

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) u(e^{it})dt.$$

Núcleo de Poisson

La función $P : D(0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(z,t) = Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2},$$

recibe el nombre de **núcleo de Poisson** .

Núcleo de Poisson

La función $P : D(0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(z,t) = Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2},$$

recibe el nombre de **núcleo de Poisson** . Si $z = re^{i\theta} \in D(0,1)$, entonces

$$P(z,t) = P(re^{i\theta},t) = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

Núcleo de Poisson

La función $P : D(0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(z,t) = Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2},$$

recibe el nombre de **núcleo de Poisson** . Si $z = re^{i\theta} \in D(0,1)$, entonces

$$P(z,t) = P(re^{i\theta},t) = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

Para cada $0 \leq r < 1$, se considera la función $P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$P_r(\alpha) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\alpha}|^2},$$

entonces, en vista de lo anterior, es claro que $P(re^{i\theta},t) = P_r(\theta-t)$.

Teorema (Solución del problema de Dirichlet para el disco unidad)

Sea $\varphi : C(0,1)^* \to \mathbb{R}$ una función continua. La función $\hat{\varphi} : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \varphi(e^{it})dt \qquad z \in D(0,1)$$

y $\hat{\varphi}(z) = \varphi(z)$ si $z \in C(0,1)^*$, es continua en $\overline{D}(0,1)$, armónica en $D(0,1)$, coincide con φ en $C(0,1)^*$ y es la única función que cumple estas condiciones.

Definición

Un dominio D (simplemente conexo) acotado es un dominio de Jordan si ∂D es una curva de Jordan.

Definición

Un dominio D (simplemente conexo) acotado es un dominio de Jordan si ∂D es una curva de Jordan.

Lema

Sean $\Omega, \Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ abiertos, $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ una función armónica y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(\Omega) \subseteq \Omega_0$. Entonces $u \circ f$ es armónica en Ω.

Definición

Un dominio D (simplemente conexo) acotado es un dominio de Jordan si ∂D es una curva de Jordan.

Lema

Sean $\Omega, \Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ abiertos, $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ una función armónica y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(\Omega) \subseteq \Omega_0$. Entonces $u \circ f$ es armónica en Ω.

Corolario

Todo dominio de Jordan en $\mathbb{C}$ es regular para el problema de Dirichlet

Corolario (Solución del problema de Dirichlet para un disco)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Dada $\psi : C(z_0, R)^* \to \mathbb{R}$ una función continua, la función $\hat{\psi} : \overline{D}(z_0, R) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re \left(\frac{Re^{it} + (z - z_0)}{Re^{it} - (z - z_0)} \right) \psi(z_0 + Re^{it}) dt \quad z \in D(z_0, R)$$

y $\hat{\psi}(z) = \psi(z)$ si $z \in C(z_0, R)^*$, es continua en $\overline{D}(z_0, R)$, armónica en $D(z_0, R)$, coincide con ψ en $C(z_0, R)^*$ y es la única función que cumple estas condiciones.

Corolario

El semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ es regular para el problema de Dirichlet. Más precisamente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim_{s\to+\infty} f(s) = \lim_{s\to-\infty} f(s)$ (f es continua en $\partial_\infty(\mathbb{H})$) , entonces la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{H}$ viene dada por

$$u(x) = f(x) \qquad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-s)^2+y^2} f(s)ds \qquad \text{si} \quad y > 0$$

Teorema (Principio del Máximo. Versión 3)

Sea D un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y sea $u : D \to \mathbb{R}$ armónica y mayorada en D . Sea $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ un subconjunto finito de ∂D. Si existe$M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{z \to \xi} u(z) \leq M \qquad \forall \xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\},$$

entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$.

Teorema (Principio del Máximo. Versión 4)

Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ con exterior no vacío y sea $u : D \to \mathbb{R}$ armónica y mayorada en D . Sea $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ un subconjunto finito de $\partial_\infty D$. Si existe$M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{z \to \xi} u(z) \leq M \qquad \forall \xi \in \partial_\infty D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\},$$

entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$.

Teorema (de la singularidad evitable para funciones armónicas)

Supongamos que $u : D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada. Entonces u admite una extensión armónica a $D(z_0, R)$.

Teorema (de la singularidad evitable para funciones armónicas)

Supongamos que $u : D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada. Entonces u admite una extensión armónica a $D(z_0, R)$.

Corolario

$D(0, 1) \setminus \{0\}$ no es regular para el problema de Dirichlet.

Teorema (Caracterización de las funciones armónicas por la propiedad del valor medio)

Sean D un dominio en $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada $z_0 \in D$ existe $r(z_0) > 0$ con $D(z_0, r(z_0)) \subseteq D$ y para todo $r \in [0, r(z_0)[$ se verifica

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta,$$

entonces u es armónica en D.

Teorema (Principio de reflexión de Schwarz)

Sea D un dominio contenido en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$, y sea S un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $x \in S$ existe $r_x > 0$ tal que $D(x, r_x) \cap (\mathbb{H} \cup \mathbb{R}) \subseteq D \cup S$. Definamos $D^* = \{\overline{z} : z \in D\}$. Si f es holomorfa en D y $\lim_{z \to x} f(z) = 0$ para todo $x \in S$, entonces f puede extenderse de forma única a una función holomorfa F en el dominio $E = D \cup S \cup D^*$. Además, tal F satisface $F(z) = \overline{F(\overline{z})}$ para todo z en E.

Teorema de Harnack

Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas en D que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D, entonces la función límite es armónica en D.

Teorema de Harnack

Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas en D que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D, entonces la función límite es armónica en D.

Lema (Desigualdades de Harnack)

Sea u una función armónica positiva en $D(z_0, R)$. Entonces, para $0 < r < R$,

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0) \quad \text{para todo } z \in D(z_0, r).$$

En particular, haciendo $r = \frac{R}{2}$, se verifica

$$\frac{1}{3} u(z_0) \leq u(z) \leq 3u(z_0) \quad \text{para todo } z \in D(z_0, \frac{R}{2}).$$

Corolario (Desigualdades de Harnack)

Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y K un subconjunto compacto de D. Entonces existe una constante $C = C(D, K) \geq 1$ tal que para toda función h armónica y positiva en D se tiene

$$C^{-1} \leq \frac{h(z_1)}{h(z_2)} \leq C \quad \forall z_1, z_2 \in K,$$

lo que equivale a decir

$$\max_{z \in K} h(z) \leq C \min_{z \in K} h(z).$$

Teorema (de convergencia de Harnack)

Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas en un dominio D tal que $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$, entonces o bien $\{u_n\} \to +\infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, o bien $\{u_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función armónica.

Teorema (de convergencia de Harnack)

Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas en un dominio D tal que $u_1 \leq u_2 \leq \dots$, entonces o bien $\{u_n\} \to +\infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, o bien $\{u_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función armónica.

Corolario

Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas positivas en un dominio D, entonces $\Sigma_{k=1}^{n} u_k$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D, bien a $+\infty$, o bien a una función armónica positiva en D, en cuyo caso al límite se le llama suma de la serie asociada a $\{u_n\}$ y se le denota por $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$.

Teorema

Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones armónicas positivas en D. Entonces toda sucesión $\{u_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una sucesión parcial que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D, bien a $+\infty$, bien a 0, bien a una función armónica positiva en D.