



# Orígenes del Cálculo

Historia de las Matemáticas

---

**Javier Pérez González**

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada



# Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I.

De la matemática griega  
a los antecedentes del cálculo.



Historia del Análisis Matemático

## Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas

Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides (c. 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- Trazar una recta que una dos puntos.
- Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- Intersecar dos de las figuras anteriores.

Son famosos los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

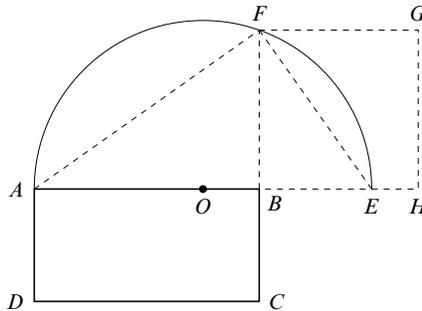


Figura 1. Cuadratura de un rectángulo

Para cuadrar el rectángulo  $ABCD$  de la figura 1 se procede de la forma siguiente:

- 1) Se prolonga el lado  $AB$  y se determina sobre él un punto  $E$  tal que  $BE = BC$ .
- 2) Se traza con centro en el punto medio  $O$  de  $AE$  una semicircunferencia de radio  $OE$ .
- 3) Se traza por  $B$  una perpendicular a  $AE$  y se determina su punto de corte  $F$  con la semicircunferencia.
- 4) El segmento  $FB$  es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo  $ABCD$ . Esto es consecuencia de que la altura  $FB$  de un triángulo rectángulo  $AFE$  es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir,  $FB/AB = BE/FB$ , por lo que  $FB^2 = AB \cdot BE = AB \cdot BC$ .

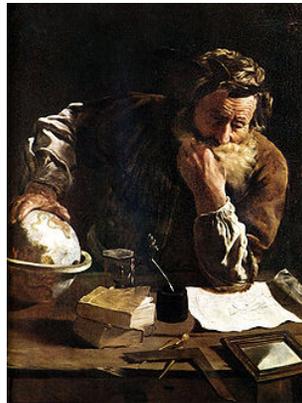
A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo, lo que permite obtener la cuadratura de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos. Los matemáticos griegos

inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de “exhausción”, por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (c. 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (c. 287 - 212 a.C.). El siguiente es un notable ejemplo de su aplicación.

## Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes

### Arquímedes

(Siracusa, Sicilia, 287 a.C.– 212 a.C.)



**Teorema.** El área del segmento parabólico  $PVQ$  es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito  $\triangle PVQ$ .

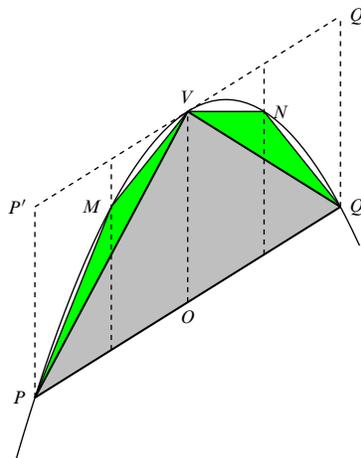


Figura 2. Cuadratura de un segmento de parábola

**Demostración.** Esta demostración aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus, obra que se conoce con el nombre de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una forma muy ingeniosa. Empezaremos explicando la construcción geométrica de la figura 2.

Una *cuerda*  $PQ$  de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda  $PQ$  y el arco de la parábola comprendido entre los puntos  $P$  y  $Q$  se llama un *segmento parabólico*. El *vértice* de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

Se verifica que el vértice de un segmento parabólico  $PVQ$  es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio  $O = \frac{1}{2}(P + Q)$  del segmento  $PQ$ .

El triángulo  $\triangle PVQ$  cuya base es el segmento  $PQ$  y cuyo otro vértice es el vértice  $V$  del segmento parabólico le llamaremos el triángulo inscrito.

En la figura 2 se han representado también los triángulos  $\triangle PMV$  y  $\triangle VNQ$  inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas  $PV$  y  $VQ$ .

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos  $\triangle PMV$  y  $\triangle VNQ$ . Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ), \quad \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP)$$

Por tanto

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ) \tag{1}$$

Llamando  $S$  al área del triángulo  $\triangle PVQ$ , el área de los dos nuevos triángulos es  $\frac{1}{4}S$ . Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas  $PM$ ,  $MV$ ,  $VN$  y  $NQ$  inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a  $\frac{1}{16}S$ . Y puede repetirse indefinidamente.

Nosotros ahora acabaríamos calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series ni falta que le hace, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada *propiedad arquimediana* o *axioma de Arquímedes*. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura*

de la *Parábola* y en *Espirales*. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo. Como sabemos, la propiedad arquimediana establece que:

*Dadas magnitudes cualesquiera  $a > 0$  y  $b > 0$ , siempre es posible, por pequeña que sea  $a$  y grande que sea  $b$ , conseguir que un múltiplo conveniente de  $a$  exceda a  $b$ , es decir  $na > b$  para algún número natural  $n$ .*

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado *principio de convergencia de Eudoxo*, en el que se basa el llamado *método de exhaustión* griego:

*Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.*

Arquímedes razona como sigue. Sea  $K$  el área del segmento parabólico  $PVQ$ .

(I) Supongamos que  $K > \frac{4}{3}S$ ; es decir, que  $K - \frac{4}{3}S > 0$ .

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico  $PVQ$  es la mitad del área del paralelogramo circunscrito  $PP'QQ'$ , la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la sucesión de áreas

$$K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \dots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - \left( S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S \right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}S \tag{2}$$

la cual implica que  $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$ . Por tanto, no puede ser  $K > \frac{4}{3}S$ .

(II) Supongamos que  $K < \frac{4}{3}S$ ; es decir, que  $\frac{4}{3}S - K > 0$ .

Como cada una de las áreas  $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$  es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que  $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$ . Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3} \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \left( S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S \right)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser  $K < \frac{4}{3}S$ .

La única posibilidad es  $K = \frac{4}{3}S$ .

□

## Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas *curvas mecánicas*. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma  $\rho = a\vartheta$ , donde  $a > 0$  es una constante.

**Teorema.** El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.

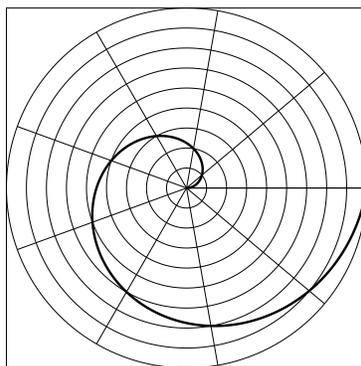


Figura 3. Cuadratura de una espiral

**Demostración.** Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar  $\rho = a\vartheta$  y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a  $2\pi$ , es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es  $2\pi a$ . Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud  $\vartheta = 2\pi/n$ , desde  $\vartheta = 2\pi k/n$  a  $\vartheta = 2\pi(k+1)/n$  para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio  $r$  y amplitud  $\varphi$  radianes es  $\frac{1}{2}r^2\varphi$ , resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es  $\frac{1}{2}(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)$ , y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es  $\frac{1}{2}(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n)$ . Deducimos que el área,  $S$ , de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left( \frac{a2\pi k}{n} \right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 < S < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{a2\pi k}{n} \right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

Arquímedes conocía que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ . Usando este resultado podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right)$$

Pongamos  $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$  que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando  $K$  en la desigualdad anterior y haciendo operaciones sencillas, obtenemos que:

$$K \left( -\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) < S - K < K \left( \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right);$$

y como  $1/n^2 \leq 1/n$ , obtenemos que  $-2K/n < S - K < 2K/n$ . Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que  $S = K$ .  $\square$

## Cálculo de tangentes en la matemática griega

Además de las cuadraturas, otro problema relacionado con curvas como las cónicas (circunferencia, parábolas, elipses, hipérbolas) y algunas pocas más como la cisoide de Diocles y la conoide de Nicomedes, era el trazado de tangentes a las mismas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes estas técnicas no eran de gran utilidad. Arquímedes sabía trazar las tangentes a su espiral y se cree que para ello consideró el problema desde un punto de vista cinemático, calculando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral.

## Las matemáticas en Europa en el siglo XVII

El período de las matemáticas griegas abarca casi 1000 años, desde los pitagóricos en el siglo VI a.C. hasta los últimos representantes de la Escuela de Alejandría en el siglo V de nuestra era. Suele señalarse el asesinato de Hypatia en marzo del 415 por hordas de fanáticos cristianos como el final de esta época. Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio. Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín "las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana". El racionalismo científico es sospechoso de paganismo.

La herencia matemática griega pasó a los árabes de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrolló sobre todo la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas. Las características principales de las matemáticas en el siglo XVII en Europa son las siguientes.

- Asimilación y síntesis de la [tradicón clásica griega](#) y del legado árabe.

- Se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano pero se buscan procedimientos **heurísticos**. Se impone la idea de “primero descubrir y luego demostrar”.
- Progresos decisivos en el **simbolismo algebraico** (Viète, Stevin). Concepto de cantidad abstracta.
- Invención de la **geometría analítica** por Fermat y Descartes.
- Multitud de **nuevas curvas**, muchas de ellas curvas mecánicas, como la cicloide, que llevan consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, máximos y mínimos, rectificaciones.
- Invención de **métodos infinitesimales** para tratar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. **Libre uso del infinito**.
- Inicios del estudio matemático del movimiento. Concepto de **cantidad variable**.
- La Revolución Científica protagonizada por Copérnico, Galileo y Kepler. **Mecanicismo**.
- Invención de los **logaritmos** por Neper. Progresos de la astronomía y de la trigonometría. Desarrollo de la óptica.
- Creación de **instituciones científicas** como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París y comienzo de las publicaciones científicas periódicas.

Es conocido que la carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que durante casi 2000 años, en Europa, *casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico*.

los matemáticos del siglo XVII se distancian de esta tradición, pero no se produce un corte radical sino que, como es usual, se trata de un proceso lento al que contribuyen muchos estudiosos. Con respecto al Cálculo, podemos destacar una primera etapa empírica, que comprende los dos primeros tercios del siglo XVII, en la que se introducen una serie de conceptos como “indivisibles” e “infinitésimos” que permiten desarrollar técnicas para calcular tangentes o realizar cuadraturas. Dichas técnicas carecen de rigor y son usadas de forma heurística, aunque los matemáticos que las usan afirman que podrían ser justificadas al estilo clásico. A este respecto son significativas las siguientes afirmaciones.

J. Kepler en *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615):

*Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.*

P. Fermat en *De acquisitionum localium. . . in quadraticis infinitis parabolis el hiperbolis* (tratado de cuadraturas) (1658):

*Basta hacer esta observación [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] una vez, para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre*

*un artificio bien conocido de todos los geómetras. . . Así alcanzamos la conclusión que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.*

B. Cavalieri en *Geometria Indivisibilibus continuorum* (1635):

*Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.*

J. Wallis en *Arithmetica infinitorum* (1656):

*Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico [la doble reducción al absurdo del método de exhaustión] de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.*

Para hacernos una idea clara de los precedentes que condujeron a la invención del Cálculo, lo mejor es estudiar cómo fueron solucionados algunos de los problemas por los matemáticos de los dos primeros tercios del siglo XVII. Consideraremos problemas de cuadraturas y de cálculo de tangentes.

## La integración antes del Cálculo

### Los indivisibles de Cavalieri

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhaustión que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un “agotamiento” de la figura a determinar.

Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhaustión, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos.

El camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas. Se imaginaron un área como formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas. Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras;

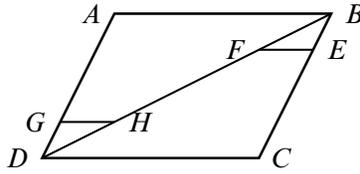
el interés que se tomó en el cálculo de volúmenes de toneles de vino dio como resultado un libro *Nova stereometria doliurum vinariorum* (1615). En él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera. Esto le conducía al resultado de que la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de la esfera, es decir un círculo con el diámetro de la esfera como radio.

Galileo tenía la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero este libro nunca se publicó.

**Bonaventura Cavalieri**  
(Milán, 1598 – Bologna, 1647)



Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileo y profesor en la Universidad de Bologna, publicó en 1635 un tratado *Geometria Indivisibilibus Continuatorum Nova quadam Ratione Promota* en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada *método de los indivisibles*. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los “indivisibilistas” mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que *una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas.*



La forma en que se aplicaba el método o principio de Cavalieri puede ilustrarse como sigue. Para demostrar que el paralelogramo  $ABCD$  tiene área doble que cualquiera de los triángulos  $ABD$  o  $BCD$ , hace notar que cuando  $GD = BE$ , se tiene que  $GH = FE$ . Por tanto los triángulos  $ABD$  y  $BCD$  están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como  $GH$  y  $EF$ , y por tanto sus áreas deben ser iguales.

## Cuadratura de la cicloide por Roberval

**Gilles de Roberval**

(Noël-Saint-Martin, Francia, 1602 – París, 1675)



En 1630, Mersenne, propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide. Esta fue llevada a cabo por Gilles Personne de Roberval en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recuerda que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar.

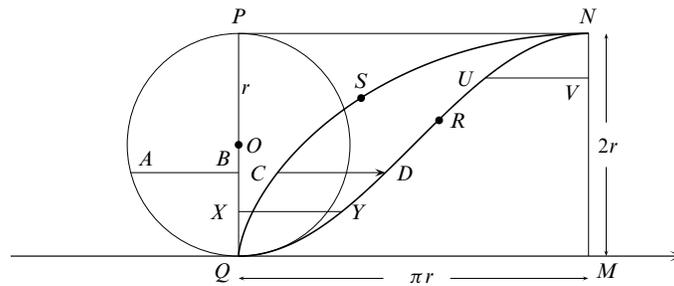


Figura 4. Cuadratura de la cicloide

En la figura 4, sea  $QMNS$  la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio  $r$  centrado en  $O$ . El área del rectángulo  $QMNP$  es el doble del área del círculo. Construimos segmentos de línea infinitesimales horizontales,  $AB$ , con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro  $PQ$  y la circunferencia. Cada punto  $C$  de la cicloide lo sometemos a una traslación horizontal hasta el punto  $D$ , según el correspondiente segmento  $AB = CD$ , y así obtenemos la curva  $QRN$ , llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del círculo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo  $QMNP$ , pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura  $a$  y  $2r - a$  dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales  $XY$  y  $UV$ . Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es  $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$ . Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Los matemáticos no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar al método de los indivisibles. La mayoría consideraba este método sólo como un método heurístico y creían que era aún necesaria una demostración por exhaustión.

## Parábolas e hipérbolas de Fermat

**Pierre de Fermat**

(Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1601 – Castres, Francia, 1665)



La cuadratura de las curvas definidas por  $y = x^n$  donde  $n$  es un número natural o bien un entero negativo  $n \neq -1$ , había sido realizada para  $n = 1, 2, \dots, 9$  por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geoméricamente los casos correspondientes a  $n = 1, 2, 3$ . Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas  $x^n y^m = 1$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

Fermat seguía un método clásico de exhaustión, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas  $yx^n = k$  y manifiesta:

*Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.*

Vamos a hacernos una idea de cómo calculaba Fermat la cuadratura de la hipérbola generalizada  $y = x^{-2}$  para  $x \geq a$ . Usaremos notación y terminología actuales.

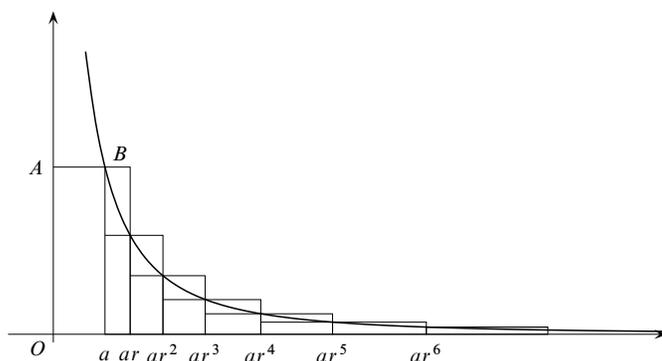


Figura 5. Cuadratura de la hipérbola de Fermat  $y = x^{-2}$

Elegimos un número  $r > 1$  y consideremos los puntos de abscisas  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ . Los rectángulos inscritos (ver figura 5) tienen área

$$(ar - a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \dots = \frac{r-1}{ar^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos viene dada por

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \dots = \frac{r-1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Por tanto, llamando  $S$  al área bajo la curva, tenemos que

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$

Como esta desigualdad es válida para todo  $r > 1$ , concluimos que  $S = \frac{1}{a}$ . Observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo  $OABa$ .

El razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Vamos a reproducir parte de su razonamiento. Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que enuncia como sigue:

*Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes.*

Llamemos  $R_1, R_2, R_3, \dots$  a las áreas de los sucesivos rectángulos y  $S$  a la suma de todas ellas. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

Simplificando, resulta

$$S - R_1 = \frac{1}{a} = OA \cdot AB$$

Dice Fermat:

[. . .] *si ahora añadimos [a ambos miembros de esta igualdad] el rectángulo  $R_1$  que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes. . . No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio].*

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

## La integración aritmética de Wallis

John Wallis

(Ashford, Reino Unido, 1616 – Oxford, 1703)



John Wallis (1616 - 1703) publicó en 1655 un tratado *Arithmetica infinitorum* (“La Aritmética de los infinitos”) en el que aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Para ilustrar el método de Wallis consideremos el problema de calcular el área bajo la curva  $y = x^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) y sobre el segmento  $[0, a]$  (ver figura (6)). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región  $PQR$  formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a  $x^k$ . Por tanto, si dividimos el segmento  $PQ = AB = a$  en  $n$  partes de longitud  $h = a/n$ , donde  $n$  es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \dots + (nh)^k \quad (3)$$

Análogamente, el área del rectángulo  $ABCD$  es

$$a^k + a^k + a^k + \dots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \dots + (nh)^k \quad (4)$$

La razón entre el área de la región  $PQR$  y el rectángulo  $ABCD$  es

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} \quad (5)$$

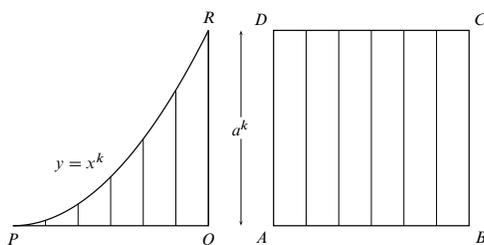


Figura 6. Comparando indivisibles

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión (5) para  $n = \infty$ <sup>1</sup>. Después de estudiar varios casos para valores de  $k = 1, 2, 3$  haciendo, en cada caso, sumas para distintos valores de  $n = 1, 2, 3, 4$ , Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, con tan débil base, acaba afirmando que para  $n = \infty$  y para todo  $k = 1, 2, \dots$ , se verifica que:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{1}{k+1} \quad (6)$$

Naturalmente, de aquí deduce el valor del área de la región  $PQR$ :

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Este resultado ya era conocido anteriormente, pero Wallis no se paraba aquí y extendía la validez de la igualdad (6) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés pues en él se basó Newton para obtener la serie binomial. Lo esencial del mismo puede resumirse, en términos actuales, como sigue.

Definamos el índice,  $\sigma(f)$ , de una función  $f$  mediante la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{f(n) + f(n) + f(n) + \dots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1} \quad (8)$$

suponiendo que dicho límite tenga sentido. Por ejemplo, (6) nos dice que el índice de la función  $f_k(x) = x^k$  es  $\sigma(f_k) = k$  para  $k = 1, 2, \dots$ .

<sup>1</sup>Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del “lazo del amor”,  $\infty$ , con el significado de “infinito”.

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de  $x$  como, por ejemplo  $1, x^3, x^5, x^7, \dots$ , la correspondiente sucesión de índices  $0, 3, 5, 7, \dots$  forman una progresión aritmética. Como  $\sigma(f_k) = k$ , esta observación es trivial, pero le permite dar un atrevido salto adelante, de manera que mediante una audaz interpolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \dots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde se sigue que debe ser  $\sigma((\sqrt[q]{x})^p) = p/q$  para  $p = 1, 2, \dots, q$ . De esta forma obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{0})^p + (\sqrt{1})^p + (\sqrt{2})^p + (\sqrt{3})^p + \dots + (\sqrt{n})^p}{(\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + \dots + (\sqrt{n})^p} = \frac{1}{p/q + 1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, conocido posteriormente como *interpolación de Wallis*, que tuvo importancia en el siglo XVIII. Puede considerarse como un intento de resolver el siguiente problema:

*Dada una sucesión  $P_k$ , definida para valores enteros de  $k$ , encontrar el significado de  $P_\alpha$  cuando  $\alpha$  no es un número entero.*

Además, Wallis deduce que *necesariamente debe ser*  $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$ . Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis, incluso llega a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} \quad (9)$$

no es válida solamente para exponentes  $r$  racionales, sino también para otros como  $r = \sqrt{3}$  pero, naturalmente, no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (9), Wallis intenta calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro  $(1/2, 0)$  y radio  $1/2$ , su valor es, por tanto,  $\pi/8$ . Wallis quería obtener dicho resultado evaluando directamente la integral. No tuvo éxito en este empeño que Newton habría de resolver posteriormente, pero sus resultados le llevaron a obtener la llamada *fórmula de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}$$

## Orígenes y desarrollo del concepto de derivada

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibnitz, en el último tercio de dicho siglo, las formularan en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una frase feliz: *“Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida”*.

## Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la conoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, con frecuencia dichas técnicas no se justifican sino que, simplemente, se comprueba que proporcionan soluciones correctas. Los matemáticos de la época se interesaban por problemas de óptica, por ejemplo, determinar la forma de una lente que hace que todos los rayos luminosos paralelos entre sí o los que parten de un único foco, después de atravesar la lente, converjan en un único punto. Problemas físicos, como la determinación de la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que cae al mismo tiempo hacia ese centro con aceleración constante. Otros problemas consistían en el cálculo de tangentes y de valores máximos o mínimos.

Vamos a considerar algunas de las aportaciones más significativas.

## El método de máximos y mínimos de Fermat

Pierre de Fermat

(Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1601 – Castres, Francia, 1665)



En 1637 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (“Método para la investigación de máximos y mínimos”). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Fermat se expresa como sigue.

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. Sea  $a$  una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de  $a$  en términos de cualquier grado.
3. Se sustituirá a continuación la incógnita original  $a$  por  $a + e$ , y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de  $a$  y  $e$ , en términos de cualquier grado.
4. Se “adigualará” para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de  $e$  o de una de sus potencias.
6. Se dividirán todos los términos por  $e$ , o por alguna potencia superior de  $e$ , de modo que desaparecerá la  $e$ , de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos

miembros.

7. Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la  $e$  o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de  $a$ , que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto  $E$  de un segmento  $AC$  que hace máxima el área del rectángulo  $AE.EC$ .

Pongamos  $AC = b$ .

1. Sea  $a$  uno de los segmentos, el otro será  $b - a$ .
2. El producto del que se debe encontrar el máximo es  $ba - a^2$ .
3. Sea ahora  $a + e$  el primer segmento de  $b$ , el segundo segmento será  $b - a - e$ , y el producto de segmentos:  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ .
4. Se debe "adigular" al precedente:  $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$ .
5. Suprimiendo términos comunes:  $be \sim 2ae + e^2$ .
6. Dividiendo todos los términos por  $e$ :  $b \sim 2a + e$ .
7. Se suprime la  $e$ :  $b = 2a$ .
8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de  $b$ .

El recurso de hacer  $e = 0$  es equivalente a lo indicado en la instrucción 7 de Fermat. Esto era precisamente lo que se hacía al aplicar el método, a pesar de que antes era necesario dividir por  $e$ , lo que resultaba algo contradictorio.

Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. **Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.**

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos  $a = x$ ,  $e = \Delta x$ , y pongamos  $f(x) = x(b - x)$ .

$$1 - 5 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \sim 0.$$

$$6 \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \sim 0.$$

$$7, 8 \quad \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)_{\Delta x=0} = 0$$

Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de  $x$  que hace máximo o mínimo a  $f(x)$  es la solución de resolver la ecuación

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirada de hoy lo que hizo Fermat. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y por eso habla de “cantidad máxima o mínima”, no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat no decía nada acerca de que  $e$  fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Además, la condición 6 no tiene sentido en esta interpretación. Los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

## El método de las tangentes de Fermat

Fermat, determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos.

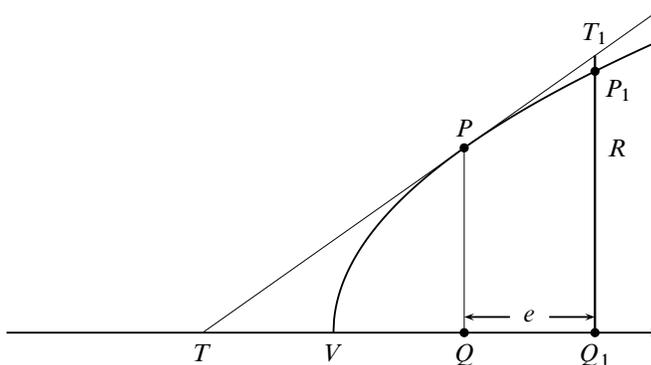


Figura 7. Cálculo de la subtangente

En la figura (7), el segmento  $TQ$  es la subtangente a la parábola en un punto dado  $P$ . El vértice de la parábola es  $V$ . Teniendo en cuenta que los triángulos  $TQP$  y  $TQ_1P_1$  son semejantes, resulta

$$\frac{T_1Q_1}{PQ} = \frac{TQ_1}{TQ} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta ahora la propiedad de la parábola

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1^2}{PQ^2}$$

y que  $P_1Q_1 < T_1Q_1$ , deducimos que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} < \frac{TQ_1^2}{TQ^2} \quad (11)$$

Pongamos ahora  $VQ = a$ , que es la abscisa de la parábola en  $P$ , conocida porque se conoce  $P$ . Hagamos también  $TQ = x$  que es la subtangente que queremos calcular, y  $QQ_1 = e$ . La igualdad (11) se expresa por:

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2} \iff ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$$

Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la *adigualdad*

$$ax^2 + ex^2 \sim ax^2 + 2aex + ae^2$$

Cancelando términos y dividiendo por  $e$  obtenemos

$$x^2 \sim 2ax + ae$$

Eliminando ahora el término que queda en  $e$ , igualando y simplificando por  $x$ , se obtiene que  $x = 2a$ , resultado ya conocido de la Antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Realmente no se entiende bien la razón de por qué Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes y Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, con notación actual, podemos resumir como sigue. Sea  $P = (x, y)$  un punto de una curva  $f(x, y) = 0$  y sea  $P_1 = (x + e, y_1)$  otro punto de la curva próximo a  $P$  como en la figura (8). Llamemos  $b = TQ$ , la subtangente en  $P$ . Teniendo en cuenta que  $PQ = y$ , la igualdad (10) se escribe como

$$T_1Q_1 = \frac{y(b+e)}{b}$$

Como  $T_1Q_1$  es casi igual a  $y_1 = P_1Q_1$ , Fermat escribe

$$f\left(x + e, \frac{y(b+e)}{b}\right) \sim 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos. Es fácil ver que ello conducirá a una expresión para  $b$  dada por

$$b = -\frac{y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}$$

Que, usando que la tangente viene dada por  $y/b$ , podemos escribir, viendo  $y$  como función (implícita) de  $x$ , en la forma familiar

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

La idea de “adigualdad” en Fermat puede interpretarse algo así como “cantidades infinitamente próximas”. De alguna forma Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

Es tentador expresar en términos actuales las ideas de Fermat para calcular tangentes. Esencialmente, dado un punto  $P = (a, f(a))$  en una curva  $y = f(x)$ , se trata de calcular la pendiente de la curva en  $P$ . Sea  $QQ_1$  un incremento de  $TQ$  en una cantidad  $E$ . Ya que los triángulos  $TQP$  y  $PRT_1$  son semejantes, se tiene

$$\frac{PQ}{TQ} = \frac{T_1R}{E}$$

Pero, dice Fermat,  $T_1R$  es casi igual a  $P_1R$ ; por tanto tenemos la *adigualdad*

$$\frac{PQ}{TQ} \sim \frac{P_1Q_1 - QP}{E}$$

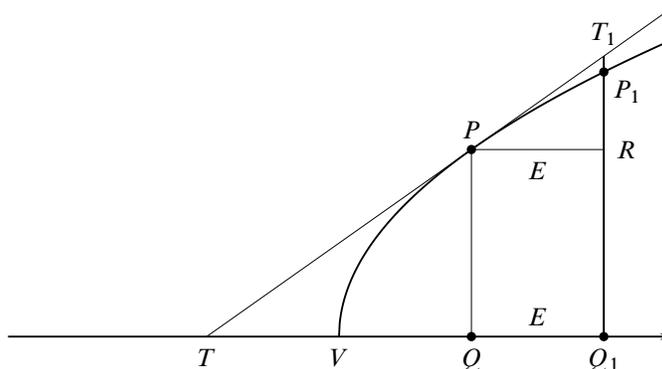


Figura 8. Cálculo de la tangente

Poniendo  $PQ = f(a)$ , la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\frac{f(a)}{TQ} \sim \frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

Ahora, dice Fermat, se cancelan términos iguales en  $f(a + E) - f(a)$ , se divide por  $E$  y finalmente, se ignoran los términos que aún contengan  $E$  (lo que equivale a hacer  $E = 0$ ), y el resultado es la pendiente de la tangente en  $P$ . Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

Naturalmente, a esta interpretación se le pueden hacer las mismas observaciones que hicimos a la interpretación análoga del método para máximos y mínimos.

• **Ejemplo.** Sea  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  y  $a = 2$ . Entonces  $f(2) = 3$ . Pongamos  $c = TQ$  la longitud de la subtangente. Tenemos la *adigualdad*:

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2 + E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E$$

Haciendo  $E = 0$  se obtiene  $3/c = 2$ , por la que la subtangente es  $c = 3/2$  y el valor de la pendiente de la tangente es  $3/c = 2$  que, efectivamente es igual a la derivada de  $f$  en  $x = 2$ .

## El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes

**Roberval (1602–1675) y Torricelli (1608 – 1647)**



En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas. Este método se apoya en dos ideas básicas: la primera es la de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la segunda es la de considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar

mediante la ley del paralelogramo. Ya en la antigüedad, Arquímedes había usado un método análogo para trazar la tangente a su espiral.

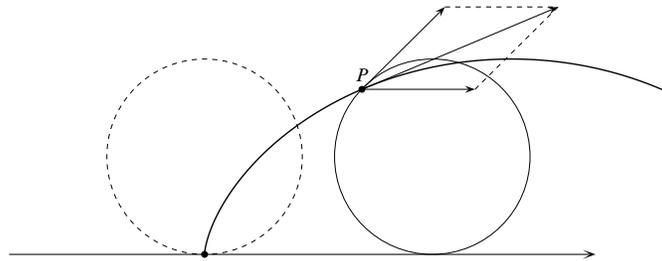


Figura 9. Tangente a la cicloide

Consideremos una cicloide, esto es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto  $P$  se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en  $P$  y un vector horizontal en  $P$ , y ambos vectores tienen igual módulo.

Naturalmente, esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, si bien tenía la virtud de relacionar geometría y dinámica siguiendo las ideas de Galileo.

## El triángulo diferencial de Barrow

**Isaac Barrow**

(Londres, 1630 – id., 1677)



Isaac Barrow (1630 - 1677) también dio un método para calcular tangentes. Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a

la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él Barrow quiso hacer una puesta al día de todos los últimos descubrimientos, principalmente de problemas de tangentes y cuadraturas. Barrow hace un tratamiento detallado de todos estos problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Una de las herramientas a las que saca gran partido es al triángulo característico o triángulo diferencial.

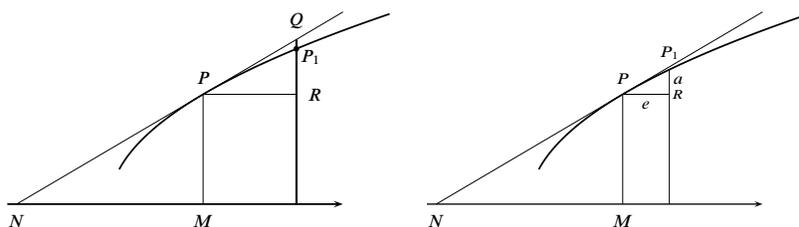


Figura 10. Triángulo diferencial

Partiendo del triángulo  $PRQ$ , que resulta de un incremento  $PR$ , como este triángulo es semejante al  $PNM$ , resulta que la pendiente de la tangente  $PM/MN$  es igual a  $QR/PR$ . Barrow afirma que cuando el arco  $PP_1$  es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento  $PQ$  de la tangente en  $P$ . El triángulo  $PRP_1$  de la figura de la derecha, en el cual  $PP_1$  es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el *triángulo característico o diferencial*. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

En la Lección X de *Lectiones*, Barrow calcula la tangente a una curva, dada por una ecuación polinómica  $f(x, y) = 0$ , en un punto de la misma  $P = (x, y)$  de la forma siguiente. Pongamos  $P_1 = (x + e, y + a)$  un punto de la curva próximo a  $P$  y sustituyamos estas coordenadas en la ecuación  $f(x, y) = 0$ . En palabras de Barrow:

Rechacemos todos los términos en los que no hay  $a$  o  $e$  (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que  $a$  o  $e$  están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto).

Después de estas operaciones se puede calcular el cociente  $a/e$  que es la pendiente de la curva en el punto  $P$ .

• **Ejemplo.** Consideremos la curva  $x^3 + y^3 = r^3$  y sigamos el método de Barrow para calcular su pendiente en un punto  $P = (x, y)$  de la misma. Como el punto  $P_1 = (x + e, y + a)$  está en

la curva se tiene:

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

Esto es

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 = r^3$$

Simplificamos usando que  $x^3 + y^3 = r^3$  y eliminando las potencias de  $a$  y  $e$  de grado mayor que uno, y obtenemos

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

de donde resulta la pendiente:

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Observa que este procedimiento equivale a quedarse con la aproximación lineal de la función en el punto  $P$  y eso es como reemplazar el triángulo  $PRP_1$  en la figura de la izquierda por el triángulo diferencial.

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente  $a/e$ . Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

## El resultado fundamental de Barrow

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Veamos cómo aparece esa relación tal como se expone en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*.

En la figura (11) se han representado dos curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ . El segmento  $AD$  representa el eje de abscisas donde toma valores  $x$ . La cantidad  $g(x)$  representa el valor del área bajo la gráfica de  $f$  comprendida entre el punto  $A$  y  $x$ . Dado un punto de abscisa  $D$ , se trata de probar que la pendiente de la tangente a  $y = g(x)$  en el punto  $F$ , es decir en el punto  $(D, g(D))$ , es igual a  $f(D) = DE$ . La demostración de Barrow es geométrica.

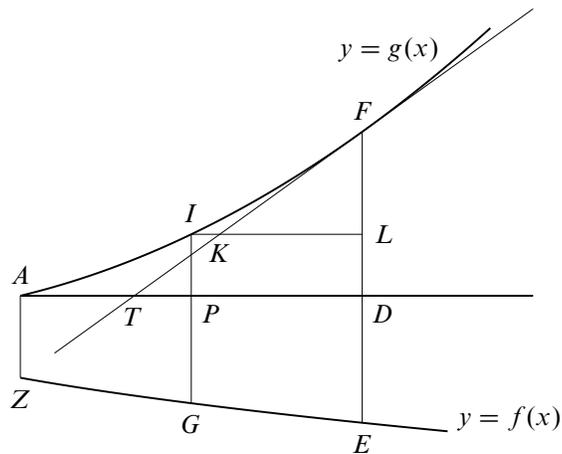


Figura 11. Teorema Fundamental

Tracemos una línea recta  $FT$  por  $F$  que corta en  $T$  a la recta  $AD$  y tal que

$$DF/TD = f(D) = DE$$

Queremos probar que  $FT$  es la tangente a  $y = g(x)$  en el punto  $F$ . Para ello vamos a ver que la distancia horizontal,  $KL$ , de cualquier punto  $L$  de la recta  $EF$  a la recta  $FT$  es menor que la distancia,  $IL$ , de dicho punto  $L$  a la curva  $y = g(x)$ . Esto probará que la recta  $FT$  queda siempre por debajo de  $y = g(x)$ .

Tenemos que:

$$FL/KL = DF/TD = DE$$

Por otra parte:

$$\text{área } ADEZ = FD$$

$$\text{área } APGZ = PI = LD$$

$$\text{área } PDEG = FD - LD = FL$$

Ya que

$$\text{área } PDEG < \text{rectángulo } PD.DE \quad (12)$$

Se sigue que

$$FL < PD.DE \implies DE > FL/PD$$

y por tanto

$$FL/KL > FL/PD \implies KL < PD = IL$$

Deducimos que el punto  $K$  queda debajo de la curva  $y = g(x)$  y por tanto la recta  $FT$  queda a un lado de la curva. Para completar la demostración es necesario repetir el razonamiento tomando puntos a la derecha de  $EF$ . Esto prueba que  $TF$  es tangente a  $y = g(x)$  en  $D$  y su pendiente es  $DE = f(D)$ . En términos actuales, lo que Barrow ha probado es que:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$



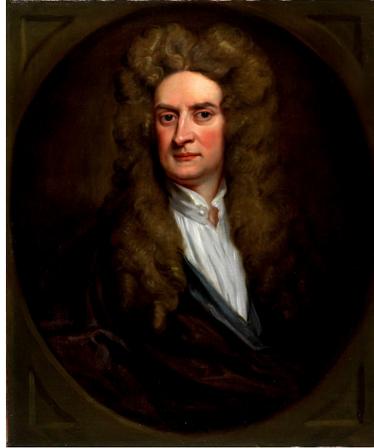
# Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral II.

El nacimiento del Cálculo:  
Newton y Leibniz.



Historia del Análisis Matemático

## Sir Isaac Newton



- Nació el 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Lincolnshire (Reino Unido).
- Murió el 31 de marzo de 1727 en Londres (Reino Unido).

## Gottfried Wilhelm von Leibniz



- Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig (ahora Alemania).
- Murió el 14 de noviembre de 1716 en Hannover, (Alemania).

## Los inventores del Cálculo

En el último tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675) inventaron el Cálculo (de forma independiente):

- Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de [integral y derivada](#), la gran variedad de técnicas diversas y de problemas que se abordaban con métodos particulares.
- Desarrollaron un [simbolismo](#) y unas [reglas formales de "cálculo"](#) que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier significado geométrico, que hacía casi automático, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la [relación inversa](#) fundamental [entre la derivación y la integración](#).

Newton llamó a nuestra derivada una *fluxión* – una razón de cambio o flujo; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó el *cociente diferencial*. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados.

## Newton y el cálculo de fluxiones

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el [teorema del binomio](#) y el [cálculo con las series infinitas](#). A finales de ese mismo año, el [método de fluxiones](#), es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el [método inverso de fluxiones](#) y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años.

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación del Cálculo es la que realiza Newton en el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, escrito hacia 1671 y que se publicó mucho después en 1736. Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama [fluentes](#). Después se introducen las razones de cambio instantáneas de las fluentes, a las que

llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fuentes. Newton representaba a las primeras por letras  $x, y, z, \dots$  y a las segundas por letras punteadas  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$ . Los incrementos de las fuentes  $x, y, z, \dots$ , los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma  $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$ , y los llama *momentos*, donde  $o$  es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

**Problema 1** Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fuentes, determinar la relación de las fluxiones.

**Problema 2** Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fuentes dada la relación entre las fluxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fuentes del tipo  $f(x, y, z, \dots) = 0$ , donde  $f$  para él es una expresión analítica finita o infinita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivación implícita: supuesta conocida la expresión analítica que satisfacen las fuentes  $f(x, y, z, \dots) = 0$ , obtener la expresión analítica  $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$  que satisfacen las fluxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo  $x$  e  $y$  por  $x + \dot{x}o$  e  $y + \dot{y}o$  respectivamente, tenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2) + \\ + a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

Teniendo en cuenta ahora que  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , dividiendo por  $o$  y despreciando los demás términos que contengan a  $o$ , resulta

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{x}\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  en cualquier punto  $(x, y)$  de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre flujos y fluxiones a la resolución de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

Cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e igúalese a cero.

Newton usa el teorema fundamental del cálculo para realizar cuadraturas. Escribe:

Problema 9: Determinar el área de cualquier curva propuesta.

La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fluente y su fluxión (problema 2).

Newton reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

El problema 2, es mucho más difícil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utilizó técnicas de cálculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama *razones primera y última de incrementos evanescentes*. De esa forma se refiere Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero ("razón primera") o se anulan ("razón última"). Un ejemplo ayudará a entender el significado de estas ideas. En la introducción de la citada obra, Newton calcula la fluxión de  $x^n$ . Para ello, considera un incremento  $o$  de forma que  $x$  pasa a  $x + o$ . Entonces  $x^n$  se convierte en

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

Los incrementos de  $x$  y  $x^n$ , a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots$$

están entre sí en la misma razón que

$$1 \quad \text{a} \quad nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \dots$$

Dice Newton "dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a  $nx^{n-1}$ "; por tanto, la fluxión de la cantidad  $x$  es a la fluxión de la cantidad  $x^n$  como 1 :  $nx^{n-1}$ ."

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que su intención era conseguir una fundamentación rigurosa del mismo. La primera exposición, basada en el concepto de cantidad infinitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cálculo estaba “*concisamente explicado más que exactamente demostrado*”.

En *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1671), el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Quizás Newton pretendía de esta forma evitar el uso de “infinitesimales estáticos o geométricos”, pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fuentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fuentes. Puede verse aquí un intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fuentes, no le pareció preciso definirla.

En *Quadrature of Curves* (1676), Newton expresa su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Manifiesta en este sentido que “*errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi*”, esto es, que en matemáticas ni siquiera los errores más pequeños pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Seguidamente, enuncia su teoría de las “*razones primera y última de cantidades evanescentes*”. Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarán casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento.

Por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton tenía su particular idea de “límite”.

Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

La teoría de las razones últimas puede verse como una teoría cinemática de límites. Con esta teoría, Newton pretendía recuperar el rigor de la geometría de la Antigüedad.

[. . .] investigar las razones primera y última de cantidades finitas, nacientes o evanescentes, está en armonía con la geometría de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el método de fluxiones, no es necesario introducir en la geometría cantidades infinitamente pequeñas.

Otros autores opinan que estos tres métodos empleados por Newton responden, más que a fundamentar con rigor su cálculo, a distintos propósitos. Así, la teoría de fluxiones proporciona métodos heurísticos de descubrimiento y algoritmos útiles para el cálculo; la teoría de “razones primera y última” serviría al propósito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los infinitésimos serviría para proporcionar atajos a las pruebas más rigurosas. Newton usó simultáneamente estas tres aproximaciones en la resolución de una gran variedad de problemas.

Newton realizó también contribuciones importantes en la teoría de ecuaciones, donde podemos destacar las “identidades de Newton” para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, y a la teoría de curvas, siendo notable su clasificación de las curvas de tercer grado.

*Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.* Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teoría de fluxiones apareció, de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se hizo en 1687. Los *Principia* consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los *Elementos* de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometría sintética.

Los *Principia* están considerados como la obra científica más importante de todos los tiempos y una hazaña intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton establece los fundamentos de la mecánica y enuncia las tres célebres leyes del movimiento, así como la ley de la gravitación universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vacío y en un medio resistente. Newton deduce matemáticamente las tres leyes que Kepler había obtenido empíricamente. En el libro III, titulado *Sobre el Sistema del Mundo*, Newton desarrolla la mecánica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos

de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesión de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos . . . . .

En los *Principia* el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemáticas fundamentales. A partir de Newton quedará claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diáfano y sereno ofrecido a la exploración racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionará a la Ilustración, en el siglo XVIII, la base científica necesaria para acabar con una concepción conservadora y absolutista del poder político apoyada en dogmáticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiración que gozó Newton en vida queda reflejado en las palabras de Alexander Pope:

*Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:  
God said, Let Newton be – and All was light.*

Y ¿qué pensaba el propio Newton de sí mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al final de su vida.

No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido.

Newton murió en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

## Leibniz y el cálculo de diferencias

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nació en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince años entró en la Universidad de su ciudad natal donde estudió una gran variedad de materias incluyendo derecho, teología, filosofía y matemáticas. Se doctoró a la edad de 21 años en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que él rechazó.

A lo largo de su vida, Leibniz realizó múltiples actividades. Como abogado y diplomático trabajó para el Príncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los

Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como príncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llevó a viajar por gran parte de Europa. Inventó una máquina de calcular, la primera máquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como ingeniero trabajó en prensas hidráulicas, molinos de viento y desarrolló proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montañas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribió la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones genealógicas. Trabajó también como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, algo así como un lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir todo discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz en desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; de hecho, su notación, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fundó la Academia de Ciencias de Berlín en 1700 y fue su primer presidente; también fue uno de los fundadores de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*.

Aunque Leibniz publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que están en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), la historia natural, la geología y la lingüística son también importantes.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior teniendo como guía al matemático y físico Christian Huygens (1629 - 1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton *De Analysi*, circunstancia que se usó para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de “diferencial”, el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  y una sucesión de ordenadas  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  donde los puntos  $(x_i, y_i)$  están todos ellos en la curva y son algo así como los “vértices” de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de  $x$  es llamada la *diferencial* de  $x$  y se representa por  $dx$ , significado análogo tiene  $dy$ . El diferencial  $dx$  es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con  $x$ , de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por  $ds$ . Resulta así el *triángulo característico* de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

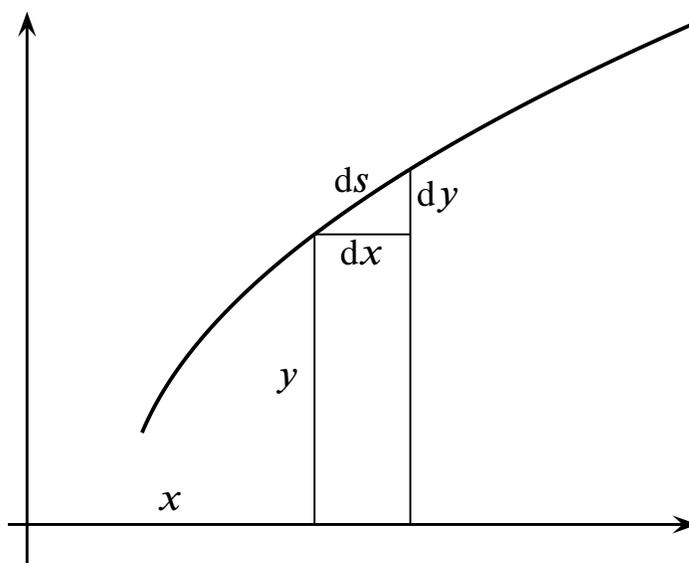


Figura 1. Triángulo característico

Curiosamente, los términos “abscisa”, “ordenada” y “coordenadas”, tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de “diferenciales”, Leibniz siempre hablaba de “diferencias”.

El triángulo característico tiene lados infinitesimales  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$  y se verifica la relación  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . El lado  $ds$  sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto  $(x, y)$ . La pendiente de dicha tangente viene dada por  $\frac{dy}{dx}$ , que

es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó *cociente diferencial*. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Leibniz investigó durante algún tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fácilmente con su notación diferencial:

$$d(xy) = y dx + x dy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1} \sum_{j=1}^n x_j \quad (1)$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que  $x_j$  e  $y_j$  son diferencias de valores consecutivos de las cantidades  $x$  e  $y$  respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas  $x = \sum_{j=1}^n x_j$  e  $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$ , mientras que  $dx = x_{n+1}$  y  $dy = y_{n+1}$  por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma,  $z_{n+1} - z_n$  sería la diferencial de  $z = xy$ . Por tanto, la igualdad 1 es interpretada por Leibniz en la forma  $d(xy) = x dy + y dx$ , lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente  $z = \frac{x}{y}$ . Poniendo  $x = zy$  se tiene que  $dx = y dz + z dy$ , de donde despejando  $dz$ , resulta:

$$dz = \frac{dx - z dy}{y} = \frac{dx - \frac{x}{y} dy}{y} = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

Consideremos ahora una curva como la de la figura 2 con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad.

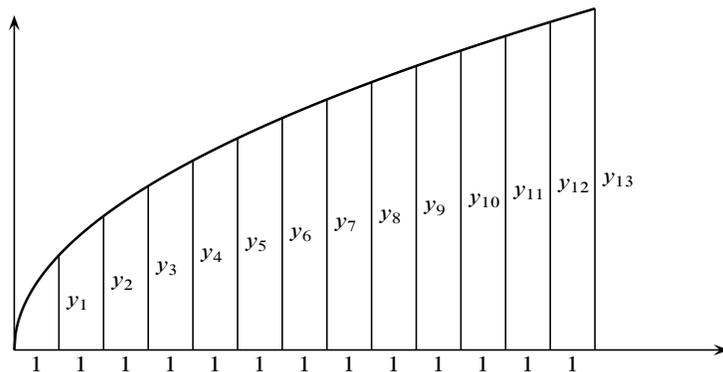


Figura 2. Aproximación de una cuadratura

La suma de las ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, dedujo Leibniz que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. En 1676 Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre cálculo diferencial fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, que fue publicado en *Acta Eruditorum* hace ya más de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz definía el diferencial  $dy$  de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, Leibniz publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

Reconocido hoy día como un genio universal, Leibniz vivió sus últimos años en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y murió el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asistió su secretario.

## El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysisi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposición que hace Newton de esta relación fundamental es como sigue. Supone una curva y llama  $z$  al área bajo la curva hasta el punto de abscisa  $x$  (ver figura 3). Se supone conocida la relación entre  $x$  y  $z$ . Aunque Newton explica su método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general.

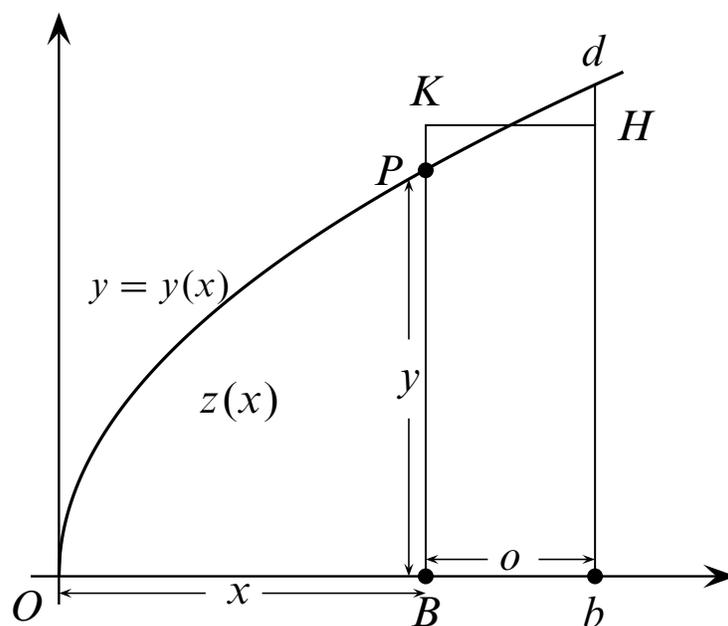


Figura 3.  $z = z(x) = \text{área } OPB$

El ejemplo que Newton considera es

$$z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} \quad (2)$$

Pongamos, por comodidad  $r = \frac{m+n}{n}$ . Newton se imagina que el punto  $P = (x, y)$  se mueve a lo largo de la curva y razona como sigue. Incrementemos la abscisa  $x$  a  $x + o$  donde  $o$  es una cantidad infinitesimal o *momento*. Tomemos  $BK = v$  de forma que  $ov = \text{área } BbHK = \text{área } BbPd$ . El incremento del área viene dado por:

$$ov = z(x + o) - z(x) = \frac{a}{r}(x + o)^r - \frac{a}{r}x^r \quad (3)$$

Desarrollando en potencias

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r(1+o/x)^r = \frac{a}{r}x^r \left( 1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{o^3}{x^3} + \dots \right) \quad (4)$$

De (3) y (4) deducimos, después de dividir por  $o$ , que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}o^2x^{r-3} + \dots$$

Si en esta igualdad suponemos que  $o$  va disminuyendo hasta llegar a ser nada, en cuyo caso  $v$  coincidirá con  $y$ , después de eliminar los términos que contienen  $o$  que desaparecen, resulta que:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}} \quad (5)$$

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en  $P = (x, y)$ . El proceso puede invertirse y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (5) viene dada por (2).

Observemos que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente

$$\frac{z(x+o) - z(x)}{o}$$

se hace igual a la ordenada de la curva cuando  $o$  "se hace nada". En términos actuales, la derivada de  $z(x)$  es la función  $y = y(x)$ . La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas queda así puesta claramente de manifiesto. Para calcular cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, lo que llamamos una primitiva de la función  $y = y(x)$ .

## La invención del *calculus summatorius* por Leibniz

Principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo:

- La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.

- La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitudes infinitesimales y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Se conservan en el archivo Leibniz en Hannover los manuscritos que contienen las investigaciones de Leibniz sobre los problemas de cuadraturas. En dichos documentos, fechados del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675, Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadraturas e introduce los símbolos que actualmente usamos para la integral y la diferencial. Algunos de los resultados de Leibniz en estos manuscritos son casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone  $f(0) = 0$ ):

$$\int_0^a x f'(x) dx = a f(a) - \int_0^a f(x) dx = a \int_0^a f'(x) dx - \int_0^a \left( \int_0^x f'(t) dt \right) dx \quad (6)$$

Por supuesto, Leibniz no la escribe así. La notación que usamos para la derivada se debe a Lagrange y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII. Además, la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por J. Fourier en el primer tercio del siglo XIX. Incluso el término “integral” no se debe a Newton ni a Leibniz. Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es “cálculo de diferencias”, a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea “cálculo de sumas”, a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, “ $\int$ ” tiene forma de una “s” alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, “suma”. Fue Johann Bernoulli quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término “integral” que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (6) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a seguir el camino opuesto al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (6) sin más que observar la figura 4.

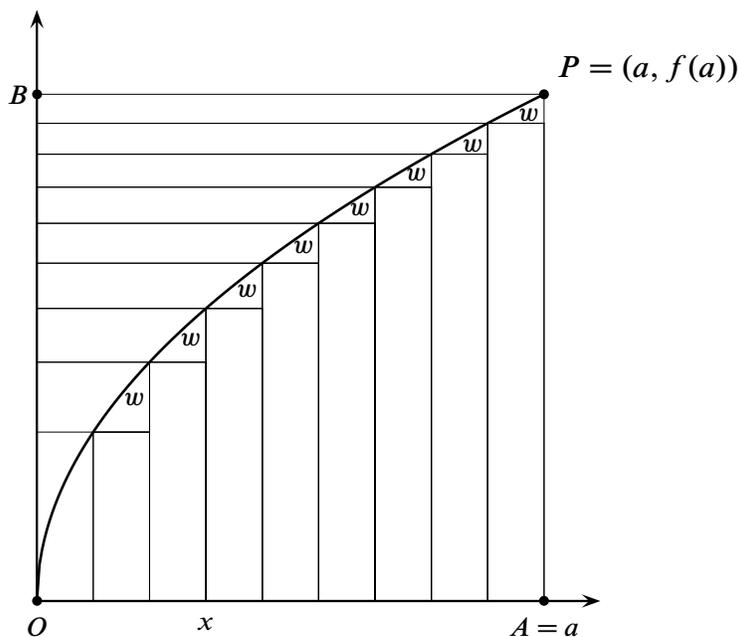


Figura 4. Áreas complementarias

El número  $af(a)$  es el área del rectángulo  $OAPB$ , la integral  $\int_0^a f(x) dx$  es el área de la parte de dicho rectángulo  $OAP$  que queda bajo la curva  $y = f(x)$ . Deducimos de (6) que la integral  $\int_0^a xf(x) dx$  es el área de la parte  $OBP$  de dicho rectángulo que queda por encima de la curva  $y = f(x)$ . Esta área es la suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la figura 4. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente,  $x$ , y como altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por  $w$ . Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de  $y$ . Podemos, pues, interpretar que  $w = dy = f'(x) dx$ . Por su parte, el área de la región  $OAP$  es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas  $y$ . Finalmente, podemos eliminar  $y$  porque para Leibniz el valor de una variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso,  $y$  puede verse como la suma de las  $w$ . Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir  $f(x)$  por  $\int_0^x f'(t) dt$  (o, al estilo de Leibniz,  $y$  por  $\int dy$ ), lo que también hemos hecho en la igualdad (6). La forma exacta en que Leibniz escribió la igualdad 6 es:

$$\text{omn. } \overline{xw} \sqcap \text{ult. } x, \overline{\text{omn. } w}, - \overline{\text{omn. omn. } w} \quad (7)$$

Aquí  $\sqcap$  es el símbolo para la igualdad, “ult.  $x$ ” significa el *ultimus*  $x$ , el último de los  $x$ , es decir,  $OA = a$ . El símbolo “omn.” es la abreviatura de *omnes lineae*, “todas las líneas”, símbolo que había sido usado por Cavalieri y que Leibniz usa con el significado de “una suma”. Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito posterior en algunos días, Leibniz vuelve a escribir la igualdad 7 en la forma:

$$\text{omn. } x\ell \sqcap x \text{ omn. } \ell - \text{omn. omn. } \ell, \quad (8)$$

y observa que *omn.* antepuesto a una magnitud lineal como  $\ell$  da un área; *omn.* antepuesto a un área como  $x\ell$  da un volumen y así sucesivamente.

... Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo “*omn.*”, porque escribe a continuación: “Sería conveniente escribir “ $\int$ ” en lugar de “*omn.*”, de tal manera que  $\int \ell$  represente *omn.* $\ell$ , es decir, la suma de todas las  $\ell$ ”. Así fue como se introdujo el signo “ $\int$ ” [ . . . ] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (8) utilizando el nuevo formalismo:

$$\int x\ell = x \int \ell - \int \int \ell \quad (9)$$

haciendo notar que:

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

y subrayando que estas reglas se aplican a “las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada”, es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.

Una líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo “*d*” para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo “ $\int$ ” y para el que queremos elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir hallar una expresión general para  $\int y$  dada la  $y$ , no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:

Dada  $\ell$  y su relación con  $x$ , hallar  $\int \ell$ . Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que  $\int \ell = ya$  y sea  $\ell = ya/d$ ; entonces de la misma manera que la  $\int$  aumenta las dimensiones,  $d$  las disminuirá. Pero la  $\int$  representa una suma y  $d$  una diferencia, y de la  $y$  dada podemos encontrar siempre  $y/d$  o  $\ell$ , es decir, la diferencia de las  $y$ .

Así se introduce el símbolo “*d*” (o más bien el símbolo “ $1/d$ ”). [ . . . ] De hecho, pronto se da cuenta de que ésta es una desventaja notacional que no viene compensada por

la ventaja de la interpretación dimensional de la  $\int$  y de  $d$ , y pasa a escribir “ $d(ya)$ ” en vez de “ $ya/d$ ”, y de ahí en adelante son interpretadas la  $d$  y la  $\int$  como símbolos adimensionales [...].

En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la  $\int$  y la  $d$ .

Esta larga cita, extraída del trabajo de H.J.M. Bos *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana*, nos da una idea de cómo llegó Leibniz a la invención del cálculo. No fueron los caminos del razonamiento lógico deductivo los seguidos por Leibniz sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización... Los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación. Pese a que los conceptos que maneja Leibniz son oscuros e imprecisos fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico.

## Newton y las series infinitas

Newton había leído la obra de Wallis *Arithmetica Infinitorum*, y siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales, y había sido muy usado por Pascal para resolver una gran variedad de problemas.

Newton, en su intento de calcular la cuadratura del círculo, es decir, de calcular la integral  $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$ , consideró dicha cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$  conocidas para exponentes naturales  $n \in \mathbb{N}$ . Newton tuvo la ocurrencia de sustituir el límite superior de integración por un valor genérico  $x$ . De esta forma obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral; usamos, claro está, la notación actual).

$$\begin{aligned}\int_0^x (1-t^2) dt &= x - \frac{1}{3}x^3 \\ \int_0^x (1-t^2)^2 dt &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \\ \int_0^x (1-t^2)^3 dt &= x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \\ \int_0^x (1-t^2)^4 dt &= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es  $x$ , que  $x$  aumenta en potencias impares, que los signos algebraicos se van alternando, y que los segundos términos  $\frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3, \frac{4}{3}x^3$  estaban en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de  $\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt$  deberían ser

$$x - \frac{1}{2}x^3$$

De la misma manera, procediendo por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^7 - \frac{1}{128}x^9 - \dots$$

Representando para  $n = 0, 1, 2, \dots$  por  $Q_n(x)$  el polinomio  $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ , se tiene que

$$Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

Haciendo ahora en  $Q_n(x)$ ,  $n = 1/2$ , se obtiene

$$Q_{1/2}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^7 - \frac{1}{128}x^9 - \dots$$

Lo que llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt = Q_{1/2}(x)$$

Donde  $Q_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$  es una suma con infinitos términos. A partir de aquí,

Newton dedujo el desarrollo de  $(1-x^2)^{1/2}$  por derivación.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \dots$$

Newton nunca publicó su teorema binomial, ni dio una demostración general del mismo. La primera vez que apareció en un texto impreso fue en 1685 en un libro de Wallis (que reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of Algebra*. Newton mismo, en una carta a Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, conocida como la *Epistola Prior* (junio de 1676), expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, con estas oscuras palabras:

Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}$$

donde  $P + PQ$  representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo  $P$  el primer término de esa cantidad,  $Q$  los términos restantes divididos por el primero, y  $\frac{m}{n}$  el índice numérico de las potencias de  $P + PQ$ . . . . Por último  $A = P^{m/n}$ ,  $B = \frac{m}{n}AQ$ ,  $C = \frac{m-n}{2n}BQ$  y así sucesivamente.

Newton era consciente de que su forma de razonar por analogía no era rigurosa por lo que comprobó su resultado de varias formas. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos, comprobando que las soluciones obtenidas eran siempre correctas, redescubrió la serie de Mercator para el logaritmo y obtuvo las series del arcoseno y del seno.

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711, aunque circulaba en forma manuscrita entre los colegas y conocidos de Newton, propuso un método para cuadrar una curva consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación  $y = ax^{m/n}$  es  $\frac{na}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ .
2. Si la ecuación  $y = y(x)$  de la curva está dada por un número finito de términos  $y_1 + y_2 + y_3 + \dots$ , el área bajo la curva  $y$  es igual a la suma de las áreas de todos los términos  $y_1, y_2, y_3, \dots$ .
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo  $\sum a_k x^{r_k}$ , donde  $r_k$  es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Debe notarse que Newton supuso que cualquier cantidad analíticamente expresada podía desarrollarse en una serie de la forma  $\sum a_k x^{r_k}$ , donde  $r_k$  es un número racional, serie que puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Veamos un ejemplo de esta forma de proceder. Se trata de calcular  $\int_0^{1/4} \sqrt{x-x^2} dx$ . Newton procede como sigue

$$(x - x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1 - x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \dots$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2} dx &= \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} - \frac{1}{28}x^{7/2} - \frac{1}{72}x^{9/2} - \frac{5}{704}x^{11/2} - \dots \right]_0^{1/4} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \dots \end{aligned} \quad (10)$$

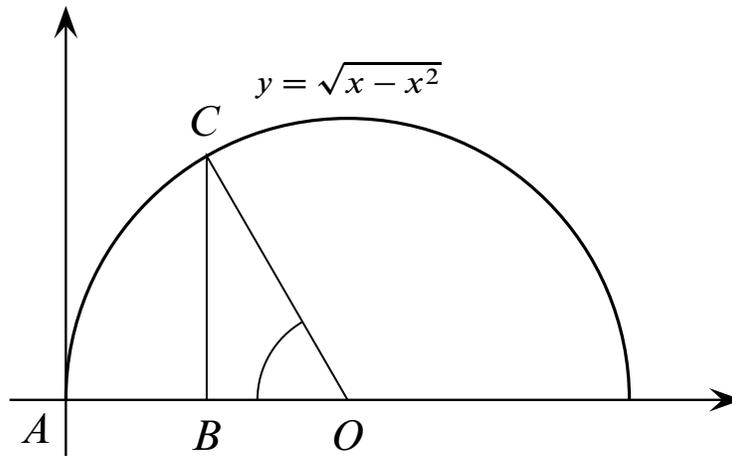


Figura 5. Cuadratura  $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx$

En la figura 5 se ha representado el semicírculo de centro  $(1/2, 0)$  y radio  $1/2$ . El sector circular  $COA$  tiene amplitud  $\pi/3$  por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir,  $\pi/24$ . Como  $BC = \sqrt{3}/4$ , el área del triángulo  $BOC$  es  $\sqrt{3}/32$ . Por otra parte, la integral calculada en (10) es el área de la región  $ACB$ . Por tanto:

$$\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2} dx + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}$$

Deducimos que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \dots \right)$$

Y de esta forma, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

La confianza de Newton en los procesos infinitos queda reflejada en las siguientes palabras de la citada obra *De analysis*:

Todo lo que el análisis común [es decir, el álgebra] realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas, de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento es éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de esas ecuaciones como

para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos. . . . Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geoméricamente las áreas, longitudes, etc., de curvas.

Es decir, Newton no sólo descubrió el teorema binomial sino que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas.

## Desarrollo del cálculo diferencial

Aunque las publicaciones de Leibniz eran breves y difíciles de leer, su cálculo, más sencillo de entender que el de Newton y provisto de una excelente notación, triunfó pronto en el continente europeo logrando grandes éxitos, mientras que en Inglaterra la fidelidad a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana condujo a un cierto aislamiento, agravado por sentimientos nacionales y la disputa sobre la prioridad, y no consiguió éxitos comparables a los del continente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernouilli, matemáticos y profesores de la universidad de Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo de Leibniz era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgar dicha herramienta era preciso un buen libro de texto que explicara con detalle los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció bien pronto, en 1696, y su autor fue el matemático y noble francés Guillaume François, marqués de L'Hôpital. El título del libro era *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Hoy sabemos que los resultados originales que aparecen en dicho libro son debidos no a L'Hôpital sino a su profesor Johann Bernouilli.

En su libro, L'Hôpital desarrollaba el cálculo diferencial tal como había sido concebido por Leibniz, es decir, usando cantidades infinitesimales para las que se establecían ciertas reglas de cálculo. La definición de diferencial es como sigue: "*La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad*". Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla: "*Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra*".

Los escritos de los Bernouilli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo leibniziano y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana.

Resumimos muy esquemáticamente los puntos clave en el desarrollo del cálculo diferencial.

- El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor de las llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.
- El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (1707 - 1783) que, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentiales* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768), Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por influencia de Euler, en un cálculo de funciones.
- La propuesta de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología “función derivada”, así como la notación  $f'(x)$  para representar la derivada de una función  $f$ , fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada simplemente como una función.
- Los problemas planteados por las series de Fourier. Dichas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante, y nacen oficialmente en el trabajo de Joseph Fourier (1768 - 1830) *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Tales series plantean problemas relacionados con las ideas centrales del análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.
- El proceso de “algebraización del análisis” que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX y que culmina con la fundamentación del análisis sobre el concepto de límite (Bolzano, Cauchy, Weierstrass) y la teoría de los números reales (Dedekind, Cantor).