

ANÁLISIS LINEAL DE LÁMINAS DE REVOLUCIÓN: teoría  
de la membrana y flexión

Rafael Gallego Sevilla  
Esther Puertas García

# Índice general

<b>1. Introducción al análisis de láminas</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. La Teoría de Láminas . . . . .	3
1.3. Geometría de láminas de revolución . . . . .	4
1.3.1. Elemento diferencial de superficie . . . . .	6
1.4. Elemento diferencial: el “prisma” diferencial . . . . .	7
1.5. Esfuerzos unitarios en el prisma diferencial . . . . .	7
1.5.1. Esfuerzos de membrana . . . . .	8
1.5.2. Esfuerzos de flexión y torsión . . . . .	9
1.5.3. Esfuerzos unitarios para el caso de láminas de gran radio de curvatura . . . . .	10
<b>2. Estado de membrana: ecuaciones de equilibrio</b>	<b>13</b>
2.1. Ecuaciones de equilibrio del estado de membrana . . . . .	14
2.1.1. Obtención de las ecuaciones de equilibrio a partir de diagramas . . . . .	15
2.1.2. *Obtención de las ecuaciones de equilibrio analíticamente . . . . .	16
2.2. Particularización para el caso de carga axilsimétrica . . . . .	18
2.2.1. Resolución de las ecuaciones de equilibrio para el estado de membrana en una lámina de revolución bajo carga axilsimétrica . . . . .	19
2.2.2. Método alternativo elemental para el cálculo de $N_\theta(\theta)$ . . . . .	20
2.3. Particularización para láminas esféricas . . . . .	23
2.3.1. Caso de carga general. . . . .	23
2.3.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	23
2.3.3. Esfuerzos de membrana para un depósito esférico sometido a una presión interna constante $p_g$ . . . . .	24
2.3.4. Esfuerzos de membrana para una cúpula esférica de espesor constante bajo peso propio . . . . .	24
2.4. Particularización para láminas cilíndricas . . . . .	25
2.4.1. Caso de carga general. . . . .	25
2.4.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	26
2.5. Particularización para láminas cónicas . . . . .	26
2.5.1. Caso de carga general . . . . .	27
2.5.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	27
<b>3. Desplazamientos y deformaciones en láminas de revolución</b>	<b>29</b>
3.1. Hipótesis cinemáticas . . . . .	30
3.2. Caso axilsimétrico: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	30
3.2.1. Caso axilsimétrico: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	31
3.2.2. Caso axilsimétrico: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	33
3.3. * Caso general: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	36

3.3.1.	Caso general: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina	36
3.3.2.	Caso general: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	37
3.3.3.	Simplificación de las ecuaciones generales de desplazamientos y deformaciones para el caso axilsimétrico . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Resolución completa del estado de membrana para el caso axilsimétrico</b>	<b>41</b>
4.1.	Introducción . . . . .	41
4.2.	Relaciones entre esfuerzos unitarios de membrana y desplazamientos para una lámina de gran radio de curvatura bajo carga axilsimétrica. . . . .	43
4.3.	Cálculo de los desplazamientos conocidos los esfuerzos . . . . .	44
4.4.	Particularización para láminas de generatriz sencilla . . . . .	45
4.4.1.	Particularización para láminas esféricas . . . . .	45
4.4.2.	Particularización para láminas cilíndricas . . . . .	47
4.4.3.	Particularización para láminas cónicas . . . . .	48
<b>5.</b>	<b>Flexión en láminas cilíndricas circulares bajo carga axilsimétrica</b>	<b>49</b>
5.1.	Esfuerzos en el prisma diferencial . . . . .	50
5.2.	Ecuaciones de equilibrio . . . . .	50
5.3.	Particularización del resto de ecuaciones para láminas cilíndricas bajo carga axilsimétrica . . . . .	54
5.4.	Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos en la superficie media	55
5.5.	Cálculo de las tensiones en un punto cualquiera del espesor conocidos los esfuerzos	57
5.6.	Solución de las ecuaciones por superposición de estados . . . . .	58
5.6.1.	Solución de la ecuación diferencial homogénea de la flecha . . . . .	59
5.6.2.	Tabla resumen de las 4 soluciones de la ecuación homogénea . . . . .	62
5.7.	Problemas útiles de flexión: cilindros de “gran longitud” . . . . .	63
5.7.1.	Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 1$ y $\omega_\varphi(0) = 0$ . . . . .	63
5.7.2.	Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 0$ y giro $\omega_\varphi(0) = 1$ . . . . .	64
5.7.3.	Cilindro de gran longitud con momento $Q_s(0) = 1$ y cortante $M_s(0) = 0$ . . . . .	65
5.7.4.	Cilindro de gran longitud con momento $Q_s(0) = 0$ y cortante $M_s(0) = 1$ . . . . .	66
5.8.	Tabla resumen de soluciones para un cilindro de gran longitud . . . . .	67
5.9.	Matriz de rigidez y de flexibilidad en el extremo de un cilindro de gran longitud . . . . .	68
5.9.1.	Relación de flexibilidad . . . . .	68
5.9.2.	Relación de rigidez . . . . .	69
5.10.	Depósito cilíndrico a presión con extremos planos infinitamente rígidos y libertad de movimientos longitudinales . . . . .	70
<b>A.</b>	<b>Variación diferencial de los vectores unitarios según las coordenadas curvilíneas</b>	<b>75</b>
<b>B.</b>	<b>Cálculo de los radios de curvatura para una lámina de revolución cualquiera</b>	<b>79</b>
B.1.	Ejemplo . . . . .	80
<b>C.</b>	<b>FORMULARIO de ANÁLISIS DE LÁMINAS</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

1.1.	Obras históricas singulares que utilizan el elemento lámina clásico . . . . .	2
1.2.	Obras modernas singulares que utilizan el elemento lámina . . . . .	2
1.3.	Richard Bradshaw, Centro comercial de Kaneohe, Hawaii, EE.UU. (11957) . . . . .	4
1.4.	Diagrama de Tonti para láminas . . . . .	5
1.5.	Superficie de revolución . . . . .	5
1.6.	Elemento diferencial de superficie . . . . .	6
1.7.	Ángulo formado por los lados meridianos del elemento diferencial de superficie . . . . .	6
1.8.	Elemento diferencial en una lámina de revolución . . . . .	7
1.9.	Esfuerzos de membrana sobre un prisma diferencial de lámina . . . . .	8
1.10.	Resultante según $\mathbf{i}_\varphi$ en la cara $\varphi$ -frontal . . . . .	9
1.11.	Esfuerzos de flexión y torsión sobre un prisma diferencial de lámina . . . . .	10
2.1.	Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones de equilibrio de membrana . . . . .	14
2.2.	Equilibrio de los esfuerzos de membrana: vista en el plano tangente $\varphi - \theta$ . . . . .	15
2.3.	Equilibrio de los esfuerzos de membrana: vistas en los planos $\varphi - z$ y $\theta - z$ . . . . .	16
2.4.	Componente vertical $p_V$ de las cargas sobre la lámina . . . . .	19
2.5.	Equilibrio global sobre una lámina para el cálculo de $\mathcal{N}_\theta(\theta)$ . . . . .	20
2.6.	Cálculo de $W(\theta)$ por integración de las fuerzas sobre la lámina . . . . .	21
2.7.	Equilibrio global para diferentes acciones: (a) peso propio, (b) acción de un líquido, (c) acción de un gas . . . . .	22
2.8.	Equilibrio en la sección de interés para un recipiente esférico sometido a presión interna constante . . . . .	24
2.9.	Proyección del peso propio en los ejes $\theta$ y $z$ . . . . .	25
2.10.	Lámina cilíndrica . . . . .	26
2.11.	Lámina cónica . . . . .	26
3.1.	Movimientos de un punto cualquier $P$ y el punto $O$ bajo el mismo en la superficie media de la lámina . . . . .	31
3.2.	Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones de compatibilidad a nivel de punto. . . . .	32
3.3.	Elongación de un segmento diferencial $d\bar{l}_\theta$ (plano $\theta - z$ ) . . . . .	32
3.4.	Elongación de un segmento diferencial $d\bar{l}_\varphi$ (plano del paralelo) . . . . .	33
3.5.	Diagrama de Tonti para láminas: desplazamientos en la lámina, conocidos los de la superficie media. . . . .	34
3.6.	Giro $\omega_\varphi$ de la superficie media en función de los desplazamientos de la misma y sus derivadas . . . . .	35
4.1.	Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones constitutivas y relación esfuerzos-tensiones. . . . .	42
4.2.	Deformada de una cúpula semiesférica sometida a peso propio . . . . .	47
4.3.	Deformada corregida de una cúpula semiesférica sometida a peso propio . . . . .	47
5.1.	Esfuerzos unitarios en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica . . . . .	51

5.2. Ecuación de equilibrio $\sum F_s = 0$ de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica . . . . .	51
5.3. Ecuación de equilibrio $\sum F_z = 0$ de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica . . . . .	52
5.4. Ecuación de equilibrio $\sum M_\varphi = 0$ de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica . . . . .	53
5.5. Funciones $w_i^f(s)$ ( $L = 10,0$ , $\beta = 1,0$ , $l_F = 2\pi$ ) . . . . .	60
5.6. Depósito cilíndrico de gran longitud con fuerzas aplicadas en un extremo . . . . .	68
5.7. Depósito cilíndrico a presión con extremos planos infinitamente rígidos . . . . .	70
5.8. Equilibrio de membrana en el extremo $s = 0$ en el depósito cilíndrico a presión . . . . .	71
5.9. Deformada de membrana del depósito cilíndrico a presión interna . . . . .	72
5.10. Deformación completa del depósito cilíndrico a presión interna . . . . .	73
5.11. Comparación de diversas variables para la solución de membrana y la completa (Valores utilizados: $p = 1 \text{ kN/m}^2$ , $E = 1 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$ , $h = 0,1 \text{ m}$ , $R = 10,0 \text{ m}$ , $\nu = 0,25$ . Para estos valores $\beta = 1,295 \text{ m}^{-1}$ , y por tanto $l_F = 2\pi/\beta = 4,852 \text{ m}$ ). . . . .	74
A.1. Vectores unitarios en las coordenadas curvilíneas en un punto cualquiera de la lámina . . . . .	76
B.1. Generatriz de una lámina de revolución en coordenadas paramétricas . . . . .	80

# Capítulo 1

## Introducción al análisis de láminas

### Índice

---

<b>1.1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1.2. La Teoría de Láminas</b>	<b>3</b>
<b>1.3. Geometría de láminas de revolución</b>	<b>4</b>
1.3.1. Elemento diferencial de superficie	6
<b>1.4. Elemento diferencial: el “prisma” diferencial</b>	<b>7</b>
<b>1.5. Esfuerzos unitarios en el prisma diferencial</b>	<b>7</b>
1.5.1. Esfuerzos de membrana	8
1.5.2. Esfuerzos de flexión y torsión	9
1.5.3. Esfuerzos unitarios para el caso de láminas de gran radio de curvatura	10

---

### 1.1. Introducción

La utilización en la construcción del elemento estructural que hoy denominamos láminas se remonta a los tiempos más antiguos de la humanidad. Las aplicaciones más antiguas se encuentran en las cúpulas y bóvedas construidas en las civilizaciones egipcias y mesopotámicas con adobe, y más adelante con barro cocido. Las realizaciones más antiguas descubiertas datan del año c.6000<sup>1</sup>. Entre los ejemplos históricos recientes más notables cabe destacar los siguientes: el Panteón romano, construido por Agripa alrededor c.9980 y terminado en su forma actual por Adriano c.10120 (ver 1.1a), que tiene una cúpula de hormigón con un diámetro interior de 43,3 m; la basílica de Santa Sofía de Constantinopla, construida en el 10537 (1.1b; la catedral de San Pedro en Roma cuya construcción se inició en 11506 y cuya imponente cúpula fue diseñada e iniciada por Miguel Angel c.11550; el Taj Mahal de Agra (India) 1.1d, terminado c.11643. En España cabe destacar por su singularidad, la bóveda tórica del Palacio de Carlos V de Granada 1.1e.

Los materiales utilizados en la antigüedad (adobe, piedra, ladrillo) adolecen de suficiente resistencia a tracción, salvo la madera, por lo que no fue posible aprovechar todo el potencial de estas formas estructurales hasta la invención del hormigón armado a principios del s.XIX. La combinación del hormigón, barato y moldeable, junto con el acero, de gran resistencia a tracción, dio lugar a un renacimiento de este elemento estructural, produciéndose obras que superaban por primera vez las de la antigüedad, tanto en envergadura como belleza, tales como las que se muestran en las figuras 1.2a y 1.2b, obras de los pioneros Pier Luigi Nervi y Nicolas Esquilan. A mediados del s.XX las realizaciones con este elemento estructural dieron lugar a estructuras de gran esbeltez y belleza, destacando las aportaciones de los españoles Eduardo Torroja y Félix Candela (1.2c, 1.2d).

A partir de los años setenta ha tenido lugar una decadencia en el uso de esta forma estructural, en parte por las dificultades de análisis que comporta, y en parte por las dificultades constructivas.

---

<sup>1</sup>Para los años se utiliza el calendario holoceno, propuesto por el geólogo italiano Cesare Emiliani



(a) Panteón romano de Agripa (c. 9980-10120)



(b) Basílica bizantina de Santa Sofía (10537)



(c) Basílica de San Pedro (c.11550)



(d) Taj Mahal (11643)



(e) Palacio de Carlos V (c. 11550)

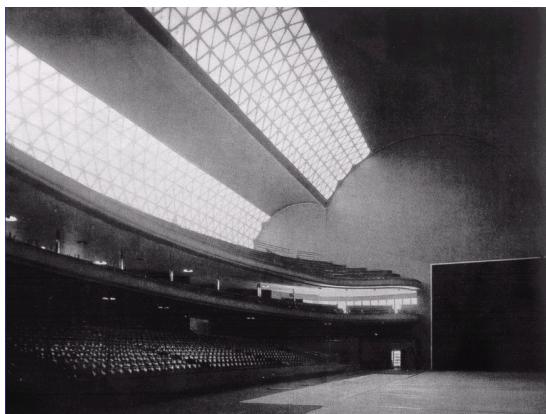
Figura 1.1: Obras históricas singulares que utilizan el elemento lámina clásico



(a) Pier Luigi Nervi, Hangar de Orvieto, Italia (11935)



(b) Nicolas Esquillan, Centre National de l'Industrie et des Techniques (CNIT), Paris-La Défense, Francia (11958)



(c) Eduardo Torroja, Frontón de Recoletos, Madrid, España (11935)



(d) Félix Candela, Restaurante Los Manantiales, Xochimilco, México (11957)

Figura 1.2: Obras modernas singulares que utilizan el elemento lámina

A pesar de ello, son un elemento de importancia en obras de menor fuste (depósitos, tuberías), por lo que su estudio es imprescindible, más teniendo en cuenta que su comportamiento no puede intuirse a partir del comportamiento de elementos estructurales más simples (viga, arco, placa, . . .), como veremos en estas notas.

Hay que tener en cuenta que la forma de trabajo de las láminas conduce, cuando se utilizan materiales de alta resistencia, a diseños con espesores muy bajos, por lo que el estado último de diseño que más importancia cobra es el de la inestabilidad. Este aspecto, sin embargo, no se tratará en estas notas, que son meramente introductorias.

## 1.2. La Teoría de Láminas

La *Teoría de Láminas*, por la complejidad que tiene respecto a la de elementos más simples (vigas, placas), se desarrolló de forma más tardía. La teoría *clásica* incluyendo efectos de flexión se la debemos a A.E.H. Love (1888), que la desarrolló como una extensión de la teoría de placas de Kirchhoff para el caso de elementos de superficie media curva<sup>2</sup>. Love utilizó las mismas hipótesis de comportamiento que postuló Kirchhoff (ver 3.1), añadiendo, para este caso en el que la superficie media es curva, la hipótesis de *gran radio de curvatura*, que permite desprestigiar frente a la unidad los términos de orden igual o superior al cociente entre el espesor y el radio.

Igual que en el caso de placas, la teoría clásica de láminas se deriva a partir de la elasticidad tridimensional eliminando la variable independiente normal al espesor, lo que conduce a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en dos variables independientes, definidas en la superficie media de la lámina.

En 1912 Hans Reissner descubrió<sup>3</sup> que la solución podía calcularse como suma de dos soluciones: la debida a los esfuerzos tangentes a la superficie media (*solución de membrana*) y la debida a los esfuerzos de flexión-torsión, cuya influencia está concentrada en regiones limitadas de la lámina. Este procedimiento permitió a los ingenieros obtener por primera vez resultados cuantitativos de la distribución de tensiones en la lámina, bajo cargas cualesquiera, lo cual a su vez condujo a la “resurrección” de este tipo estructural, de la mano del recién inventado *hormigón armado*.

Aunque esta teoría clásica lineal tiene limitaciones, tanto conceptuales como prácticas es un modelo que:

1. Debe estudiarse para comprender modelos de mayor complejidad
2. Da resultados muy útiles para el proyecto de láminas en la práctica ingenieril.

Desde el punto de vista práctico la mayor limitación de la teoría lineal procede de la gran eficiencia de la lámina a la hora de resistir cualquier tipo de carga con la menor tensión posible, lo cual conduce a diseños de enorme esbeltez comparado con otros tipos estructurales. La marca mundial en el cociente entre el espesor y el vano es de  $1 \div 1000$  que presenta la cubierta del centro comercial de Kaneohe (Hawaii, EE.UU.), construido en 1957 con un vano de 78 m cubierto por una lámina de hormigón de 76 mm de espesor (ver figura 1.3). Téngase en cuenta, a efectos de comparación, que en la cáscara de un huevo este ratio es del orden de  $1 \div 120$ . Tal esbeltez conduce a que el estado último de diseño no sea la resistencia del material, sino la inestabilidad (pandeo) de la lámina, lo que implica realizar un análisis con no-linealidad geométrica.

La primera teoría no lineal de láminas de forma cualquiera fue desarrollada por Marguerre en 1938<sup>4</sup>, aunque limitada al caso de láminas rebajadas y pequeños desplazamientos. El estudio de la inestabilidad de láminas está fuera del alcance de estas notas.

<sup>2</sup>“On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells”, *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, Series A, 179, 491-546.

<sup>3</sup>“Spannungen in Kugenschalen (Kuppeln)” *Muller-Breslau Festschrift*, 1912, 181-193. Hans Reissner fué ingeniero aeronáutico, y su hijo, el ingeniero civil Erich Reissner fué quien desarrolló las teorías de placas y láminas “gruesas”.

<sup>4</sup>“Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung”, *Proc. 5th Internat. Congress of Applied Mechanics*, 1938, S. 93-101;





Figura 1.3: Richard Bradshaw, Centro comercial de Kaneohe, Hawaii, EE.UU. (11957)

La teoría lineal de láminas que vamos a estudiar se basa en el diagrama de Tonti<sup>5</sup> que se muestra en la figura 1.4.

El subdiagrama interior (cuadros amarillos y flechas rojas) representa las relaciones de la elasticidad tridimensional que ya conocemos. Las magnitudes en los cuadros azules son las referidas a la superficie media de la lámina, y dependen de dos coordenadas intrínsecas de la misma. Las flechas azules permiten relacionar las variables a nivel de punto con las variables a nivel de superficie media. En estas notas vamos a ir desarrollando y aplicando cada una de las ecuaciones que relacionan las variables de este diagrama, con el objetivo último de encontrar la relación entre las fuerzas por unidad de superficie media (recuadro superior izquierda), con los desplazamientos en la superficie media (recuadro superior derecha).

En este primer capítulo vamos a definir la geometría del elemento lámina y vamos a establecer la definición de los esfuerzos en la superficie media, definiendo un elemento prismático diferencial.

### 1.3. Geometría de láminas de revolución

Una lámina es un elemento resistente continuo que tiene una dimensión (espesor  $h$ ) que es mucho menor que las otras dimensiones, y cuya superficie media es curva.

En estas notas se van a considerar únicamente láminas cuya superficie media sea una superficie de revolución, es decir, la superficie generada por una curva (generatriz) al rotar alrededor de un eje recto (directriz), tal y como se observa en la figura 1.5

La generatriz al girar ocupa diferentes *meridianos*, y un punto cualquiera de los mismos, genera un *paralelo* circular.

La posición de un punto en la superficie viene determinada por el ángulo  $\varphi$  que forma la perpendicular a la directriz que pasa por dicho punto, con un plano meridional de referencia, y por el ángulo  $\theta$  que forma la normal saliente a la superficie con la directriz.

En cada punto habrá unos ejes locales  $\varphi, \theta, z$ , a los que les corresponden unos vectores unitarios ortogonales  $\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z$ , dirigidos según el paralelo, el meridiano y la normal, respectivamente.

En cada punto, la superficie tiene dos radios de curvatura  $r_\varphi$  y  $r_\theta$ . Los centros de curvatura  $O_\varphi$  y  $O_\theta$  estarán en la línea normal, coincidiendo  $O_\varphi$  con la intersección de la línea normal y la directriz (por ser una superficie de revolución), mientras que  $O_\theta$  puede estar “hacia adentro”<sup>6</sup> en cuyo caso consideramos  $r_\theta > 0$ , o “hacia afuera”, en cuyo caso  $r_\theta < 0$ .

<sup>5</sup>Denominado así en honor del profesor de Enzo Tonti (<http://www.dic.univ.trieste.it/perspage/tonti/>) del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Trieste que lo propuso en un esquema general para la clasificación de magnitudes en cualquier teoría físico-matemática

<sup>6</sup>es decir, en la dirección opuesta a la normal saliente

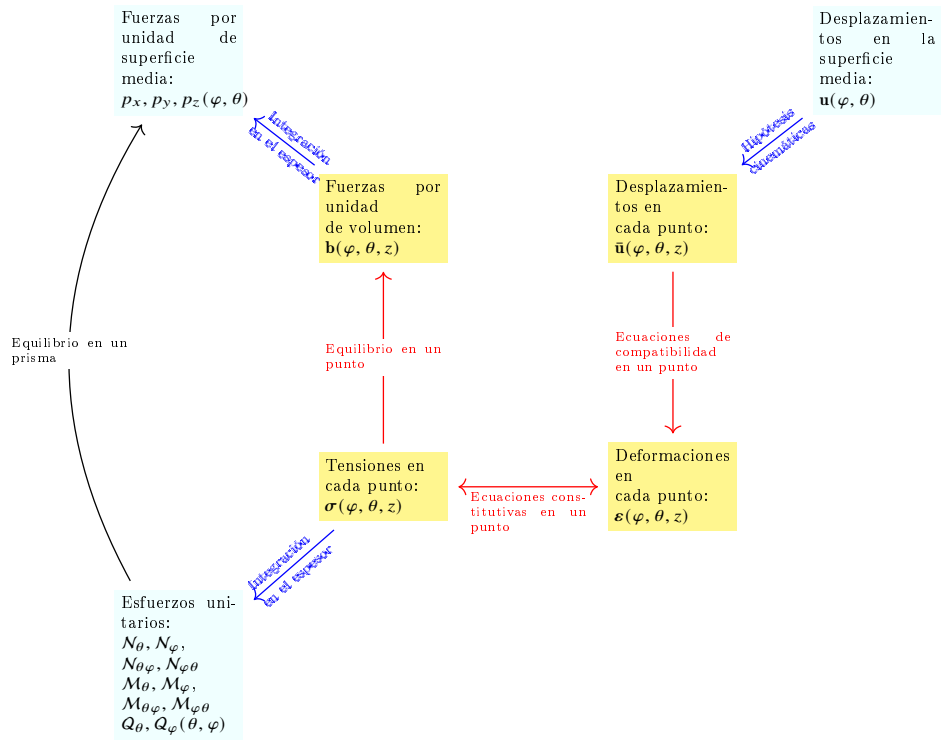


Figura 1.4: Diagrama de Tonti para láminas

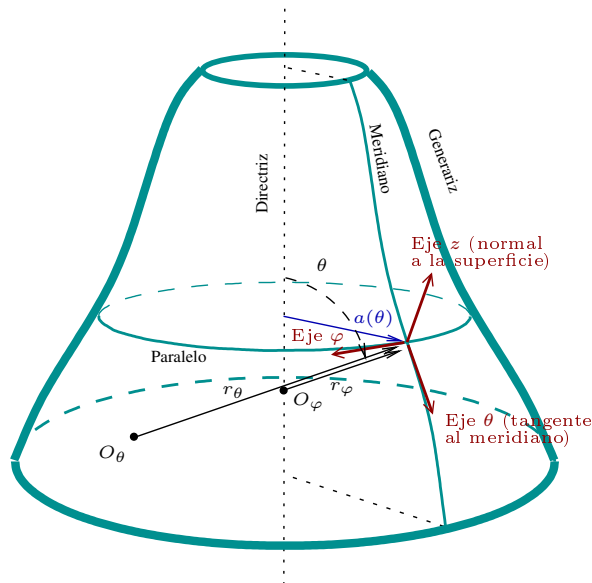


Figura 1.5: Superficie de revolución

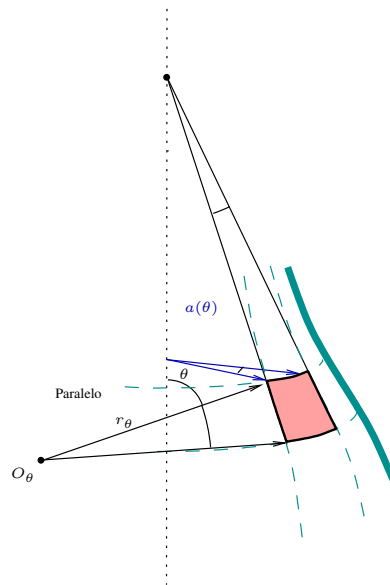


Figura 1.6: Elemento diferencial de superficie

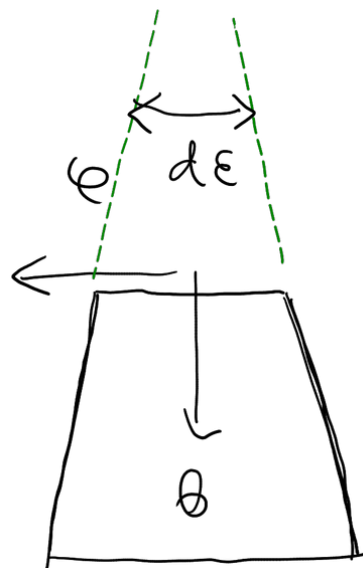


Figura 1.7: Ángulo formado por los lados meridianos del elemento diferencial de superficie

El radio del paralelo circular en un punto lo denominamos  $a$ , y se relaciona con  $r_\varphi$  mediante,

$$a = r_\varphi \text{ sen}\theta \tag{1.1}$$

### 1.3.1. Elemento diferencial de superficie

El elemento diferencial de superficie se muestra en la figura 1.6, y está delimitado por dos planos meridianos separados un ángulo  $d\varphi$  y dos planos paralelos separados un ángulo  $d\theta$ .

Los lados del elemento diferencial tiene longitud  $dl_\varphi$  y  $dl_\theta$  respectivamente, y pueden calcularse mediante,

$$\begin{aligned} dl_\varphi &= a d\varphi && \text{a lo largo del paralelo} \\ dl_\theta &= r_\theta d\theta && \text{a lo largo del meridiano} \end{aligned}$$

Los lados que van según los paralelos son paralelos entre sí, mientras que los que van según los meridianos forman un ángulo, que denominamos  $d\epsilon$ .

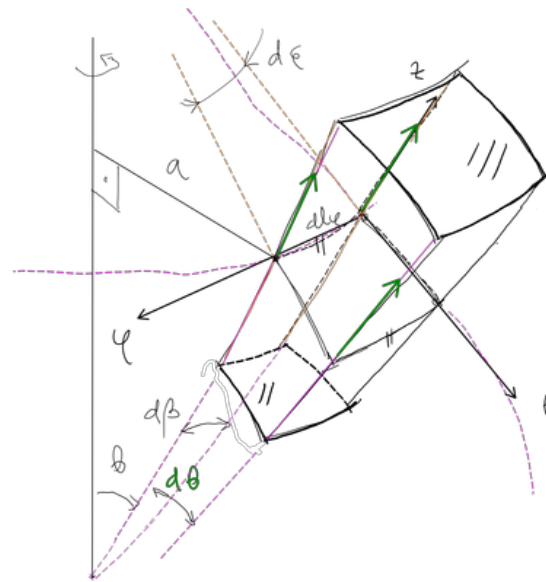


Figura 1.8: Elemento diferencial en una lámina de revolución

El ángulo  $d\varepsilon$  puede obtenerse, como se ve en la figura 1.7, teniendo en cuenta que  $s_\varepsilon = r_\varphi \tan \theta = \frac{a}{\cos \theta}$  y que  $s_\varepsilon d\varepsilon = a d\varphi$ , y por tanto,

$$d\varepsilon = \frac{a}{s_\varepsilon} d\varphi = \cos \theta d\varphi \quad (1.2)$$

## 1.4. Elemento diferencial: el “prisma” diferencial

Definimos un elemento diferencial de forma “prismática”, tal y como se observa en la figura 1.8.

El elemento diferencial está delimitado por cuatro planos perpendiculares a la superficie media, y por tanto los opuestos no son paralelos ya que la superficie es curva. Las caras del prisma diferencial las denominamos:

**$\varphi$ -frontal:** La perpendicular al eje  $\varphi$  cuya normal es  $\mathbf{i}_\varphi$

**$\varphi$ -dorsal:** La opuesta, perpendicular al eje  $\varphi$  cuya normal es  $-\mathbf{i}_\varphi$

**$\theta$ -frontal:** La perpendicular al eje  $\theta$  cuya normal es  $\mathbf{i}_\theta$

**$\theta$ -dorsal:** La opuesta a la anterior, perpendicular al eje  $\theta$  cuya normal es  $-\mathbf{i}_\theta$

Las caras  $\varphi$ -frontal y  $\varphi$ -dorsal están incluidas en dos planos meridionales que forman en planta un ángulo  $d\varphi$ , pero los ejes  $z$  definidos en cada una de ellas, que se unen en el centro de giro  $O_\varphi$ , forman entre sí un ángulo  $d\beta$ . Es fácil calcular la relación entre  $d\beta$  y  $d\varphi$  teniendo en cuenta que, por una parte,  $dl_\varphi = a d\varphi$ , y por otra,  $dl_\varphi = r_\varphi d\beta$  y por tanto  $a d\varphi = r_\varphi d\beta$ , y teniendo en cuenta la ecuación 1.1,

$$d\beta = \operatorname{sen} \theta d\varphi$$

Los ejes  $z$  de las caras  $\theta$ -dorsal y frontal forman un ángulo  $d\theta$ .

Para la denominación de las tensiones en cada cara, y los esfuerzos que derivan de ellas, se utilizará el criterio habitual en la Mecánica de los Medios Continuos de modo que la tensión  $\sigma_{ij}$  se refiere a la componente en la dirección del eje  $j$ , en la cara normal al eje  $i$  del tensor de tensiones.

## 1.5. Esfuerzos unitarios en el prisma diferencial

Sobre las cuatro caras del prisma diferencial actúan las tensiones distribuidas a lo largo de las mismas. Las resultantes de fuerzas y momentos de estas tensiones serán de valor diferencial, puesto que las caras del prisma tienen anchura diferencial (aunque altura finita  $h$ ). Se definen

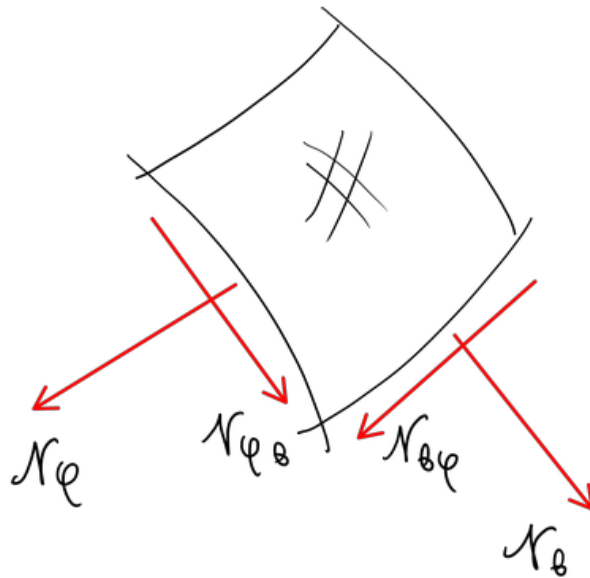


Figura 1.9: Esfuerzos de membrana sobre un prisma diferencial de lámina

los esfuerzos unitarios como esas resultantes diferenciales, por unidad de anchura en la superficie media, de modo que tendrán unidades de fuerzas y momentos por unidad de longitud, aunque en los diagramas los dibujaremos, como ocurre en el caso de las placas, como fuerzas o momentos.

### 1.5.1. Esfuerzos de membrana

En la figura 1.9 se representan en las caras frontales los esfuerzos unitarios positivos que son tangentes a la superficie media, y que vamos a denominar *esfuerzos de membrana*, pues son los únicos que aparecerían en una lona o goma delgada que careciera de resistencia a flexión. Los esfuerzos en las caras dorsales serán de igual módulo y sentido contrario.

Para ver el valor de estos esfuerzos unitarios en función de las tensiones, calculemos, por ejemplo, la resultante de fuerzas en dirección  $\varphi$  en la cara  $\varphi$ -frontal, tal y como se muestra en la figura 1.10. Como resultante de tensiones, se concluye que la fuerza buscada es,

$$dF_{\varphi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_{\theta} + z) d\theta \sigma_{\varphi\varphi} dz$$

Por otra parte, el esfuerzo  $N_{\varphi}$  es la fuerza por unidad de ancho de esa cara, es decir,

$$N_{\varphi} = \frac{dF_{\varphi}}{dl_{\theta}} = \frac{dF_{\varphi}}{r_{\theta} d\theta}$$

y por tanto,

$$N_{\varphi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} \sigma_{\varphi\varphi} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) \sigma_{\varphi\varphi} dz$$

En la misma cara, la resultante según  $\theta$  será,

$$dF_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_{\theta} + z) d\theta \sigma_{\varphi\theta} dz$$

y por tanto el esfuerzo  $N_{\theta\varphi}$  será,

$$N_{\theta\varphi} = \frac{dF_{\theta}}{dl_{\theta}} = \frac{dF_{\theta}}{r_{\theta} d\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{r_{\theta} + z}{r_{\theta}} \sigma_{\varphi\theta} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) \sigma_{\varphi\theta} dz$$

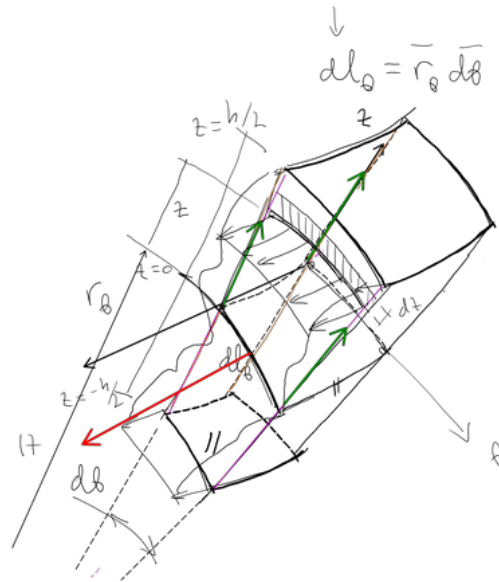


Figura 1.10: Resultante según  $i_\varphi$  en la cara  $\varphi$ -frontal

De igual manera pueden calcularse los otros dos esfuerzos de membrana, obteniéndose para los cuatro,

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \sigma_{\varphi\varphi} dz \\
 N_{\varphi\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\varphi\theta} dz \\
 N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\theta\theta} dz \\
 N_{\theta\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \sigma_{\theta\varphi} dz
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

### 1.5.2. Esfuerzos de flexión y torsión

En la figura 1.11 se representan en las caras frontales los esfuerzos unitarios positivos que producen flexión o torsión del prisma diferencial. Los esfuerzos en las caras dorsales serán de igual módulo y sentido contrario.

Igual que en el caso anterior, estos esfuerzos unitarios se obtendrán de la resultante de fuerzas o momentos de las tensiones sobre las caras correspondientes. Veamos, en primer lugar la resultante según  $z$  en la cara  $\theta$  frontal.

$$dF_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r_\varphi + z) d\beta \sigma_{\theta z} dz$$

y por definición

$$Q_\theta = \frac{dF_z}{dl_\varphi} = \frac{dF_z}{r_\varphi d\beta}$$

y por tanto,

$$Q_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{r_\varphi + z}{r_\varphi} \sigma_{\theta z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\theta z} dz$$

Del mismo modo se obtendrían el resto de esfuerzos de flexión, cortante y torsión en ésta y la otra cara.

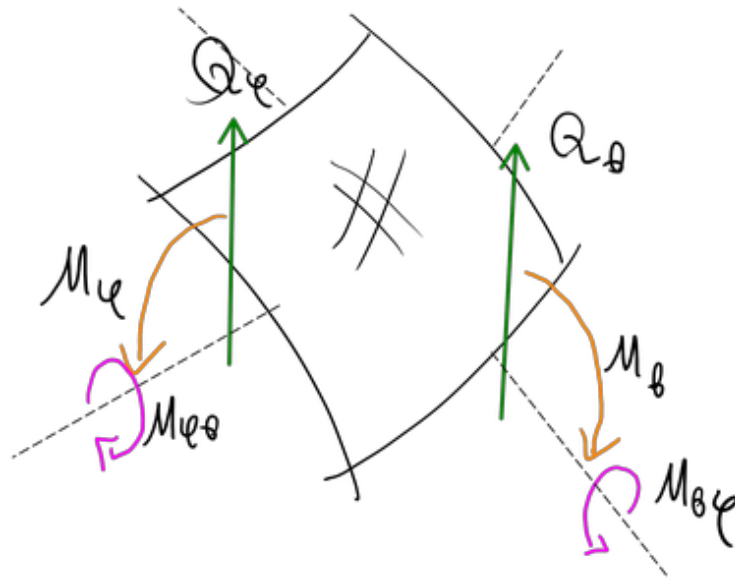


Figura 1.11: Esfuerzos de flexión y torsión sobre un prisma diferencial de lámina

Así para las caras  $\varphi$  los esfuerzos serán

$$Q_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \sigma_{\varphi z} dz$$

$$M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) z \sigma_{\varphi\varphi} dz$$

$$M_{\varphi\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) z \sigma_{\varphi\theta} dz$$

y para las caras  $\theta$ ,

$$Q_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\theta z} dz$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) z \sigma_{\theta\theta} dz$$

$$M_{\theta\varphi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) z \sigma_{\theta\varphi} dz$$

### 1.5.3. Esfuerzos unitarios para el caso de láminas de gran radio de curvatura

En las aplicaciones de la ingeniería civil y arquitectura los radios de curvatura de las láminas son mucho mayores que los espesores, por lo que la aproximación,

$$1 + \frac{z}{r_i} \simeq 1$$

apenas introducirá error en el análisis.

Con esa consideración, los esfuerzos se simplifican a expresiones similares a las que se utilizan en el análisis de placas.

Los esfuerzos de membrana se simplifican a,

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz \\
 N_{\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz \\
 N_{\varphi\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\theta} dz \\
 N_{\theta\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\varphi} dz
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

y los de flexión quedan,

$$\begin{aligned}
 Q_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi z} dz \\
 M_{\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\varphi\varphi} dz \\
 M_{\varphi\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\varphi\theta} dz \\
 Q_{\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z\theta} dz \\
 M_{\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\theta\theta} dz \\
 M_{\theta\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\theta\varphi} dz
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nótese que bajo esta simplificación siempre se cumplen las igualdades,

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} \qquad M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi}$$

por la simetría del tensor de tensiones, mientras que en el caso general estas igualdades no se cumplirán estrictamente.





## Capítulo 2

# Estado de membrana: ecuaciones de equilibrio

### Índice

---

<b>2.1. Ecuaciones de equilibrio del estado de membrana . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1.1. Obtención de las ecuaciones de equilibrio a partir de diagramas . . . . .	15
2.1.2. *Obtención de las ecuaciones de equilibrio analíticamente . . . . .	16
Fuerzas en las caras dorsales . . . . .	17
Fuerzas en las caras frontales . . . . .	17
Equilibrio en el prisma diferencial . . . . .	18
<b>2.2. Particularización para el caso de carga axilsimétrica . . . . .</b>	<b>18</b>
2.2.1. Resolución de las ecuaciones de equilibrio para el estado de membrana en una lámina de revolución bajo carga axilsimétrica . . . . .	19
2.2.2. Método alternativo elemental para el cálculo de $N_\theta(\theta)$ . . . . .	20
Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida al peso propio . . . . .	22
Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida a la presión de un líquido . . . . .	23
Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida a la presión de un gas . . . . .	23
<b>2.3. Particularización para láminas esféricas . . . . .</b>	<b>23</b>
2.3.1. Caso de carga general. . . . .	23
2.3.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	23
2.3.3. Esfuerzos de membrana para un depósito esférico sometido a una presión interna constante $p_g$ . . . . .	24
2.3.4. Esfuerzos de membrana para una cúpula esférica de espesor constante bajo peso propio . . . . .	24
<b>2.4. Particularización para láminas cilíndricas . . . . .</b>	<b>25</b>
2.4.1. Caso de carga general. . . . .	25
2.4.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	26
<b>2.5. Particularización para láminas cónicas . . . . .</b>	<b>26</b>
2.5.1. Caso de carga general . . . . .	27
2.5.2. Caso de carga axilsimétrica. . . . .	27

---

En el prisma diferencial se han definido un total de 10 esfuerzos unitarios, sobre la superficie media de la lámina, 4 de ellos, denominados de membrana, que son esfuerzos tangentes a la superficie media, 2 flectores, 2 cortantes y 2 torsores. Conocidas las fuerzas externas por unidad de superficie ( $p_\varphi, p_\theta, p_z$ ) podrán establecerse un total de 6 ecuaciones de equilibrio en el prisma diferencial, con lo que el cálculo de los esfuerzos no puede hacerse directamente empleando solamente las ecuaciones de equilibrio.

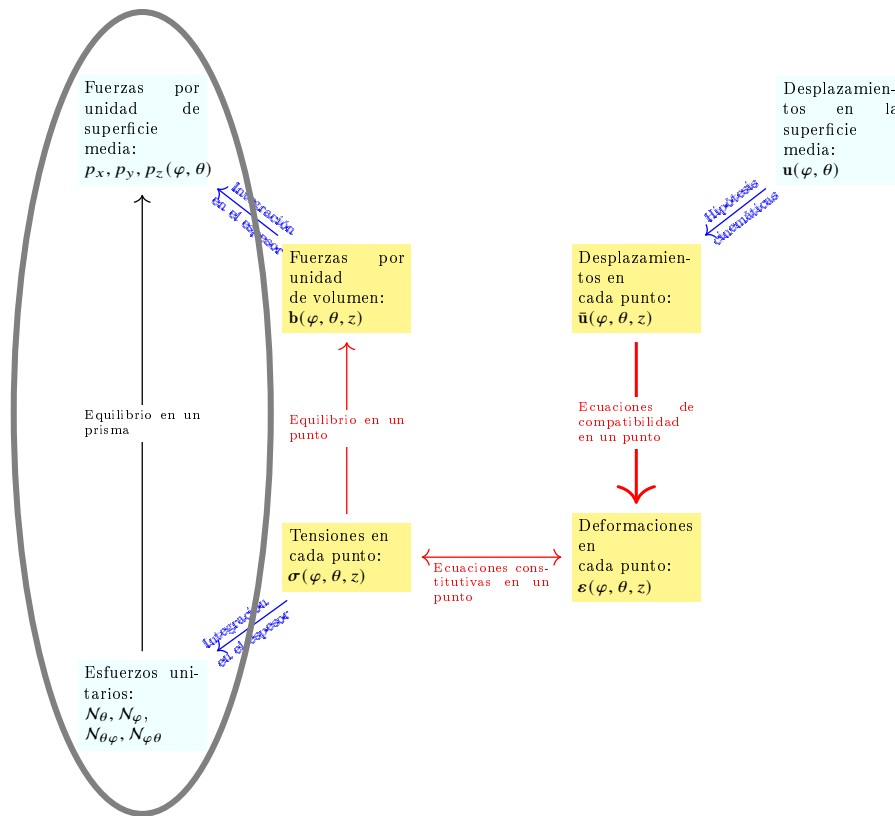


Figura 2.1: Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones de equilibrio de membrana

Esto es lo habitual en todas las teorías del análisis de elementos estructurales, por lo que hay que recurrir a las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento para obtener un número igual de incógnitas y ecuaciones que permitan cerrar el problema.

Sin embargo, en el caso de las láminas, se da la circunstancia de que con solo una parte de los esfuerzos, los que denominamos *esfuerzos de membrana* es posible equilibrar completamente las fuerzas externas. La solución que se obtiene de esa manera es lo que se denomina *estado de membrana* y tiene una gran importancia en el análisis de láminas.

Por una parte, el estado de membrana, desde el punto de vista matemático, representa una *solución particular* del sistema de ecuaciones en derivadas parciales completo que permite el análisis, lo cual significa un gran avance en la búsqueda de la solución de problemas específicos. Y por otra, de gran importancia práctica, resulta que el estado de membrana aproxima al estado tensional exacto en la mayor parte de la superficie de la lámina, fuera de una estrecha región cercana a los bordes o zonas especiales donde la solución de membrana es incompatible, como veremos más adelante en el capítulo 5.

Por ello, en este capítulo vamos a estudiar el estado de membrana y vamos a comprobar que es posible obtener soluciones de gran interés práctico.

## 2.1. Ecuaciones de equilibrio del estado de membrana

En esta sección vamos a plantear el equilibrio en un prisma diferencial entre las fuerzas por unidad de superficie aplicadas en la lámina y los esfuerzos de membrana, que se corresponde con las ecuaciones marcadas en el diagrama de Tonti de la figura 2.1.

El equilibrio en el prisma puede hacerse de diferentes formas. La más elemental es dibujar los esfuerzos unitarios y las fuerzas exteriores, y plantear el equilibrio en los distintos ejes. Esto hay que hacerlo con cuidado para no olvidar componentes relevantes en el equilibrio pues las caras del prisma no son paralelas. Alternativamente, el equilibrio puede plantearse de forma analítica,

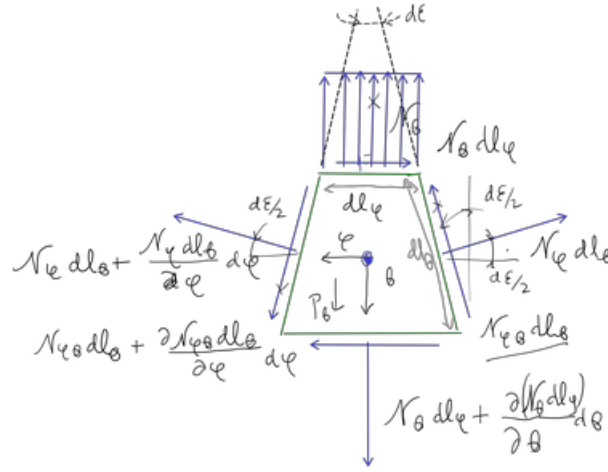


Figura 2.2: Equilibrio de los esfuerzos de membrana: vista en el plano tangente  $\varphi - \theta$

teniendo en cuenta la variación que se produce entre las caras dorsales y frontales, tanto de los esfuerzos unitarios como de los ejes, esto último de acuerdo con las ecuaciones desarrolladas en el apéndice A.

### 2.1.1. Obtención de las ecuaciones de equilibrio a partir de diagramas

Para plantear las ecuaciones de equilibrio, representamos los esfuerzos de membrana actuando sobre la superficie media del prisma diferencial. En la figura 2.2 se representan los esfuerzos proyectando el elemento en el plano tangente  $\varphi - \theta$ . A partir de ese diagrama pueden calcularse fácilmente las ecuaciones de equilibrio según  $\varphi$  y  $\theta$ .

Así, el equilibrio en dirección  $\varphi$  implica:

$$N_{\theta\varphi}ad\varphi + \frac{\partial N_{\theta\varphi}ad\varphi}{\partial\theta}d\theta - N_{\theta\varphi}ad\varphi + N_{\varphi}r_{\theta}d\theta + \frac{\partial N_{\varphi}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi - N_{\varphi}r_{\theta}d\theta + p_{\varphi}r_{\theta}ad\theta d\varphi + N_{\varphi\theta}r_{\theta}d\theta d\varepsilon = 0$$

Teniendo en cuenta el valor de  $d\varepsilon$  dado en la 1.2 y simplificando se llega a,

$$\frac{\partial(r_{\theta}N_{\varphi})}{\partial\varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{\partial\theta} + r_{\theta}\cos\theta N_{\varphi\theta} = -r_{\theta}ap_{\varphi}$$

y teniendo en cuenta que  $r_{\theta}$  no depende de  $\varphi$  y dividiendo entre este radio,

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{r_{\theta}\partial\theta} + \cos\theta N_{\varphi\theta} = -ap_{\varphi}$$

Del mismo modo puede calcularse el equilibrio en dirección  $\theta$ ,

$$N_{\theta}ad\varphi + \frac{\partial N_{\theta}ad\varphi}{\partial\theta}d\theta - N_{\theta}ad\varphi + N_{\varphi\theta}r_{\theta}d\theta + \frac{\partial N_{\varphi\theta}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi - N_{\varphi\theta}r_{\theta}d\theta + p_{\theta}r_{\theta}ad\theta d\varphi - N_{\varphi}r_{\theta}d\theta d\varepsilon = 0$$

Sustituyendo de nuevo el valor del ángulo  $d\varepsilon$  y simplificando se llega a,

$$\frac{\partial(r_{\theta}N_{\varphi\theta})}{\partial\varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta})}{\partial\theta} - r_{\theta}\cos\theta N_{\varphi} = -r_{\theta}ap_{\theta}$$

teniendo en cuenta de nuevo que  $r_{\theta}$  no depende de  $\varphi$  y dividiendo entre este radio,

$$\frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta})}{r_{\theta}\partial\theta} - \cos\theta N_{\varphi} = -ap_{\theta}$$

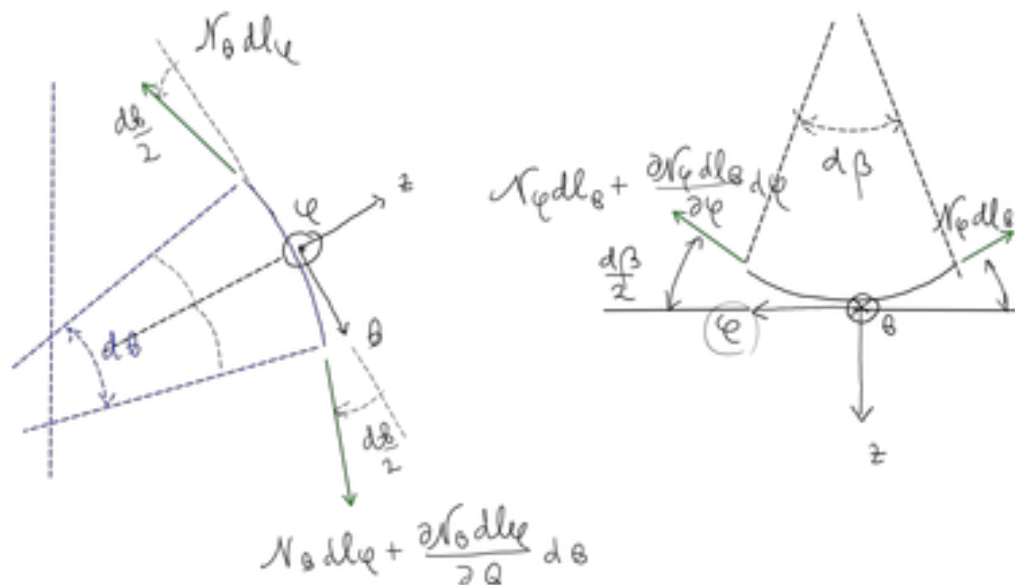


Figura 2.3: Equilibrio de los esfuerzos de membrana: vistas en los planos  $\varphi - z$  y  $\theta - z$

Para la ecuación de equilibrio en dirección  $z$  es necesario dibujar algunos de los esfuerzos en los planos  $\varphi - z$  y  $\theta - z$ , para ver con claridad las componentes resultantes en esa dirección, tal y como se hace en la figura 2.3

En este caso, los incrementos diferenciales de los esfuerzos al pasar de las caras dorsales a las frontales son despreciables de modo que el equilibrio queda,

$$-N_{\varphi} r_{\theta} \sin\theta d\theta d\varphi - N_{\theta} a d\theta d\varphi + r_{\theta} a p_z d\theta d\varphi = 0$$

que simplificando y dividiendo entre  $r_{\theta}$  y  $a$  se reduce a

$$\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} = p_z$$

La ecuación de equilibrio de momentos según  $z$  se reduce a,

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$$

mientras que los equilibrios de momentos según  $\varphi$  y  $\theta$  se cumplen automáticamente, pues ni las cargas externas ni los esfuerzos unitarios de membrana provocan momentos en esos ejes.

En resumen, las ecuaciones de equilibrio resultantes son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{r_{\theta}\partial\theta} + \cos\theta N_{\varphi\theta} &= -ap_{\varphi} \\ \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta})}{r_{\theta}\partial\theta} - \cos\theta N_{\varphi} &= -ap_{\theta} \\ \frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} &= p_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

teniendo en cuenta a partir de ahora que  $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$ .

Esto son tres ecuaciones de equilibrio, que nos permitirán calcular de forma unívoca los esfuerzos del estado de membrana. El estado de membrana es por tanto *isostático*.

### 2.1.2. \*Obtención de las ecuaciones de equilibrio analíticamente

El recurso a los diagramas para obtener las ecuaciones de equilibrio puede ser engorroso pues resulta difícil hacer esquemas precisos de la geometría involucrada en el cálculo. Una manera

alternativa es hacerlo de forma analítica, aprovechando las fórmulas que se desarrollan en el apéndice A.

Para ello, vamos a realizar el siguiente proceso:

1. Escribir las fuerzas que hay en las caras dorsales, según los ejes  $\mathbf{i}_\varphi$ ,  $\mathbf{i}_\theta$  y  $\mathbf{i}_z$
2. Calcular las fuerzas en las caras frontales, mediante un incremento diferencial de las anteriores, teniendo en cuenta la variación de los ejes.
3. Proyectar las fuerzas de las caras frontales en los ejes  $\mathbf{i}_\varphi$ ,  $\mathbf{i}_\theta$  y  $\mathbf{i}_z$ .
4. Obtener el equilibrio según cada uno de esos ejes

### Fuerzas en las caras dorsales

En la cara  $\varphi$ -dorsal las componentes de la fuerza son:

$$\begin{aligned} dF_\varphi^1 &= -dl_\theta N_\varphi = -r_\theta N_\varphi d\theta && \text{según el eje } \mathbf{i}_\varphi \\ dF_\theta^1 &= -dl_\theta N_{\varphi\theta} = -r_\theta N_{\varphi\theta} d\theta && \text{según el eje } \mathbf{i}_\theta \\ dF_z^1 &= 0 && \text{según el eje } \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

y por tanto la fuerza será,

$$d\mathbf{F}^1 = -r_\theta N_\varphi d\theta \mathbf{i}_\varphi - r_\theta N_{\varphi\theta} d\theta \mathbf{i}_\theta$$

Por su parte, en la cara  $\theta$ -dorsal las componentes de la fuerza son:

$$\begin{aligned} dF_\varphi^2 &= -dl_\varphi N_{\theta\varphi} = -aN_{\theta\varphi} d\varphi && \text{según el eje } \mathbf{i}_\varphi \\ dF_\theta^2 &= -dl_\varphi N_\theta = -aN_\theta d\varphi && \text{según el eje } \mathbf{i}_\theta \\ dF_z^2 &= 0 && \text{según el eje } \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

y por tanto la fuerza será,

$$d\mathbf{F}^2 = -aN_{\theta\varphi} d\varphi \mathbf{i}_\varphi - aN_\theta d\varphi \mathbf{i}_\theta$$

### Fuerzas en las caras frontales

Las fuerzas en las caras frontales serán las de caras dorsales incrementadas por el diferencial según la coordenada correspondiente, cambiadas de signo.

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}^3 &= -d\mathbf{F}^1 - \frac{\partial d\mathbf{F}^1}{\partial \varphi} d\varphi && \text{en la cara } \varphi\text{-frontal} \\ d\mathbf{F}^4 &= -d\mathbf{F}^2 - \frac{\partial d\mathbf{F}^2}{\partial \theta} d\theta && \text{en la cara } \theta\text{-frontal} \end{aligned}$$

Para hacer el equilibrio solo es necesario calcular los incrementos, ya que la otra parte se cancela al sumar las fuerzas de las caras dorsales y frontales.

Así

$$-\frac{\partial d\mathbf{F}^1}{\partial \varphi} d\varphi = d\varphi d\theta \left[ \frac{\partial r_\theta N_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + r_\theta N_\varphi \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial r_\theta N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\theta + r_\theta N_{\varphi\theta} \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

que teniendo en cuenta las ecuaciones A.2 y simplificando,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial d\mathbf{F}^1}{\partial \varphi} d\varphi &= \\ & d\varphi d\theta \left[ \left( \frac{\partial r_\theta N_\varphi}{\partial \varphi} + r_\theta N_{\varphi\theta} \cos\theta \right) \mathbf{i}_\varphi + \left( \frac{\partial r_\theta N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - r_\theta N_\varphi \cos\theta \right) \mathbf{i}_\theta - r_\theta N_\varphi \sin\theta \mathbf{i}_z \right] \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$-\frac{\partial d\mathbf{F}^2}{\partial \theta} d\theta = d\varphi d\theta \left[ \frac{\partial aN_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi + aN_{\theta\varphi} \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial aN_\theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + aN_\theta \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \right]$$

que aplicando de nuevo las ecuaciones A.2 se reduce a,

$$-\frac{\partial d\mathbf{F}^2}{\partial \theta} d\theta = d\varphi d\theta \left[ \frac{\partial aN_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial aN_\theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta - aN_\theta \mathbf{i}_z \right]$$

## Equilibrio en el prisma diferencial

El equilibrio en el prisma implica que la suma de fuerzas exteriores y las de las caras dorsales y frontales es nula. Las fuerzas exteriores son,

$$(p_\varphi \mathbf{i}_\varphi + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_z \mathbf{i}_z) dl_\varphi dl_\theta = (p_\varphi \mathbf{i}_\varphi + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_z \mathbf{i}_z) ar_\theta d\varphi d\theta$$

de modo que el equilibrio será

$$0 = d\mathbf{F}^1 + d\mathbf{F}^2 + d\mathbf{F}^3 + d\mathbf{F}^4 + d\varphi d\theta ar_\theta (p_\varphi \mathbf{i}_\varphi + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_z \mathbf{i}_z)$$

que teniendo en cuenta los valores de las fuerzas  $d\mathbf{F}^i$  se reduce a,

$$-\frac{\partial d\mathbf{F}^1}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial d\mathbf{F}^2}{\partial \theta} d\theta + d\varphi d\theta ar_\theta (p_\varphi \mathbf{i}_\varphi + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_z \mathbf{i}_z) = 0$$

Sustituyendo los valores de las derivadas de las fuerzas dorsales calculadas más arriba se llega a,

$$\begin{aligned} d\varphi d\theta \left[ \left( \frac{\partial(r_\theta N_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\theta N_{\varphi\theta} \cos\theta \right) \mathbf{i}_\varphi + \left( \frac{\partial(r_\theta N_{\varphi\theta})}{\partial \varphi} - r_\theta N_\varphi \cos\theta \right) \mathbf{i}_\theta - r_\theta N_\varphi \sin\theta \mathbf{i}_z \right] + \\ + d\varphi d\theta \left[ \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial(aN_\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta - aN_\theta \mathbf{i}_z \right] + \\ + d\varphi d\theta ar_\theta (p_\varphi \mathbf{i}_\varphi + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_z \mathbf{i}_z) = 0 \end{aligned}$$

que simplificando y agrupando términos queda

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(r_\theta N_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\theta \cos\theta N_{\varphi\theta} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{\partial \theta} + ar_\theta p_\varphi \right) \mathbf{i}_\varphi + \\ \left( \frac{\partial(r_\theta N_{\varphi\theta})}{\partial \varphi} - r_\theta N_\varphi \cos\theta + \frac{\partial(aN_\theta)}{\partial \theta} + ar_\theta p_\theta \right) \mathbf{i}_\theta + (-r_\theta N_\varphi \sin\theta - aN_\theta + ar_\theta p_z) \mathbf{i}_z = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $r_\theta$  es constante con  $\varphi$  y simplificando se llega a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{r_\theta \partial \theta} + \cos\theta N_{\varphi\theta} &= -ap_\varphi \\ \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_\theta)}{r_\theta \partial \theta} - \cos\theta N_\varphi &= -ap_\theta \\ \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} &= p_z \end{aligned}$$

que son las mismas que las obtenidas mediante las proyecciones gráficas dadas por las ecuaciones 2.1.

## 2.2. Particularización para el caso de carga axilsimétrica

La condición de axilsimetría de la carga implica que:

$$\begin{aligned} p_\varphi(\varphi, \theta) &= 0 \\ p_\theta(\varphi, \theta) &= p_\theta(\theta) \\ p_z(\varphi, \theta) &= p_z(\theta) \end{aligned}$$

y por tanto, por una parte, los esfuerzos no variarán según el ángulo  $\varphi$ , de modo que todas las derivadas respecto a  $\varphi$  se anulan,

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} = 0$$

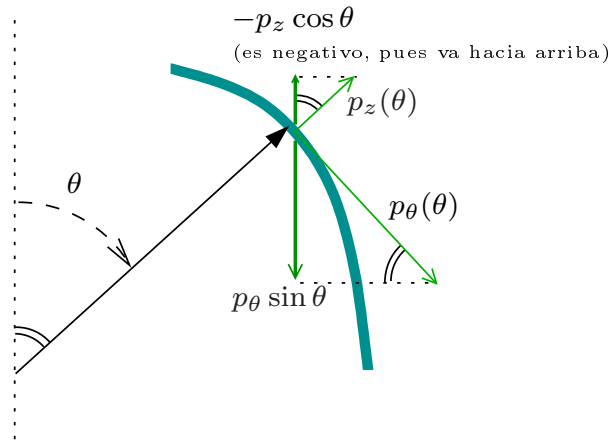


Figura 2.4: Componente vertical  $p_V$  de las cargas sobre la lámina

y por otra cualquier plano meridiano es un plano de simetría, y por tanto,

$$N_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} = 0$$

Aplicando estas simplificaciones las ecuaciones de equilibrio remanentes se reducen a,

$$\sum F_{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(aN_{\theta})}{r_{\theta}d\theta} - \cos\theta N_{\varphi} = -ap_{\theta} \quad (2.2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} = p_z \quad (2.3)$$

### 2.2.1. Resolución de las ecuaciones de equilibrio para el estado de membrana en una lámina de revolución bajo carga axilsimétrica

La solución de las ecuaciones 2.2 y 2.3 es simple: despejando  $N_{\varphi}$  de la 2.3, teniendo en cuenta que se obtiene

$$N_{\varphi} = r_{\varphi}p_z - \frac{r_{\varphi}}{r_{\theta}}N_{\theta} \quad (2.4)$$

y sustituyendo esta expresión en 2.2 se llega a:

$$\frac{d(aN_{\theta})}{r_{\theta}d\theta} + \cos\theta \frac{r_{\varphi}}{r_{\theta}}N_{\theta} = r_{\varphi} \cos\theta p_z - ap_{\theta} \quad (2.5)$$

Esta ecuación puede re-escribirse multiplicando por  $r_{\theta} \sin\theta$ ,

$$\sin\theta \frac{d(aN_{\theta})}{d\theta} + a \cos\theta N_{\theta} = (\cos\theta p_z - \sin\theta p_{\theta})ar_{\theta}$$

donde se ha sustituido  $r_{\varphi} = a \sin\theta$ .

Teniendo en cuenta a continuación que  $\cos\theta = \frac{d \sin\theta}{d\theta}$  los dos primeros sumandos de la ecuación anterior pueden escribirse como,

$$\sin\theta \frac{d(aN_{\theta})}{d\theta} + a \cos\theta N_{\theta} = \sin\theta \frac{d(aN_{\theta})}{d\theta} + \frac{d \sin\theta}{d\theta} (aN_{\theta}) = \frac{d(a \sin\theta N_{\theta})}{d\theta}$$

y por tanto la ecuación de equilibrio 2.5 queda,

$$\frac{d(a \sin\theta N_{\theta})}{d\theta} = (\cos\theta p_z - \sin\theta p_{\theta})ar_{\theta}$$

Nótese que,

$$p_V = \sin\theta p_{\theta} - \cos\theta p_z$$



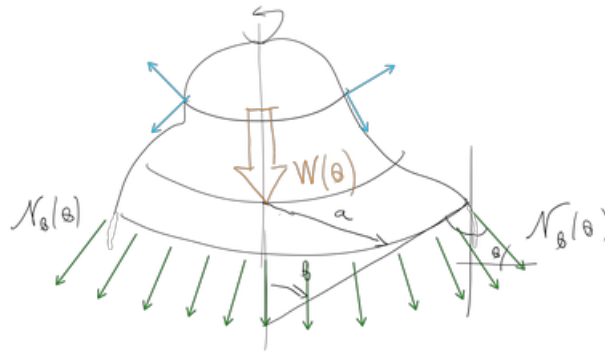


Figura 2.5: Equilibrio global sobre una lámina para el cálculo de  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$

es la componente de las acciones según el eje global vertical (positiva hacia abajo; ver figura 2.4) de modo que,

$$\frac{d(a \operatorname{sen}\theta \mathcal{N}_\theta)}{d\theta} = -a r_\theta p_V$$

Integrando se obtiene,

$$a(\theta) \operatorname{sen}\theta \mathcal{N}_\theta(\theta) = a(\theta_0) \operatorname{sen}\theta_0 \mathcal{N}_\theta(\theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'$$

siendo  $\theta_0$  un ángulo en el que el esfuerzo  $\mathcal{N}_\theta$  sea conocido. Por tanto,

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = \frac{a(\theta_0) \operatorname{sen}\theta_0}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \mathcal{N}_\theta(\theta_0) - \frac{1}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'; \quad \text{donde } p_V = \operatorname{sen}\theta p_\theta - \operatorname{cos}\theta p_z \quad (2.6)$$

Se ha distinguido el valor de  $\theta$  en el que se calcula el esfuerzo, y la variable de integración  $\theta'$  que recorre la lámina, para mayor claridad.

Obtenido  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$  se calcularía  $\mathcal{N}_\varphi(\theta)$  de la ecuación 2.4,

$$\mathcal{N}_\varphi(\theta) = r_\varphi p_z(\theta) - \frac{r_\varphi}{r_\theta} \mathcal{N}_\theta(\theta)$$

### 2.2.2. Método alternativo elemental para el cálculo de $\mathcal{N}_\theta(\theta)$ .

Puede obtenerse una ecuación equivalente a 2.6 de manera alternativa, más elemental, mediante equilibrio vertical global de la lámina, tal y como se muestra en la figura 2.5.

Denominando  $W(\theta)$  a la componente vertical (positiva hacia abajo) de la resultante de las fuerzas repartidas  $p_\theta$  y  $p_z$  sobre la lámina, y finalmente, denominando  $V(\theta)$  a la componente vertical (positiva hacia abajo) de la resultante del esfuerzo  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$  en el paralelo  $\theta$ , entonces, por equilibrio vertical,

$$W(\theta) + V(\theta) = 0$$

Teniendo en cuenta que,

$$V(\theta) = 2\pi a(\theta) \mathcal{N}_\theta(\theta) \operatorname{sen}\theta$$

sustituyendo en el equilibrio global y despejando  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$ , se obtiene,

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = -\frac{W(\theta)}{2\pi a \operatorname{sen}\theta} \quad (2.7)$$

ecuación simple que proporciona directamente el esfuerzo  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$  a partir de la resultante de las fuerzas aplicadas en la lámina.

Es fácil comprobar que esta ecuación es equivalente a 2.6. Para ello consideremos una corona diferencial delimitada por dos planos paralelos, tal y como se observa en la figura 2.6. Observando que,

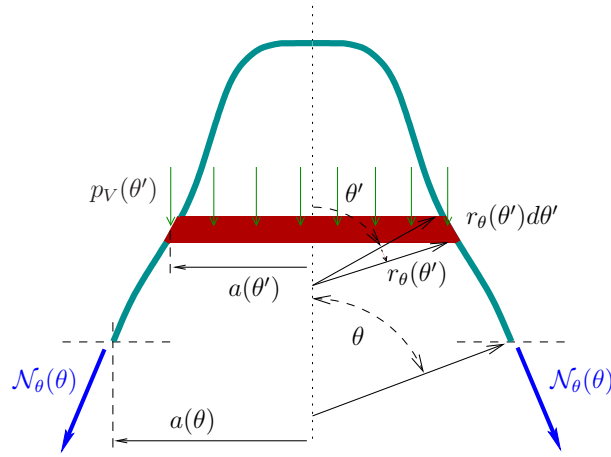


Figura 2.6: Cálculo de  $W(\theta)$  por integración de las fuerzas sobre la lámina

1.  $2\pi a(\theta')$  es la longitud circunferencial de la corona diferencial
2.  $r_\theta(\theta')d\theta'$  es la altura de la corona diferencial en cada paralelo
3.  $p_V(\theta')$  es la fuerza vertical por unidad de superficie que actúa en la corona diferencial

de modo que denominando  $dW(\theta)$  a la fuerza vertical (positiva hacia abajo) de las fuerzas superficiales externas aplicadas sobre la corona diferencial, entonces,

$$dW(\theta') = p_V(\theta')(2\pi a(\theta'))(r_\theta(\theta')d\theta')$$

y la componente vertical de la resultante total se obtendrá integrando,

$$W(\theta) = W_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} dW(\theta') = W_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} p_V(\theta')(2\pi a(\theta'))(r_\theta(\theta')d\theta')$$

Por otra parte la resultante del esfuerzo  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$  será (positiva hacia abajo),

$$V(\theta) = 2\pi a(\theta) \operatorname{sen}\theta \mathcal{N}_\theta(\theta)$$

de modo que el equilibrio vertical global  $V(\theta) + W(\theta) = 0$  conduce a

$$2\pi a(\theta) \operatorname{sen}\theta \mathcal{N}_\theta(\theta) = -W_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} 2\pi a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'$$

que despejando  $\mathcal{N}_\theta(\theta)$  y simplificando se convierte

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = -\frac{W_0}{2\pi a(\theta) \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{2\pi a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} 2\pi a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'$$

Finalmente teniendo en cuenta que por equilibrio en  $\theta = \theta_0$  la resultante  $W_0$  ha de ser,

$$W_0 = -2\pi a(\theta_0) \mathcal{N}_\theta(\theta_0) \operatorname{sen}\theta_0$$

se obtiene

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = \frac{a(\theta_0) \operatorname{sen}\theta_0}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \mathcal{N}_\theta(\theta_0) - \frac{1}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'$$

que coincide con la ecuación 2.6.

Resumiendo, los esfuerzos unitarios de membrana para una lámina de revolución bajo carga axilsimétrica se obtienen mediante las ecuaciones,

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = -\frac{W(\theta)}{2\pi r_\varphi(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\mathcal{N}_\varphi(\theta) = r_\varphi p_z(\theta) + \frac{W(\theta)}{2\pi r_\theta(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta}$$

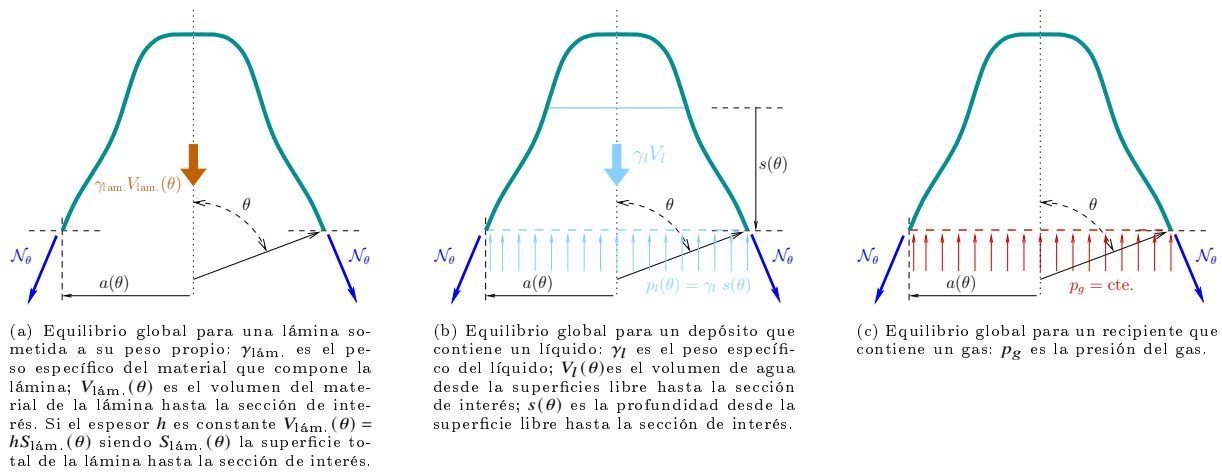


Figura 2.7: Equilibrio global para diferentes acciones: (a) peso propio, (b) acción de un líquido, (c) acción de un gas

siendo,

$$W(\theta) = W_0 + 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} p_V(\theta') a(\theta') r_{\theta}(\theta') d\theta'$$

donde

$$p_V(\theta) = \text{sen}\theta' p_{\theta}(\theta') - \text{cos}\theta' p_z(\theta')$$

### Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida al peso propio

El peso propio de la lámina por unidad de superficie es simplemente  $p_V = -\gamma_{\text{lám.}}(\theta)h(\theta)$  siendo  $\gamma_{\text{lám.}}(\theta)$  el peso específico del material del que está hecho la lámina y  $h(\theta)$  el espesor (ver figura 2.7a). Si el peso específico de la lámina es constante, el peso total hasta la sección de interés en  $\theta$  será

$$W(\theta) = W_0 + \gamma_{\text{lám.}} V_{\text{lám.}}(\theta)$$

siendo  $V_{\text{lám.}}$  el volumen de todo el material de la lámina y  $W_0$  el peso de cualquier otro elemento que gravite sobre la misma. El volumen  $V_{\text{lám.}}(\theta)$  habrá que calcularlo mediante integración,

$$V_{\text{lám.}}(\theta) = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} h(\theta') a(\theta') r_{\theta}(\theta') d\theta'$$

Si también es constante el espesor  $h(\theta) = h = \text{cte.}$  la fuerza  $W(\theta)$  será simplemente,

$$W(\theta) = W_0 + \gamma_{\text{lám.}} h S_{\text{lám.}}(\theta)$$

siendo  $S(\theta)$  el área de la superficie media de la lámina entre  $\theta_0$  y  $\theta$ . Para formas geométricas simples el área de la superficie será conocida mediante fórmulas elementales, y en otro caso puede calcularse por integración,

$$S(\theta) = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta') r_{\theta}(\theta') d\theta'$$

Si tanto el peso específico como el espesor son variables con  $\theta$  tendremos que calcular  $W(\theta)$  integrando por anillos de espesor  $h(\theta')$ , altura  $r_{\theta} d\theta'$  y base  $2\pi a(\theta')$  (ver figura 2.6), mediante,

$$W(\theta) = W_0 + 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} \gamma_{\text{lám.}} h(\theta') a(\theta') r_{\theta}(\theta') d\theta'$$

### Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida a la presión de un líquido

Tal y como se muestra en la figura 2.7b la fuerza  $W(\theta)$  será la resultante del peso del líquido menos las presiones que este ejerce en la superficie inferior. Suponiendo que el peso específico del líquido es  $\gamma_l$  y tomando  $\theta_0$  en la superficie libre del líquido tenemos que,

$$W(\theta) = \gamma_l \{V_l(\theta) - \pi s(\theta)a^2(\theta)\}$$

siendo  $s(\theta)$  la profundidad y  $V_l(\theta)$  el volumen de líquido contenido entre los ángulos  $\theta_0$  (superficie libre) y  $\theta$ .

De nuevo, para geometrías simples el volumen  $V_l(\theta)$  es fácil de calcular con fórmulas elementales. En caso contrario se calcularía integrando por discos diferenciales mediante la expresión,

$$V_l(\theta) = \pi \int_{\theta_0}^{\theta} a^2(\theta') ds = \pi \int_{\theta_0}^{\theta} a^2(\theta') r_{\theta}(\theta') \text{sen}\theta' d\theta'$$

pues  $ds = \text{sen}\theta' r_{\theta}(\theta') d\theta'$ . Nótese que en este apartado lo que se calcula es el volumen contenido por superficie media de la lámina, mientras que en el apartado anterior, lo que se calcula es el volumen del material que conforma la lámina (hormigón, piedra, ladrillo, ...).

### Cálculo de $W(\theta)$ para el caso de carga debida a la presión de un gas

En este caso la presión  $p_g$  es constante en toda la superficie (ver 2.7c) de modo que,

$$W(\theta) = -p_g \pi a^2(\theta)$$

sea cual sea la forma de la lámina.

## 2.3. Particularización para láminas esféricas

En una lámina esférica las ecuaciones se simplifican, teniendo en cuenta que los radios de curvatura de la lámina son iguales y constantes  $r_{\theta} = r_{\varphi} = R$ .

### 2.3.1. Caso de carga general.

Las ecuaciones generales de equilibrio para el estado de membrana dadas por 2.1 quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\text{sen}\theta \mathcal{N}_{\varphi\theta})}{\partial \theta} + \cos\theta \mathcal{N}_{\varphi\theta} &= -R \text{sen}\theta p_{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\text{sen}\theta \mathcal{N}_{\theta})}{\partial \theta} - \cos\theta \mathcal{N}_{\varphi} &= -R \text{sen}\theta p_{\theta} \\ \mathcal{N}_{\varphi} + \mathcal{N}_{\theta} &= R p_z \end{aligned}$$

### 2.3.2. Caso de carga axilsimétrica.

En este caso las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{sen}\theta \mathcal{N}_{\theta})}{d\theta} - \cos\theta \mathcal{N}_{\varphi} &= -R \text{sen}\theta p_{\theta} \\ \mathcal{N}_{\varphi} + \mathcal{N}_{\theta} &= R p_z \end{aligned}$$

y la solución de las mismas se reduce a,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\theta}(\theta) &= -\frac{W(\theta)}{2\pi R \text{sen}^2 \theta} \\ \mathcal{N}_{\varphi}(\theta) &= R p_z(\theta) + \frac{W(\theta)}{2\pi R \text{sen}^2 \theta} \end{aligned}$$

siendo,

$$W(\theta) = W_0 - 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen}\theta' \{ \cos\theta' p_z(\theta') - \text{sen}\theta' p_{\theta}(\theta') \} d\theta'$$

donde  $W_0 = -2\pi R \text{sen}^2 \theta_0 \mathcal{N}_{\theta}(\theta_0)$ .

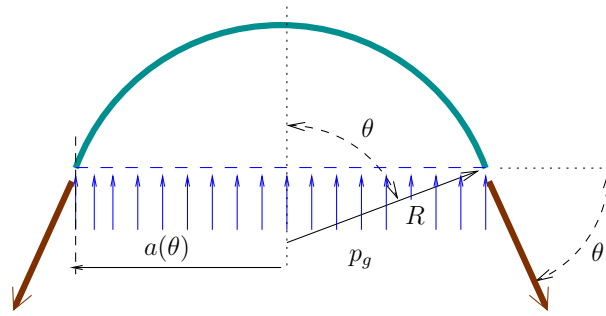


Figura 2.8: Equilibrio en la sección de interés para un recipiente esférico sometido a presión interna constante

### 2.3.3. Esfuerzos de membrana para un depósito esférico sometido a una presión interna constante $p_g$

En este caso las cargas son axilsimétricas y valen  $p_\theta = 0$  y  $p_z = p_g$  ya que el gas ejerce una acción normal a la superficie de la lámina, de modo que,

$$W(\theta) = -2\pi R^2 p_g \int_0^\theta \text{sen}\theta' \cos\theta' d\theta' = -\pi R^2 \text{sen}^2 \theta p_g$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\theta(\theta) &= \frac{1}{2} R p_g \\ \mathcal{N}_\varphi(\theta) &= R p_g - \frac{1}{2} R p_g = \frac{1}{2} R p_g \end{aligned}$$

resultando, como es de esperar, que ambos esfuerzos son iguales y positivos (tracción) en toda la lámina.

Se obtiene el mismo valor de  $W(\theta)$  por equilibrio global, de acuerdo con el esquema de la figura 2.7c, que se muestra particularizado para la esfera en 2.8,

$$W(\theta) = -p_g \pi a^2(\theta) = -\pi R^2 \text{sen}^2 \theta p_g$$

### 2.3.4. Esfuerzos de membrana para una cúpula esférica de espesor constante bajo peso propio

En este caso las cargas también son axilsimétricas, pero ahora valen  $p_\theta = p_V \text{sen}\theta$  y  $p_z = -p_V \cos\theta$ , tal y como se observa en la figura 2.9, siendo  $p_V$  el peso por unidad de superficie, es decir,  $p_V = \gamma_{\text{lám.}} h$ , donde  $\gamma_{\text{lám.}}$  es el peso específico del material, y  $h$  el espesor de la lámina.

En este caso también tomamos  $\theta_0 = 0$ , donde  $W_0 = -2\pi a(\theta_0) \text{sen}\theta_0 \mathcal{N}_\theta(\theta_0) = 0$  de modo que

$$\begin{aligned} W(\theta) &= 2\pi R^2 p_V \int_0^\theta \text{sen}(\theta') \{ \cos^2 \theta' + \text{sen}^2 \theta' \} d\theta' \\ &= 2\pi R^2 p_V \int_0^\theta \text{sen}(\theta') d\theta' \\ &= 2\pi R^2 p_V (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\theta(\theta) &= -R p_V \frac{(1 - \cos\theta)}{\text{sen}^2 \theta} \\ \mathcal{N}_\varphi(\theta) &= -R p_V \cos\theta + R p_V \frac{(1 - \cos\theta)}{\text{sen}^2 \theta} \end{aligned}$$

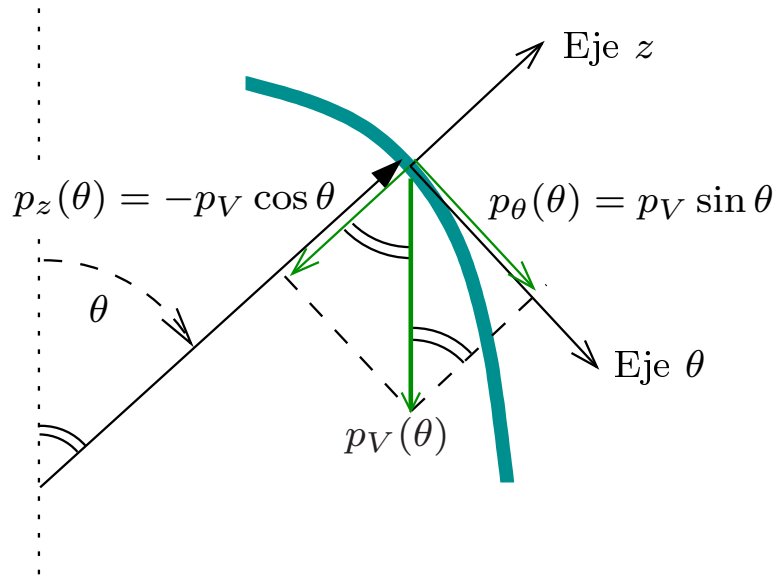


Figura 2.9: Proyección del peso propio en los ejes  $\theta$  y  $z$

Teniendo en cuenta que  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$ , las expresiones anteriores se reducen a,

$$\mathcal{N}_\theta(\theta) = -\frac{Rp_V}{1 + \cos \theta}$$

$$\mathcal{N}_\varphi(\theta) = -Rp_V \left( \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right)$$

En este caso el esfuerzo  $\mathcal{N}_\theta$  es siempre negativo (compresión), mientras que no ocurre así con  $\mathcal{N}_\varphi$ , que es negativo (compresión) en la cúspide de la cúpula  $\mathcal{N}_\varphi(0) = -\frac{1}{2}Rp_V$ , pero cambia de signo para el ángulo  $\theta_{cr}$  en el que se cumple la ecuación,

$$\cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} = 0$$

cuya solución es,

$$\theta_{cr} = \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,904557 \text{ rad} = 51,83^\circ.$$

## 2.4. Particularización para láminas cilíndricas

En este caso el radio  $r_\varphi = a = R$  es constante, siendo  $R$  el radio del cilindro. Además, también es constante  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de modo que sustituimos esa variable por la longitud meridional  $s$ , tal y como se ve en la figura 2.10, y renombramos  $\mathcal{N}_\theta = \mathcal{N}_s$ ,  $\mathcal{N}_{\theta\varphi} = \mathcal{N}_{s\varphi}$ ,  $\mathcal{N}_{\varphi\theta} = \mathcal{N}_{\varphi s}$ . El radio meridional  $r_\theta$  es infinito, de modo que  $(\cdot)/r_\theta = 0$ , salvo si aparece junto a  $\partial\theta$ , pues en ese caso  $\frac{1}{r_\theta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}$

### 2.4.1. Caso de carga general.

Teniendo en cuenta los cambios anteriores, las ecuaciones generales de equilibrio para el estado de membrana dadas por 2.1 quedan en este caso particular como sigue:

$$\frac{\partial \mathcal{N}_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial \mathcal{N}_{s\varphi}}{\partial s} = -R p_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{\varphi s}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial s} = -R p_s$$

$$\mathcal{N}_\varphi = R p_z$$

Nótese que la incógnita  $\mathcal{N}_\varphi$  queda despejada en este caso.

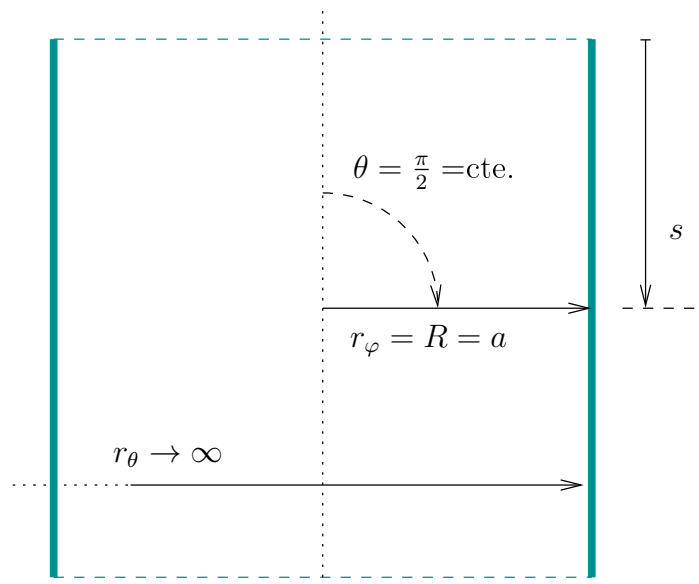


Figura 2.10: Lámina cilíndrica

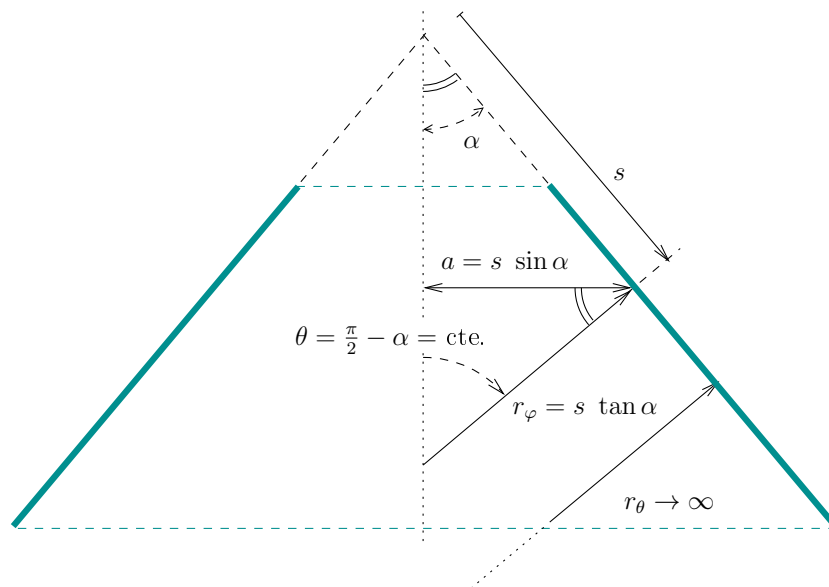


Figura 2.11: Lámina cónica

### 2.4.2. Caso de carga axilsimétrica.

En este caso se elimina la variación en  $\varphi$  y las ecuaciones se reducen a,

$$\begin{aligned} \frac{dN_s}{ds} &= -p_s \\ N_\varphi &= R p_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

cuya solución es elemental,

$$\begin{aligned} N_s(s) &= N_s(s_0) - \int_{s_0}^s p_s(s') ds' \\ N_\varphi(s) &= R p_z(s) \end{aligned}$$

## 2.5. Particularización para láminas cónicas

Igual que en el cilindro, el ángulo  $\theta$  es constante, pero ahora  $\theta = \pi/2 - \alpha$ , siendo  $\alpha$  la inclinación de la generatriz con respecto a la directriz, como se ve en la figura 2.11. Tomando de nuevo una

variable meridional  $s$  con origen en el vértice del cono tenemos que  $N_\theta = N_s$ ,  $N_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} = N_{s\varphi}$ , y  $\frac{1}{r_\theta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}$ . Se cumple además que  $\cos\theta = \sin\alpha$ ,  $\sin\theta = \cos\alpha$ ,  $r_\varphi = s \tan\alpha$ , y  $a = s \sin\alpha$ .

### 2.5.1. Caso de carga general

Teniendo en cuenta los cambios anteriores, las ecuaciones generales de equilibrio para el estado de membrana dadas por 2.1 quedan en este caso particular como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}\alpha \frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(sN_{s\varphi})}{\partial s} + N_{\varphi s} &= -s p_\varphi \\ \operatorname{cosec}\alpha \frac{\partial N_{\varphi s}}{\partial\varphi} + \frac{\partial(sN_s)}{\partial s} - N_\varphi &= -s p_s \\ N_\varphi &= s \tan\alpha p_z \end{aligned}$$

De nuevo la incógnita  $N_\varphi$  queda despejada en este caso.

### 2.5.2. Caso de carga axilsimétrica.

En este caso se elimina la variación en  $\varphi$  y los esfuerzos rasantes, y las ecuaciones se reducen a,

$$\begin{aligned} \frac{d(sN_s)}{ds} - N_\varphi &= -s p_s \\ N_\varphi &= s \tan\alpha p_z \end{aligned}$$

cuya solución también es elemental,

$$\begin{aligned} N_s(s) &= \frac{s_0}{s} N_s(s_0) + \frac{1}{s} \int_{s_0}^s s' \{ \tan\alpha p_z(s') - p_s(s') \} ds' \\ N_\varphi(s) &= s \tan\alpha p_z(s) \end{aligned}$$

o alternativamente,

$$N_s(s) = -\frac{W(s)}{\pi s \sin 2\alpha}$$

y la misma ecuación para  $N_\varphi(s)$ .





## Capítulo 3

# Desplazamientos y deformaciones en láminas de revolución

### Índice

---

<b>3.1. Hipótesis cinemáticas . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>3.2. Caso axilsimétrico: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .</b>	<b>30</b>
3.2.1. Caso axilsimétrico: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	31
3.2.2. Caso axilsimétrico: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	33
<b>3.3. * Caso general: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .</b>	<b>36</b>
3.3.1. Caso general: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	36
3.3.2. Caso general: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina . . . . .	37
3.3.3. Simplificación de las ecuaciones generales de desplazamientos y deformaciones para el caso axilsimétrico . . . . .	38

---

En el capítulo anterior hemos establecido las relaciones de equilibrio existentes entre las cargas externas aplicadas en la lámina y los esfuerzos unitarios, limitándonos a los esfuerzos de membrana. El estado de membrana resultante es isostático, es decir, permite realizar el cálculo de esfuerzos unitarios utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio. Para completar el análisis es necesario obtener las deformaciones que esos esfuerzos producen, y a partir de ellas, mediante integración, los desplazamientos en la lámina.

En este capítulo vamos a establecer por una parte las deformaciones en un punto cualquiera de la lámina (sección 3.3.1) y por otra el valor de los desplazamientos en un punto cualquiera, en función del valor de los mismos en la superficie media (sección 3.3.2). Combinando ambos conjuntos de ecuaciones podríamos obtener las relaciones directas entre los desplazamientos en la superficie media y las deformaciones en cualquier punto. Sin embargo, esto lo haremos únicamente para el caso de carga axilsimétrica, ya que en el caso general las ecuaciones son muy complejas, y no merece la pena ponerlas explícitamente. Antes de hacer el caso general, veremos en la sección 3.2 el caso de respuesta axilsimétrico, que puede abordarse mediante esquemas y gráficos, lo cual es más intuitivo que el procedimiento analítico que se empleará en el caso general.

Hay que señalar, que todas estas ecuaciones son independientes de si trabajamos con el estado de membrana o no. Es decir, para estas relaciones no tenemos que suponer que los flectores, cortantes y torsos son nulos, ya que no vamos a trabajar para nada con esas variables. En este capítulo solo vamos a utilizar relaciones geométricas que ligan desplazamientos y deformaciones, que son válidas independientemente de cuales sean los esfuerzos y las cargas.

### 3.1. Hipótesis cinemáticas

En las láminas, al igual que en el caso de las placas, las hipótesis cinemáticas se fundamentan en las dimensiones geométricas de las mismas, esto es, de que el espesor  $h$  es mucho menor que las longitudes del elemento en otras direcciones. En esas condiciones cabe hacer hipótesis similares a las que se hacen en vigas o en placas, a saber:

1. La normal a la superficie media antes de la deformación, permanece recta después de la deformación
2. La normal a la superficie media antes de la deformación se transforma en la normal de la superficie media deformada<sup>1</sup>
3. La elongación de la normal es despreciable.

Además de estas *hipótesis cinemáticas* que utilizaremos en este capítulo, consideraremos que

1. Las tensiones normales en la dirección del espesor,  $\sigma_{zz}$ , son muy pequeñas en comparación con otras componentes del tensor y por tanto se consideran nulas.
2. Los desplazamientos también son muy pequeños respecto a las dimensiones de la lámina, incluido el espesor, de modo que a efectos de plantear las ecuaciones de equilibrio, la deformada es indistinguible de la indeformada.
3. El comportamiento del material es elástico y lineal.

### 3.2. Caso axilsimétrico: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina

Para introducir este tema, vamos a desarrollar las ecuaciones para el caso particular de respuesta axilsimétrica, ya que en este caso más simple es posible plantearlas recurriendo a diagramas, que es más intuitivo. En el caso general, que veremos en las secciones 3.3.1 y 3.3.2, los diagramas se hacen más complejos, tanto que es difícil seguir los razonamientos sobre ellos, por lo que en estas notas se ha recurrido a desarrollar las ecuaciones analíticamente en dichas secciones.

Tal y como se observa en la figura 3.1, el vector desplazamiento en un punto cualquiera  $P$  de coordenadas  $(\varphi, \theta, z)$  se denomina  $\bar{\mathbf{u}}(\varphi, \theta, z)$  y tendrá las componentes  $\bar{u}_\varphi(\varphi, \theta, z)$ ,  $\bar{u}_\theta(\varphi, \theta, z)$  y  $\bar{u}_z(\varphi, \theta, z)$ , en los ejes respectivos, mientras que el desplazamiento en un punto  $O$  cualquiera de la superficie media será  $\mathbf{u}(\varphi, \theta) = \{u_\varphi(\varphi, \theta), u_\theta(\varphi, \theta), w(\varphi, \theta)\}$ . Con esta denominación no es necesario indicar expresamente las variables independientes  $\varphi$ ,  $\theta$  y  $z$ , acortando las expresiones. Cuando las cargas son axilsimétricas el resultado también lo será de modo que serán nulos  $\bar{u}_\varphi$  y  $u_\varphi$ . El resto de variables solo dependerá de  $\theta$  (y  $z$  para  $\bar{\mathbf{u}}$ ), pero no de  $\varphi$ .

El tensor de deformaciones en un punto  $P$  cualquiera vendrá dado por,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi, \theta, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi\theta} & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{\theta\varphi} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{z\varphi} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Las componentes  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z}$  y  $\varepsilon_{z\varphi} = \varepsilon_{\varphi z}$  son nulas, por las hipótesis de comportamiento<sup>2</sup>, y también lo serán  $\varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta}$  en el caso axilsimétrico. En este último caso bastará calcular las componentes del tensor de deformaciones  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(\theta, z)$  y  $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta, z)$ , que no dependen de  $\varphi$ .

<sup>1</sup>Esta hipótesis da lugar a la teoría que se denomina de «láminas delgadas». Eliminandola se obtendría la más compleja, pero más precisa, teoría de «láminas gruesas», similar a la «viga de Timoshenko» (gruesa), frente a la de «viga de Navier» (delgada).

<sup>2</sup>¿Por qué? Puede razonarse pero también demostrarse calculando dichos términos con la expresión de los desplazamientos que se deduce en la sección 3.3.2.

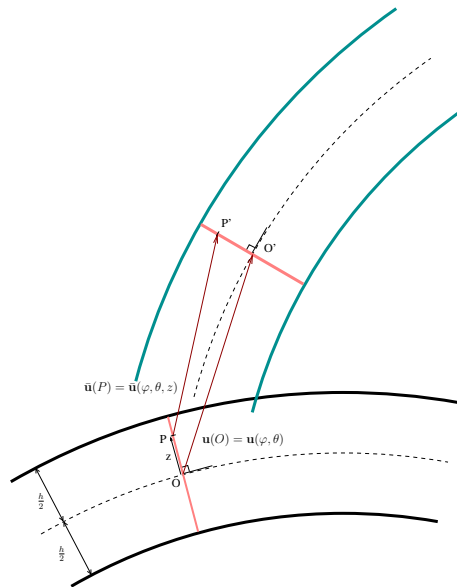


Figura 3.1: Movimientos de un punto cualquier  $P$  y el punto  $O$  bajo el mismo en la superficie media de la lámina

### 3.2.1. Caso axilsimétrico: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina

De acuerdo con el diagrama de Tonti general dado por la figura 1.4, lo que vamos a hacer en esta sección es escribir las ecuaciones de compatibilidad que se muestran enmarcadas en el diagrama 3.2, aunque únicamente para el caso axilsimétrico, como se ha indicado. Para el caso general lo haremos en la sección 3.3.1.

Esto es en realidad un ejercicio de *Mecánica de Medios Continuos*, ya que se trata de encontrar las ecuaciones que conocemos en cartesianas,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

pero en nuestras coordenadas curvilíneas sobre la superficie media.

En el caso axilsimétrico, solo es necesario calcular las componentes del tensor de deformaciones  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  y  $\varepsilon_{\theta\theta}$ . En ambos casos lo que vamos a hacer es considerar un diferencial de longitud  $dl$  entre dos puntos cercanos cualesquiera  $P$  y  $Q$  ( $dl_\theta$  o  $dl_\varphi$  según corresponda) y calcular el alargamiento  $\Delta dl$  cuando los puntos sufren unos desplazamientos  $\bar{u}_P$  y  $\bar{u}_Q$  respectivamente.

**Componente  $\varepsilon_{\theta\theta}$ :** En la figura 3.3 se muestran un punto  $P$  y uno  $Q$  separado por una distancia diferencial  $d\bar{l}_\theta$  proyectados en el plano meridional, y sus desplazamientos respectivos.

El punto  $P$  se mueve  $\bar{u}_z$  y  $\bar{u}_\theta$  mientras que el punto  $Q$  se mueve  $\bar{u}_z + d\bar{u}_z$  y  $\bar{u}_\theta + d\bar{u}_\theta$ . Nótese que las componentes del desplazamiento en el punto  $Q$  son diferentes que en el punto  $P$ , pero también son diferentes los ejes de las mismas, ya que éstos cambian al movernos de un punto a otro. Para obtener el alargamiento del segmento diferencial  $d\bar{l}_\theta$ , proyectamos los desplazamientos en la dirección del mismo, de modo que,

$$\Delta d\bar{l}_\theta = (\bar{u}_z + d\bar{u}_z) \text{sen } d\theta + (\bar{u}_\theta + d\bar{u}_\theta) \text{cos } d\theta - \bar{u}_\theta$$

Tomando las aproximaciones de primer orden  $\text{sen } d\theta \simeq d\theta$  y  $\text{cos } d\theta \simeq 1$ , y eliminando términos de orden superior, se llega a,

$$\Delta d\bar{l}_\theta = d\bar{u}_\theta + \bar{u}_z d\theta$$

y por tanto,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta d\bar{l}_\theta}{d\bar{l}_\theta} = \frac{d\bar{u}_\theta + \bar{u}_z d\theta}{d\bar{l}_\theta}$$

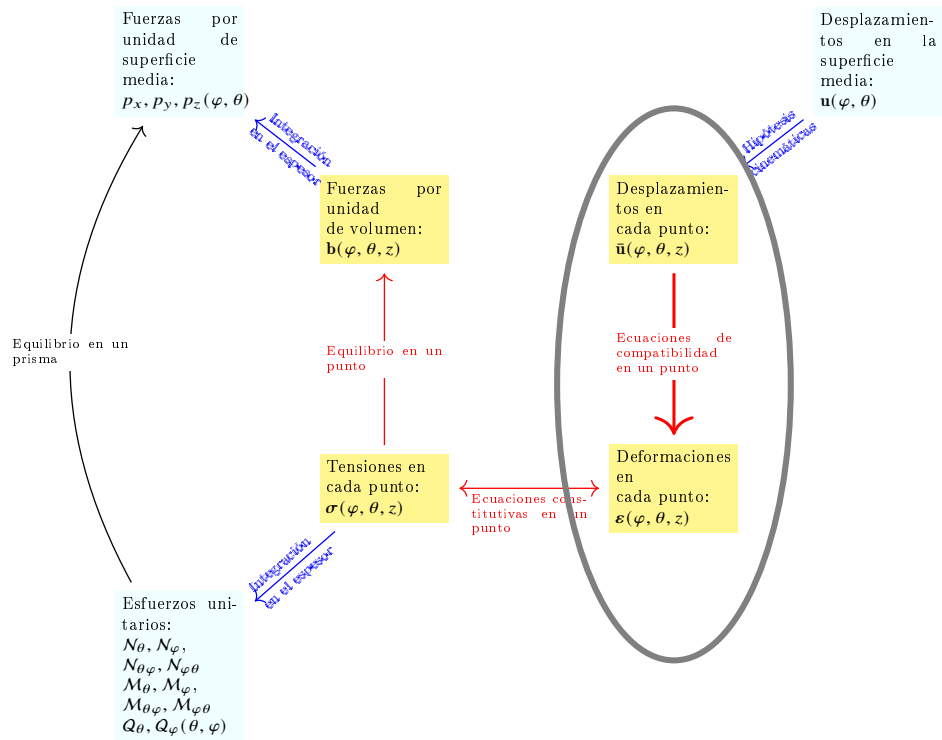


Figura 3.2: Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones de compatibilidad a nivel de punto.

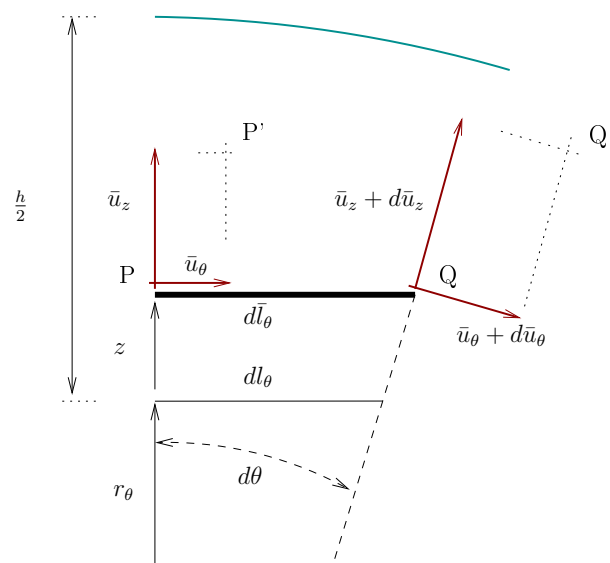


Figura 3.3: Elongación de un segmento diferencial  $d\bar{l}_\theta$  (plano  $\theta - z$ )

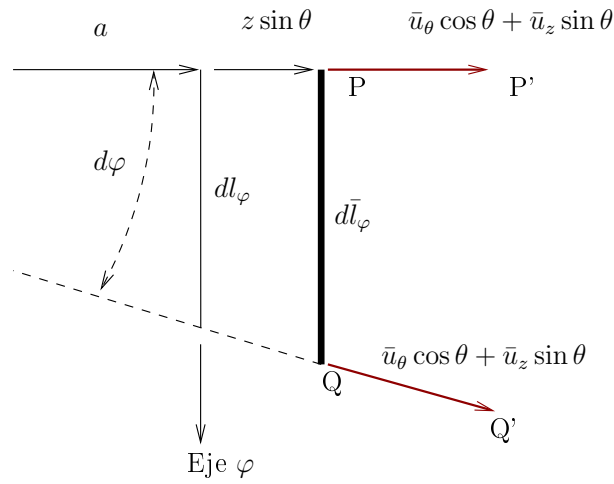


Figura 3.4: Elongación de un segmento diferencial  $d\bar{l}_\varphi$  (plano del paralelo)

Teniendo en cuenta que,  $d\bar{l}_\theta = (r_\theta + z)d\theta$  y  $d\bar{u}_\theta = \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} d\theta$  se deduce que

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_\theta + z} \left( \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_z \right)$$

**Componente  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ :** En la figura 3.4 se muestra de nuevo el desplazamiento del punto  $P$  y en un punto  $Q$  separado por una distancia diferencial  $d\bar{l}_\varphi$ . El desplazamiento en ambos puntos será el mismo, ya que estamos en un caso axilsimétrico. En la figura aparece la componente del desplazamiento de ambos puntos en el plano del paralelo.

El elemento diferencial de longitud antes de la deformación es  $d\bar{l}_\varphi = \bar{a}d\varphi = (a + z \text{ sen } \theta)d\varphi = (r_\varphi + z) \text{ sen } \theta d\varphi$ , mientras que la elongación será la proyección del desplazamiento del punto  $Q$  en el eje  $\varphi$ , es decir,

$$\Delta d\bar{l}_\varphi = (\bar{u}_\theta \cos \theta + \bar{u}_z \text{ sen } \theta)d\varphi$$

donde se ha aplicado la simplificación  $\text{sen } d\varphi \approx d\varphi$ . Por tanto,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\Delta d\bar{l}_\varphi}{d\bar{l}_\varphi} = \frac{(\bar{u}_\theta \cos \theta + \bar{u}_z \text{ sen } \theta)d\varphi}{(r_\varphi + z) \text{ sen } \theta} = \frac{(\bar{u}_\theta \cos \theta + \bar{u}_z \text{ sen } \theta)}{(r_\varphi + z) \text{ sen } \theta}$$

y simplificando,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r_\varphi + z} (\cot \theta \bar{u}_\theta + \bar{u}_z)$$

Resumiendo, las ecuaciones de compatibilidad para el caso axilsimétrico vienen dadas por,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(\theta, z) &= \frac{1}{r_\varphi + z} (\cot \theta \bar{u}_\theta + \bar{u}_z) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(\theta, z) &= \frac{1}{r_\theta + z} \left( \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_z \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

### 3.2.2. Caso axilsimétrico: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina

En la figura 3.1 se muestran los movimientos de un punto  $P$  y el punto  $O$  que se encuentra debajo de  $P$  en la superficie media, de acuerdo con las hipótesis de cinemáticas. Es decir, si  $P$  tiene coordenadas  $(\varphi, \theta, z)$ ,  $O$  es el punto  $(\varphi, \theta, 0)$ . Como puede observarse, los puntos no se mueven de manera independiente si no que están ligados por el hecho de que, primero, el segmento  $OP$  permanece recto, segundo, que permanece perpendicular a la superficie media tras la deformación, y tercero, que es inelongable, que son las tres hipótesis cinemáticas vistas en la sección 3.1.

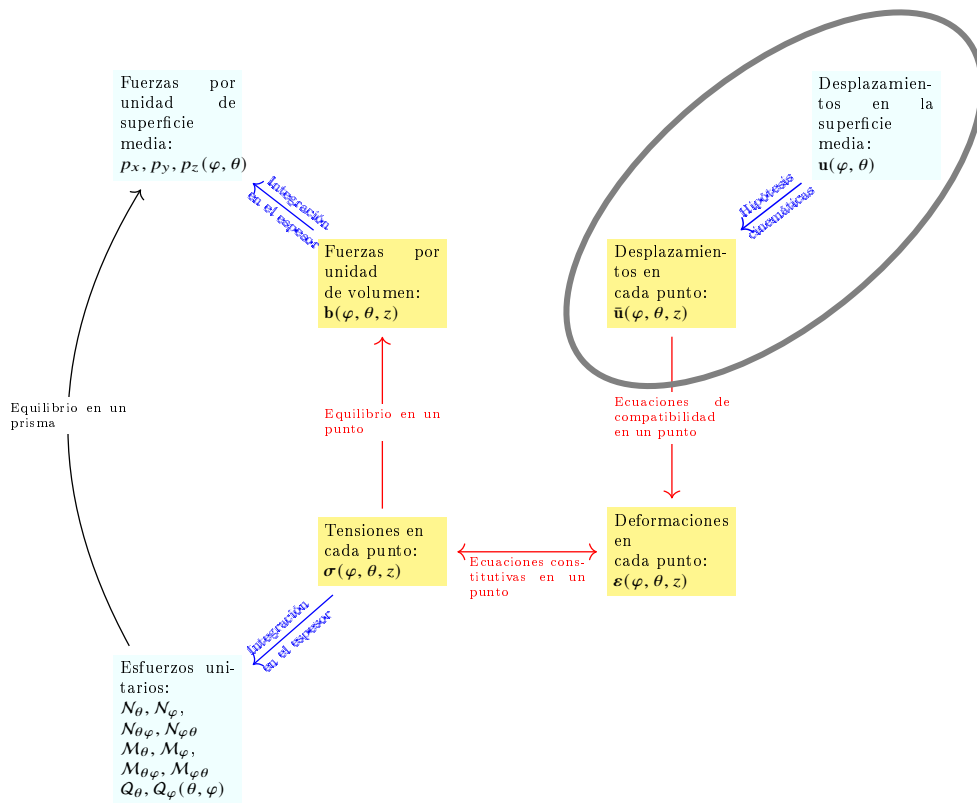


Figura 3.5: Diagrama de Tonti para láminas: desplazamientos en la lámina, conocidos los de la superficie media.

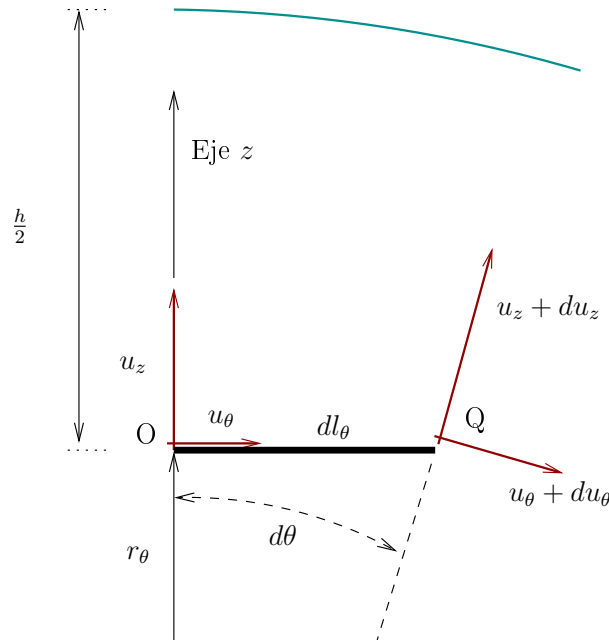


Figura 3.6: Giro  $\omega_\varphi$  de la superficie media en función de los desplazamientos de la misma y sus derivadas

Si denominamos  $\omega_\varphi = \omega_\varphi(\theta)$  al giro de la tangente a la superficie media en  $O$  (positivo antihorario), que es igual al giro de la normal, entonces es fácil deducir que,

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta(P) &= u_\theta(O) - \omega_\varphi z \\ \bar{u}_z(P) &= \bar{u}_z(O) = w \end{aligned} \quad (3.2)$$

El giro a su vez, podemos relacionarlo con los desplazamientos en la superficie media y sus derivadas, de acuerdo con el diagrama que se muestra en la figura 3.6, que repite el diagrama que figura en 3.3, pero ahora para dos puntos que están en la superficie media ( $z = 0$ ).

Para obtener el giro, basta calcular el desplazamiento relativo de los puntos  $O$  y  $Q$  en la dirección normal al segmento  $dl_\theta$ , es decir, el eje  $z$ , que será,

$$\Delta w = (w + dw) \cos d\theta - w - (u_\theta + du_\theta) \operatorname{sen} d\theta$$

Aplicando de nuevo las aproximaciones  $\cos d\theta \simeq 1$ ,  $\operatorname{sen} d\theta \simeq d\theta$ , operando y despreciando términos de orden superior se obtiene,

$$\Delta w = dw - u_\theta d\theta$$

de modo que el giro será,

$$\omega_\varphi = \frac{\Delta w}{dl_\theta} = \frac{dw - u_\theta d\theta}{dl_\theta}$$

y teniendo en cuenta que,  $dl_\theta = r_\theta d\theta$  y que  $dw = \frac{dw}{d\theta} d\theta$  el giro queda de la forma,

$$\omega_\varphi = \frac{dw}{r_\theta d\theta} - \frac{u_\theta}{r_\theta}$$

Obtenido el giro, se sustituye en las ecuaciones 3.2 para obtener,

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta(\theta, z) &= \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) u_\theta(\theta) - z \frac{dw}{r_\theta d\theta} \\ \bar{u}_z(\theta, z) &= w(\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Veamos en las siguientes secciones como obtener las relaciones anteriores, pero para el caso general.



### 3.3. \* Caso general: deformaciones y desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina

El cálculo de deformaciones implica el cálculo de las elongaciones y giros de elementos de longitud diferenciales, a lo largo de las coordenadas que definen cada punto. El caso de coordenadas curvilíneas se complica frente a las cartesianas porque la dirección de los ejes locales ( $\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z$ ) cambia al movernos de un punto a otro cercano, y estos cambios hay que tenerlos en cuenta. A diferencia del caso axilsimétrico, en el caso general es complicado realizar el cálculo con diagramas en los que se reflejen los desplazamientos y deformaciones, por lo que se va a realizar el cálculo analíticamente, sin recurrir a dichos diagramas.

#### 3.3.1. Caso general: deformaciones en un punto cualquiera del espesor de la lámina

Para el cálculo de deformaciones, partimos de un elemento diferencial de longitud en un punto de coordenadas  $(\varphi, \theta, z)$  que vendrá dado por,

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dl_\varphi \mathbf{i}_\varphi + dl_\theta \mathbf{i}_\theta + dl_z \mathbf{i}_z = \\ &= (r_\varphi + z) \operatorname{sen}\theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi + (r_\theta + z) d\theta \mathbf{i}_\theta + dz \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

Por otra parte el vector desplazamiento en un punto cualquiera viene dado por,

$$\bar{\mathbf{u}}(\varphi, \theta, z) = \bar{u}_\varphi \mathbf{i}_\varphi + \bar{u}_\theta \mathbf{i}_\theta + \bar{u}_z \mathbf{i}_z$$

y por tanto, el diferencial de desplazamientos será,

$$d\bar{\mathbf{u}} = d\bar{u}_\varphi \mathbf{i}_\varphi + \bar{u}_\varphi d\mathbf{i}_\varphi + d\bar{u}_\theta \mathbf{i}_\theta + \bar{u}_\theta d\mathbf{i}_\theta + d\bar{u}_z \mathbf{i}_z + \bar{u}_z d\mathbf{i}_z \quad (3.4)$$

teniendo en cuenta, como se ha comentado, que los vectores unitarios según las coordenadas curvilíneas cambian al cambiar a un punto cercano, tal y como se analiza en el apéndice A.

Los diferenciales de los vectores unitarios  $d\mathbf{i}_\varphi$ ,  $d\mathbf{i}_\theta$  y  $d\mathbf{i}_z$  pueden proyectarse sobre los ejes originales  $\mathbf{i}_\varphi$ ,  $\mathbf{i}_\theta$  y  $\mathbf{i}_z$ , tal y como se demuestra en el apéndice A, de la forma,

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}_\varphi &= -\cos\theta d\varphi \mathbf{i}_\theta - \operatorname{sen}\theta d\varphi \mathbf{i}_z \\ d\mathbf{i}_\theta &= \cos\theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi - d\theta \mathbf{i}_z \\ d\mathbf{i}_z &= \operatorname{sen}\theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi + d\theta \mathbf{i}_\theta \end{aligned}$$

Llevando estas expresiones a la ecuación que define el diferencial de desplazamiento 3.4 y agrupando términos se llega a,

$$d\bar{\mathbf{u}} = d\bar{U}_\varphi \mathbf{i}_\varphi + d\bar{U}_\theta \mathbf{i}_\theta + d\bar{U}_z \mathbf{i}_z$$

siendo

$$d\bar{U}_\varphi = d\bar{u}_\varphi + \bar{u}_\theta \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z \operatorname{sen}\theta d\varphi \quad (3.5)$$

$$d\bar{U}_\theta = d\bar{u}_\theta - \bar{u}_\varphi \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z d\theta \quad (3.6)$$

$$d\bar{U}_z = d\bar{u}_z - \bar{u}_\varphi \operatorname{sen}\theta d\varphi - \bar{u}_\theta d\theta \quad (3.7)$$

Estas expresiones son las componentes del elemento diferencial de desplazamiento, proyectadas en los vectores coordenados de un punto fijo. A partir de ellas podemos calcular fácilmente las componentes del tensor de deformaciones en las que estamos interesados, es decir,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  y  $\varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta}$ , ya que el resto, podríamos comprobarlo, serán nulas debido a las hipótesis de comportamiento.

Veamos primero  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \left. \frac{d\bar{U}_\varphi}{dl_\varphi} \right|_{\theta, z \text{ cte}} = \left. \frac{d\bar{u}_\varphi + \bar{u}_\theta \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z \operatorname{sen}\theta d\varphi}{(r_\varphi + z) \operatorname{sen}\theta d\varphi} \right|_{\theta, z \text{ cte}}$$

y simplificando,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi} + z} \left( \csc\theta \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} + \cot\theta \bar{u}_{\theta} + \bar{u}_z \right)$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$d\bar{u}_{\varphi}|_{\theta,z \text{ cte}} = \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial z} dz \Big|_{\theta,z \text{ cte}} = \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi$$

Del mismo modo,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{d\bar{U}_{\theta}}{dl_{\theta}} \Big|_{\varphi,z \text{ cte}} = \frac{d\bar{u}_{\theta} - \bar{u}_{\varphi} \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z d\theta}{(r_{\theta} + z)d\theta} \Big|_{\varphi,z \text{ cte}}$$

se reduce a,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_{\theta} + z} \left( \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial \theta} + \bar{u}_z \right)$$

Finalmente, las deformaciones de cizalla se calcularán de manera similar mediante,

$$\gamma_{\theta\varphi} = 2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{d\bar{U}_{\theta}}{dl_{\varphi}} \Big|_{\theta,z \text{ cte}} + \frac{d\bar{U}_{\varphi}}{dl_{\theta}} \Big|_{\varphi,z \text{ cte}}$$

y sustituyendo,

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{d\bar{u}_{\theta} - \bar{u}_{\varphi} \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z d\theta}{(r_{\varphi} + z) \sin\theta d\varphi} \Big|_{\theta,z \text{ cte}} + \frac{d\bar{u}_{\varphi} + \bar{u}_{\theta} \cos\theta d\varphi + \bar{u}_z \sin\theta d\varphi}{(r_{\theta} + z)d\theta} \Big|_{\varphi,z \text{ cte}}$$

que se reduce a,

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi} + z} \left( \csc\theta \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial \varphi} - \cot\theta \bar{u}_{\varphi} + \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \theta} \right)$$

Resumiendo, las deformaciones en un punto cualquiera  $P$  de desplazamientos  $(\bar{u}_{\varphi}, \bar{u}_{\theta}, \bar{u}_z)$  son,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(\varphi, \theta, z) &= \frac{1}{r_{\varphi} + z} \left( \csc\theta \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} + \cot\theta \bar{u}_{\theta} + \bar{u}_z \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(\varphi, \theta, z) &= \frac{1}{r_{\theta} + z} \left( \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial \theta} + \bar{w} \right) \\ \gamma_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, z) &= \frac{1}{r_{\varphi} + z} \left( \csc\theta \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial \varphi} - \cot\theta \bar{u}_{\varphi} + \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como se ha comentado más arriba, podríamos calcular el resto de componentes del tensor de deformaciones, pero no es necesario pues salen cero, debido a las hipótesis de cinemáticas (3.1).

### 3.3.2. Caso general: desplazamientos en un punto cualquiera del espesor de la lámina

Se trata ahora de establecer las ecuaciones marcadas en gris en el diagrama de Tonti 3.5 aplicando las hipótesis cinemáticas introducidas en la sección 3.1.

Estas hipótesis implican que los desplazamientos en un punto  $P$  cualquiera del espesor de la lámina de coordenadas  $(\varphi, \theta, z)$ , pueden calcularse a partir de los mismos desplazamientos del punto  $O$  que se encuentra bajo el mismo en la superficie media, es decir, el punto de coordenadas  $(\varphi, \theta, 0)$ .

Así, los puntos  $P$  y  $O$  se moverán tal y como se ilustra en la 3.1, teniendo en cuenta que las hipótesis sobre la normal implican que ésta se desplaza y gira como un sólido rígido. Los desplazamientos del punto  $P$  vamos a denominarlos  $\bar{u}_{\varphi}$ ,  $\bar{u}_{\theta}$  y  $\bar{u}_z$ , mientras que los de  $O$  serán simplemente  $u_{\varphi}$ ,  $u_{\theta}$  y  $w$ . Las hipótesis cinemáticas implican que,

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + z \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad (3.9)$$

siendo  $\boldsymbol{\omega}$  la rotación de la superficie media de la lámina en el punto  $O$  y  $\mathbf{n}$  la normal en el mismo punto. La normal es simplemente  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_z$  de modo que

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \omega_\theta \\ -\omega_\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las componentes del vector de rotación de la superficie media serán el cambio en las pendientes de la misma que vienen dadas por,

$$\omega_\varphi = \left. \frac{dU_z}{dl_\theta} \right|_{\varphi, z \text{ cte}} \quad \omega_\theta = - \left. \frac{dU_z}{dl_\varphi} \right|_{\theta, z \text{ cte}}$$

y teniendo en cuenta el valor de  $dU_z$  dado por 3.7 y simplificando quedan,

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \frac{1}{r_\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r_\theta} \\ \omega_\theta &= - \frac{1}{r_\varphi \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r_\varphi} \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la relación 3.9

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varphi &= \frac{r_\varphi + z}{r_\varphi} u_\varphi - \frac{z}{r_\varphi \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \bar{u}_\theta &= \frac{r_\theta + z}{r_\theta} u_\theta - \frac{z}{r_\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \bar{u}_z &= w \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3.3. Simplificación de las ecuaciones generales de desplazamientos y deformaciones para el caso axilsimétrico

Las ecuaciones para el caso axilsimétrico las hemos obtenido directamente a través de diagramas, pero pueden obtenerse también simplificando las ecuaciones generales, teniendo en cuenta que en ese caso más simple  $u_\varphi = 0$ ,  $\varepsilon_{\varphi\theta} = 0$  y que cualquier derivada con respecto a  $\varphi$  es nula.

Aplicando estas condiciones, los desplazamientos en cualquier punto en función de los de la superficie media se reducen a,

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta &= \frac{r_\theta + z}{r_\theta} u_\theta - \frac{z}{r_\theta} \frac{dw}{d\theta} \\ \bar{u}_z &= w \end{aligned} \quad (3.11)$$

y en este caso las deformaciones quedan,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(\theta, z) &= \frac{1}{r_\varphi + z} (\cot \theta \bar{u}_\theta + \bar{u}_z) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(\theta, z) &= \frac{1}{r_\theta + z} \left( \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_z \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ecuaciones que coinciden con (3.3) y (3.1), respectivamente.

En este caso axilsimétrico es posible combinar las ecuaciones anteriores para eliminar los desplazamientos  $\bar{\mathbf{u}}$ , de modo que se obtengan las relaciones directas entre los desplazamientos en la superficie media  $\mathbf{u} = (u_\theta, w)$  y las deformaciones  $(\varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\theta\theta})$ . Para el caso general, aunque es posible, las ecuaciones resultantes son inmanejables, por lo que no merece la pena.

Sustituyendo ahora en las deformaciones los valores de  $\bar{u}_\theta$  y  $\bar{u}_z$  en función de  $u_\theta$  y  $w$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\cot \theta}{r_\theta} \frac{r_\theta + z}{r_\varphi + z} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi + z} w - \frac{\cot \theta}{r_\theta} \frac{z}{r_\varphi + z} \frac{dw}{d\theta} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r_\theta} \frac{du_\theta}{d\theta} + \frac{1}{r_\theta + z} w - \frac{z}{r_\theta^2 (r_\theta + z)} \frac{dr_\theta}{d\theta} \left( u_\theta - \frac{dw}{d\theta} \right) - \frac{z}{r_\theta (r_\theta + z)} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Estas complejas expresiones pueden simplificarse para el caso de “láminas de pequeña curvatura” (gran radio de curvatura, relativo al espesor), que se consideran aquellas en las que los radios de curvatura son mucho mayores que el espesor, y por tanto  $r_\theta + z \simeq r_\theta$  y  $r_\varphi + z \simeq r_\varphi$ . Además, también se considera que los radios varían despacio de modo que  $\frac{dr_\theta}{d\theta} \simeq 0$ .

Aplicando estas condiciones se obtiene,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r_\varphi} \left( \cot\theta u_\theta + w - z \cot\theta \frac{dw}{r_\theta d\theta} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{w}{r_\theta} - z \frac{d^2w}{r_\theta^2 d\theta^2}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Como puede verse, en este caso las deformaciones sí varían linealmente en el espesor, tal y como ocurre en el caso de la teoría de vigas, o de placas.



# Capítulo 4

## Resolución completa del estado de membrana para el caso axilsimétrico

### Índice

---

4.1. Introducción . . . . .	41
4.2. Relaciones entre esfuerzos unitarios de membrana y desplazamientos para una lámina de gran radio de curvatura bajo carga axilsimétrica. . . . .	43
4.3. Cálculo de los desplazamientos conocidos los esfuerzos . . . . .	44
4.4. Particularización para láminas de generatriz sencilla . . . . .	45
4.4.1. Particularización para láminas esféricas . . . . .	45
Desplazamientos de membrana para una cúpula esférica de espesor constante bajo peso propio . . . . .	46
4.4.2. Particularización para láminas cilíndricas . . . . .	47
4.4.3. Particularización para láminas cónicas . . . . .	48

---

### 4.1. Introducción

En este capítulo vamos a obtener las relaciones entre los desplazamientos en la superficie media ( $u_\varphi$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ ) y los esfuerzos del estado de membrana  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$ . Para ello bastará aplicar las ecuaciones que aparecen remarcadas en el diagrama de Tonti de la figura 4.1 y añadir las calculadas en las secciones 3.3.1 y 3.3.2.

Para las ecuaciones constitutivas supondremos que el material es elástico y lineal, de modo que la relación entre tensiones y deformaciones vendrá dada por la ley de Hooke,

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) \\ \sigma_{\varphi\theta} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\varphi\theta}\end{aligned}\tag{4.1}$$

La relación entre los esfuerzos de membrana y las tensiones vienen dadas por las ecuaciones

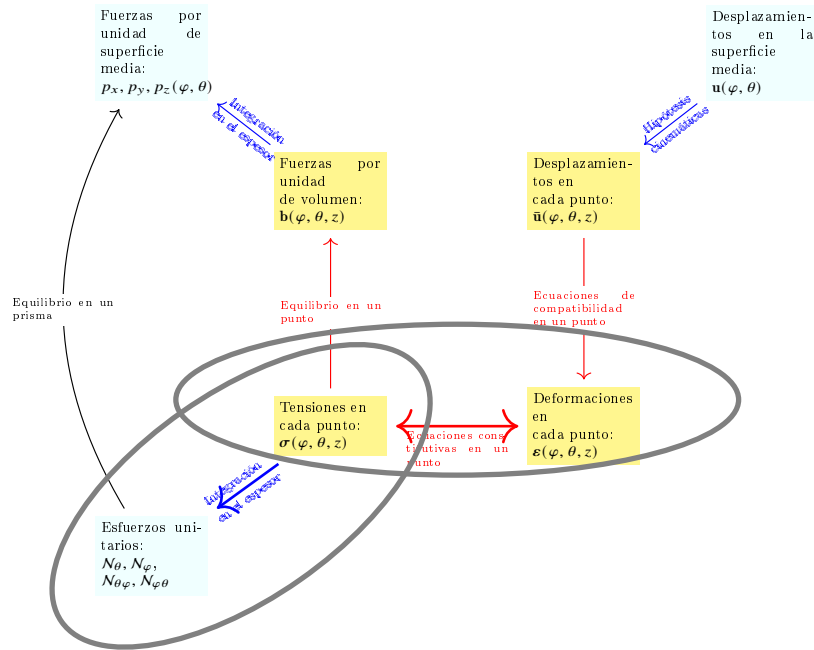


Figura 4.1: Diagrama de Tonti para láminas: ecuaciones constitutivas y relación esfuerzos-tensiones.

1.3, que repetimos a continuación,

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \sigma_{\varphi\varphi} dz \\ N_{\varphi\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\varphi\theta} dz \\ N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \sigma_{\theta\theta} dz \\ N_{\theta\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \sigma_{\theta\varphi} dz \end{aligned}$$

Sustituyendo en ellas las tensiones dadas por la ley de Hooke 4.1 se llega a,

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) dz \\ N_{\varphi\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) \varepsilon_{\varphi\theta} dz \\ N_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi}\right) (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) dz \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{E}{1+\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{z}{r_\theta}\right) \varepsilon_{\varphi\theta} dz \end{aligned}$$

Para completar el desarrollo habría que sustituir el valor las deformaciones ( $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\theta} = \varepsilon_{\theta\varphi}$ ), en función de los desplazamientos ( $\bar{u}_\varphi$ ,  $\bar{u}_\theta$ ,  $\bar{u}_z$ ), que se obtuvieron en la sección 3.3.1, dadas por las ecuaciones 3.8, y a continuación sustituir los valores de ( $\bar{u}_\varphi$ ,  $\bar{u}_\theta$ ,  $\bar{u}_z$ ) en función de los desplazamientos en la superficie media ( $u_\varphi$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ ), que se obtuvieron en las sección 3.3.2, y que vienen dados por las ecuaciones 3.10. Realizando la integral en el espesor en las expresiones

resultantes obtendríamos directamente la relación entre esfuerzos de membrana  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\varphi\theta}$  y los desplazamientos en la superficie media.

Sin embargo, tales operaciones son laboriosísimas, y conducen a expresiones difíciles de manejar. Por ello vamos a realizarlas en la siguiente sección pero sólo en el caso particular de *láminas de gran radio de curvatura* bajo carga axilsimétrica. Veremos que en este caso las ecuaciones resultante pueden integrarse fácilmente con lo que se obtiene la solución en desplazamientos a partir de los esfuerzos de membrana, y por lo tanto la solución completa del problema.

## 4.2. Relaciones entre esfuerzos unitarios de membrana y desplazamientos para una lámina de gran radio de curvatura bajo carga axilsimétrica.

Repitamos en este caso todas las ecuaciones que tenemos que manejar, simplificadas teniendo en cuenta que  $r_i \gg z$  y las condiciones de axilsimetría.

### Relaciones entre desplazamiento en cualquier punto y desplazamientos en la superficie media.

Las dedujimos en la sección 3.3.3 y venían dados por las ecuaciones 3.11, y aplicando la simplificación  $r_\theta + z \simeq r_\theta$  quedan,

$$\begin{aligned}\bar{u}_\theta &= u_\theta - z \frac{dw}{r_\theta d\theta} \\ \bar{u}_z &= w\end{aligned}\quad (4.2)$$

### Relaciones entre desplazamiento en cualquier punto y deformaciones en cualquier punto

Las dedujimos en la sección 3.3.3 y venían dados por las ecuaciones 3.12, y aplicando ahora las simplificaciones  $r_\theta + z \simeq r_\theta$  y  $r_\varphi + z \simeq r_\varphi$  quedan,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r_\varphi} (\cot\theta \bar{u}_\theta + \bar{u}_z) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{d\bar{u}_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{\bar{u}_z}{r_\theta}\end{aligned}\quad (4.3)$$

### Ecuaciones constitutivas

Son las mismas ecuaciones 4.1, salvo que  $\varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0$  reduciéndose a,

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi})\end{aligned}\quad (4.4)$$

### Relación entre esfuerzos unitarios y tensiones

Son las dadas en el sección 1.5.3 por las ecuaciones 1.4 pero eliminado  $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$  por axilsimetría,

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz \\ N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz\end{aligned}\quad (4.5)$$

En estos 4 conjuntos de ecuaciones lo que vamos a hacer es eliminar las variables a nivel de punto, tensiones ( $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ), deformaciones ( $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ) y desplazamientos ( $\bar{u}_\varphi$ ,  $\bar{u}_\theta$ ,  $\bar{u}_z$ ), para



obtener unas ecuaciones que relacionen directamente los esfuerzos unitarios ( $\mathcal{N}_\varphi$ ,  $\mathcal{N}_\theta$ ) con los desplazamientos en la superficie media ( $u_\varphi$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ )

En primer lugar, sustituimos la ley de Hooke 4.4 en la definición de los esfuerzos unitarios 4.5 lo que conduce a,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) dz \\ \mathcal{N}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) dz\end{aligned}\quad (4.6)$$

Por otra parte, sustituimos las ecuaciones 4.2 en las 4.3 y simplificamos se llega a,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w - z \frac{\cot\theta}{r_\varphi} \frac{dw}{r_\theta d\theta} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w - \frac{z}{r_\theta^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2}\end{aligned}\quad (4.7)$$

que son las ecuaciones 3.14 que dedujimos en la sección 3.3.3.

Ambas componentes de las deformaciones son lineales de la forma  $\varepsilon_{ij} = A + Bz$  por lo que al integrarlas en el espesor se obtiene,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{ij} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (A + Bz) dz = hA$$

Por tanto, sustituyendo las deformaciones 4.7 en los esfuerzos 4.6 e integrando se llega a,

$$\mathcal{N}_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w + \nu \left( \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w \right) \right\} \quad (4.8)$$

$$\mathcal{N}_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w + \nu \left( \frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w \right) \right\} \quad (4.9)$$

que son las relaciones buscadas, y cuya integración, supuestos conocidos los esfuerzos, va a proporcionar los valores de  $u_\theta(\theta)$  y  $w(\theta)$  de la superficie media de la lámina.

### 4.3. Cálculo de los desplazamientos conocidos los esfuerzos

Las ecuaciones 4.8 y 4.9 pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w + \nu \left( \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w \right) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \mathcal{N}_\varphi \\ \frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w + \nu \left( \frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w \right) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \mathcal{N}_\theta\end{aligned}$$

Multiplicando ahora la primera ecuación por  $\nu$  y restándosela a la segunda se obtiene,

$$\frac{du_\theta}{r_\theta d\theta} + \frac{1}{r_\theta} w = \frac{\mathcal{N}_\theta - \nu\mathcal{N}_\varphi}{Eh} \quad (4.10)$$

e igualmente, multiplicando la segunda por  $\nu$  y restándosela a la primera se llega a,

$$\frac{\cot\theta}{r_\varphi} u_\theta + \frac{1}{r_\varphi} w = \frac{\mathcal{N}_\varphi - \nu\mathcal{N}_\theta}{Eh} \quad (4.11)$$

Si ahora se multiplica la ecuación 4.10 por  $r_\theta$  y se le resta la ecuación 4.11 multiplicada por  $r_\varphi$  se llega a la ecuación,

$$\frac{du_\theta}{d\theta} - \cot\theta u_\theta = \frac{r_\theta r_\varphi}{Eh} F(\theta) \quad (4.12)$$

siendo

$$F(\theta) = \frac{N_\theta - \nu N_\varphi}{r_\varphi} - \frac{N_\varphi - \nu N_\theta}{r_\theta}$$

Ésta ecuación diferencial nos permitirá calcular el valor de  $u_\theta$ , conocidos los esfuerzos. Para ello observemos en primer lugar que,

$$\frac{d\frac{1}{\text{sen}\theta}}{d\theta} = -\frac{\cot\theta}{\text{sen}\theta}$$

de modo que si dividimos en la 4.12 por  $\text{sen}\theta$  podemos re-escribirla como,

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{u_\theta}{\text{sen}\theta} \right) = \frac{F(\theta)r_\varphi r_\theta}{Eh \text{sen}\theta}$$

e integrando se obtiene,

$$u_\theta(\theta) = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta_0} u_\theta(\theta_0) + \text{sen}\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{F(\theta')r_\varphi r_\theta}{Eh \text{sen}\theta'} d\theta'$$

Conocido  $u_\theta(\theta)$  el desplazamiento radial  $w(\theta)$  puede obtenerse despejándolo en la ecuación 4.11,

$$w(\theta) = \frac{r_\varphi}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) - \cot\theta u_\theta$$

con lo que queda resuelto el problema.

En ocasiones es útil calcular el desplazamiento en la dirección normal al paralelo (llamemoslo  $\delta$ ), así como el giro del meridiano, que denominamos  $\omega_\varphi$  en la sección 3.3.2.

Es fácil comprobar que estas magnitudes son,

$$\begin{aligned} \delta &= \cos\theta u_\theta + \text{sen}\theta w \\ \omega_\varphi &= \frac{dw}{r_\theta d\theta} - \frac{u_\theta}{r_\theta} \end{aligned}$$

y operando se obtiene,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_\varphi \text{sen}\theta}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) \\ \omega_\varphi &= \frac{d}{r_\theta d\theta} \left[ \frac{1}{Eh} r_\varphi (N_\varphi - \nu N_\theta) \right] - \frac{r_\varphi \cot\theta}{Eh} F(\theta) \end{aligned}$$

## 4.4. Particularización para láminas de generatriz sencilla

Vamos a ver en esta sección como quedan las ecuaciones anteriores para el caso de láminas de generatriz conocida simple, a saber: láminas esféricas, cilíndricas y cónicas.

### 4.4.1. Particularización para láminas esféricas

En este caso los radios son constantes y de valor  $r_\theta = r_\varphi = R$  de modo que,

$$F(\theta) = \frac{1+\nu}{R} (N_\theta - N_\varphi)$$

y la expresión para los desplazamientos se reduce a,

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta) &= \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta_0} u_\theta(\theta_0) + R(1+\nu) \text{sen}\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{N_\theta - N_\varphi}{Eh \text{sen}\theta'} d\theta' \\ w(\theta) &= \frac{R}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) - \cot\theta u_\theta \end{aligned}$$

El desplazamiento  $\delta$  y giro  $\omega_\varphi$  quedan,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{R \text{sen}\theta}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) \\ \omega_\varphi &= \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) \right] - \frac{(1+\nu) \cot\theta}{Eh} (N_\theta - N_\varphi) \end{aligned}$$

## Desplazamientos de membrana para una cúpula esférica de espesor constante bajo peso propio

Para una lámina esférica sometida a peso propio, obtuvimos los esfuerzos en la sección 2.3.4,

$$\begin{aligned} N_{\theta}(\theta) &= -\frac{\gamma h R}{1 + \cos\theta} \\ N_{\varphi}(\theta) &= -\gamma h R \left( \cos\theta - \frac{1}{1 + \cos\theta} \right) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$F(\theta) = \gamma h(1 + \nu)/(Eh) \left( \cos\theta - \frac{2}{1 + \cos\theta} \right)$$

Sustituyendo en la expresión del  $u_{\theta}$  el valor de los esfuerzos se obtiene,

$$u_{\theta}(\theta) = R(1 + \nu) \operatorname{sen}\theta \int_0^{\theta} \frac{N_{\theta} - N_{\varphi}}{Eh \operatorname{sen}\theta'} d\theta' = \frac{\gamma h R^2 (1 + \nu)}{Eh} \operatorname{sen}\theta \int_0^{\theta} \frac{\cos\theta' + \cos^2\theta' - 2}{\operatorname{sen}\theta'(1 + \cos\theta')} d\theta'$$

Esta integral puede calcularse pasando al ángulo mitad,

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\cos\theta' + \cos^2\theta' - 2}{\operatorname{sen}\theta'(1 + \cos\theta')} d\theta' = \log[\cos^2(\theta/2)] - 1/2 \tan^2(\theta/2)$$

y por tanto,

$$u_{\theta}(\theta) = \frac{\gamma R^2 (1 + \nu)}{E} \operatorname{sen}\theta \left( \log[\cos^2(\theta/2)] - 1/2 \tan^2(\theta/2) \right)$$

A partir de esta expresión y de los esfuerzos puede calcularse el desplazamiento normal  $w(\theta)$ , y se obtiene,

$$w(\theta) = \frac{\gamma R^2}{2E} \left( 2(1 + \nu) - \cos\theta [3 + \nu + 2(1 + \nu) \log[\cos^2(\theta/2)]] \right)$$

Aplicando las fórmulas de  $\delta$  y  $\omega_{\varphi}$  se llega a las expresiones,

$$\delta(\theta) = \frac{\gamma R^2}{2E} \tan(\theta/2) \left( (1 + 2\nu) - 2 \cos\theta - \cos(2\theta) \right)$$

y

$$\omega_{\varphi}(\theta) = \frac{(2 + \nu)\gamma R}{2E} \operatorname{sen}\theta$$

Nótese que el valor de los desplazamientos no depende del espesor.

Calculemos estas expresiones en  $\theta = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} u_{\theta}(\pi/2) &= -\frac{(1 + \nu)\gamma R^2}{2E} (1 + 2 \log 2) \\ w(\pi/2) &= \frac{(1 + \nu)\gamma R^2}{2E} \\ \delta(\pi/2) &= \frac{(1 + \nu)\gamma R^2}{2E} \\ \omega_{\varphi}(\pi/2) &= \frac{(2 + \nu)\gamma R}{E} \end{aligned}$$

y en  $\theta = 0$ ,

$$w(0) = -\frac{(1 - \nu)\gamma R^2}{2E}$$

siendo nulos los demás.

En la figura 4.2 se representa la deformada de la cúpula semiesférica, dada por las expresiones anteriores.

Como puede observarse no se cumple que los desplazamientos sean nulos en la base de la cúpula. No es posible con la solución de membrana cumplir esta condición, pero si es factible que

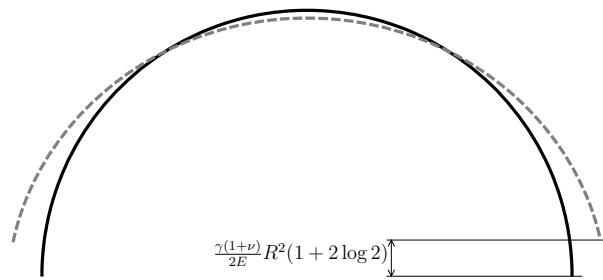


Figura 4.2: Deformada de una cúpula semiesférica sometida a peso propio

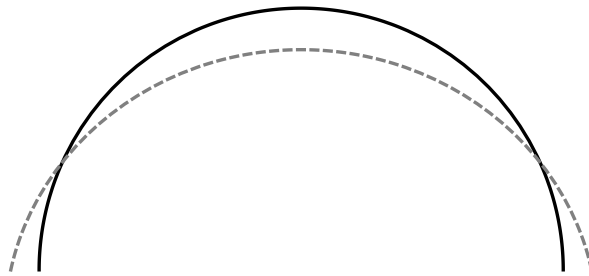


Figura 4.3: Deformada corregida de una cúpula semiesférica sometida a peso propio

al menos la componente vertical lo sea. Para ello basta sumar a esta solución un desplazamiento de sólido rígido hacia abajo. Para ello calculemos la componente vertical (positiva hacia abajo) del desplazamiento en  $\theta = \pi/2$ ,

$$u_V(\pi/2) = u_\theta(\pi/2) \sin(\pi/2) - w(\pi/2) \cos(\pi/2) = u_\theta(\pi/2) = -\frac{\gamma(1+\nu)R^2(1+2\log 2)}{2E}$$

Si restamos esta expresión al desplazamiento de la cúpula se obtiene la deformada que se muestra en la figura 4.3, que como se observa, cumple la condición de desplazamiento vertical nulo en la base, pero no la del desplazamiento radial. El desplazamiento vertical total en la clave de la cúpula será entonces,

$$w_T(\theta = 0) = -\frac{\gamma(1+\nu)R^2(1+2\log 2)}{2E} - \frac{\gamma R^2}{2E}(1-\nu) = -\frac{\gamma R^2}{2E}(2(1+\log 2) + 2\nu \log 2)$$

añadiendo el desplazamiento vertical de sólido rígido.

#### 4.4.2. Particularización para láminas cilíndricas

En este caso  $r_\varphi = R$  es constante mientras que  $r_\theta \rightarrow \infty$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de modo que utilizamos la longitud meridional  $s$  como variable en vez de  $\theta$ . En ese caso sustituiremos  $r_\theta d\theta$  por  $ds$ , tanto en las derivadas como en las integrales. Haciendo estas particularizaciones tenemos que,

$$F(s) = \frac{N_\theta - \nu N_\varphi}{R}$$

ya que  $r_\theta \rightarrow \infty$ . Las expresiones para los desplazamientos se reducen a,

$$u_s(s) = u_s(s_0) + \int_{s_0}^s \frac{1}{Eh} (N_s - \nu N_\varphi) ds' \quad (4.13)$$

y

$$w(s) = \frac{R}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s) \quad (4.14)$$

En este caso  $\delta = w$  y el giro  $\omega_\varphi$  es simplemente  $\omega_\varphi = \frac{dw}{ds}$  por lo que,

$$\delta = \frac{R}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s)$$

$$\omega_\varphi = R \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s) \right]$$

### 4.4.3. Particularización para láminas cónicas

En este caso  $r_\theta \rightarrow \infty$  y  $\theta = \pi/2 - \alpha$  es constante; de nuevo hacemos la sustitución de la variable  $\theta$  por  $s$ , de modo que  $r_\theta d\theta = ds$ , tanto en las derivadas como en las integrales. Se obtiene entonces que,

$$F(\theta) = F(s) = \frac{N_s - \nu N_\varphi}{r_\varphi}$$

y por tanto el integrando queda,

$$\frac{F(s)r_\varphi r_\theta d\theta'}{Eh \operatorname{sen}\theta'} = \frac{N_s - \nu N_\varphi}{Eh \cos \alpha} ds'$$

y las expresiones para los desplazamientos se reducen a,

$$u_s(s) = u_s(s_0) + \int_{s_0}^s \frac{1}{Eh} (N_s - \nu N_\varphi) ds'$$

$$w(s) = \frac{s \tan \alpha}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s) - \tan \alpha u_s$$

donde se ha sustituido  $r_\varphi = s \tan \alpha$ .

Para  $\delta$  y  $\omega_\varphi$  se obtiene,

$$\delta = \frac{s \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s)$$

$$\omega_\varphi = s \tan \alpha \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s) \right] + \frac{(1 + \nu) \tan \alpha}{Eh} (N_\varphi - N_s)$$

## Capítulo 5

# Flexión en láminas cilíndricas circulares bajo carga axilsimétrica

### Índice

---

5.1. Esfuerzos en el prisma diferencial . . . . .	50
5.2. Ecuaciones de equilibrio . . . . .	50
5.3. Particularización del resto de ecuaciones para láminas cilíndricas bajo carga axilsimétrica . . . . .	54
5.4. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos en la superficie media . . . . .	55
5.5. Cálculo de las tensiones en un punto cualquiera del espesor conocidos los esfuerzos . . . . .	57
5.6. Solución de las ecuaciones por superposición de estados . . . . .	58
5.6.1. Solución de la ecuación diferencial homogénea de la flecha . . . . .	59
5.6.2. Tabla resumen de las 4 soluciones de la ecuación homogénea . . . . .	62
5.7. Problemas útiles de flexión: cilindros de “gran longitud” . . . . .	63
5.7.1. Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 1$ y $\omega_\varphi(0) = 0$ . . . . .	63
5.7.2. Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 0$ y giro $\omega_\varphi(0) = 1$ . . . . .	64
5.7.3. Cilindro de gran longitud con momento $Q_s(0) = 1$ y cortante $M_s(0) = 0$ . . . . .	65
5.7.4. Cilindro de gran longitud con momento $Q_s(0) = 0$ y cortante $M_s(0) = 1$ . . . . .	66
5.8. Tabla resumen de soluciones para un cilindro de gran longitud . . . . .	67
5.9. Matriz de rigidez y de flexibilidad en el extremo de un cilindro de gran longitud . . . . .	68
5.9.1. Relación de flexibilidad . . . . .	68
5.9.2. Relación de rigidez . . . . .	69
5.10. Depósito cilíndrico a presión con extremos planos infinitamente rígidos y libertad de movimientos longitudinales . . . . .	70

---

En los capítulos anteriores hemos planteado las ecuaciones para las láminas, pero las hemos resuelto considerando que únicamente actúan los llamados *esfuerzos de membrana*. En este capítulo vamos a plantear el problema completo, aunque solamente en el caso particular de láminas cilíndricas circulares bajo carga axilsimétrica, ya que el problema general, aunque es factible plantearlo, da lugar a ecuaciones de gran complejidad que no es posible resolver analíticamente para el caso general.

El caso de la flexión de láminas cilíndricas circulares bajo carga axilsimétrica tiene dos características atractivas: por una parte es relativamente fácil de plantear y resolver de manera general, para cualesquiera carga y condiciones de contorno (*CCdC* en lo sucesivo), y por otra ilustra cómo es el comportamiento resistente de las láminas a flexión en general, lo que nos va a

permitir profundizar en ese conocimiento general, a través de este caso particular, más manejable matemáticamente.

Si recordamos el diagrama de Tonti para láminas que se muestra en la 1.4, hay que señalar que en los capítulos anteriores hemos desarrollado de manera totalmente general las siguientes ecuaciones (de izquierda a derecha y de arriba a abajo en el diagrama):

1. Ecuaciones que ligán los desplazamientos en la superficie media ( $\mathbf{u}(\varphi, \theta)$ ) con los desplazamientos en cualquier punto ( $\bar{\mathbf{u}}(\varphi, \theta, z)$ ) (hipótesis cinemáticas, 3.10);
2. Ecuaciones que ligán los desplazamientos en cualquier punto ( $\bar{\mathbf{u}}(\varphi, \theta, z)$ ) con las deformaciones en ese punto ( $\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi, \theta, z)$ ) (ecuaciones de compatibilidad, 3.8);
3. Ecuaciones que ligán las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(\varphi, \theta, z)$  con las tensiones en cualquier punto de la lámina ( $\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta, z)$ ) (ecuaciones constitutivas o ley de comportamiento, 4.1);
4. Ecuaciones que ligán las tensiones a lo largo del espesor ( $\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta, z)$ ) con los esfuerzos unitarios (1.4 y 1.5).

Por tanto para completar las ecuaciones del problema general de láminas de revolución bajo todo tipo de carga y esfuerzo, solo faltaría plantear las ecuaciones de equilibrio en el prisma diferencial teniendo en cuenta *todos* los esfuerzos posibles, incluyendo los cortantes, flectores y torsores.

En este capítulo vamos a hacer ese último paso, aunque limitándonos al caso de láminas cilíndricas bajo carga axilsimétrica, y a continuación se van a particularizar el resto de ecuaciones ya planteadas para este el caso más simple. Combinando todas las ecuaciones, encontraremos la ecuación diferencial que gobierna los desplazamientos en la lámina y finalmente la resolveremos bajo condiciones cualesquiera de contorno y carga.

En todo caso vamos a aplicar también la hipótesis, perfectamente razonable para las aplicaciones en la obra civil y edificación, de gran radio de curvatura relativo.

## 5.1. Esfuerzos en el prisma diferencial

En el caso que estamos considerando, las condiciones de axilsimetría implican que los esfuerzos antimétricos respecto a cualquier plano que contenga a la directriz son nulos:

$$\mathcal{N}_{\theta\varphi} = \mathcal{N}_{\varphi\theta} = 0 \qquad \mathcal{M}_{\theta\varphi} = \mathcal{M}_{\varphi\theta} = 0 \qquad \mathcal{Q}_\varphi = 0$$

Además, la variación en la coordenada  $\varphi$  es nula de modo que en todas las ecuaciones  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi} = 0$  para cualquier función.

Finalmente, puesto que la lámina es cilíndrica, sustituimos la variable  $\theta$  por la distancia meridional  $s$ .

En conclusión, los únicos esfuerzos que quedan son los de membrana  $\mathcal{N}_s$  y  $\mathcal{N}_\varphi$  y los de flexión  $\mathcal{M}_s$ ,  $\mathcal{M}_\varphi$  y  $\mathcal{Q}_s$ , que se representan en las caras frontales del prisma en la figura 5.1.

## 5.2. Ecuaciones de equilibrio

Para hacer el equilibrio tendremos en cuenta los esfuerzos en las caras dorsales, y los mismos incrementados por un diferencial en las caras frontales. Los esfuerzos sólo se incrementarán al pasar de la cara dorsal- $s$  a la frontal- $s$ , es decir al incrementarse la variable  $s$ , pero no entre las caras dorsal- $\varphi$  y frontal- $\varphi$ , ya que no hay variación de ninguna magnitud en  $\varphi$ , por la axilsimetría. Además, las cargas  $p_\varphi = 0$  por la simetría axial de las cargas.

Es fácil comprobar que las ecuaciones de equilibrio  $\sum F_\varphi = 0$ ,  $\sum M_s = 0$  y  $\sum M_z = 0$  se cumplen automáticamente, por lo que solo falta plantear  $\sum F_s = 0$ ,  $\sum F_z = 0$  y  $\sum M_\varphi = 0$ .

### Ecuación de equilibrio $\sum F_s = 0$

En la figura 5.2 se representa el esfuerzo  $\mathcal{N}_s$  que es el único que interviene en el equilibrio de fuerzas según  $s$  sobre el prisma diferencial, sobre las caras frontal- $s$  y dorsal- $s$ . Teniendo en

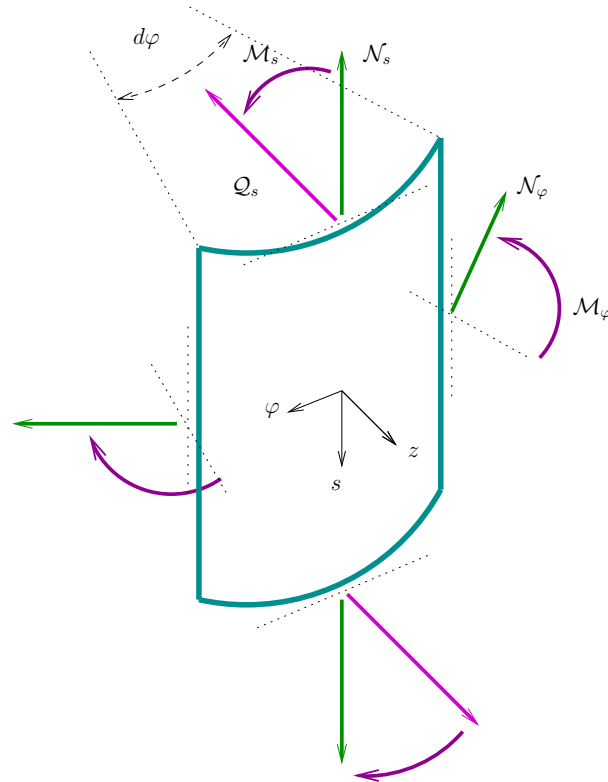


Figura 5.1: Esfuerzos unitarios en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica

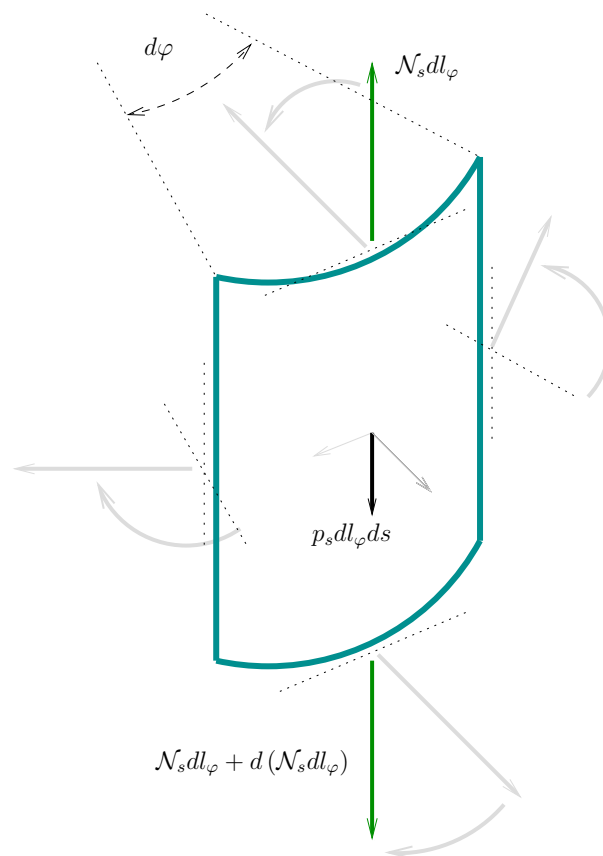


Figura 5.2: Ecuación de equilibrio  $\sum F_s = 0$  de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica



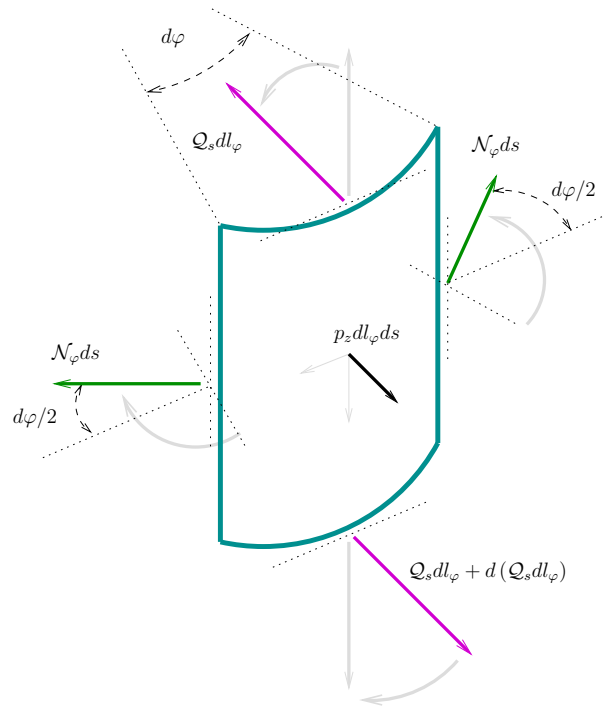


Figura 5.3: Ecuación de equilibrio  $\sum F_z = 0$  de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica

cuenta las cargas externas  $p_s$  y que  $dl_\varphi = R d\varphi$  el equilibrio queda,

$$p_s R d\varphi ds + (N_s + dN_s) R d\varphi - N_s R d\varphi = 0$$

siendo  $R$  el radio del cilindro y  $dN_s = \frac{dN_s}{ds} ds$ . Simplificando y dividiendo entre  $R d\varphi ds$  se obtiene,

$$\frac{dN_s}{ds} = -p_s$$

ecuación muy simple que es exactamente la misma que se obtuvo en el caso del *estado de membrana*.

### Ecuación de equilibrio $\sum F_z = 0$ .

En la figura 5.3 se representan los esfuerzos  $Q_s$  y  $N_\varphi$ , que son los que intervienen en el equilibrio según  $z$  sobre el prisma diferencial, sobre las caras frontales y dorsales respectivas.

Proyectando todas las fuerzas en la dirección del eje  $z$ , aplicando la aproximación  $\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2$  y eliminando términos de orden superior se llega a,

$$p_z R d\varphi ds + (Q_s + dQ_s) R d\varphi - Q_s R d\varphi - N_\varphi ds d\varphi = 0$$

donde  $dQ_s = \frac{dQ_s}{ds} ds$ . Simplificando y dividiendo entre  $R d\varphi ds$  se obtiene,

$$-\frac{dQ_s}{ds} + \frac{N_\varphi}{R} = p_z$$

### Ecuación de equilibrio $\sum M_\varphi = 0$ .

En la figura 5.4 se representan los esfuerzos que intervienen en esta ecuación de equilibrio sobre el prisma diferencial, sobre las caras frontales y dorsales. Los esfuerzos que contribuyen a esta ecuación son solamente  $M_s$  y  $Q_s$ .

$$-(M_s + dM_s) R d\varphi + M_s R d\varphi + Q_s R d\varphi ds = 0$$

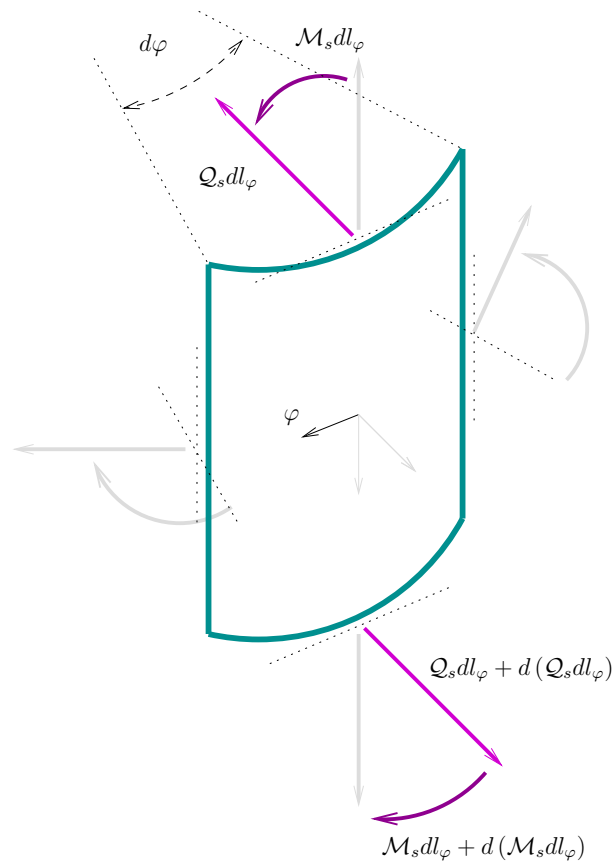


Figura 5.4: Ecuación de equilibrio  $\sum M_\varphi = 0$  de fuerzas y esfuerzos de membrana y flexión en el prisma diferencial para un lámina cilíndrica bajo carga axilsimétrica

que se reduce a,

$$\frac{dM_s}{ds} - Q_s = 0$$

En resumen, se obtienen las tres ecuaciones de equilibrio siguientes,

$$\frac{dN_s}{ds} = -p_s \quad (5.1)$$

$$-\frac{dQ_s}{ds} + \frac{N_\varphi}{R} = p_z \quad (5.2)$$

$$\frac{dM_s}{ds} - Q_s = 0 \quad (5.3)$$

Hay que señalar lo siguiente:

1. En estas tres ecuaciones aparecen cuatro incógnitas, de modo que el problema ya no es isostático, a diferencia de lo que ocurre el *estado de membrana*.
2. Uno de los esfuerzos que hay sobre el prisma,  $M_\varphi$ , no aparece en las ecuaciones, lo cual no quiere decir que sea nulo o que no intervenga en la solución, sino que habrá que calcularlo con el uso de las ecuaciones restantes de comportamiento y compatibilidad.
3. La primera ecuación solo contiene a la variable  $N_s$ , de modo que este esfuerzo puede calcularse directa e independientemente del resto mediante integración de la carga  $p_s$ . Es decir, que el problema es parcialmente isostático, ya que una parte de los esfuerzos, en este caso  $N_s$ , puede calcularse directamente de las ecuaciones de equilibrio.

### 5.3. Particularización del resto de ecuaciones para láminas cilíndricas bajo carga axilsimétrica

Como se ha comentado en la introducción, el resto de las ecuaciones las hemos desarrollado de manera general en los capítulos anteriores, ya que para plantearlas no se hizo referencia alguna a que los esfuerzos fueran de membrana o no, puesto que esas ecuaciones son del material (ley de Hooke) o geométricas (compatibilidad y relaciones cinemáticas), y en ellas es irrelevante como planteemos el equilibrio. Por lo tanto basta particularizarlas para el caso de láminas cilíndricas bajo carga axilsimétrica.

Aunque eso ya se ha hecho también en los capítulos precedentes, vamos a repetirlas a continuación.

Para particularizar las ecuaciones para el caso axilsimétrico aplicaremos las siguientes simplificaciones:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi} = 0; \quad u_\varphi = 0; \quad \varepsilon_{\varphi\theta} = 0 \quad (5.4)$$

mientras que la geometría cilíndrica implica,

$$\frac{\partial(\cdot)}{r_\theta\partial\theta} = \frac{d(\cdot)}{ds}; \quad \frac{(\cdot)}{r_\theta} = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (5.5)$$

También consideraremos que el radio es mucho mayor que el espesor.

#### Ecuaciones que ligan los desplazamientos en la superficie media con los desplazamientos en cualquier punto del espesor.

Se trata de las relaciones entre  $\mathbf{u}(s)$  con  $\bar{\mathbf{u}}(s, z)$  dada por las ecuaciones 3.10. Teniendo en cuenta las simplificaciones dadas por 5.4 y 5.5 se reducen a,

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(s, z) &= u_s(s) - z \frac{dw(s)}{ds} \\ \bar{u}_z(s, z) &= w(s) \end{aligned}$$

#### Ecuaciones que ligan desplazamientos en cualquier punto del espesor con las deformaciones en ese punto.

Se trata ahora de las relaciones entre los desplazamientos  $\bar{\mathbf{u}}(s, z)$  y las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z)$  dadas por las ecuaciones 3.8. Las simplificaciones dadas por 5.4 y 5.5 reducen las ecuaciones a,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{\bar{u}_z(s, z)}{R} \\ \varepsilon_{ss}(s, z) &= \frac{d\bar{u}_s(s, z)}{ds} \end{aligned}$$

que son muy simples comparadas con las del caso general.

Si en estas ecuaciones sustituimos los desplazamientos  $\bar{u}_s$  y  $\bar{u}_z$  dados en el apartado anterior podemos eliminar estos y obtener directamente las deformaciones en un punto cualquiera  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z)$  directamente de los desplazamientos en la superficie media  $\mathbf{u}(s)$ . Esto ya lo habíamos hecho para el caso axilsimétrico general, y se obtuvieron las ecuaciones 3.13, que simplificando para una lámina cilíndrica de gran radio de curvatura relativo quedan,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{w(s)}{R} \\ \varepsilon_{ss}(s, z) &= \frac{du_s(s)}{ds} - z \frac{d^2w(s)}{ds^2} \end{aligned}$$

### Ecuaciones que ligan deformaciones en cualquier punto del espesor con las tensiones en ese punto.

Se trata meramente de la Ley de Hooke dada en las ecuaciones 4.1, que para este caso se reduce a,

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\varphi\varphi}(s, z) + \nu\varepsilon_{ss}(s, z)) \\ \sigma_{ss}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{ss}(s, z) + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}(s, z))\end{aligned}$$

### Ecuaciones que definen los esfuerzos unitarios en función de las tensiones.

Se trata de las ecuaciones 1.4 y 1.5 de las cuales escogemos las necesarias, que son ahora

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz & \mathcal{N}_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss} dz \\ \mathcal{M}_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{\varphi\varphi} dz & \mathcal{M}_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{ss} dz\end{aligned}$$

La ecuación que define  $\mathcal{Q}_s$  en función de  $\sigma_{sz}$  no podemos usarla ya que las hipótesis cinemáticas conducen a que  $\varepsilon_{sz} = 0$ , y por lo tanto  $\sigma_{sz} = 0$  (por la ley de Hooke). Esto es una contradicción que comparten todas estas teorías (vigas, placas), pues esto no implica que  $\mathcal{Q}_s = 0$ , sino que el cortante  $\mathcal{Q}_s$  lo calcularemos a partir de la ecuación de equilibrio 5.3, cuando lo necesitemos.

## 5.4. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos en la superficie media

En el conjunto de ecuaciones anteriores tenemos variables definidas a nivel de punto, que son los desplazamientos  $\bar{\mathbf{u}}(s, z) = (\bar{u}_s, \bar{u}_z)$ , deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z) = (\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\varphi\varphi})$  y tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(s, z) = (\sigma_{ss}, \sigma_{\varphi\varphi})$ , y variables definidas en la superficie media, que son los desplazamientos  $\mathbf{u}(s) = (u_s, w)$  y los esfuerzos  $\mathcal{N}_\varphi(s), \mathcal{N}_s(s), \mathcal{Q}_s(s), \mathcal{M}_\varphi(s), \mathcal{M}_s(s)$ . En total hay 13 incógnitas.

Las ecuaciones son, por su parte:

1. Dos (2) ecuaciones que ligan  $\bar{\mathbf{u}}(s, z)$  con  $\mathbf{u}(s)$
2. Dos (2) ecuaciones que ligan  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z)$  con  $\bar{\mathbf{u}}(s, z)$
3. Dos (2) ecuaciones que ligan  $\boldsymbol{\sigma}(s, z)$  con  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z)$
4. Cuatro (4) ecuaciones que definen  $(\mathcal{N}_\varphi(s), \mathcal{N}_s(s), \mathcal{M}_\varphi(s), \mathcal{M}_s(s))$  en función de  $\boldsymbol{\sigma}(s, z)$
5. Tres (3) ecuaciones de equilibrio sobre el prisma diferencial.

en total 13 ecuaciones para 13 incógnitas.

Para simplificar el sistema eliminamos todas las variables a nivel de punto  $\bar{\mathbf{u}}(s, z)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(s, z)$ , y  $\boldsymbol{\sigma}(s, z)$  poniéndolas en función de  $\mathbf{u}(s)$ , las sustituimos en la definición de los esfuerzos en función de las tensiones, y finalmente sustituimos la expresión resultante de los esfuerzos en las ecuaciones de equilibrio.

Realizando este proceso se llega a las siguientes expresiones para las tensiones en función de los desplazamientos en la superficie media:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{du_s}{ds} - z\nu \frac{d^2w}{ds^2} \right) \\ \sigma_{ss}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{w}{R} + \frac{du_s}{ds} - z \frac{d^2w}{ds^2} \right)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Integrando a continuación en el espesor para obtener los esfuerzos, teniendo en cuenta que

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 1 dz = h$ ,  $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$  y  $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$ , se llega a,

$$\mathcal{N}_s = F \left( \nu \frac{w}{R} + \frac{du_s}{ds} \right) \quad (5.7)$$

$$\mathcal{N}_\varphi = F \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{du_s}{ds} \right) \quad (5.8)$$

$$\mathcal{M}_s = -D \frac{d^2 w}{ds^2} \quad (5.9)$$

$$\mathcal{M}_\varphi = -\nu D \frac{d^2 w}{ds^2} = \nu \mathcal{M}_s \quad (5.10)$$

siendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{rigidez a flexión de la lámina}$$

$$F = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{rigidez de membrana de la lámina}$$

Finalmente, llevaríamos los esfuerzos a las ecuaciones de equilibrio para obtener las ecuaciones que relacionan directamente las cargas por unidad de superficie externas  $p_s(s), p_z(s)$  con los desplazamientos en la superficie media  $u_s(s), w(s)$ . Sin embargo dado que el esfuerzos  $\mathcal{N}_s$  es isostático, es decir se puede calcular directamente de la ecuación de equilibrio 5.1, vamos a considerarlo como una acción conocida, y no lo sustituiremos en función de  $p_s$ .

Recapitulando, tenemos las tres ecuaciones de equilibrio 5.1, 5.2 y 5.3, y las cuatro ecuaciones que relacionan esfuerzos con desplazamientos en la superficie media (5.7 a 5.10), y vamos a eliminar todos los esfuerzos, menos el  $\mathcal{N}_s(s)$  que es isostático.

Para empezar, restando a 5.8 la 5.7 multiplicada por  $\nu$  se obtiene,

$$\mathcal{N}_\varphi - \nu \mathcal{N}_s = F(1-\nu^2) \frac{w}{R} = \frac{Eh}{R} w$$

de modo que,

$$\mathcal{N}_\varphi = \nu \mathcal{N}_s + \frac{Eh}{R} w \quad (5.11)$$

Por otra parte, si derivamos la ecuación 5.3 y la sumamos a 5.2 se elimina  $\mathcal{Q}_s$  obteniéndose,

$$-\frac{d^2 \mathcal{M}_s}{ds^2} + \frac{\mathcal{N}_\varphi}{R} = p_z$$

y sustituyendo aquí el valor de  $\mathcal{N}_\varphi$  anterior,

$$-\frac{d^2 \mathcal{M}_s}{ds^2} + \frac{Eh}{R^2} w = p_z - \nu \frac{\mathcal{N}_s}{R}$$

y finalmente poniendo en esta ecuación el valor de  $\mathcal{M}_s$  dado por 5.9,

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( D \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = p_z - \nu \frac{\mathcal{N}_s}{R}$$

que suponiendo que el espesor, y por tanto  $D$  es constante, la escribiremos de forma compacta como,

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_z}{D} - \nu \frac{\mathcal{N}_s}{RD}$$

siendo

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2}}$$

La constante

$$l_F = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{h^2 R^2}{3(1-\nu^2)}}$$

tiene dimensiones de longitud, y vamos a denominarla *longitud intrínseca de flexión*.

Veamos el orden de magnitud de esta longitud, comparada con el radio  $R$ .  $l_F$  puede escribirse de la forma,

$$\frac{l_F}{R} = C \sqrt{\frac{h}{R}}$$

siendo  $C = 2\pi \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}$  que es de orden unidad. Por lo tanto, la longitud  $l_F = 2\pi/\beta$  en muchas aplicaciones será pequeña comparada con el radio, en la misma proporción que lo sea  $\sqrt{\frac{h}{R}}$ . Veremos más adelante el sentido físico de esta longitud intrínseca de la lámina cilíndrica.

Resumiendo, las ecuaciones para los desplazamientos serán,

$$\frac{du_s}{ds} + \nu \frac{w}{R} = \frac{N_s}{F} \quad (5.12)$$

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_z}{D} - \nu \frac{N_s}{RD} \quad (5.13)$$

donde la primera se obtiene despejando de 5.7.

Este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es muy fácil de resolver, ya que la segunda está desacoplada de la primera. Resolviendo la segunda, como se describe en la sección 5.6, se obtendrá el desplazamiento  $w(s)$  y a partir de él y el esfuerzo  $N_s(s)$  se obtiene  $u_s(s)$  por integración directa,

$$u_s(s) = u_s(s_0) + \int_{s_0}^s \left( \frac{N_s(s')}{F} - \nu \frac{w(s')}{R} \right) ds' \quad (5.14)$$

## 5.5. Cálculo de las tensiones en un punto cualquiera del espesor conocidos los esfuerzos

Calculados los desplazamientos podrían calcularse las tensiones con las ecuaciones 5.6. Sin embargo se obtiene una relación muy simple de las tensiones con los esfuerzos, despejando en las ecuaciones 5.8 a 5.10 que los definen,

$$\begin{aligned} \frac{w}{R} + \nu \frac{du_s}{ds} &= \frac{N_\varphi}{F} \\ \nu \frac{w}{R} + \frac{du_s}{ds} &= \frac{N_s}{F} \\ \frac{d^2 w}{ds^2} &= -\frac{M_s}{D} \\ \nu \frac{d^2 w}{ds^2} &= -\frac{M_\varphi}{D} \end{aligned}$$

Identificando a continuación estas expresiones de los desplazamientos en las ecuaciones de las tensiones y sustituyendo,

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{N_\varphi}{F} + z \frac{M_\varphi}{D} \right) \\ \sigma_{ss}(s, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{N_s}{F} + z \frac{M_s}{D} \right) \end{aligned}$$

que simplificando quedan

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(s, z) &= \frac{N_\varphi}{h} + z \frac{M_\varphi}{I} \\ \sigma_{ss}(s, z) &= \frac{N_s}{h} + z \frac{M_s}{I} \end{aligned}$$

siendo  $I = \frac{h^3}{12}$

Estas ecuaciones son iguales a las que se obtienen en teoría de vigas, e iguales a las que se obtienen en teoría de placas, ya que  $h$  es el área de la sección por unidad de longitud, e  $I$  es la inercia de la sección por unidad de longitud.

## 5.6. Solución de las ecuaciones por superposición de estados

La ecuación 5.13 hay que complementarla con 4  $CCdC$  para tener cerrado el problema, dos condiciones en cada extremo del cilindro. La solución de la ecuación, junto con las  $CCdC$ , puede hacerse de manera estándar, mediante el cálculo de una solución particular, a la que sumamos la solución general de la homogénea. Aunque a la vista de la ecuación no es evidente, puede demostrarse fácilmente que una solución particular que podemos utilizar directamente es la solución del estado de membrana.

Efectivamente, si descomponemos los esfuerzos  $\mathcal{N}_\theta$  y  $\mathcal{N}_\varphi$  en la lámina en la suma de los del estado de membrana, que denominamos  $\mathcal{N}_\theta^m$  y  $\mathcal{N}_\varphi^m$ , respectivamente, más un incremento debido a la flexión, que denominaremos  $\mathcal{N}_\theta^f$  y  $\mathcal{N}_\varphi^f$ , es decir,

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{N}_s^m + \mathcal{N}_s^f \qquad \mathcal{N}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi^m + \mathcal{N}_\varphi^f$$

las ecuaciones de equilibrio 5.1 a 5.3 quedan,

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathcal{N}_s^m + \mathcal{N}_s^f)}{ds} &= -p_s \\ -\frac{dQ_s}{ds} + \frac{\mathcal{N}_\varphi^m + \mathcal{N}_\varphi^f}{R} &= p_z \\ \frac{dM_s}{ds} - Q_s &= 0 \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que los esfuerzos de membrana cumplen, por equilibrio (ecuación 2.8),

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_s^m}{ds} &= -p_s \\ \mathcal{N}_\varphi^m &= R p_z \end{aligned}$$

las ecuaciones de equilibrio con flexión se reducen a,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_s^f}{ds} &= 0 \\ -\frac{dQ_s}{ds} + \frac{\mathcal{N}_\varphi^f}{R} &= 0 \\ \frac{dM_s}{ds} - Q_s &= 0 \end{aligned}$$

que son ecuaciones homogéneas, es decir, ecuaciones de equilibrio 5.1 a 5.3, pero con cargas nulas. La solución de la primera de estas ecuaciones sería una constante, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que nula ( $\mathcal{N}_s^f(s) = 0$ ), ya que cualquier constante puede incorporarse en el estado de membrana.

En conclusión, las ecuaciones para los desplazamientos debidos a la flexión serán,

$$\begin{aligned} \frac{du_s^f}{ds} + \nu \frac{w^f}{R} &= 0 \\ \frac{d^4 w^f}{ds^4} + 4\beta^4 w^f &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

que son las ecuaciones 5.12 y 5.13 con cargas nulas. A estas ecuaciones habrá que añadir las correspondientes  $CCdC$ , a saber, 1  $CCdC$  en la variable  $u_s^f$  y 4 (2 + 2)  $CCdC$ s para  $w^f$  o sus derivadas, como veremos más adelante.

En conclusión, la solución de los desplazamientos podremos calcularlos mediante,

$$\begin{aligned}u_s(s) &= u_s^m(s) + u_s^f(s) \\ w(s) &= w^m(s) + w^f(s)\end{aligned}$$

siendo,

$u_s^m(s), w^m(s)$  Desplazamientos calculados en el estado de membrana  
 $u_s^f(s), w^f(s)$  Desplazamientos adicionales debidos a la flexión, que se obtienen resolviendo 5.15

El resto de las variables también se calculará de la misma forma, salvo los esfuerzos de flexión, que proceden únicamente de la parte homogénea de la solución, ya que son nulos en el estado de membrana.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_s(s) &= \mathcal{N}_s^m(s) \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= \mathcal{N}_\varphi^m(s) + \mathcal{N}_\varphi^f(s) \\ \mathcal{M}_s(s) &= \mathcal{M}_s^f(s) \\ \mathcal{M}_\varphi(s) &= \mathcal{M}_\varphi^f(s) \\ \mathcal{Q}_s(s) &= \mathcal{Q}_s^f(s)\end{aligned}$$

El esfuerzo  $\mathcal{N}_s^f(s)$  también es nulo, como se ha comentado más arriba.

La suma de las dos soluciones ha de cumplir las *CCdC*.

A partir de la solución  $w^f(s)$  se podrán calcular el resto de variables. Antes de ver la solución de  $w^f(s)$  resumamos a continuación las ecuaciones con las que se obtendrían el resto de las variables del problema.

Para las variables de desplazamiento:

$$\omega_\varphi^f = \frac{dw^f}{ds} \quad u_s^f(s) = u_s^f(s_0) - \nu \int_{s_0}^s \frac{w^f(s')}{R} ds'$$

para los esfuerzos:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\varphi^f(s) &= 4D\beta^4 R w^f(s) & \mathcal{Q}_s^f(s) &= -D \frac{d^3 w^f}{ds^3} \\ \mathcal{M}_s^f(s) &= -D \frac{d^2 w^f}{ds^2} & \mathcal{M}_\varphi^f(s) &= -\nu D \frac{d^2 w^f}{ds^2} = \nu \mathcal{M}_s\end{aligned}$$

y finalmente para las tensiones:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^f(s, z) = \frac{\mathcal{N}_\varphi^f}{h} + z \frac{\mathcal{M}_\varphi}{I} \quad \sigma_{ss}^f(s, z) = z \frac{\mathcal{M}_s}{I}$$

siendo  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  e  $I = h^3/12$ .

Se ha tenido en cuenta la identidad  $Eh/R = 4D\beta^4 R$  en la expresión de  $\mathcal{N}_\varphi^f(s)$ .

### 5.6.1. Solución de la ecuación diferencial homogénea de la flecha

La ecuación diferencial homogénea es,

$$\frac{d^4 w^f}{ds^4} + 4\beta^4 w^f = 0$$

cuya solución, al ser una ecuación diferencial lineal ordinaria de coeficientes constantes será de la forma  $w^f(s) = e^{\lambda s}$ . Sustituyendo en la ecuación anterior se llega al polinomio característico de la ecuación,

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0$$



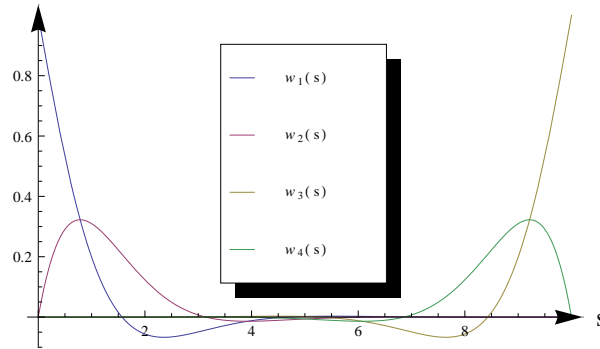


Figura 5.5: Funciones  $w_i^f(s)$  ( $L = 10,0$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $l_F = 2\pi$ )

que tiene cuatro soluciones complejas,

$$\lambda = \begin{cases} (-1+i)\beta \\ (-1-i)\beta \\ (1+i)\beta \\ (1-i)\beta \end{cases}$$

lo que implica que la solución de la homogénea es combinación lineal de las funciones  $e^{-\beta s}(\cos\beta s + i \operatorname{sen}\beta s)$ ,  $e^{-\beta s}(\cos\beta s - i \operatorname{sen}\beta s)$ ,  $e^{\beta s}(\cos\beta s + i \operatorname{sen}\beta s)$  y  $e^{\beta s}(\cos\beta s - i \operatorname{sen}\beta s)$ , que pueden reducirse, eliminando las componentes imaginarias y añadiendo algunas constantes convenientes a,

$$\begin{aligned} w_1^f(s) &= e^{-\beta s} \cos\beta s \\ w_2^f(s) &= e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ w_3^f(s) &= e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s) \\ w_4^f(s) &= e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \end{aligned}$$

donde  $L$  es la longitud del cilindro. La solución completa de la ecuación homogénea es,

$$w^f(s) = e^{-\beta s}(C_1 \cos\beta s + C_2 \operatorname{sen}\beta s) + e^{-\beta(L-s)}(C_3 \cos\beta(L-s) + C_4 \operatorname{sen}\beta(L-s))$$

siendo  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , constantes que se determinarán mediante las cuatro  $CCdC$ , dos en cada extremo del cilindro.

Las soluciones  $w_3^f(s)$  y  $w_4^f(s)$  se han escrito en términos de  $L-s$  para facilitar la aplicación de las  $CCdC$  en  $s=L$ , como veremos más adelante.

Es importante observar que estas cuatro soluciones son oscilantes con amplitud variable. En las dos primeras la amplitud decrece con  $s$  creciente, es decir, conforme nos alejamos del extremo  $s=0$ , mientras que en las dos segundas la amplitud decrece para  $s$  decreciente, es decir, mientras nos alejamos del otro extremo  $s=L$ . La forma de estas funciones se muestra en la figura 5.5.

En primer lugar hay que señalar que  $l_F = 2\pi/\beta$  es el periodo de las funciones trigonométricas, y en segundo lugar que la amplitud de éstas decrece más o menos rápidamente según sea el valor de la misma longitud intrínseca  $l_F$ . En la siguiente tabla se muestra el valor de la exponencial moduladora de las amplitudes,  $e^{-\beta s} = e^{-2\pi s/l_F}$ , para valores crecientes de  $s$ ,

$s$	0	$1/8 l_F$	$1/4 l_F$	$3/8 l_F$	$1/2 l_F$	$5/8 l_F$	$3/4 l_F$	$7/8 l_F$	$l_F$
$e^{-\beta s} (\%)$	100	45.59	20.79	9.48	4.32	1.97	0.89	0.41	0.19

De acuerdo con esta tabla, los valores de  $w_1^f$  y  $w_2^f$  serán despreciables<sup>1</sup> para valores de  $s \gtrsim 3/4 l_F$  mientras que los  $w_3^f$  y  $w_4^f$  lo serán para valores  $s \lesssim L - 3/4 l_F$ . En general, los efectos

<sup>1</sup>Un error menor de un 1% para los desplazamientos.

de la flexión serán despreciables en cuanto nos alejemos más allá de  $3/4 l_F$  de los extremos del cilindro.

Recuérdese que  $l_F = 2\pi/\beta$  es una longitud y que es proporcional a  $R\sqrt{h/R}$  de modo que para espesores delgados será una cantidad pequeña comparada con el radio  $R$  ya que  $l_F/R \sim \sqrt{h/R}$ .

A partir de los desplazamientos normales  $w^f(s)$  podremos calcular el resto de las variables del problema de flexión mediante las ecuaciones siguientes.

**Giro meridional**  $\omega_\varphi^f = \frac{dw^f}{ds}$ :

Esta magnitud es útil para la aplicación de condiciones de contorno de empotramiento. Calculando la derivada para cada componente se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi 1}^f(s) &= -\beta e^{-\beta s} (\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s) \\ \omega_{\varphi 2}^f(s) &= \beta e^{-\beta s} (\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s) \\ \omega_{\varphi 3}^f(s) &= \beta e^{-\beta(L-s)} (\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)) \\ \omega_{\varphi 4}^f(s) &= -\beta e^{-\beta(L-s)} (\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s))\end{aligned}$$

correspondientes a cada una de las soluciones  $w_i^f(s)$ .

**Desplazamientos**  $u_s^f(s)$ :

Se calculan mediante la ecuación 5.14 teniendo en cuenta que  $\mathcal{N}_s^f = 0$ , lo que da lugar a las cuatro componentes siguientes:

$$\begin{aligned}u_{s1}^f(s) &= \frac{\nu}{2\beta R} e^{-\beta s} (\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s) \\ u_{s2}^f(s) &= \frac{\nu}{2\beta R} e^{-\beta s} (\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s) \\ u_{s3}^f(s) &= \frac{\nu}{2\beta R} e^{-\beta(L-s)} (-\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)) \\ u_{s4}^f(s) &= \frac{\nu}{2\beta R} e^{-\beta(L-s)} (-\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s))\end{aligned}$$

correspondientes a cada una de las soluciones  $w_i^f(s)$ .

Estas expresiones corresponden a la integral indefinida  $-\nu/R \int w ds'$ . Habrá que sumar un término constante que se determinará con una condición de contorno relativa a este desplazamiento o al axil  $\mathcal{N}_s$  en uno de los extremos del cilindro.

**Esfuerzo**  $\mathcal{N}_\varphi^f(s)$ :

Se calculan mediante la ecuación 5.11 lo que da lugar a cuatro componentes:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\varphi 1}^f(s) &= 4D\beta^4 R e^{-\beta s} \cos\beta s \\ \mathcal{N}_{\varphi 2}^f(s) &= 4D\beta^4 R e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{N}_{\varphi 3}^f(s) &= 4D\beta^4 R e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s) \\ \mathcal{N}_{\varphi 4}^f(s) &= 4D\beta^4 R e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s)\end{aligned}$$

**Esfuerzo flector  $\mathcal{M}_s^f(s)$ :**

Se calculan por derivación mediante la ecuación 5.9 lo que da lugar a las cuatro componentes siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{s1}^f(s) &= -2\beta^2 D e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{M}_{s2}^f(s) &= 2\beta^2 D e^{-\beta s} \operatorname{cos}\beta s \\ \mathcal{M}_{s3}^f(s) &= -2\beta^2 D e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \\ \mathcal{M}_{s4}^f(s) &= 2\beta^2 D e^{-\beta(L-s)} \operatorname{cos}\beta(L-s)\end{aligned}$$

**Esfuerzo flector  $\mathcal{M}_\varphi^f(s)$ :**

Se calculan simplemente mediante  $\mathcal{M}_\varphi = \nu \mathcal{M}_s$ , por lo que,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\varphi 1}^f(s) &= -2\nu\beta^2 D e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{M}_{\varphi 2}^f(s) &= 2\nu\beta^2 D e^{-\beta s} \operatorname{cos}\beta s \\ \mathcal{M}_{\varphi 3}^f(s) &= -2\nu\beta^2 D e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \\ \mathcal{M}_{\varphi 4}^f(s) &= 2\nu\beta^2 D e^{-\beta(L-s)} \operatorname{cos}\beta(L-s)\end{aligned}$$

**Esfuerzo cortante  $\mathcal{Q}_s^f(s)$ :**

El esfuerzo cortante puede obtenerse en función del flector  $\mathcal{M}_s(s)$  a partir de la ecuación de equilibrio 5.3,

$$\mathcal{Q}_s(s) = \frac{d\mathcal{M}_s}{ds}$$

y teniendo en cuenta la ecuación 5.9 que define el flector  $\mathcal{M}_s$  en función de  $w(s)$ , se obtiene,

$$\mathcal{Q}_s(s) = -D \frac{d^3 w^f}{ds^3}$$

Aplicando esta expresión a las cuatro soluciones de la ecuación homogénea se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{s1}^f(s) &= -2D\beta^3 e^{-\beta s} (\operatorname{cos}\beta s - \operatorname{sen}\beta s) \\ \mathcal{Q}_{s2}^f(s) &= -2D\beta^3 e^{-\beta s} (\operatorname{cos}\beta s + \operatorname{sen}\beta s) \\ \mathcal{Q}_{s3}^f(s) &= -2D\beta^3 e^{-\beta(L-s)} (-\operatorname{cos}\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)) \\ \mathcal{Q}_{s4}^f(s) &= -2D\beta^3 e^{-\beta(L-s)} (-\operatorname{cos}\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s))\end{aligned}$$

**5.6.2. Tabla resumen de las 4 soluciones de la ecuación homogénea**

Las soluciones  $w_1^f$  y  $w_2^f$  de flexión son de la forma,

$$f(s) = C e^{-\beta s} (C_c \operatorname{cos}\beta s + C_s \operatorname{sen}\beta s)$$

siendo  $C$ ,  $C_c$  y  $C_s$  distintas constantes, según sea la variable  $f(s)$  de que se trate según se muestra en la siguiente tabla:

Solución	Constantes	$w(s)$	$\mathcal{M}_s(s)$	$\mathcal{N}_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$\mathcal{Q}_s(s)$
1	$C$	1	$-2D\beta^2$	$4D\beta^4 R$	$-\beta$	$\frac{\nu}{2R\beta}$	$-2D\beta^3$
	$C_c$	1	0	1	1	1	1
	$C_s$	0	1	0	1	-1	-1
2	$C$	1	$2D\beta^2$	$4D\beta^4 R$	$\beta$	$\frac{\nu}{2R\beta}$	$-2D\beta^3$
	$C_c$	0	1	0	1	1	1
	$C_s$	1	0	1	-1	1	1

Para  $w_3^f$  y  $w_4^f$  la solución es de la forma,

$$g(s) = \pm f(L - s) = \pm C e^{-\beta(L-s)} (C_c \cos\beta(L - s) + C_s \operatorname{sen}\beta(L - s))$$

siendo las constantes las de la tabla anterior. En algunas variables, sin embargo, hay un cambio de signo, tal y como se refleja en esta tabla:

Solución	$w(s)$	$M_s(s)$	$N_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$Q_s(s)$
3	+	+	+	-	-	-
4	+	+	+	-	-	-

donde «+» indica que  $g(s) = f(L - s)$  y «-»  $g(s) = -f(L - s)$ .

## 5.7. Problemas útiles de flexión: cilindros de “gran longitud”

Puesto que las componentes de flexión complementan a la solución de membrana para que se cumplan las condiciones de contorno, vamos a resolver algunos problemas homogéneos de interés. En todos estos casos vamos a considerar únicamente el caso de cilindro de “gran longitud”.

Un cilindro de “gran longitud” es aquel en el que  $l_F = 2\pi/\beta \lesssim 3/4 L$  de modo que las soluciones  $w_1^f(s)$  y  $w_2^f(s)$  son prácticamente nulas en  $s = L$  y recíprocamente,  $w_3^f(s)$  y  $w_4^f(s)$  son prácticamente nulas en  $s = 0$ . Esto implica que las cuatro constantes  $C_i$  pueden calcularse por parejas independientes, por una parte  $C_1$  y  $C_2$  aplicando las dos  $CCdC$  de  $s = 0$ , y de forma independiente las constantes  $C_3$  y  $C_4$  aplicando las dos  $CCdC$  de  $s = L$ .

Para simplificar la notación, eliminamos el superíndice  $f$  para las soluciones que se compilan en esta sección.

### 5.7.1. Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 1$ y $\omega_\varphi(0) = 0$

Supongamos una lámina cilíndrica de gran longitud  $L$ , sin fuerzas aplicadas sobre la superficie media de la lámina, tal que en  $s = 0$  tenemos,

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ \omega_\varphi(0) &= \left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=0} = 0 \end{aligned}$$

Puesto que el cilindro es de gran longitud, podemos considerar que las soluciones  $w_3(s)$  y  $w_4(s)$  son nulas para  $s = 0$ , de modo que en  $s = 0$  solo habría que evaluar  $w_1(s)$  y  $w_2(s)$ . Por tanto la flecha se reduce a,

$$w(s) = e^{-\beta s} (C_1 \cos\beta s + C_2 \operatorname{sen}\beta s)$$

y su derivada será,

$$\omega_\varphi(s) = \frac{dw(s)}{ds} = -\beta e^{-\beta s} [C_1 (\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s) + C_2 (-\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s)]$$

y evaluando ambas en  $s = 0$  se obtienen las ecuaciones,

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ \beta(C_2 - C_1) &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es directa,

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= 1 \end{aligned}$$

de modo que la flecha es,

$$w(s) = e^{-\beta s} (\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s)$$

el giro

$$\omega_\varphi(s) = -2\beta e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s$$

los esfuerzos de flexión,

$$\mathcal{M}_s(s) = 2\beta^2 D e^{-\beta s} [\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s]$$

$$\mathcal{Q}_s(s) = -4\beta^3 D e^{-\beta s} \cos\beta s$$

el esfuerzo circunferencial

$$\mathcal{N}_\varphi(s) = 4D\beta^4 R e^{-\beta s} [\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s]$$

y finalmente el desplazamiento meridional,

$$u_s(s) = \frac{\nu}{R\beta} e^{-\beta s} \cos\beta s$$

En resumen,

$$w(s) = e^{-\beta s} (\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s)$$

$$\omega_\varphi(s) = -2\beta e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s$$

$$u_s(s) = \frac{\nu}{R\beta} e^{-\beta s} \cos\beta s$$

$$\mathcal{M}_s(s) = 2D\beta^2 e^{-\beta s} [\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s]$$

$$\mathcal{Q}_s(s) = -4D\beta^3 e^{-\beta s} \cos\beta s$$

$$\mathcal{N}_\varphi(s) = 4D\beta^4 R e^{-\beta s} [\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s]$$

Si el desplazamiento  $w = 1$  estuviera aplicado en  $s = L$  la solución que se obtiene es,

$$w(s) = e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)]$$

$$\omega_\varphi(s) = 2\beta e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s)$$

$$u_s(s) = -\frac{\nu}{R\beta} e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s)$$

$$\mathcal{M}_s(s) = 2D\beta^2 e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s)]$$

$$\mathcal{Q}_s(s) = 4D\beta^3 e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s)$$

$$\mathcal{N}_\varphi(s) = 4D\beta^4 R e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)]$$

Nótese que las expresiones son iguales, cambiando  $s$  por  $L - s$ , salvo el cambio de signo en  $\omega_\varphi(s)$ ,  $u_s(s)$  y  $\mathcal{Q}_s(s)$ .

### 5.7.2. Cilindro de gran longitud con desplazamiento $w(0) = 0$ y giro $\omega_\varphi(0) = 1$

Igual que el caso anterior en  $s = 0$  no es necesario considerar las componente  $w_3(s)$  ni  $w_4(s)$  y solo es necesario calcular  $C_1$  y  $C_2$ , con las condiciones de contorno,

$$w(0) = 0$$

$$\omega_\varphi(0) = \left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=0} = 1$$

que se reducen a,

$$C_1 = 0$$

$$\beta(C_2 - C_1) = 1$$

cuya solución es ahora,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

de modo que la solución es,

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{1}{\beta} e^{-\beta s} \operatorname{sen} \beta s \\ \omega_\varphi(s) &= e^{-\beta s} [\cos \beta s - \operatorname{sen} \beta s] \\ u_s(s) &= \frac{\nu}{2R\beta^2} e^{-\beta s} [\cos \beta s + \operatorname{sen} \beta s] \\ \mathcal{M}_s(s) &= 2D\beta e^{-\beta s} \cos \beta s \\ \mathcal{Q}_s(s) &= -2D\beta^2 e^{-\beta s} [\cos \beta s + \operatorname{sen} \beta s] \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= 4D\beta^3 R e^{-\beta s} \operatorname{sen} \beta s \end{aligned}$$

De nuevo, si el giro  $\omega_\varphi = 1$  estuviera aplicado en  $s = L$  la solución que se obtiene es,

$$\begin{aligned} w(s) &= -\frac{1}{\beta} e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen} \beta(L-s) \\ \omega_\varphi(s) &= e^{-\beta(L-s)} [\cos \beta(L-s) - \operatorname{sen} \beta(L-s)] \\ u_s(s) &= \frac{\nu}{2R\beta^2} e^{-\beta(L-s)} [\cos \beta(L-s) + \operatorname{sen} \beta(L-s)] \\ \mathcal{M}_s(s) &= -2D\beta e^{-\beta(L-s)} \cos \beta(L-s) \\ \mathcal{Q}_s(s) &= -2D\beta^2 e^{-\beta(L-s)} [\cos \beta(L-s) + \operatorname{sen} \beta(L-s)] \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= -4D\beta^3 R e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen} \beta(L-s) \end{aligned}$$

De nuevo las expresiones son iguales, cambiando  $s$  por  $L - s$ , salvo que ahora el cambio de signo se produce en  $w(s)$ ,  $\mathcal{M}_s(s)$  y  $\mathcal{N}_\varphi(s)$ .

### 5.7.3. Cilindro de gran longitud con momento $\mathcal{Q}_s(0) = 1$ y cortante $\mathcal{M}_s(0) = 0$

En este caso las  $CCdC$  son,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s(0) &= 0 \\ \mathcal{Q}_s(0) &= 1 \end{aligned}$$

que teniendo en cuenta de nuevo que  $\mathcal{M}_s = -D \frac{d^2 w}{ds^2}$  y  $\mathcal{Q}_s = -D \frac{d^3 w}{ds^3}$ , quedan de la forma,

$$\begin{aligned} 2D\beta^2 C_2 &= 0 \\ -2D\beta^3 (C_1 + C_2) &= 1 \end{aligned}$$

y la solución es,

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2D\beta^3} \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

de modo que los desplazamientos y esfuerzos son,

$$\begin{aligned}w(s) &= -\frac{1}{2D\beta^3}e^{-\beta s} \cos\beta s \\ \omega_\varphi(s) &= \frac{1}{2D\beta^2}e^{-\beta s} [\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s] \\ u_s(s) &= -\frac{\nu}{4DR\beta^4}e^{-\beta s} [\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s] \\ \mathcal{M}_s(s) &= \frac{1}{\beta}e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{Q}_s(s) &= e^{-\beta s} (\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s) \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= -2\beta R e^{-\beta s} \cos\beta s\end{aligned}$$

Si el cortante  $\mathcal{Q}_s = 1$  estuviera aplicado en  $s = L$  en vez de  $s = 0$ , la solución que se obtiene es,

$$\begin{aligned}w(s) &= \frac{1}{2D\beta^3}e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s) \\ \omega_\varphi(s) &= \frac{1}{2D\beta^2}e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)] \\ u_s(s) &= -\frac{\nu}{4DR\beta^4}e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s)] \\ \mathcal{M}_s(s) &= -\frac{1}{\beta}e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \\ \mathcal{Q}_s(s) &= e^{-\beta(L-s)} (\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta(L-s)) \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= 2\beta R e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s)\end{aligned}$$

#### 5.7.4. Cilindro de gran longitud con momento $\mathcal{Q}_s(0) = 0$ y cortante $\mathcal{M}_s(0) = 1$

De nuevo las componentes  $w_3(s)$  y  $w_4(s)$  son nulas en  $s = 0$ , de modo que la solución es,

$$w(s) = e^{-\beta s} (C_1 \cos\beta s + C_2 \operatorname{sen}\beta s)$$

En este caso las  $CCdC$  son,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s(0) &= 1 \\ \mathcal{Q}_s(0) &= 0\end{aligned}$$

que teniendo en cuenta que  $\mathcal{M}_s = -D \frac{d^2 w}{ds^2}$  y  $\mathcal{Q}_s = -D \frac{d^3 w}{ds^3}$ , quedan de la forma,

$$\begin{aligned}2D\beta^2 C_2 &= 1 \\ -2D\beta^3 (C_1 + C_2) &= 0\end{aligned}$$

cuya solución es,

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{1}{2D\beta^2} \\ C_2 &= \frac{1}{2D\beta^2}\end{aligned}$$

de modo que la solución es,

$$\begin{aligned}w(s) &= -\frac{1}{2D\beta^2}e^{-\beta s} [\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s] \\ \omega_\varphi(s) &= \frac{1}{D\beta}e^{-\beta s} \cos\beta s \\ u_s(s) &= \frac{\nu}{2DR\beta^3}e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{M}_s(s) &= e^{-\beta s} [\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s] \\ \mathcal{Q}_s(s) &= -2\beta e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= -2\beta^2 R e^{-\beta s} [\cos\beta s - \operatorname{sen}\beta s]\end{aligned}$$

Si el flector  $\mathcal{M}_s = 1$  estuviera aplicado en  $s = L$ , la solución que se obtiene es,

$$\begin{aligned} w(s) &= -\frac{1}{2D\beta^2} e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s)] \\ \omega_\varphi(s) &= -\frac{1}{D\beta} e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s) \\ u_s(s) &= -\frac{\nu}{2DR\beta^3} e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \\ \mathcal{M}_s(s) &= e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) + \operatorname{sen}\beta(L-s)] \\ \mathcal{Q}_s(s) &= 2\beta e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s) \\ \mathcal{N}_\varphi(s) &= -2\beta^2 R e^{-\beta(L-s)} [\cos\beta(L-s) - \operatorname{sen}\beta(L-s)] \end{aligned}$$

## 5.8. Tabla resumen de soluciones para un cilindro de gran longitud

Todas las variables de las soluciones para un cilindro de gran longitud pueden escribirse de la forma,

$$f(s) = C e^{-\beta s} (C_c \cos\beta s + C_s \operatorname{sen}\beta s)$$

siendo  $C$ ,  $C_c$  y  $C_s$  distintas constantes, según sea la variable  $f(s)$  de que se trate y de las  $CCdC$  concretas.

En la siguiente tabla se muestran los valores de estas constantes para el caso de aplicación de diferentes  $CCdC$  en  $s = 0$ :

$CCdC$	Constantes	$w(s)$	$\mathcal{M}_s(s)$	$\mathcal{N}_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$\mathcal{Q}_s(s)$
$w(0) = 1$ $\omega_\varphi(0) = 0$	$C$ $C_c$ $C_s$	1 1 1	$2D\beta^2$ 1 -1	$4D\beta^4 R$ 1 1	-2 $\beta$ 0 1	$\frac{\nu}{R\beta}$ 1 0	-4 $D\beta^3$ 1 0
$\mathcal{Q}_s(0) = 0$ $\mathcal{M}_s(0) = 1$	$C$ $C_c$ $C_s$	$-\frac{1}{2D\beta^2}$ 1 -1	1 1 1	-2 $\beta^2 R$ 1 -1	$\frac{1}{D\beta}$ 1 0	$\frac{\nu}{2DR\beta^3}$ 0 1	-2 $\beta$ 0 1
$w(0) = 0$ $\omega_\varphi(0) = 1$	$C$ $C_c$ $C_s$	$\frac{1}{\beta}$ 0 1	2 $D\beta$ 1 0	4 $D\beta^3 R$ 0 1	1 1 -1	$\frac{\nu}{2R\beta^2}$ 1 1	-2 $D\beta^2$ 1 1
$\mathcal{Q}_s(0) = 1$ $\mathcal{M}_s(0) = 0$	$C$ $C_c$ $C_s$	$-\frac{1}{2D\beta^3}$ 1 0	$\frac{1}{\beta}$ 0 1	-2 $\beta R$ 1 0	$\frac{1}{2D\beta^2}$ 1 1	$-\frac{\nu}{4DR\beta^4}$ 1 -1	1 1 -1

Cuando las  $CCdC$  se aplican en  $s = L$  las variables son iguales que antes, pero cambiando  $s$  por  $L - s$ , y en algunos casos un cambio de signo,

$$g(s) = \pm f(L - s)$$

de acuerdo con la siguiente tabla,

$CCdC$	$w(s)$	$\mathcal{M}_s(s)$	$\mathcal{N}_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$\mathcal{Q}_s(s)$
$w(L) = 1$ $\omega_\varphi(L) = 0$	+	+	+	-	-	-
$\mathcal{Q}_s(L) = 0$ $\mathcal{M}_s(L) = 1$	+	+	+	-	-	-
$w(L) = 0$ $\omega_\varphi(L) = 1$	-	-	-	+	+	+
$\mathcal{Q}_s(L) = 1$ $\mathcal{M}_s(L) = 0$	-	-	-	+	+	+



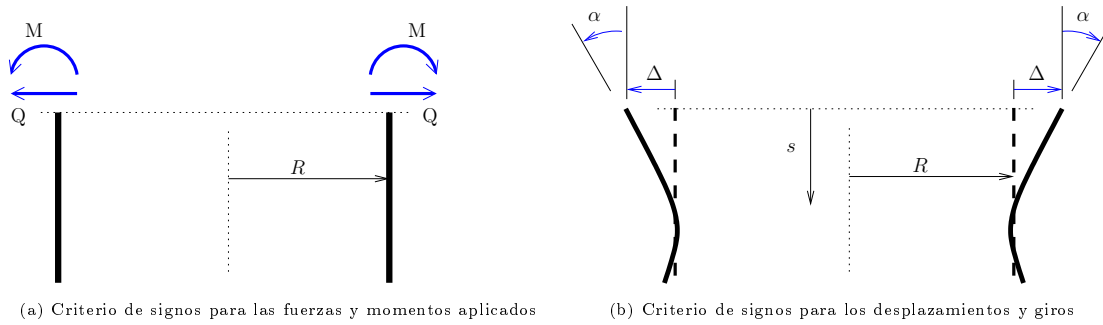


Figura 5.6: Depósito cilíndrico de gran longitud con fuerzas aplicadas en un extremo

debido a que el criterio de signos de alguna de ellas no es igual en  $s = 0$  y en  $s = L$

## 5.9. Matriz de rigidez y de flexibilidad en el extremo de un cilindro de gran longitud

Las soluciones anteriores nos permitirán escribir expresiones de rigidez y flexibilidad que relacionan la flecha y giro en el extremo de un cilindro, con el momento y fuerza aplicado en ese extremo. Estas relaciones de rigidez y/o flexibilidad permitirán resolver de manera más rápida problemas completos de láminas combinando las soluciones de membrana y flexión, y resolver problemas más complejos de láminas con discontinuidades en cargas o propiedades.

Para ello supongamos un cilindro de gran longitud en cuyo extremo inicial  $s = 0$  se aplica un momento  $M$  y una fuerza radial  $Q$ , tal y como se muestra en la figura 5.6.

### 5.9.1. Relación de flexibilidad

El depósito de la figura 5.6, bajo las cargas que se indican tiene como  $CCdC$ ,

$$\mathcal{M}_s(0) = -M; \quad \mathcal{Q}_s(0) = -Q$$

por el criterio de signos para los flectores y cortantes.

La solución de este problema podrá obtenerse combinando las soluciones obtenidas en las secciones 5.7.4 y 5.7.3. Para ello, si denominamos  $w^M(s)$  a la solución de la sección 5.7.4,  $w^Q(s)$  a la solución de 5.7.3, entonces la solución buscada será,

$$w(s) = -Qw^Q(s) - Mw^M(s)$$

y expresiones similares para el giro, momentos, etc.

Si llamamos  $\delta$  al desplazamiento que tenga el cilindro en  $s = 0$  en la dirección de  $Q$  y  $\alpha$  al giro del cilindro en  $s = 0$  en la dirección de  $M$ , tal y como se observa en la figura 5.6b, es evidente que

$$\Delta = w(0); \quad \alpha = -\omega_\varphi(0)$$

y por tanto,

$$\Delta = -Qw^Q(0) - Mw^M(0)$$

$$\alpha = Q\omega_\varphi^Q(0) + M\omega_\varphi^M(0)$$

que matricialmente puede escribirse como,

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^Q(0) & -w^M(0) \\ \omega_\varphi^Q(0) & \omega_\varphi^M(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix}$$

y evaluando las flechas y giros en el origen de las soluciones  $w^Q(s)$  y  $w^M(s)$  se obtiene,

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2D\beta^3 & 1/2D\beta^2 \\ 1/2D\beta^2 & 1/D\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix}$$

		$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$			$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$
		$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$			$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$

Tabla 5.1: Matriz de flexibilidad de un cilindro de “gran longitud”, dependiendo del criterio de signos

y por tanto la relación de flexibilidad será,

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix}$$

siendo,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix} = \frac{l_F}{16\pi^3 D} \begin{pmatrix} l_F^2 & 2\pi l_F \\ 2\pi l_F & 4\pi \end{pmatrix}$$

la denominada matriz de flexibilidad.

Esta expresión depende de los criterios de signos escogidos para los grados de libertad en el extremo. Si se escogen diferentes, cambian los signos de la contradiagonal en la matriz de flexibilidad, como se muestra en la tabla 5.1.

Como regla nemotécnica, si el momento y la fuerza van en la “misma” dirección, toda la matriz de flexibilidad es positiva, en caso contrario, la contradiagonal es negativa.

Los signos positivos de los desplazamientos y giros, son iguales que para las fuerzas y momentos, respectivamente.

### 5.9.2. Relación de rigidez

La relación de rigidez puede obtenerse directamente invirtiendo la relación de flexibilidad.

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \Delta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

de modo que,

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2D\beta^3 & 1/2D\beta^2 \\ 1/2D\beta^2 & 1/D\beta \end{pmatrix}^{-1} = 2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \frac{4\pi D}{l_F^3} \begin{pmatrix} 8\pi^2 & -2\pi l_F \\ -2\pi l_F & l_F^2 \end{pmatrix}$$

La relación de rigidez será,

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix} = 2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

De manera alternativa, aunque más complicada, la relación de rigidez podría obtenerse utilizando las soluciones de las secciones 5.7.1 y 5.7.2 poniendo la solución de este problema de la forma,

$$w(s) = \delta w^\delta(s) - \alpha w^\Omega(s)$$

siendo  $w^\delta(s)$  la solución obtenidas en 5.7.1, y  $w^\Omega(s)$  la solución de 5.7.2. Nótese que, de acuerdo con el criterio de signos elegidos para  $\alpha$ , es un giro negativo en el origen.

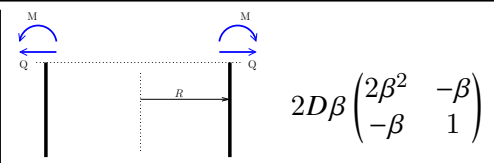
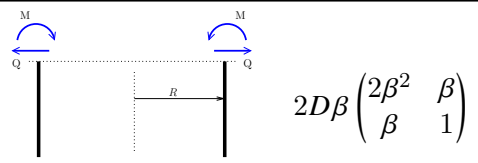
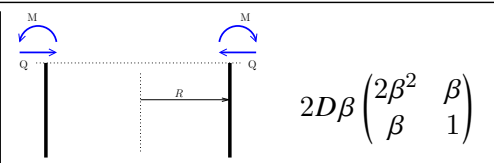
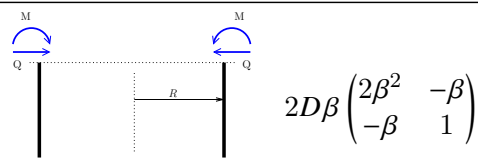
	$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$		$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$
	$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$		$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$

Tabla 5.2: Matriz de rigidez de un cilindro de “gran longitud”, dependiendo del criterio de signos

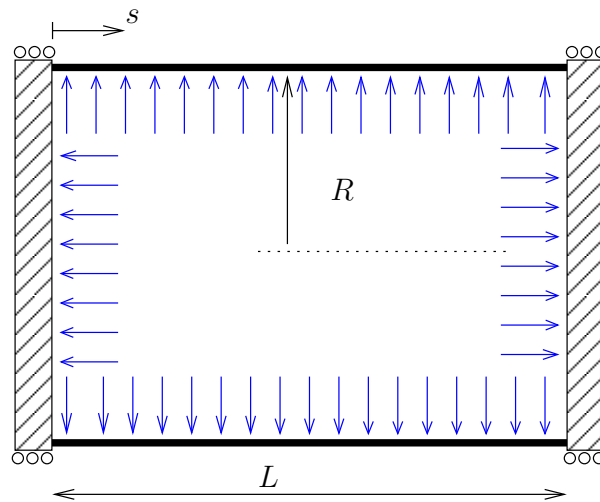


Figura 5.7: Depósito cilíndrico a presión con extremos planos infinitamente rígidos

Teniendo en cuenta que,

$$Q = -Q_s(0); \quad M = -M_s(0)$$

y por tanto,

$$Q = -\delta Q_s^\delta(0) + \alpha Q_s^\Omega(0)$$

$$M = -\delta M_s^\delta(0) + \alpha M_s^\Omega(0)$$

que escrito matricialmente conduce la misma matriz de rigidez calculada como inversa de la matriz de flexibilidad.

De nuevo, la expresión de la matriz de rigidez depende de los criterios de signos escogidos para los grados de libertad en el extremo. En el caso de la matriz de rigidez las expresiones se muestran en la tabla 5.2.

## 5.10. Depósito cilíndrico a presión con extremos planos infinitamente rígidos y libertad de movimientos longitudinales

En la figura 5.7 se muestra un depósito cilíndrico bajo presión  $p$  cuyas tapas extremas consideramos infinitamente rígidas, de modo que no permiten el movimiento radial ni el giro. Consideramos, sin embargo que el depósito se encuentra sustentado de tal manera que puede dilatarse longitudinalmente y radialmente sin otra restricción que la mencionada de las tapas.

Para obtener la solución, calculamos primero los esfuerzos de membrana y luego los de flexión, de modo que la suma de ambas soluciones cumpla las *CCdC*.

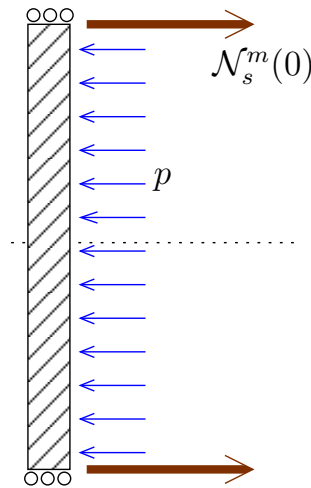


Figura 5.8: Equilibrio de membrana en el extremo  $s = 0$  en el depósito cilíndrico a presión

Los esfuerzos del estado de membrana vienen dados por las ecuaciones 2.8 del capítulo 2,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_s^m(s) &= \mathcal{N}_s^m(0) \\ \mathcal{N}_\varphi^m(s) &= pR \end{aligned}$$

ya que  $p_s(s) = 0$  y  $p_z(s) = p$ . El valor de  $\mathcal{N}_s^m(0)$  se obtiene por equilibrio, como se observa en la figura 5.8, de modo que,

$$2\pi R \mathcal{N}_s^m(0) = \pi R^2 p$$

y por tanto,

$$\mathcal{N}_s^m(0) = \frac{1}{2} R p$$

Utilizando las ecuaciones 4.13 y 4.14 se obtienen los desplazamientos,

$$\begin{aligned} u_s^m(s) &= \frac{pR(1-2\nu)}{2Eh} \left( s - \frac{L}{2} \right) \\ w^m(s) &= \frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh} \end{aligned}$$

tomando la referencia  $u_s^m(L/2) = 0$  para mantener la simetría. Puesto que  $w^m(s)$  es constante se deduce que,

$$\omega_\varphi^m(s) = 0$$

Esta sería la solución de membrana, que produce una deformación del cilindro tal y como se muestra en la figura 5.9, que como puede verse, no cumple con las condiciones que imponen las tapas rígidas en los extremos, pues el desplazamiento radial  $w$  y el giro  $\omega_\varphi$  han de ser nulos en  $s = 0$  y  $s = L$ .

Por lo tanto, a esta solución habrá que añadir la solución homogénea de flexión para que se cumplan las condiciones de contorno en los extremos.

Las condiciones que imponen las tapas rígidas en los extremos implican que, para la solución completa,

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & w(L) &= 0 \\ \omega_\varphi(0) &= 0 & \omega_\varphi(L) &= 0 \end{aligned}$$

y puesto que  $w(s) = w^f(s) + w^m(s)$ , entonces,

$$\begin{aligned} w^f(0) + w^m(0) &= 0 & w^f(L) + w^m(L) &= 0 \\ \omega_\varphi^f(0) + \omega_\varphi^m(0) &= 0 & \omega_\varphi^f(L) + \omega_\varphi^m(L) &= 0 \end{aligned}$$

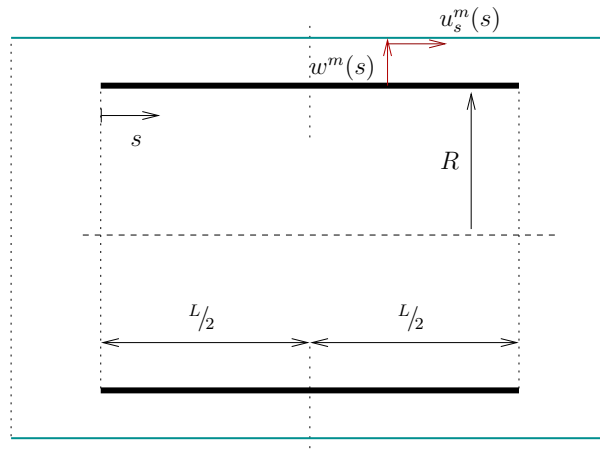


Figura 5.9: Deformada de membrana del depósito cilíndrico a presión interna

y por tanto,

$$\begin{aligned} w^f(0) &= -w^m(0) = -\frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh} \\ \omega_\varphi^f(0) &= -\omega_\varphi^m(0) = 0 \\ w^f(L) &= -w^m(L) = -\frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh} \\ \omega_\varphi^f(L) &= -\omega_\varphi^m(L) = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo, como hemos hecho en la sección anterior, que el cilindro es “largo”, es decir que  $\frac{1}{\beta} \ll L$ , entonces, para imponer las  $CCdC$  en  $s = 0$  solo tenemos que considerar las soluciones  $w_1^f(s)$  y  $w_2^f(s)$ , mientras que para imponer las  $CCdC$  en  $s = L$  solo tenemos que considerar las soluciones  $w_3^f(s)$  y  $w_4^f(s)$ . En este caso, por simetría, basta con calcular la solución para el extremo  $s = 0$ .

Para  $s = 0$ ,

$$\begin{aligned} w^f(0) &= -\frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh} \\ \omega_\varphi^f(0) &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución obtuvimos en el apartado 5.7.1 para un desplazamiento  $w^f(0) = \delta$  cualquiera, y por tanto, sustituyendo por  $\delta = -\frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh}$ ,

$$\begin{aligned} w^f(s) &= -\frac{pR^2(2-\nu)}{2Eh} e^{-\beta s} (\cos\beta s + \text{sen}\beta s) \\ \mathcal{M}_s(s) &= \frac{pR^2(2-\nu)}{Eh} \beta^2 D e^{-\beta s} [-\cos\beta s + \text{sen}\beta s] \\ \mathcal{Q}_s(s) &= \frac{2pR^2(2-\nu)}{Eh} \beta^3 D e^{-\beta s} \cos\beta s \end{aligned}$$

Esta es la solución homogénea cerca de  $s = 0$ .

A partir de  $w^f(s)$  calculamos el resto de variables. Aplicando la ecuación 5.14,

$$u_s^f(s) = C - \frac{pR\nu(2-\nu)}{2Eh\beta} e^{-\beta s} \cos\beta s$$

donde la constante  $C$  se determina imponiendo que  $u_s(L/2) = 0$ , es decir

$$u_s^m(L/2) + u_s^f(L/2) = 0$$

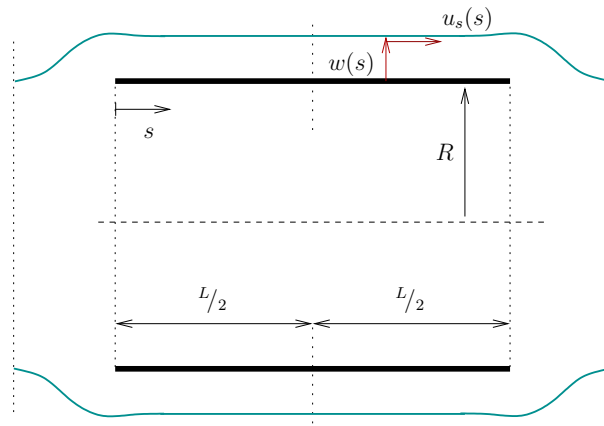


Figura 5.10: Deformación completa del depósito cilíndrico a presión interna

lo que conduce a la expresión final,

$$u_s^f(s) = -\frac{pR\nu(2-\nu)}{2Eh\beta} \left\{ e^{-\beta s} \cos\beta s - e^{-\beta L/2} \cos\frac{\beta L}{2} \right\}$$

Finalmente, aplicando la 5.11 se obtiene,

$$\mathcal{N}_\varphi^f(s) = -\frac{1}{2}pR(2-\nu)e^{-\beta s}(\cos\beta s + \operatorname{sen}\beta s)$$

En la figura 5.10 se muestra el depósito con la deformada total. En la 5.11 se muestra la solución completa y la de membrana para diversas variables de este problema.

La solución para el extremo  $s = L$  será similar a la obtenido para  $s = 0$ , por simetría, cambiando simplemente  $s$  por  $L - s$ .

La conclusión más importante que se deriva de este análisis, es que los esfuerzos de flexión se concentran en el entorno de los extremos, donde la solución de membrana no cumple las *CCdC*. Lejos de los extremos, si el cilindro es “largo”, la solución es la de membrana. Sin embargo, como puede verse por el valor de las tensiones, el depósito tendrá que reforzarse en los extremos, para optimizar el diseño, es decir, para no utilizar un espesor excesivo en las regiones donde la solución es la de membrana.

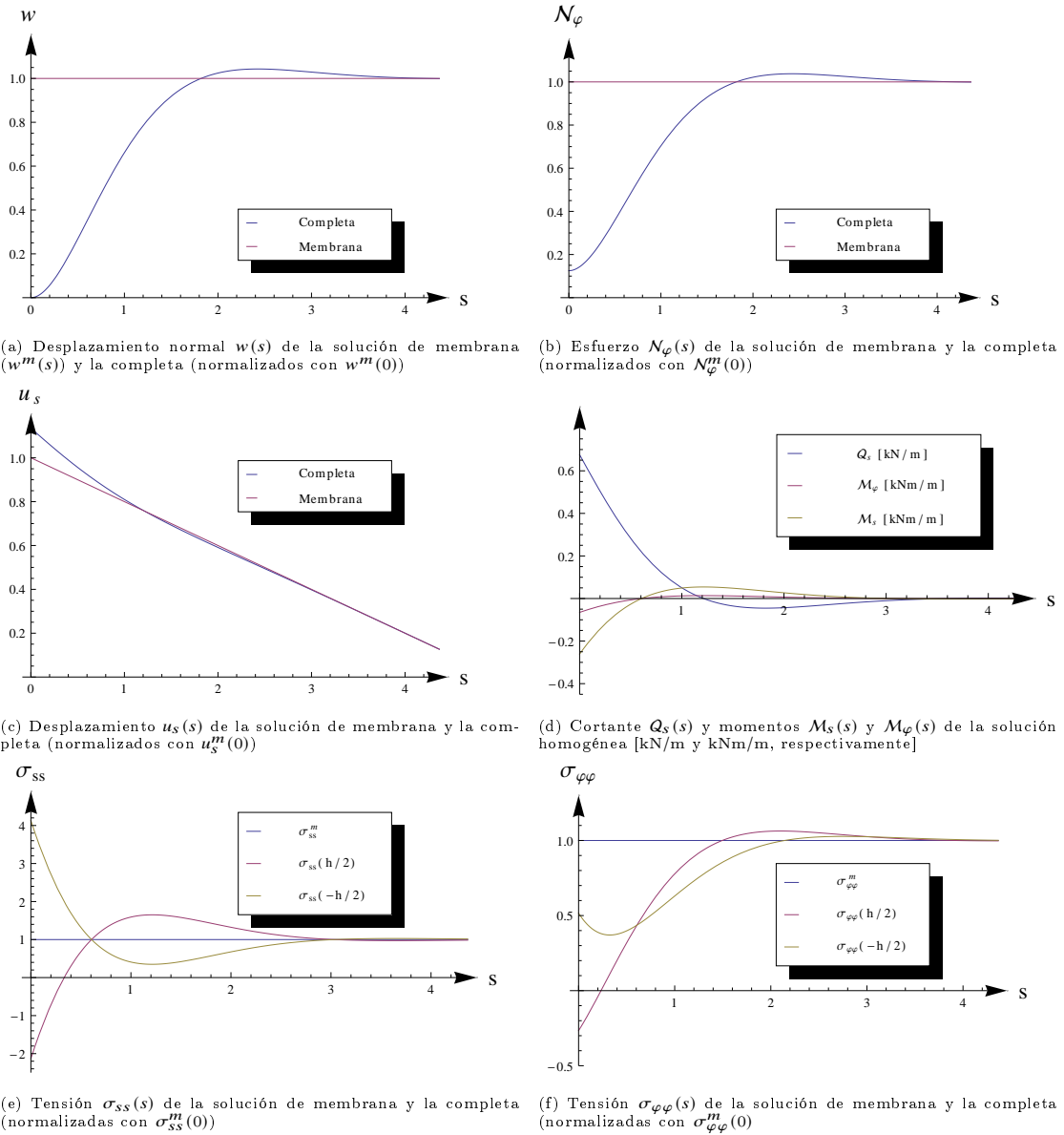


Figura 5.11: Comparación de diversas variables para la solución de membrana y la completa (Valores utilizados:  $p = 1 \text{ kN/m}^2$ ,  $E = 1 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$ ,  $h = 0,1 \text{ m}$ ,  $R = 10,0 \text{ m}$ ,  $\nu = 0,25$ . Para estos valores  $\beta = 1,295 \text{ m}^{-1}$ , y por tanto  $l_F = 2\pi/\beta = 4,852 \text{ m}$ ).

## Apéndice A

# Variación diferencial de los vectores unitarios según las coordenadas curvilíneas

Cuando se derivan magnitudes vectoriales en coordenadas curvilíneas, es necesario tener en cuenta que no sólo hay que derivar el valor de la componente del vector, sino el mismo vector unitario que cambia de un punto a otro. Eso es fácil reconocerlo mediante el siguiente ejemplo: supongamos que sobre una esfera tenemos una fuerza radial de módulo constante  $\mathbf{p} = p\mathbf{i}_z$  siendo  $\mathbf{i}_z$  la normal a la esfera. Esta claro que el vector  $\mathbf{p}$  cambia al pasar de un punto a otro, aunque su modulo y sus componentes en los ejes curvilíneos sean constantes. Es decir, que el diferencial  $d\mathbf{p} \neq 0$ , a pesar que de sean constantes las componentes sobre los ejes locales, precisamente por que estos ejes cambian de punto a punto.

Por tanto, si tenemos un vector  $\mathbf{f} = f_\varphi\mathbf{i}_\varphi + f_\theta\mathbf{i}_\theta + f_z\mathbf{i}_z$  entonces el diferencial de vector será,

$$d\mathbf{f} = df_\varphi\mathbf{i}_\varphi + df_\theta\mathbf{i}_\theta + df_z\mathbf{i}_z + f_\varphi d\mathbf{i}_\varphi + f_\theta d\mathbf{i}_\theta + f_z d\mathbf{i}_z \quad (\text{A.1})$$

que incluye los diferenciales de las componentes y también los de los vectores de la base curvilínea y por tanto no lo tenemos expresado en la base original de la forma,

$$d\mathbf{f} = dF_\varphi\mathbf{i}_\varphi + dF_\theta\mathbf{i}_\theta + dF_z\mathbf{i}_z$$

Para obtener esa expresión tenemos que calcular los diferenciales de los vectores unitarios ( $\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z$ ). Esto podemos hacerlo proyectándolos sobre unos ejes cartesianos fijos  $X, Y, Z$ , tal y como se indica en la figura A.1. El eje  $Z$  está en el eje de revolución de la lámina, el  $Y$  en el plano que contiene a este eje y se encuentra en  $\varphi = 0$  y el  $X$  perpendicular al plano  $YZ$ .

Proyectando en los ejes cartesianos se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\varphi &= \cos \varphi \mathbf{i}_X - \sin \varphi \mathbf{i}_Y \\ \mathbf{i}_\theta &= \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i}_X + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i}_Y - \sin \theta \mathbf{i}_Z \\ \mathbf{i}_z &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}_X + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i}_Y + \cos \theta \mathbf{i}_Z \end{aligned}$$

y por tanto, tomando diferenciales,

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}_\varphi &= -\sin \varphi d\varphi \mathbf{i}_X - \cos \varphi d\varphi \mathbf{i}_Y \\ d\mathbf{i}_\theta &= (-\sin \theta \sin \varphi d\theta + \cos \theta \cos \varphi d\varphi) \mathbf{i}_X - \\ &\quad (\sin \theta \cos \varphi d\theta + \cos \theta \sin \varphi d\varphi) \mathbf{i}_Y - \cos \theta d\theta \mathbf{i}_Z \\ d\mathbf{i}_z &= (\cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi) \mathbf{i}_X + \\ &\quad (\cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi) \mathbf{i}_Y - \sin \theta d\theta \mathbf{i}_Z \end{aligned}$$

puesto que  $d\mathbf{i}_X = d\mathbf{i}_Y = d\mathbf{i}_Z = 0$  ya que son vectores fijos.



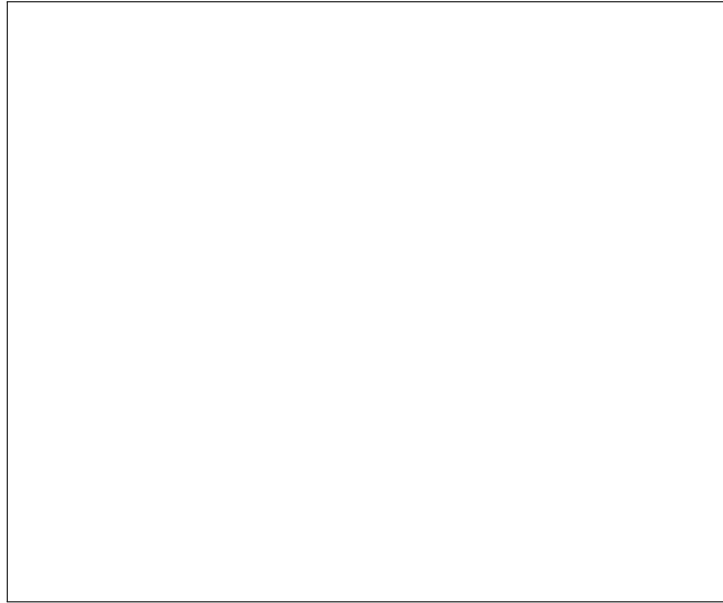


Figura A.1: Vectores unitarios en las coordenadas curvilíneas en un punto cualquiera de la lámina

Los vectores diferenciales anteriores están proyectados sobre los vectores  $\mathbf{i}_X, \mathbf{i}_Y$  y  $\mathbf{i}_Z$ . Los proyectamos a continuación sobre los vectores  $\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_\theta$  y  $\mathbf{i}_z$  invirtiendo para ello la relación A.2. Esto es fácil hacerlo, escribiendo la ecuación en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_\varphi \\ \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ \cos \theta \text{ sen } \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi & \text{sen } \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_X \\ \mathbf{i}_Y \\ \mathbf{i}_Z \end{pmatrix}$$

e invirtiendo la matriz,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_X \\ \mathbf{i}_Y \\ \mathbf{i}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \theta \text{ sen } \varphi & \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \text{sen } \theta \cos \varphi \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_\varphi \\ \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{i}_z \end{pmatrix}$$

que es simplemente la traspuesta.

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones A.2 se obtiene una relación muy simple,

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}_\varphi &= -\cos \theta d\varphi \mathbf{i}_\theta - \text{sen } \theta d\varphi \mathbf{i}_z \\ d\mathbf{i}_\theta &= \cos \theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi - d\theta \mathbf{i}_z \\ d\mathbf{i}_z &= \text{sen } \theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi + d\theta \mathbf{i}_\theta \end{aligned}$$

De estas ecuaciones también puede deducirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\cos \theta \mathbf{i}_\theta - \text{sen } \theta \mathbf{i}_z & \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{i}_\varphi & \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{i}_z \\ \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial \varphi} &= \text{sen } \theta \mathbf{i}_\varphi & \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial \theta} &= \mathbf{i}_\theta \end{aligned} \tag{A.2}$$

Por otra parte, llevando las expresiones A.2 a la ecuación A.1,

$$\begin{aligned} df &= df_\varphi \mathbf{i}_\varphi + df_\theta \mathbf{i}_\theta + df_z \mathbf{i}_z + f_\varphi (-\cos \theta d\varphi \mathbf{i}_\theta - \text{sen } \theta d\varphi \mathbf{i}_z) \\ &\quad + f_\theta (\cos \theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi - d\theta \mathbf{i}_z) + f_z (\text{sen } \theta d\varphi \mathbf{i}_\varphi + d\theta \mathbf{i}_\theta) \end{aligned}$$

y agrupando términos,

$$d\mathbf{f} = (df_\varphi + f_\theta \cos \theta d\varphi + f_z \sin \theta d\varphi) \mathbf{i}_\varphi + (df_\theta - f_\varphi \cos \theta d\varphi + f_z d\theta) \mathbf{i}_\theta + (df_z - f_\varphi \sin \theta d\varphi - f_\theta d\theta) \mathbf{i}_z$$

de donde se deduce que,

$$dF_\varphi = df_\varphi + f_\theta \cos \theta d\varphi + f_z \sin \theta d\varphi$$

$$dF_\theta = df_\theta - f_\varphi \cos \theta d\varphi + f_z d\theta$$

$$dF_z = df_z - f_\varphi \sin \theta d\varphi - f_\theta d\theta$$

De estas expresiones también se puede deducir que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + f_\theta \cos \theta + f_z \sin \theta \right) \mathbf{i}_\varphi + \left( \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} - f_\varphi \cos \theta \right) \mathbf{i}_\theta + \left( \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - f_\varphi \sin \theta \right) \mathbf{i}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial f_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi + \left( \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_z \right) \mathbf{i}_\theta + \left( \frac{\partial f_z}{\partial \theta} - f_\theta \right) \mathbf{i}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial f_z}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

y para las componentes del vector  $d\mathbf{f}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + f_\theta \cos \theta + f_z \sin \theta; & \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_\varphi}{\partial \theta}; & \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} &= \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} - f_\varphi \cos \theta; & \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_z; & \frac{\partial F_\theta}{\partial z} &= \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - f_\varphi \sin \theta; & \frac{\partial F_z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_z}{\partial \theta} - f_\theta; & \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{aligned}$$



## Apéndice B

# Cálculo de los radios de curvatura para una lámina de revolución cualquiera

Supongamos una superficie de revolución cualquiera, cuya generatriz meridional viene dada, en unos ejes cartesianos  $(Y, Z)$  en el plano que contiene a la generatriz y la directriz (ver figura B.1), por la curva paramétrica  $r(t) = (Y(t), Z(t))$ .

Para simplificar las expresiones subsiguientes, denominemos  $\alpha(t) = \dot{Y}(t) = \frac{dY}{dt}$  y  $\beta(t) = \dot{Z}(t) = \frac{dZ}{dt}$ .

Es fácil comprobar que

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{dZ}{dY} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$$

de donde se puede deducir,

$$d\theta = \frac{1}{s(t)^2} (\alpha(t)\dot{\beta}(t) - \dot{\alpha}(t)\beta(t)) dt$$

siendo  $s(t) = \|r(t)\| = \sqrt{\alpha(t)^2 + \beta(t)^2}$ . Esta expresión nos servirá para transformar las integrales que están expresadas en términos de  $\theta$  a  $t$ .

A partir de la expresión de  $\theta$  se deduce,

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\alpha(t)}{s(t)} \\ \text{cos } \theta &= -\frac{\beta(t)}{s(t)} \end{aligned}$$

Conocido  $\theta$  es fácil calcular  $r_\varphi$ , ya que el radio del paralelo es  $a(t) = Y(t)$ ,

$$r_\varphi = \frac{Y(t)}{\text{sen } \theta}$$

Para calcular  $r_\theta$  basta calcular la curvatura de la generatriz  $(Y(t), Z(t))$ . Puesto que  $r(t) = (Y(t), Z(t))$  entonces la curvatura es,

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{r}(t) \times \dot{r}(t)|_X}{s(t)^3} = \frac{1}{s(t)^3} (\dot{\alpha}(t)\beta(t) - \alpha(t)\dot{\beta}(t))$$

En el numerador figura la componente según  $X$  del producto vectorial. Esta curvatura tiene signo, de modo que si es positiva el centro de curvatura está hacia la directriz, y lo contrario si es negativa.

A partir de la curvatura, el radio es simplemente,

$$r_\theta = \frac{1}{\kappa(t)}$$

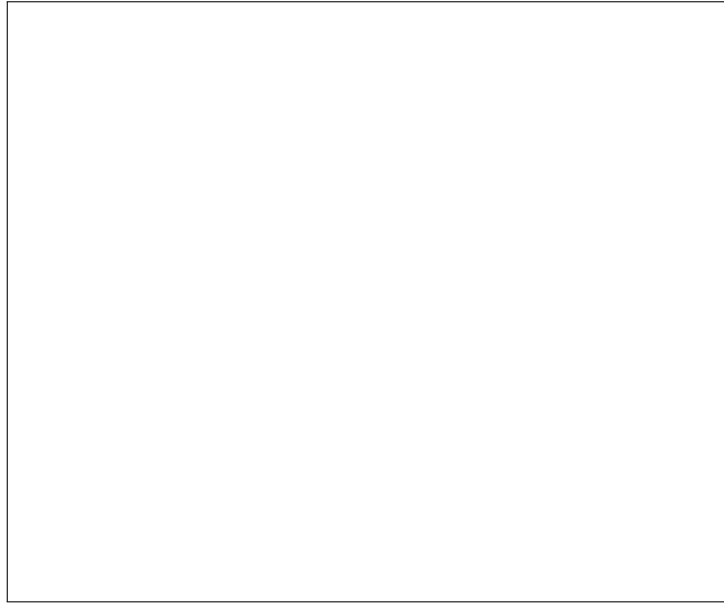


Figura B.1: Generatriz de una lámina de revolución en coordenadas paramétricas

Nótese que,

$$r_\theta d\theta = -s(t)dt$$

expresión que podemos utilizar para transformar las integrales realizadas en la variable  $\theta$  a integrales en la variable  $t$ .

A partir de esa relación se deduce que,

$$\frac{\partial(\cdot)}{r_\theta \partial \theta} = -s(t) \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$$

pues,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{s(t)}{r_\theta}$$

## B.1. Ejemplo

Sea una cúpula parabólica que viene dada por,

$$Y(t) = t; \quad Z(t) = a^2 - t^2$$

y por tanto,

$$\alpha(t) = 1; \quad \beta(t) = -2t; \quad s(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$$

de donde,

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}; \quad \cos \theta = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

Para calcular la curvatura tenemos,

$$\dot{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (1, -2t); \quad \ddot{r}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t)) = (0, -2)$$

de modo que

$$\ddot{r}(t) \times \dot{r}(t)|_X = (0, -2, 0) \times (1, -2t, 0)|_X = 2$$

de donde se deduce finalmente que,

$$\kappa(t) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}}$$

y por tanto,

$$r_{\theta}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+4t^2)^3}$$

Por otra parte,

$$r_{\varphi}(t) = \frac{a(t)}{\operatorname{sen} \theta} = t\sqrt{(1+4t^2)^3}$$

y finalmente,

$$d\theta = -\sqrt{1+4t^2} dt$$



## Apéndice C

# FORMULARIO de ANÁLISIS DE LÁMINAS

Ecuaciones de equilibrio de membranas

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_{\theta\varphi})}{r_\theta \partial \theta} + \cos\theta N_{\varphi\theta} &= -ap_\varphi \\ \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(aN_\theta)}{r_\theta \partial \theta} - \cos\theta N_\varphi &= -ap_\theta \\ \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} &= p_z\end{aligned}$$

Solución 1 de las ecuaciones de equilibrio de membrana (carga axilsimétrica)

$$N_\theta(\theta) = \frac{a(\theta_0) \operatorname{sen}\theta_0}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} N_\theta(\theta_0) - \frac{1}{a(\theta) \operatorname{sen}\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta') r_\theta(\theta') p_V(\theta') d\theta'; \quad \text{donde } p_V = \operatorname{sen}\theta p_\theta - \cos\theta p_z$$

$$N_\varphi(\theta) = r_\varphi p_z(\theta) - \frac{r_\varphi}{r_\theta} N_\theta(\theta)$$

Solución por equilibrio global de las ecuaciones de equilibrio de membrana (carga axilsimétrica)

$$N_\theta(\theta) = -\frac{W(\theta)}{2\pi a \operatorname{sen}\theta}$$

$$N_\varphi(\theta) = r_\varphi p_z(\theta) - \frac{r_\varphi}{r_\theta} N_\theta(\theta)$$

Particularización para láminas cilíndricas

$$N_s(s) = N_s(s_0) - \int_{s_0}^s p_s(s') ds'$$

$$N_\varphi(s) = R p_z(s)$$

Solución de los desplazamientos de membrana (carga axilsimétrica)

$$u_\theta(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta_0} u_\theta(\theta_0) + \operatorname{sen}\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{F(\theta') r_\varphi r_\theta}{Eh \operatorname{sen}\theta'} d\theta'$$



$$F(\theta) = \frac{N_\theta - \nu N_\varphi}{r_\varphi} - \frac{N_\varphi - \nu N_\theta}{r_\theta}$$

$$w(\theta) = \frac{r_\varphi}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) - \cot\theta u_\theta$$

$$\delta = \frac{r_\varphi \operatorname{sen}\theta}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta)$$

$$\omega_\varphi = \frac{d}{r_\theta d\theta} \left[ \frac{1}{Eh} r_\varphi (N_\varphi - \nu N_\theta) \right] - \frac{r_\varphi \cot\theta}{Eh} F(\theta)$$

**Particularización para láminas cilíndricas**

$$u_s(s) = u_s(s_0) + \frac{1}{Eh} \int_{s_0}^s (N_s - \nu N_\varphi) ds'$$

$$w(s) = \delta(s) = \frac{R}{Eh} (N_\varphi - \nu N_s)$$

$$\omega_\varphi(s) = \frac{R}{Eh} \frac{d}{ds} (N_\varphi - \nu N_s)$$

**Volumenes y superficies**

Cuerpo	Volumen	Superficie	Observaciones
Esfera	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$4\pi R^2$	$R$ : Radio
Casquete esférico	$\frac{\pi}{3}H^2(3R - H)$	$2\pi RH$	$R$ : Radio esfera; $H$ : Altura
Cono	$\frac{\pi}{3}R^2H$	$\pi Rg$	$R$ : Radio de la base; $H$ : Altura; $g$ : Longitud generatriz $g = \sqrt{R^2 + H^2}$
Cilindro	$\pi R^2H$	$2\pi RH$	$R$ : Radio; $H$ : Altura; Superficie lateral, sin contar superficie círculos superior e inferior

**Soluciones de la ecuación homogénea del desplazamiento para flexión**

$$w_1^f(s) = e^{-\beta s} \cos\beta s$$

$$w_2^f(s) = e^{-\beta s} \operatorname{sen}\beta s$$

$$w_3^f(s) = e^{-\beta(L-s)} \cos\beta(L-s)$$

$$w_4^f(s) = e^{-\beta(L-s)} \operatorname{sen}\beta(L-s)$$

siendo,

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2}}$$

## Cálculo de las variables de flexión a partir de la flecha $w^h(s)$

Para las variables de desplazamiento:

$$\omega_\varphi^f = \frac{dw^f}{ds} \quad u_s^f(s) = u_s^f(s_0) - \nu \int_{s_0}^s \frac{w^f(s')}{R} ds'$$

para los esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_\varphi^f(s) &= 4D\beta^4 R w^f(s) & Q_s^f(s) &= -D \frac{d^3 w^f}{ds^3} \\ M_s^f(s) &= -D \frac{d^2 w^f}{ds^2} & M_\varphi^f(s) &= -\nu D \frac{d^2 w^f}{ds^2} = \nu M_s \end{aligned}$$

y finalmente para las tensiones:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^f(s, z) = \frac{N_\varphi^f}{h} + z \frac{M_\varphi}{I} \quad \sigma_{ss}^f(s, z) = z \frac{M_s}{I}$$

siendo  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  e  $I = h^3/12$ .

## Soluciones para cilindros de gran longitud con diferentes $CCdC$

Todas las variables de las soluciones para un cilindro de gran longitud pueden escribirse de la forma,

$$f(s) = C e^{-\beta s} (C_c \cos \beta s + C_s \sin \beta s)$$

siendo  $C$ ,  $C_c$  y  $C_s$  distintas constantes, según sea la variable  $f(s)$  de que se trate y de las  $CCdC$  concretas.

En la siguiente tabla se muestran los valores de estas constantes para el caso de aplicación de diferentes  $CCdC$  en  $s = 0$ :

$CCdC$	Constantes	$w(s)$	$M_s(s)$	$N_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$Q_s(s)$
$w(0) = 1$ $\omega_\varphi(0) = 0$	$C$	1	$2D\beta^2$	$4D\beta^4 R$	$-2\beta$	$\frac{\nu}{R\beta}$	$-4D\beta^3$
	$C_c$	1	1	1	0	1	1
	$C_s$	1	-1	1	1	0	0
$Q_s(0) = 0$ $M_s(0) = 1$	$C$	$-\frac{1}{2D\beta^2}$	1	$-2\beta^2 R$	$\frac{1}{D\beta}$	$\frac{\nu}{2DR\beta^3}$	$-2\beta$
	$C_c$	1	1	1	1	0	0
	$C_s$	-1	1	-1	0	1	1
$w(0) = 0$ $\omega_\varphi(0) = 1$	$C$	$\frac{1}{\beta}$	$2D\beta$	$4D\beta^3 R$	1	$\frac{\nu}{2R\beta^2}$	$-2D\beta^2$
	$C_c$	0	1	0	1	1	1
	$C_s$	1	0	1	-1	1	1
$Q_s(0) = 1$ $M_s(0) = 0$	$C$	$-\frac{1}{2D\beta^3}$	$\frac{1}{\beta}$	$-2\beta R$	$\frac{1}{2D\beta^2}$	$-\frac{\nu}{4DR\beta^4}$	1
	$C_c$	1	0	1	1	1	1
	$C_s$	0	1	0	1	-1	-1

Cuando las  $CCdC$  se aplican en  $s = L$  las variables son iguales que antes, pero cambiando  $s$  por  $L - s$ , y en algunos casos un cambio de signo,

$$g(s) = \pm f(L - s)$$

de acuerdo con la siguiente tabla,

$CCdC$	$w(s)$	$M_s(s)$	$N_\varphi(s)$	$\omega_\varphi(s)$	$u_s(s)$	$Q_s(s)$
$w(L) = 1$ $\omega_\varphi(L) = 0$	+	+	+	-	-	-
$Q_s(L) = 0$ $M_s(L) = 1$	+	+	+	-	-	-
$w(L) = 0$ $\omega_\varphi(L) = 1$	-	-	-	+	+	+
$Q_s(L) = 1$ $M_s(L) = 0$	-	-	-	+	+	+

debido a que el criterio de signos de alguna de ellas no es igual en  $s = 0$  y en  $s = L$

### Relación de rigidez en el extremo de un cilindro de gran longitud

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

siendo  $\mathbf{K}$  la matriz de la tabla siguiente, que depende del criterio de signos adoptado.

	$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$		$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$
	$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$		$2D\beta \begin{pmatrix} 2\beta^2 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$

El criterio de signo positivo para desplazamiento y giro es el mismo de la fuerza o momento, respectivamente.

### Relación de flexibilidad en el extremo de un cilindro de gran longitud

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix}$$

siendo  $\mathbf{S}$  la matriz de la tabla siguiente, que depende del criterio de signos adoptado.

	$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{2D\beta^3} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 2\beta^2 \end{pmatrix}$

El criterio de signo positivo para desplazamiento y giro es el mismo de la fuerza o momento, respectivamente.

# Bibliografía

- [1] ABASCAL, R. *Teoría general de láminas de revolución*. Universidad de Sevilla, 1988. Apuntes de doctorado (no publicados).
- [2] CALLADINE, C. R. *Theory of Shells Structures*. Cambridge University Press, 1983.
- [3] GIBSON, J. E. *Linear Elastic Theory of Thin Shells*. Pergamon Press, 1965.
- [4] HERNÁNDEZ, S., AND JURADO, J. Á. *Análisis estructural de placas y láminas*. Tórculo Ediciones, 2004.
- [5] TIMOSHENKO, S., AND WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Teoría de placas y láminas*. Ediciones URMO, 1975.
- [6] UGURAL, A. C. *Stresses in plates and shells*. McGraw-Hill, 1999.
- [7] VENTSEL, E., AND KRAUTHAMMER, T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. Marcel Dekker, 2001.
- [8] WEMPNER, G., AND TALASLIDIS, D. *Mechanics of solids and shells: Theories and Approximations*. CRC Press, 2003.
- [9] ZIGNONI, A. *Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering*. Thomas Telford, 1997.