



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



Facultad de Ciencias

**Grado en Matemáticas**

# **Teoría de Hilbert-Schmidt, bases hilbertianas generalizadas y aplicaciones**

Luis Felipe Del Río López

---

Departamento de Análisis Matemático

Tutor: Antonio Cañada Villar

Curso académico 2019-2020.

*Teoría de Hilbert-Schmidt, bases hilbertianas generalizadas y aplicaciones.*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2019-2020.

<b>Autor</b>	Luis Felipe Del Río López	Grado en Matemáticas
<b>Tutor</b>	Antonio Cañada Villar	Facultad de Ciencias
<b>Departamento</b>	Análisis Matemático	Universidad de Granada

---

## Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado titulado “*Teoría de Hilbert-Schmidt, bases hilbertianas generalizadas y aplicaciones*” consta de los siguiente cuatro capítulos:

- Preliminares de análisis funcional.
- Origen histórico de las bases hilbertianas.
- Ecuaciones integrales con núcleo en  $L^2$ .
- Valores propios y funciones propias del laplaciano.

En el primero de ellos nos centraremos en el concepto de base hilbertiana y en la teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert, lo cual resultará fundamental en los sucesivos capítulos. Parte de estos contenidos fueron vistos en la asignatura de Análisis Funcional del grado de Matemáticas. Para la realización de este capítulo hemos utilizado principalmente [1].

Una vez familiarizados con el primer capítulo estamos en condiciones de poder comprender los siguientes.

En el segundo capítulo trataremos el origen histórico de las bases hilbertianas, el cual estuvo íntimamente ligado al método de separación de variables. Éste surgió en el estudio del problema de la cuerda vibrante por parte de D’Alembert, Euler y Bernoulli y, posteriormente, en el de la ecuación del calor, de mano de Fourier. De forma similar, muchos otros problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y de ecuaciones en derivadas parciales pueden ser resueltos mediante los llamados “desarrollos generales de Fourier”,

en los cuales las bases hilbertianas juegan un papel esencial. Para la elaboración de este capítulo, las principales referencias han sido [5] y [4].

En el tercer capítulo usaremos los conocimientos adquiridos en el primero para poder obtener condiciones suficientes para que un operador integral definidos en  $L^2$  con núcleo en  $L^2$  sea compacto y autoadjunto. Además de esto, obtendremos resultados para estos tipos de operadores, algunos de ellos de gran importancia como es el caso del siguiente teorema:

**Teorema:** *Sea  $K$  un operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$ , y sea  $\{\varphi_i\}$  el conjunto de todas las funciones propias, convenientemente ortonormalizadas, asociadas a los valores propios no nulos de  $K$ , los cuales denotaremos  $\{\mu_i\}$ . Sea  $f$  un elemento cualquiera de  $H$ , entonces  $f$  puede ser representada de la forma*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i + f_0$$

donde  $f_0$  es un elemento del núcleo de  $K$  (es decir,  $K f_0 = 0$ ).

Los resultados que veremos, en especial este último teorema, nos serán de gran utilidad en la última sección del capítulo, la cual está dedicada a aplicaciones a ecuaciones diferenciales. En ella consideraremos problemas de contorno asociados a ecuaciones diferenciales de segundo orden y veremos que los operadores diferenciales de dichos problemas tienen como inversa un operador integral, el cual es compacto. Si además es autoadjunto podremos utilizar el teorema enunciado anteriormente, lo cual nos permitirá expresar cualquier elemento del espacio de Hilbert que consideremos en función de las funciones propias de dicho operador inverso. También obtendremos el valor de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Finalmente, en el capítulo 4, nos centraremos en probar uno de los resultados más antiguos referentes a los valores y vectores propios de la ecuación del calor, la fórmula asintótica de Hermann-Weyl. Para este fin usaremos nociones básicas de la ecuación del calor, como el principio del máximo-mínimo, y propiedades de los valores y vectores propios del laplaciano. Este capítulo está basado en el artículo [6].

En estos tres últimos capítulos se han tratado los objetivos previstos en la propuesta de este trabajo. Dichos objetivos son:

- Origen histórico de las bases hilbertianas.
- Teoría de Hilbert-Schmidt para ecuaciones integrales y bases hilbertianas generales.
- Valores propios y funciones propias del laplaciano. El método de separación de variables en dimensiones superiores.

A pesar de la dificultad teórica del trabajo, todos estos objetivos han sido alcanzados satisfactoriamente. Para ello ha sido fundamental el uso de la bibliografía y la ayuda de mi tutor Antonio Cañada, quien ha estado siempre dispuesto a responder las dudas que me han surgido a lo largo del trabajo.



---

## Summary

The present end degree work, entitled “*Hilbert-Schmidt’s theory, generalized hilbertian basis and applications*” is divided into four chapters. In the first one we will become familiar with the concept of hilbertian basis and the spectral theory for compact and selfadjoint operators. Once the hilbertian basis concept is known, one of the main objectives of the chapter is to know when we can guarantee that a Hilbert space admits a hilbertian basis. We will prove a theorem that will ensure us that every separable Hilbert space admits a hilbertian basis, in fact we will construct it explicitly. After that we will define compact and selfadjoint operators and we will see some important properties of them. Finally, at the end of the chapter, using all we learned before, we will prove the following theorem:

**Theorem:** [1] : *Let  $H$  be a separable Hilbert space and let  $T$  be a linear compact selfadjoint operator. Then there exists a hilbertian basis composed of eigenvectors of  $T$ .*

This result is, indeed, a great summary of the chapter.

The second chapter is dedicated to the historical origin of hilbertian basis. We will start talking about the vibrating string problem, that was mainly developed by D’Alembert, Euler and Bernoulli, although they disagreed in some points. In particular, D’Alembert and Euler disagreed in the concept of function, which was not as clear as it is nowadays. Both of them obtained that the solution of the problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0\end{aligned}$$

is

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) \right]$$

for a “convenient extension of the function  $f$ ”.

On the other hand, Bernoulli used his musical knowledge to treat with the problem. He tried to obtain the solution of the problem through the superposition of simple functions

$$u_n(x, t) = \sin(nx)\cos(nt) \quad n \in \mathbb{N}.$$

It seems that he used the so-called method of separation of variables. Nevertheless, he had to assume that every function can be expressed as a serie of sines, i.e.,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad \forall x \in [0, \pi]$$

with “proper coefficients  $a_n$ ”.

This reasoning was quite criticized by D’Alembert and Euler. Bernoulli never gave an expression for the coefficients  $a_n$ .

Some years later, J. Fourier was interested in the heat flow problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < t < T \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

The way he solved the problem was similar to that of Bernoulli on the vibrating string problem. The great difference was that Fourier gave an explicit expression for coefficients. However, Fourier was quite criticized due to his lack of rigour obtaining the coefficients, so that his work was not published by the French Academy.

Nowadays Fourier theory can be explained using functional analysis results, hilbertian basis and the so-called Sturm-Liouville operators will play a key role in this theory.

In the third chapter we will discuss integral equations with kernel in  $L^2$ . Firstly, we will see when a linear integral operator is compact. In order to prove the results the only knowledge needed will be the definition of compact operator, seen in the first chapter, and some basic notions of Lebesgue integration. Furthermore, if the operator is selfadjoint we will be able to prove some really important results like the following one

**Theorem:** [9] *Let  $K$  be a self-adjoint operator on a Hilbert space  $H$ . All eigenfunctions corresponding to distinct eigenvalues are orthogonal. A set of eigenfunctions that is finite or countable corresponding to the same eigenvalue can be orthogonalized.*

This theorem will be essential in order to prove our main result in chapter 3.

**Theorem:** [9]: *Let  $K$  be a compact, self-adjoint operator on a Hilbert space  $H$  and  $\{\varphi_i\}$  the set of all orthonormal eigenfunctions associated with nonzero eigenvalues of  $K$ . Denote the corresponding nonzero eigenvalues by  $\{\mu_i\}$ . Let  $f$  be any element in  $H$ . Then  $f$  can be represented in the form*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i + f_0$$

where  $f_0$  is a suitable element in the nullspace of  $K$ .

Finally, at the end of the chapter, we will see some applications about what we have learned along this chapter. We will consider boundary value problems associated with second order differential equations. We will see that every regular differential operator associated with this problems will have an inverse that is an integral operator, which is also compact. If it is selfadjoint we will be able to apply the results seen in the previous sections, specially the previous theorem. We will also calculate the serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

In the fourth chapter, we will deduce one of the oldest results about eigenvalues and eigenfunctions, the so-called asymptotic Hermann-Weyl formula. The objective of the chapter is to prove this result using basic facts about the heat equation and information about the eigenvalues and eigenfunctions of the laplacian operator. However, the original proof did not use the heat equation. This chapter is divided in three sections. The first one is dedicated to the heat equation. We will see that exists only one solution for that problem. In order to prove the uniqueness we will use the Maximum-Minimum Principle. The proof of the existence will rely on the concept of the Green's function for our problem. Along the chapter we will construct it using the fact that

$$k(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$$

plays the role of Green's function for all the space and the so-called *principle of not feeling the boundary*.

In the second section we will discuss about eigenvalues and eigenfunctions of the laplacian. The objective of this section is to prove the following theorem:

**Theorem:** [6]: *There exists a complete orthonormal basis  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  of  $L^2(D)$ , where  $D \subset \mathbb{R}^n$  is an open bounded set with a smooth boundary, consisting of eigenfunctions of the laplacian in  $D$  with homogeneous Dirichlet boundary conditions, i.e.,*

$$\begin{aligned}\Delta\phi_i + \lambda_i\phi_i &= 0 \\ \phi_i|_{\partial D} &= 0.\end{aligned}$$

*If  $\lambda_i$  is the eigenvalue belonging to  $\phi_i$ , then  $\lambda_i > 0$  and  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$ . Moreover,*

$$p(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)},$$

*where the convergence is uniform on  $\overline{D} \times \overline{D} \times [\varepsilon, \infty)$  for every  $\varepsilon > 0$ .*

Finally, in the last section, we will notice the role of the heat equation in the proof of the Hermann Weyl formula. We will also see some key results, including the Hardy and Littlewood tauberian theorem, that will finally end the proof of the result:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^{n/2}}{i} = \frac{C(n)}{\text{vol}(D)} \quad n \in \mathbb{N}$$

where  $C(n) = (4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2 + 1)$  and  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  are the eigenvalues of the laplacian operator with homogeneous Dirichlet boundary conditions.

---

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>Summary</b>	<b>VII</b>
<b>1 Preliminares de análisis funcional</b>	<b>1</b>
1.1 Sumas de Hilbert y bases hilbertianas . . . . .	1
1.2 Operadores compactos y autoadjuntos . . . . .	5
1.3 Teoría de Riesz-Fredholm . . . . .	8
1.4 Espectro de un operador compacto . . . . .	9
1.5 Descomposición Espectral de operadores compactos y autoadjuntos . . . . .	12
<b>2 Origen histórico de las bases hilbertianas</b>	<b>15</b>
2.1 El problema de la cuerda vibrante . . . . .	15
2.2 Fourier y el problema de la conducción del calor . . . . .	19
2.3 La teoría de series de Fourier en la actualidad . . . . .	21
2.3.1 Concepto de base hilbertiana . . . . .	22
2.3.2 Problemas del tipo Sturm Liouville . . . . .	23
<b>3 Ecuaciones integrales con núcleo en <math>L^2</math></b>	<b>27</b>
3.1 Introducción . . . . .	27
3.2 Operadores compactos . . . . .	28
3.2.1 Operadores compactos y autoadjuntos . . . . .	34
3.3 Aplicación a las ecuaciones diferenciales . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Valores propios y funciones propias del laplaciano</b>	<b>47</b>
4.1	Ecuación de calor . . . . .	47
4.2	Funciones y valores propios . . . . .	51
4.3	Distribución de los valores propios . . . . .	55
	<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

## *Preliminares de análisis funcional*

El objetivo de este capítulo es el repaso de algunos conceptos de análisis funcional, estudiados durante el grado en Matemáticas, para el correcto seguimiento del trabajo. En él veremos qué es una base hilbertiana y en que casos podemos asegurar su existencia. Además, estudiaremos la descomposición espectral de operadores compactos y autoadjuntos, lo cual nos será útil para construir un tipo especial de bases hilbertianas, las conformadas por los vectores propios de dicho operador. Éstas, como podremos ver a lo largo del trabajo, son de gran utilidad en Matemáticas, Física, Biología, Economía ...

Durante el capítulo tomaremos principalmente como referencia [1], apoyándonos en [3], [7] y [11]. En todo el capítulo supondremos que  $H$  es un espacio de Hilbert.

### 1.1. Sumas de Hilbert y bases hilbertianas

En primer lugar recordaremos la definición de espacio de Hilbert.

**Definición 1.1.** *Sea  $H$  un espacio vectorial real. Un producto escalar es una aplicación*

$$(\bullet, \bullet) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto (u, v)$$

- *Bilineal*
- *Simétrica*
- *Definida positiva*

A partir del producto escalar puede definirse una norma en  $H$

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

**Definición 1.2.** *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar y que, además, es completo para la norma derivada del producto escalar.*

El primer objetivo que abordaremos en este capítulo será saber qué es una base hilbertiana y qué propiedades la caracterizan. Para ello necesitaremos una serie de definiciones:

**Definición 1.3.** *Dada una sucesión de subespacios vectoriales cerrados de  $H$ ,  $\{E_n\}_{n \geq 1}$ , diremos que  $H$  es la suma de Hilbert de los  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  si :*

a) *Los subespacios  $E_n$  son mutuamente ortogonales, es decir:*

$$(u, v) = 0 \quad \forall u \in E_n, \forall v \in E_m, m \neq n$$

b) *El espacio vectorial generado por  $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$  es denso en  $H$ .*

**Definición 1.4.** *Sea  $K = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$*

*$K$  es ortogonal  $\Leftrightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad \forall n \neq m$*

*$K$  es ortonormal  $\Leftrightarrow (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$*

**Definición 1.5.** *Diremos que  $K = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  es una base hilbertiana de  $H$  si*

a)  *$K$  es ortonormal.*

b) *El espacio vectorial generado por  $K$  es denso en  $H$ .*

**Definición 1.6.** *Sea  $K = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  ortonormal. Diremos que  $K$  es completo si y sólo si*

$$K^\perp = \{f \in H : (f, \varphi_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}.$$

Enunciaremos y demostraremos a continuación una serie de resultados que nos serán útiles:

**Proposición 1.1.** (*Desigualdad de Bessel*):

Sea  $K = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  ortonormal, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leq \|f\|^2 \quad \forall f \in H$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|^2 &= \left( f - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n) \varphi_n, f - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n) \varphi_n \right) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n)^2 \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por tanto, si  $S_m := \sum_{n=1}^m (f, \varphi_n)^2$ , tendríamos que  $S_m \leq \|f\|^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\sum_{n \geq 1} (f, \varphi_n)^2$  es convergente y, además,  $\sum_{n \geq 1} (f, \varphi_n)^2 \leq \|f\|^2$ . ■

**Teorema 1.1.** Sea  $K = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  un conjunto ortonormal y  $H$  un espacio de Hilbert. Entonces equivalen:

- I)  $K$  es completo.
- II)  $K$  es una base hilbertiana de  $H$ .
- III)  $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n \quad \forall f \in H$ .
- IV)  $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in H$  (**Identidad de Parseval**)

**Demostración.** Véase la demostración en [1], [7]. ■

Este resultado es muy útil ya que nos permite determinar cuando un conjunto es una base de Hilbert, de hecho lo usaremos en el próximo teorema, y también negarlo: basta ver que existe alguna  $f \in H$  que no verifique, por ejemplo, la identidad de Parseval.

Ya tenemos varias formas de saber si un conjunto  $K \subset H$  es, o no, base de Hilbert de  $H$ . Lo cual nos conduce a la siguiente pregunta: ¿Todo espacio de Hilbert posee una base hilbertiana? Veremos que, en algunos casos, se puede asegurar su existencia:

**Teorema 1.2.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable, entonces  $H$  posee una base hilbertiana.*

**Demostración.**

**Caso 1:**  $\dim H < \infty$

El resultado es conocido, dada una base cualquiera basta usar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y normalizar la base resultante. Para más detalles se puede consultar la sección 15.13 de [11].

**Caso 2:**  $\dim H = \infty$  [3]

Como  $H$  es separable, tenemos que existe  $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  denso en  $H$ . Por ser  $C$  denso en  $H$  existen elementos no nulos en  $C$ . Sea  $g_1$  el primero de ellos, y definamos

$$f_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$

Tiene que existir algún otro elemento  $c_{n(1)}$  de manera que  $c_{n(1)}$  sea linealmente independiente con  $f_1$  (en caso contrario tendríamos que  $H$  es de dimensión finita, llegando a contradicción). A partir de  $\{f_1, c_{n(1)}\}$ , usando Gram-Schmidt, obtenemos  $f_2$  de manera que  $\{f_1, f_2\}$  genera el mismo espacio que  $\{f_1, c_{n(1)}\}$  y, además, es un conjunto ortonormal.

En general, fijado  $p$  y ya habiendo obtenido un conjunto  $\{f_1, \dots, f_p\}$  ortonormal, podemos encontrar un elemento  $c_{n(p)}$  de manera que éste sea linealmente independiente con  $\{f_1, \dots, f_p\}$ . Para ello, definiremos

$$g_{p+1} = c_{n(p)} - P_{\langle f_1, \dots, f_p \rangle} c_{n(p)}$$

donde  $P_{\langle f_1, \dots, f_p \rangle} c_{n(p)}$  denota la proyección ortogonal de  $c_{n(p)}$  sobre el espacio engendrado por  $\langle f_1, \dots, f_p \rangle$ .

Entonces, definiendo  $f_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|} \forall p \in \mathbb{N}$ , obtenemos  $B = \{f_1, f_2, \dots\}$  ortonormal tal que cada elemento  $c_n \in C$  es combinación lineal finita de elementos de  $B$ . Este conjunto  $B$  es ortonormal, la ortogonalidad es consecuencia de las propiedades de la proyección ortogonal.

Veamos que es completo:

Sea  $f \in H : f \in B^\perp$ , entonces  $f \in C^\perp$  ya que todo elemento de  $C$  es combinación lineal finita de elemento de  $B$ . Finalmente, si  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{j(n)}$ , entonces:

$$(f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, c_{j(n)}) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Por tanto, en virtud de (1.1),  $B$  es una base hilbertiana. ■

## 1.2. Operadores compactos y autoadjuntos

A partir de ahora supondremos siempre que  $E$  y  $F$  son espacios de Banach.

**Definición 1.7.** Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach y  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal. Diremos que  $T$  es compacto si y sólo si  $T(A)$  es relativamente compacto ( $\overline{T(A)}$  es compacto)  $\forall A \subset E$  acotado.

**Proposición 1.2.** Si  $T : E \rightarrow F$  es un operador lineal y compacto, entonces también es continuo.

**Demostración.** Debemos probar que si un operador es lineal y compacto, entonces es continuo. Para ello utilizaremos que, si un operador es lineal, decir que es continuo equivale a decir que está acotado ( $T$  aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados). Probar que  $T$  está acotado equivale a probar que  $T(B_E)$  está acotada.

A partir de la cadena

$$T(B_E) \subset T(\overline{B_E}) \subset \overline{T(\overline{B_E})},$$

teniendo en cuenta que  $\overline{T(\overline{B_E})}$  es compacta en  $F$  (por ser  $T$  compacto), se deduce que  $T(B_E)$  está acotada y, por tanto, que  $T$  es continuo. ■

En consecuencia, no es necesario especificar que un operador  $T$  es continuo si éste es lineal y compacto. En este trabajo consideraremos que todos los operadores compactos son lineales.

**Proposición 1.3.** Sean  $E, F$  y  $G$  espacios de Banach,  $T : E \longrightarrow F$  un operador lineal y continuo, y  $S : F \longrightarrow G$  un operador compacto (o viceversa). Entonces  $S \circ T$  es un operador compacto.

**Demostración.** Debemos probar que  $S \circ T$  es un operador compacto, lo cual equivale a probar que  $\overline{(S \circ T)(A)}$  es compacto  $\forall A \subset E$  acotado.  $(S \circ T)(A) = S(T(A))$  y, como  $T$  es un operador lineal y continuo, sabemos que  $T(A) \subset G$  está acotado  $\forall A \subset E$  acotado. Como por hipótesis tenemos que  $S$  es un operador compacto,  $\overline{(S \circ T)(A)} = \overline{S(T(A))}$  es compacto .

Supongamos ahora que  $S$  es el operador lineal y continuo y  $T$  el operador compacto.  $T$  es un operador compacto, luego  $\overline{T(A)}$  es un conjunto compacto  $\forall A \subset E$  acotado . Como  $S$  es continuo, y sabemos que la las funciones continuas llevan compactos en compactos, tenemos que  $S(\overline{T(A)})$  es compacto y, en consecuencia, es claro que  $\overline{S(\overline{T(A)})} = S(\overline{T(A)})$ . Finalmente, como  $\overline{S(T(A))} \subset \overline{S(\overline{T(A)})}$  concluimos que  $\overline{S(T(A))}$  es compacto

■

**Proposición 1.4.**  $T : E \longrightarrow F$  es un operador compacto si y sólo si  $\forall \{x_n\} \subset E$  acotada  $\exists \{x_{n_k}\}$  subsucesión suya tal que  $\{Tx_{n_k}\}$  es convergente en  $F$ .

**Demostración.**

$\Rightarrow$  Sea  $\{x_n\} \subset E$  acotada. Entonces:

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ acotada en } E \stackrel{T \text{ compacto}}{\Rightarrow} \overline{T(A)} = \{Tx_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ compacto en } F.$$

Como  $(F, \|\bullet\|_F)$  es un espacio métrico, la compacidad implica la compacidad secuencial, luego:

Si  $\{Tx_n\} \subset \overline{T(A)} \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$  tal que  $\{Tx_{n_k}\}$  es convergente en  $F$  hacia un punto de  $\overline{T(A)}$

$\Leftarrow$  Lo demostraremos por contrarrecíproco:

Supongamos que  $T$  no es compacto, entonces  $\exists A \subset E$  acotado tal que  $\overline{T(A)}$  no es compacto. Por tanto, tenemos que  $\exists \{y_n\} \subset \overline{T(A)}$  que no posee ninguna subsucesión convergente en  $F$ .

Por otro lado, cada  $y_n$  puede aproximarse por  $T(x_n)$  donde  $x_n \in A$  y  $\|y_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}$ . Luego  $\{Tx_{n_k}\}$  no puede converger en  $F$  para ninguna subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  y, por tanto,  $\exists\{x_n\} \subset E$  acotada que no posee ninguna subsucesión verificando que  $\{Tx_{n_k}\}$  sea convergente en  $F$ . ■

**Proposición 1.5.** *Sea  $T : E \rightarrow F$  lineal, entonces:*

$$T \text{ compacto} \Leftrightarrow \overline{T(\overline{B_E})} \text{ es compacto en } F$$

donde  $B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$

**Demostración.**

$\Rightarrow$  Si  $T$  es compacto, entonces  $\forall A \subset E$  acotado se tiene que  $T(A)$  es relativamente compacto, por tanto, tomando  $A = \overline{B_E}$  se tiene que  $\overline{T(\overline{B_E})}$  es compacta en  $F$ .

$\Leftarrow$  Sea  $A \subset E$  acotado  $\Rightarrow \exists R > 0 / A \subset \overline{B(0, R)}$ . Por tanto, tenemos que:

$$\overline{T(A)} \subset \overline{T(\overline{B(0, R)})} = \overline{T(R \cdot \overline{B_E})} = R \cdot \overline{B_E} \quad (\text{compacto en } F)$$

Todo cerrado contenido en un compacto es compacto, luego  $\overline{T(A)}$  es compacto en  $F \Rightarrow T$  es compacto. ■

**Definición 1.8.** *Se dice que un operador lineal y continuo  $T : H \rightarrow H$  es un operador autoadjunto si*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H$$

**Definición 1.9.** *Sea  $T : H \rightarrow H$  lineal y continuo. Se dice que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es valor propio de  $T$  si y sólo si  $\exists u \in H \setminus \{0\}$  tal que  $Tu = \lambda u$ . A  $u$  la llamaremos función propia asociada a  $\lambda$  y a*

$$V = \{u \in H : Tu = \lambda u\} = \{\text{funciones propias asociadas a } \lambda\} \cup \{0\}$$

lo llamaremos el subespacio propio asociado al valor propio  $\lambda$ .

### 1.3. Teoría de Riesz-Fredholm

**Lema 1.1. (Lema de Riesz)** Sea  $E$  un espacio vectorial normado y  $M \subset E$  un subespacio vectorial cerrado tal que  $M \neq E$ . Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \text{ tal que } \|u\| = 1 \quad \text{y} \quad d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

**Demostración.** Tomemos  $v \in E \setminus M$ . Como  $M$  es cerrado tenemos que  $d(v, M) > 0$ , lo cual equivale a que

$$\forall m \in M \quad \|v - m\| \geq d := d(v, M) = \inf\{\|v - m\| : m \in M\} > 0$$

Tomemos ahora  $m_0 \in M$  tal que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Entonces, si definimos

$$u := \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

- $\|u\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} \right\| = 1$
- $\forall m \in M \quad \|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v - (m_0 + m\|v - m_0\|)}{\|v - m_0\|} \right\| \geq \left\| \frac{d}{v - m_0} \right\| \geq 1 - \varepsilon \Rightarrow d(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$

Nótese que  $(m_0 + m\|v - m_0\|) \in M$ . ■

**Teorema 1.3. (Teorema de Riesz)** Si  $E$  un espacio vectorial normado con  $\overline{B}_E$  compacta, entonces  $\dim E < \infty$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\dim E = \infty$ , entonces existiría una sucesión  $\{E_n\}$  de subespacios de dimensión finita de  $E$  tales que  $E_{n-1} \subsetneq E_n$ . Estos subespacios son cerrados luego, aplicando el Lema 1.1 con  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $\exists \{u_n\} \in E$  tal que  $\|u_n\| = 1$  y  $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . Por tanto, obtenemos que  $d(u_n, u_m) \geq \frac{1}{2} \forall m > n$ . Luego  $\{u_n\}$  no tiene ninguna subsucesión convergente !!! Contradicción con que  $\overline{B}_E$  sea compacta. ■

**Ejemplo:**

Al contrario de lo que pudiese parecer, aplicaciones tan sencillas como  $I : E \longrightarrow E$  no son necesariamente compactas. De hecho,  $I$  es compacta si y sólo si la dimensión de  $E$  es finita .

$$x \longmapsto x$$

Este resultado se prueba de manera inmediata usando la proposición (1.5) y el Teorema de Riesz.

**Teorema 1.4.** (*Alternativa de Fredholm*) Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador compacto, entonces:

(a)  $N(I - T)$  tiene dimensión finita.

(b)  $R(I - T)$  es cerrado y  $R(I - T) = N(I - T)^\perp$ , donde  $T^*$  es el operador adjunto de  $T$  (véase la definición en [1]).

(c)  $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$

(d)  $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$

## 1.4. Espectro de un operador compacto

**Definición 1.10.** Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador lineal y continuo. Definimos el conjunto resolvente, y lo denotaremos  $\rho(T)$ , como:

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \text{ es biyectiva de } E \text{ a } E \}$$

**Definición 1.11.** El espectro, al cual denotaremos  $\sigma(T)$ , es el complemento del conjunto resolvente, es decir  $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$ . Diremos que un número real  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  si  $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$ . El conjunto de todos los valores propios lo denotaremos  $VP(T)$ .

Se tiene que  $VP(T) \subset \sigma(T)$ . Si  $\dim E < \infty$ , entonces se da la igualdad.

**Proposición 1.6.** Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador lineal y continuo y  $\lambda$  un valor propio suyo, entonces  $-\|T\| \leq \lambda \leq \|T\|$ .

**Demostración.** Sea  $\lambda$  valor propio de  $T \Rightarrow \exists u \in H \setminus \{0\} / Tu = \lambda u$ .

Tomando  $v = \frac{u}{\|u\|} \in H$  tenemos que  $\|v\| = 1$  y  $Tv = \lambda v$ . Luego:

$$\|Tv\| = \|Tv\|\|v\| \stackrel{\text{C-S}}{\geq} |(Tv, v)| = |(\lambda v, v)| = |\lambda(v, v)| = |\lambda|\|v\| = |\lambda|$$

Finalmente, utilizando la definición de norma de un operador, obtenemos:

$$|\lambda| \leq \|Tv\| \leq \sup_{\|w\|=1} \|Tw\| = \|T\|$$

lo cual implica que

$$-\|T\| \leq \lambda \leq \|T\|$$

■

**Proposición 1.7.** Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador lineal y continuo, entonces  $\sigma(T)$  es acotado y, además,

$$\sigma(T) \subset [ -\|T\|, +\|T\| ]$$

**Demostración.** Sea  $\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > \|T\|$ . Veamos que la aplicación  $T - \lambda I$  es biyectiva, lo cual implicará que  $\sigma(T) \subset [ -\|T\|, +\|T\| ]$ . Dada  $f \in E$  la ecuación  $Tu - \lambda u = f$  tiene una única solución ya que puede escribirse como  $u = \lambda^{-1}(Tu - f)$  y puede usarse el teorema del punto fijo de Banach [1].

■

**Lema 1.2.** Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador compacto y sea  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números reales distintos tales que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \quad y \quad \lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n.$$

Entonces  $\lambda = 0$ .

**Teorema 1.5.** *Sea  $T : E \longrightarrow E$  un operador compacto y  $\dim E = \infty$ , entonces tenemos que:*

(a)  $0 \in \sigma(T)$ ,

(b)  $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$ ,

(c) *Se tiene uno de los siguientes casos:*

- $\sigma(T) = \{0\}$ ,
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$  es un conjunto finito,
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$  es una sucesión que converge a 0.

***Demostración.***

(a) Supongamos que  $0 \notin \sigma(T)$ . En tal caso  $T$  sería biyectiva e  $I = T \circ T^{-1}$  sería compacto. Por tanto tenemos que  $\overline{B_E}$  es compacta y, como consecuencia del Teorema de Riesz,  $\dim E < \infty$ . Por tanto hemos llegado a contradicción ( $\dim E = \infty$ ).

(b) Sea  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Si no fuera un valor propio entonces tendríamos que  $N(T - \lambda I) = \{0\}$ . Aplicando el apartado (c) del Teorema 1.4 esto implicaría que  $R(T - \lambda I) = E$  y, por tanto,  $\lambda \in \rho(T)$ ; contradicción con el hecho de que  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Por tanto  $\lambda \in VP(T) \setminus \{0\}$ .

(c) Para cada  $n \geq 1$ , el conjunto

$$\sigma(T) \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

es o bien vacío o finito ya que que, si tuviera infinitos puntos, podríamos aplicar el Teorema de Bolzano-Weirstrass ( $\sigma(T)$  es compacto) y obtener una subsucesión que convergería a un  $\lambda \geq 1/n$ , lo cual contradeciría al Lema (1.2). Por tanto, si  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  tiene infinitos puntos distintos, podríamos ordenarlos como una sucesión tendiendo a 0.

■

## 1.5. Descomposición Espectral de operadores compactos y autoadjuntos

**Proposición 1.8.** Sea  $T : H \rightarrow H$  un operador lineal, continuo y autoadjunto. Sean

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Tu, u) \qquad M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Tu, u)$$

Entonces  $\sigma(T) \subset [m, M]$ ,  $m \in \sigma(T)$  y  $M \in \sigma(T)$ . De hecho,  $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$ .

**Demostración.** Se puede ver la demostración con detalle en [1]. En ella se usa esencialmente el Teorema de Lax Milgram, Cauchy-Schwarz y la identidad del paralelogramo. ■

**Corolario 1.1.** Sea  $T : H \rightarrow H$  un operador lineal, continuo y autoadjunto tal que  $\sigma(T) = \{0\}$ , entonces  $T \equiv 0$ .

**Demostración.** Como  $\sigma(T) = \{0\}$  tenemos, como consecuencia de la Proposición 1.8, que  $\|T\| = 0$  y, por tanto, que  $T \equiv 0$ . ■

**Lema 1.3.** Si  $T$  es un operador lineal y compacto, entonces  $\dim N(T - \lambda I) < \infty \forall \lambda$  valor propio  $\neq 0$ .

**Lema 1.4.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T : H \rightarrow H$  un operador lineal y autoadjunto. Si  $V \subset H$  es un subespacio cerrado de  $H$  tal que  $T(V) \subset V$ , entonces:

1.  $T(V^\perp) \subset V^\perp$ .
2.  $T|_{V^\perp}$  es también autoadjunto.
3. Si  $T$  es además compacto, entonces  $T|_{V^\perp}$  también es compacto.

**Demostración.**

1. Sea  $w \in V^\perp$ , es decir,  $(w, v) = 0 \quad \forall v \in V$ . Entonces, por ser  $T$  autoadjunto, tenemos que:

$$(Tw, v) = (w, Tv) \stackrel{Tv \in V}{=} 0 \quad \forall v \in V$$

Por tanto,  $Tw \in V^\perp \Rightarrow T(V^\perp) \subset V^\perp$ .

2. Por ser  $T$  autoadjunto tenemos que:

$$(T|_{V^\perp}(w), v) = (Tw, v) = (w, Tv) = (w, T|_{V^\perp}(v)), \quad \forall w, v \in V^\perp$$

Por tanto,  $T|_{V^\perp}$  es un operador autoadjunto.

3.  $T$  compacto  $\Leftrightarrow \overline{T(\overline{B_H})}$  compacto.

$$T|_{V^\perp}(\overline{B_{V^\perp}}) = T(\overline{B_{V^\perp}}) \subset T(\overline{B_H})$$

Tomando adherencias tenemos que:

$$\overline{T|_{V^\perp}(\overline{B_{V^\perp}})} = \overline{T(\overline{B_{V^\perp}})} \subset \overline{T(\overline{B_H})} \text{ (compacto)}$$

Por tanto,  $\overline{T|_{V^\perp}(\overline{B_{V^\perp}})}$  compacto  $\Rightarrow T|_{V^\perp}$  compacto. ■

**Teorema 1.6.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable y sea  $T$  un operador lineal, compacto y autoadjunto. Entonces existe una base de Hilbert compuesta por vectores propios de  $T$ .*

**Demostración.** Sea  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de los valores propios (distintos) de  $T$  no nulos. Definimos:

$$\lambda_0 = 0, \quad E_0 = N(T) \quad \text{y} \quad E_n = N(T - \lambda_n I)$$

Sabemos, por el lema anterior, que

$$0 \leq \dim E_0 \leq \infty \quad \text{y} \quad 0 < \dim E_n < \infty$$

Veamos ahora que  $H$  es suma de Hilbert de los  $E_n$ 's,  $n = 0, 1, \dots$ :

1. Los subespacios  $(E_n)_{n \geq 0}$  son (dos a dos) ortogonales:

Dados  $u_n \in E_m$  y  $v \in E_n$ ,  $n \neq m$  tenemos que

$$Tu = \lambda_n u \quad \text{y} \quad Tv = \lambda_m v$$

y, por tanto,

$$\lambda_m(u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = \lambda_n(u, v)$$

Como el único valor de  $n$  para el cual  $\lambda_n = 0$  es  $n = 0$  y todos los demás valores propios son distintos, esto implica que

$$(u, v) = 0$$

2. El espacio vectorial generado por  $\cup_{n=0}^{\infty} E_n$ , al que llamaremos  $F$ , es denso en  $H$ :

Claramente,  $T(F) \subset F$  lo cual, en virtud del Lema 1.4, implica que  $T(F^\perp) \subset F^\perp$ . Además si llamamos  $T_0$  al operador  $T$  restringido a  $F^\perp$  éste también es compacto también consecuencia del Lema 1.4.

Veamos ahora que  $\sigma(T_0) = \{0\}$  :

Supongamos que no, en tal caso  $\exists \lambda \neq 0 \in \sigma(T_0)$  y, por tanto,  $\exists u$  perteneciente a  $F^\perp \setminus \{0\}$  tal que  $T_0 u = \lambda u$ . En consecuencia,  $\lambda = \lambda_n$  para algún  $n \geq 1$ . Por tanto tenemos que  $u \in E_n \subset F$ . Luego  $u \in F^\perp \cap F$ , lo cual implica que  $u = 0$ , contradicción.

Ahora bien, como  $\sigma(T_0) = \{0\}$  sabemos, por el Corolario 1.1 que  $T_0 = 0$ , lo cual equivale a que  $Tv = 0 \quad \forall v \in F^\perp$ . Por tanto,  $F^\perp \subset N(T)$ . Por otro lado, tenemos que  $N(T) = E_0 \subset F$  luego:

$$F^\perp \subset N(T) \subset F$$

Lo cual implica que  $F^\perp = \{0\}$  y, por tanto, que  $F$  es denso en  $H$ .

Visto esto, basta tomar de cada subespacio  $(E_n)_{n \geq 0}$  una base de Hilbert. Esto es posible  $\forall n \geq 1$  por ser subespacios de dimensión finita y válido para  $E_0$  (espacio de Hilbert separable) por el Teorema 1.2. La unión de estas bases es claramente una base de Hilbert para  $H$  compuesta por vectores propios de  $T$ .

■

## Origen histórico de las bases hilbertianas

En este capítulo trataremos de contextualizar históricamente el origen de las bases hilbertianas. Dicho origen proviene del método de separación de variables, el cual surgió en el estudio del problema de la cuerda vibrante. Más adelante, como ya veremos, Fourier hizo uso del mismo para resolver el problema de la ecuación del calor. Además de estos problemas, muchos otros similares se pueden resolver de manera similar y, para dicha resolución, las bases hilbertianas tendrán un papel fundamental. Para la elaboración de este capítulo he seguido principalmente las referencias [4] y [5].

### 2.1. El problema de la cuerda vibrante

Supongamos que tensamos una cuerda y que fijamos sus extremos, los cuales consideraremos que son  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ . A continuación tiramos de la cuerda de manera que tome la forma de una curva, dada por la ecuación  $y = f(x)$ . ¿Qué movimiento describirá la cuerda?

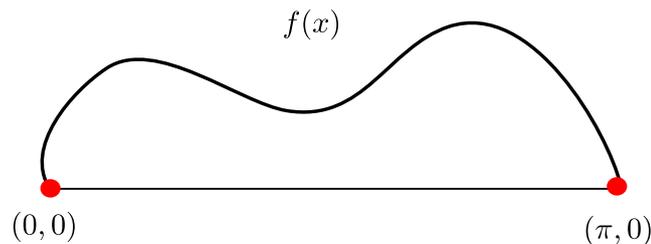


Figura 2.1: Posición inicial de la cuerda

El problema a resolver es la obtención de la función que describe el movimiento de la cuerda,  $u(x, t)$ , a partir de  $f(x)$  con  $0 \leq x \leq \pi$  y  $t \geq 0$ . El primer matemático que elaboró un modelo sobre este problema fue J. D'Alembert el cual demostró que  $u$ , bajo determinadas hipótesis simples ([4]), debía satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi & \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi & \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 & \end{aligned} \tag{2.1}$$

La primera de las condiciones es una E.D.P lineal de segundo orden denominada *Ecuación de Ondas*. La segunda nos indica la posición inicial de la cuerda. La tercera nos muestra que la cuerda, antes de tirar de ella, se encontraba en reposo y, por último, la cuarta impone que la cuerda se encuentra fija en los extremos.

D'Alembert también demostró que la solución de (2.1) viene dada por una expresión de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t) \right] \tag{2.2}$$

donde  $\tilde{f}$  es una “conveniente extensión de la función  $f$ ” ([5]).

Este resultado, con notación actual, se puede enunciar como sigue [10]:

**Teorema 2.1.** *Sea  $f \in C^2[0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-)$ . Entonces (2.1) tiene una única solución  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , donde  $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$ . De hecho, esta solución es la dada en (2.2), donde  $\tilde{f}$  es la única extensión a  $\mathbb{R}$  impar,  $2\pi$ -periódica de la función  $f$ .*

No se conoce con exactitud la forma en la que D'Alembert llegó a la expresión (2.2), sin embargo es probable que lo hiciese mediante el cambio de variables  $\eta = x+t$  y  $\mu = x-t$ .

La demostración del Teorema (2.1) y la obtención de la expresión (2.2) a partir del cambio de variable pueden consultarse en [4].

La fórmula (2.2) también fue demostrada por Euler en 1749, sin embargo él difería de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales  $f$  que se podían considerar. D'Alembert consideraba que la curva inicial  $f$  tenía que tener una fórmula concreta única en todo el intervalo  $[0, \pi]$  mientras que Euler no lo consideraba necesario, defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial.

Otra forma de obtener la solución de (2.1) fue propuesta por Daniel Bernouilli en 1753. Se basaba en obtener dicha solución mediante la superposición de ondas más sencillas, de la forma:

$$u_n(x, t) = \text{sen}(nx)\cos(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(obtenidas, quizás, por el método de separación de variables) También es probable que, para concebir esta idea, usara sus conocimientos musicales, más concretamente la superposición de armónicos del sonido. Por tanto, la solución de (2.1) vendría dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\cos(nt) \quad (2.3)$$

de manera que los  $a_n$  se elijan para que se verifiquen las condiciones de (2.1).

Esta idea, por suerte, se puede formalizar. Para ello observemos que las soluciones más sencillas de (2.1) deben ser de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

es decir, funciones con variables separadas. Derivando y sustituyendo en (2.1) se obtienen dos problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0. \quad (2.4)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Se puede probar fácilmente que (2.4) tiene soluciones únicas no triviales si y sólo si  $\lambda = n^2$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , en cuyo caso el conjunto de soluciones de (2.4) es un espacio vectorial de dimensión uno engendrado por la función  $\text{sen}(nx)$ . En tal caso también se

tiene que el conjunto de soluciones de (2.5) es un espacio vectorial de dimensión dos, cuya base está formada por las funciones  $\cos(nt)$  y  $\sin(nt)$ .

Si la solución propuesta por Bernoulli fuese cierta, se tendría que:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

y, en consecuencia,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad \forall x \in [0, \pi] \quad (2.6)$$

con una apropiada elección de los coeficientes  $a_n$ .

Sin embargo, estas ideas recibieron duras críticas por parte de D'Alembert y Euler, los cuales no admitían que cualquier función  $f$  pudiese expresarse de la forma (2.6). La discusión se prolongó durante años sin que se llegase a ningún acuerdo. Sin embargo, el siguiente resultado posterior demuestra que Bernoulli estaba más próximo a la verdad que Euler [4]:

**Teorema 2.2.** *Sea  $f \in C^3[0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$ . Entonces (2.1) tiene una única solución  $u$  de clase  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , donde  $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$ . Además,  $u$  viene dada por la fórmula (2.3), donde*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\eta) \sin(n\eta) d\eta, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Hemos obtenido en esta sección dos teoremas que dan respuesta al problema de la cuerda vibrante. La pregunta lógica que podríamos hacernos es ¿Cuál es mejor, el basado en las ideas D'Alembert o éste último basado en las de Bernoulli? El primero tiene como principal ventaja que necesita menos hipótesis, por lo cual es más general que el de Bernoulli. Sin embargo, el punto fuerte de éste último es que nos proporciona una expresión más explícita de la solución, en contraposición con el primero.

## 2.2. Fourier y el problema de la conducción del calor

Las ideas de D. Bernoulli fueron recogidas más tarde por Jean Baptiste-Joseph Fourier, el cual se interesó en la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. El problema que estudió era el siguiente:

Supongamos que tenemos una varilla de una longitud dada cuyos extremos se mantienen a  $0^{\circ}\text{C}$  y cuya superficie se encuentra aislada. Si la distribución inicial de la varilla viene dada por una función  $f(x)$ , ¿Cuál será la temperatura en cualquier punto de la varilla en el tiempo  $t$ ?

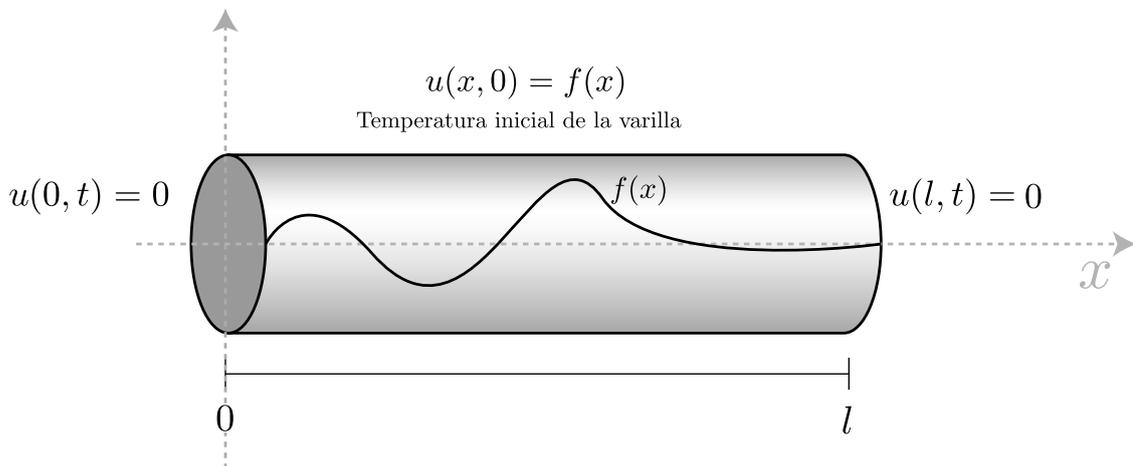


Figura 2.2: Distribución inicial de la temperatura de la varilla

Suponiendo que la varilla satisface ciertas condiciones adicionales ([4]), Fourier demostró que si denotamos por  $u(x, t)$  a la temperatura de la varilla en la posición  $x$  y en el tiempo  $t$ , entonces se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < t < T \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 &\leq t \leq T \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 &\leq x \leq \pi \end{aligned} \tag{2.8}$$

La primera condición de (2.8) es una EDP lineal de segundo orden llamada *Ecuación del Calor*. La segunda indica que la temperatura en los extremos de la barra se mantiene

a  $0^{\circ}\text{C}$ . La última indica la temperatura inicial de la varilla.

Basándose en las ideas de Bernoulli para la ecuación de ondas, Fourier buscó soluciones de (2.8) de la forma  $u(x, t) = X(x)W(t)$ .

Imponiendo dicha condición en (2.8) obtenemos los dos siguientes problemas de ecuaciones diferenciales:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad (2.9)$$

$$W'(t) + \mu W(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (2.10)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Al igual que en el problema de la cuerda vibrante, (2.9) tiene solución no trivial si y sólo si  $\mu = n^2$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , en cuyo caso el conjunto de soluciones de (2.9) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función  $\text{sen}(nx)$ . En tal caso también se tiene que el conjunto de soluciones de (2.10) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función  $e^{-n^2t}$ .

Fourier, de manera análoga a Bernoulli, afirmó que eligiendo unos coeficientes  $a_n$  adecuados se podía obtener la única solución de (2.8), de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2t} \text{sen}(nx) \quad (2.11)$$

Una de las principales diferencias entre Bernoulli y Fourier es que Fourier sí obtuvo una expresión para los coeficientes  $a_n$ , los desde entonces denominados coeficientes de Fourier.

Sin embargo, el trabajo de Fourier fue rechazado por la Academia Francesa, principalmente por la falta de rigor en la obtención de sus conclusiones, aunque estaban convencidos de la importancia del problema de la propagación del calor. Por este motivo convocaron un concurso sobre este problema, el cual ganó Fourier a pesar de que volvieron a criticarle su falta de rigor y, en consecuencia, su artículo no fue publicado por la Academia. Fourier

siguió trabajando en el tema durante años y, en 1822, publicó su libro *Théory Analytique de la Chaleur*, en el cual incorporó, sin apenas modificación, su artículo escrito en 1812.

A pesar de su falta de rigor, Fourier estaba en lo cierto. Prueba de ello es este teorema, fundamental en cualquier curso de Ecuaciones en Derivadas parciales:

**Teorema 2.3.** *Sea  $f \in C^1[0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Entonces (2.8) tiene una única solución  $u \in C_t^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , donde  $\Omega = (0, \pi) \times (0, T]$ . Además, dicha solución viene dada por la fórmula (2.11), donde los coeficientes  $a_n$  están definidos en (2.7).*

## 2.3. La teoría de series de Fourier en la actualidad. El papel del Análisis Funcional

En la actualidad la teoría las series de Fourier puede presentarse usando los métodos del Análisis Funcional. De hecho, está muy relacionada con la integral de Lebesgue, los espacios de Hilbert y los operadores compactos y autoadjuntos.

Juega un papel muy importante en esta teoría el espacio  $L^2[-\pi, \pi]$  el cual, como ya sabemos, está formado por las funciones medibles  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \text{ existe en el sentido de Lebesgue}$$

Este espacio de funciones fue introducido por Riesz en 1907 durante su estudio de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie.

Además sabemos que, si definimos el producto escalar

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad f, g \in L^2[-\pi, \pi]$$

nuestro espacio  $L^2[-\pi, \pi]$  es completo para la norma

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in L^2[-\pi, \pi].$$

Como además  $L^2[-\pi, \pi]$  es un espacio vectorial real, tenemos que  $L^2[-\pi, \pi]$  es un espacio de Hilbert real de dimensión infinita.

### 2.3.1. Concepto de base hilbertiana

**Definición 2.1.** Sea  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$  un subconjunto ortonormal de  $L^2[-\pi, \pi]$ . Diremos que tal subconjunto es una base hilbertiana si cualquier elemento  $f$  de  $L^2[-\pi, \pi]$  se expresa de la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) f_n$$

Por ejemplo, se puede probar ([4]) que  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N} \cup 0\}$  es base (hilbertiana) de  $L^2[-\pi, \pi]$ , donde

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

En consecuencia se tiene, entre otras cosas, que cualquier  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  se puede representar de la siguiente forma:

$$f = B_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + A_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx) \right)$$

donde

$$\begin{aligned} B_0 &= \left( f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ B_n &= \left( f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ A_n &= \left( f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx) \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Estas relaciones suelen escribirse de la forma:

$$f = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(nx) + a_n \text{sen}(nx)) \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.14)$$

A la serie (2.13), con coeficientes (2.14), se la llama serie de Fourier de  $f$  respecto al sistema ortonormal  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ , descrito en (2.12).

### 2.3.2. Problemas del tipo Sturm Liouville

Además de los problemas tratados en las secciones anteriores, es posible tratar otros de forma similar utilizando otros desarrollos de Fourier. Por ejemplo, supongamos que estamos estudiando las pequeñas vibraciones de una cuerda la cual, en esta ocasión, no tiene los extremos fijos. En tal caso obtendríamos el siguiente problema.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi & \\
 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi & \\
 u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0 &
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aplicando el método de separación de variables a este problema podemos obtener un desarrollo en serie de la forma

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Los sumandos de este desarrollo en serie son las funciones propias del problema de contorno siguiente:

$$\begin{aligned}
 X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & x &\in (0, \pi) \\
 X'(0) &= X'(\pi) = 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Se pueden también considerar condiciones de tipo mixto, tales como:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) &= 0, & t &\geq 0 \\
 \beta_1 u(\pi, t) + \beta_2 u_x(\pi, t) &= 0, & t &\geq 0
 \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  son números reales dados que dependen del modelo físico que se esté modelando.

Por tanto, esto conduce a la posibilidad de desarrollos en serie que usan funciones propias muy generales. La existencia de este tipo de desarrollos nos la da la teoría de problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville.

Esto ya nos había parecido anteriormente, concretamente cuando aplicamos el método de separación de variables a (2.1) y (2.8). En ambos casos obtuvimos dos problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en los que, para el primero de cada uno de ellos, había una serie de condiciones de contorno. Normalmente, como pasó en estos dos casos, la solución del problema dependía de un parámetro. El objetivo es obtener para qué parámetros (valores propios) dichas ecuaciones tienen solución no trivial para, a posteriori, encontrar la solución general del problema a partir de la suma de dichas soluciones.

Estas ideas, desarrolladas por Sturm y Liouville en el siglo XIX, pueden resumirse con los siguientes resultados:

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ p(t) \frac{dx(t)}{dt} \right] + (\lambda - q(t))x(t) &= 0, t \in [a, b] \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) &= 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde suponemos que:

1.  $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ ;  $p(t) > 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$
2.  $q \in C([a, b], \mathbb{R})$ ,
3.  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  son números reales dados tales que  $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$  y  $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ ,
4.  $\lambda$  es un parámetro real.

Las condiciones de contorno que aparecen en (2.17) se las llama condiciones de contorno separadas. Podemos distinguir tres tipos:

1. **Condiciones de tipo Dirichlet:**  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ .
2. **Condiciones de tipo Neumann:**  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ .
3. **Condiciones de tipo mixto:** Cualquier otro caso.

Diremos que  $\lambda$  es un valor propio de (2.17) si para dicho parámetro el problema tiene solución no trivial, la cual llamaremos función propia asociada al valor propio  $\lambda$ .

El siguiente teorema nos da las principales propiedades de los valores y funciones propias:

**Teorema 2.4.**

- a) *Cualquier valor propio de (2.17) tiene multiplicidad 1.*
- b) *Cualesquiera funciones propias  $x$  e  $y$ , asociadas a los valores propios distintos  $\lambda$  y  $\mu$ , son ortogonales, es decir:*

$$\int_a^b x(t)y(t) dt = 0$$

- c) *El conjunto de valores propios de (2.17) es infinito numerable. De hecho, el sistema ortonormal de funciones propias asociado,  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ , es una base hilbertiana de  $L^2[a, b]$ .*
- d) *Sea  $g \in C^2[a, b]$  cualquier función que satisface las condiciones de contorno dadas en (2.17), entonces:*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (g(t), \varphi_n(t)) \varphi_n(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

*donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en  $[a, b]$ .*

Además de condiciones de contorno separadas podemos encontrar las denominadas condiciones de contorno periódicas, las cuales son de la forma

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b)$$

Si consideramos este tipo de condiciones todos los apartados del Teorema (2.4) siguen siendo válidos, a excepción del primero.

Para probar el teorema anterior una posible opción es usar las funciones de Green, a partir de las cuales podemos transformar (2.17) en una ecuación integral equivalente. De este modo obtenemos propiedades que, de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operador compactos y autoadjuntos. Veremos ésto con más detalle en el capítulo 3.

El Teorema (1.6), con el cual concluimos el primer capítulo, es de suma importancia en el tipo de problemas citados a lo largo de este capítulo histórico.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de conducción del calor en un cuerpo (abierto y acotado)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}\Delta_x u(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}, & (x, t) \in (0, T) \times \Omega \\ u(x, t) &= 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) &= f(x), & \forall x \in \bar{\Omega}\end{aligned}\tag{2.18}$$

Aplicando el método de separación de variables a (2.18) conseguimos originar el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\Delta_x X(x) + \mu X(x) &= 0, & x \in \Omega \\ X(x) &= 0, & x \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.19}$$

Gracias al Teorema (1.6) podemos demostrar que el conjunto de valores propios de (2.19) es infinito numerable y que, además, sus funciones propias correspondientes conforman, tras ser ortonormalizadas, una base de  $L^2(\Omega)$ ,  $\{X_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ . Gracias a esto sí podemos afirmar que cualquier condición inicial  $f$  se pueda expresar de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x)$$

con convenientes coeficientes  $a_n$  y, en consecuencia, que la solución de (2.18) sea de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x)$$

donde las funciones  $P_n$  satisfacen una ecuación análoga a (2.10).

Nótese, finalmente, que esto acaba dándole la razón a Bernoulli cuando afirmaba que toda condición inicial  $f$  del problema de la cuerda vibrante podía expresarse de la forma (2.6).

## Ecuaciones integrales con núcleo en $L^2$

En este capítulo los espacios de Hilbert  $H$  que consideraremos son complejos. Para la elaboración del mismo se ha seguido principalmente la referencia [9].

### 3.1. Introducción

Durante el capítulo nos centramos en ecuaciones integrales del tipo

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\phi(y) dy = f(x) \quad (3.1)$$

en el espacio de Hilbert  $L^2[a, b]$ , donde  $\phi \in L^2[a, b]$  es la incógnita. Supondremos que  $f(x)$  pertenece a  $L^2[a, b]$  y que el núcleo,  $k(x, y)$ , será de cuadrado integrable, es decir

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Si la ecuación homogénea

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\phi(y) dy = 0 \quad (3.2)$$

tiene soluciones distintas a  $\phi(x) = 0$ , diremos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es valor propio de  $K$ , y diremos que las soluciones de (3.2) son las funciones propias asociadas a  $\lambda$ . Además probaremos que si  $k(x, y)$  es un núcleo en  $L^2[a, b]$ , entonces todo valor propio (3.2) tiene un número finito de soluciones.

En el caso de que  $k(x, y)$  sea un operador autoadjunto veremos que los valores propios son reales y que las funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales.

Es decir, si  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son dos funciones propias asociadas a valores propios distintos, entonces:

$$(\phi, \psi) = \int_a^b \phi(x) \overline{\psi(x)} dx = 0.$$

## 3.2. Operadores compactos

**Teorema 3.1.** Sea  $K$  un operador degenerado integral de la forma

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x) \int_a^b b_i(y) f(y) dy.$$

con  $a_i(x), b_i(x) \in L^2[a, b]$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Entonces  $K$  es un operador compacto.

**Demostración.** Consideremos una sucesión uniformemente acotada, en  $L^2[a, b]$ , de funciones  $\{f_n\}$  tal que  $\|f_n\| \leq M \quad \forall n$  (las normas que usaré en adelante son en  $L^2$ ).

$$Kf_n = \sum_{i=1}^m a_i(x) \int_a^b b_i(y) f_n(y) dy.$$

Claramente tenemos que

$$\left| \int_a^b b_i(y) f_n(y) dy \right| \leq \|b_i(y)\| \|f_n\| \leq M \|b_i(y)\|$$

y, en consecuencia,  $\left\{ \int_a^b b_i(y) f_n(y) dy \right\}$  es una sucesión uniformemente acotada de números complejos. Por tanto, debe tener un punto de acumulación y una sucesión que converja a dicho punto.

Sea  $\{f_{n^{(1)}}\}$  una subsucesión de  $\{f_n\}$  tal que  $\left\{ \int_a^b b_i(y) f_{n^{(1)}}(y) dy \right\}$  converja a cierto número complejo  $c_1$ . Del mismo modo podemos extraer  $\{f_{n^{(2)}}\}$  subsucesión de  $\{f_{n^{(1)}}\}$  de manera que  $\left\{ \int_a^b b_i(y) f_{n^{(2)}}(y) dy \right\}$  converja a cierto complejo  $c_2$ . Por tanto, extrayendo sucesivas subsucesiones, obtenemos que

$$\lim_{n^{(m)} \rightarrow \infty} \int_a^b b_i(y) f_{n^{(m)}}(y) dy = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

La existencia de dicho límite es consecuencia de la cadena de inclusiones

$$\{f_n\} \supset \{f_{n^{(1)}}\} \supset \{f_{n^{(2)}}\} \supset \dots \{f_{n^{(m)}}\}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\{Kf_{n^{(m)}}\}$  es una subsucesión de  $\{Kf_n\}$  y,

$$\lim_{n^{(m)} \rightarrow \infty} Kf_{n^{(m)}} = \sum_{i=1}^m c_i a_i(x)$$

tenemos que  $K$  es un operador compacto. ■

**Teorema 3.2.** *Sean  $K$  y  $L$  dos operadores compactos en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces tanto  $\alpha K$  como  $K + L$  son operadores compactos, donde  $\alpha$  es un escalar.*

**Demostración.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión acotada en  $H$  y consideremos  $\{f_{n'}\}$  una subsucesión suya tal que  $\{Kf_{n'}\}$  sea una sucesión de Cauchy. Si  $\alpha$  es un escalar claramente  $\{\alpha Kf_{n'}\}$  es también una sucesión de Cauchy y, en consecuencia,  $\alpha K$  es compacto.

Tomemos ahora una subsucesión,  $\{f_{n''}\}$ , de  $\{f_{n'}\}$  tal que tanto  $\{Kf_{n''}\}$  como  $\{Lf_{n''}\}$  sean sucesiones de Cauchy. En tal caso, claramente  $\{(K + L)f_{n''}\}$  es una sucesión de Cauchy y, por tanto,  $K + L$  es compacto. ■

**Corolario 3.1.** *Sea  $\{K_k\}$  una sucesión finita de  $n$  operadores compactos en un espacio de Hilbert  $H$  y  $\{\alpha_k\}$  un conjunto de escalares. Entonces  $\sum_{k=1}^n \alpha_k K_k$  es compacto.*

**Demostración.** Inmediata a partir del Teorema 3.2. ■

**Teorema 3.3.** *Sea  $K$  un operador compacto en un espacio de Hilbert  $H$ , y sea  $\{f_n\}$  un conjunto de funciones propias linealmente independientes asociadas a un valor propio no nulo  $\mu$ . Entonces  $\{f_n\}$  tiene un número finito de elementos.*

**Demostración.** En primer lugar reemplazaremos el conjunto  $\{f_n\}$  por un conjunto  $\{g_n\}$ , cuyos elementos seguirán siendo funciones propias y, que será además ortonormal. Para ello usaremos, en primer lugar, el método de Gram-Schmidt y definiendo:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ g_2 &= \frac{f_2 - (f_2, g_1)g_1}{\|f_2 - (f_2, g_1)g_1\|} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$g_n = \frac{f_n - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, g_k) g_k}{\|f_n - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, g_k) g_k\|}$$

$$\vdots$$

Claramente  $\{f_n\}$  y  $\{g_n\}$  generan el mismo subespacio de  $H$ . Además, se puede probar inductivamente que si  $\{g_1, g_2, \dots, g_{j-1}\}$  es ortonormal, entonces para  $i < j$  se tiene que

$$(g_j, g_i) = \frac{(f_j, g_i) - \sum_{k=1}^{j-1} (f_j, g_k)(g_k, g_i)}{\|f_j - \sum_{k=1}^{j-1} (f_j, g_k) g_k\|} = 0$$

por lo cual el conjunto  $\{g_n\}$  es ortonormal (todos los elementos tienen norma unitaria por construcción).

Claramente el conjunto de funciones propias  $\{g_n\}$  está uniformemente acotado. Si éste fuese infinito podríamos escoger una subsucesión  $\{g_{n'}\}$  tal que  $\{Kg_{n'}\}$  fuese una sucesión de Cauchy. Entonces tendríamos que

$$\|Kg_{n'} - Kg_{m'}\| = \|\mu g_{n'} - \mu g_{m'}\| = |\mu| \|g_{n'} - g_{m'}\| = |\mu| \sqrt{2}$$

usando que el conjunto  $\{g_n\}$  es ortonormal. Ahora bien, como  $\mu \neq 0$ , lo anterior de puede ser una sucesión de Cauchy. Por tanto, el número de funciones propias linealmente independientes asociadas a  $\mu$  debe ser finito. ■

**Teorema 3.4.** *Sea  $\{K_n\}$  un sucesión de operadores compactos en un espacio de Hilbert tal que para algún operador  $K$  se tenga que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K - K_n\| = 0 \quad (\text{norma de operadores})$$

*Entonces  $K$  también es compacto.*

**Demostración.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión acotada. Podemos escoger una subsucesión  $\{f_{n(1)}\}$  tal que  $\{K_1 f_{n(1)}\}$  sea una sucesión de Cauchy. De  $\{f_{n(1)}\}$  extraemos ahora una subsucesión  $\{f_{n(2)}\}$  tal que  $\{K_2 f_{n(2)}\}$  sea una sucesión de Cauchy. Procediendo de esta forma podemos obtener una sucesión de subsucesiones

$$\{f_n\} \supset \{f_{n(1)}\} \supset \{f_{n(2)}\} \supset \dots \{f_{n(k)}\} \supset \dots$$

tales que  $\{K_k f_{n(i)}\}$  es una sucesión de Cauchy para  $k = 1, 2, \dots, i$ .

Finalmente seleccionamos una sucesión  $\{f_{n^{(n)}}\}$ , que es una subsucesión de todos los  $\{f_{n^{(k)}}\}$ , excepto posiblemente en un número finito de términos por lo que  $\{K_k f_{n^{(n)}}\}$  sea una sucesión de Cauchy para todo  $k$ . Veamos ahora que  $\{K f_{n^{(n)}}\}$  es también una sucesión de Cauchy:

$$\begin{aligned} \|K f_{n^{(n)}} - K f_{m^{(m)}}\| &= \|(K - K_k) f_{n^{(n)}} + K_k f_{n^{(n)}} - K_k f_{m^{(m)}} + (K_k - K) f_{m^{(m)}}\| \\ &\leq \|K - K_k\| \|f_{n^{(n)}}\| + \|K_k f_{n^{(n)}} - K_k f_{m^{(m)}}\| + \|K_k - K\| \|f_{m^{(m)}}\| \end{aligned}$$

Usando que, por estar acotada  $\{f_n\}$ ,  $\|f_{n^{(n)}}\| \leq M$  podemos acotar el primer y tercer por  $M\varepsilon$ . El segundo término se puede acotar por  $\varepsilon$  si  $n^{(n)}$  y  $m^{(m)}$  son mayores que  $N(\varepsilon)$ . En consecuencia, tenemos que

$$\|K f_{n^{(n)}} - K f_{m^{(m)}}\| \leq (2M + 1)\varepsilon, \quad k > k(\varepsilon), \quad n^{(n)}, m^{(m)} > N(\varepsilon).$$

Por tanto,  $\{K f_{n^{(n)}}\}$  es una sucesión de Cauchy y en consecuencia,  $K$  es compacto. ■

**Teorema 3.5.** Sea  $k(x, y)$  continuo para todo  $0 \leq x, y \leq 1$ , entonces el operador integral

$$K f(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy$$

es un operador compacto en  $L^2[0, 1]$ .

**Demostración.** Como  $|K(x, y)| \leq M$ , tenemos que  $\|K f\| \leq M \|f\|$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $\|K\| = 1$ . Tomemos a continuación una sucesión acotada  $\{f_n(x)\}$  la cual supondremos, de nuevo sin pérdida de generalidad, tal que  $\|f_n\| \leq 1$ .

Consideremos ahora el conjunto de funciones  $\{g_n(x)\}$  donde  $g_n = K f_n$ . Veamos ahora que hay una subsucesión  $\{g_{n'}(x)\}$  tal que converge a una función  $L^2[0, 1]$ .

Para demostrarlo elegiremos un conjunto de puntos numerable denso en  $[0, 1]$ , por ejemplo los números racionales, y los denotaremos  $\{r_k\}$ . Consideremos ahora el conjunto  $\{g_{n'}(r_1)\}$ . De las propiedades de  $k(x, y)$  y  $\{f_n(x)\}$  se deduce que

$$|g_n(x)| \leq M \|f_n\| = M$$

En particular se tiene que

$$|g_{n'}(r_1)| \leq M$$

luego el conjunto  $\{g_n(r_1)\}$  tiene un punto de acumulación en el intervalo  $[-M, M]$ .

Seleccionemos ahora una subsucesión  $\{g_{n(1)}(x)\}$  que converja a un punto  $b_1$ . Consideremos a continuación la sucesión de funciones  $\{g_{n(1)}\}$  (en  $x = r_1$  ya sabemos que converge a  $b_1$ ). Tomemos ahora la sucesión de funciones  $\{g_{n(1)}(r_2)\}$  y tomemos una subsucesión,  $\{g_{n(1)}(r_2)\}$ , que converja a otro punto  $b_2$ . Repetimos este proceso infinitamente para todos los racionales. Finalmente, consideremos el conjunto de funciones  $\{g_{n(n)}(x)\}$ . Esta sucesión converge en todos los racionales por construcción.

Para simplificar la notación volveremos a indexar la sucesión, llamando  $\{g_n(x)\}$  a la sucesión  $\{g_{n(n)}(x)\}$ . A continuación definiremos la función  $g(x)$  como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(r_k) = g(r_k)$$

de manera que  $g(x)$  está solo definida para los racionales. También podemos probar que, en los racionales,  $g(x)$  es continua. Dados dos números racionales  $x_1$  y  $x_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x_1) - g_n(x_2)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 [k(x_1, y) - k(x_2, y)] f_n(y) dy \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \|f_n\| \leq \left[ \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y, como  $k(x, y)$  es continuo, en consecuencia  $g(x)$  también lo es.

Ya podemos definir  $g(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Sea  $x$  arbitrario, y consideremos una sucesión de números racionales  $x_k$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

entonces

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k).$$

Veamos que  $g(x)$  está bien definida. Para ello tomemos otra sucesión de racionales  $\{\hat{x}_k\}$ , y su pongamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(\hat{x}_k) = \hat{g}(x)$ . Entonces

$$|g(x) - \hat{g}(x)| \leq |g(x) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(\hat{x}_k)| + |g(\hat{x}_k) - \hat{g}(x)|.$$

Para  $k > k(\varepsilon)$  el primer y tercer término son menores que  $\varepsilon$ . Usando la continuidad de  $g(x)$  también podemos acotar el segundo término por  $\varepsilon$  y, en consecuencia, obtenemos que  $g(x) = \hat{g}(x)$ . Por tanto, como ya anticipamos,  $g(x)$  está bien definida como función

continua en  $[0, 1]$ . Una función continua en un intervalo cerrado y acotado es también uniformemente continua, por lo cual pertenece a  $L^2[0, 1]$ . Por tanto,  $K$  es compacto. ■

Este resultado claramente es también válido en  $[a, b]$ , se realiza en  $[0, 1]$  por simplificar la demostración.

**Teorema 3.6.** *Sea  $k(x, y)$  tal que*

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

*Entonces el operador*

$$Kf = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy$$

*es un operador compacto en  $L^2[0, 1]$ .*

**Demostración.** En primer lugar expresaremos  $k(x, y) \in L^2[0, 1]$  como límite de núcleos continuos, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y) - k_n(x, y)|^2 dx dy = 0$$

y definimos

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(x, y)|^2 dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 |k_n(x, y)|^2 dx dy.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \|(K - K_n)f\| &= \left\| \int_0^1 [k(x, y) - k_n(x, y)]f(y) dy \right\| \\ &\leq \left\| \left\{ \int_0^1 |k(x, y) - k_n(x, y)|^2 \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y) - k_n(x, y)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \|f\| \end{aligned}$$

por lo cual se tiene que

$$\|K - K_n\| \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y) - k_n(x, y)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K - K_n\| = 0$$

Como cada  $K_n$  es un operador compacto, consecuencia del Teorema 3.5, se tiene en virtud del Teorema 3.4 que  $K$  es también un operador compacto. ■

### 3.2.1. Operadores compactos y autoadjuntos

**Teorema 3.7.** *Sea  $K$  un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces todos los valores propios de  $K$  son reales.*

**Demostración.** Sea  $f \neq 0$ , y supongamos  $Kf = \mu f$ . En tal caso

$$(Kf, f) = (\mu f, f) = \mu(f, f)$$

$$(f, Kf) = (f, \bar{\mu}f) = \bar{\mu}(f, f).$$

Como  $K$  es autoadjunto

$$(Kf, f) = (f, Kf)$$

y, en consecuencia,

$$\mu(f, f) = \bar{\mu}(f, f).$$

Finalmente, usando que  $(f, f) > 0$  y que  $\mu = \bar{\mu}$  concluimos que  $\mu$  es real. ■

**Teorema 3.8.** *Sea  $K$  un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces, las funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales. Un conjunto de funciones propias, finito o numerable, asociadas al mismo vector propio puede ser ortogonalizado.*

**Demostración.** Supongamos  $\mu_1 \neq \mu_2$  y  $Kf_1 = \mu_1 f_1$ ,  $Kf_2 = \mu_2 f_2$ . Entonces

$$(Kf_1, f_2) = \mu_1(f_1, f_2).$$

Usando que  $K$  es autoadjunto obtenemos que

$$\mu_1(f_1, f_2) = (Kf_1, f_2) = (f_1, Kf_2) = \mu_2(f_1, f_2)$$

y, en consecuencia,

$$\mu_1(f_1, f_2) = \mu_2(f_1, f_2).$$

Finalmente, puesto que  $\mu_1 \neq \mu_2$ , se deduce que  $(f_1, f_2) = 0$ , es decir, son ortogonales.

Consideremos ahora un valor propio  $\mu$  de  $K$  con funciones propias asociadas  $\{f_n\}$ . Como dicho conjunto es finito o numerable lo podemos ortonormalizar usando Gram-Schmidt. ■

**Teorema 3.9.** *Sea  $K$  un operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces al menos uno de  $\pm\|K\|$  es valores propio de  $K$ .*

**Demostración.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión con  $\|f_n\| = 1$  tal que  $\|Kf_n\|$  converja a  $\|K\|$ . En tal caso,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|K^2 f_n - \|Kf_n\|^2 f_n\|^2 = \|K^2 f_n\|^2 - 2\|Kf_n\|^2 (K^2 f_n, f_n) + \|Kf_n\|^4 = \\ &= \|K^2 f_n\|^2 - \|Kf_n\|^4 \leq \|K\|^2 \|Kf_n\|^2 - \|Kf_n\|^4. \end{aligned}$$

Como  $\|Kf_n\|$  converge a  $\|K\|$  tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^2 f_n - \|Kf_n\|^2 f_n\| = 0 \quad (3.3)$$

Sabemos que  $K^2$ , por ser composición de compactos, es compacto por lo cual podemos extraer una subsucesión,  $\{f_{n'}\}$ , de  $\{f_n\}$  tal que  $\{K^2 f_{n'}\}$  converja a un elemento, llamémoslo  $\|K\|^2 g$ . Usando ésto en (3.3) obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \|K\|^2 g - \|K\|^2 f_{n'} \| = 0$$

y, en consecuencia,  $\{f_{n'}\}$  converge a  $g$  y

$$K^2 g = \|K\|^2 g.$$

Esto último nos dice que  $\|K\|^2$  es valor propio de  $K^2$  y, por tanto,

$$(K - \|K\|)(K + \|K\|)g = 0.$$

Por lo cual necesariamente ocurre una de las siguiente situaciones:

1.  $+\|K\|$  es valor propio de  $K$
2.  $-\|K\|$  es valor propio de  $K$
3. Tanto  $+\|K\|$  como  $-\|K\|$  son valores propios de  $k$

Es decir, al menos uno de los dos es valor propio de  $K$ , tal y como queríamos demostrar. ■

**Teorema 3.10.** Sea  $K$  un operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$ , y sea  $\{\varphi_i\}$  el conjunto de todas las funciones propias, convenientemente ortonormalizadas, asociadas a los valores propios no nulos de  $K$ , los cuales denotaremos  $\{\mu_i\}$ . Sea  $f$  un elemento cualquiera de  $H$ , entonces  $f$  puede ser representada de la forma

$$f = \sum_i (f, \varphi_i) \varphi_i + f_0$$

donde  $f_0$  es un elemento del núcleo de  $K$  (es decir,  $K f_0 = 0$ ).

**Teorema 3.11.** Sea  $K$  un operador integral compacto y autoadjunto con núcleo  $k(x, y)$  en  $L^2$ . Si  $\{\mu_i\}$  son los valores propios no nulos de  $K$  y  $\{\varphi_i\}$  sus vectores propios asociados, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b \left| k(x, y) - \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)} \right|^2 dx dy = 0$$

es decir,

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)} \quad (\text{convergencia en media})$$

**Demostración.** Como

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

la función  $k(x) = \int_a^b |k(x, y)|^2 dy$  es, como función de  $x$ , integrable en el intervalo  $[a, b]$ , es decir

$$\int_a^b k(x) dx < \infty.$$

Por tanto,  $K(x)$  es finita para casi todo  $x \in [a, b]$ . Sea  $x$  uno de dicho puntos. Para toda  $f \in H_0^\perp$  tenemos que

$$\int_a^b k(x, y) f(y) dy = 0$$

por lo que  $\overline{k(x, y)}$ , como función de  $y$ , pertenece a  $H_0$ , es decir, es ortogonal a  $f$  fijado  $x$ .

En consecuencia,

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\varphi_i(y)}.$$

Es evidente que si  $\{\varphi_i(x)\}$  es completo y ortonormal en  $[a, b]$  también lo es  $\{\overline{\varphi_i(x)}\}$ . De aquí se deduce que

$$\alpha_i = \int_a^b k(x, y) \varphi_i(y) dy.$$

Pero  $\varphi_i(y)$  es una función propia de  $K$ , por lo que

$$\alpha_i = \mu_i \varphi_i(x)$$

y

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$$

Usando la identidad de Parseval, obtenemos

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2. \quad (3.4)$$

Finalmente, usando todo lo probado hasta ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \left| k(x, y) - \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)} \right|^2 dy dx = \\ & = \int_a^b \left\{ \int_a^b |k(x, y)|^2 dy - \sum_{i=1}^n \mu_i^2 |\varphi_i(x)|^2 \right\} dx = \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \end{aligned}$$

Por tanto, como consecuencia de (3.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b \left| k(x, y) - \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)} \right|^2 dx dy = 0.$$

■

**Corolario 3.2.** Sea  $K$  un operador compacto y autoadjunto con núcleo  $K(x, y)$  en  $L^2[a, b]$  y  $\{\mu_i\}$  el conjunto de valores propios. Entonces

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2.$$

**Demostración.** Inmediata a partir de la demostración del Teorema (3.11) .

■

Este último resultado motiva la siguiente definición ([1]):

**Definición 3.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable. Se dice que un operador continuo  $T$  es de Hilbert-Schmidt si existe una base  $\{e_n\}$  de  $H$  tal que  $\|T\|_{HS}^2 := \sum |Te_n|^2 \leq \infty$ .

Se puede probar que esta definición es independiente de la base y que  $\|\cdot\|_{HS}$  define una norma. Además, todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

**Teorema 3.12.** *Sea  $H = L^2(\Omega)$  y  $k(x, y) \in L^2[\Omega \times \Omega]$ . Entonces el operador*

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy$$

*es un operador de Hilbert-Schmidt.*

El recíproco de este resultado también es cierto, todo operador de Hilbert-Schmidt en  $L^2(\Omega)$  se representa de manera única mediante una función  $k(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ .

### 3.3. Aplicación a las ecuaciones diferenciales

#### Ejemplo 1:

Empezaremos haciendo la siguiente discusión heurística:

Consideremos el operador

$$Lu = -u''$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Notemos, en primer lugar, que

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

ya que

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 (-u''\bar{v} + u\bar{v}'') dt = -u'\bar{v} + u\bar{v}'|_0^1 = 0$$

(se han usado las condiciones de contorno al integrar por partes)

A continuación buscamos un operador integral  $K$  tal que

$$Ku = \int_0^1 k(x, y)u(y) dy, \quad u \in L^2[0, 1]$$

y

$$L(Ku) = u.$$

Como  $u$  ha de satisfacer las condiciones de contorno, tenemos que imponer que

$$k(0, y) = k(1, y) = 0 \quad \forall y \in [0, 1]$$

$$L(Ku) = -(Ku)'' = \int_0^1 -k_{xx}(x, y)u(y) dy = u(x)$$

Para construir dicho operador necesitaremos introducir la distribución  $\delta$  de Dirac, puede encontrarse más información sobre ella en [12]. Sus principales propiedades son

$$\delta(x - y) = 0, \quad x \neq y$$

$$\int_0^1 \delta(x - y) dy = 1$$

Si  $u(x)$  es una función continua se tiene, como consecuencia de las propiedades de la función  $\delta$  de Dirac, que

$$\int_0^1 \delta(x - y)u(y) dy = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x - y)u(y) dy, \quad \varepsilon > 0$$

Además,

$$\int_0^1 \delta(x - y)u(x) dy = u(x) \int_0^1 \delta(x - y) dy = u(x)$$

Como  $u(x)$  es continua

$$|u(x) - u(y)| < \eta(\varepsilon) \quad \text{si } |x - y| < \varepsilon,$$

donde  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$ . Usando todo lo anterior tenemos que:

$$\left| u(x) - \int_0^1 \delta(x - y)u(y) dy \right| = \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x - y)(u(x) - u(y)) dy \right| < \eta(\varepsilon) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x - y) dy = \eta(\varepsilon).$$

Esta expresión es válida para todo  $\varepsilon > 0$  por lo que, si hacemos tender  $\varepsilon$  a 0, tenemos que

$$\int_0^1 \delta(x - y)u(y) dy = u(x),$$

de lo que se deduce

$$-k_{xx}(x, y) = \delta(x - y). \quad (3.5)$$

Estamos ya mucho más cerca de encontrar el operador  $K$  que estábamos buscando. Hemos reducido el problema a encontrar  $k$  verificando (3.5).

Para  $x < y$

$$-k_{xx}(x, y) = 0$$

por lo que

$$k(x, y) = C_1(y) + C_2(y)x$$

usando que  $K(0, y) = 0$ , obtenemos que  $C_1(y) = 0$ .

Para  $y > x$  razonamos de forma análoga

$$k(x, y) = C_3(y) + C_4(y)x$$

usando que  $K(1, y) = 0$ , obtenemos que  $C_4(y) = -C_3(y)$ .

Resumiendo,

$$k(x, y) = \begin{cases} C_2(y)x, & x < y \\ C_3(y)(1 - x), & x > y. \end{cases}$$

Ahora bien, debemos imponer que  $k(x, y)$  sea continua para todo  $x$  en  $[0, 1]$ , en particular cerca de  $x = y$ . De aquí extraemos la condición

$$C_2(y)y = C_3(y)(1 - y).$$

Por tanto,

$$k(x, y) = \begin{cases} C_3(y)(1 - y)\frac{x}{y}, & x < y \\ C_3(y)(1 - x), & x > y. \end{cases}$$

Ya sólo nos falta por determinar  $C_3(y)$ . Para ello integraremos (3.5), obteniendo

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} -k_{xx}(x, y) dx = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x - y) dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En consecuencia,

$$-k_x(y + \varepsilon, y) + k_x(y - \varepsilon, y) = 1.$$

Finalmente, usando la expresión que habíamos obtenido para  $k(x, y)$ , obtenemos que

$$C_3(y) + \frac{C_3(y)(1 - y)}{y} = 1$$

lo cual equivale a que  $C_3(y) = y$ .

Ya hemos encontrado la expresión para nuestro operador  $K$ :

$$k(x, y) = \begin{cases} x(1 - y), & x < y \\ y(1 - x), & x > y. \end{cases}$$

Podemos expresarlo de manera más compacta de la siguiente forma:

$$k(x, y) = x_{<}(1 - x_{>}) \tag{3.6}$$

donde

$$x_{<} = \text{mín}(x, y)$$

$$x_{>} = \text{máx}(x, y)$$

Termina aquí la discusión heurística que empezamos al comienzo del ejemplo.

Usando (3.6) tenemos que

$$v(x) := Ku = \int_0^1 x_{<}(1 - x_{>})u(y) dy = (1 - x) \int_0^x yu(y) dy + x \int_x^1 (1 - y)u(y) dy$$

y, por tanto,

$$v(0) = v(1) = 0$$

(en consecuencia  $Ku$  verifica las condiciones de contorno).

Además, derivando sucesivamente,

$$v'(x) = - \int_0^x yu(y) dy + \int_0^1 (1 - y)u(y) dy$$

$$-v''(x) = xu(x) + (1 - x)u(x) = u(x)$$

Por tanto,

$$LKu = u \tag{3.7}$$

tal y como buscábamos.

Ahora bien, si  $K$  tiene una función propia  $\varphi_n(x)$ , asociada al valor propio no nulo  $\mu_n$ , entonces

$$K\varphi_n = \mu_n\varphi_n.$$

Si aplicamos  $L$  en ambos lados, obtenemos

$$\varphi_n \stackrel{(3.7)}{=} L(K\varphi_n) = L(\mu_n\varphi_n) = \mu_n L(\varphi_n) \Rightarrow L(\varphi_n) = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n.$$

Usando ahora la definición de nuestro operador  $L$  y definiendo  $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$  vemos que  $\varphi_n$  verifica la ecuación diferencial

$$\varphi_n'' + \lambda_n\varphi_n = 0 \tag{3.8}$$

y además verifica las condiciones de contorno

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0.$$

La solución general de (3.8) es de la forma

$$\varphi_n(x) = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\lambda_n} x.$$

Usando que  $\varphi_n(0) = 0$  obtenemos que  $C_2 = 0$ . Por otro lado, usando que  $\varphi_n(1) = 0$  tenemos que

$$\varphi_n(1) = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} = 0.$$

Si  $C_1$  fuese cero, entonces  $\varphi_n(x) \equiv 0$ , lo cual no es posible por definición de función propia. Por tanto, debemos imponer que el seno se anule, lo cual solamente ocurre si  $\sqrt{\lambda_n}$  es un múltiplo entero de  $\pi$ , por ejemplo  $n\pi$ .

Vamos ahora a obtener el valor de  $C_1$  necesario para ortonormalizar  $\varphi_n$ :

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_0^1 C_1^2 \operatorname{sen}^2(n\pi x) dx = \frac{C_1^2}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \sqrt{2}.$$

Por tanto,  $\{\sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi x)\}$  es un conjunto ortonormal de funciones propias de  $K$ , y  $\{n^2\pi^2\}$  sus correspondientes valores propios. Nótese que  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{n^2\pi^2}$  son los valores propios de  $K$  (usaremos esto en el Ejemplo 4).

Puesto que  $K$  es claramente autoadjunto estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.10. Para ello investigaremos en primer lugar el núcleo de  $K$ .

Supongamos  $Kf = 0$ , entonces

$$Kf = \int_0^1 x_{<}(1 - x_{>})f(y) dy = (1 - x) \int_0^x yf(y) dy + x \int_x^1 (1 - y)f(y) dy = 0.$$

Derivando lo anterior obtenemos

$$- \int_0^x yf(y) dy + \int_x^1 (1 - y)f(y) dy = - \int_0^1 yf(y) dy + \int_x^1 f(y) dy = 0$$

Para  $x = 1$  tenemos que

$$\int_0^1 yf(y) dy = 0.$$

Usando todo lo anterior deducimos que

$$\int_x^1 f(y) dy = 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

por lo cual  $f$  es nula. En consecuencia, el núcleo de  $K$  es vacío.

Por tanto, el Teorema 3.10 nos dice que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi y) f(y) dy \right) \sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi x) \quad \forall f \in L^2[0, 1]$$

y que dicha convergencia es en media, es decir, en la norma de  $L^2[0, 1]$ .

Con las hipótesis que tenemos hasta ahora no podemos obtener mejores convergencias. Sin embargo, añadiendo ciertas hipótesis adicionales podemos dar más información sobre ella.

**Teorema 3.13.** *Sea  $K(x, y)$  un núcleo en  $L^2[a, b]$  tal que  $\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \leq M^2 \forall x \in [a, b]$  y supongamos que  $K$  es autoadjunto. Denotaremos por  $\{\varphi_n\}$  al conjunto de funciones propias asociadas al operador compacto y autoadjunto  $K$ . Si existe una función  $g(x) \in L^2[a, b]$  tal que  $f = Kg$ , entonces la serie de Fourier*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$$

converge absoluta y uniformemente a  $f(x)$  en  $[a, b]$ .

### Ejemplo 2:

Sea  $f(x)$  continua en  $[0, 1]$  y tal que  $f''(x) \in L^2[0, 1]$  y  $f(0) = f(1) = 0$ . Entonces la serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi y) f(y) dy \right) \sqrt{2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

converge absoluta y uniformemente.

La demostración, a partir del resultado anterior, es sencilla puesto que  $f = -Kf''$ , tomando como  $K$  el visto en (3.6). Por tanto, aplicando el Teorema 3.13 obtenemos la convergencia absoluta y uniforme.

### Ejemplo 3:

Consideremos el operador diferencial (de Sturm-Liouville)

$$Lu = -(p(x)u')' + q(x)u \quad (3.9)$$

con las condiciones de contorno

$$a_0u(0) + a_1u'(0) = 0, \quad |a_0| + |a_1| \neq 0.$$

$$b_0u(1) + b_1u'(1) = 0, \quad |b_0| + |b_1| \neq 0.$$

Supondremos que  $q(x), p(x), a_0, a_1, b_0, b_1$  son reales,  $p(x)$  positiva en  $[0, 1]$  y  $q(x)$  y  $p'(x)$  son continuas. Usando las condiciones de contorno se puede probar fácilmente que

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

para aquellos  $u$  y  $v$  para los cuales  $Lu$  y  $Lv$  están definidos en  $L^2[0, 1]$ .

Al igual que en Ejemplo 1 queremos encontrar un operador integral

$$Ku = \int_0^1 k(x, y) u(y) dy$$

definido en  $L^2[0, 1]$  tal que  $Ku$  satisfaga la condiciones de contorno y que

$$LKu = u.$$

Para ello debemos buscar una función de Green  $K(x, y)$  tal que

$$-(p(x)k_x(x, y))_x + q(x)k(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.10)$$

al igual que en (3.5).

Para  $x < y$  necesitamos que

$$\begin{aligned} -(p(x)k_x(x, y))_x + q(x)k(x, y) &= 0 \\ a_0k(0, y) + a_1k_x(0, y) &= 0 \end{aligned}$$

Sabemos, por teoría de ecuaciones diferenciales, que dicha solución existe. Podemos reescribir el problema anterior como una ecuación integral de Volterra

$$k(x, y) = k(0, y) + p(0)k_x(0, y) \int_0^x \frac{dt}{p(t)} + \int_0^x q(t) \int_t^x \frac{dz}{p(z)} k(t, y) dt \quad (3.11)$$

$k(0, y)$  y  $k_x(0, y)$  pueden ser cualesquiera valores de manera que se satisfaga la condición inicial en cero. Estos valores no son únicos, pero pueden depender un parámetro que puede ser asignado arbitrariamente. Por ejemplo, si  $a_1 \neq 0$ , podemos tomar  $k(0, y) = 1$  y  $k_x(0, y) = -\frac{a_0}{a_1}$ . De esta forma podemos encontrar una única solución de (3.11), a la que denotaremos  $k_1(x)$ .

De manera similar podemos encontrar  $k_2$  tal que

$$\begin{aligned} -(p(x)k_2')' + q(x)k_2 &= 0 \\ a_0k_2(1) + a_1k_2'(1) &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$k(x, y) = \begin{cases} C_1k_1(x), & x < y \\ C_2k_2(x), & x > y. \end{cases}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias. Sin embargo, debemos imponer que  $K(x, y)$  sea continua en  $x = y$ , por lo cual

$$C_1 k_1(x, y) = C_2 k_2(y)$$

Además, si integramos (3.10) en el intervalo  $[y - \varepsilon, y + \varepsilon]$  y hacemos tender  $\varepsilon$  a cero, obtenemos

$$-p(y)C_2 k_2'(y) + p(y)C_1 k_1'(y) = 1.$$

Por tanto, tanto  $C_1$  como  $C_2$  están completamente determinadas.

Finalmente, si adoptamos la notación vista en el Ejemplo 1,

$$k(x, y) = \frac{k_1(x_<)k_2(x_>)}{p(y)[k_2(y)k_1'(y) - k_1(y)k_2'(y)]}.$$

El denominador de esta expresión parece depender de  $y$ , sin embargo es constante como veremos ahora.

$$\begin{aligned} \{p(y)[k_2(y)k_1'(y) - k_1(y)k_2'(y)]\}' &= k_2(y)p(y)k_1'(y)' - k_1(y)(p(y)k_2'(y))' \\ &= k_2(y)p(y)k_1'(y) - k_1(y)(p(y)k_2'(y)) = 0 \end{aligned}$$

(hemos usado en el último paso que  $k_1(y)$  y  $k_2(y)$  verifican la misma ecuación diferencial).

Si denotamos  $w$  a dicha constante tenemos dos posibilidades:

1. Caso  $w = 0$ :

Si  $w = 0$ , entonces

$$k_2(y)k_1'(y) - k_1(y)k_2'(y) = 0$$

y, por tanto,  $k_1(y)$  es múltiplo de  $k_2(y)$ .

Esto caso es más delicado, se puede consultar en [9].

2. Caso  $w \neq 0$ :

$$k(x, y) = \frac{k_1(x_<)k_2(x_>)}{w}$$

Claramente  $k(x, y)$  es continuo en  $0 \leq x, y \leq 1$  y autoadjunto, lo cual implica que es compacto y autoadjunto. Al igual que en el Ejemplo 1 se puede probar que si  $Kf = 0$ , entonces  $f = 0$ .

En consecuencia, si denotamos  $\{\varphi_i(x)\}$  a la base ortonormal de funciones propias y  $\{\mu_i\}$  a los valores propios de  $K$ , y  $f \in L^2[0, 1]$ , tenemos en virtud del Teorema 3.10, que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i.$$

Además, si  $f = Kg$  para algún  $g \in L^2[0, 1]$ , la convergencia anterior es absoluta y uniforme en  $[0, 1]$ .

#### **Ejemplo 4:**

El Corolario 3.2 nos dice que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2.$$

Tomando como  $k$  el obtenido en el Ejemplo 1, y teniendo en cuenta que los valores propios de  $K$  son  $\left\{ \frac{1}{n^2\pi^2} \right\}$ , obtenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 [x_{<}(1 - x_{>})]^2 dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}$$

Integrando el término de la izquierda obtenemos finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4} = \frac{1}{90},$$

lo cual equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

### *Valores propios y funciones propias del operador laplaciano. Método de separación de variables en dimensiones superiores.*

El objetivo de este capítulo es obtener la fórmula asintótica de Hermann Weyl, uno de los resultados más antiguos sobre los valores propios del laplaciano, a partir de conocimiento básicos de la ecuación del calor, el principio del máximo-mínimo y resultados referentes a valores y vectores propios.

Dividiremos el capítulo en 3 secciones, una referente a la ecuación del calor, otra sobre los valores y vectores propios y una última sobre la distribución de dichos valores propios.

Para la elaboración de este capítulo hemos utilizado principalmente [6], apoyándonos en [2] y [9].

#### **4.1. Ecuación de calor**

Ya hablamos de ella en el Capítulo 2, aunque ahora la trataremos en dimensión superior. Consideremos  $D \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado con frontera regular. Si estudiamos el flujo de calor en dicho dominio suponiendo que la temperatura en el borde es nula, obtenemos el siguiente problema de EDPs:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & x \in D, t > 0 \\ u(x, t) &= 0 & x \in \partial D, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in D \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde, como ya vimos,  $u(x, t)$  denota la temperatura en un punto  $x \in \bar{D}$  a tiempo  $t > 0$ .

Veamos ahora que (4.1) tiene una única solución. Para la unicidad usaremos el principio del máximo-mínimo, el cual enuncio a continuación:

**Teorema 4.1.** *Supongamos  $u(x, t)$  continua en  $x \in \bar{D}$ ,  $t \in [0, T]$ , de clase  $C^2$  en  $x \in D$ ,  $C^1$  en  $t > 0$ , y satisfaciendo la ecuación del calor*

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad (x, t) \in D \times (0, T).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in \bar{D} \times [0, T]} u(x, t) &= \max_{(x,t) \in (\bar{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0, T])} u(x, t) \\ \min_{(x,t) \in \bar{D} \times [0, T]} u(x, t) &= \min_{(x,t) \in (\bar{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0, T])} u(x, t) \end{aligned}$$

**Demostración.** La demostración puede verse en [2].

■

Al conjunto  $(\bar{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0, T])$  se le suele llamar frontera parabólica de  $D \times (0, T)$ . Supongamos que  $u$  y  $v$  son dos soluciones distintas de (4.1). En tal caso, si definimos  $w = u - v$ , esta función es solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta w(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) & x \in D, t > 0 \\ w(x, t) &= 0 & x \in \partial D, t \geq 0 \\ w(x, 0) &= 0 & x \in D \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aplicando ahora el principio del máximo-mínimo obtenemos, usando las condiciones de contorno de (4.2), que

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in \bar{D} \times [0, T]} w(x, t) &= \max_{(x,t) \in (\bar{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0, T])} w(x, t) = 0 \\ \min_{(x,t) \in \bar{D} \times [0, T]} w(x, t) &= \min_{(x,t) \in (\bar{D} \times \{0\}) \cup (\partial D \times (0, T])} w(x, t) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $w \equiv 0$ , es decir  $u = v$  (la solución, en caso de existir, es única).

Para probar la existencia de solución usaremos la denominada función de Green del problema (4.1). Nuestra discusión, ahora, es heurística. Supongamos que la temperatura en nuestro conjunto  $D$  es cero inicialmente y que le aplicamos calor a un punto  $y \in D$  en el momento  $t = 0$ . Sea  $p(x, y, t)$  la temperatura en  $x \in \bar{D}$  en tiempo  $t > 0$ . En tal caso, esperamos que la función  $p$  satisfaga las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & p(x, y, t) = p(y, x, t) \geq 0, \quad p(x, y, t) = 0 \quad \text{si } x \in \partial D \\
 (b) \quad & \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) = \Delta_x p(x, y, t) \quad \text{para } (x, y, t) \in D \times D \times (0, \infty) \\
 (c) \quad & p(x, y, t + s) = \int_D p(x, z, t) p(z, y, s) dz
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Antes de intentar calcularla observemos que la función  $p(x, y, t)$  puede usarse para calcular soluciones de (4.1). La temperatura  $u(x, t)$  en el punto  $x \in D$  a tiempo  $t > 0$  es la suma (integral) de los efectos provenientes de cada uno de los puntos, es decir,

$$u(x, t) = \int_D p(x, y, t) u_0(y) dy \tag{4.4}$$

La propiedad (c) expresa que la distribución de la temperatura tras  $t + s$  segundos es igual a la temperaturas tras  $t$  segundos, si los valores iniciales son las temperaturas tras  $s$  segundos.

**Definición 4.1.** Una función  $p(x, y, t)$  continua en  $\bar{D} \times \bar{D} \times (0, \infty)$ ,  $C^2$  en  $x \in D$ ,  $C^2$  en  $y \in D$  y  $C^1$  en  $t > 0$  es llamada la función de Green para el problema (4.1) si

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta_x p \text{ en } D \times D \times (0, \infty), \quad p(x, y, t) = 0 \quad \forall x \in \partial D. \\
 (b) \quad & \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_D p(x, y, t) u_0(y) dy = u_0(x) \\
 & \text{uniformemente para toda función } u_0 \text{ continua en } \bar{D} \text{ que sea anule en } \partial D.
 \end{aligned}$$

Si tal función existe, derivando bajo el signo integral y usando (b) se obtiene que (4.4) es solución de (4.1). Además, de la unicidad de solución de (4.1) se sigue que la función de Green es única. Además, se verifican todas las propiedades vistas anteriormente.

La existencia de la función de Green fue probada por primera vez en [8], su construcción es técnica.

Se puede comprobar que la función

$$k(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$$

juega el papel de función de Green para todo el espacio, es decir, nos da la temperatura en  $x \in \mathbb{R}^n$  a tiempo  $t > 0$  tras haber aplicado calor en un punto  $y \in D$  en el momento  $t = 0$ . Es conocida como la solución fundamental de la ecuación del calor. Mediante ciertos cálculos sencillos se pueden obtener las siguientes propiedades:

- (a)  $k(x, y, t) \geq 0$ ,     $k(x, y, t) = k(y, x, t)$
- (b)  $\Delta_x k(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} k(x, y, t)$     para  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
- (c)  $\int_{\mathbb{R}^n} k(x, y, t) dy = 1$     para cada  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$
- (d)  $\int_{\mathbb{R}^n} k(x, z, t) k(z, y, s) dz = k(x, y, t + s)$
- (e)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y, t) u_0(y) dy = u_0(x)$

uniformemente para cada función continua y acotada  $u_0$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Nótese que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y, t) u_0(y) dy$$

es solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

para cualquier función  $u$  continua y acotada.

Puesto que conocemos explícitamente la función  $k(x, y)$  la usaremos como punto de partida para construir nuestra función de Green. Esperamos que a tiempo pequeño el flujo de calor en  $D$  permanezca similar al de  $\mathbb{R}^n$ , al menos cerca de la frontera. Ésto nos lleva a conjeturar que

$$p(x, y, t) = k(x, y, t) - g(x, y, t), \tag{4.5}$$

donde la función  $g(x, y, t)$  es continua en  $\overline{D} \times \overline{D} \times (0, \infty)$ ,  $C^2$  en  $x$ ,  $C^1$  en  $t$  y satisface

$$\begin{aligned} \Delta_x g(x, y, t) &= \frac{\partial}{\partial t} g(x, y, t) & (x, y, t) \in D \times D \times (0, \infty) \\ g(x, y, t) &= k(x, y, t) & x \in \partial D, \quad y \in D, \quad t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x, y, t) &= 0 & x \in \overline{D}, \quad y \in D. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por tanto, fijado  $y \in D$ , la función  $v(x, t) = g(x, y, t)$  es solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \Delta v(x, t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) & (x, t) \in D \times (0, \infty) \\ v(x, t) &= k(x, y, t) & x \in \partial D, \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= 0 & x \in \overline{D}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para la construcción de  $p(x, y, t)$  resolveremos, en primer lugar, el problema (4.7) para todo  $y \in D$ . Juntando estas soluciones (infinitas) obtendremos  $g(x, y, t)$  satisfaciendo (4.6) y definiremos la función de Green como en (4.5).

## 4.2. Funciones y valores propios

Recordemos que una función  $\phi \not\equiv 0$  es una función propia del laplaciano en  $D$  con condición Dirichlet si  $\phi$  es  $C^2$  en  $D$ , continua en  $\overline{D}$  y verifica

$$\begin{aligned} \Delta \phi + \lambda \phi &= 0 \\ \phi|_{\partial D} &= 0 \end{aligned}$$

para alguna constante  $\lambda$ . Diremos que  $\phi$  es una función propia asociada al valor propio  $\lambda$ .

El siguiente teorema es muy interesante, ya que explica la relación entre las funciones y valores propios del laplaciano y la ecuación del calor.

**Teorema 4.2.** *Existe una base hilbertiana  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  de  $L^2(D)$  formado por las funciones propias del laplaciano. Si  $\phi_i$  está asociada al valor propio  $\lambda_i$ , entonces  $\lambda_i > 0$  y  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$ . Además*

$$p(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}$$

donde la convergencia es uniforme en  $\overline{D} \times \overline{D} \times [\epsilon, \infty)$  para todo  $\epsilon > 0$ .

Para la demostración de este teorema necesitaremos 3 resultados previos, cuya prueba se puede consultar en [9]:

**Teorema 4.3.** *Sea  $K(x, y)$  continuo en  $\overline{D} \times \overline{D}$  y complejo-valuado con  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ . Entonces el operador  $A : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  dado por*

$$Af(x) = \int_D K(x, y)f(y) dy$$

*es un operador compacto y autoadjunto.*

**Teorema 4.4.** *Sea  $A : H \rightarrow H$  un operador compacto y autoadjunto en un espacio de Hilbert  $H$  separable. Entonces  $H$  puede descomponerse como suma directa de espacios de Hilbert:*

$$H = H_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^m H_i$$

*con  $m$  un entero positivo o infinito, de manera que  $A|_{H_i}$  es igual a la multiplicación por  $\mu_i$ . Recordemos que  $H_0 = N(A)$  y que  $H_i = N(A - \mu_i I)$  donde  $\mu_i$  son valores propios no nulos distintos de  $A$ . Además, se verifican las siguiente propiedades:*

1.  $\dim H_i < \infty, \forall i > 0$ .
2.  $\mu_i \neq \mu_j$  si  $i \neq j$ .
3.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = 0$  si  $m = \infty$ .

Si  $K$  verifica las condiciones del Teorema 4.3, el Teorema 4.4 implica que el espacio  $L^2(D)$  tiene una base ortonormal  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  constituida por las funciones propias del operador integral  $A$ . Sean  $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$  los correspondientes valores propios asociados. Con esta notación tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.5.** *Sea  $K(x, y)$  el núcleo definido anteriormente y supongamos además que el operador  $A$  definido por  $K$  en  $L^2$  es positivo (es decir,  $(Af, f) \geq 0$ ) para toda  $f \in L^2(D)$ . Entonces  $\mu_i \geq 0 \forall i$  y*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}$$

*donde la serie converge absoluta y uniformemente.*

**Demostración.** (Teorema 4.2) Para todo  $t > 0$  definimos el operador  $P(t) : L^2(D) \longrightarrow L^2(D)$  mediante la fórmula

$$P(t)[f](x) = \int_D p(x, y, t) f(y) dy$$

para toda  $f \in L^2(D)$ . De las propiedades de la función de Green (4.3) y de las vistas en su definición 4.1 se sigue que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.3, por lo cual  $P(t)$  es un operador compacto y autoadjunto para cada  $t > 0$ . De la propiedad (c) de (4.3) se deduce que

$$P(t) \circ P(s) = P(t + s). \tag{4.8}$$

Derivando bajo el signo integral obtenemos que, para toda  $f \in L^2(D)$  la función  $v(x, t) = \int_D p(x, y, t) f(y) dy = P(t)[f(x)]$  satisface la ecuación del calor en  $D \times (0, \infty)$  y se anula en  $\partial D$ .

En consecuencia, por el teorema de Green,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|P(t)[f]\|^2 &= \frac{d}{dt} \int_D |P(t)[f(x)]|^2 dx = 2 \int_D \Delta P(t)[f(x)] \overline{P(t)[f(x)]} dx \\ &= -2 \int_D |\nabla P(t)[f(x)]|^2 dx < 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En consecuencia, la norma de  $P(t)$  es una función no creciente respecto de  $t > 0$ . Si fuera continua y se anulara en  $\partial D$  tendríamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t)[f] = f$$

uniformemente como consecuencia de la segunda propiedad de la definición 4.1. En tal caso,

$$\|P(t)[f]\| < \|f\|. \tag{4.10}$$

Ahora bien, como las funciones continuas que se anulan en  $\partial D$  son densas en  $L^2(D)$  tenemos que la propiedad anterior es cierta para toda función  $f$  de  $L^2(D)$ . En consecuencia, se puede ver fácilmente que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t)[f] = f \tag{4.11}$$

para toda  $f \in L^2(D)$ .



Para aplicar el Teorema 4.5 necesitamos que  $P(t)$  sea positiva para cada  $t > 0$ , lo cual es cierto consecuencia de la propiedad (4.8):

$$(P(t)[f], f) = \left( P\left(\frac{t}{2}\right) \circ P\left(\frac{t}{2}\right), f \right) = \left( P\left(\frac{t}{2}\right)[f], P\left(\frac{t}{2}\right)[f] \right) \geq 0.$$

Tomemos ahora  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  una base ortonormal de  $L^2(D)$  formada por las funciones propias de  $P(1)$  y sea  $\{\mu_n\}$  la correspondiente sucesión de valores propios. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todas las funciones propias son reales. De la propiedad (4.8) se deduce fácilmente que

$$P\left(\frac{l}{k}\right)\phi_l = \mu_l^{l/k}\phi_l$$

para todo número racional  $l/k$ . Por continuidad  $P(t)[\phi_l] = \mu_l^t\phi_l$ . Observemos que  $\mu_i > 0$  para todo  $i$  ya que

$$0 \neq \phi_i = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(t)\phi_i = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mu_i^t\phi_i$$

como consecuencia de (4.11). Además, se sigue que  $\mu_i = e^{-\lambda_i}$ ;  $\lambda_i > 0$  consecuencia de (4.10), y  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$ , ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_i = 0$  por la propiedad 3 del Teorema 4.4.

Cumplimos todas las condiciones, por lo tanto vamos a aplicar el Teorema 4.5

$$p(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \phi_i(y)$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en  $x$  y en  $y$  para todo  $t > 0$ . Esto implica que la convergencia es uniforme en  $x, y \in D$  y  $t \geq \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

Para concluir la prueba debemos ver

$$\Delta\phi_i + \lambda\phi_i = 0$$

$$\phi_i|_{\partial D} = 0.$$

Ya sabemos que

$$P(t)\phi_i(x) = e^{-\lambda_i t} \phi_i(x)$$

es solución de la ecuación y se anula en  $\partial D$ . En consecuencia,  $\phi_i|_{\partial D} = 0$  y

$$-\lambda_i e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\lambda_i t} \phi_i(x)) = \Delta (e^{-\lambda_i t} \phi_i(x)) = e^{-\lambda_i t} \Delta\phi_i(x).$$

Dividiendo la anterior entre  $e^{-\lambda_i t}$  obtenemos, tal y como buscábamos, que  $\Delta\phi_i + \lambda_i\phi_i = 0$ .

### 4.3. Distribución de los valores propios

En la sección anterior vimos que, ordenados los los valores propios según su índice,  $\lim_i \lambda_i = \infty$ . La fórmula de Hermann Weyl, la cual anunciamos al principio del capítulo, nos dice que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i^{n/2}}{i} = \frac{C(n)}{\text{vol}(D)} \quad (4.12)$$

donde  $C(n) = (4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2 + 1)$ .

Veamos ahora el papel de la ecuación del calor en este resultado.

En primer lugar, observemos que, en virtud del Teorema 4.2,

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \int_D p(x, x, t) dx, \quad (4.13)$$

ya que  $\int_D \phi_i(x)^2 dx = 1 \quad \forall i$ . Por tanto, las estimaciones de la función de Green se traducen en estimaciones de la función  $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$ , la cual arroja información sobre los valor propios. Más concretamente, la velocidad a la cual  $f(t)$  tiende a infinito cuando  $t$  se aproximo a cero, depende de la velocidad de crecimiento de los valores propios.

Por otro lado, tenemos esta desigualdad

$$p(x, y, t) \leq k(x, y, t) \quad \text{para } x, y \in \bar{D}, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

la cual intuitivamente es obvia.

Usando tanto (4.13) como (4.14) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \int_D p(x, x, t) dx \leq \int_D k(x, x, t) dx = \int_D (4\pi t)^{-n/2} dx = (4\pi t)^{-n/2} \text{vol}(D).$$

Sea  $N$  un entero positivo, en tal caso

$$N e^{-\lambda_N t} \leq \sum_{i=1}^N e^{-\lambda_i t} \leq (4\pi t)^{-n/2} \text{vol}(D).$$

Tomando  $t = \frac{1}{\lambda_N}$  y multiplicando por  $e$  transformamos la anterior desigualdad en

$$N \leq e(4\pi)^{-n/2} \lambda_N^{n/2} \text{vol}(D),$$

la cual equivale a

$$\lambda_n^{-n/2} \geq \frac{(4\pi)^{n/2} N}{e \text{vol}(D)}$$

Esta desigualdad ya nos recuerda a la fórmula de Hermann Weyl, no es tan buena como ella pero pone de manifiesto la relación entre la ecuación del calor y dicha fórmula.

Para valores pequeños de  $t$  el conocido *principle of not feeling the boundary* nos dice que

$$k(x, y, t) \sim p(x, y, t), \tag{4.15}$$

es decir,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{k(x, y, t)}{p(x, y, t)} = 1.$$

Usando ésto en (4.13) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \int_D k(x, x, t) dx = (4\pi t)^{-n/2} \text{vol}(D)$$

que se puede traducir en (4.12). Sin embargo, para que este resultado sea riguroso, debemos probar (4.15), lo cual haremos en el siguiente lema:

**Lema 4.1.** *Sea  $l(y)$  la distancia entre  $y$  y la frontera  $\partial D$ , para todo  $y \in D$ . Entonces para cada  $x, y \in D$  tenemos que*

$$0 \leq k(x, y, t) - p(x, y, t) \leq \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{l(y)^2}{4t}\right) & 0 < t \leq t_0 \\ (4\pi t_0)^{-n/2} \exp\left(-\frac{l(y)^2}{4t_0}\right) & t \geq t_0, \end{cases}$$

donde  $t_0 = \frac{l(y)^2}{2n}$ .

**Demostración.** La primera desigualdad ya ha sido probada. Aplicamos el principio del máximo a  $g(x, y, t) = k(x, y, t) - p(x, y, t)$  como función de  $x$  y  $t$ . Usando (4.6) y la expresión explícita de  $k(x, y, t)$  obtenemos los valores en la frontera parabólica de  $\bar{D} \times (0, T]$ . En consecuencia

$$g(x, y, t) \leq \sup_{\substack{x \in \partial D \\ 0 < s \leq t}} (4\pi s)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4s}\right) \leq \sup_{0 < s \leq t} (4\pi s)^{-n/2} \exp\left(-\frac{l(y)^2}{4s}\right).$$

La función  $(4\pi s)^{-n/2} \exp\left(-\frac{l(y)^2}{4s}\right)$  alcanza su máximo en  $s = \frac{l(y)^2}{2n} =: t_0$ , es decreciente para  $s > t_0$  y creciente para  $s < t_0$ . ■

**Teorema 4.6.** *Para cada  $T > 0$  existe una constante  $C$  tal que*

$$0 \leq \text{vol}(D)(4\pi t)^{-n/2} - \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \leq Ct^{-n/2+1/2}$$

para  $t \in (0, T]$ .

**Demostración.** La demostración es de carácter técnico y usa esencialmente la primera desigualdad del Lema 4.1. Se puede consultar con detalle en [6].

■

El Teorema 4.6 implica la fórmula (4.12) como consecuencia del Teorema Tauberiano de Hardy y Littlewood (pág. 64 de [13]), el cual enunciaremos a continuación. Antes de ello, introduciremos la función  $N(\lambda)$ , cuyo valor para  $\lambda \geq 0$  es el número de valores propios tales que  $\lambda_i \leq \lambda$ . Es por ello que podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda).$$

**Teorema 4.7.** *Sea  $N(\lambda)$  una función no decreciente tal que  $f(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda)$  converge para todo  $t > 0$ . Si  $f(t) \sim A/t^\gamma$  cuando  $t \rightarrow 0^+$  para algún número positivo  $\gamma$ , entonces*

$$N(\lambda) \sim \frac{A\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)} \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow \infty.$$

En nuestro caso, la función  $N(\lambda)$  es no decreciente, ya que los valores propios forman una sucesión no decreciente, y

$$f(t) \sim \text{vol}(D)(4\pi t)^{-n/2}$$

por el Teorema 4.6. En consecuencia,

$$N(\lambda) \sim \frac{\text{vol}(D)\lambda^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2 + 1)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo  $\lambda$  por  $\lambda_i$  obtenemos finalmente la Fórmula de Hermann Weyl.



---

## Índice alfabético

### A

Alternativa de Fredholm ..... 9

### B

Base Hilbertiana ..... 2

### D

Desigualdad de Bessel ..... 2

### E

Espacio completo ..... 2

Espacio de Hilbert ..... 2

Espectro de un operador ..... 9

### F

Frontera parabólica ..... 48

Fórmula Hermann Weyl ..... 55

### I

Identidad de Parseval ..... 3

### L

Lema de Riesz ..... 8

### M

Método de separación de variables ... 17

### O

Operador Autoadjunto ..... 7

Operador Compacto ..... 5

Operador de Hilbert-Schmidt ..... 37

### P

Principio del mínimo-máximo ..... 48

Principle of not feeling the boundary 56

Problema de la conducción del calor . 19

Problema de la cuerda vibrante ..... 15

Problemas del tipo Sturm Liouville .. 23

### R

Resolvente de un operador ..... 9

**S**

Solución fundamental ec. del calor ... 50  
Suma de Hilbert ..... 2

**T**

Teorema de Riesz ..... 8

Teorema Tauberiano ..... 57

**V**

Valor propio ..... 9

---

## Bibliografía

- [1] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [2] Cañada, A.: *Apuntes sobre la ecuación del calor*. Universidad de Granada, 2010  
<https://www.ugr.es/~acanada/docencia/fisica/2calorfisica0910.pdf>.
- [3] Cañada, A.: *Apuntes sobre la existencia de bases hilbertianas en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita*. Universidad de Granada, 2014-15.  
<https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/analisisfuncional/miobaseshilbertianas.pdf>.
- [4] Cañada, A.: *Series de Fourier: un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos*. Editorial Pirámide, 2002.
- [5] Cañada, A.: *Una perspectiva histórica de las series de Fourier*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, ISSN 1665-2436, Vol. 3, N<sup>o</sup>. 3, 2000, págs. 293-320.
- [6] Dodziuk, Józef : *Eigenvalues of the Laplacian and the Heat Equation*. The American Mathematical Monthly Vol. 88, N<sup>o</sup> 9, págs. 686-695, 1981. <http://www.jstor.com/stable/2320674>
- [7] Driver, Bruce K.: Notas de Clase. UC San Diego. [http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture\\_Notes/Hilbert-Spaces.pdf](http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/231-02-03/Lecture_Notes/Hilbert-Spaces.pdf)
- [8] Elia Levi, E.: *Sull'equazione del calore*. Annali di Matematica Pura ed Applicata 14, 1908.

- [9] Hochstadt, Harry: *Integral Equations*. Wiley, 1989.
- [10] Tijonov, A. N. y Samarski, A. A.: *Ecuaciones de la Física Matemática*. Mir, 1980.
- [11] Tom M. Apostol: *Calculus*. Segunda Edición. Editorial Reverté, 1980.
- [12] Vladimirov, V.S.: *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, 1971.
- [13] Wiener, Norbert: *Tauberian Theorems*. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 33, N<sup>o</sup> 1, Enero 1932. <https://www.jstor.org/stable/1968102>