

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Ciencias de la Computación e
Inteligencia Artificial



Programa de Doctorado:
Tecnologías de la Información y la Comunicación

Tesis Doctoral:

Selección de personal con técnicas de Soft Computing. Propuesta de Desarrollo y de Software.

Estudiante de Doctorado:
Elio Higinio Cables Pérez

DIRECTORA:
Dra. María Teresa Lamata Jiménez
Catedrática de la Universidad de Granada.

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales

Autor: Elio Higinio Cables Pérez

ISBN: 978-84-1117-110-6

URI: <http://hdl.handle.net/10481/71581>

La memoria titulada **”Selección de personal con enfoque difuso: Propuesta de Desarrollo y de Software”**, presentada por D. Elio Higinio Cables Pérez para optar al grado de Doctor en Informática, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada, España; bajo la dirección de la doctora Dña. María Teresa Lamata Jiménez, catedrática del mismo departamento.

Granada, Noviembre de 2011.

D. Elio Higinio Cables Pérez

Dña. María Teresa Lamata Jiménez

A mi madre, quien ha incidido en lo que he logrado ser.

*A mis cuatro hijos: Elito, Dayi, Baby, y Ernestico, que son
el impulso e incentivo de mi constante preparación.*

*A mi esposa, quien ha sido siempre mi apoyo y ha compartido
mi vida y mi formación profesional.*

Agradecimientos

- A: Dra. María Teresa Lamata, directora de esta tesis, quien ha sido una excelente guía en la orientación y asesoramiento de este trabajo, que no ha escatimado esfuerzos dedicándome parte de su apretado tiempo, donde siempre han estado presentes sus enseñanzas para formarme como investigador.
- A: Dr. José Luis Verdegay, coordinador del doctorado curricular entre Cuba y España, por su entrega, profesionalidad y apoyo incondicional para la formación de doctores en Informática en la región Oriental de mi país.
- A: La Universidad de Granada, por facilitar el convenio para la formación de Doctores en Cuba y en particular a los proyectos TIN2008-06872-C04-04 y P07-TIC02970 de la Junta de Andalucía.
- A: Empresa Desoft Holguín, Cuba, quienes siempre me han apoyado y confiado en este proyecto.
- A: Dra. Rosa Urquiza, coordinadora en la Universidad de Holguín de este doctorado, por su apoyo en la contribución a la formación de doctores en Informática para el desarrollo de nuestra provincia.
- A: Colectivo de profesores de este doctorado por dotarnos de valiosos conocimientos, por su profesionalidad y exigencia.
- A: Dr. Carlos Cruz, por su ayuda y colaboración en aras de la terminación de este trabajo.
- A: Dr. David Pelta, quien me ha brindado su cordial ayuda y asesoramiento para la escritura de este trabajo en Latex.
- A: mi esposa, hijos, madre, por asumir responsabilidades hogareñas para que este trabajo pudiera ser terminado.
- A: todos, los que de una u otra forma contribuyeron a la realización de este trabajo, aunque sus nombres no aparezcan: MUCHAS GRACIAS.

Elio H. Cables Pérez.

Índice general

1. Introducción	1
2. Números difusos.	9
2.1. Introducción.	9
2.2. Definición.	9
2.3. Funciones de pertenencia.	11
2.4. Operaciones aritméticas básicas.	14
2.5. Variables lingüísticas.	14
2.6. Etiquetas lingüísticas.	15
2.7. Conclusiones.	20
3. Métodos de Análisis Multicriterio	21
3.1. Introducción.	21
3.2. Toma de Decisión en Grupo.	22
3.3. Clasificación de los Métodos de Decisión Multicriterio.	23
3.4. Conceptos básicos.	24
3.5. Características de los principales Métodos de Decisión Multicriterio.	25
3.5.1. El Proceso Analítico Jerárquico (AHP)	25
3.5.2. ORESTE	28
3.5.3. ELECTRE	29

3.5.4.	PROMETHEE	32
3.5.5.	TOPSIS	37
3.5.6.	VIKOR	40
3.5.7.	Limitaciones que presentan estos métodos.	41
3.6.	Propuesta de método de análisis multicriterio.	42
3.6.1.	Funciones de pertenencia para la normalización.	43
3.6.2.	Métrica propuesta.	52
3.7.	Conclusiones.	55
4.	El Operador de Pesos Promedio (OWA)	57
4.1.	Introducción.	57
4.2.	Definición y Propiedades.	57
4.3.	Métodos y procedimientos para la determinación del vector de pesos.	60
4.3.1.	Determinación del vector de pesos sobre la base de la programación matemática.	60
4.3.2.	Determinación del vector de pesos orientado por cuantificadores.	63
4.3.3.	Determinación del vector de pesos a través de fórmulas analíticas.	65
4.3.4.	Determinación del vector de pesos W a través de Procedimientos.	68
4.3.5.	Determinación del vector de pesos a través de un operador OWA equidiferente.	69
4.3.6.	Determinación del vector de pesos a partir de la prioridad de los criterios.	73
4.4.	Clase de funciones lineales.	74
4.4.1.	Estudio del grado de satisfacción α de la clase de funciones lineales.	83
4.4.2.	Obtención de la función lineal, a partir de los valores α y n	86
4.4.3.	Estudio de la entropía de la clase de funciones lineales.	89
4.5.	Modificación del operador OWA lineal por cuantificadores de preferencia	92
4.5.1.	Relación de preferencia cuantificada.	93
4.5.2.	Operaciones para transformar un vector de pesos.	95
4.5.2.1.	Operaciones entre vectores de pesos.	96

4.5.2.2.	Operaciones sobre la matriz unitaria.	98
4.5.2.3.	Obtención del vector de redistribución.	99
4.6.	Operador OWA basado en cuantificadores de preferencia.	105
4.6.1.	Vector de pesos a partir de la relación de preferencia cuantificada.	105
4.6.2.	Propiedades de los pesos obtenidos con la función ψ	111
4.6.3.	Propiedades de los pesos a partir de k perteneciente a un intervalo simétrico respecto al cero.	116
4.6.4.	Comportamiento del valor α para las dos variantes de simetría.	119
4.7.	OWAs basados en una escala de razón	123
4.7.1.	Propiedades de los OWAs basados en una escala de razón.	127
4.7.2.	Funciones para obtener el vector de razón de proporcionalidad.	132
4.8.	Conclusiones.	135
5.	La Selección de Personal en Empresas e Instituciones	139
5.1.	Introducción.	139
5.2.	Métodos para la Selección de Personal.	144
5.3.	Propuesta de método para la Selección de Personal.	176
5.3.1.	Consideraciones sobre el <i>Modelo de Decisión para la selección del personal</i>	177
5.3.2.	Consideraciones sobre el <i>Procesamiento y evaluación de la información de los candidatos</i>	179
5.3.2.1.	Proceso de cálculo general.	179
5.3.3.	Procedimiento para la Selección de Personal.	181
5.4.	Ejemplo práctico aplicando la concepción propuesta.	182
5.5.	Procesamiento con el método TOPSIS.	191
5.6.	Conclusiones.	193

6. Software para la Selección de Personal	195
6.1. Introducción.	195
6.2. Software utilizados en la Selección de Personal.	195
6.3. Propuesta de Software para la Selección de Personal (<i>SelPersonal</i>).	202
6.3.1. Especificaciones del software.	205
6.3.2. Descripción para el trabajo con el software SelPersonal.	209
6.4. Conclusiones.	221
7. Conclusiones y Trabajos Futuros	223
7.1. Conclusiones	223
7.2. Trabajos Futuros	227
7.3. Publicaciones realizadas	227
Bibliografía	229
Apéndice	239
A. Entrevista a Especialistas de Recursos Humanos	241
B. Entrevista a Especialistas en Informática	243
C. Diagrama de la Base de Datos	245

Capítulo 1

Introducción

En los momentos actuales, la actividad empresarial se enfrenta a un conjunto de retos para alcanzar su misión. Para ello debe asumir determinadas estrategias sobre la base de un nivel estructural y organizativo, sin embargo, se puede identificar un aspecto como básico o esencial para lograr las diferentes metas, y es el caso de los Recursos Humanos. El mismo constituye el motor fundamental para el desarrollo en todas las esferas de la sociedad, ya que, a partir de su intelecto, creatividad y empeño, puede lograrse niveles superiores en todo su ámbito social. En esencia, constituye el factor que proporciona valor al proceso productivo [23].

Teniendo en cuenta el papel que desempeñan los Recursos Humanos en el ámbito empresarial, se impone que cada entidad desarrolle o establezca una determinada estructura para controlar y dirigir los mismos. De forma general se puede plantear que la unidad organizativa de los Recursos Humanos es vital en las entidades, pues tiene la responsabilidad de captar, mantener y desarrollar el potencial necesario para garantizar la producción de bienes materiales y de servicios y por ende mantiene la vitalidad de la empresa.

Además, cada entidad establece o utiliza una estructura particular para atender con mayor o menor medida la administración de los Recursos Humanos, lo cual no implica, que necesariamente atienda los diferentes procesos asociados a la misma, pues depende de factores subjetivos de los directivos o de políticas establecidas para determinadas empresas. No obstante, se hace necesario realizar la planeación de los Recursos Humanos, pues permite revisar los requerimientos para ejecutar su correspondiente misión, asegurando de esta forma, el personal con las habilidades y capacidades necesarias. Autores como [44], plantean la necesidad de la planeación para de esta forma lograr los objetivos propuestos con una mayor calidad.

Las unidades o áreas de Recursos Humanos en una entidad tienen como misión, desarrollar un conjunto de funciones, y estas pueden variar en dependencia del tipo de organización [23], [16].

Una de las funciones que tienen estas unidades o áreas, es la conducción del proceso de Selección de Personal, para ocupar un puesto de trabajo o realizar una actividad en particular, pues constituye la base para garantizar el buen desempeño de las organizaciones y entidades.

A partir de lo planteado por varios autores referente al proceso de Selección de Personal [36], [116], [25], [92], [107], [111], el mismo permite elegir a las personas mejor preparadas y capacitadas para ocupar un puesto determinado.

El proceso de Selección del Personal no tiene un número determinado de pasos o etapas, pues dependen de diversos factores [5], que son propios de cada organización o entidad. Sin embargo, su punto de partida es la identificación de las características específicas o particulares para desempeñarse en un cargo u ocupación, lo cual permite definir los criterios básicos a utilizar durante la evaluación de un grupo de posibles candidatos.

El proceso de Selección de Personal encierran en sí mismo un conjunto de actividades muy complejas, y la efectividad del proceso depende de la precisión y los métodos utilizados para obtener resultados objetivos. Esta problemática se enfrenta a una situación donde se parte de un conjunto de información que está representada en diferentes magnitudes y significados, y que está asociada al conjunto de candidatos, de ahí la necesidad del empleo de herramientas y teorías capaces de integrar el gran cúmulo informativo.

Dentro del conjunto de herramientas y teorías empleadas en el procesamiento de información para la Selección de Personal, se encuentran:

- Los métodos de análisis multicriterio, entre los que se pueden citar:
 - El método TOPSIS [33], [94], fundamentando su principio en la distancia existente al ideal y el antiideal.
 - El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) [46], [24], [6], el cual descompone el problema de selección en una estructura jerárquica para su mejor comprensión. Además, de la extensión de este método bajo el paradigma difuso [45].
 - El método ELECTRE [1], el cual basa su principio en dividir las alternativas en dos subconjuntos, las más y las menos favorables, utilizando una relación de sobre clasificación mediante la comparación por pares.
 - Además, de los métodos ORESTE [96], PROMETHEE [13], VIKOR [87], [88], etc.
- La utilización de la Lógica Difusa, por los recursos y fundamentos que proporciona para tratar la vaguedad e imprecisión de la información, manifestados en este tipo de problemas [73], [42], [72], [61], [19], [20], [33], [46], [24].
- El empleo de modelos de programación matemática [62], [19], [21], [21], [20], aunque

estos constituyen una limitación para las personas que desconocen esta fundamentación matemática.

- La utilización de pesos para expresar el nivel de importancia de los criterios utilizados para la selección [72], [21], [45], [24], [58]. Para la obtención de los pesos, existen diversos métodos, pero nosotros nos centraremos en el estudio de los operadores OWA (Ordered Weighted Average) definidos por Yager [125].

En este sentido, se ha sistematizado la utilización del vector de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios, debido a la incidencia que manifiesta en el proceso de agregación de la información; empleándose diferentes métodos para su obtención, tales como:

- La máxima entropía [85, 86], así como su reformulación a partir de los trabajo de Yager [128], [131], [130].
- Los orientado por cuantificadores [132].
- La varianza mínima [40], reflejando la menor variación posible entre los pesos.
- La maximización de la entropía de Rényi [77].
- La minimización de la disparidad máxima entre dos pesos adyacentes [138].
- Las funciones analíticas [136], [2], [4], [66].
- El operador promedio priorizado [134], [135].

Además, con el objetivo de contribuir a la mejora del proceso de Selección de Personal, en los últimos años se han desarrollado diversos software que fundamentalmente inciden en la etapa de procesamiento y evaluación de los candidatos; automatizando esta tarea, y reduciéndola a un tiempo muy pequeño. Ejemplo de software se pueden citar:

- *Sistema de apoyo a la decisión (DSS)* [84], el cual centra su procesamiento en el diagnóstico de conflictos para el trabajo en grupo por parte de los candidatos.
- *Sistema GREHU*[28], utiliza un conjunto de requisitos predefinidos para realizar la selección de los mejores candidatos.
- *SELSOFT* [27], enfoca su trabajo en un conjunto de test psicológicos.
- *La herramienta DEXi* [56], [57], utiliza un modelo de decisión que se basa en atributos organizados en una estructura en forma de árbol.

- *RH-CITMA versión 1.0* [35], contiene un módulo para la selección de personal a partir de la información básica de los candidatos.

De forma general, todos estos recursos se han utilizado para orientar al decisor sobre cuál o cuáles son los mejores candidatos para ocupar un puesto de trabajo o para desarrollar una actividad. Sin embargo, están limitados para el caso en que el ideal de búsqueda para los criterios definidos es un valor que no es exactamente el valor máximo o el mínimo, es decir un valor intermedio. Por otra parte, estos métodos se ven limitados para excluir a una alternativa del conjunto de solución a partir del valor tomado para un criterio en particular, aunque para el resto de los criterios sus valores sean los mejores.

En particular, la concepción utilizada en el procesamiento y evaluación de la información de los candidatos puede limitar, en cierta medida, el nivel de precisión de los resultados obtenidos y propiciar un proceso de selección más engorroso.

Por otra parte, el proceso de Selección de Personal se puede transformar en muy complejo en la misma medida que aumenten los requisitos a evaluar en cada candidato o que la entidad tenga que realizar dicho proceso de forma sistemática.

Teniendo en cuenta lo referido anteriormente, se plantea la problemática siguiente:

¿Cómo lograr un mayor nivel de precisión de los resultados del proceso de Selección de Personal, a partir de la especificación dinámica de indicadores o criterios?

Con el fin de dar solución al problema expresado, se propone como objetivo:

Elaborar un software que apoye el proceso de Selección de Personal sobre la base de la definición dinámica de indicadores o criterios, sus pesos respectivos y el empleo de funciones de normalización, según necesidades específicas.

Esta problemática tiene como objeto de investigación el Proceso de Selección de Personal en empresas e instituciones, y se enmarca en el campo del procesamiento de información para la selección del personal.

Con la finalidad de orientar el trabajo de investigación de esta tesis, se identifican las siguientes preguntas científicas:

- **¿Qué elementos caracterizan el proceso de Selección de Personal?.**
- **¿Qué métodos de agregación de información se deben utilizar en el proceso de Selección de Personal?.**
- **¿Qué métodos de análisis multicriterios permiten la agregación de información a partir de un ideal definido?.**

-
- **¿Cómo calcular el vector de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios?.**
 - **¿Cómo estructurar un software para apoyar el proceso de selección de Personal?.**

Para lograr el cumplimiento del objetivo propuesto se hace necesario desarrollar las tareas siguientes:

- Caracterización del proceso de Selección de Personal.
- Estudiar los fundamentos para el trabajo con los números difusos.
- Estudio de los métodos utilizados para calcular el vector de pesos asociados al Operador de Pesos Promedio.
- Estudio de los métodos de agregación de información que se utilizan en el proceso de Selección de Personal.
- Estudio de los métodos de análisis multicriterio y particularmente en los que utilizan la definición de un ideal de búsqueda.
- Diseño e implementación de un software que apoye la toma de decisiones en el proceso de Selección de Personal.

En el desarrollo de esta investigación se utilizaron los métodos científicos siguientes:

- Del nivel teórico:

Análisis-Síntesis: Para el estudio de los métodos utilizados en el cálculo del vector de pesos, los métodos de análisis multicriterio, los métodos de Selección de Personal, el diseño y elaboración del software para la Selección de Personal.

Inducción-Deducción y Modelación: Para la elaboración de los métodos de cálculo de los pesos asociados al operador OWA y el diseño del software.

Histórico-Lógico: Para el estudio de los métodos de análisis multicriterio y de Selección de Personal.

- Del nivel empírico:

Entrevista: Para identificar los requerimientos funcionales de la propuesta de software.

Además, se utilizaron los principios y axiomática de la Lógica Matemática, para realizar las demostraciones formales de las diferentes propiedades y teoremas propuestos, referentes a la determinación de los pesos asociados al operador OWA.

La tesis está organizada de la forma siguiente.

Introducción, es donde se describe brevemente la problemática a tratar y se definen las diferentes tareas a desarrollar.

En el capítulo 2, se muestran los conceptos básicos sobre los números difusos, así como las operaciones aritméticas básicas entre ellos y las funciones de pertenencia fundamentales, pues constituyen aspectos esenciales para enfrentar la problemática objeto de estudio.

En el capítulo 3, se realiza un estudio de los métodos de análisis multicriterio más significativos y se propone un método que se caracteriza por, la utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, la definición del ideal de búsqueda para cada criterio, tal que el mismo puede variar entre el máximo y el mínimo, además, de la exclusión de alternativas a partir de un valor dado.

En el capítulo 4, se presenta un estudio del Operador de Pesos Promedio (OWA), así como los diferentes métodos utilizados para calcular el vector de pesos. Como resultado del estudio, se proponen métodos para determinar el vector de pesos verificando las propiedades de los OWA y a través de la formalización matemática se demuestran las diferentes propiedades. Entre estos métodos propuestos se encuentran:

- La clase de funciones lineales [66], [67] , presentando el cálculo de la función lineal a partir de la pendiente o a partir del valor de alfa, los cuales deben pertenecer al intervalo definido.
- La utilización de cuantificadores de preferencia y un orden lineal.
- La utilización de cuantificadores de preferencia y una constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes.
- Los OWAs basados en una escala de razón [18].

En el capítulo 5, se realiza un estudio de la forma organizativa del proceso de Selección de Personal, así como de los métodos utilizados para agregar la información. Finalmente, se propone una estructura organizativa para este proceso, donde la agregación de la información utiliza la propuesta realizada en el capítulo 3.

En el capítulo 6, se describe la propuesta de software (SelPersonal) para la selección de personal, el cual implementa el método presentado en el capítulo 4, y la determinación de los pesos mediante los métodos propuestos.

Finalmente las conclusiones, trabajos futuros y bibliografía.

Capítulo 2

Números difusos.

2.1. Introducción.

La actividad práctica de la humanidad ha sistematizado la necesidad de cuantificar diferentes magnitudes durante los procesos de medición, sin embargo, esto se hace muy complejo y en ocasiones hasta difícil, por ejemplo, si de forma rápida se mira a una persona, no se puede decir con precisión su estatura, pero sí es posible plantear que la estatura de la persona es alta, media o baja.

Los términos antes referidos, en una medición, encierran cierta imprecisión o incertidumbre, donde el límite o frontera entre los mismos, no se puede obtener con exactitud. No obstante, para lograr una mejor representación de dicha información, se han desarrollado determinadas teorías, como es el caso de la Lógica Difusa [141], [82], basándose en la relatividad de lo observado. La misma fue introducida por Lotfi A. Zadeh [141] en 1965, en la Universidad de California en Berkeley.

2.2. Definición.

La concepción asumida por Zadeh, es que el rango de valores de un elemento en el conjunto $[0, 1]$ pueda variar en todo su intervalo (existiendo infinitos valores), y no limitarse de forma estricta a los valores 0 ó 1, lo que es equivalente en la lógica Booleana a Falso o Verdadero [141].

Este modelo realiza una extensión de los principios de los conjuntos tradicionales, donde los elementos pueden pertenecer o no a estos, y en su lugar, se asigna un determinado grado de pertenencia de los elementos al conjunto. Los conjuntos difusos dan un valor cuantitativo

a cada elemento, el cual representa el grado de pertenencia al conjunto.

Definición 2.2.1. *Un conjunto difuso A se define a través de una Función de Pertenencia que hace corresponder los elementos de un dominio o universo de discurso X con elementos en el intervalo $[0, 1]$. La función de pertenencia del conjunto A sobre el universo X , está dada por:*

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

Donde $\forall x \in X$, $\mu_A(x)$ determina el grado de pertenencia del elemento x al conjunto A .

Por tanto, el grado de pertenencia 0 se interpreta como no pertenencia y el 1 como pertenencia total, mientras que los valores intermedios manifiestan una pertenencia gradual, la cual se interpretará en correspondencia con cada aplicación o utilización dada [147]. En este caso cuanto más cerca esté el grado de pertenencia del valor 1, entonces mayor es la pertenencia del objeto al conjunto.

La función de pertenencia asociada a un número difuso puede ser representada gráficamente, lo cual se ilustra en el ejemplo 2.2.1 .

Ejemplo 2.2.1. *Sea el concepto Temperatura en una oficina. En este caso se puede expresar que la temperatura es alta, cuando es mayor o igual que 30°C (ver fig. 2.1), donde su grado de pertenencia es 1; los valores inferiores a 20°C suponemos que la temperatura no es alta, y entre 20°C - 30°C la temperatura tiene un grado de pertenencia entre $[0, 1]$, así para 25°C el grado sería de 0.5.*

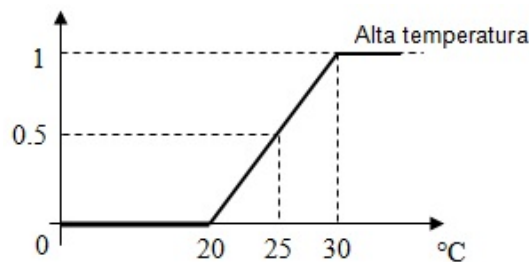


Figura 2.1: Comportamiento gráfico de la variable Temperatura.

Donde:

- En el eje x se representan los $^\circ\text{C}$.
- En el eje y se representan los grados de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$.

De forma general, cualquier función de pertenencia es válida, pues su definición depende del concepto que se desea definir, del contexto y aplicación. Es recomendable utilizar funciones simples, con el fin de reducir los cálculos, pues no se pierde exactitud debido a la naturaleza del término difuso.

2.3. Funciones de pertenencia.

Existen funciones de pertenencia típicas, entre las que se pueden citar:

- *Función Triangular*: Definido por sus límites inferior a y superior b , y el valor modal m , tal que $a < m < b$ (Ver fig. 2.2).

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } x \in (a, m) \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad (2.1)$$

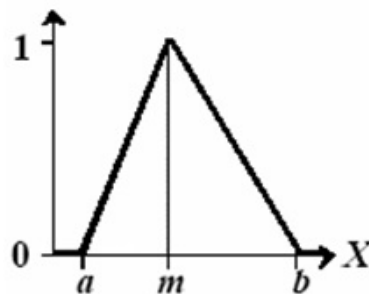


Figura 2.2: Representación gráfica de la función Triangular.

- *Función Gamma*: Definida por su límite inferior a y el valor $k > 0$ (Ver fig. 2.3).

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x > a \end{cases} \quad (2.2)$$

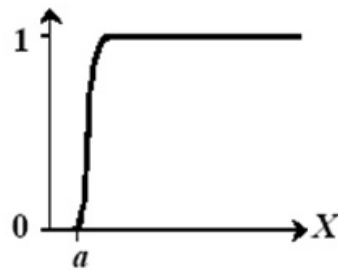


Figura 2.3: Representación gráfica de la función Gamma.

- *Función S*: Definida por sus límites inferior a y superior b , y el valor m , o punto de inflexión tal que $a < m < b$ (Ver fig. 2.4). Un valor típico de $m = \frac{a+b}{2}$.

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{si } x \in (a, m) \\ 1 - 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{si } x \in (m, b) \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad (2.3)$$

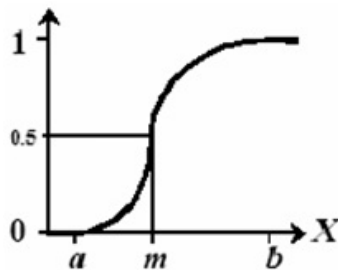


Figura 2.4: Representación gráfica de la función S.

- *Función Gaussiana*: Definida por su valor medio m y el valor $k > 0$ (Ver fig. 2.5).

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2} \quad (2.4)$$

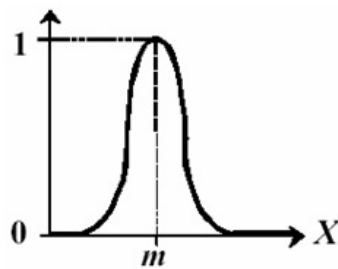


Figura 2.5: Representación gráfica de la función Gaussiana.

- *Función Trapezoidal:* Definida por sus límites inferior a y superior d , donde coinciden estos límites con su soporte o base; y los límites b y c corresponden a la meseta (Ver fig. 2.6).

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \vee x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in (a, b) \\ 1 & \text{si } x \in (b, c) \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } x \in (c, d) \end{cases} \quad (2.5)$$

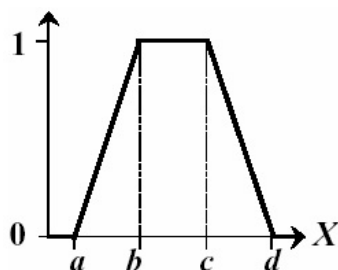


Figura 2.6: Representación gráfica de la función Trapezoidal.

Cada una de estas funciones de pertenencias, entre otras, pueden ser utilizadas en correspondencia con el problema o contexto de trabajo. Las funciones de pertenencias constituyen un elemento fundamental en el trabajo con los conjuntos difusos, de ahí que las diferentes operaciones con dichos conjuntos se definan sobre la base de estas funciones [141].

2.4. Operaciones aritméticas básicas.

Como se ha expresado anteriormente, a cada conjunto difuso se le asocia una función de pertenencia que tiene como imagen el intervalo $[0, 1]$. Por otra parte, los elementos del conjunto estarán definidos en correspondencia con el problema tratado, y sobre estos elementos se establecen determinadas operaciones aritméticas.

A continuación, se exponen las operaciones aritméticas para un conjunto difusos, tal que sus elementos están formados por números difusos triangulares [64].

Definición 2.4.1. Sean T_1 y T_2 , dos números difusos triangulares, definidos por las tripletas (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) , respectivamente, entonces las operaciones aritméticas están dada por:

- Adición,

$$T_1 \oplus T_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \quad (2.6)$$

- Sustracción,

$$T_1 \ominus T_2 = T_1 + (-T_2), \text{ donde } -T_2 = (-c_2, -b_2, -a_2), \text{ por tanto}$$

$$T_1 \ominus T_2 = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2) \quad (2.7)$$

- Multiplicación,

$$T_1 \otimes T_2 = (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2) \quad (2.8)$$

- División,

$$T_1 \div T_2 = ((a_1, b_1, c_1) \cdot (1/c_2, 1/b_2, 1/a_2)) \quad (2.9)$$

- Raíz cuadra,

$$\sqrt{T_1} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}, \sqrt{c_1}) \quad (2.10)$$

2.5. Variables lingüísticas.

Muchas aplicaciones prácticas para su solución requieren describir el estado de los objetos, fenómenos o procesos, y se hace necesario establecer una determinada representación para que sea más útil y apropiado su análisis. Para este caso se utilizan las variables lingüísticas, tal que, su valor establece la descripción.

Definición 2.5.1. Es un conjunto de 5 elementos: $(N, U, T(N), G, M)$, donde [143]:

- N es el nombre de la variable.
- U Universo de discurso.
- $T(N)$ es el conjunto de términos o etiquetas que puede tomar N .
- G es una gramática para generar las etiquetas de $T(N)$.
- M es una regla semántica que asocia cada elemento de $T(N)$ con un conjunto difuso en U de entre todos los posibles:

$$M : T(N) \otimes F(U)$$

Ejemplo 2.5.1. Sea,

- $N = Temperatura$
- $U = temperatura \text{ en } ^\circ C$
- $T(U) = \{Alta, Media, Baja\}$
- $G =$ regla para generar las etiquetas.
- $M =$ las reglas que asocian a cada elemento de $T(U)$ su significado.

En las variables lingüísticas sus valores son palabras o sentencias (no números) correspondientes a un lenguaje natural o artificial, por lo tanto admite que los mismos sean Etiquetas Lingüísticas, las cuales están formadas como una secuencia de los símbolos terminales de la gramática, por ejemplo: Muy Alto, No muy Alto, etc. Primeramente se definen los conjuntos difusos referidos a los términos primarios y posteriormente determinar los de términos compuestos [142].

2.6. Etiquetas lingüísticas.

La utilización de Etiquetas Lingüísticas facilita la comprensión semántica del estado de un problema dado. No obstante, se requiere de una metodología para operar con ellas. Al respecto se han desarrollado diferentes enfoques [78], entre los que se encuentran:

- El modelo lingüístico basado en funciones de pertenencia.
Este modelo representa la información lingüística en correspondencia con la definición 2.5.1 (ver fig. 2.7), y realiza la operatoria de cálculos mediante la función de pertenencia de los términos lingüísticos, utilizando el principio de extensión [64].

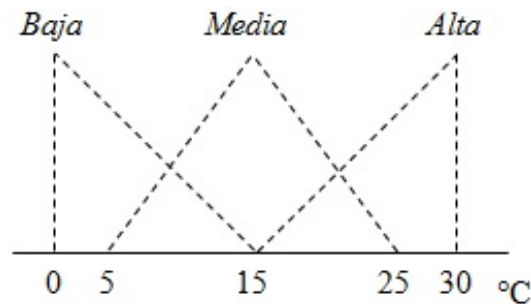


Figura 2.7: Conjunto de etiquetas con su significado sintáctico y semántico.

La aritmética de cálculo utilizada, se obtiene a partir de una función \tilde{F} que relaciona las n etiquetas del conjunto de términos $T(N)$, con un número difuso $F(\mathfrak{R})$; y por lo general, no coincide con alguna de las etiquetas del conjunto $T(N)$.

- El modelo lingüístico basado en conjuntos difusos tipo-2.

La evaluación lingüística de este modelo, utiliza conjuntos difusos tipo-2, justificando su uso debido a:

- La representación de tipo-1, que es un enfoque reduccionista, y para eliminarlo en la propagación de los valores de pertenencia, se realiza a través de técnicas de ajuste de curva o promedio; por tanto, oculta la incertidumbre dentro de la propagación de los valores de pertenencia [109].
- Además, Mendel [80] considera que las palabras tienen diferentes significados para diversas personas, por tanto no es seguro. Luego, es necesario un modelo de conjunto difuso para una palabra, tal que, sea capaz de capturar su incertidumbre; por tanto, debe ser utilizado un intervalo de conjunto difuso tipo-2 como modelo de conjunto difuso de una palabra.

La operatoria de cálculo es descrita por Dongrui [32] y Zhou et al. [146], mediante el promedio ponderado lingüístico y el operador OWA lingüístico, basados en una representación tipo-2. Los cuales proporcionan pérdida de información [78].

- El modelo lingüístico simbólico basado en una escala ordinal.

Este modelo se caracteriza por la utilización de un proceso de cálculo simple y permite un elevado nivel de interpretación. Bajo esta concepción se encuentran las propuestas siguientes:

- La planteada por Yager [124], sobre la base de una escala ordinal y los operadores máximo-mínimo. El mismo representa la información en correspondencia con un

enfoque lingüístico difuso (ver fig. 2.7), y establece un orden lineal a las etiquetas del conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_g\}$, tal que, $s_i \geq s_j \Leftrightarrow i \geq j$ y $i, j = 1, 2, \dots, g$; y este orden lineal se utiliza para realizar los cálculos correspondientes, mediante los operadores:

- $Max(s_i, s_j) = S_i$, si $s_i \geq s_j$
- $Min(s_i, s_j) = S_i$, si $s_i \leq s_j$
- $Neg(s_i) = s_{g-i+1}$, donde g es el cardinal de S .

Asociado a este modelo se han propuesto otros operadores [129], [14], [133].

- La propuesta de Delgado et al. [29], sobre la base de combinaciones convexas.

Esta concepción utiliza un operador de agregación mediante el uso de combinaciones convexas de etiquetas lingüísticas, tal que actúan de forma directa sobre el índice de las etiquetas $\{0, \dots, g\}$ del conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$, donde se obtiene un valor real en el intervalo de granularidad $[0, g]$ del conjunto S .

Por lo general, en este modelo se considera que el cardinal del conjunto S es impar y las etiquetas lingüísticas se organizan de forma simétrica alrededor de un término medio.

En la operatoria de trabajo con este modelo, se hace necesario utilizar una función de aproximación $app(\cdot)$ para obtener los términos del conjunto S , como se expresa en la relación 2.11.

$$S^m \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{app(\cdot)} \{0, \dots, g\} \rightarrow S \quad (2.11)$$

Entre los operadores de agregación basados en este modelo lingüístico se encuentran los descritos por: Herrera et al. [50], Herrera y Herrera-Viedma [48], Peláez y Doña [93] y Herrera-Viedma et al. [53].

- La planteada por Xu [120], tal que representa la información a través de un conjunto de términos discretos $S = \left\{s_{-\frac{g}{2}}, \dots, s_0, \dots, s_{\frac{g}{2}}\right\}$, donde $g + 1$ es el cardinal de S y este se extiende al conjunto de términos continuos $\bar{S} = \{s_\alpha : \alpha \in [-t, t]\}$, tal que, t es un entero positivo suficientemente grande ($t \gg \frac{g}{2}$). Para realizar el proceso de cálculo correspondiente utiliza las operaciones siguientes [119], [121]:

- $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha\mu}$
- $(s_\alpha)^{\mu_1} \otimes (s_\alpha)^{\mu_2} = (s_\alpha)^{\mu_1 + \mu_2}$
- $(s_\alpha \otimes s_\beta)^\mu = (s_\alpha)^\mu \otimes (s_\beta)^\mu$
- $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$
- $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$

- $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$
- $(\mu_1 + \mu_2) s_\alpha = \mu_1 s_\alpha \oplus \mu_2 s_\alpha$
- $\mu (s_\alpha \oplus s_\beta) = \mu s_\alpha \oplus \mu s_\beta$

- El modelo lingüístico con 2-tupla, mediante la extensión del uso de subíndice [52].

Este modelo se basa en el concepto de la traslación simbólica, por lo que representa la información lingüística mediante un par de valores, denominado 2-tupla, a través de (s_i, α) , donde s_i es el término lingüístico y α es el valor numérico que representa la traslación del símbolo; y su relación se establece en la definición (2.6.1).

Definición 2.6.1. [51] *Sea $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ y $\beta \in [0, g]$ un conjunto de términos lingüísticos y el resultado de la operación de agresión de un símbolo, respectivamente. La 2-tupla asociada con β se obtiene por la función siguiente:*

$$\begin{aligned} \Delta : [0, g] &\longrightarrow S \times [-0.5, 0.5) \\ \Delta(\beta) &= (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde la función *round* asigna a β un valor entero, e $i \in \{0, 1, \dots, g\}$.

Además, la función inversa de Δ , está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} : [-0.5, 0.5) &\longrightarrow [0, g] \\ \Delta^{-1}(s_i, \alpha) &= i + \alpha \end{aligned} \quad (2.13)$$

Luego, la 2-tupla $S \times [-0.5, 0.5)$ se corresponde con un valor numérico del intervalo $[0, g]$.

El enfoque de cálculo de este modelo se basa en la utilización de las funciones Δ y Δ^{-1} , donde algunos operadores clásicos utilizados son la media aritmética, el operador OWA, el operador de agregación definido por Li et al. [71], entre otros.

- Modelo lingüístico 2-tupla proporcional.

Este modelo fue introducido por Wang y Hao [114], basando su principio en el concepto de la proporción simbólica. Para ello se establecen las definiciones siguientes.

Definición 2.6.2. [114] *Sea $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos ordinales, $I = [0, 1]$, tal que,*

$$IS \equiv I \times S = \{(\alpha, s_i) : \alpha \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, g\} \quad (2.14)$$

Donde S es un conjunto ordenado formado por $g + 1$ términos ordinales $\{s_0, s_1, \dots, s_g\}$. Dado un par (s_i, s_{i+1}) de términos consecutivos de S , dos elementos cualquiera (α, s_i) y (β, s_{i+1}) de IS , se denominan par de proporción simbólica y α, β son proporciones simbólicas del par (s_i, s_{i+1}) si $\alpha + \beta = 1$. Un par de proporción simbólica (α, s_i) , $(\alpha - 1, s_{i+1})$, se denotan por $(\alpha s_{i+1}, (\alpha - 1) s_{i+1})$ y el conjunto de todos los pares de proporción simbólica por \bar{S} , tal que,

$$\bar{S} = \{(\alpha s_i, (\alpha - 1) s_{i+1}) : \alpha \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, g\} \quad (2.15)$$

Definición 2.6.3. [114] Sea $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos ordinales y \bar{S} el conjunto de 2-tuplas proporciones ordinales generado por S . La función de índice de posición de 2-tuplas ordinales, se define por la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi : \bar{S} &\longrightarrow [0, g] \\ \pi(\alpha s_{i+1}, (\alpha - 1) s_{i+1}) &= i + (1 - \alpha) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde $i = \{0, 1, \dots, g\}$, $\alpha \in [0, 1]$

Como se muestra la función π , permite obtener el índice de posición del conjunto de etiquetas a partir de una 2-tupla y la misma tiene como función inversa a:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : [0, g] &\longrightarrow \bar{S} \\ \pi^{-1}(x) &= (\alpha s_{i+1}, (\alpha - 1) s_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Las funciones 2.16 y 2.17 facilitan las operaciones de cálculo con información lingüística representadas bajo este modelo.

- Además, se ha desarrollado otras formas de representación lingüísticas mediante el modelo lingüístico con 2-tupla, como es el caso de la propuesta realizada por Dong et al. [31] y la presentada por Li [70].

De forma general, se puede considerar que el empleo de términos Lingüísticas es de gran utilidad en la solución de problemas prácticos, lo cual se manifiesta en:

- Contribuye a la caracterización de fenómenos que están mal definidos o son de gran complejidad su definición o ambas inclusive [143].
- Es una variante que permite trasladar descripciones lingüísticas a representaciones numéricas, facilitando el tratamiento automático. Relaciona procesos simbólicos a procesos numéricos.

- Una etiqueta incluye muchos valores posibles, por lo que es una forma de comprimir información [145], lo cual recibe el nombre de granulación.
- A través del principio de extensión, varias herramientas existentes, pueden ser generalizadas en el empleo de este tipo de variable.

2.7. Conclusiones.

El desarrollo de los números difusos constituye una teoría valiosa para enfrentar una gran diversidad de problemas que se manifiestan en un entorno donde existe imprecisión o vaguedad de la información. Por tal motivo en este capítulo se han abordado los conceptos básicos de los números difusos, así como las propiedades más significativas, pues los mismos servirán de base a diferentes aspectos que se tratarán en capítulos siguientes.

Capítulo 3

Métodos de Análisis Multicriterio

3.1. Introducción.

Es muy común enfrentarse a situaciones donde se tiene un conjunto de alternativas y se debe elegir la mejor entre ellas; en este caso, se está en presencia de un problema de toma de decisiones. Este tipo de problemática, tiene como finalidad la selección de la mejor solución ante un conjunto de posibles alternativas, utilizando para ello determinados juicios y/o la verificación del cumplimiento de requisitos en las alternativas.

La toma de decisiones es una situación de gran complejidad, que se caracteriza por [69]:

- Observar puntos de vistas diferentes.
- La existencia de incertidumbre.
- La participación de distintas personas.
- La existencia de elementos de fácil y de compleja valoración.

Además, la propia naturaleza de la toma de decisiones, hace que las personas responsables de la selección de una u otra alternativa, se enfrenten a situaciones donde se genera tensión psicológica [30], por el nivel de repercusión que manifiesta la decisión tomada desde el punto de vista tanto individual como social.

Al tomar una decisión no se debe afirmar que la misma es buena porque manifiesta resultados favorables al transcurrir el tiempo, pues en la mayoría de la veces es casi imposible comparar los resultados con otra decisión diferente. En este caso, la calificación de la decisión se ha centrado en el resultado final y este puede estar influido por diversos factores. Por tal motivo, es factible tener en cuenta el proceso a través del cual se adopta la decisión final y

de esta forma poder afirmar que la alternativa seleccionada es o no la mejor solución posible. Al respecto León [69] considera que una buena decisión tiene las características siguientes:

- Es una decisión donde se tiene definido un objetivo final.
- Se reúne toda la información relevante al respecto.
- Se tienen en cuenta las preferencias del decisor.

Luego, a partir de toda la información disponible y su evaluación en el contexto del problema, se determina la mejor solución posible.

3.2. Toma de Decisión en Grupo.

La toma de decisiones se puede realizar con la participación de varios decisores, entonces dicho proceso se denomina *Toma de Decisión en Grupo*, el cual se caracteriza por la selección de la alternativa más preferida o aceptada por el grupo de decisores.

El proceso de decisión en grupo se puede clasificar en correspondencia con:

- *La importancia de los decisores*: Depende de la asignación de importancia a los decisores, la cual puede considerar a los decisores con la misma importancia o diferenciarla.
- *El momento en que se realiza la agregación*: Depende de la agregación de información, si se realiza sobre:
 - Los juicios emitidos por los decisores para sintetizar las prioridades de las alternativas.
 - Las prioridades de las alternativas para cada decisor.

Como consecuencia del desarrollo social cada día aumenta la importancia de la toma de decisión en grupo, lo cual ha motivado a varios investigadores a estudiar este proceso con la finalidad de establecer condiciones éticas por el bien colectivo [8], [95], [112]. Al respecto, Arrow [8] propone un grupo de axiomas para los métodos de decisión en grupo, tales como:

- *Dominio universal*: El método debe dar preferencias de grupo para cualquier conjunto de preferencias individuales.
- *Pareto óptimo*: Para dos alternativas A_i y A_j , si todos los decisores prefieren la alternativa A_i , entonces la decisión del grupo debe ser a favor de A_i .

- *Independencia de alternativas irrelevantes*: El orden de las alternativas es irrelevante al incluir o eliminar alternativas del conjunto inicial.
- *No dictatorial*: No hay decisores tal que sus preferencias sean automáticamente las del grupo, independientemente de las preferencias del resto de los decisores.
- *Reconocimiento*: Las preferencias del grupo de decisores son tomadas después de considerar todas las preferencias de los decisores.

De forma general, el proceso de toma de decisiones se realiza bajo el paradigma del decisor o teniendo como referente decisiones tomadas que condujeron a buenos resultados. Tal forma de proceder puede afectar la efectividad de la decisión a tomar por el elevado nivel de subjetividad que encierra este proceso, de ahí la necesidad del empleo de herramientas que apoyen al decisor.

El Análisis de Decisiones Multicriterio es una herramienta de gran utilidad que ayuda al decisor durante el proceso de toma de decisión, pues los métodos que lo conforman permiten abordar el problema de forma ordenada, facilitando el consenso de la decisión final y el tratamiento de la gran cantidad de información, que por lo general se encuentra en diferentes magnitudes de medida y significados.

3.3. Clasificación de los Métodos de Decisión Multicriterio.

Se han desarrollado diversos métodos para el análisis multicriterio, y cada uno de ellos se caracteriza por la concepción asumida en la solución de la problemática, por lo que se pueden distinguir tres tendencias básicas.

- La Escuela Americana.

La misma tiene como concepción que el decisor maximiza una función de utilidad para de esta forma obtener la agregación de la información de los diferentes criterios. Entre los ejemplos de estos métodos se encuentra el de la suma ponderada, el Procesos Analítico Jerárquico (AHP) [103], el método SMART [34].

- La Escuela Europea.

Representada fundamentalmente por la Escuela Francesa, que desarrolla una metodología de Ayuda a la decisión Multicriterio a partir de las dificultades que generaba la construcción de la función de valor, expuesta por la Escuela Americana. Entre los principales métodos que representan a esta Escuela se encuentran los métodos ELECTRE

[97] y PROMETHEE [13], con sus respectivas variantes, donde estos métodos utilizan como principio básico una relación de sobre-clasificación entre alternativas.

- Otras tendencias.

Otros métodos que utilizan concepciones diferentes, tales como los métodos TOPSIS [139] y VIKOR [87], que tienen como principio la utilización de la distancia a la solución ideal y la no ideal para ordenar las alternativas. Además, de los métodos ZAPROS [68], el método lexicográfico [38], entre otros.

Antes de iniciar la descripción de los principales métodos de análisis multicriterio, primero se requiere de la definición de determinados conceptos que servirán de base para el desarrollo del epígrafe.

3.4. Conceptos básicos.

Entre los conceptos más utilizados en los métodos de análisis multicriterio, se encuentra los expresados a continuación.

Definición 3.4.1. *Decisor es el ente responsable de la selección de una posible alternativa.*

Definición 3.4.2. *Las alternativas son las posibles acciones o soluciones a seleccionar por parte del decisor.*

El conjunto de alternativas se designará por $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, donde m representa la cantidad de alternativas posibles.

Definición 3.4.3. *El Criterio o atributo es la característica, parámetro o punto de referencia que se utiliza para describir las cualidades de las alternativas.*

El conjunto de criterios a utilizar en la decisión se designará por $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, donde n representa la cantidad de criterios.

Con frecuencia, los métodos de análisis multicriterio establecen un nivel de importancia o relevancia entre los criterios para diferenciarlos entre sí, y para ello asocian pesos a cada uno de los criterios.

Definición 3.4.4. *Los pesos son las medidas que establecen la importancia relativa que tienen los criterios para el decisor.*

Los pesos se denotan a través de un vector de la forma $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, donde n representa la cantidad de criterios, por lo que se asocia al criterio C_j el peso w_j , y $j = 1, 2, \dots, n$.

Después de identificadas las alternativas y los criterios a utilizar, se requiere efectuar la evaluación de las alternativas para cada uno de los criterios definidos, conformando de esta forma la matriz de decisión.

Definición 3.4.5. La matriz de valoración no es más que la evaluación de todas las alternativas para cada uno de los criterios, tal que sus elementos x_{ij} representan la evaluación o juicio de la alternativa A_i respecto al criterio C_j .

La evaluación o juicio x_{ij} puede ser de tipo numérica o lingüística.

Finalmente, la relación entre los diferentes conceptos se expresa en la figura 3.1.

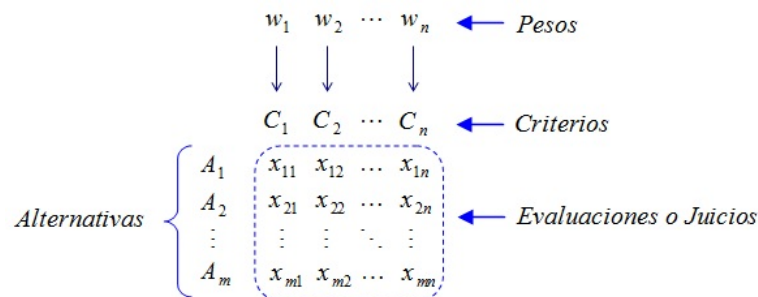


Figura 3.1: Relación de los diferentes conceptos en los Métodos de Análisis Multicriterio.

3.5. Características de los principales Métodos de Decisión Multicriterio.

Después de expresados algunos conceptos que de forma general están presentes en los problemas de análisis multicriterio, se pueden referir algunos de los métodos más utilizados de forma práctica para enfrentar este tipo de problemática. Entre los diferentes métodos de análisis multicriterio desarrollados para apoyar la toma de decisiones, se pueden citar:

3.5.1. El Proceso Analítico Jerárquico (AHP)

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP, Analytic Hierarchy Process), fue desarrollado por Thomas Saaty [103] donde su principio básico consiste en subdividir en subproblemas a través de una estructura jerárquica, lo cual ayuda a los usuarios para representar un problema en

una estructura de árbol, además permite tener una visión más clara del problema a tratar. La finalidad de este método es identificar las alternativas preferidas y su clasificación cuando sean valorados todos los criterios a utilizar en la decisión final.

Este método (AHP) es muy utilizado en problemas reales, donde una de las ventajas principales radica en la facilidad que brinda para el manejo de criterios múltiples, además de su fácil comprensión. También opera con datos cualitativos y cuantitativos. Su concepción de trabajo es la descomposición del problema, la comparación por pares según su importancia relativa, para de esta forma generar el vector de prioridad [55], [76].

El método AHP se puede describir en los pasos siguientes [103], [76] :

Paso.1 Definición de los criterios de decisión. Donde la estructura jerárquica está dada por los niveles siguientes: Nodo raíz (es la meta), niveles intermedios (contiene criterios y sub-criterios en los niveles subsiguientes) y el último nivel representa las alternativas (ver fig.3.2).

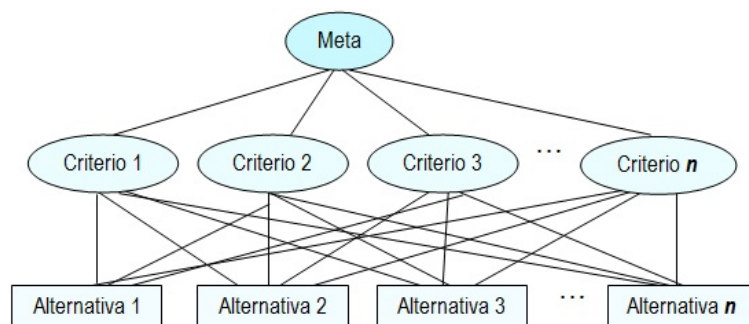


Figura 3.2: Representación del modelo AHP.

Paso.2 Determinar las matrices de juicios de comparación de los criterios, sub-criterios y alternativas, en función de su importancia desde su correspondiente nivel más alto hasta el más bajo. Para ello, AHP realiza la comparación por pares simples para obtener pesos, de esta forma los analistas se centran solo en dos factores.

Para conformar una matriz de comparación a_{ij} , se utiliza la escala de valores (ver 3.1) propuesta por Thomas Saaty [103]. Dicha matriz cumple las propiedades [105], [104], [106] siguientes:

- Todos los elementos a_{ij} son positivos ($a_{ij} > 0$)
- $\forall a_{ij}$, con $i, j = 1, 2, \dots, n$, se cumple que $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$.
- Consistencia: $a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}}$, $\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$

Tabla 3.1: Escala de la importancia relativa al comparar por parejas.

Descripción	Variable	Valor
El criterio C_j es igual de preferido que C_k	Igual	1
El criterio C_j es moderadamente preferido que C_k	Moderada	3
El criterio C_j es fuertemente preferido que C_k	Fuerte	5
Es muy fuerte la preferencia del criterio C_j sobre C_k	Muy fuerte	7
Es sumamente fuerte la preferencia del criterio C_j sobre C_k	Sumamente fuerte	9
<i>Nota:</i> Los valores 2, 4, 6 y 8 son utilizados para indicar el valor medio entre sus correspondientes juicios adyacentes.		

Paso.3 Calcular los vectores propios (eigenvector) de las diferentes matrices de comparación y efectuar las operaciones finales para obtener las alternativas ordenadas.

La utilización de este método permite obtener un ranking de las alternativas objeto de análisis. Además, al aplicarlo a los niveles intermedios del árbol, correspondiente a los criterios, permite obtener la importancia relativa a cada uno, que viene representada a través de los pesos.

El método AHP es muy utilizado como modelo de decisión, por la forma en que trata los criterios múltiples, por su fácil comprensión y operatoria con datos cualitativos y cuantitativos. Además no utiliza cálculos matemáticos complejos, pues solo involucra la descomposición, comparación por pares, y finalmente la obtención de los vectores de prioridad y por último la síntesis.

Independientemente de las ventajas que posee este método, no refleja la forma del pensamiento humano, por lo que se hizo necesario realizar una extensión del mismo con el empleo de la teoría de los conjuntos difusos, registrándose en la literatura como Proceso Jerárquico Analítico Difuso (FAHP), y así resolver problemas jerárquicos difusos [60], [41].

La concepción del método FAHP permite conformar expresiones más próximas al lenguaje natural, lo cual se utilizará en la conformación de la matriz de juicios y comparación por pares. Dicha matriz estará formada por números difusos, que se modificaran según la opinión del decisor.

Al efectuar el procedimiento de cálculo de las matrices de juicios, se obtienen los correspondientes vectores de pesos, donde la aritmética con estos números difusos se fundamenta en los principios de la teoría de los conjuntos difusos [76], [41].

3.5.2. ORESTE

El método ORESTE (Organisation, Rangement Et Synthèse de données relatiOnnElles) fue desarrollado por M. Roubens [96]. Este método tiene como objetivo encontrar una estructura de preferencia global sobre el conjunto de alternativas A , que refleje los juicios de las alternativas para cada criterio y la estructura de preferencia entre los mismos [91].

El método ORESTE, igual que otros métodos, utiliza la concepción de establecer una importancia relativa entre los criterios para diferenciarlos entre sí e incide en el proceso de agregación de información. No obstante, la importancia relativa entre los criterios, no se establece mediante la asignación de pesos a los mismos, sino a través de un orden débil mediante la relación $S = (I \circ P)$ que es completa y transitiva, tal que, P (preferencia) es antisimétrica e I (indiferencia) es simétrica.

Además, la relación S , también se utiliza para establecer el orden débil a partir de cada criterio C_j sobre el conjunto de alternativas A .

Ejemplo 3.5.1. Sea el conjunto de alternativas $A = \{a, b, c, d, e\}$, y los criterios para su valoración son $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ [91]. Sea la importancia relativa entre los criterios por el orden débil $C_1 I C_2 P C_3 P C_4 I C_5$; y para cada criterio C_j , ($j = 1, 2, 3, 4, 5$), el orden débil sobre el conjunto de criterio A , dado por:

$$C_1 : a P_1 b I_1 c P_1 d P_1 e$$

$$C_2 : b P_2 a P_2 d I_2 e P_2 c$$

$$C_3 : c P_3 d P_3 a P_3 e P_3 b$$

$$C_4 : d P_4 e P_4 b P_4 c P_4 a$$

$$C_5 : b P_5 a P_5 d I_5 e P_5 c$$

Después de establecer la relación S en el conjunto de criterios, así como para cada criterio, la relación del conjunto de alternativas de A ; se realizan los pasos siguientes [96]:

1. Proyección. Para ello se construye la *matriz de posición relativa*, a partir de las relaciones definidas para los criterios y las alternativas (ver fig. 3.3).

Como se observa en la figura 3.3, en la esquina superior izquierda de la *matriz de posición relativa* se ubican la mejor solución y en su extremo inferior derecho la peor. Se establece la proyección de esta matriz, que inicialmente se puede asumir la diagonal principal, aunque puede ser: ortogonal lineal, lineal oblicua o no lineal.

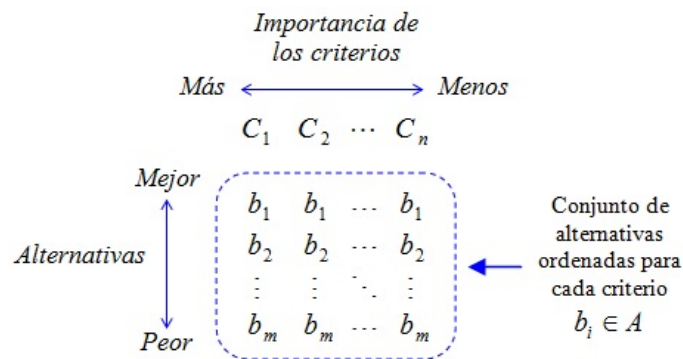


Figura 3.3: Estructura de la matriz de posición relativa.

Luego, se considera un origen arbitrario con la finalidad de establecer la distancia $D_j(A_i)$, referida a la proyección de la alternativa A_i en el criterio C_j , respecto al origen; y se define de la forma siguiente:

$$\text{Si } A_l P_j A_k \text{ entonces } D_j(A_l) < D_j(A_k) \quad (3.1)$$

2. Efectuar los cálculos. Utilizando la distancia $D_j(A_i)$ se calcula la distancia de los elementos de la proyección, a través de:

$$D_j(A_i) = \alpha \cdot r(C_j) + (1 - \alpha) \cdot rc_j(A_i) \quad (3.2)$$

Donde:

- $0 \leq \alpha \leq 1$
- La puntuación media de los criterios $r(C_j)$ y de las alternativas $rc_j(A_i)$, se calcula a través de la formulación planteada por Besson [10].

3. Agregación. Para cada alternativa se suma la puntuación total de los criterios correspondientes.

3.5.3. ELECTRE

El método ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la Réalité), fue propuesto por Benayoun, Roy y Sussman en 1966 [97], el cual se ha destacado por su utilización práctica desde finales de la década de los años 60. El principio básico que sigue el mismo consiste en dividir las alternativas en dos subconjuntos, las más y las menos favorables, utilizando una

relación de sobreclasificación mediante la comparación por pares, calculando para cada par de alternativas el índice de concordancia y de discordancia de forma simultánea.

Este método organiza su proceso de la forma siguiente:

Paso.1 En esta etapa se conforma la matriz de decisión R y se define el vector de pesos W .

La matriz de decisión tiene la forma siguiente:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde:

- Los r_{ij} representan el resultado de la evaluación de cada alternativa A_i , $i = 1, \dots, m$ para el criterio C_j , $j = 1, \dots, n$.

En el caso del vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, se utiliza para indicar la importancia de cada criterio C_j , $j = 1, \dots, n$. Además, los valores del vector de pesos deben pertenecer al intervalo unitario y su suma ser igual a 1.

Paso.2 Se normaliza la matriz de decisión inicial (R^*). Para esta operación se puede utilizar cualquier método de normalización.

Paso.3 Se pondera la matriz de decisión normalizada con los pesos w_j , $j = 1, \dots, n$, obteniéndose una matriz con la influencia de los pesos definidos. Esta operación consiste en que cada columna de la matriz R^* se multiplica por su correspondiente peso, resultando:

$$R_P^* = R \cdot W = \begin{pmatrix} r_{11}^* \cdot w_1 & r_{12}^* \cdot w_2 & \cdots & r_{1n}^* \cdot w_n \\ r_{21}^* \cdot w_1 & r_{22}^* \cdot w_2 & \cdots & r_{2n}^* \cdot w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}^* \cdot w_1 & r_{m2}^* \cdot w_2 & \cdots & r_{mn}^* \cdot w_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Paso.4 Se calcula la matriz del índice de concordancia IC . La misma es una matriz de orden $m \times m$ donde sus elementos expresan la cuantificación de los criterios con que una alternativa es preferida sobre otra, al realizar una comparación por pares. Luego el índice de concordancia en el proceso de comparación se obtienen mediante la fórmula:

$$ic(A_l, A_k) = \sum_{j \in Y} w_j \quad (3.4)$$

Donde el conjunto Y está formado por todos los subíndices relativos a los criterios para los cuales la alternativa A_l es mejor que la alternativa A_k . En los casos donde las alternativas tienen la misma preferencia (o están empatadas) el peso correspondiente se divide entre las dos.

En otras palabras esta expresión no es más que la suma de los pesos asociados a los criterios para los cuales la alternativa A_l es mejor que la alternativa A_k o las alternativas tienen la misma preferencia.

Paso.5 Calcular la matriz del índice de discordancia ID . Al igual que para IC es una matriz de orden $m \times m$, que se obtiene a partir de la matriz R_P^* y los elementos de la misma expresan la cuantificación de los criterios con que una alternativa es dominada sobre otra, al realizar una comparación por pares. Luego el índice de discordancia en el proceso de comparación se obtienen mediante la fórmula:

$$id(A_l, A_k) = \frac{\max_{j \in X} |r_{P_l j}^* - r_{P_k j}^*|}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} |r_{P_l j}^* - r_{P_k j}^*|} \quad (3.5)$$

Donde el conjunto X está formado por todos los subíndices de los criterios para los cuales la alternativa A_l está dominada por la alternativa A_k .

Paso.6 Se fijan los umbrales o niveles de exigencia: un umbral mínimo UC_{\min} para el índice de concordancia, y un umbral máximo UD_{\max} para el índice de discordancia.

Paso.7 Se determina la matriz de dominancia concordante DC . Para obtener dicha matriz (DC), se parte de la matriz de índice de concordancia IC y se compara cada elemento de la misma con el umbral mínimo definido UC_{\min} para efectuar la asignación del valor correspondiente de los elementos de la matriz DC , utilizando en este caso la función siguiente:

$$dc_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ic_{lk} > UC_{\min} \\ 0 & \text{si } ic_{lk} \leq UC_{\min} \end{cases} \quad (3.6)$$

Paso.8 Se determina la matriz de dominancia discordante DD . Para obtener dicha matriz (DD), se parte de la matriz de índice de discordancia ID y se compara cada elemento de la misma con el umbral máximo definido UD_{\max} para efectuar la asignación del valor correspondiente de los elementos de la matriz DD , utilizando en este caso la función siguiente:

$$dd_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{si } id_{lk} < UD_{\text{máx}} \\ 0 & \text{si } id_{lk} \geq UD_{\text{máx}} \end{cases} \quad (3.7)$$

Paso.9 Se determina la matriz de dominancia agregada DA (concordante-discordante), donde los elementos de la misma se obtienen a partir de los elementos homólogos de las matrices DC y DD , a través de la función:

$$da_{lk} = dc_{lk} \cdot dd_{lk} \quad (3.8)$$

Paso.10 Finalmente se interpreta los valores de la matriz de dominancia agregada DA , tal que, si el elemento $da_{lk} = 1$, significa que la alternativa A_l es mejor que la alternativa A_k , para un número importante de los criterios utilizados, y de esta forma se conforma el núcleo del conjunto de alternativas.

Además, los valores obtenidos en la matriz de dominancia agregada DA , se pueden representar gráficamente mediante un grafo orientado, obteniéndose una ordenación parcial de preferencia de las alternativas consideradas.

Sobre la base del método ELECTRE, se desarrollaron otras variantes tales como: ELECTRE II [99], donde se distinguen dos tipos de sobre-clasificación la fuerte y la débil, conformando los grafos correspondientes. ELECTRE III [98], mantiene como finalidad ordenar las alternativas, e introduce conceptos de los conjuntos difusos; en este caso para cada criterio utilizado en el proceso establece los umbrales de indiferencia y preferencia estricta. ELECTRE IV [101], mantiene como finalidad ordenar las alternativas, pero en este caso no asocia pesos a los criterios, pues utiliza una secuencia de relaciones de superación anidadas que se construyen de forma paramétrica. ELECTRE IS [102], el mismo es una adaptación del ELECTRE I a los principios de la teoría de la lógica difusa, donde su finalidad es la selección de la mejor alternativa. La última variante registrada en la literatura ELECTRE TRI [140], [100], que fundamenta su concepción bajo los principios de la lógica difusa.

3.5.4. PROMETHEE

El método de análisis multicriterio PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations) fue desarrollado por J.P. Brans, P. Vincke y B. Mareschal, [13]. El mismo utiliza la concepción referente a una relación de sobre-clasificación entre alternativas, realizando una comparación por pares de las mismas, para identificar la mejor. Este método se estructura de la forma siguiente:

Igual que los demás métodos de análisis multicriterio, se parte de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de m alternativas y del conjunto de criterios $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Bajo estas condiciones se conforma la matriz de decisión R de dimensión $m \times n$.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde los elementos r_{ij} representan la evaluación de la alternativa para el criterio C_j . Esta relación también se puede denotar de la forma $C_j(a_i) = r_{ij}$.

Paso.1 Para cada criterio C_j se establece la función de preferencia generalizada $P_j(d)$.

La función de preferencia generalizada $P_j(d)$, tiene como finalidad representar el tipo de relación que se establece entre dos alternativas, por lo tanto el decisor debe asignar una función de preferencia generalizada a cada criterio y ésta debe de estar en correspondencia con la caracterización del criterio a partir del problema planteado. Estas funciones de preferencia generalizada pueden depender de los parámetros siguientes:

- q establece el límite de indiferencia.
- p establece el límite de preferencia estricta.
- s establece un valor intermedio entre q y p .

La propuesta de funciones de preferencia generalizadas realizada por los autores, se describen a continuación:

- Criterio Usual, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ 1 & \text{si } d > 0 \end{cases}$$

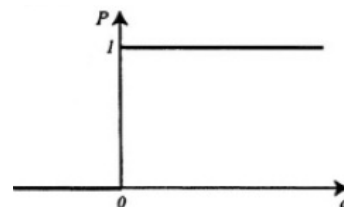


Gráfico de la función.

- Cuasi Criterio, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq q \\ 1 & \text{si } d > q \end{cases}$$

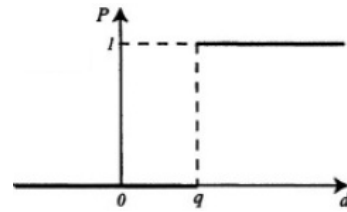


Gráfico de la función.

- Criterio de Preferencia Lineal, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ \frac{d}{p} & \text{si } 0 < d \leq p \\ 1 & \text{si } d > p \end{cases}$$

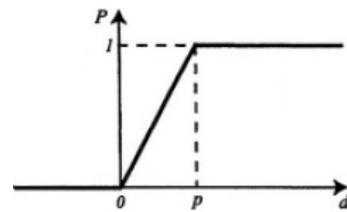


Gráfico de la función.

- Criterio por Niveles, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq q \\ \frac{1}{2} & \text{si } q < d \leq p \\ 1 & \text{si } d > p \end{cases}$$

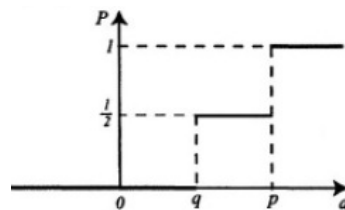


Gráfico de la función.

- Criterio con área de Preferencia e Indiferencia Lineal, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q} & \text{si } q < d \leq p \\ 1 & \text{si } d > p \end{cases}$$

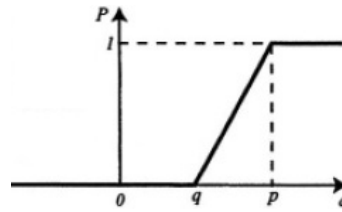


Gráfico de la función.

- Criterio Gaussiano, definido por:

$$P(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}} & \text{si } d > 0 \end{cases}$$

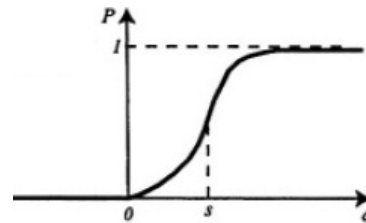


Gráfico de la función.

Paso.2 Definir el vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ para indicar la importancia relativa de cada criterio.

Paso.3 Se calcula el índice de preferencia agregada mediante la comparación por pares de todas las alternativas $a_i, a_k \in A$, a través de la función de relación de preferencia siguiente:

$$\begin{aligned} \pi : A \times A &\longrightarrow [0, 1] \\ \pi(a_i, a_k) &= \sum_{j=1}^n w_j P_j(c_j(a_i) - c_j(a_k)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

La expresión $\pi(a_i, a_k)$ manifiesta el grado de la preferencia global de la alternativa a_i con respecto a la alternativa a_k en relación con todos los criterios C_j . El significado del valor numérico obtenido mediante $\pi(a_i, a_k)$ indica que, si está próximo a cero entonces la preferencia global de a_i con respecto a a_k es débil; en el caso de que el valor se encuentre próximo a uno implica una preferencia global fuerte de a_i sobre a_k .

Paso.4 Se determina el índice de flujo de super-categorización positiva de cada alternativa $a_i \in A$, a través de:

$$\phi^+(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \pi(a_i, a_k) \quad (3.10)$$

El resultado obtenido por este índice, representa el poder de la alternativa a_i , y expresa en qué medida la alternativa a_i supera a las restantes. Por tanto, la alternativa a_i es mejor en la misma medida que sea mayor $\phi^+(a_i)$.

Paso.5 Se determina el índice de flujo de super-categorización negativa de cada alternativa $a_i \in A$, a través de:

$$\phi^-(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \pi(a_k, a_i) \quad (3.11)$$

El resultado obtenido por este índice, representa la debilidad de la alternativa a_i , y expresa en qué medida la alternativa a_i es superada por las restantes. Por tanto, la alternativa a_i es mejor en la misma medida en que sea menor $\phi^-(a_i)$.

Paso.6 Finalmente se evalúan las relaciones de preferencias. Esta etapa se puede enfocar en dos direcciones:

- Ordenamiento parcial (PROMETHEE I). El ordenamiento parcial se establece por las relaciones siguientes:

- La relación $a_i P^I a_k$ expresa que, a_i es preferida a a_k , cuando:

$$\phi^+(a_i) > \phi^+(a_k) \wedge \phi^-(a_i) \leq \phi^-(a_k)$$

o

$$\phi^+(a_i) = \phi^+(a_k) \wedge \phi^-(a_i) < \phi^-(a_k)$$

- La relación $a_i I^I a_k$ expresa que, a_i es indiferentes a a_k , cuando:

$$\phi^+(a_i) = \phi^+(a_k) \wedge \phi^-(a_i) = \phi^-(a_k)$$

- La relación $a_i R^I a_k$ expresa que, a_i y a_k son incomparables, cuando es otro caso diferente a los anteriores.

- Ordenamiento completo (PROMETHEE II). En este caso es necesario calcular el índice referente al flujo de super-categorización mediante la fórmula $\phi(a_i) = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i)$, donde a mayor valor de $\phi(a_i)$ indica que la alternativa a_i es mejor y el ordenamiento completo se establece por las relaciones siguientes:

- La relación $a_i P^I a_k$ expresa que, a_i es preferida a a_k , cuando:

$$\phi(a_i) > \phi(a_k)$$

- La relación $a_i I^I a_k$ expresa que, a_i es indiferentes a a_k , cuando:

$$\phi(a_i) = \phi(a_k)$$

La metodología utilizada por el método PROMETHEE ha introducido otras variantes para enfocar la solución de los problemas multicriterio, desarrollándose nuevas versiones. Entre las versiones posteriores se encuentran: el método PROMETHEE III orientado al ordenamiento basado en intervalos, el PROMETHEE IV dirigido al caso continuo; PROMETHEE V [11], sobre la base de PROMETHEE II, incorporan restricciones adicionales de segmentación a través de la solución de un problema de programación lineal. PROMETHEE VI [12], su concepción se basa en proporcionar al decisor determinada información sobre su propia visión del problema multicriterio y que le permita analizar el tipo de problema al que se enfrenta (complejo o simple).

3.5.5. TOPSIS

El método TOPSIS (Técnica de la Preferencia de Orden para la Similitud a una Solución Ideal), fue desarrollado por K. Yoon en 1980 [139] y publicado por Hwang y Yoon en 1981 [55], [110]. Esta técnica tiene como finalidad procesar información con un enfoque multicriterio y a partir de este facilitar la selección de las alternativas una vez evaluadas. La concepción de trabajo de esta técnica es la determinación del conjunto de solución ideal positiva y negativa, que representan la mejor y la peor opción posible, respectivamente. Posteriormente sobre la base de los mismos se considera como mejor alternativa aquella cuya distancia a la solución ideal positiva sea mínima y que la distancia a la solución ideal negativa sea máxima. Finalmente, a partir del índice calculado para cada alternativa se puede seleccionar la mejor; dando de esta forma solución al problema de análisis multicriterio [79].

El proceso de cálculo utilizado por el método TOPSIS se estructura de la forma siguiente:

Paso.1 Normalización de la matriz de decisión observada.

A través de la misma se transforman las diferentes escalas posibles de los criterios a unidades comunes medibles, para de esta forma comparar criterios diferentes. Este proceso conlleva a una normalización, y la fórmula utilizada es:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}} \quad (3.12)$$

Donde:

- x_{ij} son los elementos de la matriz de observada, correspondiente a la alternativa A_i , $i = 1, 2, \dots, m$ en el criterio C_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

- r_{ij} constituyen los elementos de la matriz R normalizada.

Paso.2 Construcción de la matriz normalizada con influencia de pesos .

Cada uno de los criterios analizados no siempre tienen igual importancia, pues representan diferentes significados. En este caso, la matriz R normalizada se multiplica por el vector de pesos, donde se corresponde cada peso con el respectivo criterio. Por tanto, se obtiene la matriz normalizada ponderada y los elementos se denotan por v_{ij} .

$$v_{ij} = r_{ij} \otimes w_j \quad (3.13)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

Para determinar el peso asociado a cada criterio, se pueden emplear diferentes métodos (ver epígrafe 4.1).

Paso.3 Determinación de las soluciones ideal positiva y negativa.

En este paso, se conforma los conjuntos A^+ y A^- , y los mismos constituyen la base para el cálculo de la distancia. El conjunto A^+ representa la solución ideal positiva, indicando la alternativa de mayor preferencia, mientras que el conjunto A^- representa la solución ideal negativa, indicando de esta forma la alternativa de menor preferencia. Los conjuntos A^+ y A^- no tienen porqué coincidir con alguna de las alternativas a evaluar.

Para efectuar dicho cálculo se utiliza la formulación siguiente:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i v_{ij} : j \in J' \right), \left(\min_i v_{ij} : j \in J' \right) : i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.14)$$

$$A^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} : j \in J'' \right), \left(\max_i v_{ij} : j \in J'' \right) : i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.15)$$

$$A^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$$

Como se puede observar las soluciones ideales A^+ y A^- para determinados criterios pudieran ser los valores máximos y para otros valores mínimos, dependiendo de que criterio representan beneficios o perdidas. Sin embargo, es necesario que se cumpla para cada criterio, que al asumir la solución ideal positiva como valores máximos entonces la solución ideal negativa sean los valores mínimos y viceversa.

Paso.4 Cálculo de la medida de separación.

Para determinar la medida de separación, se calcula la separación existente entre cada alternativa y la solución ideal positiva y negativa. Las fórmulas utilizadas son:

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad (3.16)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad (3.17)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, m$

Paso.5 Cálculo del índice relativo a la solución ideal.

Se calcula el índice relativo de la i -ésima alternativas respecto a la solución ideal A^+ y a la no ideal A^- . Se define por Ir_i^+ a través de la fórmula:

$$Ir_i^+ = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-} \quad (3.18)$$

donde, $0 < Ir_i^+ < 1, i = 1, 2, \dots, m$

De forma general, mientras más próximo el valor Ir_j^+ este de 1, la alternativa a_j estará más próxima a la solución ideal positiva.

Paso.6 Ordenar el conjunto de alternativas.

El conjunto de alternativas se ordena de forma descendente respecto a su valor Ir_i^+ . El mismo permite ubicar las alternativas en un orden tal que, el valor más alto asociado a una alternativa indica que esta se encuentra más próxima al ideal positivo, y por tanto es mejor.

Posteriormente, al método TOPSIS, se le han realizado aportes y mejoras [54],[65]. Otra experiencia, es introduciendo la utilización de la distancia Mahalanobis [81], lo cual hace que aumentan las posibilidades del mismo.

3.5.6. VIKOR

El método VIKOR es propuesto por Serafim Opricovic en 1998 [87], [88], su nombre proviene de las siglas de la frase en serbio, (VlseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resende). El principio del método VIKOR se basa en una función de agregación que representa el acercamiento al punto ideal. Primero se realiza la definición de las soluciones ideales positivas y negativas, donde la solución ideal positiva es la alternativa que obtiene el valor más alto, mientras que la solución ideal negativa es el menor valor [79].

Las etapas de este método se organizan de la forma que se describe a continuación [87], [89], [90] y [17]:

Paso.1 Determinar los mejores y peores valoraciones de las alternativas para cada criterios.

Para todos los criterios se determinar el mejor valor f_j^+ y el peor valor f_j^- , a través de las funciones siguientes:

$$f_j^+ = \max_i f_{ij} \text{ y } f_j^- = \min_i f_{ij}, \text{ o } f_j^+ = \min_i f_{ij} \text{ y } f_j^- = \max_i f_{ij}$$

Según estemos considerando ganancia o perdida, respectivamente; donde f_j^+ representa la solución ideal positiva (beneficio), y f_j^- la solución ideal negativa (costo), para el criterio C_j .

Los f_{ij} se obtienen a partir del proceso de normalización de los elementos x_{ij} de la matriz observada [79].

Paso.2 Calcular los valores de S_i y R_i para $i = 1, \dots, m$ (m es la cantidad de alternativas), los mismos se definen por:

$$S_i = \sum_{j=1}^n \frac{w_j (f_j^+ - f_{ij})}{(f_j^+ - f_j^-)} \quad (3.19)$$

$$R_i = \max_j \left[\frac{w_j (f_j^+ - f_{ij})}{(f_j^+ - f_j^-)} \right] \quad (3.20)$$

Donde, w_j es el peso asociado al criterio C_j , representando la importancia relativa de los mismos.

Paso.3 Calcular los valores finales Q_i , para $i = 1, \dots, m$, a través de la fórmula:

$$Q_i = \lambda \left(\frac{S_i - S^+}{S^- - S^+} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{R_i - R^+}{R^- - R^+} \right) \quad (3.21)$$

donde:

- $S^+ = \min_i S_i$, $S^- = \max_i S_i$, $R^+ = \min_i R_i$, $R^- = \max_i R_i$ y λ es la referencia de peso según la estrategia del decisor. Esta referencia de peso λ se puede asumir como "la mayoría del criterio" o "utilidad máxima" cuando se selecciona $\lambda > 0.5$, en caso que sea según el consenso general entonces $\lambda = 0.5$, sino $\lambda < 0.5$ [17].
- Las expresiones $\left(\frac{S_j - S^+}{S^- - S^+}\right)$ y $\left(\frac{R_j - R^+}{R^- - R^+}\right)$, representan la distancia a la solución ideal positiva y negativa, respectivamente.

Paso.4 Se ordenan de forma creciente las alternativas según los valores de S_j , R_j y Q_j , resultando un conjunto de tres listas ordenadas.

Paso.5 Se propone como una solución la alternativa $A_{(1)}$, que se corresponde con $Q_{(1)}$ (menor valor de los Q_j), si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

- C1. Ventaja aceptable, si :

$$Q(A_{(2)}) - Q(A_{(1)}) \geq DQ$$

Donde $A_{(2)}$ es la segunda alternativa respecto al orden de la lista Q_j y $DQ = \frac{1}{m-1}$ (m es la cantidad de alternativas).

- C2. Estabilidad aceptable de la decisión, si la alternativa $A_{(1)}$ también es la mejor por el ordenamiento de S_j y/o R_j .

Si una de las condiciones no se satisface entonces se propone la solución:

- Las alternativas $A_{(1)}$ y $A_{(2)}$, solo si la condición C2 no se satisface, o
- Las alternativas $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, ..., $A_{(m)}$, si la condición C1 no se satisface, donde $A_{(m)}$ se determina por $Q(A_{(m)}) - Q(A_{(1)}) < DQ$.

3.5.7. Limitaciones que presentan estos métodos.

De forma general, estos métodos de análisis multicriterio parten de un conjunto de alternativas A_i que son evaluadas para un conjunto de criterios C_j y a través de una operatoria dada, orientan al decisor sobre cual o cuales son las mejores alternativas.

También, es común que estos métodos utilicen un vector de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, lo que permite una determinada influencia de cada criterio en el resultado final. Por otra parte, alguno de estos métodos operan sobre la base de identificar la solución ideal positiva y la negativa, donde asocian el valor máximo y mínimo para cada criterio, respectivamente, o viceversa, según los intereses del decisor.

Sin embargo, puede suceder que el interés de búsqueda de la solución para determinados criterios no sea exactamente el valor máximo o el mínimo, sino un valor intermedio, por lo que este sería una limitante. También, puede suceder que una alternativa en particular A_h al ser evaluada en todos los criterios tiene resultados muy próximos a la solución máxima (mínima) o coincidir directamente con el máximo (mínimo), excepto para un criterio C_k que tiene una evaluación muy próxima a la solución mínima (máxima) o coincide con esta; mientras que el resto de las alternativas distintas a A_h al ser evaluadas a través de los diferentes criterios, sus resultados de agregación sean inferior al obtenido para la alternativa A_h . En este caso, la solución factible puede depender del enfoque asignado al criterio que se evalúa en las alternativas. Por ejemplo, considérese los dos casos siguientes al evaluar la alternativa A_h para el criterio C_k , donde el mismo representa el costo del proyecto y este resulta ser más elevado de lo aceptable:

1. Es posible financiar dicho costo.
2. Es imposible financiar dicho costo.

En un proceso de agregación puede suceder que la alternativa A_h sea la mejor solución desde el punto de vista numérico, independientemente de las variantes planteadas anteriormente. Sin embargo, al valorar las condiciones del caso (2), la alternativa A_h no debería ocupar una posición próxima a la solución ideal, independientemente que al ser evaluada en el resto de los criterios tenga la mejor solución, por lo contrario, debería tener un valor de agregación que la ubique entre las peores soluciones.

Otra de las características presente en los métodos analizados anteriormente, es que son dependientes de los datos, lo que implica que al incluir una nueva alternativa o con solo modificarse los datos de una de ellas, se hace necesario realizar el procesamiento de la información para todas las alternativas.

Teniendo en cuenta las problemáticas planteadas, se hace necesario ampliar la concepción de los métodos multicriterio, sobre la base en que el decisor defina la solución que para él constituye el ideal, tal que pueda seleccionar valores entre el mínimo y el máximo. Además, que la definición de los criterios incluyan la exclusión de las alternativas que toman valores inferiores a un valor β .

3.6. Propuesta de método de análisis multicriterio.

Un rasgo común en los problemas de análisis multicriterio es que se desarrollan en presencia de un conjunto de criterios C_j que serán utilizados para evaluar a todas las alternativas A_i ,

para evaluar cual es mejor y luego decidir. De forma general, los criterios C_j hacen referencia a características que están en magnitudes diferentes o tienen diferentes significados. Por otra parte, los métodos de análisis multicriterio deben garantizar que al realizar sus operaciones no se vean afectados por la diversidad de magnitudes y significados que toman los criterios C_j , por tanto, varios métodos como el TOPSIS, VIKOR, etc, normalizan los datos para garantizar la homogeneidad de los datos a procesar.

Otro de los aspectos utilizados por los métodos de análisis multicriterio TOPSIS y VIKOR, es la identificación de la solución ideal positiva y negativa, es decir la búsqueda del valor máximo y/o el mínimo, según corresponda. Lo cual se realiza con la finalidad de obtener las alternativas que se encuentren más próximas a la solución ideal positiva y lo más alejadas posibles de la solución ideal negativa.

La concepción del ideal positivo y negativo, es un elemento de gran utilidad para los métodos de análisis multicriterio que lo utilizan, pues solo basta determinar la separación o distancia que tiene cada alternativa de las soluciones ideales para luego ordenarlas. Sin embargo, la forma utilizada para identificar el valor ideal positivo y negativo, es asociándolo de forma estricta a los valores máximos o mínimos, respectivamente y según corresponda; operación que se realiza para cada uno de los criterios que son evaluados en las alternativas. Esta forma de operar solo con los valores máximos y mínimo, constituye una limitante para estos métodos, pues de manera práctica se manifiesta que la solución ideal positiva o negativa no necesariamente tiene que ser los valores extremos, sino un conjunto de valores que este entre ellos.

Dada la situación expresada anteriormente, se requiere modificar el tratamiento de la información correspondiente a los criterios, de tal forma, que la selección de las soluciones ideales pueda variar entre los valores máximos y mínimo. Por tanto, antes de proponer el método de agregación de información multicriterio, primero es necesario definir las funciones para lograr esta transformación, aspecto que se analiza a continuación.

3.6.1. Funciones de pertenencia para la normalización.

Como ya es conocido, los criterios se utilizan para evaluar a las alternativas y su resultado evaluativo se incorpora al proceso de agregación de información (ver fig. 3.4), por tanto para lograr evaluar a las alternativas tal que su resultado esté influido por un ideal variable, se debe incidir en la forma evaluativa a través de los criterios.

Los criterios a utilizar en un método de análisis multicriterio, son identificados de forma previa en correspondencia con el problema a estudiar y de manera intuitiva se le asocia un dominio dado, con datos perteneciente a un universo de discurso. En este caso se denomi-

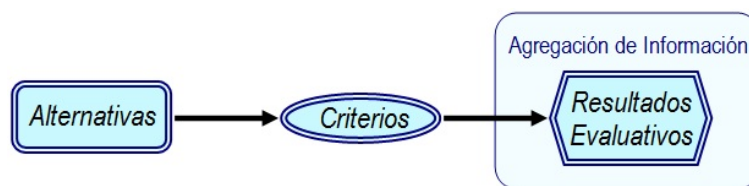


Figura 3.4: Flujo evaluativo de las alternativas

ará Dominio de Trabajo, como se expresa en la definición 3.6.1.

Definición 3.6.1. *Se denomina dominio de trabajo a todo intervalo $[A, B] \subseteq D$, donde D es un universo de discurso cualquiera.*

Luego, a partir de la identificación del dominio de trabajo de cada criterio, es posible establecer un subconjunto perteneciente al dominio de trabajo que constituya el ideal positivo, que en este caso se denominará mayor significación y se define de la forma siguiente.

Definición 3.6.2. *Se denomina mayor significación al intervalo $[C, D]$, que representa la máxima importancia o relevancia bajo un contexto dado, tal que $[C, D] \subseteq [A, B]$, y $[A, B]$ es un dominio de trabajo.*

Sobre la base de la definición 3.6.2 es posible establecer la mayor significación como un conjunto que puede variar desde el valor mínimo al valor máximo del intervalo de trabajo, por tanto bajo estas condiciones el ideal positivo puede ser cualquier conjunto entre el mínimo y el máximo.

Por otra parte, la solución ideal negativa, se puede considerar como los valores más distantes a la mayor significación. Por lo tanto, la relación de un elemento respecto a la solución ideal y a la no ideal, se establecería a partir de una función de distancia.

Definición 3.6.3. *La distancia mínima de un valor x a la mayor significación $[C, D]$, está dada por la función $d_{\min}(x, [C, D]) = \min(|x - C|, |x - D|)$.*

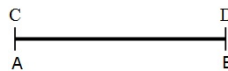
Antes de plantear las funciones de pertenencia correspondientes, primeramente se analizarán los casos que se pueden manifestar con relación al dominio de trabajo y a la mayor significación.

- Caso #1: Se forma un solo intervalo.

La mayor significación $[C, D]$ se reduce a un conjunto de un solo elemento por ser $C = D$ y el mismo coincide con uno de los extremos del intervalo $[A, B]$, es decir $C = D = A$ ó $C = D = B$.



También puede suceder que $C \neq D$ y se cumpla que $C = A$ y $D = B$, aunque este no sería de interés pues todos los valores son de máxima significación.

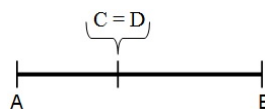


- Caso #2: Se forman dos intervalos.

La mayor significación $[C, D]$ no es un conjunto unitario ($C \neq D$), pero uno de los extremos del intervalo de mayor significación $[C, D]$ coincide con uno y solo uno de los extremos del dominio de trabajo $[A, B]$.

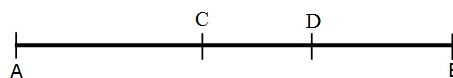


También puede suceder que el intervalo de mayor significación $[C, D]$ se reduzca a un conjunto de un solo elemento por ser $C = D$ y el mismo no coincidir con ninguno de los extremos del dominio de trabajo $[A, B]$, es decir $C = D \neq A$ y $C = D \neq B$.



- Caso #3: Se forman tres intervalos.

La mayor significación $[C, D]$ no es un conjunto unitario ($C \neq D$), y no coinciden ninguno de los extremos del intervalo de mayor significación $[C, D]$ con los extremos del intervalo $[A, B]$, es decir $A \neq C \neq D \neq B$, además los intervalos pueden tener amplitudes diferentes.



A partir de este momento, se crean las bases para establecer las relaciones que expresan los grados de pertenencia de un valor dado respecto a la solución ideal positiva y negativa, tal que la imagen se encuentre en el intervalo unitario.

Definición 3.6.4. *El grado de pertenencia de un valor x respecto a la mayor significación de un dominio de trabajo, está dado por la función f_1 , tal que:*

$$f_1 : x \oplus [A, B] \oplus [C, D] \longrightarrow [0, 1]$$

$$f_1(x, [A, B], [C, D]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [C, D] \\ 1 - \frac{d_{\min}(x, [C, D])}{|A-C|} & \text{si } x \in [A, C] \\ 1 - \frac{d_{\min}(x, [C, D])}{|D-B|} & \text{si } x \in [D, B] \end{cases} \quad (3.22)$$

Donde:

- $x \in [A, B]$
- $[A, B]$ es el dominio de trabajo.
- $[C, D] \subseteq [A, B]$
- $[C, D]$ representa la mayor significación.

Esta función 3.6.4 establece que cada intervalo diferente a la mayor significación, se distribuya en proporción al mismo para calcular la imagen. Además, las imágenes de los extremos del dominio de trabajo que no están incluidas en el intervalo de mayor significación son iguales a 0.

También la función de pertenencia se puede definir de la forma siguiente.

Definición 3.6.5. *El grado de pertenencia de un valor x respecto a la mayor significación de un dominio de trabajo, está dado por la función f_2 , tal que:*

$$f_2 : x \oplus [A, B] \oplus [C, D] \longrightarrow [0, 1]$$

$$f_2(x, [A, B], [C, D]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [C, D] \\ 1 - \frac{d_{\min}(x, [C, D])}{\max(|A-C|, |B-D|)} & \text{si } x \notin [C, D] \end{cases} \quad (3.23)$$

Donde:

- $x \in [A, B]$
- $[A, B]$ es el dominio de trabajo.
- $[C, D] \subseteq [A, B]$
- $[C, D]$ representa la mayor significación.

La función 3.6.5 establece que cada intervalo diferente al intervalo de mayor significación, depende de la longitud del mayor intervalo para calcular la imagen, por lo tanto, solo el extremo del intervalo de trabajo más distante del intervalo de mayor significación es igual a 0, excepto cuando los dos extremos del intervalo de trabajo están a la misma distancia del intervalo de mayor significación. En este último caso la función 3.23 tiene el mismo comportamiento que la función 3.22.

Las funciones 3.22 y 3.23, permiten obtener el grado de pertenencia de un valor respecto a la mayor significación de un dominio de trabajo, donde su imagen se encuentra en el intervalo unitario, lo cual significa que si tiende a 1 entonces se acerca al ideal positivo y si tiende a 0 entonces se acerca al ideal negativo.

Además, estas funciones tienen comportamientos semejantes y diferentes, dependiendo de la cantidad de sub-intervalos en que divida el intervalo de trabajo, aspectos que se ejemplifican a continuación:

Ejemplo 3.6.1. Sea la variable que representa la Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral, donde el intervalo de trabajo es $[0, 10]$ y la mayor significación es la máxima ($\{10\}$) o la mínima ($\{0\}$) experiencia, entonces ambas funciones 3.22 y 3.23 tienen el mismo comportamiento (ver Fig. 3.5 1 y Fig. 2, respectivamente).

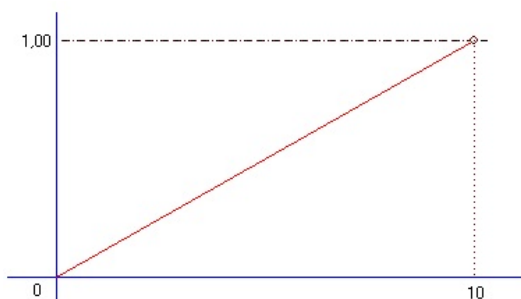


Figura 3.5: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de las funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es la máxima experiencia $\{10\}$.

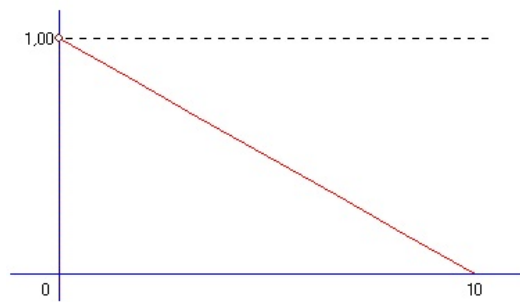


Figura 3.6: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de las funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es la mínima experiencia $\{0\}$.

En el ejemplo 3.6.1 las condiciones planteadas generan un solo intervalo al establecer el conjunto de máxima significación, situación que manifiesta el mismo comportamiento para las dos funciones.

Ejemplo 3.6.2. *Considérese la misma variable e intervalo de trabajo que el ejemplo 3.6.1, pero en este caso el intervalo de mayor significación sea $[8, 10]$ (la mayor experiencia posible y como mínimo es 8 años) o $[0, 2]$ (la menor experiencia posible y la máxima sea 2 años), entonces las funciones 3.22 y 3.23 también mantienen el mismo comportamiento (ver fig. 3.7 y fig. 3.8, respectivamente).*

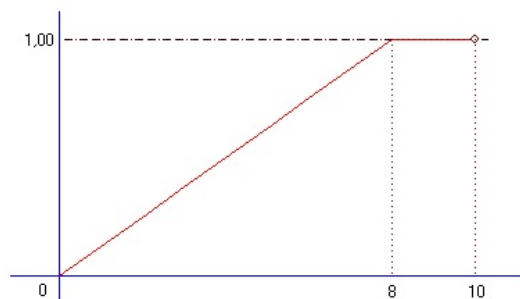


Figura 3.7: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de la funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es el intervalo $[8, 10]$.

El intervalo de trabajo también se puede subdividir en dos intervalos, en el caso que la mayor significación deseada está formada por un conjunto unitario, tal que el mismo no coincide con ninguno de los extremos del intervalo de trabajo, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3.6.3. *Sea la misma variable e intervalo de trabajo que el ejemplo 3.6.1, y la máxima significación el conjunto $\{5\}$ (experiencia media), luego se forman dos intervalos que tienen la*

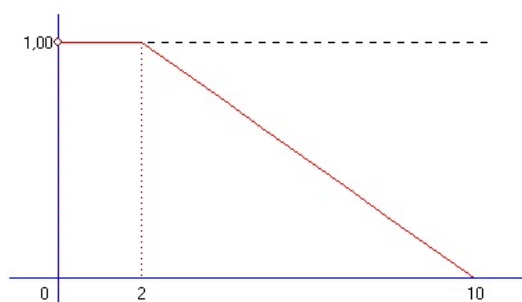


Figura 3.8: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de las funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es el intervalo $[0, 2]$.

misma longitud y las funciones 3.22 y 3.23 tienen el mismo comportamiento, como se muestra en la Fig. 3.9.

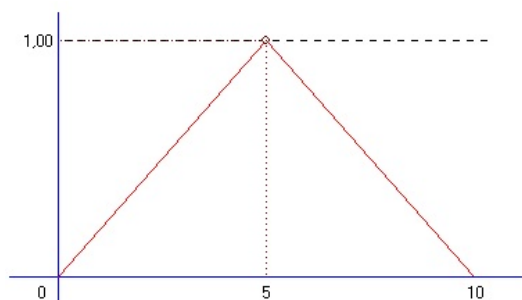


Figura 3.9: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de las funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es la experiencia media $\{5\}$.

Sin embargo, cuando la mayor significación es un conjunto unitario pero este divide al intervalo de trabajo en dos subintervalos de longitudes diferentes, entonces las funciones 3.22 y 3.23 tienen comportamientos diferentes.

Ejemplo 3.6.4. *Sea la misma variable e intervalo de trabajo que el ejemplo 3.6.1, y la máxima significación el conjunto $\{6\}$ (experiencia próxima a la media), entonces los intervalos tienen longitudes diferentes y las funciones 3.22 y 3.23 tienen comportamientos diferentes (ver fig. 3.10 y 3.11):*

Por otra parte, puede suceder que al definir el intervalo de mayor significación se formen tres intervalos. En esta situación las funciones 3.22 y 3.23 también pueden manifestar comportamientos semejantes y diferentes, lo cual está en dependencia de la coincidencia o no de la longitud de los intervalos que están a cada lado del intervalo de mayor significación, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

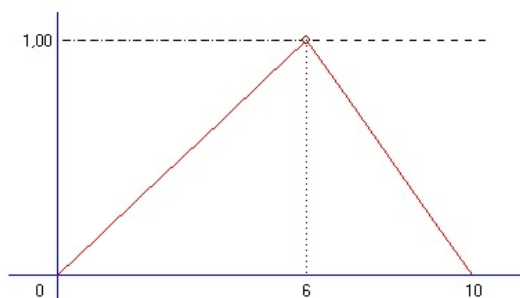


Figura 3.10: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de la función 3.22, donde la mayor significación es $\{6\}$ como experiencia.

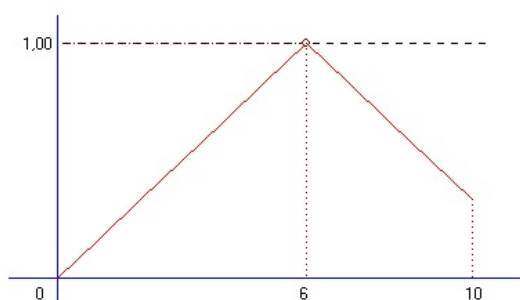


Figura 3.11: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de la función 3.23, donde la mayor significación es $\{6\}$ como experiencia.

Ejemplo 3.6.5. Sea la misma variable e intervalo de trabajo que el ejemplo 3.6.1, y el intervalo de máxima significación $[4, 6]$. Luego los intervalos que están a cada lado del intervalo de máxima significación tienen la misma longitud y las funciones 3.22 y 3.23 mantienen el mismo comportamiento (fig.3.12):

Ejemplo 3.6.6. Sea la misma variable e intervalo de trabajo que el ejemplo 3.6.1, y el intervalo de máxima significación $[5, 8]$. Luego los intervalos que están a cada lado del intervalo de máxima significación tienen diferentes longitudes y las funciones 3.22 y 3.23 tienen comportamientos diferentes (fig. 3.13 y 3.14):

De forma resumida se puede plantear que las funciones 3.22 y 3.23, solo tienen comportamientos diferentes si se cumplen estrictamente las condiciones siguientes:

- Se forman dos intervalos diferentes al de mayor significación.
- Los dos intervalos formados tienen longitudes diferentes.

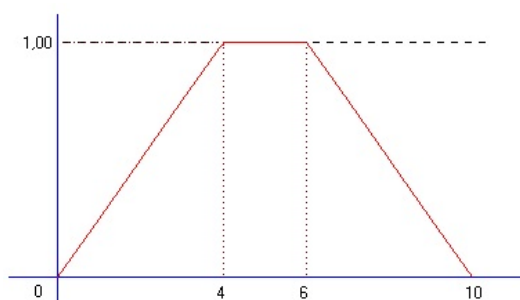


Figura 3.12: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de las funciones 3.22 y 3.23, donde la mayor significación es $[4, 6]$.

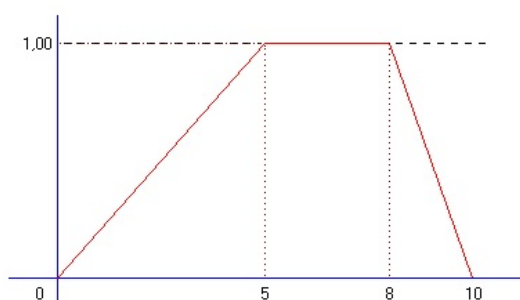


Figura 3.13: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de la función 3.22, donde la mayor significación es $[5, 8]$.

Hasta el momento, se han presentado dos funciones 3.22 y 3.23 que permiten obtener un valor perteneciente al intervalo unitario independientemente de las variables de entrada, sin embargo, pueden tener comportamientos diferentes. Con la finalidad de orientar qué función se debe utilizar bajo un contexto dado, se propone la interrogante siguiente para ayudar a su decisión.

¿Se desea que los extremos del intervalo de trabajo representen de forma estricta la no pertenencia total, es decir imagen igual a cero (0)?

Si la respuesta es afirmativa, entonces se utiliza la función 3.22. Esto quiere decir, que si la función se evalúa en uno de los extremos del intervalo de trabajo, tendrá como imagen cero (0).

Si la respuesta es negativa, entonces se utiliza la función 3.23. Como los dos sub-intervalos que se encuentran a cada lado del intervalo de mayor significación se distribuirán con sus respectivas proporción, entonces solo el extremo del intervalo de trabajo que está más distante del intervalo de mayor significación es igual a cero (0), por lo tanto el otro extremo tiene como imagen un valor mayor que cero (0).

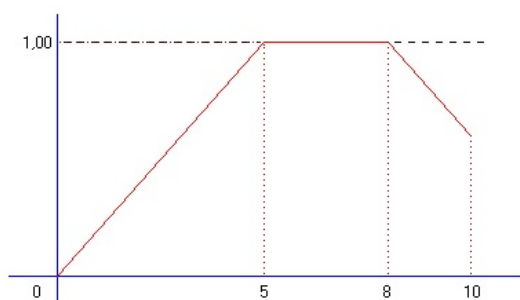


Figura 3.14: Gráfico de la variable *Cantidad de años de experiencia en una actividad laboral* a través de la función 3.23, donde la mayor significación es $[5, 8]$.

Además, al utilizar la función 3.22, los valores que pertenecen al sub-intervalo de menor longitud tienen como imagen un valor más próximo a 1 que al emplear la función (4), por lo tanto, cuando se desee que los valores de este sub-intervalo tengan un mayor nivel de pertenencia entonces se debe seleccionar la función 3.23.

A partir de lo antes expuesto, se puede concluir que se han definido dos funciones de pertenencia que permiten normalizar datos que se encuentran en contextos diferentes, teniendo como base la definición a priori de la mayor significación de un dominio de trabajo. Además, estas funciones permiten normalizar datos sobre la base de valores máximos, mínimos o intermedios.

3.6.2. Métrica propuesta.

Como se ha expuesto en el epígrafe anterior, son diversos los métodos de análisis multicriterio que se utilizan para resolver diferentes problemas. De forma general, se puede plantear que es común que estos métodos orienten la búsqueda de la solución al máximo o al mínimo de los valores para los cuales son evaluados los criterios utilizados, donde algunos métodos los denomina el ideal positivo y negativo.

Sin embargo, en problemas prácticos, se hace necesario buscar no solo a partir de los valores máximos o mínimos, sino también sobre la base de valores intermedios. Tal situación implica la necesidad de ampliar el contexto de búsqueda de la solución; luego sobre la base de las funciones 3.22 y 3.23 definidas anteriormente, se propone un método que tiene como principio el cálculo de la menor distancia al ideal de búsqueda definido.

La forma organizativa de este método para iniciar el cálculo correspondiente, parte de la conformación de la matriz de valores observados x_{ij} , los mismos representan el valor correspondiente de la alternativa A_i para el criterio C_j , tal que $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, donde m y n representa la cantidad de alternativas y criterios respectivamente. Luego, se procede

de la forma siguiente:

Paso.1 Definición del contexto de trabajo.

A partir de este momento se establecen las condiciones del contexto de trabajo, y para cada criterio c_j se definen los aspectos siguientes:

- El intervalo de trabajo t_j .
- El intervalo de mayor significación s_j .

Los intervalos de mayor significación s_j (por definición 2) representan la solución ideal deseada para dicho criterio (máximo, mínimo o intermedio) y el mismo es utilizado para el cálculo a través de la función de pertenencia definida en (4) o (5).

- El α – corte de exclusión α_j .

El objetivo de este vector es controlar si los criterios a partir de un valor dado excluyen a la alternativa, asignándole en este caso un valor de pertenencia de cero (0).

- El peso w_j asociado al criterio.

El objetivo del vector de pesos W es indicar el nivel de importancia de cada uno de los criterios. Para determinar el vector de pesos asociado a los criterios, se pueden emplear diferentes métodos ver epígrafe OWA.

Paso.2 Normalización de la matriz observada X .

$$Y = \begin{pmatrix} f_k(x_{11}, t_1, s_1) & f_k(x_{12}, t_2, s_2) & \cdots & f_k(x_{1n}, t_n, s_n) \\ f_k(x_{21}, t_1, s_1) & f_k(x_{22}, t_2, s_2) & \cdots & f_k(x_{2n}, t_n, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x_{m1}, t_1, s_1) & f_k(x_{m2}, t_2, s_2) & \cdots & f_k(x_{mn}, t_n, s_n) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Paso.3 Calcular la matriz normalizada ponderada Y' , a través de:

$$Y' = Y \otimes W = \begin{pmatrix} y_{11} \cdot w_1 & y_{12} \cdot w_2 & \cdots & y_{1n} \cdot w_n \\ y_{21} \cdot w_1 & y_{22} \cdot w_2 & \cdots & y_{2n} \cdot w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} \cdot w_1 & y_{m2} \cdot w_2 & \cdots & y_{mn} \cdot w_n \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Paso.4 Calcular la variación a la solución ideal y a la no ideal de cada alternativa A_i .

$$I_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (y'_{ij} - w_j)^2} \quad (3.26)$$

$$I_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (y'_{ij})^2} \quad (3.27)$$

donde $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

Paso.5 Calcular el índice relativo a la solución ideal de cada alternativa A_i , a través de la expresión:

$$R_i = \frac{I_i^-}{I_i^+ + I_i^-} \quad (3.28)$$

donde $0 < R_i < 1, i = 1, 2, \dots, m$

Paso.6 Determinar el vector de exclusión Ex_i a través de la expresión:

$$Ex_i = \min_j z_{ij} \quad (3.29)$$

Donde:

$$\blacksquare Z = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} & \cdots & \eta_{mn} \end{pmatrix}, \quad \eta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \neg \exists \alpha_i \\ g(y_{ij}, \alpha_i) & \text{si } \exists \alpha_i \end{cases}$$

▪ La función g es la aplicación de la forma $g : [0, 1] \odot [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$, tal que,

$$g(x, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

Paso.7 Calculo del índice relativo con exclusión de alternativas A_i , mediante la expresión:

$$R_i^* = R_i \times Ex_i = (R_1 \cdot Ex_1, R_2 \cdot Ex_2, \dots, R_m \cdot Ex_m) \quad (3.30)$$

Paso.8 Ordenar las alternativas A_i de forma descendente a partir del índice relativo a la solución ideal con exclusión R_i^* . Las alternativas que están más a la izquierda constituyen las mejores soluciones.

Nota: En el caso que ningún criterio incluya la exclusión, entonces no se realizan los pasos 6 y 7, pues $R_i^* = R_i$.

3.7. Conclusiones.

En este capítulo se realiza un estudio de los métodos de análisis multicriterio fundamentales. Los mismos tienen como finalidad facilitar la selección de las mejores alternativas, a partir de evaluar cada una de ellas sobre un conjunto de criterios. Sobre la base y concepciones utilizadas por los diferentes métodos, se obtuvo la propuesta de un método que amplía las posibilidades para obtener las mejores alternativas. Este método se caracteriza por:

- Utilizar la concepción de los métodos TOPSIS y VIKOR, con relación a la comparación de cada alternativa respecto a la solución ideal y a la no ideal, pero introduciéndose la variante donde la solución ideal pueden ser un valor que se encuentre entre el máximo y mínimo, sin tener que ser estrictamente los valores extremos.
- La utilización de un vector de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, manteniendo este principio de los métodos analizados.
- La exclusión de las alternativas a partir de un valor para el cual se considera crítico, aspecto no tratado en los métodos restantes.
- Ser independiente del conjunto de datos, por tanto al incluir una alternativa solo se requiere hacer la agregación de la información para dicha alternativa; mientras que al utilizar otros métodos hay que procesar a todo el conjunto de candidatos.

Capítulo 4

El Operador de Pesos Promedio (OWA)

4.1. Introducción.

Los métodos de agregación de información son utilizados en diferentes aplicaciones, tales como en el desarrollo de sistemas inteligentes, redes neuronales [127, 26], controladores difusos [126, 127], sistemas expertos y métodos de análisis multicriterio. Todo ello, ha motivado a varios investigadores a estudiar dichos métodos y realizar nuevas propuestas. Particularmente, Yager [125] propone una familia de operadores de agregación, la cual fue denominada operador de pesos promedio (OWA), basando su principio en el promedio de pesos ordenados, y su variación se encuentra entre el operador máximo y mínimo.

A continuación se realiza un estudio de este operador por su incidencia en los diferentes métodos de agregación de la información.

4.2. Definición y Propiedades.

El operador OWA se define de la forma siguiente [125],[128].

Definición 4.2.1. *Un operador OWA de dimensión n está dado por una $F : R^n \rightarrow R$, que tiene asociado un vector de pesos $W = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)^T$, que debe cumplir las propiedades siguientes:*

- $\sum_{i=1}^n w_i = 1$
- $w_i \in [0, 1]$

Además, su resultado final está dado por la expresión, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$, donde b_i es el i -ésimo mayor elemento de la colección a_i .

Un aspecto fundamental de este operador OWA, está asociado con el reordenamiento de los elementos de agregación, es decir a un elemento particular a_i no se le asocia un peso determinado, sino que a cada peso w_i se le asocia una posición en la agregación [125].

A partir de lo expresado anteriormente [125] se plantean tres casos especiales en la agregación con el operador OWA:

- Caso #1: F^* , donde $W = W^* = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$
- Caso #2: F_* , donde $W = W_* = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$
- Caso #3: F_{Ave} , donde $W = W_{Ave} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$

Por tanto, se puede obtener que:

- $F^*(a_1, a_2, \dots, a_n) = \underset{i}{Max}(a_i)$
- $F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) = \underset{i}{Min}(a_i)$
- $F_{Ave}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$

Propiedades del operador OWA. El operador OWA tiene asociada varias propiedades importantes [125, 128, 137], tales como:

- Para cualquier operador OWA F , se cumple que el valor resultante de la agregación está comprendido entre el máximo y el mínimo:

$$F_*(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq F^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
, por tanto es equivalente plantear que $\underset{i}{Min}(a_i) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \underset{i}{Max}(a_i)$
- Monotonía: Para cualquier operador OWA F , si $a_i \geq c_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces se cumple que $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq F(c_1, c_2, \dots, c_n)$
- Idempotencia: Para cualquier operador OWA F , si $a_i = a, \forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces se cumple que $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$
- Conmutativa: Para cualquier operador OWA F , y para cualquier permutación d_i de a_i , entonces se cumple que $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Medidas asociadas al operador OWA. Yager [125] plantea medidas asociadas al vector de pesos de un operador OWA, referidas a:

1. El valor α u *Orness* del vector de pesos W , denotándose por $\alpha(W)$ ó *orness* (W), se define a través de la fórmula:

$$\alpha(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) \quad (4.1)$$

A partir de la definición dada se puede verificar que $\alpha(W^*) = 1$, $\alpha(W_*) = 0$ y $\alpha(W_{Ave}) = 0.5$, por tanto el valor del $\alpha(W) \in [0, 1]$

El valor asociado a esta medida ($\alpha(W)$), refleja el resultado de la agregación de *andlike* u *orlike* de un operador OWA, mostrando el grado de preferencia (en mayor o menor medida) de los argumentos que intervienen en la agregación. Por tanto, al realizar la agregación del máximo su valor es 1, mientras que al realizar la agregación con el mínimo su valor es 0 y en el caso que la agregación se realiza con el promedio su valor es 0.5.

2. El valor del *andness*, representa el complemento del *orness*, expresado por:

$$andness(W) = 1 - orness(W) \quad (4.2)$$

3. La dispersión o entropía del vector de pesos W de un operador OWA, se denota por $Disp(W)$ y se define a través de la expresión:

$$Disp(W) = - \sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i) \quad (4.3)$$

Esta medida expresa el grado en que se tiene en cuenta toda la información en la agregación, por tanto son válidas las propiedades siguientes:

- Si $w_i = 1$ para algún i entonces la dispersión es mínima y el valor de $Disp(W) = 0$.
- La dispersión es máxima si $w_i = \frac{1}{n}$, en este caso el valor de $Disp(W) = \ln(n)$.

Particularmente, la medida del *orness* tiene varias propiedades. Específicamente R. Yager [128], en el artículo "La familia de los operadores OWA", expresa las proposiciones siguientes:

Proposición 1: Para un vector de pesos OWA $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, con $orness(W) = \alpha$ entonces para el vector inverso de W , $\bar{W} = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$ el $orness(\bar{W}) = 1 - \alpha$.

Proposición 2: Si el $orness(W) = 1$ entonces $F_W(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$.

Proposición 3: Si el $orness(W) = 0$ entonces $F_W(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$.

Corolario 1: El vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ de un operador OWA, verifica:

- Si $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$, entonces el $orness(W) \geq \frac{1}{2}$, y $F_W(x) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
- Si $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$, entonces el $orness(W) \leq \frac{1}{2}$, y $F_W(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

4.3. Métodos y procedimientos para la determinación del vector de pesos.

Las medidas analizadas anteriormente están asociadas de forma directa con el vector de pesos, por tanto dicho vector tiene un papel esencial en el proceso de agregación del operador OWA, lo cual ha motivado a varios investigadores a desarrollar diferentes métodos y procedimientos para obtener el mismo. Son diversos los métodos y procedimientos para obtener el vector de pesos asociado al operador OWA, los mismos están orientados sobre la base de diferentes concepciones; por ejemplo los que utilizan la programación matemática, los orientados por cuantificadores, y fórmulas analíticas, entre otros.

4.3.1. Determinación del vector de pesos sobre la base de la programación matemática.

Los métodos que utilizan la programación matemática, definen una función objetivo y establecen el cumplimiento de determinados requisitos a satisfacer, entre estos métodos se pueden citar los siguientes:

- O'Hagan [85, 86], introduce la primera familia parametrizada del operador OWA, por lo que propone un procedimiento para generar los pesos del operador OWA, sobre la base del grado del orness y maximizando la entropía. En este caso se propone la solución del siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar: } - \sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i)$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

La solución de dicho problema permite obtener un vector de pesos denominado vector de pesos de máxima entropía. Luego, sobre la base de trabajos realizados por Yager

[128], [131], [130], donde plantea que la medida de la entropía puede ser expresada como $1 - \text{Max}_i(w_i)$. Entonces, el problema anteriormente propuesto por O'Hagan se transforma en:

Minimizar: $\text{Max}_i(w_i)$

Sujeto a: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i)w_i) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $0 \leq w_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$

Obteniéndose de esta forma una solución equivalente.

- Por otra parte, Xu ZS y Da QL [123] proponen utilizar las mismas condiciones planteadas por O'Hagan [85], [86], para determinar un vector de pesos de máxima entropía, pero además, incluyen la situación donde está disponible la información parcial de los pesos, resultando el modelo de programación lineal de la forma siguiente:

Maximizar: $-\sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i)$

Sujeto a: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i)w_i) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $w \in H$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $0 \leq w_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$

Donde H es el conjunto de toda la información de los pesos conocidos, y los mismos pueden ser construidos de la forma siguiente, para $i \neq j$:

1. Un ordenamiento débil: $\{w_i \geq w_j\}$
2. Un ordenamiento estricto: $\{w_i - w_j \geq \alpha_i\}$
3. Un ordenamiento con múltiplos: $\{w_i \geq \alpha_i w_j\}$
4. En forma de intervalo: $\{\alpha_i \leq w_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i\}$
5. Un ordenamiento de diferencias: $\{w_i - w_j \geq w_k - w_l\}$, para $j \neq k \neq l$.

En estos casos, los valores de α_i y ε_i son constantes positivas.

- Xu ZS y Da QL [122], proponen considerar de forma previa, la observación de una colección de muestras de tamaño m , para cada una de las n -tuplas de argumentos $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ y un valor de agregación asociado d_k . En este caso se requiere encontrar un vector de pesos $(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ tal que satisfaga la condición siguiente:

$$b_{k1}w_1 + b_{k2}w_2 + \dots + b_{kn}w_n = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde b_{kj} es el j -ésimo elemento de la colección de argumentos $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$.

Luego, a partir de lo antes referido, el modelo de programación lineal se plantea de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar: } J = \sum_{k=1}^m (e_k^+ + e_k^-), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Sujeto a: $\sum_{j=1}^n b_{kj} w_j - d_k - e_k^+ + e_k^- = 0, k = 1, 2, \dots, m$

$w \in H, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1, e_k^+ \geq 0, e_k^- \geq 0, k = 1, 2, \dots, m$

Donde:

- m es el tamaño de la muestra observada.
- H es el conjunto de toda la información de los pesos conocidos, y los mismos pueden ser construidos de la forma siguiente, para $i \neq j$:
 1. Un ordenamiento débil: $\{w_i \geq w_j\}$
 2. Un ordenamiento estricto: $\{w_i - w_j \geq \alpha_i\}$
 3. Un ordenamiento con múltiplos: $\{w_i \geq \alpha_i w_j\}$
 4. En forma de intervalo: $\{\alpha_i \leq w_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i\}$
 5. Un ordenamiento de diferencias: $\{w_i - w_j \geq w_k - w_i\},$ para $j \neq k \neq i.$

En estos casos, los valores de α_i y ε_i son constantes positivas.

- $e_k = \left| \sum_{j=1}^n b_{kj} w_j - d_k \right|, k = 1, 2, \dots, m$

- e_k^+ y e_k^- los valores de la desviación superior e inferior de la variable .

- Robert Fullér y P. Majlender [40], reformulan el modelo de programación matemática, tal que la función objetivo es minimizar la varianza de los pesos del operador OWA, y de esta forma obtener un vector de pesos W con la menor variabilidad posible. Esta propuesta se denomina método de la varianza mínima y se determina mediante la solución del siguiente modelo:

Minimizar: $D^2(W) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \frac{1}{n})^2$

Sujeto a: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$

- P. Majlender [77], propone un método para generar una clase paramétrica del operador OWA y sus respectivos pesos, sobre la base de maximizar la entropía de Rényi, donde la misma constituye la función objetivo. Este método requiere la solución del modelo siguiente:

Minimizar: $H_\beta(w) = \frac{1}{1-\beta} \log_2 \sum_{i=1}^n w_i^\beta$

Sujeto a: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$

Donde: $\beta \in \mathfrak{R}$ y $H_1(w) = - \sum_{i=1}^n w_i \log_2(w_i)$

- Wang y Parkan [138], proponen el modelo de programación matemática sobre la base de minimizar la disparidad máxima entre dos pesos adyacentes, con un nivel del *orness* dado, resultando la formulación del problema de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar: } \underset{i=1,2,\dots,n}{Max} |w_i - w_{i+1}|$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

- Wang [115], introduce dos modelos para la determinación del vector de pesos del operador OWA, formulándolos de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar: } J_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

El otro modelo solo propone cambiar la función objetivo, por lo que queda expresado de la forma siguiente:

$$\text{Minimizar: } J_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{w_i}{w_{i+1}} - \frac{w_{i+1}}{w_i} \right)^2$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((n-i) w_i) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

Como se puede observar, son diversos los métodos que emplean la programación matemática, modificando indistintamente la función objetivos y los requisitos a satisfacer, manteniendo en común en la mayoría de los casos el nivel de un *orness* dado.

4.3.2. Determinación del vector de pesos orientado por cuantificadores.

Otra variante para la determinación del vector de pesos es la orientada por cuantificadores. La lógica clásica identifica solo los cuantificadores existenciales (existe) y los universales (para todo), sin embargo en el lenguaje natural es muy común el empleo de términos tales como: muchos, por lo menos, algunos, pocos, y los mismos presentan limitaciones al ser representados con dichos cuantificadores. A partir de esta limitante Zadeh [144], introduce el término "cuantificador lingüístico", utilizando para ello conjuntos difusos, y distingue dos clases de cuantificadores lingüístico, los absolutos y relativos.

Zadeh [144], plantea que el cuantificador lingüístico absoluto puede ser representado como un subconjunto difuso Q de números reales no negativos, por tanto para cualquier $x \in \mathfrak{R}^+$, $Q(x)$ indica el grado en que x satisface el concepto asociado al cuantificador lingüístico. El

cuantificador lingüístico relativo indica la cuantía de proporción de términos tales como: la mayoría, algunos, sobre la mitad, pocos; y en este caso se representa como un subconjunto difuso Q en el intervalo unitario.

Particularmente, Yager [132], sobre la base de los trabajos antes referidos, distingue tres clases del cuantificador relativo, definiéndolo de la forma siguiente:

Definición : Un subconjunto difuso Q sobre la recta numérica real se denomina cuantificador Monótono Regular creciente (RIM), si:

1. $Q(0) = 0$
2. $Q(1) = 1$
3. $Q(x) \geq Q(y)$, si $x > y$

Como ejemplos de este tipo de cuantificador se pueden citar: todos, la mayoría, muchos, por lo menos.

Definición : Un subconjunto difuso Q sobre la recta numérica real se denomina cuantificador Monótono Regular Decreciente (RDM), si:

1. $Q(0) = 1$
2. $Q(1) = 0$
3. $Q(y) \geq Q(x)$, si $x > y$

Como ejemplos de este tipo de cuantificador se pueden citar: a lo sumo uno, pocos, a lo sumo.

Definición : Un subconjunto difuso Q sobre la recta numérica real se denomina cuantificador Regular UniModal (RUM), si:

1. $Q(0) = 0$
2. $Q(1) = 0$
3. Existen dos valores $a, b \in [0, 1]$, donde $a < b$, tal que:
 - a) Para $y < a$, $Q(x) \leq Q(y)$, si $x < y$
 - b) Para $x \in [a, b]$, $Q(x) = 1$
 - c) Para $x > b$, $Q(x) \geq Q(y)$, si $x < y$

Estos cuantificadores proporcionan un procedimiento de agregación de información guiados por conceptos expresados de forma verbal. Además, tienen como característica que el cuantificador RIM se puede expresar como el complemento del cuantificador RDM y viceversa, y el cuantificador RUM puede ser expresado por la intersección de los cuantificadores RIM y RDM. Por tanto, a partir del cuantificador RIM se puede obtener los cuantificadores RDM y RUM.

Posteriormente, Yager [132], utilizando Q como un cuantificador Monótono Regular creciente (RIM), el vector de pesos se puede obtener a través de la expresión:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right) \quad (4.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

4.3.3. Determinación del vector de pesos a través de fórmulas analíticas.

Para la determinación del vector de pesos del operador OWA, también se puede utilizar fórmulas analíticas. Esta fórmula analítica tienen la ventaja de ser fácil su utilización, y donde solo es necesario especificar la cantidad de criterios. En la literatura consultada se encuentran una gran diversidad de fórmulas, entre las que se pueden citar:

- La familia del operador OWA, tal que el vector de pesos se define por [136]:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\lambda) + \lambda & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{n}(1-\lambda) & \text{si } i \neq 1 \end{cases}, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (4.5)$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\beta) & \text{si } i \neq n \\ \frac{1}{n}(1-\beta) + \beta & \text{si } i = n \end{cases}, \quad \beta \in [0, 1] \quad (4.6)$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-(\lambda+\beta)) + \lambda & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{n}(1-(\lambda+\beta)) & \text{si } 1 < i < n \\ \frac{1}{n}(1-(\lambda+\beta)) + \beta & \text{si } i = n \end{cases}, \quad \lambda, \beta \in [0, 1] \text{ y } \lambda + \beta \leq 1 \quad (4.7)$$

Como se puede observar las funciones 4.5, 4.6 y 4.7 mantienen de forma constante los valores de los pesos w_i , tal que $i = 2, 3, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $i = 2, \dots, n-1$,

respectivamente.

- También, Filev y Yager [37], proponen funciones definidas de forma recursiva, y las mismas se expresan por:

$$w_i = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = 1 \\ w_{i-1}(1 - w_1) & \text{si } 1 < i < n \\ w_{n-1}(1 - w_1)/w_1 & \text{si } i = n \end{cases} \quad (4.8)$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{w_2(1-w_n)}{w_n} & \text{si } i = 1 \\ w_{i+1}(1 - w_n) & \text{si } 1 < i < n \\ (1 - \alpha) & \text{si } i = n \end{cases} \quad (4.9)$$

- Zeshui Xu [118], para determinar los pesos asociados al operador OWA, propone una fórmula analítica sobre la base de la distribución normal. En este caso se parte del cálculo de la media μ_n y la desviación estándar σ_n de la colección formada por $1, 2, \dots, n$, tal que:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \frac{n(1+n)}{2} = \frac{1+n}{2} \quad y \quad \sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i - \mu_n)^2} \quad (4.10)$$

Y los pesos w_i asociados al operador OWA, a través de:

$$w_i = \frac{e^{-\left(\frac{(i-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right)}}{\sum_{j=1}^n e^{-\left(\frac{(j-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right)}} \quad (4.11)$$

Por la concepción asumida en este método, el $Max_i(w_i)$ se encuentra en la posición central del vector de pesos W .

- Byeong Seok Ahn [2], presenta cuatro fórmulas analíticas para determinar el vector de pesos W de un operador OWA. Las mismas tienen como propiedad que ordenan los pesos, y el grado del *orness* es constante, independientemente de la cantidad de criterios

a utilizar en la agregación. Las fórmulas analíticas son:

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}, \text{ donde la medida del } orness \text{ es igual a } \frac{3}{4} \quad (4.12)$$

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i \frac{1}{(n-j+1)}, \text{ donde la medida del } orness \text{ es igual a } \frac{1}{4} \quad (4.13)$$

$$w_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \text{ donde la medida del } orness \text{ es igual a } \frac{2}{3} \quad (4.14)$$

$$w_i = \frac{2i}{n(n+1)}, \text{ donde la medida del } orness \text{ es igual a } \frac{1}{3} \quad (4.15)$$

A partir del grado del *orness* de cada una de estas fórmulas analíticas se puede plantear que las fórmulas (4.12) y (4.14) $\forall i, j : i < j$, se cumple que $w_i > w_j$, y el caso contrario para las fórmulas (4.13) y (4.15), $\forall i, j : i < j$, se cumple que $w_i < w_j$.

Además, las fórmulas (4.12) y (4.13) para un mismo valor de n , permiten obtener los mismos pesos, con la diferencia que están ordenados descendientemente y ascendientemente respectivamente. De forma análoga ocurre para las fórmulas (4.14) y (4.15).

- Posteriormente, Byeong Seok Ahn y Haechurl Park [4], a partir del modelo de programación matemática formulado por Robert Fullér y P. Majlender [40], donde el objetivo es minimizar la varianza de los pesos del operador OWA; propone utilizar las mismas condiciones construyendo una función que utiliza la función de Lagrange para un problema de optimización, resultando:

$$L(W, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^n \left(w_i - \frac{1}{n} \right)^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i)w_i - \alpha \right) \quad (4.16)$$

A partir del calculo de las derivadas parciales respecto a w_i, Ω, β y las correspondientes sustituciones y transformaciones, se obtiene una función analítica que depende de un *orness* dado, el subíndice (posición) del peso y la cantidad de criterios, tal que permite determinar los componentes del vector de peso, el mismo se define de la forma siguiente:

$$w_i = \frac{1}{n} + \frac{6(2i-n-1)}{n(n+1)}(0,5-\alpha) \quad (4.17)$$

De forma general, la utilización de fórmulas analíticas es muy fácil su empleo de manera práctica, pues solo basta evaluar la expresión en correspondencia con el total de criterios a utilizar (n), y se obtiene de forma directa todos los pesos del vector.

4.3.4. Determinación del vector de pesos W a través de Procedimientos.

Otra concepción es la utilización de procedimientos para determinar el vector de pesos asociado al operador OWA, se caracteriza por seguir determinados pasos algorítmicos, entre ellos se pueden citar:

- La propuesta de Yager y Filev [136], [37],[137], donde proponen un procedimiento iterativo sobre la base de un conjunto inicial de valores y $\lambda_i(l)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_i(0) = 0$. Se supone que existe una colección de m muestras y cada una de ellas está formada por n argumentos $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$ con sus respectivos valores tras la agregación d_k . Además, se denota el reordenamiento de los objetos de las muestras por $(b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn})$, donde los b_{kj} son el j -ésimo mayor elemento del argumento de la colección $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$. Este procedimiento se estructura de la forma siguiente:

1. Calcular la estimación inicial de los λ_i , $\lambda_i(l)$ con $i = 1, 2, \dots, n$, una nueva observación que consiste en los argumentos ordenados $b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}$ y un valor de agregación d_k .
2. Usar los $\lambda_i(l)$ con $i = 1, 2, \dots, n$ para proporcionar una estimación inicial de los pesos, tal que:

$$w_i(l) = \frac{e^{\lambda_i(l)}}{\sum_{j=1}^n e^{\lambda_j(l)}} \quad (4.18)$$

3. Utilizar la estimación de los pesos con los argumentos ordenados para calcular el valor de agregación.

$$d_k^* = b_{k1}w_1(l) + b_{k2}w_2(l) + \dots + b_{kn}w_n(l) \quad (4.19)$$

$k = 1, 2, \dots, m$ (m es la cantidad de muestras de la colección)

4. Actualizar la estimación de λ_i

$$\lambda_i(l+1) = \lambda_i(l) - \beta \cdot w_i(l) \cdot (b_{ki} - d_k^*) \cdot (d_k^* - d_k), i = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

- Otro método algorítmico, es el propuesto por Robert Fullér [39], el cual tomó como base el problema de optimización planteado por O'Hagan [85], [86] para determinar el vector de Máxima Entropía. Dicho problema de optimización lo resuelve con el empleo de los multiplicadores de Lagrange; obteniendo de esta forma un nuevo método:

1. Si $n = 2$ entonces $w_1 = \alpha$, $w_2 = 1 - \alpha$

2. Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$ entonces el vector de pesos es $W = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$ y $W = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, respectivamente, con un valor de dispersión igual a cero.
3. Si $n \geq 3$ y $0 < \alpha < 1$ entonces

$$w_i = \sqrt[n-1]{w_1^{n-i} w_n^{i-1}} \quad (4.21)$$

$$w_n = \frac{((n-1)\alpha - n)w_1 + 1}{(n-1)\alpha + 1 - n \cdot w_1}$$

$$w_1 [(n-1)\alpha + 1 - n \cdot w_1]^n = ((n-1)\alpha)^{n-1} [((n-1)\alpha - n)w_1 + 1]$$

Finalmente, resolviendo las tres expresiones antes referidas se puede obtener el vector de pesos.

4.3.5. Determinación del vector de pesos a través de un operador OWA equidiferente.

La característica básica del operador OWA equidiferente es que los pesos adyacentes tienen una diferencia común. Entre los investigadores que han realizado esta propuesta se pueden citar:

- Xinwang Liu [74] realiza un estudio sobre el operador OWA equidiferente y propone varios algoritmos para determinar los pesos asociados al referido operador, que se describen a continuación:
 1. A partir de la selección del valor α y del tamaño n del vector de pesos W , se procede de la forma siguiente:

Caso #1: si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces la función que representa los pesos está dado por:

 - a) Determinar el valor de m , a través de:

$$\begin{cases} 2n - 1 - 2\alpha(n-1) \leq m \leq 3n - 1 - 3\alpha(n-1) \\ 2 \leq m \leq n \end{cases} \quad (4.22)$$

- b) Determinar el valor de d y a , a través de:

$$d = \frac{6(2n - m - 1 - 2n\alpha + 2\alpha)}{m(m^2 - 1)}, \quad a = \frac{2 + dm - dm^2}{2m} \quad (4.23)$$

c) Generar los pesos del operador OWA, a través de:

$$w_i = \begin{cases} a + (i - 1)d & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{si } m + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.24)$$

Caso #2: si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces está dado por:

a) Determinar el valor de m , a través de:

$$\begin{cases} 2\alpha(n - 1) + 1 \leq m \leq 3\alpha(n - 1) + 2 \\ 2 \leq m \leq n \end{cases} \quad (4.25)$$

b) Determinar el valor de d y a , a través de:

$$d = \frac{6(2n\alpha - 2\alpha - m + 1)}{m(m^2 - 1)}, \quad a = \frac{2 - dm + dm^2}{2m} \quad (4.26)$$

c) Generar los pesos de operador OWA, a través de:

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n - m \\ a - (n - i)d & \text{si } n - m + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.27)$$

Como se puede observar para ambos casos, en el paso (1), m puede tomar más de un valor, por tanto es posible obtener m vectores de pesos W . Es importante señalar que a través del caso 1, el vector de pesos, se obtiene ordenado de forma descendente, mientras que en el caso 2, se obtiene ordenado de forma ascendente.

2. Sobre la base del algoritmo anterior y operando con el máximo de m , se obtiene un nuevo algoritmo para obtener los pesos del operador OWA, que en este caso recibe el nombre de operador OWA equidiferente de separación máxima. El algoritmo se estructura de la forma siguiente:

a) Determinar el valor de m , a través de:

$$m = \begin{cases} 3\alpha(n-1) + 2 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{3} \\ n & \text{si } \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \\ 3n - 3\alpha(n-1) - 1 & \text{si } \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

b) Determinar el valor de d , a través de:

$$d = \begin{cases} \frac{6(2\alpha - 2n\alpha + m - 1)}{m(m^2 - 1)} & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{3} \\ \frac{6(1 - 2\alpha)}{n(n+1)} & \text{si } \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \frac{6(2\alpha - 2n\alpha + 2n - m - 1)}{m(m^2 - 1)} & \text{si } \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

c) Si $d \leq 0$ entonces la generación de los pesos se hace a través de:

$$w_i = \begin{cases} \frac{2 + dm - dm^2}{2m} + (i - 1)d & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{si } m + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.30)$$

Sino los pesos se obtendrán con la función:

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n - m \\ \frac{2 - dm + dm^2}{2m} - (n - i)d & \text{si } n - m + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.31)$$

En este algoritmo también se obtiene el vector de pesos W ordenado descendente o ascendentemente si $d \leq 0$ ó $d > 0$, respectivamente.

- Además, Xinwang Liu [74], plantea otro método para determinar el vector de pesos W asociado al operador OWA equidiferente de separación máxima. En este caso, para $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $F_W(x) = c$, donde $c \in [\min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}, \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}]$, resulta:

Caso #1: Para $c \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

a) Determinar el máximo valor de m , tal que ($m \leq n$) y satisfaga la expresión:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \leq c \leq \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m 2(m-i)x_i \quad (4.32)$$

b) Determinar el valor de d y a , a través de:

$$F_W(x) = \sum_{i=1}^m \frac{-dm^2 + (2i-1)dm + 2}{2m} x_i = c, \quad a = \frac{2 + dm - dm^2}{2m} \quad (4.33)$$

c) Generar los pesos de operador OWA, a través de:

$$w_i = \begin{cases} a + (i-1)d & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{si } m+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.34)$$

Caso #2: Para $c < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ entonces:

a) Determinar el máximo valor de m , tal que ($m \leq n$) y satisfaga la expresión:

$$\sum_{i=n-m+1}^n \frac{2(n-m+1-i)}{m(m-1)} x_i \leq c \leq \frac{1}{m} \sum_{i=n-m+1}^n x_i \quad (4.35)$$

b) Determinar el valor de d y a , a través de:

$$F_W(x) = \sum_{i=n-m+1}^n \frac{dm^2 - (2n-2i+1)dm + 2}{2m} x_{n-i+1} = c, \quad a = \frac{2 - dm + dm^2}{2m} \quad (4.36)$$

c) Generar los pesos de operador OWA, a través de:

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n-m \\ a - (n-i)d & \text{si } n-m+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.37)$$

- La propuesta realizada por Byeong Seok Ahn y Haechurl Park [4], también cumple las

características básicas del operador OWA equidiferente, el cual fue analizado anteriormente.

4.3.6. Determinación del vector de pesos a partir de la prioridad de los criterios.

Yager introduce una clase de operadores de agregación [134], [135], que denomina operador promedio priorizado. El mismo supone que se tiene una colección de criterios $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$, donde existe un orden de prioridad entre los criterios, que sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe un orden lineal de la forma siguiente:

$$C_1 > C_2 > C_3 > \dots > C_n$$

En el orden establecido el criterio C_i tiene una prioridad más alta que el criterio C_k , si $i < k$. Además, para cualquier alternativa x y el criterio C_i , el valor de $C_i(x) \in [0, 1]$, el cual expresa el grado de satisfacción del criterio C_i para la alternativa x .

Para la determinación del vector de pesos W , se parte de la relación de orden establecida para los diferentes criterios y el grado de satisfacción del criterio C_i para la alternativa x , luego se procede de la forma siguiente:

1. Se denota $S_k = C_k(x)$.
2. A cada criterio se le asocia un valor $u_i = T_i$, el cual se llama peso no normalizado y se define de la forma siguiente:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ S_{i-1} \cdot T_{i-1} & \text{si } i \neq 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

Finalmente, se obtiene los pesos normalizados a través de:

$$w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^n u_j} \quad (4.39)$$

Con ello los pesos de los criterios son dependiente de las valoraciones de las alternativas.

4.4. Clase de funciones lineales.

Como fue analizado en el epígrafe anterior, para la determinación de los pesos w_i existen en la literatura diversas funciones. El conjunto de pesos obtenido mediante esta variante cumple, que los w_i se encuentran alineados. Esta situación sirvió de base para estudiar el comportamiento de otras funciones cuyo comportamiento fuese lineal, y de esta forma obtener una clase de funciones que contenga un conjunto de infinitas funciones lineales F_L , tal que permiten obtener los w_i cumpliendo las propiedades de los OWA.

Para la obtención del conjunto de funciones lineales que generen los w_i cumpliendo las propiedades de los OWA, se partió de la identificación del punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$ (ver fig. 4.1). Por el punto P_m pasan infinitas funciones lineales (por definición). Por lo que se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Todas las funciones lineales que pasan por el punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$ son definidas por la función lineal $f_g(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$.*

Demostración:

Sea una función lineal cualquiera,

$$f(x) = a \cdot x + b, \quad \text{donde } a, b \in \Re \quad (4.40)$$

Por premisa se conoce que el punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$ pertenece a la función lineal $f(x)$, entonces se cumple que:

$$a \left(\frac{1+n}{2} \right) + b = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.41) en (4.40), se obtiene $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$

c.q.d

Teorema 4.4.2. *Todas las funciones lineales $f(x)$ que pasan por el punto P_m cumplen que $\sum_{i=1}^n f(i) = 1$ donde $i = 1, 2, \dots, n$.*

Demostración:

Por el teorema (4.4.1) se conoce que $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$, luego

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{i=1}^n \left[a \cdot i + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \right] = a \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - a \sum_{i=1}^n \frac{1+n}{2}$$

teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= a \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{1}{n} \cdot n - a \cdot n \cdot \left(\frac{1+n}{2} \right) = a \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 1 - a \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = 1$$

c.q.d

Ejemplo 4.4.1. Sea la pendiente $a = -1$, entonces por el teorema (4.4.1) se obtiene la función $f(x) = -x + \frac{n^2+n+2}{2n}$, luego considerando a $n = 5$, resulta que $f(x) = -x + \frac{32}{10}$, y al calcular la imagen de $f(i)$, donde $i = 1, \dots, 5$, se obtiene:

Tabla 4.1: Cálculo de las imágenes.

1	2	3	4	5	Suma
2.2	1.2	0.2	-0.8	-1.8	1

Como se ha demostrado, esta clase de funciones verifica que $\sum_{i=1}^n f(i) = 1$, sin embargo, no todas las funciones cumplen la propiedad de generar w_i que verifiquen que, $\forall f(i) : f(i) \in [0, 1]$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Tal situación implica la necesidad de identificar el conjunto de funciones que si cumplen dicha propiedad.

Para delimitar el conjunto de funciones lineales F que cumplan las propiedades antes referidas, se hace necesario identificar las dos funciones lineales que representan las cotas del conjunto de funciones.

Una de las funciones que acota al conjunto de funciones es $f_{Ave}(x) = \frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$, la cual representa que todos los $w_i = \frac{1}{n}$, $\forall i : 1 \leq i \leq n$. En este caso la función $f_{Ave}(x)$ tiene pendiente igual a cero.

Para obtener la otra función lineal que acote el conjunto de funciones F_L , se asume que además de pasar por el punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$ también contiene al punto $P_k(n, 0)$ Según esto, la representación gráfica de la función $f_{sup}(x)$ estaría dada por:

El punto $P_k(n, 0)$, tal y como está definido tendría asociado un peso $w_n = 0$, no teniendo sentido tratarlo como peso de un criterio. Por ello, solo bastaría eliminar el criterio correspondiente, luego en lugar de tener n pesos obtendríamos $(n - 1)$. Sin embargo, es útil para delimitar hasta qué valor puede llegar w_n (último peso), y por ende determinar la función lineal que acota al conjunto de funciones lineales F_L .

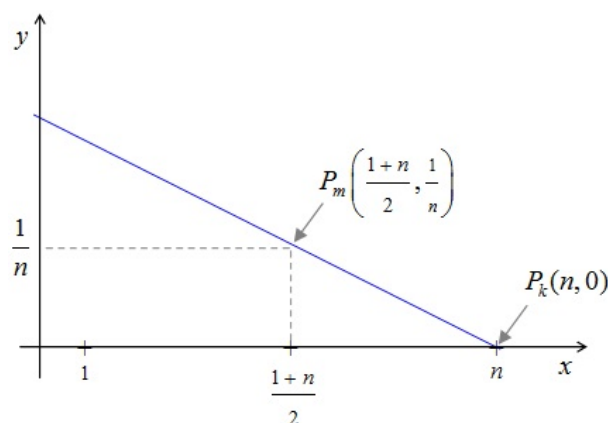


Figura 4.1: Representación gráfica de la función $f_{\text{sup}}(x)$.

A partir de los puntos $P_m\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n}\right)$ y $P_k(n, 0)$, se puede determinar la función lineal $f_{\text{sup}}(x) = a \cdot x + b$, que pasa por dichos puntos, donde a es la pendiente y b la intersección con el eje y .

Teorema 4.4.3. *Dados los puntos P_m y P_k antes definidos. La recta que pasa por ellos viene dada por la expresión $f_{\text{sup}}(x) = \frac{-2}{n \cdot (n-1)} \cdot x + \frac{2}{(n-1)}$.*

Demostración:

Por definición la pendiente de la recta será $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y sustituyendo los valores correspondientes de los puntos P_m y P_k , se obtiene:

$$a = \frac{0 - \frac{1}{n}}{n - \frac{1+n}{2}} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{2}} = \frac{-2}{n \cdot (n-1)}$$

A partir de la pendiente a y uno de los puntos utilizados (en este caso tomamos P_m), se obtiene el valor de (intersección con el eje y):

$$\frac{1}{n} = \frac{-2}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{(1+n)}{2} + b \Rightarrow b = \frac{1}{n} + \frac{(1+n)}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{(n-1)}$$

c.q.d

Teorema 4.4.4. *El conjunto de todas las funciones lineales monótonas decrecientes que permiten obtener los w_i , tal que contienen al punto $P_m\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n}\right)$ y cumplen las propiedades de los OWA, son aquellas que están acotadas por las funciones $f_{\text{Ave}}(x)$ y $f_{\text{sup}}(x)$ (ver fig. 4.2).*

Demostración:

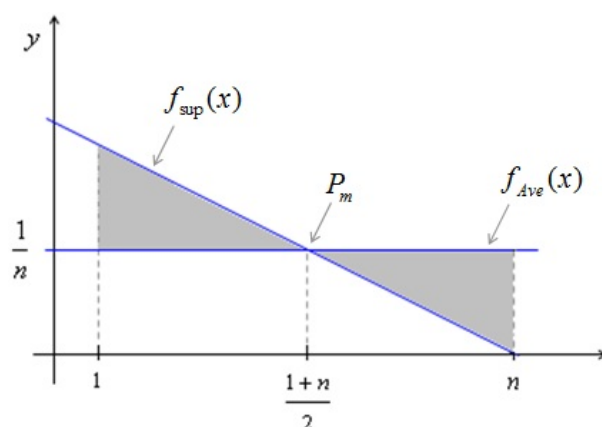


Figura 4.2: Región del conjunto de funciones lineales monótonas decrecientes

Por premisa, el conjunto de funciones lineales contienen el punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$, por tanto la forma general de estas funciones lineales está dada por $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$ (teorema 4.4.1). Además, debe cumplir las propiedades de los OWA, donde se verifica el cumplimiento de que la $\sum_{i=1}^n f(i) = 1$, por el teorema (4.4.2).

Como es un OWA también cumple que $f(i) \in [0, 1]$ donde $i = 1, 2, \dots, n$, por tanto $0 \leq f(i) \leq 1$.

Además, $f(i)$ es una función monótona decreciente por tanto se cumple que $f(1) \geq f(i)$ y $f(n) \leq f(i)$, luego se puede establecer la siguiente relación $0 \leq f(n) \leq f(i) \leq f(1) \leq 1$.

- Caso #1: $0 \leq f(n)$

$$0 \leq an + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \Rightarrow 0 \leq a \left(n - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \leq a \left(\frac{2n-1-n}{2} \right) \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq a \left(\frac{n-1}{2} \right) \Rightarrow -\frac{2}{n(n-1)} \leq a$$

- Caso #2: $f(1) \leq 1$

$$a + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \leq 1 \Rightarrow a \left(1 - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow a \left(\frac{1-n}{2} \right) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -a \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{n-1}{n} \Rightarrow -a \leq \frac{n-1}{n} \left(\frac{2}{n-1} \right) \Rightarrow -a \leq \frac{2}{n} \Rightarrow a \geq \frac{-2}{n}$$

Se deben cumplir los resultados obtenidos en los casos 1 y 2, además de $a < 0$ (por ser $f(i)$ monótona decreciente). Al representar los mismos en la recta real se obtiene:

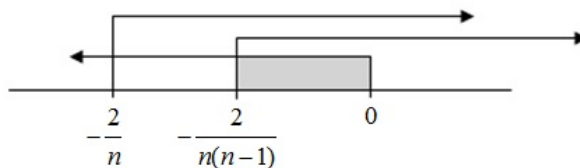


Figura 4.3: Región de las pendientes

Finalmente se puede concluir que a es, $-\frac{2}{n(n-1)} < a < 0$, por lo que la pendiente $a \in \left] \frac{-2}{n \cdot (n-1)}, 0 \right[$ y los extremos del intervalo se corresponden con las pendientes de las funciones $f_{\text{sup}}(x)$ y $f_{\text{Ave}}(x)$ que acotan al conjunto de funciones.

c.q.d

En el caso analizado anteriormente, las funciones lineales que pasan por el haz de rectas tienen pendientes negativas; esto permite obtener w_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, ordenados de forma descendente ($w_1 > w_2 > \dots > w_n$).

De forma análoga, se puede obtener otro haz de funciones lineales F_{L^*} . En este caso la función $f_{\text{sup}^*}(x)$ que acota el haz de funciones lineales pasa por los puntos $P_{k^*}(1, 0)$ y $P_m\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n}\right)$, (ver fig. 4.4).

Teorema 4.4.5. *Dados los puntos P_m y P_{k^*} , la recta que pasa por ellos viene dada por la expresión $f_{\text{sup}^*}(x) = \frac{2}{n \cdot (n-1)} \cdot x - \frac{2}{n \cdot (n-1)}$*

Demostración:

Por definición la pendiente de la recta será $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y sustituyendo los valores correspondientes de los puntos P_m y P_{k^*} , se obtiene:

$$a = \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1+n}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n-2}{2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n-1)}{2}} = \frac{2}{n \cdot (n-1)}$$

A partir de la pendiente a y uno de los puntos utilizados (en este caso P_m), se obtiene el valor de b (intersección con el eje y):

$$\frac{1}{n} = \frac{2}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{(1+n)}{2} + b \Rightarrow b = \frac{1}{n} - \frac{(1+n)}{n \cdot (n-1)} = \frac{-2}{n \cdot (n-1)}$$

c.q.d

Teorema 4.4.6. *El conjunto de todas las funciones lineales monótonas crecientes que permiten obtener los w_i , tal que contienen al punto $P_m\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n}\right)$ y cumplen las propiedades de los*

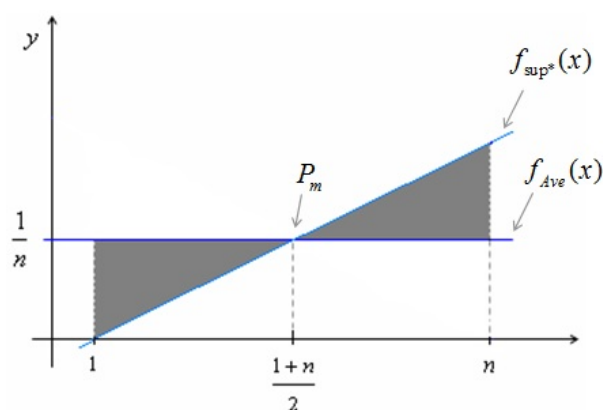


Figura 4.4: Región del conjunto de funciones lineales F_{L*} monótonas crecientes

OWA, son aquellas que están acotadas por las funciones $f_{\text{sup}^*}(x)$ y $f_{\text{Ave}}(x)$ (ver fig. 4.4).

Demostración:

Por premisa, el conjunto de funciones lineales contienen el punto $P_m \left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{n} \right)$, por tanto la forma general de estas funciones lineales está dada por $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$ (teorema 4.4.1).

Además, debe cumplir las propiedades de los OWA, donde se verifica el cumplimiento de que la $\sum_{i=1}^n f(i) = 1$, por el teorema 4.4.2.

Como es un OWA también cumple que $f(i) \in [0, 1]$ donde $i = 1, 2, \dots, n$, por tanto $0 \leq f(i) \leq 1$.

Además, $f(i)$ es una función monótona creciente por tanto se cumple que $f(1) \leq f(i)$ y $f(n) \geq f(i)$, luego se puede establecer la siguiente relación $0 \leq f(1) \leq f(i) \leq f(n) \leq 1$

- Caso #1: $0 \leq f(1)$

$$0 \leq a + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \Rightarrow 0 \leq a \left(1 - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \leq a \left(\frac{2-1-n}{2} \right) \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq a \left(\frac{1-n}{2} \right) \Rightarrow \frac{2}{n(n-1)} \geq a$$

- Caso #2: $f(n) \leq 1$

$$an + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \leq 1 \Rightarrow a \left(n - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow a \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$a \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{n-1}{n} \Rightarrow a \leq \frac{n-1}{n} \left(\frac{2}{n-1} \right) \Rightarrow a \leq \frac{2}{n}$$

Se deben cumplir los resultados obtenidos en los casos 1 y 2, además de $a > 0$ (por ser $f(i)$ monótona creciente). Al representar los mismos en la recta real se obtiene:

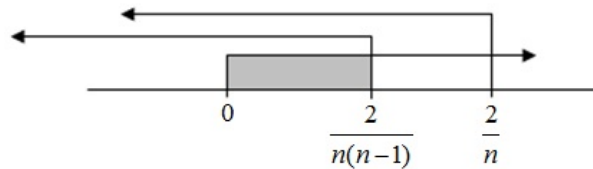


Figura 4.5: Región de las pendientes.

Se puede concluir que a es, $0 < a < \frac{2}{n(n-1)}$, por lo que la pendiente $a \in \left] 0, \frac{2}{n(n-1)} \right[$ y los extremos del intervalo se corresponden con las pendientes de las funciones $f_{Ave}(x)$ y $f_{sup^*}(x)$ que acotan al conjunto de funciones.

c.q.d

En este caso, las funciones lineales que pasan por el haz de rectas tienen pendientes positivas, lo cual permite obtener w_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, ordenados de forma ascendente ($w_1 < w_2 < \dots < w_n$).

Finalmente, se puede plantear que existe dos haces de funciones lineales F_L y F_{L^*} (ver fig. 4.6), tal que las funciones lineales que contienen cumplen las propiedades de los OWA.

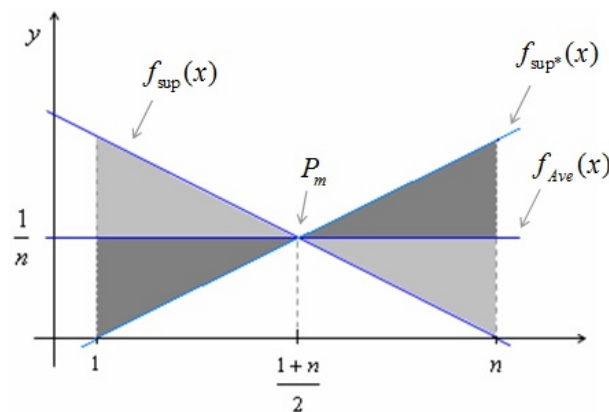


Figura 4.6: Región del conjunto de funciones lineales F_L y F_{L^*}

Para obtener una función lineal perteneciente al haz de rectas (F_L ó F_{L^*}), solo es necesario seleccionar la pendiente a , tal que $a \in \left] \frac{-2}{n(n-1)}, \frac{2}{n(n-1)} \right[$.

Para la utilización práctica de una de las funciones perteneciente al conjunto F_L o F_{L^*} , solo es necesario aplicar el siguiente procedimiento:

1. Seleccionar la cantidad de pesos n a calcular.
2. Seleccionar el valor de la pendiente a , tal que $a \in \left] \frac{-2}{n(n-1)}, 0 \right[$ ó $a \in \left] 0, \frac{2}{n(n-1)} \right[$ (conjuntos de pendientes de funciones lineales). Si a es negativa entonces los w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ se ordenan descendientemente ($w_1 > w_2 > \dots > w_n$), en caso contrario (a positivo) se ordenan ascendientemente ($w_1 < w_2 < \dots < w_n$).
3. A partir de la pendiente a y el valor de n , determinar la función lineal a utilizar sustituyendo en $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right)$.
4. Evaluar la función $f(x)$ para $x = 1, 2, \dots, n$, obteniendo de esta forma los correspondientes w_i , donde $i = 1, 2, \dots, n$.

Como se puede observar, el conjunto de pendientes asociado a las funciones lineales contiene infinitos valores, por tanto la selección del valor a depende de cuanto mayor se desee la diferencia entre los pesos w_i y w_{i+1} ; en este caso el valor de a debe estar más próximo al extremo izquierdo del intervalo, luego si el valor de la pendiente se aproxima al extremo derecho del intervalo entonces la diferencia entre los pesos w_i y w_{i+1} tiende a cero (0).

Como se ha referido anteriormente, la construcción de la función lineal parte de la selección de un valor de la pendiente a , donde a pertenece a un determinado intervalo. En este caso se muestra el intervalo de trabajo para $n = 2, \dots, 10$, tanto para funciones de pendiente negativas como positivas (ver tabla 4.2).

Tabla 4.2: Intervalos de la pendiente para $n = 2, \dots, 10$.

Valores de n	Intervalo de la pendiente a	
	Pendiente (-)	Pendiente (+)
2	$] -1, 0[$	$] 0, 1[$
3	$] -\frac{1}{3}, 0[$	$] 0, \frac{1}{3}[$
4	$] -\frac{1}{6}, 0[$	$] 0, \frac{1}{6}[$
5	$] -\frac{1}{10}, 0[$	$] 0, \frac{1}{10}[$
6	$] -\frac{1}{15}, 0[$	$] 0, \frac{1}{15}[$
7	$] -\frac{1}{21}, 0[$	$] 0, \frac{1}{21}[$
8	$] -\frac{1}{28}, 0[$	$] 0, \frac{1}{28}[$
9	$] -\frac{1}{36}, 0[$	$] 0, \frac{1}{36}[$
10	$] -\frac{1}{45}, 0[$	$] 0, \frac{1}{45}[$

Ejemplo 4.4.2. *Se tienen 5 criterios para ser utilizados en un análisis multicriterio y se le deben asociar pesos para indicar su importancia relativa. Se define un orden entre los diferentes criterios, tal que los criterios de la izquierda tienen mayor importancia que los criterios de la derecha. Calcular los pesos asociados a cada criterio.*

En este caso $n = 5$, por tanto el intervalo de la pendiente a está dado por $]-\frac{1}{10}, 0[$. Sean tres valores diferentes de la pendiente a :

- *Próximo al extremo izquierdo del intervalo ($a_1 = -0,097$).*
- *En el centro del intervalo ($a_3 = -0.05$).*
- *Próximo al extremo izquierdo del intervalo ($a_5 = -0.003$).*

Cuando se sustituyen los respectivos valores de las pendientes seleccionadas en la función general $f(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2}\right)$, se obtienen las funciones:

- $f_1(x) = -0,097x + 0,491$
- $f_2(x) = -0,05x + 0,35$
- $f_3(x) = -0,003x + 0,209$

Al calcular los valores de los pesos w_i , donde $i = 1, \dots, 5$ a través de las respectivas funciones, se obtienen los resultados de la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Resultados de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
a	-0.097	-0.05	-0.003
w_1	0.394	0.3	0.206
w_2	0.297	0.25	0.203
w_3	0.2	0.2	0.2
w_4	0.103	0.15	0.197
w_5	0.006	0.1	0.194
Suma	1	1	1

A través de la representación gráfica de los pesos obtenidos, se puede observar los respectivos comportamientos (ver fig. 4.7).

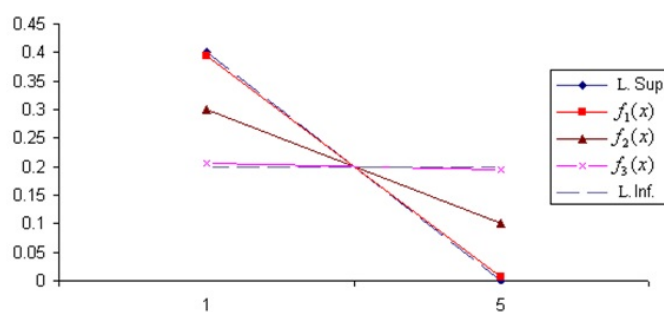


Figura 4.7: Representación de los segmentos de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

4.4.1. Estudio del grado de satisfacción α de la clase de funciones lineales.

La medida del *orness* (α) juega un papel muy importante en la caracterización del operador OWA, por tal motivo es necesario su análisis para la clase de funciones lineales identificada. Para su estudio se parte del planteamiento de los teoremas siguientes.

Teorema 4.4.7. Dada la función $f_{Ave}(x)$, la pendiente $a = 0$ y el valor de $\alpha = 0.5$.

Demostración:

$$\alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) f_{Ave}(i) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i \right) = \frac{n-1}{2(n-1)} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} = 0.5$$

teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n n = n^2$ y $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

c.q.d

Teorema 4.4.8. El conjunto de funciones lineales $f_g(x)$ que representan un OWA, tal que, la pendiente $a \rightarrow 0$ entonces se verifica que $\alpha \rightarrow 0.5$.

Demostración:

Por definición se conoce que $\alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) f_g(i)$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) \left[ai + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \right] \\ &= \left(\alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) \left[ai + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(ai(n-i) + \frac{(n-i)}{n} - a \frac{(1+n)}{2} (n-i) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(ani - ai^2 + 1 - \frac{i}{n} - a \frac{(1+n)}{2} (n-i) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left[an \sum_{i=1}^n i - a \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i - a \frac{(1+n)}{2} \left(n \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n i \right) \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[an \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n - \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - a \frac{(1+n)}{2} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\frac{an^2(n+1)}{2} - \frac{an(n+1)(2n+1)}{6} + n - \frac{(n+1)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - a \frac{(1+n)}{2} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \right] \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left[an^2 - \frac{an(2n+1)}{3} - 1 - a \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \right] + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left[\frac{3an^2 - 2an^2 - an}{3} - 1 - a \left(\frac{2n^2 - n^2 - n}{2} \right) \right] + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left[\frac{an^2 - an}{3} - 1 - a \left(\frac{n^2 - n}{2} \right) \right] + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left(\frac{an^2 - an}{3} - 1 + \frac{-an^2 + an}{2} \right) + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left(\frac{2(an^2 - an) - 6 + 3(-an^2 + an)}{6} \right) + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left(\frac{2an^2 - 2an - 6 - 3an^2 + 3an}{6} \right) + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n+1}{2(n-1)} \left(\frac{-an^2 + an - 6}{6} \right) + \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(-an^2 + an - 6)}{12(n-1)} + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{-an^3 + an^2 - 6n - an^2 + an - 6}{12(n-1)} + \frac{n}{n-1} = \frac{-an^3 - 6n + an - 6}{12(n-1)} + \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{-an^3 - 6n + an - 6 + 12n}{12(n-1)} = \frac{-an^3 + 6n + an - 6}{12(n-1)} \\
&= \frac{-an(n^2 - 1) + 6n - 6}{12(n-1)} = \frac{-an(n-1)(n+1)}{12(n-1)} + \frac{6(n-1)}{12(n-1)} \\
\alpha &= \frac{-an(n+1)}{12} + \frac{1}{2} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Al calcular $\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-an(n+1)}{12} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

c.q.d

Teorema 4.4.9. *El conjunto de funciones lineales $f_g(x)$, que representan un OWA y cuya pendiente es $a < 0$ entonces el valor del $\alpha > 0.5$.*

Demostración:

A partir del resultado obtenido en el teorema 4.4.8, $\alpha = \frac{-an(n+1)}{12} + \frac{1}{2}$ (4.42), además se conoce que la mayor pendiente de las funciones lineales monótonas decrecientes es $a_1 = \frac{-2}{n \cdot (n-1)}$, por teorema 4.4.4, luego sustituyendo a_1 en (4.42), se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2n(n+1)}{12n(n-1)} + \frac{1}{2} = \frac{(n+1)}{6(n-1)} + \frac{1}{2} = \frac{(n+1) + 3(n-1)}{6(n-1)} \\ &= \frac{(n+1)}{6(n-1)} + \frac{1}{2} = \frac{(n+1) + 3(n-1)}{6(n-1)} \\ &= \frac{(n+1) + 3n - 3}{6(n-1)} = \frac{4n - 2}{6(n-1)} = \frac{2(2n-1)}{6(n-1)} \\ \alpha_1 &= \frac{2n-1}{3(n-1)} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Al calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3(n-1)} = \frac{2}{3}$, luego se verifica que $\alpha > 0.5$.

c.q.d

Teorema 4.4.10. *Dado el conjunto de funciones lineales $f_g(x)$, que representan un OWA, si el valor de la pendiente es $a > 0$ entonces el valor de $\alpha < 0.5$.*

Demostración:

Por el teorema 4.4.8, $\alpha = \frac{-an(n+1)}{12} + \frac{1}{2}$ (4.42), además se conoce que la mayor pendiente de las funciones lineales que constituyen OWA es $a_2 = \frac{2}{n \cdot (n-1)}$, por teorema 4.4.5, luego sustituyendo a_2 en (4.42), se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{-2n(n+1)}{12n(n-1)} + \frac{1}{2} = \frac{-(n+1)}{6(n-1)} + \frac{1}{2} = \frac{-n-1+3(n-1)}{6(n-1)} \\ &= \frac{-n-1+3n-3}{6(n-1)} = \frac{2n-4}{6(n-1)} = \frac{2(n-2)}{6(n-1)} \\ \alpha_2 &= \frac{n-2}{3(n-1)} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Al calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{3(n-1)} = \frac{1}{3}$, luego se verifica que $\alpha < 0.5$.

c.q.d

A partir de los resultados obtenidos en los teoremas 4.4.9 y 4.4.10 se puede verificar que el grado de satisfacción α de las funciones lineales que constituyen OWA, varía según el valor de la pendiente (ver fig. 4.8). Estos resultados coinciden con los obtenidos por Byeong Seok Ahn [3].

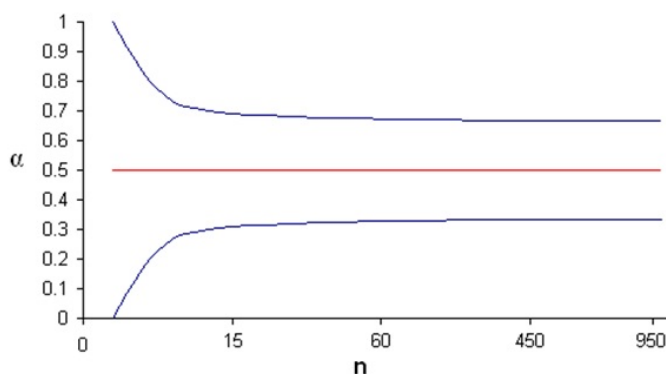


Figura 4.8: Comportamiento del valor de α .

4.4.2. Obtención de la función lineal, a partir de los valores α y n .

Un elemento de gran importancia es la terminación de los pesos a partir de un nivel de α dado. Lo cual ha motivado a varios investigadores a trabajar en dicha problemática. En este caso, se propone un procedimiento para determinar la función lineal perteneciente a la clase de funciones lineales, a partir de un nivel de α dado. Sin embargo, antes de iniciar la descripción del mismo es necesario analizar los teoremas que se plantean a continuación.

Teorema 4.4.11. *El conjunto de funciones lineales $f_g(x)$ que representan un OWA y la pendiente $a \in \left] \frac{-2}{n \cdot (n-1)}, 0 \right]$, tienen un valor de $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{3(n-1)} \right]$, donde $n = 2, 3, \dots$*

Demostración:

Se conoce que si $a = 0$ entonces se obtiene la función $f_{Ave}(x)$ y por el teorema 4.4.7 se verifica que $\alpha = \frac{1}{2}$, además, si $a = \frac{-2}{n \cdot (n-1)}$ se obtiene la función $f_{sup}(x)$ y por los resultados del teorema 4.4.9 se verifica que $\alpha = \frac{2n-1}{3(n-1)}$. Por tanto se cumple que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{3(n-1)} \right]$.

c.q.d

Teorema 4.4.12. *El conjunto de funciones lineales $f_g(x)$ que representan un OWA y la pendiente $a \in \left] 0, \frac{2}{n \cdot (n-1)} \right]$, tienen un valor de $\alpha \in \left[\frac{n-2}{3(n-1)}, \frac{1}{2} \right]$, donde $n = 2, 3, \dots$*

Demostración:

Se conoce que si $a = 0$ entonces se obtiene la función $f_{Ave}(x)$ y por el teorema 4.4.7 se verifica que $\alpha = \frac{1}{2}$, además, si $a = \frac{2}{n(n-1)}$ se obtiene la función $f_{sup^*}(x)$ y por los resultados del teorema 4.4.10 se verifica que $\alpha = \frac{n-2}{3(n-1)}$. Por tanto se cumple que $\alpha \in \left[\frac{n-2}{3(n-1)}, \frac{1}{2} \right]$.

c.q.d

A partir de los resultados obtenidos en los teoremas 4.4.11 y 4.4.12, se puede determinar el intervalo en que se encuentra el valor de α para un n dado. A continuación se muestra el intervalo del valor de α para $n = 2, \dots, 5$, tanto para funciones de pendiente negativas como positivas.

Tabla 4.4: Intervalos del valor α para $n = 2, \dots, 10$.

Valores de n	Intervalos de los valores de α	
	Pendiente (-)	Pendiente (+)
2	$\left[0, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$
3	$\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right]$
4	$\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{9} \right]$
5	$\left[\frac{3}{12}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{12} \right]$
6	$\left[\frac{4}{15}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{11}{15} \right]$
7	$\left[\frac{5}{18}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{13}{18} \right]$
8	$\left[\frac{6}{21}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{15}{21} \right]$
8	$\left[\frac{7}{24}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{17}{24} \right]$
9	$\left[\frac{8}{27}, \frac{1}{2} \right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{19}{27} \right]$

Hasta el momento se han desarrollado los teoremas donde se obtiene el valor de α a partir de los respectivos intervalos de la pendiente de la clase de funciones lineales. Sin embargo, se requiere establecer la relación en el orden inverso, es decir a partir de un valor de α calcular la pendiente y de esta forma obtener la función lineal que genere los pesos con la característica deseada; aspectos que se muestra en el teorema siguiente.

Teorema 4.4.13. *Todas las funciones lineales que cumplen las propiedades de los OWA, verifican que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{3(n-1)} \right]$ ó $\alpha \in \left[\frac{n-2}{3(n-1)}, \frac{1}{2} \right]$, si y solo si $a = \frac{6-12\alpha}{n(n+1)}$.*

Demostración:

Por (4.42), se sabe que, $\alpha = \frac{-an(n+1)}{12} + \frac{1}{2}$, luego

$$\alpha - \frac{1}{2} = \frac{-an(n+1)}{12} \Leftrightarrow 12 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) = -an(n+1) \Leftrightarrow -a = \frac{12\alpha-6}{n(n+1)} \Leftrightarrow a = \frac{6-12\alpha}{n(n+1)}$$

- Caso #1: Si $a \in \left[\frac{-2}{n(n-1)}, 0 \right]$ entonces, para $a = 0$, se cumple que,

$$0 = \frac{6 - 12\alpha}{n(n+1)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

para $a = \frac{-2}{n(n-1)}$, se cumple que,

$$\begin{aligned} \frac{-2}{n(n-1)} = \frac{6 - 12\alpha}{n(n+1)} &\Leftrightarrow \frac{-2(n+1)}{(n-1)} = 6 - 12\alpha \Leftrightarrow \frac{-2n - 2 - 6n + 6}{(n-1)} = -12\alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{-8n + 4}{(n-1)} = -12\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{2n - 1}{3(n-1)} \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{3(n-1)} \right]$

- Caso #2: Si $a \in \left[0, \frac{2}{n(n-1)} \right]$ entonces, para $a = 0$, se cumple que, $\alpha = \frac{1}{2}$

para $a = \frac{2}{n(n-1)}$, se cumple que,

$$\begin{aligned} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{6 - 12\alpha}{n(n+1)} &\Leftrightarrow \frac{2(n+1)}{(n-1)} = 6 - 12\alpha \Leftrightarrow \frac{2n + 2 - 6n + 6}{(n-1)} = -12\alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{-4n + 8}{(n-1)} = -12\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{n-2}{3(n-1)} \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha \in \left[\frac{n-2}{3(n-1)}, \frac{1}{2} \right]$

c.q.d

A partir de los teoremas analizados anteriormente, se puede plantear el procedimiento siguiente para obtener la función lineal.

1. Seleccionar la cantidad de pesos n a calcular.
2. Seleccionar el valor de α , tal que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{3n-3} \right]$ ó $\alpha \in \left[\frac{n-2}{3n-3}, \frac{1}{2} \right]$
3. A partir del valor de α se calcula la pendiente de la función lineal a través de la fórmula $a = \frac{6-12\alpha}{n(n+1)}$
4. Evaluar el valor de la pendiente a en la función general de la clase de funciones lineales que constituyen OWA ($f_g(x)$).

Estos resultados son equivalente a los obtenidos por Byeong Seok Ahn [3].

Ejemplo 4.4.3. Tomando como base el ejemplo (4.4.2), se desea determinar la función lineal para calcular los pesos asociados a los respectivos criterios, dado un valor de α .

En este ejemplo el valor de $n = 5$, luego el intervalo de $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{9}{12}]$. De forma análoga al ejemplo (4.4.2) se seleccionarán tres valores de α .

Tabla 4.5: Valores de α seleccionados.

α_1	α_2	α_3
0.7425	0.625	0.5075

Al evaluar los respectivos valores de α en la fórmula $a = \frac{6-12\alpha}{n(n+1)}$, se obtienen las pendientes siguientes:

Tabla 4.6: Valores de las pendientes obtenidas.

a_1	a_2	a_3
-0.097	-0.05	-0.003

Luego, al evaluar los valores de las pendientes obtenidas y el valor de n en la función $f_g(x)$, resultan las siguientes funciones:

- $f_1(x) = -0,097x + 0,491$
- $f_2(x) = -0,05x + 0,35$
- $f_3(x) = -0,003x + 0,209$

Como se observa los resultados coinciden con los obtenidos en el ejemplo (4.4.2).

4.4.3. Estudio de la entropía de la clase de funciones lineales.

Para analizar el comportamiento de la dispersión del conjunto de funciones lineales (F_L ó F_{L*}), primero se valorará el comportamiento de las funciones que acota a cada conjunto cuando $n \rightarrow \infty$, a través de los siguientes teoremas.

Teorema 4.4.14. La dispersión de la función $f_{Ave}(x) = \frac{1}{n}$, cuando $n \rightarrow \infty$, es ∞ .

Demostración:

La dispersión esta dada por:

$$\begin{aligned} Disp(f_{Ave}(i)) &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot Ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \cdot Ln\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n 1 = -\frac{n}{n} \cdot Ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -Ln\left(\frac{1}{n}\right) = -(Ln(1) - Ln(n)) \\ Disp(f_{Ave}(i)) &= Ln(n) \end{aligned}$$

Luego al calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} Ln(n) = \infty$

c.q.d

Teorema 4.4.15. *La dispersión de la función $f_{\text{sup}}(x) = \frac{2(n-x)}{n \cdot (n-1)}$, cuando $n \rightarrow \infty$, es ∞ .*

Demostración:

Por definición la dispersión $Disp(f_{\text{sup}}(i)) = -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)} \cdot Ln\left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)}\right) \right)$. Se trabaja hasta $i = n - 1$, pues al evaluar para $i = n$ la función $Ln\left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)}\right)$ no está definida.

$$\begin{aligned} \text{Luego se cumple que } Disp(f_{\text{sup}}(i)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)} \cdot Ln\left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)}\right)^{-1} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2(n-i)}{n(n-1)} \cdot Ln\left(\frac{n(n-1)}{2(n-i)}\right) \right) \end{aligned}$$

Sea $m = \frac{n(n-1)}{2(n-i)} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$, por lo que se obtiene que $Disp(f_{\text{sup}}) = \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right)$ y

se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) = \infty$, pues m es positivo para $n \geq 2$, y además se verifica

que $\sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) > \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{1}{m} \right)$, donde $\sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{1}{m} \right)$ es la suma parcial de $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ términos, el cual tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$, generándose en este caso una suma infinita de la sucesión $a_m = \frac{1}{m}$, la cual es divergente.

c.q.d

Teorema 4.4.16. *La dispersión de la función $f_{\text{sup}*}(x) = \frac{2(x-1)}{n \cdot (n-1)}$, cuando $n \rightarrow \infty$, es ∞ .*

Demostración:

Por definición la dispersión es $Disp(f_{\text{sup}*}(i)) = -\sum_{i=2}^n \frac{2(i-1)}{n(n-1)} \cdot Ln\left(\frac{2(i-1)}{n(n-1)}\right)$. Se trabaja a partir de $i = 2$, pues al evaluar para $i = 1$ la función $Ln\left(\frac{2(i-1)}{n(n-1)}\right)$ no está definida.

$$\text{Luego se cumple que } Disp(f_{\text{sup}}(i)) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{2(i-1)}{n(n-1)} \cdot Ln \left(\frac{2(i-1)}{n(n-1)} \right)^{-1} \right) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{2(i-1)}{n(n-1)} \cdot Ln \left(\frac{n(n-1)}{2(i-1)} \right) \right)$$

$$\text{Sea } m = \frac{n(n-1)}{2(i-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{2(i-1)}{n(n-1)}, \text{ por lo que se obtiene que } Disp(f_{\text{sup}}) = \sum_{m=\frac{n(n-1)}{2}}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) = \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) \text{ y se cumple que } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) = \infty, \text{ pues } m \text{ es positivo para } n \geq 2, \text{ y}$$

además se verifica que:

$$\sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{Ln(m)}{m} \right) > \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{1}{m} \right), \text{ donde } \sum_{m=\frac{n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{1}{m} \right) \text{ es la suma parcial de } \frac{n(n-1)}{2} + 1 \text{ términos, el cual tiende a infinito cuando } n \rightarrow \infty, \text{ generándose en este caso una suma infinita de la sucesión } a_m = \frac{1}{m}, \text{ la cual es divergente.}$$

c.q.d

Teorema 4.4.17. *Las funciones lineales que pertenecen al conjunto F_L su dispersión tiende a infinito.*

Demostración:

El conjunto de funciones lineales F_L está delimitado por las funciones $f_{Ave}(x)$ y $f_{\text{sup}^*}(x)$, luego por los teoremas 4.4.14 y 4.4.15, para ambas funciones su dispersión tiende a infinito.

Por tanto toda función que se encuentre en dicho conjunto F_L también tienden a infinito por estar acotada por dos funciones que tienden a infinito $f_{Ave}(x) \leq f(x) \leq f_{\text{sup}}(x)$.

c.q.d

Teorema 4.4.18. *Las funciones lineales que pertenecen al conjunto F_{L^*} son tales que su dispersión tiende a infinito.*

Demostración:

El conjunto de funciones lineales F_{L^*} está delimitado por las funciones $f_{Ave}(x)$ y $f_{\text{sup}^*}(x)$, luego por los teoremas 4.4.14 y 4.4.16, para ambas funciones su dispersión tiende a infinito.

Por tanto toda función que se encuentre en dicho conjunto F_{L^*} también tienden a infinito por estar acotada por dos funciones que tienden a infinito $f_{Ave}(x) \leq f(x) \leq f_{\text{sup}^*}(x)$.

c.q.d

A partir de los resultados obtenidos en los teoremas anteriores, se puede concluir que todas

las funciones lineales que pertenecen a los conjuntos F_L o F_{L^*} , su dispersión tienden a infinito (ver fig. 4.9).

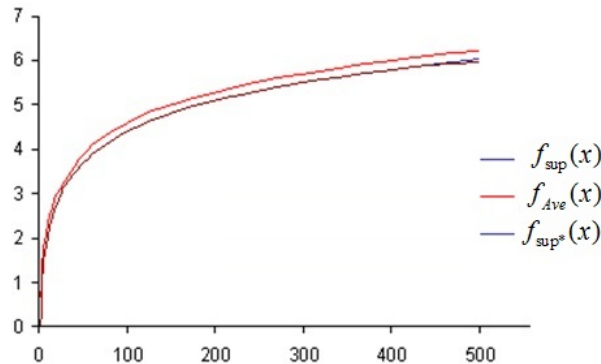


Figura 4.9: Comportamiento de la Dispersión

4.5. Modificación del operador OWA lineal por cuantificadores de preferencia

Otra de las concepciones utilizadas para la determinación del vector de pesos, es la planteada por Yager [134, 135], donde utiliza la relación de orden entre los criterios, expresada por un orden lineal. Esto significa que el criterio C_i tiene una prioridad más alta que el criterio C_k si $i < k$.

Por otra parte, al estudiar los problemas de análisis multicriterio, es evidente que estos dependen del conjunto de criterios y de la importancia asignada a cada uno de ellos para realizar la agregación de información. Teniendo en cuenta estos aspectos, se propone la determinación del vector de pesos a partir de:

1. Una función lineal que determina el OWA de partida.
2. la relación de preferencia cuantificada que la modifica.

El paso 1 se ha desarrollado en el apartado 4.3.6 y ahora nos centraremos en la segunda cuestión.

Como caso especial pero sin pérdida de generalidad se partirá de la ley de Borda-Kendal, por ser una función ampliamente usada en los modelos de decisión. Cumple las propiedades de los OWA y por estar próxima al límite superior del haz de rectas que proporcionan pesos

con las propiedades del operador OWA [66]. Además, las fórmulas analíticas permiten operar de forma sencilla. Su expresión es:

$$w_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)} \quad (4.45)$$

Esta expresión, permite obtener el vector de pesos para un n dado, que cumple las siguientes propiedades; se encuentran sobre la misma recta, se organizan de mayor a menor y la diferencia entre los pesos adyacentes es constante.

Ejemplo 4.5.1. Para $n = 4$ los pesos obtenidos (4.45) son $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.3$, $w_3 = 0.2$ y $w_4 = 0.1$

4.5.1. Relación de preferencia cuantificada.

Para indicar la relación de preferencia entre dos criterios se utilizarán las etiquetas perteneciente al conjunto de etiquetas lingüísticas $L = \{l_0, l_1, \dots, l_h\}$, con $h \geq 2$, siendo $h + 1$ el cardinal del conjunto L , que además debe ser impar. Las etiquetas lingüísticas del conjunto se ordenan de forma que si $l_p < l_{p+1}$ indica mayor preferencia de l_{p+1} respecto a l_p , donde $p = 0, \dots, h - 1$.

El conjunto finito de etiquetas lingüísticas L , indica el significado semántico de la preferencia de C_i sobre C_{i+1} en la relación de preferencia cuantificada. Esta relación estaría en correspondencia con la posición que ocupa cada etiqueta lingüística dentro del conjunto L , y que se utilizará como base para el cálculo del valor de cuantía V , que veremos a continuación.

Definición 4.5.1. Sea $L = \{l_0, l_1, \dots, l_h\}$ un conjunto de etiquetas lingüísticas que definen la relación de preferencia cuantificada. Sea $l_p \in L$ una etiqueta lingüística, donde $p = 0, 1, \dots, h$ entonces la función de cuantía δ está dada por:

$$\begin{aligned} \delta : L &\longrightarrow [0, 1] \\ \delta(l_p) &= \frac{1}{h} \cdot p \end{aligned} \quad (4.46)$$

tal que p es el subíndice de la etiqueta lingüística l_p en el conjunto L .

Mediante esta función la cuantía de los elementos de L se distribuye de manera uniforme en el intervalo unitario; luego, cuanto más próximo esté la cuantía a 1, mayor será la preferencia de un elemento sobre otro y mientras más próximo a 0, menor será la relación de preferencia.

Nota: De forma general, se puede utilizar cualquier función para determinar el valor de cuantía, solo es necesario garantizar que su imagen pertenezca al intervalo unitario, y que la primera y última etiqueta lingüística tenga como imagen 0 y 1, respectivamente.

Particularmente, se propone utilizar el conjunto de etiquetas lingüísticas L , para representar la relación de preferencias cuantificadas entre los criterios, tal que su cardinal sea cinco, lo que se expresa en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.5.2. *Sea el conjunto de etiquetas lingüísticas con cardinal igual a cinco que está dado por $L = \{\cong, \succ^1, \succ^2, \succ^3, \succ^4\}$, y tal que el significado semántico de los mismos se muestra en la tabla 4.7.*

Tabla 4.7: Relación entre las etiquetas lingüísticas y su significado.

Etiquetas lingüísticas	Significado de la relación de preferencia C_i l_p C_{i+1}
$l_0 = \{\cong\}$	C_i y C_{i+1} tienen la misma preferencia
$l_1 = \{\succ^1\}$	C_i es algo más preferida que C_{i+1}
$l_2 = \{\succ^2\}$	C_i tiene mayor preferencia que C_{i+1}
$l_3 = \{\succ^3\}$	C_i es mucho más preferida que C_{i+1}
$l_4 = \{\succ^4\}$	C_i tiene la máxima preferencia respecto a C_{i+1}

Según este ejemplo, el valor de cuantía para los elementos del conjunto L , estará dado por:

$$\delta(L) = \left\{ \frac{1}{4} \cdot 0, \frac{1}{4} \cdot 1, \frac{1}{4} \cdot 2, \frac{1}{4} \cdot 3, \frac{1}{4} \cdot 4 \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\} \quad (4.47)$$

El conjunto de etiquetas lingüísticas L , constituye la base para establecer la relación de preferencia entre los criterios. Para un conjunto de n criterios el vector de cuantificadores de preferencia, se obtiene mediante la función ψ .

Definición 4.5.2. *La función ψ permite obtener el vector de cuantificadores de preferencia asociado a un conjunto de n criterios $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, a través de la aplicación:*

$$\begin{aligned} \psi : C^n &\longrightarrow L^{n-1} \\ \psi(C_1, C_2, \dots, C_n) &= (R_1, R_2, \dots, R_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde los $R_i \in L$, con $i = 1, \dots, n-1$, indica la relación de preferencia cuantificada entre los criterios C_i y C_{i+1} , representado por $C_i R_i C_{i+1}$.

Sobre la base de esta definición, para un conjunto de criterios $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ siempre se puede definir una relación de preferencia cuantificada entre los mismos, expresada en la forma $C_1 R_1 C_2 R_2 C_3 \dots C_{n-1} R_{n-1} C_n$; donde R_1 representa el nivel de preferencia cuantificada del criterio C_1 respecto al criterio C_2 , R_2 el nivel de preferencia cuantificada del criterio

C_2 respecto al criterio C_3 , y así sucesivamente. De esta forma se establece en que medida cada criterio es más preferido que el otro.

El vector de cuantía para un conjunto de criterios sobre la base de una relación de preferencia cuantificada, se obtiene a través de la función que se define a continuación.

Definición 4.5.3. Se denomina vector de cuantía V , al obtenido a través de la función:

$$\begin{aligned} \lambda : L^{n-1} &\longrightarrow [0, 1]^{n-1} \\ \lambda(R_1, R_2, \dots, R_{n-1}) &= (\delta(R_1), \delta(R_2), \dots, \delta(R_{n-1})) = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ejemplo 4.5.3. Teniendo en cuenta las etiquetas lingüísticas del ejemplo 4.5.2, si $C_1 \succ^1 C_2 \succ^3 C_3 \succ^2 C_4$, entonces, la relación de preferencia cuantificada entre los criterios, se expresa por $\psi(C_1, C_2, C_3, C_4) = (\succ^1, \succ^3, \succ^2)$, y por tanto el vector de cuantía es $\lambda(\succ^1, \succ^3, \succ^2) = (\delta(\succ^1), \delta(\succ^3), \delta(\succ^2)) = (0.25, 0.75, 0.5)$

Hasta ahora, se han mostrado las funciones δ , ψ y λ , las que tienen como finalidad transformar una relación de preferencia que se establece para un conjunto de n criterios, en un vector que representa las cuantías entre los mismos. La función ψ permite obtener el vector de etiquetas lingüísticas que representa las preferencias entre los criterios. Luego, a través de la función λ resulta el vector de cuantía, sobre la base de la función δ . El vector de cuantía obtenido se utilizará para transformar el vector de pesos inicial.

4.5.2. Operaciones para transformar un vector de pesos.

Como se expresó anteriormente, para obtener el nuevo vector de pesos, se parte de un vector de pesos inicial dado por una función lineal y de la relación de preferencia cuantificada entre los criterios, de forma que la preferencia cuantificada influye sobre los pesos de partida. Para la transformación se necesita hacer varias operaciones:

- Primero, se muestran las operaciones necesarias para obtener un vector de pesos mediante diferencia de vectores.
- Segundo, se exponen cuales son las operaciones necesarias a tener en cuenta sobre la matriz unitaria.
- Tercero, sobre la base de las operaciones antes planteadas, se analiza como redistribuir los pesos del vector inicial en función de la cuantía establecida en la relación de preferencia.

Estas tres operaciones necesarias se describirán a continuación.

4.5.2.1. Operaciones entre vectores de pesos.

En el estudio de las operaciones que permiten transformar un vector de pesos en otro que siga cumpliendo las propiedades de los OWA, es necesario plantear las definiciones siguientes.

Definición 4.5.4. *Dado un vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, se denomina vector distancia entre pesos adyacentes del vector W al vector $D = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, 0)$, donde:*

$$d_i = \begin{cases} w_i - w_{i+1} & \text{si } i \neq n \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases} \quad (4.50)$$

Nota: Si la función a partir de la cual se obtiene el vector de pesos es lineal, el valor d_i es constante $D = (d_1, d_1, d_1, \dots, d_1, 0)$, lo cual se formaliza en el teorema siguiente.

Teorema 4.5.1. *Si el vector de pesos tiene un comportamiento lineal entonces las diferencias entre los pesos adyacentes son constantes.*

Demostración:

Por teorema 4.4.1, la clase de las funciones lineales es $f_g(x) = a \cdot x + \frac{1}{n} - a \left(\frac{1+n}{2}\right)$, y por teorema 4.4.4 y 4.4.6,

$a \in \left] \frac{-2}{n \cdot (n-1)}, 0 \right[$ ó $a \in \left] \frac{2}{n \cdot (n-1)}, 0 \right[$ donde n es la dimensión del vector de pesos. Sea i ; $i = 1, \dots, n-1$, entonces los pesos adyacentes tienen la forma:

$$f_g(i) = a \left(i - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n}, \quad y \quad f_g(i+1) = a \left((i+1) - \frac{1+n}{2} \right) + \frac{1}{n}$$

al calcular la diferencia resulta que,

$$\begin{aligned} f_g(i+1) - f_g(i) &= a \left((i+1) - \frac{1+n}{2} \right) - \frac{1}{n} - a \left(i - \frac{1+n}{2} \right) - \frac{1}{n} \\ &= a \left(\left((i+1) - \frac{1+n}{2} \right) - \left(i - \frac{1+n}{2} \right) \right) \\ &= a \left(i+1 - \frac{1+n}{2} - i + \frac{1+n}{2} \right) = a \end{aligned}$$

Luego, la diferencia entre pesos adyacentes es constante.

c.q.d

Definición 4.5.5. *Dado un vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, se denominara vector de pesos máximo a:*

$$W_1 = (w_1, w_1, \dots, w_1) \quad (4.51)$$

donde $w_i = w_1, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Definición 4.5.6. Se denomina matriz triangular inferior unitaria, a la matriz M_{inf} de orden $n \times n$, tal que todos los valores son cero, excepto los que se encuentran por debajo de la diagonal principal cuyos valores son uno.

$$M_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (4.52)$$

A partir de las definiciones antes referidas, se pueden plantear los siguientes teoremas.

Teorema 4.5.2. El vector distancia entre pesos adyacentes modificado por la matriz M_{inf} es el vector $D_M = (0, w_1 - w_2, w_1 - w_3, \dots, w_1 - w_n)$.

Demostración:

Partiendo del vector $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ y teniendo en cuenta (4.50), se tiene que

$$D = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, 0) \Leftrightarrow D = (w_1 - w_2, w_2 - w_3, w_3 - w_4, \dots, w_{n-1} - w_n, 0) \quad (4.53)$$

por tanto:

$$\begin{aligned} M_{\text{inf}} \cdot D^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} - w_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 - w_2 \\ w_1 - w_2 + w_2 - w_3 \\ \vdots \\ w_1 - w_2 + w_2 - w_3 + \dots + w_{n-1} - w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 - w_2 \\ w_1 - w_3 \\ \vdots \\ w_1 - w_n \end{pmatrix} = D_M^T \quad (4.54) \end{aligned}$$

c.q.d

Teorema 4.5.3. Dado el vector $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ y el vector

$D_M = (0, w_1 - w_2, w_1 - w_3, \dots, w_1 - w_n)$ se verifica que $W = W_1 - D_M$.

Demostración:

Se tiene el vector de pesos $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, luego $W_1 = (w_1, w_1, \dots, w_1)$, y

$$\begin{aligned} W_1 - D_M &= (w_1, w_1, w_1, \dots, w_1) - (0, w_1 - w_2, w_1 - w_3, \dots, w_1 - w_n) \\ &= (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n) \end{aligned} \quad (4.55)$$

c.q.d

Ejemplo 4.5.4. Sea $W = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$ el vector obtenido por la ley de Borda-Kendal para $n = 4$. Asociado a este vector W , se encuentra que el vector de pesos máximo es $W_1 = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$, $D = (0.1, 0.1, 0.1, 0)$ es el vector distancia entre pesos adyacentes y el vector distancia modificado entre pesos adyacentes $D_M = (0, 0.1, 0.2, 0.3)$. Con ello se encuentra que:

$$W_1 - D_M = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4) - (0, 0.1, 0.2, 0.3) = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1) = W$$

Como se observa, el vector D_M contiene las diferencias existentes entre el primer peso del vector W y los siguientes pesos de dicho vector.

Hasta el momento, solo se han mostrado las relaciones entre el vector y lo obtenido a partir de él, sin embargo, se necesitan desarrollar otras operaciones para poder transformar el vector inicial en función de la cuantía.

4.5.2.2. Operaciones sobre la matriz unitaria.

A partir de 4.49, se tiene un vector $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ donde sus elementos representan la cuantía con que un criterio es preferido respecto a otro. Por otra parte, cada columna de la matriz triangular inferior unitaria M_{inf} tiene una relación directa con el vector de cuantía y los pesos del vector, por lo que se puede definir la aplicación de transformación siguiente:

Definición 4.5.7. Sea la aplicación T^* que transforma la matriz M_{inf} mediante el vector V de cuantía, en otra matriz M_{inf}^* de la forma:

$$\begin{aligned} T^* : M_{\text{inf}} \times V &\longrightarrow M_{\text{inf}}^* \\ T^*(M_{\text{inf}}, V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Lema 4.5.1. Si $V = (0, 0, \dots, 0)$ entonces la matriz M_{inf}^* es la matriz nula.

Lema 4.5.2. Si $V = (1, 1, \dots, 1)$ entonces la matriz M_{inf}^* es igual a la matriz M_{inf} .

Hasta el momento, se ha analizado como obtener la transformación de la matriz M_{inf} , por su incidencia en el cálculo del vector a obtener. Sin embargo, se requiere determinar como varían por columnas las matrices M_{inf} y M_{inf}^* para su redistribución, por lo que es necesario plantear la definición siguiente.

Definición 4.5.8. Sea M el conjunto de matrices de orden $n \times n$ y S un vector de dimensión n , entonces se define una función G que obtiene la suma de las columnas de la matriz M .

$$G : M \longrightarrow S$$

$$G \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_{i1}, \sum_{i=1}^n x_{i2}, \sum_{i=1}^n x_{i3}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{in} \right) \quad (4.57)$$

Ejemplo 4.5.5. Si M_{inf} es la matriz triangular unitaria de orden 4×4 , se verifica que $G(M_{\text{inf}}) = (3, 2, 1, 0)$

4.5.2.3. Obtención del vector de redistribución.

Una vez definidos los conceptos que proporcionan las bases para modificar los pesos a través de las funciones ψ y λ antes definidas, se realizará la fase final. Para ello, es necesario registrar el nivel de cambio entre M_{inf} y M_{inf}^* , lo cual se expresa en la definición siguiente.

Definición 4.5.9. Se denomina vector de variación V_v al obtenido por:

$$V_v = G(M_{\text{inf}}) - G(M_{\text{inf}}^*) \quad (4.58)$$

Según esta definición el vector V_v refleja el nivel de variación entre el vector de pesos inicial y el nuevo que se desea. El nivel de variación registrado se debe redistribuir de forma proporcional entre todos los pesos del nuevo vector.

Definición 4.5.10. Sea f_d el factor de redistribución obtenido por la expresión $f_d = \frac{V_v \cdot D^T}{n}$. Entonces el vector de redistribución con dimensión n está dado por:

$$V_{CD} = (f_d, f_d, \dots, f_d) \quad (4.59)$$

A partir de estas definiciones se puede obtener la fórmula de cálculo del vector D^* .

Definición 4.5.11. Se denomina vector de diferencia ajustado D^* al obtenido mediante la expresión:

$$D^* = (M_{\text{inf}}^* \cdot D^T)^T + V_{CD} \quad (4.60)$$

Finalmente, para obtener el nuevo vector de pesos se utiliza la expresión:

$$W^* = W_1 - D^* \quad (4.61)$$

Ejemplo 4.5.6. Siguiendo con los resultados de los ejemplos 4.5.3 y 4.5.5, se obtiene que:

$$\begin{aligned} V_v &= (3, 2, 1, 0) - (0.75, 1.5, 0.5, 0) = (2.25, 0.5, 0.5, 0) \\ f_d &= \frac{(2.25, 0.5, 0.5, 0) \cdot (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T}{4} = 0.08125 \\ V_{CD} &= (0.08125, 0.08125, 0.08125, 0.08125) \\ D^* &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ .25 & 0 & 0 & 0 \\ .25 & .75 & 0 & 0 \\ .25 & .75 & .5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .1 \\ .1 \\ .1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T + (0.08125, 0.08125, 0.08125, 0.08125) \\ &= (0.08125, 0.10625, 0.18125, 0.23125) \end{aligned}$$

De donde se obtiene que el nuevo vector es:

$$\begin{aligned} W^* = W_1 - D^* &= (0.4, 0.4, 0.4, 0.4) - (0.08125, 0.10625, 0.18125, 0.23125) \\ &= (0.31875, 0.29375, 0.21875, 0.16875) \end{aligned}$$

Al representar gráficamente los valores obtenidos a través de la ley de Borda-Kendal para $n = 4$ y el nuevo vector de pesos W^* , se puede observar los respectivos comportamientos (ver fig. 4.10).

La concepción analizada para el cálculo del nuevo vector de pesos W^* , verifica las propiedades siguientes.

Teorema 4.5.4. Dado un vector de pesos W que cumple $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, entonces el vector de pesos obtenido por $W^* = W_1 - D^*$ también cumple que $\sum_{i=1}^n w_i^* = 1$

Demostración:

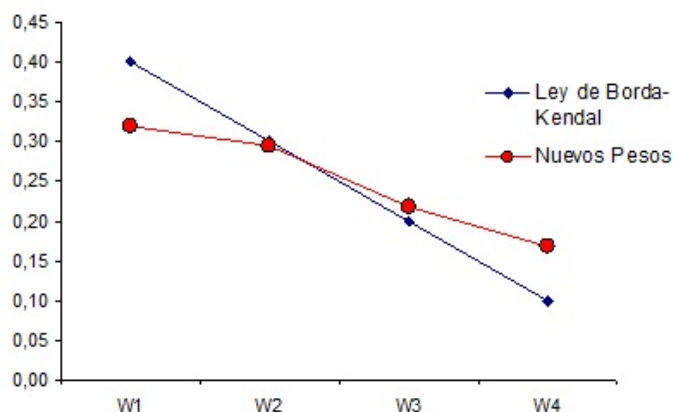


Figura 4.10: Representación de los pesos a través de la ley de Borda-Kendal y el nuevo vector de pesos W^* .

Por definición $D^* = (M_{\text{inf}}^* \cdot D^T)^T + V_{CD}$, donde

$$(M_{\text{inf}}^* \cdot D^T)^T = (0, v_1(w_1 - w_2), v_1(w_1 - w_2) + v_2(w_2 - w_3), \dots, v_1(w_1 - w_2) + v_2(w_2 - w_3) + \dots + v_{n-1}(w_{n-1} - w_n))$$

$$V_{CD} = (f_d, f_d, \dots, f_d)$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) \right)$$

con lo que

$$D^* = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), v_1(w_1 - w_2) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), v_1(w_1 - w_2) + v_2(w_2 - w_3) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), \dots, v_1(w_1 - w_2) + v_2(w_2 - w_3) + \dots + v_{n-1}(w_{n-1} - w_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) \right)$$

Al calcular

$$\begin{aligned}
 W^* = W_1 - D^* = & \left(w_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), \right. \\
 & , w_1 - v_1(w_1 - w_2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) \\
 & , w_1 - v_1(w_1 - w_2) - v_2(w_2 - w_3) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}), \\
 & \dots, w_1 - v_1(w_1 - w_2) - v_2(w_2 - w_3) - \dots \\
 & \left. \dots - v_{n-1}(w_{n-1} - w_n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n w^* &= n w_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} v_i(n-i)(w_i - w_{i+1}) \\
 &= n w_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})(n-i)(1-v_i + v_i) \\
 &= n w_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(w_i - w_{i+1}) \\
 &= n w_1 - (n-1)(w_1 - w_2) - (n-2)(w_2 - w_3) - (n-3)(w_3 - w_4) - \\
 & \quad \dots - 2(w_{n-2} - w_{n-1}) - (w_{n-1} - w_n) \\
 &= n w_1 - (n-1)w_1 + (n-1)w_2 - (n-2)w_2 + (n-2)w_3 - (n-3)w_3 + \\
 & \quad + (n-3)w_4 - \dots - 2w_{n-2} + 2w_{n-1} - w_{n-1} + w_n \\
 &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \dots + w_{n-1} + w_n = \sum_{i=1}^n w_i = 1
 \end{aligned}$$

c.q.d

Teorema 4.5.5. *Si el vector de cuantía es constante $V = (c, c, \dots, c)$, entonces mediante 4.61, el vector W^* tiene un comportamiento lineal.*

Demostración:

Sea $W = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$ un vector de pesos. Por hipótesis y 4.50, el vector distancia $D = (c^*, c^*, c^*, \dots, c^*, 0)$, donde $c^* = w_i - w_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$

Como el vector de cuantía es $V = (c, c, \dots, c)$, entonces resulta la matriz M_{inf}^* :

$$M_{\text{inf}}^* = T^*(M_{\text{inf}}, V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \cdots & c & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando 4.57, el vector de variación V_v está dado por:

$$\begin{aligned} V_v &= G(M_{\text{inf}}) - G(M_{\text{inf}}^*) \\ &= (n-1, n-2, n-3, \dots, 1, 0) - (c(n-1), c(n-2), c(n-3), \dots, c, 0) \\ &= (n-1-c(n-1), n-2-c(n-2), n-3-c(n-3), \dots, 1-c, 0) \\ &= ((n-1)(1-c), (n-2)(1-c), (n-3)(1-c), \dots, 1-c, 0) \end{aligned}$$

Al determinar el vector constante de redistribución V_{CD} (4.59), cada elemento tiene la forma:

$$\begin{aligned} f_d &= \frac{((n-1)(1-c), (n-2)(1-c), (n-3)(1-c), \dots, 1-c, 0) \cdot (c^*, c^*, c^*, \dots, c^*, 0)^T}{n} \\ &= \frac{(n-1)(1-c)c^* + (n-2)(1-c)c^* + (n-3)(1-c)c^* + \dots + (1-c)c^*}{n} \\ &= \frac{(1-c)c^*}{n} \sum_{i=1}^{n-1} n-i = \frac{(1-c)c^*}{n} \left(n(n-1) - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} D^* &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & c & \cdots & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* \\ c^* \\ \vdots \\ c^* \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T + \\ &+ \left(\frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \dots, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \right) \\ &= (0, cc^*, 2cc^*, 3cc^*, \dots, (n-1)cc^*) + \\ &+ \left(\frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \dots, \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$D^* = \left(\frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, 2cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \dots, \right. \\ \left. (n-1)cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \right)$$

Al calcular

$$W^* = W_1 - D^* = (w_1, w_1, w_1, \dots, w_1) - \left(\frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, 2cc^* + \right. \\ \left. + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \dots, (n-1)cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \right) \\ = \left(w_1 - \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, w_1 - cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \right. \\ \left. w_1 - 2cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2}, \dots, w_1 - (n-1)cc^* + \frac{c^*(1-c)(n-3)}{2} \right)$$

Para el vector W^* la diferencia entre los pesos adyacente es constante de la forma $k = cc^*$, por tanto tiene un comportamiento lineal.

c.q.d

Corolario 4.5.1. Si el vector de cuantía es $V = (0, 0, \dots, 0)$, entonces mediante 4.61, el vector $W^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)$ cumple que $w_i^* = \frac{1}{n}$, $\forall w_i^*$, con $i = 1, 2, \dots, n$.

Corolario 4.5.2. Si el vector de cuantía es $V = (1, 1, \dots, 1)$, entonces mediante 4.61, el vector $W^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)$, que coincide con el vector inicial W .

Como resumen de los pasos a seguir para calcular el vector de pesos (4.61), se parte de un vector inicial de pesos obtenido mediante la ley de Borda-Kendal, pero puede ser cualquier función de la clase lineal y sobre la base de la relación de preferencia cuantificada entre los criterios, resulta el algoritmo siguiente.

Algoritmo:

1. Obtener el vector de pesos W .
2. Determinar el vector distancia entre pesos adyacentes D y el vector de pesos máximo W_1 (4.50 y 4.51).
3. Definir la relación de preferencia entre el conjunto de criterios, y determinar su correspondiente vector de cuantía V (4.48 y 4.49).
4. Determinar el vector constante de redistribución V_{CD} (4.59).

5. Determinar el vector de diferencia ajustado D^* (4.60).
6. Calcular el nuevo vector de pesos W^* (4.61).

4.6. Operador OWA basado en cuantificadores de preferencia.

En el epígrafe anterior(4.5) se analizó un método para determinar un vector de pesos. El mismo parte de un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal y una relación de preferencia cuantificada definida entre el conjunto de criterios, calculando finalmente el nuevo vector de pesos. Sin embargo, la concepción asumida referente a la relación de preferencia cuantificada para calcular un nuevo vector de pesos, puede ser generalizada de tal forma que no dependa de un vector inicial y sea posible obtener vectores de pesos que tengan o no comportamiento lineal, además de verificar las propiedades de los OWA, aspectos que se desarrollan a continuación. La concepción de la nueva propuesta, utilizará como entrada la relación de preferencia cuantificada entre el conjunto de criterios y la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes, a continuación se calcula el peso inicial y a partir de este el vector de pesos. Además, esta variante utilizará como base los aspectos abordados en el epígrafe anterior.

4.6.1. Vector de pesos a partir de la relación de preferencia cuantificada.

Para el desarrollo del nuevo método es necesario considerar el cálculo del menor peso del vector. En este caso, se tomará como referente el método utilizado en el epígrafe anterior; por tanto, sobre la base de la expresión 4.61, se puede plantear que el menor peso del vector está dado por:

$$w_n = w_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})v_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i)(w_i - w_{i+1}) \quad (4.62)$$

El vector inicial que utiliza el método (epígrafe 4.5) se obtiene a partir de una función lineal, por tanto la diferencia entre pesos adyacentes es constante. Luego, se puede considerar a $k = w_i - w_{i+1}$, entonces sustituyendo k en (1) se obtiene:

$$w_n = w_1 - \sum_{i=1}^{n-1} k v_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(1-v_i) k \quad (4.63)$$

Al desarrollar esta expresión, resulta:

$$\begin{aligned} w_n &= w_1 - \frac{k}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} n v_i + (n-i)(1-v_i) \right) = w_1 - \frac{k}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} n v_i + n - n v_i - i + i v_i \right) \\ &= w_1 - \frac{k}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \right) = w_1 - \frac{k}{n} \left(n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \right) \\ &= w_1 - \frac{k}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \right) = w_1 - \frac{k(n-1)}{2} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \end{aligned} \quad (4.64)$$

Si el vector inicial es obtenido por la ley de Borda-Kendall, entonces $w_1 = \frac{2}{n+1}$ y el valor de $k = \frac{2}{n(n+1)}$, donde k se obtiene a partir de la diferencia de dos pesos adyacentes. Luego:

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{2(n-1)}{2n(n+1)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i = \frac{2n - n + 1}{n(n+1)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \\ &= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i = \frac{1}{n} - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \end{aligned}$$

Como se puede observar, la constante k solo fue sustituida en el segundo término de la expresión 4.64, con el objetivo de reducir dicha expresión, mientras que en el tercer término es conveniente mantenerlo en función de k .

A partir del resultado obtenido referente al menor peso, se puede plantear la definición para el cálculo del mismo, pero en este caso se denominará peso inicial y se describe a continuación.

Definición 4.6.1. *Se denomina peso inicial al obtenido por la expresión,*

$$p_m = \frac{1 - k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \quad (4.65)$$

donde $n-1$ es la dimensión del vector de cuantía V y k es la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes.

Como ya se sabe, el término v_i representa la cuantía entre los pesos adyacentes, por tanto la expresión $\sum_{i=1}^{n-1} i v_i$ sería equivalente a la acumulación de la cuantía de dicho vector. Por lo que se requiere establecer la definición de vector de cuantía acumulada y luego probar su

equivalencia.

Definición 4.6.2. Sea la aplicación γ que transforma al vector de cuantía V de dimensión $n - 1$ en el vector de cuantía acumulada V^* con dimensión n :

$$\begin{aligned} \gamma : V &\longrightarrow V^* \\ \gamma(V) = V^* &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j, \sum_{j=2}^{n-1} v_j, \sum_{j=3}^{n-1} v_j, \dots, v_{n-1}, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Después de expresada esta definición se puede plantear la proposición siguiente.

Proposición 4.6.1. La expresión $\sum_{i=1}^n v_i^*$ es equivalente a $\sum_{i=1}^{n-1} i v_i$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i^* &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i + \sum_{i=2}^{n-1} v_i + \sum_{i=3}^{n-1} v_i + \dots + v_{n-1} + 0 \\ &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots + (n-2)v_{n-2} + (n-1)v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \end{aligned}$$

c.q.d

A partir de la definición 4.6.2 y la proposición 4.6.1, se puede plantear que las expresiones siguientes son equivalentes.

$$p_m = \frac{1 - k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \Leftrightarrow p_m = \frac{1 - k \sum_{i=1}^n v_i^*}{n}$$

El vector de cuantía acumulada V^* (definición 4.6.2) por su propia naturaleza de cálculo, está formado por valores positivos y organizados de forma descendente; además, de expresar la cuantía acumulada de cada peso. Sin embargo, también es posible tener ordenado el vector V^* de forma ascendente.

Con la finalidad de ordenar el vector de cuantía acumulada V^* de forma ascendente se propone la definición siguiente.

Definición 4.6.3. Se denomina función de intercambio simétrico a la aplicación θ que transforma un vector V en V^{**} de la forma:

$$\begin{aligned} \theta : V &\longrightarrow V^{**} \\ \theta(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) &= (v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1) \end{aligned} \quad (4.67)$$

El resultado de esta definición no va más allá que el intercambio de los valores de los v_i y v_{n-i-1} donde $i = 1, \dots, \frac{1+n}{2}$. También es evidente que se cumple que $\theta(\theta(V)) = V$.

La transformación del vector de cuantía acumulada V^* mediante la función θ , también continua cumpliendo la proposición 4.6.1, lo que se refleja en la proposición siguiente.

Proposición 4.6.2. *El vector obtenido por $\theta(V^*)$ también cumple la proposición 4.6.1.*

Demostración:

$$\begin{aligned}\theta(V^*) &= \theta\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j, \sum_{j=2}^{n-1} v_j, \sum_{j=3}^{n-1} v_j, \dots, v_{n-1}, 0\right) \\ &= \left(0, v_{n-1}, \sum_{j=n-2}^{n-1} v_j, \dots, \sum_{j=2}^{n-1} v_j, \sum_{j=1}^{n-1} v_j\right)\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n v_i^* &= 0 + v_{n-1} + \sum_{j=n-2}^{n-1} v_j + \dots + \sum_{j=2}^{n-1} v_j + \sum_{j=1}^{n-1} v_j \\ &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots + (n-2)v_{n-2} + (n-1)v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i v_i\end{aligned}$$

c.q.d

A partir de las definiciones 4.6.2 y 4.6.3; y las proposiciones 4.6.1 y 4.6.2, es posible calcular el peso inicial p_m a partir de un vector de cuantía acumulada que esté ordenado descendentemente o ascendentemente. Esta característica permitirá la obtención de vectores de pesos ordenados de la misma forma que el vector de cuantía.

El cálculo del peso inicial p_m , depende del vector de cuantía V , de n y de k , donde V y n han sido definidos; sin embargo, el valor de k es la diferencia entre los pesos adyacentes, que en este caso es constante por ser obtenido de un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal. Además, como se ha planteado en esta nueva variante de calculo del vector de pesos, no se parte de un vector inicial, por lo que es necesario definir el intervalo al que debe pertenecer el valor de k .

Para establecer el intervalo inicial de k , se considera un OWA que tiene un comportamiento lineal, por tanto, el intervalo inicial se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.1. *La constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes $k \in \left[0, \frac{2}{n(n-1)}\right]$, donde n es la dimensión del vector de pesos.*

Demostración:

Los OWA lineales cumplen la propiedad de que la diferencia entre los pesos adyacentes es constante, luego a partir de la clase de OWA lineales [66], bastaría calcular la distancia entre dos pesos adyacentes cualquiera para obtener el valor de k .

$f(x) = a \left(\frac{2x-1-n}{2} \right) + \frac{1}{n}$, donde $a \in \left(\frac{-2}{n(n-1)}, 0 \right)$, al evaluar en $f(x)$ para los extremos del intervalo de a , resulta:

- Caso #1: $a = 0$

$$f(x) = \frac{1}{n}, \text{ luego } k = f(i) - f(i+1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

- Caso #2: $a = \frac{-2}{n(n-1)}$

$$f(x) = \left(\frac{-2}{n(n-1)} \right) \left(\frac{2x-1-n}{2} \right) + \frac{1}{n} = \frac{-2x+1+n+n-1}{n(n-1)} = \frac{2(n-x)}{n(n-1)}$$

$$\text{luego, } k = f(i) - f(i+1) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)} - \frac{2(n-i-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}$$

$$\text{por tanto, } k \in \left[0, \frac{2}{n(n-1)} \right]$$

c.q.d

Por otra parte se sabe que los pesos asociados al operador OWA se encuentran en el intervalo unitario, luego el menor valor que puede tomar el peso inicial es $p_m = 0$, por tanto se debe cumplir que $k \sum_{i=1}^n v_i^* \leq 1$. A partir de esta consideración es posible ampliar el intervalo de $k \in \left[0, \frac{2}{n(n-1)} \right]$, en función del vector de cuantía seleccionado, lo que se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.2. *La constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes $k \in [0, \lambda(V)]$, donde:*

$$\lambda(V) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} v_i} & \text{si } \exists v_i : v_i > 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0, \forall i \end{cases} \quad (4.68)$$

Demostración:

Por la definición 4.6.1, se sabe que $k \sum_{i=1}^n v_i^* \leq 1$, además, esta expresión también se cumple para $\theta(V^*)$ por la proposición 4.6.2, ya que $k \sum_{i=1}^n v_i^* = k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i$

Luego, $k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \leq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} i v_i}$ y se debe cumplir que $\sum_{i=1}^{n-1} i v_i \neq 0$. Por tanto, como la distancia entre pesos adyacentes es positiva entonces:

$$k \in [0, \lambda(V)] \Leftrightarrow k \in [0, \lambda(\theta(V^*))]$$

c.q.d

El intervalo de k obtenido en el teorema 4.6.1 es un subconjunto del obtenido en el teorema 4.6.2 $\left[0, \frac{2}{n(n-1)}\right] \subseteq [0, \lambda(V)]$, y solo coinciden cuando el vector de cuantía es constante, tal que $v_i = 1$. Lo cual se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.3. *Sea el vector de cuantía V , tal que $v_i = 1, \forall i$, entonces el intervalo de k es $\left[0, \frac{2}{n(n-1)}\right] = [0, \lambda(V)]$.*

Demostración:

Se sabe que $v_i = 1, \forall i$, por tanto, $\sum_{i=1}^{n-1} i v_i \neq 0$, entonces

$$\lambda(V) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n i - n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} - n} = \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

Por tanto, se verifica que $\left[0, \frac{2}{n(n-1)}\right] = [0, \lambda(V)]$

c.q.d

Sobre la base de los teoremas 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.3, se puede observar que el valor de k debe pertenecer a un intervalo que está en función de n y de la cuantía definida, con cero en el extremo izquierdo del intervalo.

Después de expresada la forma de cálculo del peso inicial p_m y el intervalo de la constante inicial de diferencia máxima k , se han creado las condiciones necesarias para definir la función que determina al vector de pesos.

Definición 4.6.4. *Sea la aplicación ψ que transforma el vector de cuantía acumulada V^* , a partir del peso inicial p_m y de la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos*

adyacentes k , en un vector de pesos W de dimensión n .

$$\begin{aligned} \psi : V^* \otimes k \oplus p_m &\longrightarrow W \\ W = \psi(V^*, k, p_m) = \psi((v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), k, p_m) &= (k v_1^* + p_m, k v_2^* + p_m, \dots, k v_n^* + p_m) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Finalmente, se puede formular un algoritmo para calcular el vector de pesos.

Algoritmo:

1. Determinar la dimensión del vector de pesos a calcular (n).
2. Determinar el vector de cuantía a partir de la relación de preferencia cuantificada (4.48 y 4.49).
3. Calcular el vector de cuantía acumulada V^* (4.66).
4. Seleccionar k (4.6.2).
5. Calcular el valor del peso inicial p_m (4.65).
6. Calcular el vector de pesos mediante la definición 4.6.4.

Después de establecida la forma de cálculo del vector de pesos a partir de la relación de preferencia cuantificada y de la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes, se deben analizar las propiedades que verifican este nuevo método de cálculo del vector de pesos.

4.6.2. Propiedades de los pesos obtenidos con la función ψ .

La concepción expresada en la definición 4.6.4 y estableciendo como condición que el vector de cuantía acumulada es el resultado de la definición 4.6.2, permite obtener vectores de pesos que están ordenados de forma descendentes. Sin embargo, al cambiar el orden del vector de cuantía acumulada (definición 4.6.3) se obtiene un vector de pesos que se ordena de forma ascendente, aspecto que se analizará en los teoremas siguientes.

Teorema 4.6.4. *El vector de pesos obtenido por $W = \psi(V^*, k, p_m)$, donde el vector de cuantía acumulada es obtenido por 4.66 y k es positivo, entonces $\forall i < j$ se cumple que $w_i \geq w_j$.*

Demostración:

Se cumple que $i \leq i + 1$, luego,

$$\begin{aligned} w_i - w_{i+1} &= k \sum_{j=i}^{n-1} v_j + p_m - k \sum_{j=i+1}^{n-1} v_j - p_m \\ &= k v_i + k \sum_{j=i+1}^{n-1} v_j - k \sum_{j=i+1}^{n-1} v_j = k v_i \end{aligned}$$

La expresión $k v_i \geq 0$, pues k es positivo y $v_i \in [0, 1]$, por tanto $w_i - w_{i+1} \geq 0$, y se cumple que $w_i \geq w_{i+1}$.

c.q.d

Antes de analizar la obtención del vector de pesos tal que este se organice de forma ascendente, es de utilidad práctica analizar la propiedad referente al orden de composición de las funciones θ y ψ , lo cual se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.5. *El calculo del vector de pesos mediante las expresiones $\theta(\psi(V^*, k, p_m))$ y $\psi(\theta(V^*), k, p_m)$, es equivalente.*

Demostración:

Sea,

$$\begin{aligned} \theta(\psi(V^*, k, p_m)) &= \theta(\psi((v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), k, p_m)) \\ &= \theta((k v_1^* + p_m, k v_2^* + p_m, \dots, k v_n^* + p_m)) \\ &= (k v_n^* + p_m, k v_{n-1}^* + p_m, \dots, k v_2^* + p_m, k v_1^* + p_m) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \psi(\theta(V^*), k, p_m) &= \psi(\theta(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), k, p_m) = \psi((v_n^*, v_{n-1}^*, \dots, v_2^*, v_1^*), k, p_m) \\ &= (k v_n^* + p_m, k v_{n-1}^* + p_m, \dots, k v_2^* + p_m, k v_1^* + p_m) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Por tanto, las expresiones 4.70 y 4.71 son iguales.

c.q.d

A partir de lo expresado en la definición 4.6.3 y el resultado del teorema 4.6.5, es posible obtener un vector de pesos ordenado de forma ascendente, lo que se expresa a continuación.

Corolario 4.6.1. *El vector de pesos obtenido por $W = \psi(\theta(V^*), k, p_m)$ y k positivo, entonces $\forall i < j$ se cumple que $w_i \leq w_j$.*

También, teniendo en cuenta la definición 4.6.3 y 4.6.4, se puede plantear que el vector de pesos $W' = \theta(\psi(V^*, k, p_m))$ tiene los mismos pesos que el vector $W = \psi(V^*, k, p_m)$ pero en orden inverso, es decir $w_i = w'_{n-i+1}$ donde $i = 1, \dots, n$. Por tanto, los vector de pesos $W = \psi(V^*, k, p_m)$ y $W' = \theta(\psi(V^*, k, p_m))$, son vectores de pesos simétricos, donde el eje de simetría es la recta paralela al eje "y" que pasa por el punto $P_0(\frac{1+n}{2}, 0)$. Luego, sobre la base del teorema 4.6.4 y 4.6.5, es posible plantear el siguiente corolario.

Corolario 4.6.2. *Los vectores de pesos $W = \psi(V^*, k, p_m)$ y $W' = \theta(\psi(V^*, k, p_m))$, cumplen que $w_i = w'_{n-i+1}$ donde $i = 1, \dots, n$.*

Ejemplo 4.6.1. *Sea la relación de preferencia cuantificada entre los criterios $c_1 \succ^4 c_2 \succ^2 c_3 \succ^1 c_4$ (el conjunto de etiquetas lingüísticas es el referido en el ejemplo 4.5.2), entonces el vector de cuantía $V = (1, 0.5, 0.25)$, y $k \in [0, 0.363636]$. Si consideramos que $k = 0.3$, obtenemos que $p_m = 0.04375$, y los vectores de pesos resultan:*

$$W = \psi((1, 0.5, 0.25), 0.3, 0.04375) = (0.56875, 0.26875, 0.11875, 0.04375)$$

$$\theta(W) = W' = (0.04375, 0.11875, 0.26875, 0.56875)$$

El comportamiento de los vectores calculados se muestra en el gráfico siguiente.

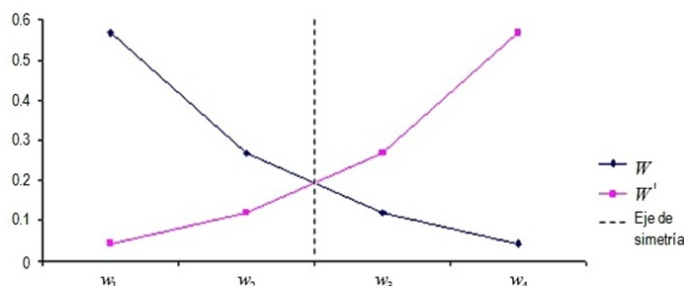


Figura 4.11: Representación de los pesos W y W' , y el eje de simetría.

Como se puede observar, los elementos de los vectores de pesos W y W' , coinciden con la única diferencia que están ordenados descendentemente y ascendentemente, respectivamente. Además, es importante precisar que al calcular $\theta(W) = W'$, se invierte la relación de preferencia cuantificada entre los criterios a $c_1 \prec^1 c_2 \prec^2 c_3 \prec^4 c_4$.

Por otra parte, los valores que toman el vector de cuantía y la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes cumplen una característica peculiar cuando tienden a cero, generando de esta forma el vector de pesos promedio, verificado en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.6. *Si el vector de cuantía $V = \{v_i/v_i = 0, \forall i\}$ o la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes $k = 0$, entonces se obtiene el vector de pesos promedio.*

Demostración:

- Caso #1: Sea el vector de cuantía V tal que cumpla que $\forall v_i : v_i = 0$, entonces el vector de cuantía acumulada $V^* = (0, 0, \dots, 0)$, así como $\theta(V^*) = (0, 0, \dots, 0)$. Por la definición 4.6.3, $p_m = \frac{1}{n}$ y al aplicar la definición 4.6.4 resulta que:

$$\psi \left((0, 0, \dots, 0), k, \frac{1}{n} \right) = (k \cdot 0 + p_m, k \cdot 0 + p_m, \dots, k \cdot 0 + p_m) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

- Caso #2: Si la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes $k = 0$, entonces $p_m = \frac{1}{n}$, independientemente al vector de cuantía. Al aplicar la definición 4.6.4 resulta que:

$$\psi \left((v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), 0, \frac{1}{n} \right) = (0 \cdot v_1^* + p_m, 0 \cdot v_2^* + p_m, \dots, 0 \cdot v_n^* + p_m) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

c.q.d

El resultado obtenido en el teorema anterior, permite afirmar que mientras más próximos estén los valores de V y k de cero más cercanos estará W al vector de pesos promedio. Sin embargo, modificando determinadas condiciones del vector de cuantía V , es posible obtener el vector de pesos máximo y mínimo del operador OWA.

Teorema 4.6.7. *Si el vector de cuantía V cumple que $v_1 = 1$ y $\forall v_i : i > 1, v_i = 0$ y sí la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes $k = \lambda(V)$, entonces se obtiene el vector de pesos máximo y mínimo del operador OWA para V^* y $\theta(V^*)$, respectivamente.*

Demostración:

Sea el vector de cuantía $V = (1, 0, 0, \dots, 0)$ y $k = \lambda(V)$ entonces por teorema 4.6.2, $k = 1$.

- Caso #1: Para V^* .

Al calcular el vector de cuantía acumulada $\gamma((1, 0, 0, \dots, 0)) = (1, 0, 0, \dots, 0)$, luego $p_m = \frac{1-k}{n} = 0$, entonces al aplicar la definición 4.6.4 resulta

$$\psi \left((1, 0, \dots, 0), 1, 0 \right) = (1 \cdot 1 + 0, 1 \cdot 0 + 0, \dots, 1 \cdot 0 + 0) = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

- Caso #2: Para $\theta(V^*)$.

Al calcular $\theta(\gamma((1, 0, 0, \dots, 0))) = \theta((1, 0, 0, \dots, 0)) = (0, 0, 0, \dots, 1)$, luego $p_m = \frac{1-k}{n} = 0$, entonces al aplicar la definición 4.6.4 resulta,

$$\psi((0, 0, \dots, 1), 1, 0) = (1 \cdot 0 + 0, 1 \cdot 0 + 0, \dots, 1 \cdot 1 + 0) = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

c.q.d

Otra característica que debe ser analizada, es en qué casos se pueden obtener vectores de pesos que tengan un comportamiento lineal, lo cual está asociado a los valores del vector de cuantía V y se expone en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.8. *Sea el vector de cuantía V , si $\forall v_i/v_i = c$, donde $c \in [0, 1]$, entonces se obtiene un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal.*

Demostración:

Sea el vector de cuantía $V = (c, c, c, \dots, c)$ y $k \in [0, \lambda(V)]$.

- Caso #1: Para V^* .

$$\gamma((c, c, c, \dots, c)) = ((n-1)c, (n-2)c, (n-3)c, \dots, c, 0)$$

luego por definición 4.6.1,

$$p_m = \frac{1 - k \sum_{i=1}^n (n-i)c}{n} = \frac{2 - kc(n^2 - n)}{2n}$$

Por la definición 4.6.4,

$$\begin{aligned} & \psi(((n-1)c, (n-2)c, (n-3)c, \dots, c, 0), k, p_m) \\ &= (k(n-1)c + p_m, k(n-2)c + p_m, \dots, kc + p_m, p_m) \end{aligned}$$

luego la forma general de los $w_i = k(n-i)c + p_m$, por tanto

$$\begin{aligned} |w_i - w_{i+1}| &= |k(n-i)c + p_m - k(n-i-1)c - p_m| \\ &= |knc - kic - knc + kic + kc| = kc \end{aligned}$$

resultando que la diferencia entre pesos adyacentes es constante (kc), por lo que el vector de pesos obtenido tiene un comportamiento lineal.

- Caso #2: Para $\theta(V^*)$.

$$\theta(\gamma((c, c, c, \dots, c))) = (0, c, 2c, \dots, (n-2)c, (n-1)c)$$

luego por definición 4.6.1,

$$p_m = \frac{1 - k \sum_{i=1}^n (i-1)c}{n} = \frac{2 - kc(n^2 - n)}{2n}$$

Por la definición 4.6.4,

$$\begin{aligned} & \psi((0, c, 2c, \dots, (n-2)c, (n-1)c), k, p_m) \\ &= (p_m, kc + p_m, \dots, k(n-2)c + p_m, k(n-1)c + p_m) \end{aligned}$$

luego la forma general de los $w_i = k(i-1)c + p_m$, por tanto

$$\begin{aligned} |w_i - w_{i+1}| &= |k(i-1)c + p_m - kic - p_m| \\ &= |kic - kc - kic| = kc \end{aligned}$$

y llegamos a la misma conclusión.

c.q.d

4.6.3. Propiedades de los pesos a partir de k perteneciente a un intervalo simétrico respecto al cero.

Como se ha analizado hasta el momento, la función θ realiza una transformación simétrica de los pesos donde el eje de simetría es la recta paralela al eje "y" que pasa por el punto $P_0(\frac{1+n}{2}, 0)$. Sin embargo, también es posible realizar otra transformación simétrica, pero en este caso utilizando como eje de simetría la recta $y = \frac{1}{n}$. En esta variante solo es necesario ampliar el intervalo de k , tal que pueda tomar valores negativos, donde el valor cero representaría el centro de simetría. Para ello, se requiere definir el nuevo intervalo del parámetro k .

Teorema 4.6.9. *Para obtener vectores de pesos simétricos respecto a la recta $y = \frac{1}{n}$ mediante la función ψ (4.69), entonces la constante inicial de diferencia máxima entre los pesos*

$$\text{adyacentes } k \in \left[-\frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} iv_i}, \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} iv_i} \right]$$

Demostración:

A partir de la definición 4.6.4 y el teorema 4.6.5, se puede plantear que el mayor peso del vector es $w_1 = k v_1^* + p_m$ o $w_n = k v_1^* + p_m$. Luego, como el eje de simetría es $y = \frac{1}{n}$, entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
\left| k v_1^* + p_m - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} &\Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq k v_1^* + p_m - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq k v_1^* + p_m \leq \frac{2}{n} \Leftrightarrow -p_m \leq k v_1^* \leq \frac{2}{n} - p_m \\
&\Leftrightarrow -\frac{1 - k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \leq k v_1^* \leq \frac{2}{n} - \frac{1 - k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{-1 + k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \leq k v_1^* \leq \frac{1 + k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}{n} \\
&\Leftrightarrow -1 + k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \leq k n v_1^* \leq 1 + k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \\
&\Leftrightarrow -1 \leq k n v_1^* - k \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -1 \leq k \left(n v_1^* - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i \right) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{n v_1^* - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \leq k \leq \frac{1}{n v_1^* - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \leq k \leq \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}
\end{aligned}$$

c.q.d

Ejemplo 4.6.2. Sea la relación de preferencia cuantificada entre los criterios $c_1 \succ^4 c_2 \succ^2 c_3 \succ^1 c_4$, entonces el vector de cuantía es $V = (1, 0.5, 0.25)$, y $k \in [-0.23529412, 0.23529412]$, luego se considera:

- $k = 0.23529412$, entonces $p_m = 0.08823529$, y el vector de pesos:

$$W = \psi((1, 0.5, 0.25), 0.23529412, 0.08823529) = (0.5, 0.2647059, 0.1470588, 0.0882353)$$

- $k = -0.23529412$, entonces $p_m = 0.41176471$, y el vector de pesos:

$$W' = \psi((1, 0.5, 0.25), -0.23529412, 0.41176471) = (0, 0.2352941, 0.3529412, 0.4117647)$$

El comportamiento de los vectores calculados se muestra gráficamente.

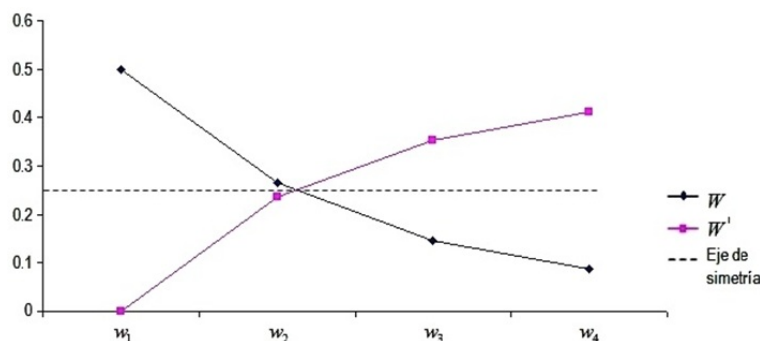


Figura 4.12: Representación de los pesos W y W' , y el eje de simetría.

Al obtener un vector W y su vector simétrico W' mediante el factor k , no se cumple para todos los casos que $w_i = w'_{n-i+1}$ donde $i = 1, \dots, n$, solo es posible bajo determinadas condiciones, lo que se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 4.6.10. *Si el vector de cuantía V , cumple que $\forall v_i : v_i = c$, donde $c \in [0, 1]$ entonces el vector de pesos W y su respectivo vector simétrico W' obtenido por una simetría de eje $y = \frac{1}{n}$ cumplen que $w_i = w'_{n-i+1}$ donde $i = 1, \dots, n$.*

Demostración:

El vector de cuantía V , cumple que $\forall v_i : v_i = c$, donde $c \in [0, 1]$, entonces por el teorema 4.6.8 el vector de pesos W tiene un comportamiento lineal. Cuando los pesos tienen un comportamiento lineal se obtienen por la función:

$w_i = a \left(\frac{2i-1-n}{2} \right) + \frac{1}{n}$, tal que $a \in \left] \frac{-2}{n(n-1)}, 0 \right]$. Si a esta función se le aplica una simetría respecto a $y = \frac{1}{n}$ se obtiene la función $w'_i = a \left(\frac{2i-1-n}{2} \right) + \frac{1}{n}$, pero con pendiente $a \in \left] 0, \frac{2}{n(n-1)} \right]$, y el peso $w'_{n-i+1} = -a \left(\frac{2i-1-n}{2} \right) + \frac{1}{n}$, por lo que se cumple que:

$$w_i = w'_{n-i+1}$$

c.q.d

A partir de las propiedades analizadas para las variantes de simetría del vector de pesos, se pueden resumir las características generales siguientes:

Tabla 4.8: Comparación de la simetría del vector de pesos.

Característica analizada	Ejes de simetrías	
	Recta paralela al eje "y" que pasa por el punto $P_0 \left(\frac{1+n}{2}, 0 \right)$	Recta $y = \frac{1}{n}$
Forma de obtener la simetría	Mediante la función θ	Para valores negativos de k en el intervalo establecido en el teorema 4.6.9.
Al aplicar la simetría	Los pesos del vector se organizan en orden inverso.	
Al calcular el vector simétrico a W .	Los pesos de los vectores W y W' coinciden pero en orden inverso.	Los pesos de los vectores W y W' coinciden en orden inverso cuando el vector de cuantía es constante.
Comportamiento de los valores de cuantía al aplicar la simetría. Ejemplo: $c_1 \succ^1 c_2 \succ^2 c_3 \succ^3 c_4$	Se invierten los valores de cuantía establecidos. Ejemplo: $c_1 \prec^3 c_2 \prec^2 c_3 \prec^1 c_4$	Se mantienen los valores de cuantía establecidos. Ejemplo: $c_1 \prec^1 c_2 \prec^2 c_3 \prec^3 c_4$

4.6.4. Comportamiento del valor α para las dos variantes de simetría.

Una de las medidas asociadas al vector de pesos del operador OWA es el $orness(W)$, que es de gran utilidad en distintas aplicaciones de este operador. Por la importancia de esta medida, se analiza a continuación un estudio del comportamiento del $orness(W)$ donde el vector de pesos es obtenido por la definición 4.6.4, sobre la base de las variantes de simetría que se pueden realizar con este vector de pesos.

Al calcular el $orness(W)$ de un vector de pesos obtenido mediante la definición 4.6.4, resulta que $\alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i)(k v_i^* + p_m)$, luego, al realizar las operaciones correspondientes resulta que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n k v_i^* + n p_m - i k v_i^* - i p_m) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n k \sum_{i=1}^n v_i^* + \sum_{i=1}^n n p_m - k \sum_{i=1}^n i v_i^* - p_m \sum_{i=1}^n i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \left(nk \sum_{i=1}^n v_i^* - k \sum_{i=1}^n i v_i^* + p_m n^2 - \frac{p_m n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(k \sum_{i=1}^n (n v_i^* - i v_i^*) + \frac{2n^2 p_m - p_m(n^2 + n)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(k \sum_{i=1}^n (n-i) v_i^* + \frac{p_m n(n-1)}{2} \right) = \frac{n p_m}{2} + \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) v_i^*
\end{aligned}$$

Sobre la base de la definición 4.6.11, se sustituye p_m por su correspondiente expresión, por lo que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1 - k \sum_{i=1}^n v_i^*}{2} + \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) v_i^* = \frac{1}{2} - \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n v_i^* + \frac{kn}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^* - \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n i v_i^* \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{kn}{n-1} - \frac{k}{2} \right) \sum_{i=1}^n v_i^* - \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n i v_i^* \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{2kn - kn + k}{2(n-1)} \right) \sum_{i=1}^n v_i^* - \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n i v_i^* \\
&= \frac{1}{2} + \frac{k(n+1)}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^* - \frac{k}{n-1} \sum_{i=1}^n i v_i^* = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n v_i^* - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right)
\end{aligned}$$

Finalmente, por las proposiciones 4.6.1 y 4.6.1 resulta que,

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right) \quad (4.72)$$

A partir de la generalización para el cálculo del valor α con esta concepción, en los teoremas siguientes se analiza la relación del valor de α en función de la transformación del vector de pesos mediante las simetrías planteadas anteriormente. Primeramente se valora a partir de las condiciones del teorema 4.6.9 (simetría respecto a $y = \frac{1}{n}$), donde la misma se encuentra en función del valor de k que toma valores negativos y positivos.

Teorema 4.6.11. Si $k \in \left[-\frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}, \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \right]$ y $W = \psi(V^*, k, p_m)$, entonces se cumple que el orness $(\psi(V^*, k, p_m)) = 1 - \text{orness}(\psi(V^*, -k, p_m))$.

Demostración:

Sea $k \in \left[0, \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i} \right]$, entonces resulta que $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right)$

Sea $k \in \left[\frac{1}{n \sum_{i=1}^{n-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} i v_i}, 0 \right]$, entonces resulta que $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right)$,

por lo que se verifica que $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$.

c.q.d

El otro caso que se debe analizar, es el comportamiento del valor de α sobre la base de una transformación simétrica del vector de pesos, donde el eje de simetría es la recta paralela al eje "y" que pasa por el punto $P_0 \left(\frac{1+n}{2}, 0 \right)$, lo que se expresa a continuación.

Teorema 4.6.12. *Sea el vector de pesos $W = \psi(V^*, k, p_m)$, entonces se cumple que el orness $(\psi(V^*, k, p_m)) = 1 - \text{orness}(\psi(\theta(V^*), k, p_m))$.*

Demostración:

- Caso #1: Para $V^* = \left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j, \sum_{j=2}^{n-1} v_j, \sum_{j=3}^{n-1} v_j, \dots, v_{n-1}, 0 \right)$.

A partir de la expresión 4.72, resulta que $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right)$

Sin embargo, la expresión $\sum_{i=1}^n i v_i^*$, bajo las condiciones del vector V^* , resulta:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n i v_i^* &= \sum_{j=1}^{n-1} v_j + 2 \sum_{j=2}^{n-1} v_j + 3 \sum_{j=3}^{n-1} v_j + \dots + (n-1) v_{n-1} + n \cdot 0 \\
 &= (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + 2(v_2 + \dots + v_{n-1}) + 3(v_3 + \dots + v_{n-1}) + \dots + \\
 &\quad + (n-2)(v_{n-2} + v_{n-1}) + (n-1)v_{n-1} \\
 &= v_1 + \sum_{i=1}^2 i v_2 + \sum_{i=1}^3 i v_3 + \dots + \sum_{i=1}^{n-2} i v_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-1} i v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i j v_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \frac{i(i+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) v_i \tag{4.73}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo 4.73 en α_1 resulta:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) v_i \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} ((n+1) i v_i - i(i+1) v_i) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) i v_i\end{aligned}$$

- Caso #2: Para $\theta(V^*) = \left(0, v_{n-1}, \sum_{j=n-2}^{n-1} v_j, \dots, \sum_{j=2}^{n-1} v_j, \sum_{j=1}^{n-1} v_j \right)$.

A partir de la expresión 4.72, resulta que $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \sum_{i=1}^n i v_i^* \right)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i v_i^* &= 1 \cdot 0 + 2 v_{n-1} + 3 \sum_{j=n-2}^{n-1} v_j + \dots + (n-1) \sum_{j=2}^{n-1} v_j + n \sum_{j=1}^{n-1} v_j \\ &= 2 v_{n-1} + 3(v_{n-2} + v_{n-1}) + 4(v_{n-3} + v_{n-2} + v_{n-1}) + \dots + \\ &\quad + (n-1)(v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1}) + n(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) \\ &= n v_1 + \sum_{i=n-1}^n i v_2 + \sum_{i=n-2}^n i v_3 + \dots + \sum_{i=3}^n i v_{n-2} + \sum_{i=2}^n i v_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=n-j+1}^n j v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \sum_{j=n-i+1}^n j = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-i+1)(n-i)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} v_i (n^2 + n - n^2 + n i + n i - i^2 - n + i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (2n - i + 1) i v_i\end{aligned} \tag{4.74}$$

Sustituyendo 4.74 en α_2 resulta:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (2n - i + 1) i v_i \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} ((n+1) i v_i - (2n - i + 1) i v_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n+1 - 2n + i - 1) i v_i = \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (i - n) i v_i\end{aligned}$$

Entonces al calcular $\alpha_1 + \alpha_2$, resulta:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) i v_i + \frac{1}{2} + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (i-n) i v_i \\
 &= 1 + \frac{k}{2(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) i v_i + \sum_{i=1}^{n-1} (i-n) i v_i \right) \\
 &= 1 + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i) i v_i + (i-n) i v_i) \\
 &= 1 + \frac{k}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+i-n) i v_i = 1
 \end{aligned}$$

c.q.d

4.7. OWAs basados en una escala de razón

A partir de lo analizado anteriormente (4.3.6) expresado por Yager [134], es posible obtener un vector de pesos a partir de la relación de orden establecida para los diferentes criterios. Sin embargo se pueden definir otras relaciones tomando como base un vector de razón de proporcionalidad, para ello es necesario plantear las definiciones y teoremas siguientes.

Definición 4.7.1. *Se denominan pesos adyacentes del vector W a todo par de pesos consecutivos w_i y w_{i+1} , donde $i = 1, 2, \dots, n-1$.*

Definición 4.7.2. *Si la relación entre los pesos cumple la relación que $w_i > w_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, lo cual supone que $\alpha \geq 0.5$, se denomina razón de proporcionalidad de pesos adyacentes de un vector de pesos W a la relación definida por:*

$$v_i = \begin{cases} \frac{w_i}{w_{i+1}} & \text{si } w_{i+1} \neq 0 \\ 0 & \text{si } w_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

Sobre la base de la definición 4.7.2, se puede plantear que para cada vector de pesos W , podemos obtener un nuevo vector que contenga la razón de proporcionalidad de todos los pesos adyacentes y está dado por $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$.

Los elementos del vector de pesos son positivos $w_i \geq 0$; luego, teniendo en cuenta la definición 4.7.2, también se verifica que $v_i \geq 0$, $\forall v_i$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$, y por tanto, todo vector de valores mayores o iguales que cero puede considerarse como la razón de proporcionalidad de los pesos adyacentes de un vector de pesos dado.

Definición 4.7.3. Si $w'_i < w'_{i+1}, \forall i$, lo cual indica que $\alpha \leq 0.5$, se denomina razón de proporcionalidad de pesos adyacentes de un vector de pesos a la relación definida por:

$$v_i = \begin{cases} \frac{w'_{i+1}}{w'_i} & \text{si } w'_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } w'_i = 0 \end{cases} \quad (4.76)$$

La razón de proporcionalidad v_i entre pesos adyacentes cumple las propiedades siguientes:

- $v_i \geq 0$ pues los elementos del vector de proporcionalidad son cocientes de pesos, tales que $w_i \geq 0$.
- $v_i \in [1, \infty)$, con solo tener en cuenta la definición 4.7.2, ya que se cumple que $w_i \geq w_{i+1}, \forall i$.
- $v_i \in [0, 1]$, entonces por la definición 4.7.3 se cumple que $w'_i \leq w'_{i+1}$ ó $w_i = 0, \forall i$.

Luego, sobre la base de estas propiedades, todo vector de dimensión $n - 1$, tal que, sus elementos sean mayores o iguales que cero, puede considerarse como la razón de proporcionalidad de los pesos adyacentes de un vector de pesos de dimensión n .

También es posible definir la relación de proporcionalidad entre pesos adyacentes de la forma siguiente, cuando $C_1 \prec C_2 \prec C_3 \prec \dots \prec C_n$.

A partir de este momento se han creado las condiciones para definir la formulación general que permite obtener el vector de pesos sobre la base de la razón de proporcionalidad entre los criterios adyacentes.

Teorema 4.7.1. Sea V el vector de razón de proporcionalidad de dimensión $n - 1$, asociado con $C_i \succ C_{i+1}, \forall i$, entonces se puede obtener un vector de pesos W a través de la expresión recurrente siguiente:

$$w_i = \begin{cases} w_n \prod_{k=i}^{n-1} v_k & \text{si } i \neq n \\ \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} v_k \right) + 1} & \text{si } i = n \end{cases} \quad (4.77)$$

Demostración:

Dado $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, sea $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ el vector de pesos a obtener. A partir de la definición 4.7.2 se puede comprobar que

$$w_1 = v_1 \cdot w_2, \quad w_2 = v_2 \cdot w_3, \quad w_3 = v_3 \cdot w_4, \quad \dots, \quad w_{n-1} = v_{n-1} \cdot w_n$$

Al aplicar una sustitución iterativa se obtiene:

$$\begin{aligned}
 w_{n-1} &= v_{n-1} \cdot w_n \\
 &\vdots \\
 w_3 &= v_3 \cdot \dots \cdot v_{n-1} \cdot w_n \prod_{k=3}^{n-1} v_k \cdot w_n \\
 w_2 &= v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_{n-1} \cdot w_n = \prod_{k=2}^{n-1} v_k \cdot w_n \\
 w_1 &= v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_{n-1} \cdot w_n = \prod_{k=1}^{n-1} v_k \cdot w_n
 \end{aligned}$$

Por tanto para $i = 1, 2, \dots, n-1$, se puede generalizar que $w_i = \prod_{k=i}^{n-1} v_k \cdot w_n, \forall i$. Considérese que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ entonces, se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i}^{n-1} v_k \cdot w_n + w_n = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i}^{n-1} v_k + 1 \right) w_n = 1 \Leftrightarrow w_n = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i}^{n-1} v_k + 1 \right)}$$

c.q.d

De igual forma se puede definir el teorema en función de la definición 4.7.3, como se muestra a continuación.

Teorema 4.7.2. *Sea V el vector de razón de proporcionalidad de dimensión $n-1$, asociado con $C_i \prec C_{i+1}, \forall i$, entonces se puede obtener un vector de pesos W' a través de la expresión recurrente siguiente:*

$$w'_i = \begin{cases} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j v_k \right) + 1} & \text{si } i = 1 \\ w'_1 \prod_{k=1}^{i-1} v_k & \text{si } i \neq 1 \end{cases} \quad (4.78)$$

Demostración:

Dado $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, sea el vector de pesos $W' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$ y a partir de la definición 4.7.3 se puede comprobar que

$$w'_2 = v_1 \cdot w'_1, w'_3 = v_2 \cdot w'_2, w'_4 = v_3 \cdot w'_3, \dots, w'_n = v_{n-1} \cdot w'_{n-1}$$

Al aplicar una sustitución iterativa se obtiene:

$$\begin{aligned}
 w'_2 &= v_1 \cdot w'_1 \\
 w'_3 &= v_1 \cdot v_2 \cdot w'_1 = \prod_{k=1}^2 v_k \cdot w'_1 \\
 w'_4 &= v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot w'_1 = \prod_{k=1}^3 v_k \cdot w'_1 \\
 &\vdots \\
 w'_n &= v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_{n-1} \cdot w'_1 = \prod_{k=1}^{n-1} v_k \cdot w'_1
 \end{aligned}$$

Por tanto para $i = 2, \dots, n$, se puede generalizar $w'_i = \prod_{k=1}^{i-1} v_k \cdot w'_1$. Considérese que $\sum_{i=1}^n w'_i = 1$ entonces, se verifica que:

$$w'_1 + \sum_{j=2}^n \prod_{k=1}^{j-1} v_k \cdot w'_1 = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=2}^n \prod_{k=1}^{j-1} v_k + 1 \right) w'_1 = 1 \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j v_k + 1 \right)}$$

c.q.d

Ejemplo 4.7.1. Sea el vector de proporcionalidad $V = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, si se aplican los teoremas 4.7.1 y 4.7.2, se obtendrán los pesos de la tabla 4.9. Si consideramos el modelo de decisión resulta:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\
 1/2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\
 1/4 & 1/2 & 1 & 2 & 4 \\
 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\
 1/9 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1
 \end{pmatrix}$$

Al representar gráficamente los pesos se obtiene la figura 4.13, donde se refleja la pequeña diferencia entre el cálculo mediante el proceso AHP y la propuesta del teorema 4.7.2.

Tabla 4.9: Relación de pesos obtenidos mediante la razón de proporcionalidad y los teoremas 4.7.1, 4.7.2 y AHP.

	Pesos				
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
Teorema 4.7.1	0.03225806	0.06451613	0.12903226	0.25806452	0.51612903
Teorema 4.7.2	0.51612903	0.25806452	0.12903226	0.06451613	0.03225806
AHP	0.487803	0.270663	0.135331	0.0676657	0.0385375

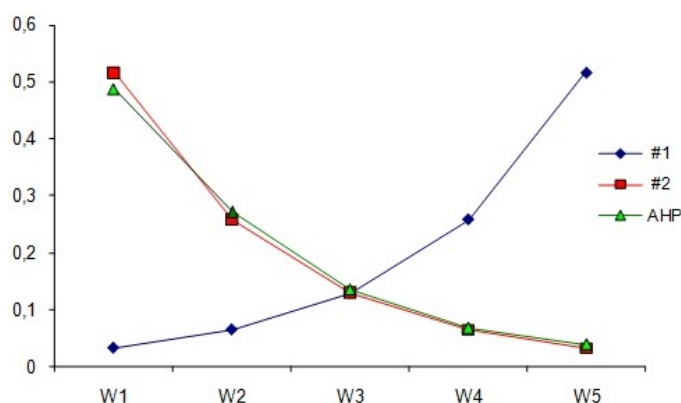


Figura 4.13: Gráfica que representa los pesos obtenidos por los teoremas 4.7.1 (#1), 4.7.2 (#2) y AHP.

4.7.1. Propiedades de los OWAs basados en una escala de razón.

El cálculo del vector de pesos a partir de la relación de proporción entre los pesos adyacentes, permite obtener el vector de pesos máximo, promedio y mínimo, lo cual se expresa en los teoremas siguientes.

Teorema 4.7.3. *Sea V un vector de razón de proporcionalidad, si los elementos del vector V cumplen que $\forall v_i : v_i = 1$ entonces el vector de pesos W resultante es el vector de pesos promedio $W = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.*

Demostración:

Sea $V = (1, 1, 1, \dots, 1)$, de dimensión $n - 1$.

- Caso #1: Aplicando el teorema 4.7.1, se obtiene que:

$$w_n = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} 1 \right) + 1} \Leftrightarrow w_n = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} 1 + 1} \Leftrightarrow w_n = \frac{1}{n - 1 + 1} = \frac{1}{n}$$

Los elementos w_i tal que $i < n$, son obtenidos por:

$$w_i = \frac{1}{n} \prod_{k=i}^{n-1} 1 \Leftrightarrow w_i = \frac{1}{n}$$

Resultando, el vector de pesos $W = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

- Caso #2: Aplicando el teorema 4.7.2, se obtiene que:

$$w_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j 1\right) + 1} \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} 1 + 1} \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{n-1+1} = \frac{1}{n}$$

Los elementos w_i tal que $i > 1$, son obtenidos por:

$$w_i = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{i-1} 1 \Leftrightarrow w_i = \frac{1}{n}$$

Resultando, el vector de pesos $W = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

c.q.d

La obtención de los vectores mínimo y máximo del operador OWA, se encuentran asociados a la aplicación de la definición 4.7.2 y 4.7.3, respectivamente. Expresados en los teoremas siguientes:

Teorema 4.7.4. *Sea V un vector de razón de proporcionalidad de dimensión $n - 1$, tal que $\forall v_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n - 2$ y $v_{n-1} = 0$, entonces mediante la expresión 4.77 se obtiene el vector de pesos mínimo del operador OWA.*

Demostración:

Sea $V = (v_1, v_2, \dots, 0)$, de dimensión $n - 1$ y $v_h \geq 0$, $h = 1, \dots, n - 2$. Luego aplicando el teorema 4.7.1 se obtiene que:

$$w_n = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} v_k\right) + 1} \Leftrightarrow w_n = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} 0 + 1}, \text{ pues } v_{n-1} = 0, \text{ por tanto } w_n = 1$$

Los elementos w_i tal que $i < n$, son obtenidos por:

$$w_i = w_n \prod_{k=i}^{n-1} v_k \Leftrightarrow w_i = 0, \text{ pues } v_{n-1} = 0. \text{ Luego, el vector de pesos es } W = (0, 0, \dots, 1)$$

c.q.d

Teorema 4.7.5. *Sea V un vector de razón de proporcionalidad de dimensión $n - 1$, tal que $\forall v_i \geq 0$, $i = 2, \dots, n - 1$ y $v_1 = 0$, entonces mediante la expresión 4.78 se obtiene el vector de pesos máximo del operador OWA.*

Demostración:

Sea $V = (0, v_2, v_3, \dots, v_{n-1})$, de dimensión $n - 1$ y $v_h \geq 0$, $h = 2, \dots, n - 1$. Luego aplicando el teorema 4.7.2 se obtiene que:

$$w_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j v_k\right)+1} \Leftrightarrow w_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-1} 0+1}, \text{ pues } v_1 = 0, \text{ por tanto } w_1 = 1.$$

Los elementos w_i tal que $i > 1$, son obtenidos por:

$$w_i = w_1 \prod_{k=1}^{i-1} v_k \Leftrightarrow w_i = 0, \text{ pues } v_1 = 0. \text{ Luego, el vector de pesos es } W = (1, 0, \dots, 0).$$

c.q.d

Otras de las propiedades necesarias a analizar son las referentes a cómo se organiza el vector de pesos W (descendente o ascendente) en función del vector de razón de proporcionalidad, aspectos que se exponen en los teoremas siguientes.

Teorema 4.7.6. *Sea un vector de razón de proporcionalidad V , si los elementos del vector V cumplen que $\forall v_i : v_i \in [1, \infty)$, a través de las expresiones 4.75 y 4.76, entonces los elementos del vector de pesos W resultante cumplen que $\forall w_i : w_i \geq w_{i+1}$ y $\forall w_i : w_i \leq w_{i+1}$, respectivamente.*

Demostración:

- Caso #1: Por la expresión 4.75 resulta que $v_i = \frac{w_i}{w_{i+1}}$, si $w_{i+1} \neq 0$. Por hipótesis,

$$v_i \geq 1 \Leftrightarrow \frac{w_i}{w_{i+1}} \geq 1 \Leftrightarrow w_i \geq w_{i+1}$$

- Caso #2: Por la expresión 4.76 resulta que $v_i = \frac{w'_{i+1}}{w'_i}$, si $w'_i \neq 0$. Por hipótesis,

$$v_i \geq 1 \Leftrightarrow \frac{w'_{i+1}}{w'_i} \geq 1 \Leftrightarrow w'_i \leq w'_{i+1}$$

c.q.d

Teorema 4.7.7. *Sea un vector de razón de proporcionalidad V , si los elementos del vector V cumplen que $\forall v_i : v_i \in [0, 1]$, a través de las expresiones 4.75 y 4.76, entonces los elementos del vector de pesos W resultante cumplen que $\forall w_i : w_i \leq w_{i+1}$ y $\forall w_i : w_i \geq w_{i+1}$, respectivamente.*

Demostración:

- Caso #1: Por la expresión 4.75 resulta que $v_i = \frac{w_i}{w_{i+1}}$, si $w_{i+1} \neq 0$.
Por hipótesis, $v_i \in [0, 1]$, entonces $v_i \leq 1$, por tanto $\frac{w_i}{w_{i+1}} \leq 1 \Leftrightarrow w_i \leq w_{i+1}$.
- Caso #2: Por la expresión 4.76 resulta que $v_i = \frac{w'_{i+1}}{w'_i}$, si $w'_i \neq 0$.
Por hipótesis, $v_i \in [0, 1]$, entonces $v_i \leq 1$, por tanto, $\frac{w'_{i+1}}{w'_i} \leq 1 \Leftrightarrow w'_i \geq w'_{i+1}$.

c.q.d

Sobre la base de lo planteado en los teoremas 4.7.6 y 4.7.7, es posible verificar que si el vector de razón de proporcionalidad V está formado por valores $v_i \in [0, 1]$ y $v_i \in [1, \infty)$ a la vez, entonces el vector de pesos resultante no tiene sus pesos ordenados (ver ejemplo 4.7.2).

Ejemplo 4.7.2. Sea el vector de proporcionalidad $V = (0.4, 2, 0.6, 1.5)$, al aplicar los teoremas 4.7.1 y 4.7.2, se obtienen los pesos de la tabla 4.10 y su comportamiento se muestra en la fig. 4.14.

Tabla 4.10: Relación de pesos obtenidos mediante los teoremas 4.7.1, 4.7.2.

	Pesos				
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
Teorema 4.7.1	0.12162162	0.30405405	0.15202703	0.25337838	0.16891892
Teorema 4.7.2	0.29411763	0.11764706	0.23529412	0.14117647	0.21176471

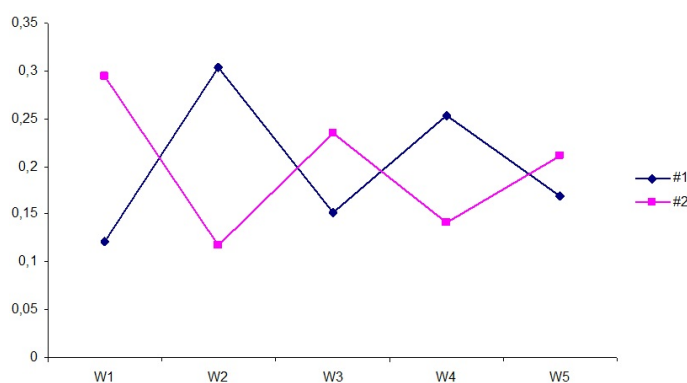


Figura 4.14: Gráfica que representa los pesos obtenidos por los teoremas 4.7.1 (#1) y 4.7.2 (#2).

Por otra parte, se puede observar que los dos intervalos antes referidos, tienen un extremo en común, con valor igual a uno y este cumple una característica particular como se muestra en el teorema siguiente.

Teorema 4.7.8. *Sea un vector de razón de proporcionalidad V , si $\exists v_i : v_i = 1$ entonces el vector de pesos resultante W cumple que los elementos $w_i, w_{i+1} \in W$ son tales que $w_i = w_{i+1}$.*

Demostración:

- Caso #1: Por la expresión 4.75 resulta que $v_i = \frac{w_i}{w_{i+1}}$, si $w_{i+1} \neq 0$.
Por hipótesis, $\exists v_i : v_i = 1$, por tanto $\frac{w_i}{w_{i+1}} = 1 \Leftrightarrow w_i = w_{i+1}$.
- Caso #2: Por la expresión 4.76 resulta que $v_i = \frac{w'_{i+1}}{w'_i}$, si $w'_i \neq 0$.
Por hipótesis, $\exists v_i : v_i = 1$, por tanto, $\frac{w'_{i+1}}{w'_i} = 1 \Leftrightarrow w'_i = w'_{i+1}$.

c.q.d

Otro valor que tiene incidencias particulares en el vector de razón de proporcionalidad es el caso del cero, reflejándose en el siguiente corolario.

Corolario 4.7.1. *Sea un vector de razón de proporcionalidad V , si $\exists v_i : v_i = 0$ entonces el vector de pesos resultante a través de las expresiones 4.77 y 4.78, cumplen que $\forall w_j : j \leq i, w_j = 0$ y $\forall w_j : j > i, w_j = 0$, respectivamente.*

A partir de todas las propiedades estudiadas se puede plantear, que el vector de razón de proporcionalidad debe tomar valores tal que $v_i \in [0, 1]$ o $v_i \in [1, \infty)$, para que el vector de pesos resultante esté ordenado de forma descendente o ascendente, según el teorema utilizado (4.7.1 o 4.7.2). También es importante poner de manifiesto que al seleccionar un vector de razón de proporcionalidad perteneciente a los intervalos definidos, y se aplican los teoremas 4.7.1 y 4.7.2 no siempre se obtienen vectores de pesos que sean iguales en orden inverso, condición que se analiza a continuación.

Teorema 4.7.9. *Sea un vector de razón de proporcionalidad V , tal que $\forall v_i : v_i = c$, donde c es una constante tal que $c \in [0, 1]$ o $c \in [1, \infty)$, entonces el vector de pesos resultante a través de la expresión 4.77 coincide con el obtenido por la expresión 4.78 pero en orden inverso.*

Demostración:

Sea el vector de razón de proporcionalidad $V = (c, c, c, \dots, c)$ de dimensión $n-1$, si aplicamos la expresión 4.77 $w_n = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} v_k\right)_{+1}} \Leftrightarrow w_n = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} c^{n-j}\right)_{+1}}$ y al aplicar la expresión 4.78

$w'_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j v_k\right)+1} \Leftrightarrow w'_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} c^j\right)+1}$, por la propiedad conmutativa de la suma se verifica, $\sum_{j=1}^{n-1} c^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} c^j$. Luego se cumple que $w_n = w'_1$.

Por otra parte $w_i = w_n \prod_{k=i}^{n-1} v_k = w_n c^{n-i}$ y $w'_i = w'_1 \prod_{k=1}^{i-1} v_k = w'_1 c^{i-1}$, luego al calcular la diferencia $w_i - w'_{n-i+1} = w_n c^{n-i} - w'_1 c^{n-i+1-1} = w_n c^{n-i} - w'_1 c^{n-i} = 0$, porque $w_n = w'_1$. Finalmente se cumple que $w_i = w'_{n-i+1}$.

c.q.d

4.7.2. Funciones para obtener el vector de razón de proporcionalidad.

A través de la razón de proporcionalidad se puede obtener cualquier conjunto de pesos del operador OWA; solo es necesario encontrar el vector de razón de proporcionalidad, lo cual puede ser complejo si se desean determinadas características a cumplir. Por ejemplo que tenga comportamiento lineal o no lineal. Por tal motivo a continuación se analiza como obtener estos resultados.

Para obtener el vector de pesos tal que tenga un comportamiento lineal específicamente que coincida con la ley de Borda-Kendal, es necesario obtener el vector de razón de proporcionalidad a través de las funciones siguientes.

- Mediante el teoremas 4.7.1

$$f_1(i) = 1 + \frac{1}{n-i} \Leftrightarrow f_1(i) = \frac{n-i+1}{n-i} \quad (4.79)$$

- Mediante el teoremas 4.7.2

$$f_2(i) = 1 - \frac{1}{n-i+1} \Leftrightarrow f_2(i) = \frac{n-i}{n-i+1} \quad (4.80)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n-1$. Como se observa la función 4.79 es el recíproco de la función 4.80. Si los elementos v_i se calculan con las funciones antes referidas se obtendrá como vector de pesos resultante la ley de Borda-Kendall, según el teorema correspondiente.

Como se ha expresado, utilizando la función 4.79 se obtiene el vector de razón de proporcionalidad. Por tanto, mediante el teorema 4.7.1 se puede calcular el vector de pesos y este coincide con el obtenido por la fórmula de Borda-Kendall, sin embargo al utilizar el mismo

teorema pero el cálculo del vector de razón de proporcionalidad se realiza con la función 4.80, entonces se obtiene otro vector de pesos que no tiene un comportamiento lineal.

Ejemplo 4.7.3. Sea $n = 9$, entonces mediante las funciones 4.79 y 4.80, se obtienen dos vectores de razón de proporcionalidad (tabla 4.11), para $i = 1, \dots, 9$.

Tabla 4.11: Razón de proporcionalidad mediante las funciones 4.79 y 4.80, para $n = 9$.

	Vector de razón de proporcionalidad								
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
Función 4.79	1.111	1.125	1.143	1.167	1.2	1.25	1.333	1.5	2
Función 4.80	0.9	0.889	0.875	0.857	0.833	0.8	0.75	0.667	0.5

Al calcular los vectores de pesos a través de los teoremas 4.7.1 (equivalente a la formulación de Borda-Kendall) y 4.7.2, para el vector de razón de proporcionalidad obtenido mediante la función 4.79, resultan los pesos que se muestran en la tabla 4.12 y su comportamiento gráfico en la figura 4.15.

Tabla 4.12: Pesos obtenidos con el vector de razón de proporcionalidad calculado con la función 4.79.

	Pesos									
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
Teorema 4.7.1	0.182	0.164	0.145	0.127	0.109	0.091	0.073	0.055	0.036	0.018
Teorema 4.7.2	0.034	0.038	0.043	0.049	0.057	0.068	0.085	0.114	0.171	0.341

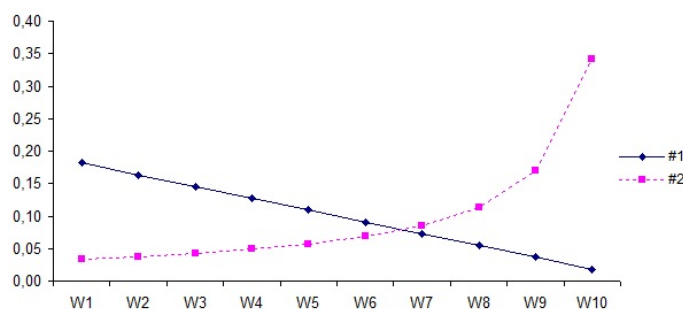


Figura 4.15: Representación de los pesos obtenidos por los teoremas 4.7.1 (#1) y 4.7.2 (#2), tal que el vector de razón de proporcionalidad se calculó con la función 4.79.

Si el vector de razón de proporcionalidad se obtiene con la función 4.80 (ver tabla 4.11), entonces se intercambian los resultados de la tabla 4.12 para los teoremas 4.7.1 y 4.7.2; y su comportamiento gráfico se muestra en la figura 4.16.

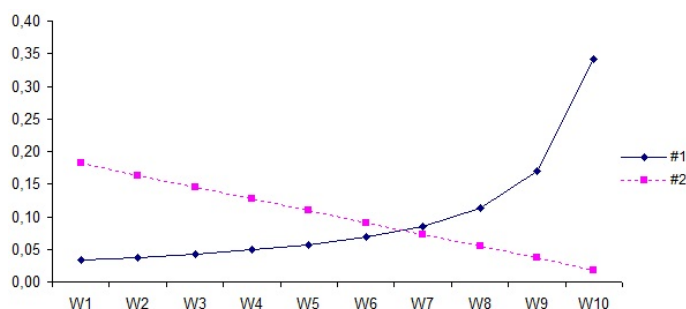


Figura 4.16: Representación de los pesos obtenidos por los teoremas 4.7.1 (#1) y 4.7.2 (#2), tal que el vector de razón de proporcionalidad se calculó con la función 4.80.

Las funciones 4.79 y 4.80 se pueden transformar con el objetivo de que generen otro comportamiento, por ejemplo que se multipliquen o se sumen con un factor dado, entonces resulta:

- Al multiplicar por un factor las funciones, se obtiene:

$$f_1'(i) = a \left(1 + \frac{1}{n-i} \right), \quad f_2'(i) = a \left(1 - \frac{1}{n-i+1} \right)$$

En esta variante la modificación del factor permite generar los resultados siguientes:

- Si $a \rightarrow 0$ o $a \rightarrow \infty$, entonces se obtiene el vector de pesos máximo o mínimo según la combinación de los teoremas 4.7.1 y 4.7.2 con las funciones anteriores.
 - Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces se obtiene un vector de pesos que no tiene comportamiento lineal.
- Al sumar un factor a las funciones, se obtiene:

$$f_1''(i) = a + \left(1 + \frac{1}{n-i} \right), \quad f_2''(i) = a + \left(1 - \frac{1}{n-i+1} \right)$$

En esta variante la modificación del factor permite generar los resultados siguientes:

- Si $a \rightarrow \infty$, entonces se obtiene el vector de pesos máximos o mínimo según la combinación de los teoremas 4.7.1 y 4.7.2 con las funciones anteriores.
- Si $a > 0$, entonces se obtiene un vector de pesos que no tiene comportamiento lineal.

Hasta el momento se han ejemplificado algunas de las funciones para obtener el vector de razón de proporcionalidad y a partir de este calcular el vector de pesos con determinadas características, sin embargo, no son las únicas funciones.

4.8. Conclusiones.

En este capítulo se realiza un estudio sobre el operador OWA. El mismo utiliza un vector de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios que intervienen en el proceso de agregación de la información. Particularmente, por el papel que desempeña el vector de pesos en el proceso de agregación se profundiza en los diferentes métodos y enfoques empleados para obtener dicho vector.

Sobre la base de los diferentes métodos estudiados fue posible obtener otras variantes para calcular el vector de pesos, tal que, verifique las propiedades de los OWA, entre estas variantes se encuentran:

- La clase de funciones lineales, la cual a partir del valor de la pendiente perteneciente a un intervalo dado, permite obtener la función lineal, tal que al ser evaluada para $i = 1, 2, \dots, n$ resultan como imagen los pesos del vector. Además, en el estudio realizado se verificaron las propiedades siguientes:
 - El valor de $\alpha \rightarrow 0.5$, para valores negativos y positivos de la pendiente a , tal que si $a < 0$ el valor de $\alpha > 0.5$ y si $a > 0$ entonces el valor de $\alpha < 0.5$.
 - La dispersión del conjunto de funciones lineales F que permiten obtener w_i y constituyen OWA tiende a infinito.
 - Es posible determinar la función lineal perteneciente a la clase de funciones lineales que constituyen OWA a partir del valor de α .

Bajo los principios de esta concepción, se define un algoritmo para calcular el vector de pesos a partir del valor de la pendiente y la dimensión del vector de pesos. También se formula un algoritmo para el caso en que se parte del valor α , condicionante que coincide con los resultados obtenidos por Byeong Seok Ahn [3].

- La utilización de un orden lineal y cuantificadores de preferencia, el mismo tiene como base de partida la ley de Borda-Kendal, y la relación de preferencia cuantificada entre los pesos adyacentes. Luego, se realizan una serie de transformaciones, donde no solo incide el orden de los pesos, sino también, la cuantía entre los pesos; y por tanto la influencia de esta cuantía en el resultado final. En esta formulación se verificaron las propiedades siguientes:
 - La ley de Borda-Kendal representa una función lineal, por tanto la relación entre los pesos es constante.
 - Si todos los valores del vector de cuantía son cero, entonces se obtiene el vector de pesos promedio.

- Si todos los valores del vector cuantía son uno, entonces se obtiene el vector inicial, actuando como la operación idéntica.
 - Mediante el mismo procedimiento de actuación se verifica que, si la relación de preferencia es tal, que la cuantía en el vector es la misma $v_i = c \forall i = 1, \dots, n - 1$, entonces se obtiene un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal y su función lineal correspondiente se encuentra comprendida entre la función inicial y la función $y = \frac{1}{n}$.
- La utilización de cuantificadores de preferencia y la constante inicial de diferencia máxima entre pesos adyacentes. Este método a partir de una relación de preferencia cuantificada, y una constante inicial de diferencia máxima entre los pesos adyacentes pertenecientes a un intervalo dado, permite obtener un nuevo vector de pesos que puede tener un comportamiento lineal o no lineal, en dependencia del cumplimiento o no de determinadas condiciones, lo que permite expresar:
- A través de este método se puede obtener el vector de pesos máximo, mínimo y promedio.
 - A partir de un vector de cuantía constante se obtiene un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal y al variar la constante inicial de diferencia máxima en el intervalo correspondiente, se generan los mismos vectores de pesos que los obtenidos con la clase de funciones lineales.
 - Se pueden obtener el vector de pesos simétrico a partir de dos variantes, una con eje de simetría la recta $y = \frac{1}{n}$ y otra con eje de simetría la recta paralela al eje y que pasa por el punto $P_0 \left(\frac{1+n}{2}, 0 \right)$.
 - El vector de pesos obtenido por $W = \psi(V^*, k, p_m)$ y su correspondiente vector de peso simétrico W' , verifican que el $orness(W) = 1 - orness(W')$.
- Los OWAs basados en una escala de razón. Este método se basa en la razón de proporcionalidad existente entre los pesos adyacentes, utilizándolos como elementos de entrada para obtener el vector de pesos. Con relación a este método se pueden expresar los aspectos siguientes:
- Si todos los valores v_i del vector de razón de proporcionalidad son iguales a 1, entonces se obtiene el vector de pesos promedio $W = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$.
 - Si el último elemento del vector de proporcionalidad es $v_{n-1} = 0$, aplicando el teorema 4.7.1 entonces se obtiene el vector de pesos mínimo $W = (0, 0, \dots, 1)$.
 - Si el primer elemento del vector de proporcionalidad es $v_1 = 0$, aplicando el teorema 4.7.2 entonces se obtiene el vector de pesos máximo $W = (1, 0, \dots, 0)$.

-
- Si se considera un vector de proporcionalidad constante, la aplicación del teorema 4.7.1 permite obtener un vector de pesos que es equivalente al obtenido por el teorema 4.7.2 pero en orden inverso.

Capítulo 5

La Selección de Personal en Empresas e Instituciones

5.1. Introducción.

A través del desarrollo histórico de la sociedad se ha comprobado el papel que desempeñan los recursos humanos para el buen funcionamiento de las Empresas e Instituciones. De ahí la necesaria presencia de Unidades o Áreas, que tengan como misión el control y supervisión de este preciado recurso.

Estas Unidades o Áreas de Recursos Humanos en una entidad pueden realizar un conjunto de funciones, entre las que se pueden citar:

- Planificación de los Recursos Humanos.
- Administración del sistema de pago y salarios.
- Análisis, diseño y organización del trabajo.
- Control y proyección de capacitación y desarrollo.
- Reclutamiento y selección del personal.
- Evaluación del desempeño.
- Seguridad y salud ocupacional.

Es necesario especificar que las funciones a desarrollar pueden variar en dependencia del tipo de organización al que se suscribe o la estructura orgánica que poseen [116], [16], [23].

Sin embargo, una de las funciones que desempeña un papel esencial es la actividad de Reclutamiento y Selección del Personal, pues a través de ésta se debe garantizar el personal más idóneo para desarrollar las diferentes actividades.

Según autores consultados, el proceso de Selección de Personal se define como:

- *"... la elección del individuo adecuado para el cargo adecuado, o escoger entre los candidatos reclutados a los más adecuados, para ocupar un determinado puesto"* , Manuel Fernández Ríos, en su Diccionario de Recursos Humanos, Organización y Dirección [36].
- *"... el procedimiento para escoger de un grupo de solicitantes a aquellos individuos mejor capacitados para una posición particular"*, [116].
- *"La escogencia del individuo adecuado para el cargo adecuado"* , [25].
- *"... la selección de personal es el proceso de elección, adecuación e integración del candidato más calificado para cubrir una posición dentro de la organización"*, [92].
- *"Proceso mediante el que se buscan, eligen e incorporan nuevos trabajadores a una organización"*, [107].
- *"... proceso mediante el cual se elige a una o varias personas que mejor se ajusten a las características del trabajo"* , [111].

Al analizar estas definiciones, así como las planteadas por otros autores, se identifica como rasgo esencial, que la Selección de Personal es un proceso para elegir a las personas mejores preparadas y capacitadas para ocupar un puesto.

La Selección de Personal es un proceso que no se desarrolla en abstracto, su punto de partida es la identificación de las características específicas o particulares para desempeñarse en un cargo u ocupación, o también ejecutar una tarea o actividad. Esto permite definir los aspectos o criterios básicos a tener en cuenta durante la evaluación de un grupo de posibles candidatos.

Los criterios o aspectos a utilizar pueden ser parte del resultado de instrumentos o técnicas en particular, implicando finalmente la valoración de los mismos y de esta forma obtener una posible propuesta de candidatos [83].

Según Wether W. [117], el proceso de Selección del Personal en la empresa, tiene como base los siguientes elementos:

1. La información de los puestos, para de esta forma identificar las características de las tareas y el nivel de desempeño requerido.

2. Proyección de la empresa a corto, mediano y largo plazo.
3. Grupo de candidatos para escoger entre ellos.

Además, se puede plantear que el proceso de Selección de Personal no tiene un número determinado de pasos o etapas, los mismos dependen de un grupo de factores [5], tales como:

- Características específicas de la organización.
- El nivel jerárquico.
- El tipo de puesto.
- Costo que representa cada etapa.

Entre otros aspectos.

Sin embargo, a partir del análisis bibliográfico realizado sobre la temática objeto de estudio, se puede resumir, que el proceso de Selección de Personal se organiza en dos fases esenciales: Planificación Previa y Ejecución de la selección, cuya estructura se describe a continuación (Fig. 5.1).

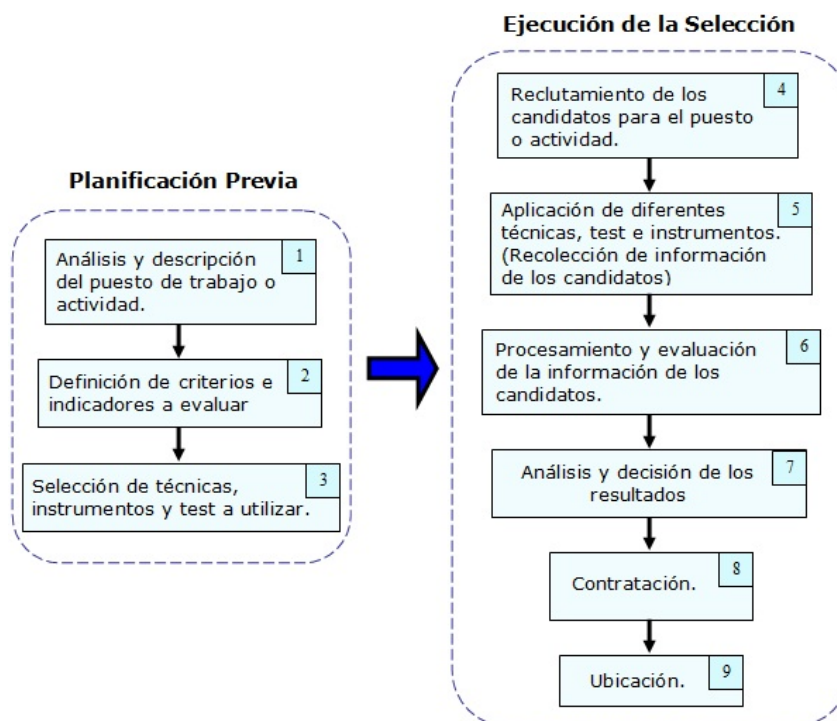


Figura 5.1: Fases del proceso de Selección de Personal.

Descripción de la fase "*Planificación Previa*".

En esta fase, es donde los directivos encargados de garantizar el personal idóneo para cada actividad, apoyados por los expertos en dicha materia [63], [43], [47], establecen los elementos básicos que guiarán la ejecución de la selección y para ello se estructuran en tres etapas esenciales:

1. Análisis y descripción del puesto de trabajo o actividad: En la misma se deben identificar cuáles son las responsabilidades y tareas a realizar en el puesto de trabajo o actividad, para de esta forma establecer el acotamiento de las variables a controlar, entre las que se pueden citar: la edad, el sexo, la formación, experiencia, rasgos de la personalidad, competencias, etc [5].
2. Definición de criterios e indicadores a evaluar: Tomando como base la etapa anterior, se determinan los criterios e indicadores a utilizar en la evaluación de los candidatos.
3. Selección de técnicas, instrumentos y tests a utilizar: A través de esta etapa se especifican las técnicas, instrumentos y tests que son más apropiados para recopilar la información de los criterios establecidos.

Descripción de la fase "*Ejecución de la Selección*".

La fase de Ejecución de la Selección, es la acción de ejecutar lo planificado, esta fase puede ser ejecutada todas las veces que sea necesaria para un puesto en particular, siempre que no se requiera modificar las condiciones de la selección (fase de Planificación Previa). Esta fase está formada por las etapas siguientes:

4. Reclutamiento de los candidatos para el puesto o actividad: Es el grupo de procedimientos que se emplea para atraer a candidatos potenciales a ocupar cargos o realizar una actividad en una organización dada.
5. Aplicación de diferentes técnicas, test e instrumentos (Recolección de información de los candidatos): Mediante esta actividad se puede identificar y medir el estado de los diferentes criterios definidos para cada uno de los candidatos.
6. Procesamiento y evaluación de la información de los candidatos: A partir de la información recolectada se aplican determinados métodos y procedimientos para obtener resultados más conclusivos o resumidos de los candidatos, lo que permite facilitar un listado de los posibles preseleccionados.
7. Análisis y decisión de los resultados: Los directivos responsables de la selección valoran el conjunto de personas que mejor cumplen los requerimientos establecidos y determinan quién o quiénes ocuparán el puesto de trabajo o desarrollarán la actividad.

8. Contratación: Es el proceso legal donde se establecen las definiciones de normas y características de la actividad a desarrollar [83].
9. Ubicación: Es la presentación oficial del candidato en el puesto de trabajo o actividad.

Por otra parte, al realizar el proceso de Selección de Personal, se han utilizado diferentes técnicas, tales como: entrevistas, tests de personalidad, tests cognitivos, tests de conocimiento sobre el puesto de trabajo, etc. [33]; y a partir de estos se evalúan diferentes criterios en los candidatos. Sin embargo, en los últimos años diferentes investigadores se han centrado como criterios a utilizar en dicho proceso las competencias de los individuos, donde las definen de las formas siguientes:

- Lyle M. Spencer y Signe M. Spencer definen la competencia [108] como, *"competencia es una característica subyacente en un individuo que está causalmente relacionada con un estándar de efectividad"*.
- Gerhard P. Bunk, referente a competencias profesionales plantea [15]: *"... posee competencia profesional quien dispone de los conocimientos, destrezas y actitudes necesarias para ejercer una profesión, puede resolver problemas profesionales de forma autónoma y flexible y está capacitado para colaborar en su entorno profesional y en la organización del trabajo"*.
- Jaime Gil Aluja considera que son equivalentes los términos puestos de trabajo o empleo, de ahí su definición de competencia [42], la cual expresa, *"Este empleo exige un cierto número de cualidades o competencias, constituida por conocimientos, aptitudes psicológicas, aptitudes de comunicación, un aspecto relativo al empleo, etc"*.
- Canós et al., plantean [22] que las competencias son, *"un conjunto de patrones, compuestos de características subyacentes a la persona, que permiten al individuo alcanzar un rendimiento efectivo en una actividad"*.
- Sobre la base de la definición planteada por Lyle M. Spencer y Signe M. Spencer [108], Martha Alicia Alles expresa [7] *"las competencias son características fundamentales del hombre e indican formas de comportamiento o de pensar, que generalizan diferentes situaciones y son duraderas en el tiempo"*.

Al valorar estas definiciones de competencia, se puede plantear, que las mismas hacen referencia a elementos específicos que caracterizan a las personas para su desempeño en un puesto de trabajo o desarrollo de una actividad. Luego, en el estudio que se realiza como vía de generalización, se pueden considerar a las competencias como los criterios a utilizar en el

proceso de Selección de Personal, y los mismos se utilizarán para evaluar a cada candidato; por tanto, dicho proceso conduce esencialmente a la situación siguiente:

Seleccionar a las personas que mejor puedan desempeñar un puesto de trabajo o desarrollar una actividad en particular, donde se tienen como elementos de partida un grupo de candidatos, y un conjunto de criterios, que caracterizan el futuro desempeño de los candidatos, y la posible participación de expertos para evaluar a los candidatos, y los criterios si son necesarios.

Al analizar esta situación, se puede observar, que los criterios y su evaluación en los candidatos, desempeñan un papel esencial para la obtención de los resultados. Luego, se hace necesario seleccionar métodos y procedimientos que faciliten con la mayor objetividad posible la solución del problema; por lo que, se está en presencia de un problema que requiere de métodos capaces de integrar una gran diversidad de información expresada en magnitudes y significados diferentes.

5.2. Métodos para la Selección de Personal.

Sobre la base de lo expresado anteriormente, se puede plantear que son diversos los investigadores que han desarrollado diferentes métodos y procedimientos para procesar la información de este tipo de problemas, los que se describen a continuación.

- Liang y Wang proponen [73], proponen el uso de un algoritmo de análisis multicriterio difuso, y se organiza en los pasos siguientes:
 1. Conformar un comité de decidores e identificar los criterios requeridos para la selección de los candidatos.
 2. Dividir los criterios de selección en categorías objetivas y subjetivas.
 3. Asignar pesos de importancia a los criterios subjetivos.

En este caso los autores asumen el conjunto de pesos W , tal que $W = \{VL, L, M, H, VH\}$, donde $VL = Muy_Bajo$, $L = Bajo$, $M = Medio$, $H = Alto$ y $VH = Muy_Alto$, asociando a cada termino de los pesos un número difuso triangular, con su respectiva función de pertenencia, como se describe en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Etiquetas lingüísticas con sus respectivos números difusos y funciones.

Etiquetas lingüísticas	Número difuso triangular	Función de pertenencia
VL	$(0,0,0.3)$	$f_W(x) = 1 - \frac{10}{3}x, 0 \leq x \leq 0.3$
L	$(0,0.3,0.5)$	$f_W(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.3 \\ \frac{10}{3}x & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$
M	$(0.2,0.5,0.8)$	$f_W(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}x - \frac{2}{3} & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{8}{3} - \frac{10}{3}x & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.8 \end{cases}$
H	$(0.5,0.7,1)$	$f_W(x) = \begin{cases} 5x - \frac{5}{2} & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.7 \\ \frac{10}{3} - \frac{10}{3}x & \text{si } 0.7 \leq x \leq 1 \end{cases}$
VH	$(0.7,1,1)$	$f_W(x) = \frac{10}{3}x - \frac{7}{3}, 0.7 \leq x \leq 1$

4. Asignar el consenso evaluativo a los candidatos en los diferentes criterios.

Para efectuar la evaluación de los diferentes candidatos en cada uno de los criterios se utilizan etiquetas lingüísticas perteneciente al conjunto $S = \{VP, P, F, G, VG\}$, donde $VP = Muy_Pobre$, $P = Pobre$, $F = Justo$, $G = Bueno$, $VG = Muy_Bueno$, y se asocia a cada termino un número difuso triangular, con su respectiva función de pertenencia, como se muestra en la tabla 5.2.

5. Calcular los pesos de los criterios subjetivos para obtener la agregación de los pesos W_{s_t} .

Los pesos W_{s_t} representan la media de la importancia del peso asociada al criterio subjetivo C_t , y se determina por:

$$W_{s_t} = \frac{1}{n} \otimes (N_{t1}^d \oplus N_{t2}^d \oplus \dots \oplus N_{tn}^d) \quad (5.1)$$

tal que, $t = 1, 2, \dots, k$ y donde k es la cantidad de criterios subjetivos, n es el número de decisores, $N_{tj}^d = (a_{tj}, b_{tj}, c_{tj})$, representa el número difuso triangular del peso lingüístico asignado al criterio subjetivo C_t , por el decidor D_j ; y los operadores \otimes y \oplus indican la multiplicación y adición difusa.

Finalmente, esto es equivalente a plantear que $W_{s_t} = (a_t, b_t, c_t)$, donde:

$$a_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{tj}, \quad b_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_{tj}, \quad c_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_{tj}$$

Tabla 5.2: Etiquetas lingüísticas con sus respectivos números difusos y funciones.

Etiquetas lingüísticas	Número difuso triangular	Función de pertenencia
<i>VP</i>	(0,0,0.2)	$f_S(x) = 1 - 5x, 0 \leq x \leq 0.2$
<i>P</i>	(0,0.2,0.4)	$f_S(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.2 \\ 2 - 5x & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ 5x - \frac{3}{2} & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$
<i>F</i>	(0.3,0.5,0.7)	
<i>G</i>	(0.6,0.8,1)	$f_S(x) = \begin{cases} \frac{7}{2} - 5x & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.7 \\ 5x - 3 & \text{si } 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ 3 - 5x & \text{si } 0.8 \leq x \leq 1 \end{cases}$
<i>VG</i>	(0.8,1,1)	

- Calcular las valoraciones de preferencia de los decisores, y a partir de la agregación de esta información se obtiene la valoración difusa M_{it} , la cual corresponde al candidato A_i para los criterios subjetivo $C_t, t = 1, 2, \dots, k$.

Para determinar M_{it} se utiliza la expresión:

$$M_{it} = \frac{1}{n} \otimes (X_{it1} \oplus X_{it2} \oplus \dots \oplus X_{itn}) \tag{5.2}$$

tal que, $t = 1, 2, \dots, k, k$ es la cantidad de criterios subjetivos, $i = 1, 2, \dots, m, m$ es el número de candidatos y n el número de decisores,

$X_{itj} = (o_{itj}, p_{itj}, q_{itj}), j = 1, 2, \dots, n$, representa el número difuso triangular de la valoración lingüística del candidato A_i , emitida por el decidor D_j .

Finalmente, equivalente plantear que $M_{it} = (o_{it}, p_{it}, q_{it})$, donde:

$$o_{it} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n o_{itj}, \quad p_{it} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{itj}, \quad q_{it} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{itj}$$

- Calcular los resultados registrados de cada uno de los candidatos en los diferentes criterios objetivos.
- Agregar M_{it} y W_{st} con respecto a todos los criterios subjetivos, obteniendo el índice de conformidad difusa G_i .

$$G_i = \frac{1}{k} \otimes [(M_{i1} \otimes W_{s1}) \oplus (M_{i2} \otimes W_{s2}) \oplus \dots \oplus (M_{ik} \otimes W_{sk})] \tag{5.3}$$

es un número difuso con función de pertenencia:

$$f_{G_i}(x) = \begin{cases} -H_{i1} + \sqrt{H_{i1}^2 + \frac{x-Y_i}{T_{i1}}} & \text{si } Y_i \leq x \leq Q_i \\ H_{i2} + \sqrt{H_{i2}^2 + \frac{x-Z_i}{U_{i1}}} & \text{si } Q_i \leq x \leq Z_i \\ 0 & \text{si } \textit{Otros Casos} \end{cases} \quad (5.4)$$

El número difuso G_i , se puede representar por:

$$G_i = (Y_i, Q_i, Z_i; H_{i1}, T_{i1}; H_{i2}, U_{i2}) \quad (5.5)$$

donde: $i = 1, 2, \dots, m$, m es el número de candidatos.

$$T_{i1} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k (o_{it} - q_{it}) (a_t - c_t), \quad T_{i2} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k [q_{it} (a_t - c_t) + c_t (o_{it} - q_{it})]$$

$$U_{i1} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k (p_{it} - o_{it}) (b_t - a_t), \quad U_{i2} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k [b_t (o_{it} - p_{it}) + p_{it} (a_t - b_t)]$$

$$H_{i1} = \frac{T_{i2}}{2T_{i1}}, \quad H_{i2} = \frac{-U_{i2}}{2U_{i1}}, \quad Y_i = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k q_{it}c_t, \quad Q_i = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k o_{it}a_t, \quad Z_i = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k p_{it}b_t$$

9. Calcular los valores de clasificación subjetiva ST_i de todos los candidatos.

$$ST_i = \frac{U_T(G_i)}{\sum_{i=1}^m U_T(G_i)} \quad (5.6)$$

donde:

$$U_T(G_i) = \frac{1}{2} \left[\frac{Z_i - x_1}{x_2 - x_1 - Q_i + Z_i} + 1 - \frac{x_2 - Y_i}{x_2 - x_1 - Q_i + Y_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1 = \inf(D), \quad x_2 = \sup(D), \quad D = \bigcup_{i=1}^m D_i, \quad D_i = \{x : f_{G_i}(x) > 0\}$$

10. Calcular los valores de clasificación OT_i a partir de los resultados registrados de

los candidatos en todos los criterios objetivos, a través de:

$$OT_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left(\frac{T_{ij}}{\sum_{i=1}^m T_{ij}} \right) \quad (5.7)$$

tal que, $i = 1, 2, \dots, m$, m el número de candidatos y $j = 1, 2, \dots, p$, p la cantidad de criterios objetivos.

T_{ij} denota la evaluación del i -ésimo candidato en el j -ésimo criterio objetivo, y los mismos son valores reales.

11. Calcular los valores de clasificación final FT_i , a través de la expresión:

$FT_i = \alpha ST_i + (1 - \alpha)OT_i$, donde α es un factor de peso que cumple que $0 \leq \alpha \leq 1$.

12. Seleccionar el candidato con el máximo valor de clasificación FT_i .

Este método utiliza la lógica difusa para dar tratamiento al nivel de imprecisión de la información en este tipo de problemática. Se caracteriza por dividir los criterios en subjetivos y objetivos, para de esta forma diferenciar su procesamiento; la participación de un conjunto de expertos para evaluar el peso de los criterios subjetivos y a los candidatos. Además, para realizar la agregación final, se le asigna un peso al conjunto de criterios objetivos y su complemento respecto al intervalo unitario se le asigna al conjunto de criterios subjetivos, lo cual hace que se prioricen los criterios por su clasificación (subjetivos y objetivos), sin embargo puede manifestarse que un criterio subjetivo en particular sea más significativo que uno objetivo o viceversa.

- Jaime Gil Aluja en su libro "La gestión interactiva de los Recursos Humanos en la incertidumbre" [42], plantea que el proceso de selección de personal se puede realizar por diferentes vías, entre las que refiere:
 - La selección del candidato con relación al perfil ideal. Considera que se tienen definidas las competencias o cualidades que se tendrán en cuenta en el proceso de selección, y se organiza de forma siguiente:
 1. Definir las evaluaciones ideales de las competencias y la evaluación de los candidatos en cada una de las competencias. Estas evaluaciones se realizan en el intervalo unitario.
 2. Calcular la distancia de cada candidato al ideal definido. Para ello se utiliza la distancia de Hamming normalizada.

$$\delta_i(T, p_i) = \frac{i}{n} \sum_{j=1}^n |\mu(c_j) - \mu(p_{ij})| \quad (5.8)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, h$, siendo h el número de candidatos, n la cantidad de competencias

T es conjunto de evaluaciones de las competencias que representa el perfil ideal y p_{ij} es la evaluación del i -ésimo candidato en la j -ésima competencia.

3. Ordenar de forma ascendente a los candidatos a partir de la distancia calculada. Se selecciona al candidato de menor distancia al perfil ideal.

Nota: Esta concepción también puede ser aplicada cuando las evaluaciones del perfil ideal y las evaluaciones de los candidatos está dada por un conjunto difuso.

- La selección del candidato mediante el coeficiente de adecuación.

También se considera que se deben tener definidas las competencias o cualidades a utilizar en el proceso de selección. Además, utiliza la evaluación ideal de las competencias pero no realiza el cálculo para seleccionar al candidato con la distancia al perfil ideal, sino con el coeficiente de adecuación con respecto al perfil ideal. El mismo se organiza a través de:

1. Definir las evaluaciones ideales de las competencias y la evaluación de los candidatos en cada una de las competencias. Esta evaluaciones se realizan en el intervalo unitario.
2. Calcular el coeficiente de adecuación de cada candidato. Para ello se utiliza la expresión siguiente:

$$K_i(p_{ij}, T) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_x(p_{ij}, t_j) \quad (5.9)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, h$, h el número de candidatos y n cantidad de competencias. T es el conjunto de evaluaciones de las competencias que representa el perfil ideal, y p_{ij} es la evaluación del i -ésimo candidato en la j -ésima competencia. $K_x(p_{ij}, t_j)$ representa la adecuación del i -ésimo candidato en la j -ésima competencia a partir del ideal definido t_j . Para realizar el cálculo se emplea la expresión:

$$K_x(p_{ij}, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_P(p_{ij}) \geq \mu_T(t_j) \\ 1 - \mu_T(t_j) + \mu_P(p_{ij}) & \text{si } \mu_P(p_{ij}) < \mu_T(t_j) \end{cases} \quad (5.10)$$

3. Ordenar de forma descendente los candidatos a partir del coeficiente de adecuación calculado. Se selecciona al candidato de mayor coeficiente de adecuación.
- La selección del candidato donde participan varios expertos.

Bajo estas condiciones, también se considera la comparación con el perfil ideal del puesto de trabajo; por tanto, un grupo de expertos deben determinar el ideal

de cada cualidad o competencia. Además, los expertos deben evaluar a todos los candidatos para cada competencia del puesto de trabajo. Es necesario aclarar que los expertos que evalúan las competencias para determinar el perfil ideal, no necesariamente deben ser los mismos que los evaluadores de las competencias de los candidatos. Las evaluaciones emitidas por los expertos se expresan en un intervalo perteneciente al intervalo unitario ($[a, b] \subseteq [0, 1]$). Finalmente, el proceso de selección se organiza de la forma siguiente.

1. Determinar el perfil ideal del puesto de trabajo.

Cada experto expresa, cual debe ser el ideal de cada competencia a través de un intervalo perteneciente al unitario; por tanto, se forma la matriz M , donde el elemento m_{kj} representa la evaluación emitida por el experto k para la competencia j y tiene la forma $m_{kj} = [a_{kj}, b_{kj}]$. Luego el perfil ideal de las competencias T , está dado por:

$$T_j = [a_j^*, b_j^*] \quad (5.11)$$

donde, $a_j^* = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g a_{kj}$, $b_j^* = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g b_{kj}$, siendo g el número de expertos y $j = 1, 2, \dots, n$, donde n es la cantidad de competencias.

2. Evaluación de los candidatos en cada una de las competencias por los expertos.

Cada experto evalúa a los candidatos para cada una de las competencias; luego se forma la matriz P^k , donde el elemento p_{ij}^k representa la evaluación emitida por el experto k para la competencia j del i -ésimo candidato y tiene la forma $p_{ij}^k = [d_{ij}^k, e_{ij}^k]$. Luego la evaluación del i -ésimo candidato en la j -ésimo competencia está dada por:

$$P_{ij}^* = [d_{ij}^*, e_{ij}^*] \quad (5.12)$$

donde, $d_{ij}^* = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g d_{ij}^k$, $e_{ij}^* = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g e_{ij}^k$, g es el número de expertos, $j = 1, 2, \dots, n$, n es la cantidad de competencias, $i = 1, 2, \dots, h$ y h es el número de candidatos.

3. Calcular la distancia de Hamming normalizada entre la evaluación de cada candidato (P_{ij}^*) y el perfil ideal de las competencias T_j , expresado por:

$$\delta_i(P_{ij}^*, T_j) = \frac{1}{2 * n} \sum_{j=1}^n |d_{ij}^* - a_j^*| + |e_{ij}^* - b_j^*| \quad (5.13)$$

4. Ordenar ascendentemente a los candidatos a partir de la distancia calculada δ_i . Se selecciona al candidato de menor distancia al perfil ideal.

- La selección a partir de la lógica difusa.

La concepción de este método, también es evaluar a cada uno de los candidatos y calcular un índice con respecto al ideal, para de esta forma seleccionar al candidato más adecuado. La evaluación de los candidatos, así como el ideal de las competencias, están expresados en un intervalo perteneciente al unitario.

El elemento que diferencia a este método con respecto a los anteriores, es el empleo de la lógica difusa, y se propone su utilización para el caso donde existen dependencias entre algunas de las competencias. Para este caso, el conjunto de competencias que son dependientes entre si, se deben agregar con los operadores \wedge o \vee de la lógica difusa; y la utilización del operador depende de la semántica expresada en el problema de selección para dichas competencias.

Para efectuar el cálculo, después de evaluar a los candidatos, se determina el valor de las competencias que están relacionadas entre si, a través del operador \wedge o \vee , según correspondan; realizando esta operación para el ideal definido y las evaluaciones realizada a los candidatos. Luego se calcula el índice de la evaluación de cada candidato respecto al ideal, mediante la función:

$$K_x(p_{ij}, t_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq b_1 < b_2 = a_1 \leq 1 \\ & 0 \leq b_1 \leq b_2 < a_1 \leq 1 \\ \frac{b_2 - a_1}{1 - b_1} & \text{si } 0 \leq b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_2 = 1 \\ & 0 \leq b_1 = b_2 = a_1 \leq 1 \end{cases} \quad (5.14)$$

Finalmente, se calcula para cada candidato la media de los índices obtenidos para las competencias y se selecciona al candidato más adecuado.

Gil Aluja [42], expone varios métodos para la selección de personal, teniendo en cuenta diferentes concepciones, entre la que se encuentran:

- La utilización de la Lógica Difusa para manipular la imprecisión de la información.
- La participación de varios expertos para determinar el perfil ideal de los criterios y la evaluación de los candidatos, finalizando con una operatoria que manifiesta el consenso de los expertos.
- La comparación de los candidatos con el perfil ideal del puesto de trabajo, lo cual constituye un referente básico. Sin embargo por la forma que se realiza (utilizando la distancia de Hamming) tiene como limitante que al evaluar a un candidato y este sobrepasa el valor ideal puede alcanzar una puntuación inferior respectos a otros candidatos que no alcanza el perfil ideal.

- La utilización del coeficiente de adecuación, el cual se ve limitado en el caso que la evaluación ideal de un criterio es nulo, pues se evalúa con el valor máximo para dicho criterio los candidatos que no tiene calificación para el puesto y los que si la poseen.

Para cada una de las concepciones planteadas, todos los criterios utilizados para el proceso de selección asumen que tienen la misma importancia o influencia.

- López González et al. [75], propone un algoritmo genético borroso para la selección de personal. Para ello, primero se propone un modelo lingüístico-difuso que constituye la base para la aplicación de dicho algoritmo.

El modelo lingüístico-difuso se estructura en las fases siguientes:

Fase #1: Se identifican los puestos de trabajo, las competencias que tiene asociadas cada puesto de trabajo, la importancia relativa de las competencias para el puesto y la importancia de la relaciones entre los puestos.

Se utilizan las notaciones siguientes:

- Puestos de trabajo: $X' = \{X'_1, X'_2, \dots, X'_{m1}\}$
- Competencia para cada puesto de trabajo:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m11} & \cdots & C_{m1m2} \end{pmatrix}$$

- Importancia relativa de las competencias para el puesto de trabajo:

$$IC = \begin{pmatrix} IC_{11} & \cdots & IC_{1m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ IC_{m11} & \cdots & IC_{m1m2} \end{pmatrix}$$

- Importancia de la relación entre los puestos:

$$RP = \begin{pmatrix} - & RP_{12} & \cdots & RP_{1m1-1} & IC_{1m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ RP_{m11} & \cdots & \cdots & RP_{m1m1-1} & - \end{pmatrix}$$

La importancia relativa de las competencias se expresa de forma lingüística, por lo que se utilizan nueve etiquetas lingüísticas asignándole un número difuso trapezoidal en cada caso, como se muestra en la tabla 5.3 .

Tabla 5.3: Etiquetas lingüísticas y sus respectivos números difusos.

Etiquetas Lingüísticas	Números difusos
Imprescindible	(1,1,1,1)
Extremadamente Alta	(.93, .98, .99, 1)
Muy Alta	(.72, .78, .92, .97)
Bastante Alta	(.58, .63, .80, .86)
Media	(.32, .41, .58, .63)
Bastante Baja	(.17, .22, .36, .42)
Muy Baja	(.04, .1, .18, .23)
Extremadamente Baja	(0, .01, .02, .07)
Innecesaria	(0,0,0,0)

Esta concepción también es utilizada para evaluar otras variables lingüísticas como por ejemplo la importancia de la relación entre los puestos de trabajo.

En el caso, que se desconozca la importancia relativa de las competencias para los puestos de trabajos, entonces se requiere de la definición de la importancia de cada puesto, identificándose de la forma $IP = \{IP_1, IP_2, \dots, IP_{m1}\}$, donde también se emplean etiquetas lingüísticas como el caso anterior.

Fase #2: Se identifican los candidatos $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, así como el nivel que los mismos manifiestan en las diferentes competencias de los respectivos puestos y el grado de las relaciones interpersonales que une a los individuos.

Las notaciones utilizadas para cada caso son:

- Nivel operativo que los candidatos manifiestan en las diferentes competencias de los puestos:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & \cdots & N_{1m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1} & \cdots & N_{nm2} \end{pmatrix}$$

- Grado de las relaciones interpersonales que une a los individuos:

$$RC = \begin{pmatrix} - & RC_{12} & \cdots & RC_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ RC_{n1} & \cdots & RC_{nn-1} & - \end{pmatrix}$$

Estas dos informaciones, también son evaluadas con nueve etiquetas lingüísticas respectivamente, las que se describen a continuación (ver tabla 5.4).

Tabla 5.4: Etiquetas lingüísticas y sus respectivos números difusos.

Niveles	Grado de Relación
Óptimo	Excelente
Muy Alto	Muy Buena
Bastante Alto	Bastante Buena
Alto	Buena
Media	Indiferente
Bajo	Mala
Bastante Bajo	Bastante Mala
Muy Bajo	Muy Mala
Ínfimo	Pésima

Fase #3: Realizar la valoración de las posibles soluciones del problema de selección.

En esta fase, se utiliza un modelo que opera con los números difusos que identifican a cada una de las etiquetas lingüísticas definidas anteriormente. Luego, a partir de la información identificada en las fases anteriores, se realizan las operaciones siguientes:

- Se multiplican los números difusos correspondientes a la importancia de cada competencia, por el nivel de los candidatos en las mismas, luego se suman los resultados de las multiplicaciones correspondientes. Esta operación, permite obtener un número difuso que representa la valoración de la competencia de los candidatos para cada puesto.
- Se multiplican los números difusos referentes a la competencia de los candidatos, por la importancia de cada puesto de trabajo, luego se suman los resultados de las multiplicaciones correspondientes. De esta forma, se obtiene la adecuación a los puestos de trabajo, expresado a través de un número difuso.
- Se multiplican los números difusos referentes a la importancia de la relación de cada puesto de trabajo con los restantes, por el nivel de relación del candidato ubicado en dicho puesto con el resto de los candidatos asignados a puestos relacionados. Luego, se realiza la suma de las relaciones de los candidatos. Por lo que se obtiene, un número difuso que representa la relación de cada candidato con el resto.
- Se suman el nivel de competencia, con el grado de relación de la solución. Luego, se obtiene un valor único referente a la bondad de la selección realizada.

En esta fase, se puede tener en cuenta las preferencias de la entidad, respecto a buscar los candidatos que más se correspondan con los puestos o los candidatos que forman un mejor equipo de trabajo.

Sobre la base del modelo lingüístico-difuso planteado anteriormente, los autores proponen el siguiente algoritmo genético difuso [75] para realizar el proceso de selección de personal ver 5.2.

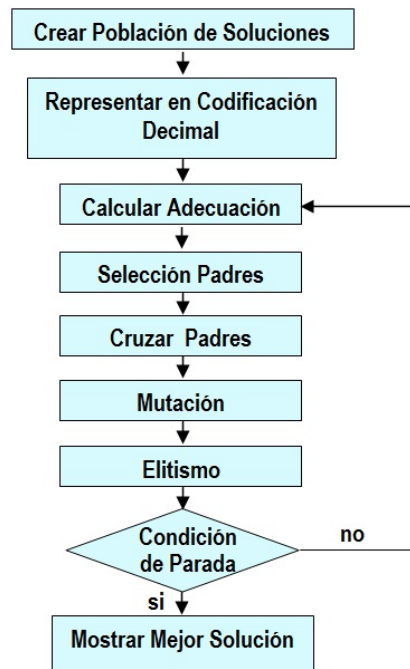


Figura 5.2: Estructura del algoritmo genético.

El método planteado por López González et al. [75], está dirigido esencialmente, para el caso en que se desean ocupar varios puestos de trabajos y se cuenta con un grupo de candidatos (pueden ser mayor la cantidad de candidatos que la de puestos) que han mantenido un nivel de relaciones interpersonales de forma estables.

- Gin-Shuh Liang [72], a través del empleo de la teoría de conjuntos difusos y sobre la base del concepto de punto ideal y anti-ideal, desarrolla un método de análisis multicriterio difuso para realizar el proceso de selección. El mismo se estructura de en los pasos siguiente:
 1. Conformar un equipo de decisores, se seleccionan los criterios a evaluar y se identifican los posibles candidatos. Los expertos (D_1, D_2, \dots, D_n) son los responsables de realizar de forma adecuada la evaluación de los candidatos (A_1, A_2, \dots, A_m) , sobre la base de los criterios (C_1, C_2, \dots, C_k) .
 2. Dividir los criterios a evaluar en categorías objetivas y subjetivas. En este caso los criterios subjetivos están dados por C_1, C_2, \dots, C_h y los criterios objetivos por $C_{h+1}, C_{h+2}, \dots, C_k$.

3. El grupo de decisores identifican la escala de valoración de preferencias para expresar la importancia relativa (pesos) de los criterios y valoran a cada candidato en los diferentes criterios.

En este paso, se conforma la matriz de pesos $W_{tj} = (c_{tj}, a_{tj}, b_{tj}, d_{tj})$, tal que, $0 \leq c_{tj} \leq a_{tj} \leq b_{tj} \leq d_{tj} \leq 1$, $t = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$, donde cada elemento W_{tj} expresa el número difuso trapezoidal de la valoración del criterio C_t emitido por el decisor D_j .

Además, se construye la matriz $X_{itj} = (q_{itj}, o_{itj}, p_{itj}, r_{itj})$, tal que, $0 \leq q_{itj} \leq o_{itj} \leq p_{itj} \leq r_{itj} \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, $t = 1, 2, \dots, h$, $j = 1, 2, \dots, n$, donde cada elemento X_{itj} expresa el número difuso trapezoidal asociado al candidato A_i en la valoración del criterio subjetivo C_t y emitido por el decisor D_j .

4. Se calculan los pesos dados a los criterios por cada decisor, y se realiza la agregación de los mismos para obtener de esta forma el peso W_t asociado al criterio C_t . Luego $W_t = (c_t, a_t, b_t, d_t)$ donde:

$$c_t = \sum_{j=1}^n \frac{c_{tj}}{n}, \quad a_t = \sum_{j=1}^n \frac{a_{tj}}{n}, \quad b_t = \sum_{j=1}^n \frac{b_{tj}}{n}, \quad d_t = \sum_{j=1}^n \frac{d_{tj}}{n}$$

5. Se procesan las valoraciones asignadas a cada candidato por los decisores, y se realiza la agregación de la información para obtener la clasificación difusa X_{it} del candidato A_i bajo el criterio subjetivo C_t . Luego $X_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it})$, $t = 1, 2, \dots, h$ donde:

$$q_{it} = \sum_{j=1}^n \frac{q_{itj}}{n}, \quad o_{it} = \sum_{j=1}^n \frac{o_{itj}}{n}, \quad p_{it} = \sum_{j=1}^n \frac{p_{itj}}{n}, \quad r_{it} = \sum_{j=1}^n \frac{r_{itj}}{n}$$

6. Calcular el costo-beneficio asociado a los diferentes candidatos, y se realiza la agregación de la información para obtener la clasificación difusa (o no difusa) RT_{it} del candidato A_i bajo el criterio objetivo C_t .

Esta operación se realiza sobre la base de que el candidato con el mínimo costo (máximo beneficio) debe tener la máxima evaluación. Iniciando con el costo-beneficio total difuso (o no difuso) asignado al candidato A_i para el criterio objetivo C_t , y denotado por $T_{it} = (e_{it}, f_{it}, g_{it}, s_{it})$ se obtiene:

$$RT_{it} = \left(\frac{e_{it}}{\sum_{i=1}^m s_{it}}, \frac{f_{it}}{\sum_{i=1}^m g_{it}}, \frac{g_{it}}{\sum_{i=1}^m f_{it}}, s_{it} \frac{s_{it}}{\sum_{i=1}^m e_{it}} \right)$$

donde, $i = 1, 2, \dots, m$, $t = h + 1, h + 2, \dots, k$

A partir de los pasos 5 y 6 se puede generalizar obtener lo siguiente:

$$M_{it} = \begin{cases} X_{it} & i = 1, 2, \dots, m; \quad t = 1, 2, \dots, h \\ RT_{it} & i = 1, 2, \dots, m; \quad t = h + 1, h + 2, \dots, k \end{cases}$$

luego, $M_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it})$, $t = 1, 2, \dots, k$

7. Construir la matriz de decisión ponderada correspondiente D , donde los elementos D_{it} hacen referencia al i -ésimo candidato en el criterio t , y tienen la forma:

$$D_{it} = (Y_{it}, Q_{it}, R_{it}, Z_{it}, H_{it}, P_{it}, L_{it}, V_{it})$$

tal que:

$$Y_{it} = q_{it}c_{it}, \quad Q_{it} = o_{it}a_{it}, \quad R_{it} = p_{it}b_{it}, \quad Z_{it} = r_{it}d_{it}, \quad H_{it} = \frac{T_{it}}{2P_{it}},$$

$$L_{it} = \frac{-U_{it}}{2V_{it}}, \quad U_{it} = d_t(p_{it} - r_{it}) + r_{it}(b_t - d_t), \quad V_{it} = (r_{it} - p_{it})(d_t - b_t),$$

$$P_{it} = (o_{it} - q_{it})(a_t - c_t), \quad T_{it} = q_{it}(a_t - c_t) + c_t(o_{it} - q_{it})$$

8. Calcular la solución ideal positiva I^+ y la solución ideal negativa I^- . Luego $I^+ = (I_1^+, I_2^+, \dots, I_k^+)$ y $I^- = (I_1^-, I_2^-, \dots, I_k^-)$, donde $I^+ = \max_i \{D_{it}\}$ y $I^- = \min_i \{D_{it}\}$, $t = 1, 2, \dots, k$, a partir de las definiciones siguientes:

Definición 5.2.1. Se plantea que $D_{it} > D_{jt}$ si y solo si $U_T(D_{it}) > U_T(D_{jt})$ o $U_T(D_{it}) = U_T(D_{jt})$ cumpliendo que $(Q_{it} + R_{it}) > (Q_{jt} + R_{jt})$.

Definición 5.2.2. Se plantea que $D_{it} = D_{jt}$ si y solo si $U_T(D_{it}) = U_T(D_{jt})$ y $(Q_{it} + R_{it}) = (Q_{jt} + R_{jt})$.

Para la aplicación de la relación de orden planteada en las definiciones anteriores se define a:

$$U_T(D_{it}) = \frac{L_{it} - \sqrt{L_{it}^2 + \frac{x_R - Z_{it}}{V_{it}}} + 1 + H_{it} - \sqrt{H_{it}^2 + \frac{x_L - Y_{it}}{P_{it}}}}{2} \quad (5.15)$$

donde,

$$x_R = \frac{2x_{1t} + 2L_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + \frac{(x_{2t} - x_{1t})^2}{V_{it}} - (x_{2t} - x_{1t})\sqrt{\left(2L_{it} + \frac{(x_{2t} - x_{1t})}{V_{it}}\right)^2 + \frac{4(x_{1t} - Z_{it})}{V_{it}}}}{2}$$

$$x_L = \frac{2x_{2t} + 2H_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + \frac{(x_{2t} - x_{1t})^2}{P_{it}} - (x_{2t} - x_{1t}) \sqrt{\left(2H_{it} + \frac{(x_{2t} - x_{1t})}{P_{it}}\right)^2 + \frac{4(x_{1t} - Y_{it})}{P_{it}}}}{2}$$

En las expresiones antes referidas, los términos L_{it} , Z_{it} , V_{it} , H_{it} , Y_{it} y P_{it} están definidos en el paso 7. Además, $x_{1t} = \min_i \{q_{it}c_t\}$, $x_{2t} = \max_i \{r_{it}d_t\}$, tal que:

- q_{it} y r_{it} , son los extremos del soporte del número difuso trapezoidal que representa la clasificación (X_{it}) asociada al candidato A_i en el criterio C_t .
- c_t y d_t , son los extremos del soporte del número difuso trapezoidal correspondiente al peso W_t asociado al criterio C_t .

9. Calcular la distancia de cada candidato respecto a la solución ideal positiva I^+ y a la solución ideal negativa I^- .

Para realizar el cálculo de la distancia de cada candidato respecto a las soluciones I^+ y I^- , y se denota por A_i^+ y A_i^- , respectivamente, se utilizan las expresiones:

$$A_i^+ = \sum_{t=1}^k F_{it}^+, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.16)$$

$$A_i^- = \sum_{t=1}^k F_{it}^-, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.17)$$

Donde, $F_{it}^+ = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^+)$, $F_{it}^- = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^-)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$; $t = 1, 2, \dots, k$ además,

$$\sigma(D_{it}, I_t^+) = \frac{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \wedge f_{I_t^+}(x))}{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \vee f_{I_t^+}(x))}, \quad \sigma(D_{it}, I_t^-) = \frac{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \wedge f_{I_t^-}(x))}{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \vee f_{I_t^-}(x))}$$

tal que, P_x es una partición del intervalo $[0, 1]$ y es dada de forma subjetiva por los decisores. Mientras más pequeña sea esta partición más exacta será la representación de $\sigma(D_{it}, I_t^+)$ y $\sigma(D_{it}, I_t^-)$.

10. Calcular el valor de aproximación relativa de los diferentes candidatos respecto a I^+ .

La aproximación relativa a los diferentes candidatos respecto a I^+ , se denota por A_i^* , con $i = 1, 2, \dots, m$, a través de:

$$A_i^* = \frac{A_i^-}{A_i^+ + A_i^-}$$

El valor de $A_i^* \in [0, 1]$, por tanto, si A_i^* está próximo a 1 entonces el candidato A_i se aproxima más a la solución ideal positiva.

11. Seleccionar el candidato con el mayor valor de aproximación relativo (A_i^*).

El método descrito se caracteriza por la utilización de los principios de la lógica difusa, la subdivisión de los criterios en subjetivos y objetivos, la asignación de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios, así como la participación de varios expertos para evaluar a los candidatos, y luego determinar la distancia de cada candidato a la solución ideal positiva y negativa las cuales se asocian al máximo y mínimo o viceversa, para finalmente efectuar su ordenamiento.

- Karsak, para la selección de personal [62], propone el uso de un método de análisis multicriterio con un acercamiento a la integración de la información numérica y lingüística. Este método se estructura en dos etapas fundamentales:

Etapas 1: Tiene como finalidad que la información registrada de los candidatos en un formato numérico o lingüístico, se transforme a una escala común.

Para realizar la misma, los autores se apoyan en el procedimiento de transformación introducido por Herrera y Martínez [52], con la finalidad de convertir un número crisp $v \in [0, 1]$, en un valor numérico $\beta \in [0, g]$; y este valor (β) representa la información del número crisp v de un término perteneciente al conjunto lingüístico $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$. El conjunto S permite representar a los atributos cualitativos. Para convertir el número crisp v en el conjunto difuso en S , se utiliza la función:

$$\begin{aligned} \tau : [0, 1] &\longrightarrow F(S) \\ \tau(v) &= \{(s_0, z_0), \dots, (s_g, z_g)\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde $s_i \in S$, $z_i \in [0, 1]$ y corresponde al número difuso triangular que representa al término lingüístico s_i . El número difuso triangular z_i se define de la forma:

$$z_i = f_{s_i}(v) = \begin{cases} \frac{v-a_i}{b_i-a_i} & \text{si } a_i \leq v \leq b_i \\ \frac{c_i-v}{c_i-b_i} & \text{si } b_i \leq v \leq c_i \\ 0 & \text{si otros casos} \end{cases} \quad (5.19)$$

Luego, a través de la función χ se puede obtener el valor de β , donde:

$$\begin{aligned} \chi : F(S_T) &\longrightarrow [0, g] \\ \chi(r(v)) &= \chi(\{(s_i, z_i), i = 0, 1, \dots, g\}) = \frac{\sum_{i=0}^g i z_i}{\sum_{i=0}^g z_i} = \beta \end{aligned} \quad (5.20)$$

En el caso de los datos numéricos, que representan los atributos cuantitativos, se

convierten a valores numéricos que se corresponden con el intervalo $[0, g]$. Luego, la evaluación de todos los datos se expresan en una escala común, sin perder información.

Etapa 2: A partir de la metodología basada en análisis multicriterio, se les aplican a los datos registrados, para de esta forma identificar al mejor candidato.

Para realizar esta etapa es necesario aplicar de forma sucesiva los modelos de programación matemática siguientes:

a) Obtener la desviación de eficiencia mínima, a través del modelo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } d_{j_0} \\ & \text{Sujeto a: } \frac{\sum \mu_r y_{rj}}{x_j} + d_j = 1, \forall j, \mu_r \geq 0, \forall r, d_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} d_{j_0} &= 1 - E_{j_0} \\ E_{j_0} &= \frac{\sum u_r y_{rj_0}}{x_{j_0}} \end{aligned}$$

d_j se define como la desviación de la eficiencia de la unidad de decisión j desde el valor de eficiencia ideal 1 ($d_j = 1 - E_j$).

x_j es el valor de la entrada simple tomado por la unidad de decisión j .

μ_r es el peso asignado a la salida r .

y_{rj} es el valor de la salida r producida por la unidad de decisión j .

b) Obtener la eficiencia a partir de minimizar la máxima desviación de la eficiencia entre todas las unidades de decisión. Para ello se utiliza el modelo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } M \\ & \text{Sujeto a: } M \geq d_j, \forall j, \frac{\sum \mu_r y_{rj}}{x_j} + d_j = 1, \forall j, \mu_r \geq 0, \forall r, d_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

Donde, M representa la máxima desviación de la eficiencia y d_j , μ_r , y_{rj} y x_j , tienen la misma connotación que el modelo anterior.

c) Cuando la formulación anterior no dispone de la determinación de la mejor unidad de decisión, para identificar más de una unidad de decisión eficiente, se utiliza el modelo siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } M - k \sum_{j \in EF} d_j \\ & \text{Sujeto a: } M \geq d_j, \forall j, \frac{\sum \mu_r y_{rj}}{x_j} + d_j = 1, \forall j, \mu_r \geq 0, \forall r, d_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

Donde, M , d_j , μ_r , y_{rj} igual al caso primero.

EF es el conjunto de las unidades del decidor, las cuales son eficiencia mínima-máxima.

$k \in [0, 1]$ es el parámetro que distingue el tamaño del paso, y el mismo es

determinado por el analista.

Este método se caracteriza por la integración de información numérica y lingüística, donde esta última es transformada a valores numéricos mediante determinados procedimientos [52], luego utiliza modelos de programación matemática para obtener los mejores candidatos, sin embargo, en el procesamiento realizado todos los criterios tienen la misma importancia relativa.

- Lourdes Canós Darós et al. [19], proponen un algoritmo difuso basado en la agregación de competencias, en este caso, primero se identifica el nivel de conocimiento que se tiene sobre el estado ideal de las competencias; lo cual permite estructurar el algoritmo en tres variantes:

- **Se desconoce el estado ideal de algunas competencias por parte de las entidades.** Bajo estas condiciones el algoritmo se estructura de la forma siguiente:

1. Se completa la matriz de competencias ideales, es decir, para las competencias que se desconoce el estado ideal, los expertos internos a la entidad realizan una estimación y se construye el número difuso trapezoidal que tiene como meseta el intervalo $\left[C_j - \bar{d}_j, C_j + \bar{E}_j \right]$ y con soporte $[d_j, E_j]$, donde: $C_j = \max_{i,k}(c_{ij}^k)$,

$$\bar{d}_j = \frac{1}{Rp} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^R c_{ij}^k - d_{ij}^k, \quad \bar{E}_j = \frac{1}{Rp} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^R c_{ij}^k + d_{ij}^k, \quad d_j = \min_{i,k}(c_{ij}^k - d_{ij}^k),$$

$$E_j = \max_{i,k}(c_{ij}^k + d_{ij}^k).$$

c_{ij}^k es la valoración del i -ésimo candidato realizada por el k -ésimo experto de la competencia j -ésima y la misma pertenece al intervalo unitario. d_{ij}^k es un valor del intervalo unitario. $1 \leq i \leq R$, R es el número de candidatos. $1 \leq k \leq P$, P es el número de expertos. $1 \leq j \leq n$, n es la cantidad de competencias.

2. Calcular el coeficiente de adecuación (definición 5.2.3) y la distancia de Hamming (definición 5.2.4). Se elige un nivel de confianza α , para el número difuso de cada competencia. En este caso, las expresiones a calcular es respecto a la valoración de cada candidato en las diferentes competencias y la valoración ideal de las competencias.

Definición 5.2.3. *Dados dos conjuntos difusos A y B , con funciones de pertenencias $\mu_A(x) = [a_x^1, a_x^2]$ y $\mu_B(x) = [b_x^1, b_x^2]$, respectivamente, se define el coeficiente de adecuación entre ellos, como:*

$$\mu_B(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_B^{x_i}(A) \quad (5.21)$$

donde

$$\mu_B^{x_i}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } [b_{x_i}^1, b_{x_i}^2] \subseteq [a_{x_i}^1, a_{x_i}^2] \\ \frac{\text{longitud}([b_{x_i}^1, b_{x_i}^2] \cap [a_{x_i}^1, a_{x_i}^2])}{\text{longitud}([b_{x_i}^1, b_{x_i}^2] \cup [a_{x_i}^1, a_{x_i}^2])} & \text{si } [b_{x_i}^1, b_{x_i}^2] \not\subseteq [a_{x_i}^1, a_{x_i}^2] \end{cases}$$

Definición 5.2.4. *Dados dos conjuntos difusos A y B , con funciones de pertenencia $\mu_A(x) = [a_x^1, a_x^2]$ y $\mu_B(x) = [b_x^1, b_x^2]$, respectivamente, se define la distancia de Hamming como:*

$$d(A, B) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \right) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n (|a_{x_i}^1 - b_{x_i}^1| + |a_{x_i}^2 - b_{x_i}^2|) \right) \quad (5.22)$$

3. Ordenar los resultados del coeficiente de adecuación y la distancia de Hamming de los candidatos, desde el mejor hasta el peor. Seleccionando de esta forma al candidato que más se parezca al ideal para el puesto de trabajo.
- **Se conoce el estado ideal de todas las competencias por parte de las entidades.** Bajo estas condiciones solo es necesario ejecutar los pasos 2 y 3 del algoritmo anterior.
 - **Se desconoce el estado ideal de todas las competencias por parte de las entidades.** Para ello, los autores proponen la utilización de expertos externos a la entidad para que realicen una valoración global de una muestra de los candidatos que optan por el puesto de trabajo y el algoritmo se expresa en los pasos siguientes:
 1. Calcular el centro de gravedad asociado al número difuso trapezoidal correspondiente a cada candidato, el cual se estructura en la matriz

$$G_{ij} = \frac{1}{4} (d_{ij} + D_{ij} + e_{ij} + E_{ij}) \quad (5.23)$$

donde, $d_{ij} = \min_k (c_{ij}^k - d_{ij}^k)$, $D_{ij} = \max_k (c_{ij}^k - d_{ij}^k)$, $e_{ij} = \min_k (c_{ij}^k + d_{ij}^k)$, $E_{ij} = \max_k (c_{ij}^k + d_{ij}^k)$. c_{ij}^k y d_{ij}^k con el mismo significado anterior.

$1 \leq i \leq R$, R es la cantidad de candidatos.

$1 \leq k \leq P$, P es la cantidad de expertos.

$1 \leq j \leq n$, n es la cantidad de competencias.

Además, se ordena la matriz de centro de gravedad G_{ij} respecto a las competencias (por filas), de forma descendente, obteniendo de esta forma la matriz reordenada G_{ij}^* .

2. Se calculan los pesos a asignar a las valoraciones de las competencias (centro de gravedad ordenado), a través del modelo de programación matemática no lineal siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^L \left(\sum_{j=1}^n G_{ij}^* w_j - eg_i \right)^2$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Nota: eg_i es una evaluación global de una parte de los posibles candidatos.

3. Valoración de cada uno de los candidatos y su respectivo orden, a partir de la solución óptima del modelo de programación no lineal del paso anterior.

Estas variantes planteadas por Canós Darós [19], están condicionadas por el conocimiento del estado ideal de todas las competencias o de una parte de ellas, donde se utiliza la operatoria con números difusos para las evaluaciones correspondientes por parte de los expertos, aunque no se indica la importancia relativa de las competencias. El otro condicionante está dada por el desconocimiento del estado ideal de todas las competencias, apoyándose también en la operatoria con números difusos y la utilización de un modelo de programación matemática para determinar los pesos a asignar a las valoraciones de las competencias.

- L. Canós y V. Liern [21], proponen dos métodos de agregación sobre la base de técnicas de soft-Computing. Se centra en el caso en que un grupo de expertos evalúan a los candidatos para cada una de las competencias con un determinado grado de aceptación, o en un intervalo de aceptación. Las evaluaciones emitidas por los expertos pertenecen al intervalo unitario.

Algoritmo 1: *Técnica de los OWA (se desconocen los pesos).*

Este algoritmo se refiere al caso donde no se tiene información sobre el peso que tiene asociado cada competencia, por tanto, el grupo de expertos, a partir de su intuición y experiencia, realiza una valoración global de una parte del total de los candidatos, así como la evaluación de las competencias para cada uno de los candidatos. El operador considerado es el grado de aceptación, el cual pertenece al intervalo unitario.

Entrada del algoritmo: evaluación global de algunos candidatos eg_1, eg_2, \dots, eg_L , donde $L < n$, $eg_L \in [0, 1]$, y n total de candidatos, además, la evaluación de cada candidato en las diferentes competencias, por parte del grupo de expertos.

1. Ordenar a cada candidato de forma decreciente respecto a la puntuación asignada en las competencias, obteniendo la matriz:

$A = a_{ijk}$, donde $1 \leq i \leq n$, n número de candidatos, $a_{ijk} \in [0, 1]$, $1 \leq k \leq R$, R cantidad de competencias.

2. Calcular el vector de pesos de las competencias $W = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_R^*)$, a través de la solución del modelo de programación siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^L \left(\sum_{k=1}^R a_{ijK} - eg_i \right)^2$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{k=1}^R w_k = 1, w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, R$$

3. Calcular la evaluación global de cada candidato a través de:

$$eg_i^* = \sum_{k=1}^R w_k^* a_{ijK}, i = 1, 2, \dots, n$$

4. Ordenar los candidatos a partir del valor eg_i^* .

Este algoritmo puede ser transformado cuando los expertos realizan la evaluación a través de un intervalo de tolerancia, tanto para los candidatos, como para las competencias de los mismos. En este caso, se reformula el modelo de programación matemática y la forma de calcular los eg_i^* . Además, esta concepción brinda la posibilidad de realizar intercambio entre las competencias de los candidatos o no, efectuando la formulación correspondiente.

De forma general, se puede plantear que esta propuesta, donde se desconocen los pesos de las competencias; un grupo de expertos inciden en la formulación de los pesos a partir de la evaluación de una parte de los candidatos que optan por una plaza, lo cual puede ser, en cierta medida, poco objetivo, por el nivel de representatividad de la muestra que se seleccione.

Algoritmo 2: *Técnica de agregación paramétrica (se dispone de los pesos).*

En este algoritmo se asume que el peso asociado a cada competencia se tiene a priori, es decir, la entidad tiene definida la importancia relativa (peso) de cada competencia que utilizará para la selección de los candidatos. Además, cada competencia de los candidatos se evalúa en un intervalo de tolerancia, ampliado de esta forma la concepción a utilizar.

1. Declarar la función de pertenencia para la evaluación de los pesos de las competencias.
2. Calcular $E_i(\alpha)^L$ y $E_i(\alpha)^U$ para cada candidato y cada valor de α , tal que:

$$\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

Para efectuar los respectivos cálculos, es necesario resolver los modelos siguientes de programación lineal:

$$(I). \quad E_i(\alpha)^L = \text{mín} \left(E_i = \sum_{j=1}^R v_{ij} c_{ij}(\alpha)^L \right)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sujeto a: } t_j w_{ij}(\alpha)^L \leq v_{ij} \leq t_j w_{ij}(\alpha)^U, \quad j = 1, 2, \dots, R, \quad \sum_{j=1}^R v_{ij} = 1, \\
& \quad t_j \geq 0. \\
\text{(II).} \quad & E_i(\alpha)^U = \max \left(E_i = \sum_{j=1}^R v_{ij} c_{ij}(\alpha)^U \right) \\
& \text{Sujeto a: } t_j w_{ij}(\alpha)^L \leq v_{ij} \leq t_j w_{ij}(\alpha)^U, \quad j = 1, 2, \dots, R, \quad \sum_{j=1}^R v_{ij} = 1, \\
& \quad t_j \geq 0.
\end{aligned}$$

Donde:

$$t_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^R w_{ij}}, \quad v_{ij} = t_j w_{ij}$$

R es la cantidad de competencias.

$$c_{ij}(\alpha)^L = \min_{C_{ij}} \{c_{ij} \in C_{ij} : \mu_{C_{ij}}(c_{ij}) \geq \alpha\}, \quad c_{ij}(\alpha)^U = \max_{C_{ij}} \{c_{ij} \in C_{ij} : \mu_{C_{ij}}(c_{ij}) \geq \alpha\},$$

C_{ij} es un conjunto universal crisp de la competencia j asociada al candidato i , y $\mu_{C_{ij}}$ una función de pertenencia.

$$w_{ij}(\alpha)^L = \min_{w_{ij}} \{w_{ij} \in W_{ij} : \mu_{w_{ij}}(w_{ij}) \geq \alpha\},$$

$$w_{ij}(\alpha)^U = \max_{w_{ij}} \{w_{ij} \in W_{ij} : \mu_{w_{ij}}(w_{ij}) \geq \alpha\},$$

W_{ij} es un conjunto universal crisp del peso j asociado al candidato i , y $\mu_{w_{ij}}$ una función de pertenencia.

3. Ordenar los intervalos $E_i(\alpha) = [E_i(\alpha)^L, E_i(\alpha)^U]$, $1 \leq i \leq n$, para cada valor de α , resultado: $E_{s1}(\alpha) \prec E_{s2}(\alpha) \prec \dots \prec E_{sn}(\alpha)$. Este orden se establece a partir de la definición de orden entre dos intervalos [21].

Definición 5.2.5. Sean $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \subset \mathfrak{R}$ dos intervalos. A es mayor que B , si y solo si [21]:

$$\begin{cases} \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2}{k_1 + k_2} > \frac{k_1 b_1 + k_2 b_2}{k_1 + k_2}, & k_1 a_1 + k_2 a_2 \neq k_1 b_1 + k_2 b_2, \\ a_1 > b_1, & k_1 a_1 + k_2 a_2 = k_1 b_1 + k_2 b_2 \end{cases} \quad (5.24)$$

4. Seleccionar el P_{s_n} , en correspondencia con el nivel de tolerancia α deseado.

Este algoritmo tiene como característica que, para cada candidato se requiere de la solución de varios modelos de programación lineal, para poder conformar los intervalos a ordenar. Esto hace que sea compleja su utilización.

- Lourdes Canós Darós et al. [20], este trabajo da continuación a algoritmos que utilizan un grupo de expertos para evaluar las competencias de los candidatos en un intervalo perteneciente al unitario, y diferencia dos algoritmos en particular, uno cuando se conoce el estado ideal de las competencias y el otro cuando se desconoce dicho estado ideal.

Algoritmo 1: *Se conoce el estado ideal de cada competencia.*

En este caso se estructura de la forma siguiente:

1. Construir el número difuso para cada competencia del candidato ideal, $\{\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_n\}$, por tanto, la función de pertenencia para cada competencia \bar{I}_j , con $J = 1, 2, \dots, n$ esta dada por:

$$\mu_B^{x_i}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < L_j(I) \\ \frac{1}{m_j^L(I) - L_j(I)} (x - L_j(I)) & \text{si } L_j(I) \leq x \leq m_j^L(I) \\ 1 & \text{si } m_j^L(I) \leq x \leq m_j^R(I) \\ \frac{1}{m_j^R(I) - R_j(I)} (x - R_j(I)) & \text{si } m_j^R(I) \leq x \leq R_j(I) \\ 0 & \text{si } x > R_j(I) \end{cases} \quad (5.25)$$

Donde,

$$L_j(I) = \min_k (I_j^K - t_j^k), \quad R_j(I) = \max_k (I_j^K + t_j^k), \\ m_j^L(I) = \min_k (I_j^k), \quad m_j^R(I) = \max_k (I_j^k)$$

$I = \{[I_j^K - t_j^k, I_j^K + t_j^k], 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq q\}$, es el conjunto de intervalos de la j -ésimo competencia expresado por el experto k . Estos intervalos pertenecen al intervalo unitario.

2. Construir el número difuso para cada competencia de cada candidato, $\{\bar{c}_{i1}, \bar{c}_{i2}, \dots, \bar{c}_{in}\}$, por tanto, la función de pertenencia para cada competencia \bar{c}_{ij} , con $j = 1, 2, \dots, n$, tiene como meseta a $[m_j^R - t_j^l, m_j^R + t_j^r]$ y como soporte $[L_j, R_j]$, donde,

$$m_j^R = \max_{i,k} (c_{ij}^k), \quad L_j = \min_{i,j} (c_{ij}^k - d_{ij}^k), \quad R_j = \max_{i,j} (c_{ij}^k + d_{ij}^k),$$

$$t_j^l = \frac{1}{Rp} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^R c_{ij}^k - d_{ij}^k, \quad t_j^r = \frac{1}{Rp} \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^R c_{ij}^k + d_{ij}^k$$

$\{[c_{ij}^k - d_{ij}^k, c_{ij}^k + d_{ij}^k], 1 \leq i \leq R, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p\}$, el conjunto de intervalos de valoración del i -ésimo candidato realizado por el k -ésimo experto de la competencia j -ésimo y los mismos pertenecen al intervalo unitario.

3. Dado un nivel de exigencia $\alpha \in [0, 1]$, se construye un número difuso para cada candidato y para el candidato ideal:

$$P_i^\Phi(\alpha) = \{(c_{ij}, [c_{ij}^1(\alpha), c_{ij}^2(\alpha)]), 1 \leq j \leq n\} \quad (5.26)$$

$i = 1, 2, \dots, R$ representa a cada uno de los (R) candidatos para un nivel de exigencia dado α .

$$\bar{I}^\Phi(\alpha) = \{(c_j, [I_j^1(\alpha), I_j^2(\alpha)]), 1 \leq j \leq n\} \quad (5.27)$$

representa el candidato ideal para un nivel de exigencia dado α .

4. Determinar la distancia o el parecido de cada candidato con el ideal, a través de:

$$d_i(\alpha) = d(P_i^\Phi(\alpha), \bar{I}^\Phi(\alpha)) \quad (5.28)$$

Nota: La distancia se puede calcular a través de la definición 5.2.3 o 5.2.4.

5. Ordenar los candidatos para el nivel de exigencia α .

$$P_{i1}(\alpha) \prec P_{i2}(\alpha) \prec \dots \prec P_{in}(\alpha) \quad (5.29)$$

6. Repetir los pasos 2, 3, 4 y 5 para diferentes valores de exigencia α .
7. La entidad elige el grado de exigencia y selecciona al candidato.

Algoritmo 2: *Se desconoce el estado ideal de cada competencia.*

Como se desconoce el estado ideal de cada competencia, la entidad a partir de expertos externos realiza una valoración global de una muestra de los candidatos, y el algoritmo se expresa de la forma siguiente:

1. Construir un número difuso para cada competencia de cada candidato, $\{c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}\}$.
2. Dado un nivel de exigencia $\alpha \in [0, 1]$, se construye un número difuso para cada candidato:

$$P_i^\Phi(\alpha) = \{(c_{ij}, [c_{ij}^1(\alpha), c_{ij}^2(\alpha)]), 1 \leq j \leq n\} \quad (5.30)$$

$i = 1, 2, \dots, R$, representa a cada uno de los (R) candidatos para un nivel de exigencia dado α .

3. Construir los intervalos de valoración global emitida por los expertos externo a la entidad para una muestra de los candidatos que optan por el puesto de trabajo.

$Eg_i = [eg_i^1, eg_i^2]$, $i = 1, 2, \dots, L$, donde L es el tamaño de la muestra que se evalúa.

4. Construir la matriz de competencias $A(\alpha)$ con intervalos ordenados para el nivel de exigencia seleccionado. Es decir, para cada candidato se ordenan las competencias (filas) de forma descendente, donde los elementos de la matriz A_{ijr}^α , $1 \leq r \leq n$, representa el r -ésimo intervalo ordenado para el candidato P_i .

Nota: $A_{ij}^\alpha = [c_{ij}^1(\alpha), c_{ij}^2(\alpha)]$, $1 \leq j \leq n$

5. Obtener las ponderaciones para las competencias, mediante al solución del modelo de programación siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{i=1}^L \left(\sum_{k=1}^R A_{ijk}^\alpha(\gamma) w_k - Eg_i(\beta) \right)^2 \\ & \text{Sujeto a: } \sum_{k=1}^R w_k = 1, \alpha, \beta \in [0, 1], w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, R \end{aligned}$$

Donde:

$$Eg_i(\beta) = eg_i^2 + (eg_i^2 - eg_i^1) \beta, \quad \beta \in [0, 1]$$

$$A_{ijr}^\alpha(\gamma) = c_{ijr}^2(\alpha) + (c_{ijr}^2(\alpha) - c_{ijr}^1(\alpha)) \gamma, \quad \gamma \in [0, 1]$$

Estas expresiones son el resultado de parametrizar el intervalo de evaluación $Eg_i = [eg_i^1, eg_i^2]$ ($i = 1, 2, \dots, L$) emitida por los expertos externos a la entidad y el intervalo de valoración $A_{ij}^\alpha = [c_{ij}^1(\alpha), c_{ij}^2(\alpha)]$, ($1 \leq j \leq n$) de las competencias de cada candidato, el mismo es emitido por los expertos internos a la entidad, respectivamente.

6. Calcular la valoración global de todos los candidatos a través de:

$$v_i^* = \sum_{k=1}^R w_k^* A_{ijk}^\alpha(\gamma^*) \quad (5.31)$$

7. Ordenar los candidatos para el nivel de exigencia de α .

$$P_{i_1}(\alpha) \prec P_{i_2}(\alpha) \prec \dots \prec P_{i_n}(\alpha) \quad (5.32)$$

8. Repetir los pasos 2, 3, 4 y 5 para diferentes valores de α .

9. La entidad elige el grado de exigencia y selecciona al candidato.

Canós Darós, L. et al [20], presentan dos métodos que están condicionados por el conocimiento o desconocimiento del estado ideal de cada competencia, apoyando su concepción con los principios de la lógica difusa, tal que en el primer caso (conocimiento del estado

ideal) la entidad selecciona el nivel de exigencia con que desea el procesamiento, aunque no se indica la importancia relativa de las competencias. En el segundo caso (desconocimiento del estado ideal) utiliza modelos de programación matemática para ponderar las competencias.

- Panagiotis V. Polychroniou y Ioannis Giannikos [94], proponen un método de análisis multicriterio difuso, que se base en ordenar los candidatos de forma similar a la solución ideal del método multicriterio TOPSIS y el algoritmo presentado por Karsak [61]. Este método se estructura de la forma siguiente:

1. Identificar el problema de selección de personal.

A través del mismo se identifican los candidatos para el puesto de trabajo, los criterios a utilizar en la selección y se determinan los expertos que participarán en el proceso.

2. Evaluar a los candidatos.

Se evalúa a cada candidato A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) para los diferentes criterios C_j ($j = 1, 2, \dots, h$) mediante un número triangular difuso de la forma $x_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, y se normalizan los datos registrados a través de:

$$\bar{r}_{ij} = (r_{ija}, r_{ijb}, r_{ijc}) = \begin{cases} \left(\frac{a_{ij}-a_j^-}{c_j^+-a_j^-}, \frac{b_{ij}-a_j^-}{c_j^+-a_j^-}, \frac{c_{ij}-a_j^-}{c_j^+-a_j^-} \right) & \text{si } j \in C_b \\ \left(\frac{c_j^+-c_{ij}}{c_j^+-a_j^-}, \frac{c_j^+-b_{ij}}{c_j^+-a_j^-}, \frac{c_j^+-a_{ij}}{c_j^+-a_j^-} \right) & \text{si } j \in C_c \end{cases} \quad (5.33)$$

tal que: n es el número de candidatos y h es la cantidad de criterios.

$$c_j^+ = \max_i \{c_{ij}\}, \quad a_j^- = \min_i \{a_{ij}\}.$$

El conjunto de criterios $C = C_b \cup C_c$, donde, C_b representa el subconjunto de criterios relativos al beneficio, que debe ser maximizado, y el subconjunto C_c , representa el subconjunto de los criterios relativos al costo, que deben ser minimizados.

3. Calcular los pesos de los criterios.

Primero es necesario determinar el vector de pesos a partir de la información registrada de los candidatos, mediante:

$$w'_j = \frac{\frac{x_j^+ - x_j^-}{x_j^+}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{x_j^+ - x_j^-}{x_j^+} \right)} \quad (5.34)$$

tal que: j y h , tienen el mismo comportamiento que el paso anterior.

$$x_j^+ = \max_i \{c_{ij}\}, \quad x_j^- = \min_i \{a_{ij}\}, \quad \text{pues } x_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}).$$

Luego, a partir de los pesos $w''_{kj} = (wa''_{kj}, wb''_{kj}, wc''_{kj})$, $k = 1, 2, \dots, m$ (m número de expertos), donde los mismos representan la valoración subjetiva del peso asociado al criterio j -ésimo, por el experto k ; se realiza la agregación de los pesos w''_{kj} , mediante la expresión:

$w''_j = \frac{1}{m} \otimes (w''_{1j} \oplus w''_{2j} \oplus \dots \oplus w''_{mj})$, $j = 1, 2, \dots, h$. El operador \oplus es la adición difusa.

Finalmente, el peso asociado a los criterios se obtiene a través de:

$w_j = w'_j \otimes w''_j = (w_{ja}, w_{jb}, w_{jc})$, $j = 1, 2, \dots, h$ y el operador \otimes representa la multiplicación difusa.

4. Calcular la distancia del candidato al ideal y al anti-ideal.

A partir de la información determinada para cada candidato se calcula la distancia al ideal D_i^+ y al anti-ideal D_i^- , donde:

$$D_i^+ = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (\text{máx} \{w_{ja} |r_{ija} - 1|, w_{jc} |r_{ijc} - 1|\} + w_{jb} |r_{ijb} - 1|) \right] \quad (5.35)$$

$$D_i^- = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (\text{máx} \{w_{ja} r_{ija}, w_{jc} r_{ijc}\} + w_{jb} r_{ijb}) \right] \quad (5.36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Finalmente, la posición de cada candidato respecto al ideal y al anti-ideal, se expresa a través de la razón siguiente:

$$P_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} \quad (5.37)$$

5. Seleccionar el candidato.

A partir de la razón P_i , se ordenan los candidatos A_i de forma descendente y se selecciona el candidato que tiene la mayor razón.

Este método [94] utiliza la concepción del método TOPSIS, incorporando el trabajo con la lógica difusa para evaluar a los candidatos y sobre la base de esta información calcular el vector de pesos.

- Zülal Güngör et al. [45], para realizar el proceso de selección de personal toman como referente el Proceso Analítico Jerárquico Difuso (FAHP), definiendo una estructura jerárquica de objetivos, criterios y subcriterios en particular.

La estructura jerárquica planteada por los autores [45], se organiza de tal manera que, el objetivo es elegir al mejor candidato, este (objetivo) se subdivide en tres criterios

principales relacionados con el trabajo a realizar: Factores Generales, Factores Complementarios y Factores Individuales. Finalmente, cada uno de los criterios identificados se subdivide en subcriterios, como se ilustra en la figura 5.3.



Figura 5.3: Estructura jerárquica definida.

En la estructura jerárquica definida en el último nivel lo constituyen las alternativas, luego a partir del mismo se aplica las etapas correspondientes al método FAHP, descrito a continuación.

1. Sobre la base de la estructura organizativa por niveles, se determinan los pesos relativos a los criterios, a través de una comparación por pares de criterios, donde cada par de criterios se evalúa con un valor de 1 a 9, donde 1 es la menor importancia y 9 la mayor. Estos valores se tratarán como un número triangular difuso \tilde{Z} de la forma (a, b, c) y su función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{Z}}(x) = (z_{ija}, z_{ijb}, z_{ijc}) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } \textit{otro caso} \end{cases} \quad (5.38)$$

Se conforma la matriz de juicios \tilde{M} , tal que los elementos de la diagonal principal y la triangular superior son de la forma $\tilde{m}_{ij} = (m_{ij} - \delta, m_{ij}, m_{ij} + \delta)$, y los elementos de la triangular inferior su inverso, definido por $\tilde{m}_{ij}^{-1} = \frac{1}{\tilde{m}_{ij}} = \left(\frac{1}{m_{ij} + \delta}, \frac{1}{m_{ij}}, \frac{1}{m_{ij} - \delta} \right)$. En este caso, los autores sugieren que el valor de δ , sea $0.5 < \delta < 1$.

2. Evaluación de cada uno de los candidatos sobre la base de la estructura definida.
3. Se calcula el valor global de los candidatos, y se ordenan los mismos a partir del valor calculado. Para ello se utiliza la expresión:

$$g(a_j, w_j) = \sum w_j \otimes a_j \quad (5.39)$$

Donde: a_j es la evaluación de la alternativa para los diferentes criterios y w_j son los pesos calculados en la 1ra etapa.

Como se puede observar la propuesta utilizada por [45], sistematiza la utilización del Proceso Jerárquico Analítico Difuso, el cual ayuda a la descomposición jerárquica del problema de selección de personal y por su naturaleza utiliza pesos para indicar la importancia relativa de los criterios. En la propuesta realizada se fijan los criterios y subcriterios, lo cual puede ser efectivo para determinadas situaciones.

- Dursun y Karsak, además [33], propone un método de análisis multicriterio difuso, que se estructura de la forma siguiente:

1. Construir un comité de decisores formado por l expertos, identificar los candidatos y los criterios de selección requeridos.
2. Construir la matriz de decisión para cada decisor que denota la importancia de pesos de los criterios, la valoración difusa correspondiente a los criterios cualitativos y los valores crisp correspondientes a los criterios cuantitativos, que serán utilizados para evaluar a los candidatos.
3. Normalizar los datos crisp para obtener valores de los criterios comparables.

Los valores normalizados para los datos crisp de los criterios cuantitativos con respecto al costo y al beneficio se calculan a través de la escala de transformación lineal:

$$y'_{ijk} = (r_{ija}, r_{ijb}, r_{ijc}) = \begin{cases} \frac{y_{ijk}}{y_{jk}^*} & \text{si } j \in Q_1 \\ \frac{y_{jk}^-}{y_{ijk}} & \text{si } j \in Q_2 \end{cases} \quad (5.40)$$

tal que:

Q_1 es el conjunto de criterios de beneficios.

Q_2 es el conjunto de criterios de costo.

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, l.$

y'_{ijk} denota el valor normalizado de y_{ijk} , que representa el valor crisp asignado al candidato i -ésimo respecto al criterio j -ésimo y emitido por el decisor k .

$y_{jk}^* = \max_i(y_{ijk})$ y $y_{jk}^- = \min_i(y_{ijk})$.

Nota: Los valores normalizados para los datos crisp, se pueden representar como un número triangular difuso $\tilde{r}_{ijk} = (y'_{aijk}, y'_{bijk}, y'_{cijk})$, donde $y'_{aijk} = y'_{bijk} = y'_{cijk} = y'_{ijk}$

4. Considerar la importancia de cada criterio, calcular la valoración ponderada de cada candidato a través de:

$$\bar{P}_{ijk} = \bar{w}_{jk} \otimes \bar{r}_{ijk} \quad (5.41)$$

Donde: \bar{P}_{ijk} es la valoración ponderada del candidato i -ésimo respecto al criterio j -ésimo y emitido por el decisor k . $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, l$. El operador \otimes denota la multiplicación difusa.

5. Convertir la valoración de pesos \bar{P}_{ijk} en la escala lingüística básica S_T , planteada por Herrera et al. [49]. El vector de evaluación difuso sobre S_T , $F(\bar{P}_{ijk})$, se representa por:

$$F(\bar{P}_{ijk}) = \left(\gamma(\bar{P}_{ijk}, S_0), \gamma(\bar{P}_{ijk}, S_1), \dots, \gamma(\bar{P}_{ijk}, S_6) \right) \quad (5.42)$$

tal que, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, l$.

En este caso el conjunto de etiquetas que asumen los autores se muestran en la tabla 5.5:

Tabla 5.5: Etiquetas lingüísticas y sus respectivos números difusos.

Etiquetas Lingüísticas	Números difusos
s_0	(0,0,0.16)
s_1	(0,0.16,0.33)
s_2	(0.16,0.33,0.50)
s_3	(0.33,0.50,0.66)
s_4	(0.50,0.66,0.83)
s_5	(0.66,0.83,1)
s_6	(0.83,1,1)

6. Agregar a $F(\bar{P}_{ijk})$ para obtener el vector de evaluación difuso $F(\bar{P}_{ij})$. La agregación de los parámetros se obtiene de los datos evaluados por los l expertos,

$$\bar{P}_{ij}(s_z) = \phi_Q \left(\gamma(\bar{P}_{ij1}, s_z), \gamma(\bar{P}_{ij2}, s_z), \dots, \gamma(\bar{P}_{ijl}, s_z) \right) \quad (5.43)$$

tal que, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $z = 1, 2, \dots, 6$; y ϕ_Q es el operador OWA, cuyos pesos se calculan utilizando el cuantificador lingüístico Q .

El vector de evaluación difuso sobre S_T con respecto al criterio C_j , $(F(\bar{P}_{ij}))$, se define como:

$$F(\bar{P}_{ij}) = \left(\gamma(\bar{P}_{ij}, s_0), \gamma(\bar{P}_{ij}, s_2), \dots, \gamma(\bar{P}_{ij}, s_6) \right) \quad (5.44)$$

$i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$

7. Calcular los valores β de las alternativas con respecto a los criterios, y se transforman a una 2-tuple lingüística $r_{ij} = (s_{ij}, \alpha_{ij})$, utilizando para ello las definiciones 5.2.6 y 2.6.1.

Definición 5.2.6. Sea $L = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_g)$ un conjunto difuso definido en S_T . χ una función que transforma a L en un valor numérico del intervalo granular de S_T , $[0, g]$ y se define por [52]:

$$\begin{aligned} \chi : F(S_T) &\longrightarrow [0, g] \\ \chi(F(S_T)) &= \chi(\{(s_j, \gamma_j), j = 0, 1, \dots, g\}) = \frac{\sum_{j=0}^g j\gamma_j}{\sum_{j=0}^g \gamma_j} = \beta \end{aligned} \quad (5.45)$$

Donde $F(S_T)$ es un conjunto de los conjuntos difusos definidos en S_T .

8. Se define el valor ideal lingüístico difuso $A^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*)$, y el valor anti-ideal lingüístico difuso $A^- = (r_1^-, r_2^-, \dots, r_n^-)$, donde $r_j^* = \max_i \{(s_{ij}, \alpha_{ij})\}$ y $r_j^- = \min_i \{(s_{ij}, \alpha_{ij})\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
9. Calcular la distancia del ideal y el anti-ideal a los valores lingüísticos difusos (d_i^* y d_i^- respectivamente) para cada candidato A_i , a través de:

$$d_i^* = d(A_i, A^*) = \sum_{j=1}^n d(r_{ij}, r_j^*) \quad (5.46)$$

$$d_i^- = d(A_i, A^-) = \sum_{j=1}^n d(r_{ij}, r_j^-) \quad (5.47)$$

donde,

$$d(r_{ij}, r_j^*) = \Delta^{-1} \left(\max_i \{(s_{ij}, \alpha_{ij})\} \right) - \Delta^{-1}(s_{ij}, \alpha_{ij}) \quad (5.48)$$

$$d(r_{ij}, r_j^-) = \Delta^{-1}(s_{ij}, \alpha_{ij}) - \Delta^{-1} \left(\min_i \{(s_{ij}, \alpha_{ij})\} \right) \quad (5.49)$$

10. Calcular el índice de orden RI de los candidatos, a través de:

$$RI_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+} \quad (5.50)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

11. Ordenar los candidatos acorde a los valores de RI_i de forma descendente. El candidato con el mayor valor es el mejor candidato.

El método propuesto por Dursun [33], se caracteriza por la utilización de un grupo de expertos para evaluar a los candidatos y los criterios a utilizar en la selección. También

se enfoca en el trabajo con etiquetas lingüísticas que las transforma a números difusos triangular en el proceso de evaluación de los candidatos. Su principio de procesamiento utiliza la concepción del método TOPSIS, determinando la solución ideal y la no ideal (representada por el valor máximo y el valor mínimo respectivamente, o viceversa), para los diferentes criterios y a partir de la distancia a la solución ideal y no ideal, se calcula el índice que permite ordenar a las alternativas.

Como se puede observar, son diversos los métodos propuestos para realizar el Proceso de Selección de Personal, por tanto, se puede plantear de forma general que los mismos se caracterizan por la instrumentación y uso de diferentes herramientas, conocimientos y concepciones, tales como:

- La sistematización del empleo de los métodos de análisis multicriterio, ya que en estos problemas se cuenta con una gran diversidad de información expresada en magnitudes y significados diferentes, convirtiéndose en uno de los rasgos esenciales de este proceso. Entre los métodos utilizados se puede citar: el método TOPSIS [33], [94] centrando la búsqueda de la mejor alternativa a partir de la distancia al ideal y el antiideal, el método AHP [46], [24], [6], el cual permite descomponer el problema de selección en una estructura jerárquica para su mejor comprensión, el método FAHP [45] constituye una extensión de AHP donde se incluye la lógica difusa, el método ELECTRE [1].
- La utilización de la Lógica Difusa, pues facilita el trabajo cuando existe vaguedad e imprecisión de la información, presente en este tipo de problemática [73], [42], [72], [61], [19], [20], [33], [46], [24].
- El empleo de modelos de programación matemática [62], [19], [21], [21], [20].
- La subdivisión de los criterios en objetivos y subjetivos, con la finalidad de diferenciar su procesamiento [73], [72].
- La participación de un conjunto de expertos [73], [42], [72], [33], con la finalidad de evaluar los criterios a utilizar y a los candidatos.
- La utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios que intervienen en dicho proceso [72], [21], [45], [24], [58].
- La identificación de los mejores candidatos a partir del estado ideal [19], [20], así como también tener en cuenta de forma simultánea el referente de cada candidatos respecto al perfil ideal y al no ideal [42], [72], [61], [33].

5.3. Propuesta de método para la Selección de Personal.

A partir de los aspectos analizados en el epígrafe anterior, se considera realizar la propuesta de un procedimiento dirigido al proceso de Selección de Personal, sobre la base del método de análisis multicriterio propuesto en el epígrafe 3.6, el cual se caracterizaría por:

- La utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios.
- Realizar el proceso de búsqueda de las mejores alternativas a partir de la solución ideal, tal que esta se pueda tratar de forma dinámica, es decir que no se centre en los valores extremos (mínimo y máximo) sino en cualquier conjunto de valores que se encuentren entre el mínimo y máximo.
- Permitir una descomposición jerárquica del problema de selección, y de esta forma lograr una mejor comprensión del mismo, dando la posibilidad de utilizar los niveles que sean necesarios.
- Permita el trabajo con datos numéricos y lingüísticos.
- Controlar si el valor resultante de la evaluación de un criterio excluye o no a alguna alternativa.

Teniendo como referente los aspectos planteados anteriormente para lograr un mejor nivel de precisión de los resultados del proceso de Selección de Personal, se propone realizar determinadas modificaciones en las fases descritas en la figura 5.1. Las cuales consisten en (ver fig. 5.4):

- Incluir una etapa en la fase de *Planificación Previa*, referida a la "*Definición del Modelo de Decisión para la selección del personal*".
- En la fase de *Ejecución de la Selección*, se reformula la etapa de "*Procesamiento y evaluación de la información de los candidatos*", de forma tal que se realice bajo el paradigma definido en la fase anterior.

A partir de las modificaciones consideradas resulta la nueva estructura del proceso de Selección de Personal (ver fig. 5.4).

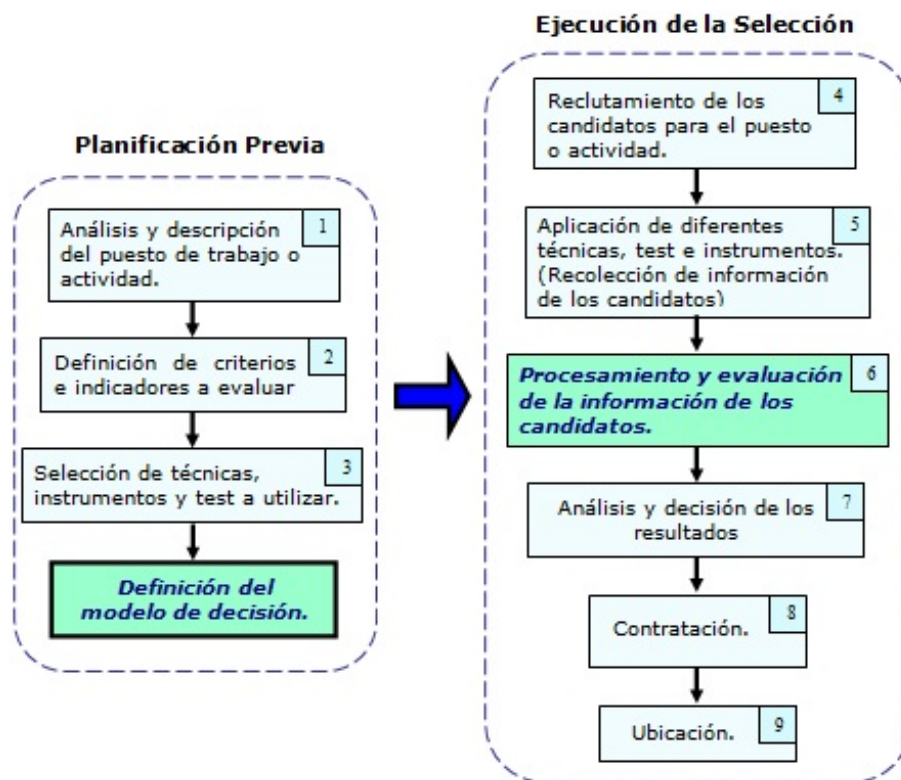


Figura 5.4: Fases del proceso de Selección de Personal modificado.

5.3.1. Consideraciones sobre el *Modelo de Decisión para la selección del personal.*

La definición del Modelo de Decisión se descompone en una estructura jerárquica que puede tener los niveles que sean necesarios, tal que ilustren la problemática a resolver (ver fig. 5.5). Luego, los criterios se organizan en una estructura en forma de árbol, donde cada nodo se corresponde con un criterio, agrupados en dos tipos básicos:

- **Criterios Resumen (CR):** Representado por el nodo raíz y los nodos intermedios, estableciendo el enlace informativo desde el nodo raíz hasta las hojas.
El Criterio Resumen que sea el nodo raíz almacenaría el resultado de la evaluación de todo el proceso de agregación y se denotará por CR^* .
- **Criterios Evaluados (CE):** Representado por los nodos que constituyen las hojas del árbol y los mismos son los que adquieren la instancia de los valores perteneciente a los diferentes dominios definidos.

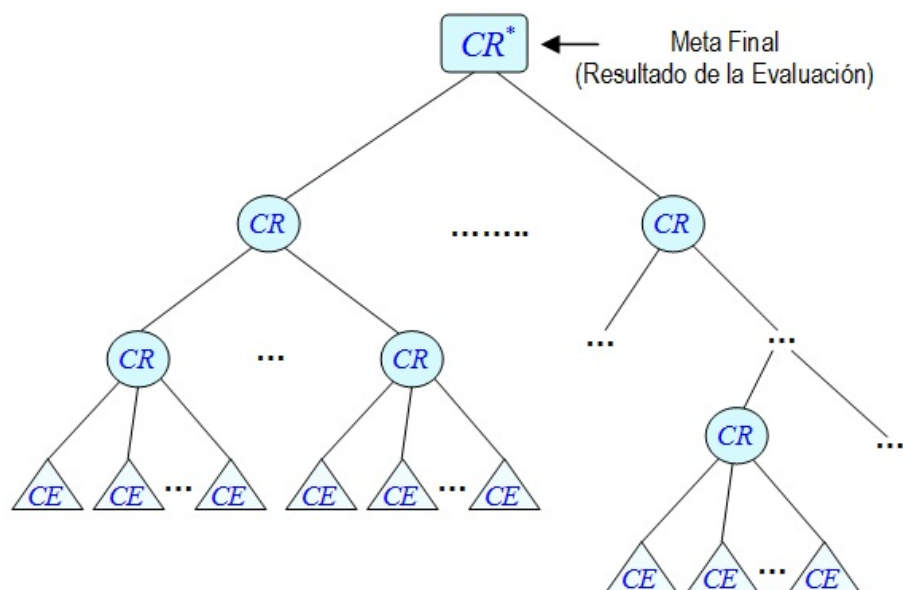


Figura 5.5: Estructura jerárquica del Modelo para la Selección de Personal.

Cada tipo de criterio requiere de la definición de determinados elementos, tales como:

- La asignación de pesos a todos los hijos de los criterios tipo resumen (CR) (ver fig. 5.6). Al asignar los pesos a los criterios hijos de los criterios resumen se debe cumplir que la suma de los mismos sea igual a 1. Es decir, $\sum_{i=1}^n w_i = 1, \dots, \sum_{i=1}^m w'_i = 1$

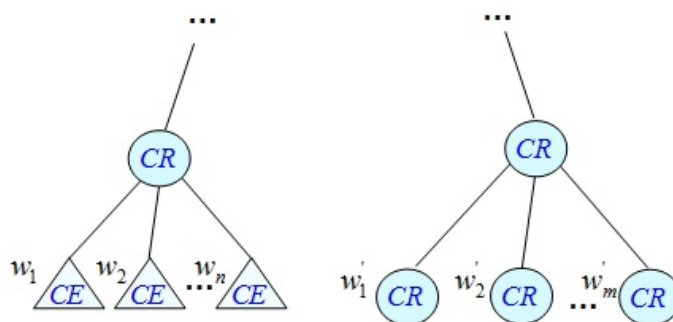


Figura 5.6: Asignación de pesos a los criterios.

- Indicar si el criterio es de exclusión o no, en caso afirmativo especificar el mayor valor para el cual se excluye la alternativa, este valor debe pertenecer al intervalo unitario. El nodo raíz está excluido de esta definición.
- Además, para los criterio de tipo Evaluados (CE), se definen también:

- El dominio de datos (Discreto, Continuo, Ordinal).
- La función de normalización a utilizar (ver 3.6.4, 3.6.5).
- El conjunto de valores que representa el valor ideal, el cual es un subconjunto de su dominio especificado.

5.3.2. Consideraciones sobre el *Procesamiento y evaluación de la información de los candidatos.*

Bajo el paradigma definido en el Modelo de Decisión, se ejecutará el proceso de agregación de la información. Donde el cálculo de la Calificación Final de cada candidato no es más que la operatoria sobre su correspondiente árbol de decisión (ver fig. 5.7).

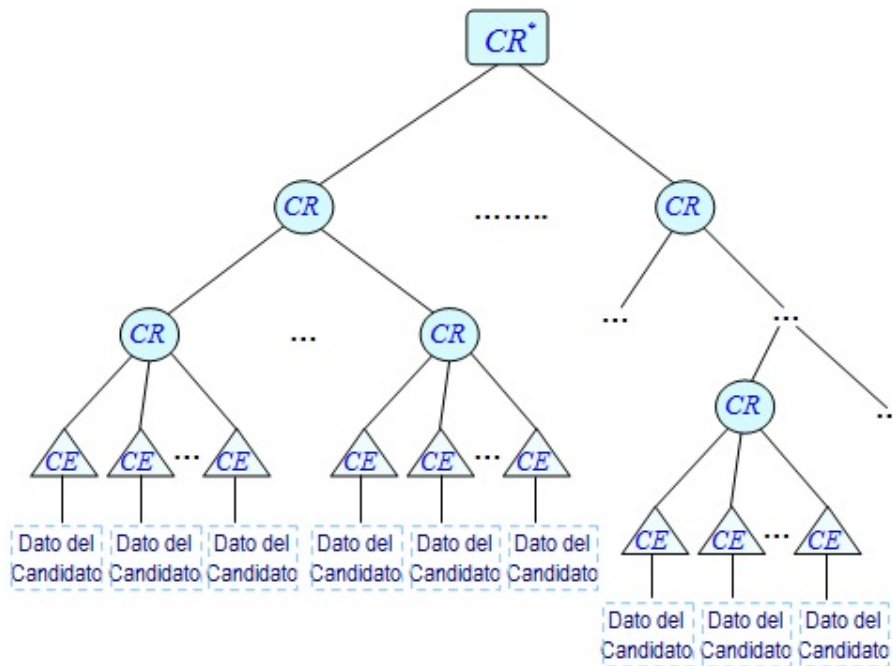


Figura 5.7: Árbol de Decisión del Candidato.

5.3.2.1. Proceso de cálculo general.

El proceso de cálculo general para obtener la Calificación Final de cada candidato, se puede resumir en el algoritmo siguiente

1. Realizar un aplanamiento de la estructura del árbol de Decisión del candidato (ver fig. 5.7), tal que solo queden tres niveles, los referentes a: CR^* , CE y los datos de los candidato (ver fig. 5.8). Esta operación solo modificará los pesos asociados a los CE , donde el valor de los nuevos pesos se obtiene mediante el producto de todos los pesos de su correspondiente rama en la estructura jerárquica (ver fig. 5.9) $w_k^F = w_l''' \cdot w_i'' \cdot w_j'$. La dimensión del nuevo vector de pesos coincide con la cantidad de CE , y verifica que
$$\sum_{k=1}^p w_k^F = 1 .$$

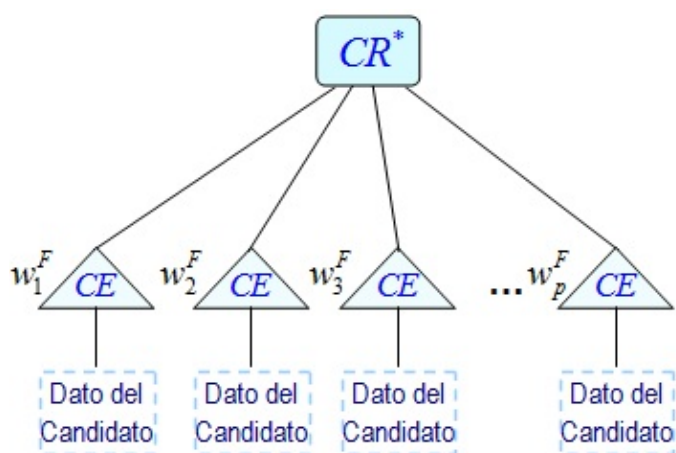


Figura 5.8: Aplanamiento del árbol de Decisión del Candidato.

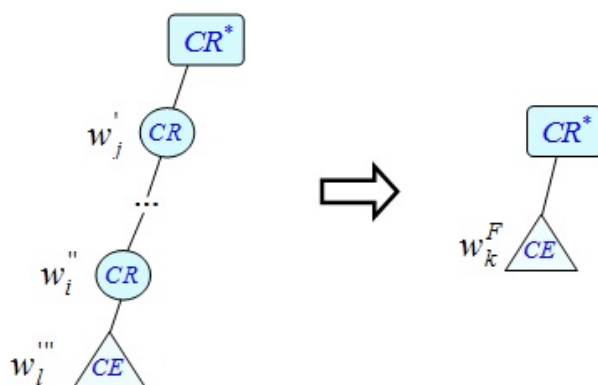


Figura 5.9: Cálculo de los nuevos pesos.

2. Aplicar el método de análisis multicriterio definido en el epígrafe 3.6.

5.3.3. Procedimiento para la Selección de Personal.

Después de analizar las principales modificaciones sobre las fases del proceso de Selección de Personal descritas en la fig. 5.4, se propone la reformulación de dicho proceso a través del procedimiento siguiente:

1. Planificación del proceso de Selección de Personal.

En el mismo se identifica el Modelo de Decisión para la selección del personal. Si este no está definido entonces se tienen en cuenta las competencias que requiere el puesto de trabajo, así como todos los posibles instrumentos, test, entrevistas, etc, que pudieran brindar información sobre los candidatos, y sobre esta base definir los diferentes elementos de Modelo de Decisión (ver consideraciones sobre el Modelo). En esta etapa se pueden utilizar un grupo de expertos para obtener el consenso más apropiado.

2. Ejecución del proceso de Selección de Personal.

En esta fase se desarrollan las acciones siguientes:

- Reclutamiento de los candidatos.
- Recolección de la información de los candidatos sobre la base del Modelo de Decisión definido.
- Procesamiento de la información de los candidatos a través del proceso de cálculo general 5.3.2.1, y obtención del índice relativo (3.28 o 3.30, según corresponda) para cada candidato, a través del método descrito en el epígrafe 3.6.
- Ordenación descendente de los candidatos a partir del índice relativo; este índice mientras más próximo esté de 1, entonces el candidato correspondiente cumple mejor las características del ideal definido.
- Análisis y discusión de los resultados.
- Contratación y ubicación.

5.4. Ejemplo práctico aplicando la concepción propuesta.

Con el fin de ejemplificar la concepción propuesta para el proceso de selección, se tomó la información de un grupo de candidatos que aspiraban a un puesto de chofer en una entidad. Por un carácter ético no se hará referencia a la entidad y al nombre de los candidatos que optaron por el puesto de trabajo y en su lugar se identificarán por letras.

Como parte de la primera fase, se realizó la definición del modelo de decisión, sobre la base de los elementos emitidos por un conjunto de 5 expertos, y se obtuvo la estructura jerárquica de criterios que se muestra en la figura 5.10.

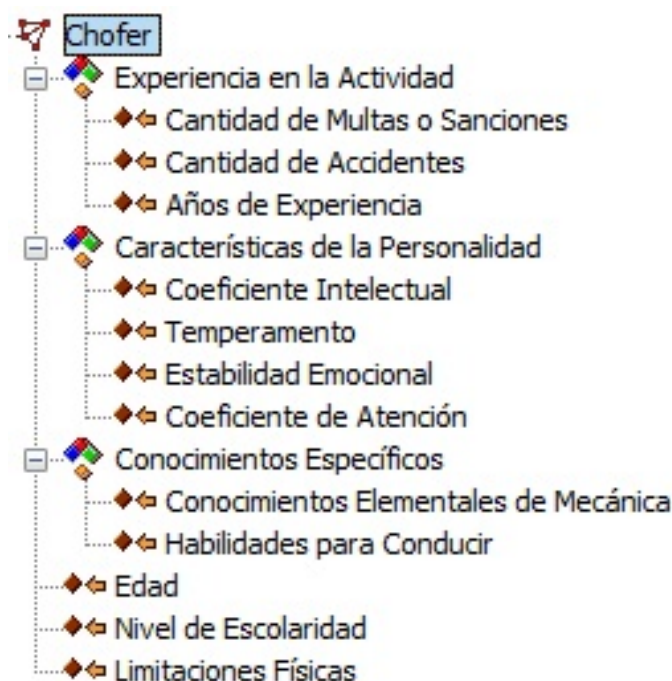


Figura 5.10: Estructura del Modelo de Selección.

En la segunda fase, después de la recolección de la información de los candidatos, se procesa la misma a través del método de agregación descrito en el epígrafe 3.6.

Paso.1: Definición del contexto de trabajo

Para indicar la importancia relativa de los diferentes criterios, se asignaron pesos a los criterios hijos de cada uno de los criterios tipo Resumen, utilizando la ley de Borda-Kendall (4.45) para efectuar el cálculo correspondiente (ver tabla 5.6).

Tabla 5.6: Pesos asignados a los criterios hijos de los respectivos criterios tipo Resumen.

Criterios tipo Resumen	Criterios Hijos	Pesos
Calificación Final	Experiencia en la Actividad	0.28571
	Características de la Personalidad	0.23810
	Conocimientos Específicos	0.19048
	Edad (C1)	0.14286
	Nivel de Escolaridad (C2)	0.09524
	Limitaciones Físicas (C3)	0.04762
Experiencia en la Actividad	Cantidad de Multas o Sanciones (C4)	0.50000
	Cantidad de Accidentes (C5)	0.33333
	Años de Experiencia (C6)	0.16667
Características de la Personalidad	Coficiente de Inteligencia (C7)	0.4
	Temperamento (C8)	0.3
	Estabilidad Emocional (C9)	0.2
	Coficiente de Atención (C10)	0.1
Conocimientos Específicos	Conocimientos Elementales de Mecánica (C11)	0.66667
	Habilidades para Conducir (C12)	0.33333

El modelo definido (fig. 5.10), tiene varios niveles, por lo que se necesario realizar el aplanamiento de la estructura (epígrafe 5.3.2.1), recalculándose los pesos de los criterio tipo *Evaluados*.

El cálculo de los nuevos pesos solo afecta a los criterios tipo *Evaluados*, tal que se encuentren a partir del nivel 3 de la estructura jerárquica. Por ejemplo, los criterios **C1**, **C2** y **C3**, no se recalculan, sin embargo, para el resto, si es necesario.

Para el cálculo de los nuevos pesos de los criterios que lo requieran, se realiza multiplicando los pesos de los criterios que se encuentran en la misma rama de la estructura jerárquica. Por ejemplo, el pesos asociado al criterio **C4**, es el resultado de, $w_4 = 0.28571 \times 0.5 = 0.143$

En la tabla 5.7 se muestran los nuevos pesos asociados a los criterios tipo *Evaluados*

Tabla 5.7: Pesos asociados a los criterios.

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
0.143	0.095	0.048	0.143	0.095	0.048	0.095	0.071	0.048	0.024	0.127	0.063

Para cada uno de los criterios tipo evaluados, se definen los dominios de trabajo y el intervalo de mayor significación, como se muestra en la tabla 5.8.

Hay que hacer notar que como *valores de mayor significación* podemos obtener:

- Un valor numérico.
- Una etiqueta lingüística.
- Un intervalo.
- Varias etiquetas lingüísticas.
- Números difusos (en este caso, las etiquetas lingüísticas se les asocian números difusos).

Tabla 5.8: Dominios e intervalo de mayor significación de los criterios tipo Evaluado.

Criterios	Dominios	Valores de mayor significación
C1	[23, 48]	[30, 35]
C2	Primario, Secundario, Medio Superior, Téc. Medio, Universitario	Medio Superior
C3	No tiene, Invalidez Parcial, Invalidez Total	No tiene
C4	[0, 10]	0
C5	[0, 5]	0
C6	[0, 15]	Más de 10
C7	Superior, Normal Alto, Normal, Normal Bajo, Bajo	Normal
C8	Colérico, Sanguíneo, Flemático, Melancólico	Sanguíneo, Flemático, Melancólico
C9	Alta, Normal Alta, Normal, Normal Bajo, Bajo	Alta, Normal Alta
C10	Alto, Medio, Bajo	Alto
C11	Bueno, Regular, Malo	Bueno
C12	Buena, Regular, Mala	Buena

En la tabla 5.8 existen un conjunto de criterios (C2, C3, C7, C8, C9, C10, C11 y C12) en los que la medida se hace a través de etiquetas lingüísticas, en este caso es necesario calcular sus correspondientes números difusos (ver definición 6.3) para cada etiqueta de los diferentes criterios, a partir sus respectivos conjuntos de densidades. Los resultados de los cálculos realizados se muestran en la tabla 5.9.

Tabla 5.9: Números difusos asociados a las etiquetas lingüísticas de los criterios.

Criterios	Densidades	Números difusos
C2	{10, 20, 40, 80, 160}	(0, 0, 0.03), (0, 0.067, 0.13), (0.067, 0.2, 0.33), (0.2, 0.47, 0.73), (0.47, 1, 1)
C3	{40, 20, 10}	(0, 0, 0.67), (0.33, 0.67, 1), (0.83, 1, 1)
C7	{15, 15, 20, 15, 35}	(0, 0, 0.17), (0, 0.17, 0.33), (0.17, 0.39, 0.61), (0.44, 0.61, 0.78), (0.61, 1, 1)
C8	{10, 10, 10, 10}	(0, 0, 0.33), (0, 0.33, 0.67), (0.33, 0.67, 1), (0.67, 1, 1)
C9	{10, 10, 20, 10, 10}	(0, 0, 0.17), (0, 0.17, 0.33), (0.17, 0.5, 0.83), (0.67, 0.83, 1), (0.83, 1, 1)
C10	{10, 10, 10}	(0, 0, 0.5), (0, 0.5, 1), (0.5, 1, 1)
C11	{10, 10, 10}	(0, 0, 0.5), (0, 0.5, 1), (0.5, 1, 1)
C12	{10, 10, 10}	(0, 0, 0.5), (0, 0.5, 1), (0.5, 1, 1)

Otro elemento a definir es la función de pertenencia que utilizará cada uno de los criterios tipo *Evaluado*, aspecto que se describe a continuación.

- Criterios: Edad, Nivel de Escolaridad y Coeficiente de Inteligencia.

Para estos criterios, se desea que los extremos del intervalo de trabajo no tenga de forma estricta como imagen a cero, esto es equivalente a plantear que todo el intervalo de trabajo se distribuye con la misma razón, por lo tanto se utilizará la función 3.23 para cada uno de ellos (ver fig. 5.11).

- Criterios: Limitaciones Físicas, Cantidad de Multas o Sanciones, Cantidad de Accidentes, Años de Experiencia, Conocimientos Elementales de Mecánica, Habilidades para Conducir, Temperamento, Estabilidad Emocional y Coeficiente de Atención (ver fig. 5.12 y 5.13) .

Para estos criterios es equivalente utilizar cualquiera de las dos funciones 3.22 o 3.23, pues ambas tienen el mismo comportamiento.

Además, para el criterio *Limitaciones Físicas* (**C3**) se considera excluyente a los valores menores e igual que $\{Invalidez Parcial\}$.

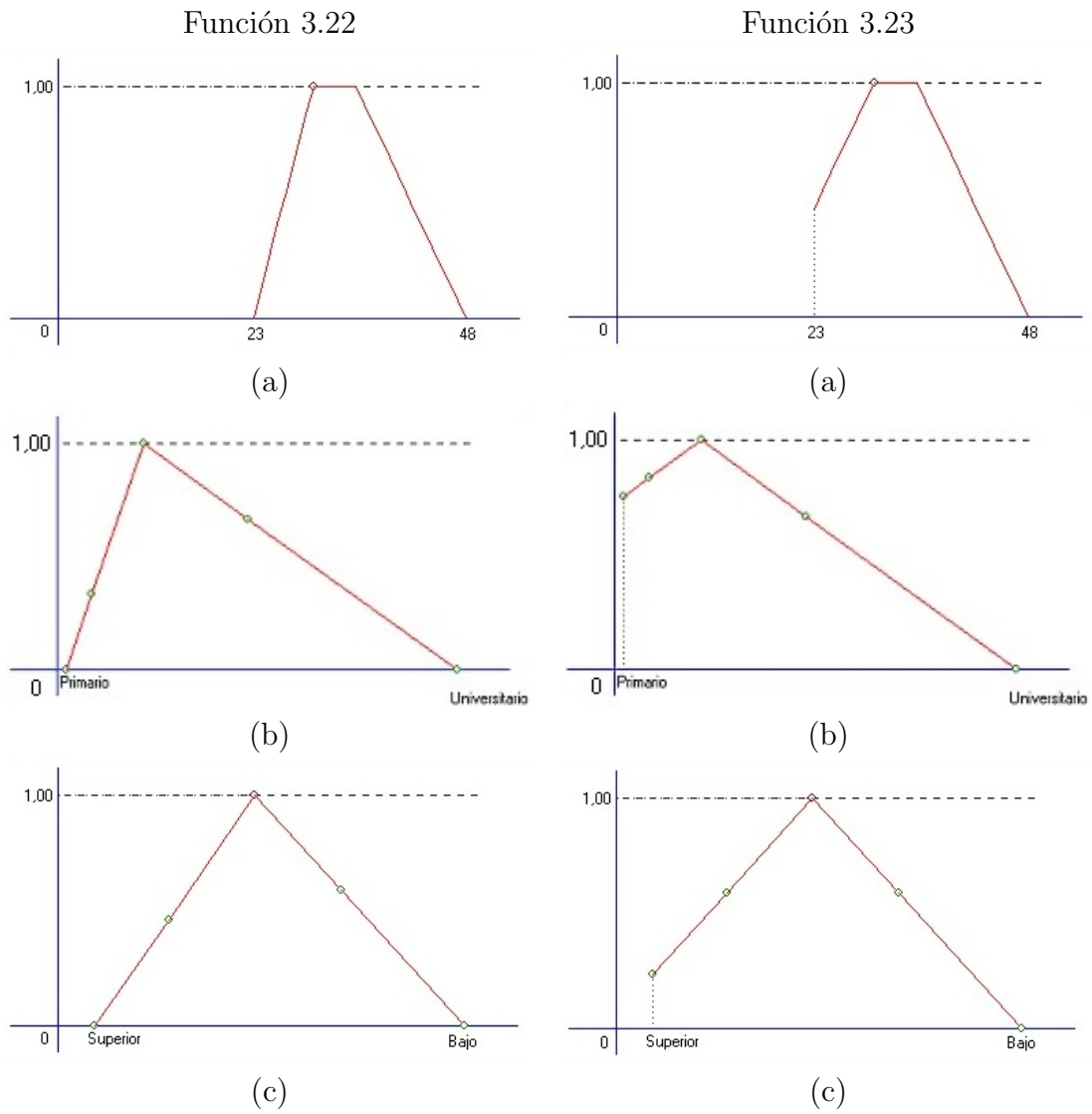


Figura 5.11: Funciones para los criterios *Edad*(a), *Nivel de Escolaridad*(b) y *Coficiente de Inteli-gencia*(c).

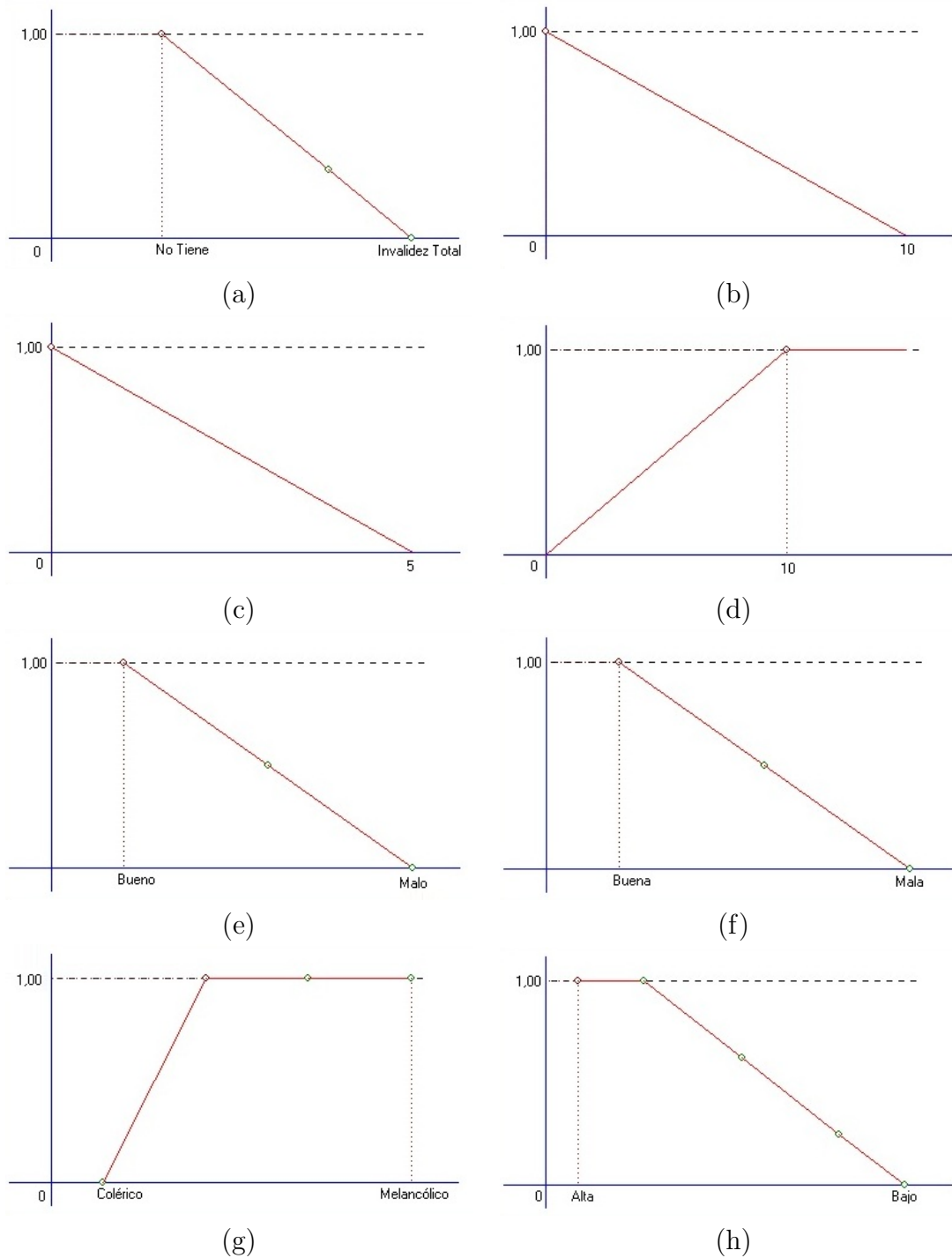


Figura 5.12: Funciones para los criterios *Limitaciones Físicas*(a), *Cantidad de Multas o Sanciones*(b), *Cantidad de Accidentes*(c), *Años de Experiencia*(d), *Conocimientos Elementales de Mecánica*(e), *Habilidades para Conducir*(f), *Temperamento*(g) y *Estabilidad Emocional*(h).

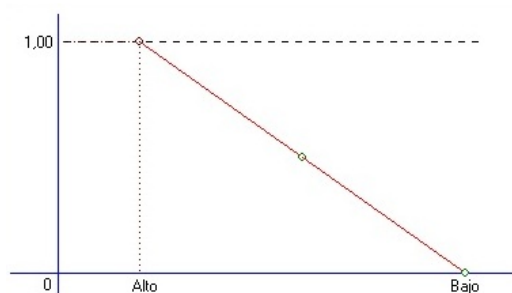


Figura 5.13: Función para el criterio *Coeficiente de Atención*.

Después de concluida la etapa anterior, se tienen las condiciones creadas para realizar la fase de Ejecución de la Selección. En este momento se identifican los candidatos reclutados que optan por una plaza determinada y se registran los datos correspondientes. Dando continuidad al ejemplo tratado se obtiene la información correspondiente a 5 candidatos (ver tabla 5.10).

Tabla 5.10: Datos de los 5 candidatos, que constituyen la matriz observada.

Criterios	Candidatos				
	A	B	C	D	E
C1	30	40	25	27	45
C2	Téc. Medio	Secund.	Med. Sup	Med. Sup	Téc. Medio
C3	No Tiene	Invalidez Parcial	No Tiene	No Tiene	No Tiene
C4	2	1	3	5	2
C5	0	0	0	0	0
C6	0	9	0	0	15
C7	Normal	Normal Alto	Superior	Normal	Normal
C8	Melancólico	Colérico	Colérico	Sanguíneo	Flemático
C9	Normal Bajo	Normal Bajo	Normal Bajo	Bajo	Normal Alto
C10	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
C11	Bueno	Bueno	Malo	Bueno	Regular
C12	Buena	Buena	Regular	Regular	Buena

Paso.2: Normalización de la matriz observada.

La normalización de la matriz observada (información de la tabla 5.10) es obtenida por la aplicación de las funciones 3.22 y 3.23, según lo definido en el primer paso.

Por ejemplo, calculemos los valores normalizado para el candidato *B* en los criterios *Edad* (*C1*) y *Nivel de Escolaridad* (*C2*), donde se tiene registrado 40 años y nivel Secundario, respectivamente. Además, se consideró utilizar la función de pertenencia 3.23, resultando los cálculos siguientes:

■ Criterio *Edad (C1)*.

Los parámetros a utilizar en el cálculo son, dominio de trabajo $[A, B] = [23, 48]$, valores de mayor significación $[C, D] = [30, 35]$, y el valor de $x = 40$.

El valor de x no pertenece a los valores de mayor significación, por tanto se aplica la segunda rama de la función de pertenencia 3.23 y se obtiene el valor normalizado (5.51).

$$\begin{aligned}
 d_{\min}(40, [30, 35]) &= \min(|40 - 30|, |40 - 35|) = \min(10, 5) = 5 \\
 f_2(40, [23, 48], [30, 35]) &= 1 - \frac{d_{\min}(40, [30, 35])}{\max(|23 - 30|, |48 - 35|)} \\
 &= 1 - \frac{5}{\max(|-7|, |13|)} = 1 - \frac{5}{13} = 1 - 0.384615 \\
 &= 0.615384 \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

■ Criterio *Nivel de Escolaridad (C2)*.

Los parámetros a utilizar son, dominio de trabajo $S = \{ \text{Primario, Secundario, Medio Superior, Téc. Medio, Universitario} \}$, valor de mayor significación $S_S = \{ \text{Secundario} \}$, y el nivel de escolaridad es . Luego, los números difusos asociados a este criterio (ver tabla 5.9), se utilizan como parámetros de la función de pertenencia 3.23, donde el dominio de trabajo es $[A, B] = [0, 1]$, el valor de mayor significación $[C, D] = \{0.2\}$, y el valor de $x = 0.067$.

En este caso el valor de x no es la mayor significación, por tanto se utiliza la segunda rama de la función pertenencia 3.23 y se obtiene el valor normalizado(5.52).

$$\begin{aligned}
 d_{\min}(0.067, \{0.2\}) &= |0.067 - 0.2| = 0.133 \\
 f_2(0.067, \{0.2\}, [0, 1]) &= 1 - \frac{d_{\min}(0.067, \{0.2\})}{\max(|0 - 0.2|, |1 - 0.2|)} \\
 &= 1 - \frac{0.133}{\max(|-0.2|, |0.8|)} = 1 - \frac{0.133}{0.8} \\
 &= 1 - 0.16625 = 0.83375 \tag{5.52}
 \end{aligned}$$

De forma análoga se procede con todos los datos de la tabla 5.10, para obtener la matriz normalizada 5.53, donde las filas representan los candidatos y las columnas los criterios.

Observada normalizada

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 1 & 0.8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0.2 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.615 & 0.83 & 0.33 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.636 & 0 & 0.2 & 1 & 1 & 1 \\ 0.615 & 1 & 1 & 0.7 & 1 & 0 & 0.36 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.769 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.231 & 0.67 & 1 & 0.8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

Paso.3: Matriz normalizada ponderada.

La matriz normalizada ponderada 5.54, se calcula a través de la expresión 3.25.

$$Y = \begin{pmatrix} 0.143 & 0.063 & 0.048 & 0.114 & 0.095 & 0 & 0.095 & 0.071 & 0.009 & 0.012 & 0.127 & 0.063 \\ 0.088 & 0.079 & 0.016 & 0.129 & 0.095 & 0.043 & 0.06 & 0 & 0.009 & 0.024 & 0.127 & 0.063 \\ 0.088 & 0.095 & 0.048 & 0.099 & 0.095 & 0 & 0.035 & 0 & 0.009 & 0 & 0 & 0.032 \\ 0.109 & 0.095 & 0.048 & 0.071 & 0.095 & 0 & 0.095 & 0.071 & 0 & 0.012 & 0.127 & 0.032 \\ 0.033 & 0.063 & 0.048 & 0.114 & 0.095 & 0.048 & 0.095 & 0.071 & 0.048 & 0.024 & 0.063 & 0.063 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Pasos. 4 y 5: Variación a la solución ideal, a la no ideal y el índice relativo.

El cálculo de la variación a la solución ideal, a la no ideal y el índice relativo para cada candidato, se realizan mediante las expresiones 3.26, 3.27 y 3.28, respectivamente, y se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.11.

Tabla 5.11: Variación a la solución ideal ($I+$), a la no ideal ($I-$) y el índice relativo a la solución ideal (R_i) de cada alternativa.

Candidatos	$I+$	$I-$	R_i
A	0.0753915	0.2888078	0.7929939
B	0.1107237	0.2573032	0.6991424
C	0.1872236	0.2010769	0.5178383
D	0.1089687	0.2627439	0.7068469
E	0.1339330	0.2384360	0.6403218

Pasos.6: Vector de exclusión.

Se ha establecido exclusión para el criterio **C3**, a partir del valor $\{Invalidez\}$ Parcial, que está asociado con $\alpha_3 = 0.333$. Para efectuar el cálculo correspondiente se utiliza la expresión 3.29. Luego, resulta la matriz Z (5.55) y el vector de exclusión (5.56).

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

$$Ex = (1, 0, 1, 1, 1) \quad (5.56)$$

Pasos.7: Índice relativo con exclusión de alternativas.

Al realizar el cálculo del índice relativo con exclusión de alternativas a través de la expresión 3.30, se obtiene 5.57.

$$R_i^* = R_i \times Ex_i = (0.7929939, 0, 0.5178383, 0.7068469, 0.6403218) \quad (5.57)$$

Pasos.8: Ordenamiento de las alternativas.

Finalmente, las alternativas se ordenan de forma descendente respecto al índice relativo R_i^* , resultando el orden siguiente: A, D, E, C y B.

Con la finalidad de tener un referente de comparación, se agrega la información del problema analizado a través del método TOPSIS, el que se desarrolla a continuación.

5.5. Procesamiento con el método TOPSIS.**Paso.1: Normalización de la matriz observada**

A partir del ejemplo descrito anteriormente, se tiene la matriz observada 5.58, luego el proceso de normalización de la misma se realiza a través de la expresión 3.12, resultando la matriz r_{ij} 5.59.

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 0.467 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0.389 & 1 & 0.833 & 0.5 & 0 & 0 \\ 40 & 0.067 & 0.67 & 1 & 0 & 9 & 0.167 & 0 & 0.833 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0.2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.833 & 1 & 1 & 0.5 \\ 27 & 0.2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0.389 & 0.3 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 45 & 0.467 & 0 & 2 & 0 & 15 & 0.389 & 0.67 & 0.167 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.391 & 0.647 & 0 & 0.305 & 0 & 0 & 0.56 & 0.802 & 0.472 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0.522 & 0.092 & 1 & 0.152 & 0 & 0.514 & 0.24 & 0 & 0.472 & 0 & 0 & 0 \\ 0.326 & 0.277 & 0 & 0.457 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.472 & 0.816 & 0.894 & 0.707 \\ 0.352 & 0.277 & 0 & 0.762 & 0 & 0 & 0.56 & 0.267 & 0.567 & 0.408 & 0 & 0.707 \\ 0.587 & 0.647 & 0 & 0.305 & 0 & 0.857 & 0.56 & 0.535 & 0.094 & 0 & 0.447 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

Paso.2: Matriz normalizada ponderada.

Para la obtención de la misma se utiliza la expresión 3.13 y los pesos calculados en la tabla

5.7, resultando la matriz 5.60.

$$R' = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.062 & 0 & 0.044 & 0 & 0 & 0.053 & 0.057 & 0.022 & 0.009 & 0 & 0 \\ 0.075 & 0.009 & 0.048 & 0.022 & 0 & 0.024 & 0.023 & 0 & 0.022 & 0 & 0 & 0 \\ 0.047 & 0.026 & 0 & 0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.022 & 0.019 & 0.114 & 0.045 \\ 0.05 & 0.026 & 0 & 0.109 & 0 & 0 & 0.053 & 0.019 & 0.027 & 0.009 & 0 & 0.045 \\ 0.084 & 0.062 & 0 & 0.044 & 0 & 0.041 & 0.053 & 0.038 & 0.004 & 0 & 0.057 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Paso.3: Solución ideal positiva y negativa.

La solución ideal positiva y negativa se obtiene mediante las expresiones 3.14 y 3.15, respectivamente. Sus resultados se muestran en la tabla 5.12.

Tabla 5.12: Solución ideal positiva $A+$ y negativa $A-$ (método TOPSIS).

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
	Min	Max	Min	Min	Min	Max	Min	Max	Min	Min	Min	Min
$A+$	0.047	0.062	0	0.022	0	0.041	0	0.057	0.004	0	0	0
	Max	Min	Max	Max	Max	Min	Max	Min	Max	Max	Max	Max
$A-$	0.084	0.009	0.048	0.109	0	0	0.053	0	0.027	0.019	0.114	0.045

Pasos.4 y 5: Separación a la solución ideal positiva, a la negativa y el índice relativo.

La medida de la separación a la solución ideal positiva, a la negativa y el índice relativo a la solución ideal de cada alternativa, se realiza a través de las expresiones 3.26, 3.27 y 3.18, respectivamente; y se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.13.

Tabla 5.13: Variación a la solución ideal positiva ($I+$), a la negativa ($I-$) y el índice relativo a la solución ideal (R_i) de cada alternativa a través del método TOPSIS.

Candidatos	$I+$	$I-$	R_i
A	0.0741364	0.1685842	0.6945609
B	0.1011514	0.1566081	0.6075747
C	0.1539602	0.0934584	0.3777338
D	0.1320504	0.1306253	0.4972873
E	0.0911193	0.1363001	0.5993338

Pasos.6: Ordenamiento de las alternativas.

A partir del índice relativo R_i se ordena de forma descendente a los candidatos, resultando: A, B, E, D y C.

Los resultados obtenidos con ambos métodos diferentes, expresado en la posición de las alternativas B, C, D y E; lo cual es una consecuencia de la exclusión de alternativas y de la forma de tratar la solución ideal positiva y negativa.

Como se puede apreciar, el método propuesto tiene similitud con el método TOPSIS, ya que realiza pasos equivalentes, diferenciándose en la forma de normalización de la información, en la definición de ideal positivo y negativo de forma variable, así como de la exclusión de alternativas a partir de un valor dado.

5.6. Conclusiones.

En el capítulo se realiza un estudio de los métodos fundamentales para el proceso de Selección de Personal, donde se ha constatado el uso sistemático de los métodos de análisis multicriterio para realizar la agregación de información, así como también el uso de la lógica difusa y la identificación de la solución ideal y la no ideal.

Teniendo como referente los aspectos antes mencionados, se propuso estructurar el proceso de Selección de Personal, tal que utilice los principios establecidos para el método de análisis multicriterio propuesto en el epígrafe 3.6. De esta forma, la nueva concepción permite:

- La selección de un candidato, tal que, el ideal de los criterios utilizados, pueda ser un valor definido de forma dinámica que se encuentre entre el mejor y peor valor.
- La exclusión de los candidatos a partir de un valor dado en alguno de los criterios.
- La utilización de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios.

Capítulo 6

Software para la Selección de Personal

6.1. Introducción.

Como se ha expuesto en el epígrafe anterior, el proceso de Selección de Personal está estructurado en un conjunto de fases con sus respectivas tareas, lo cual hace que sea un proceso complejo e implique la utilización de una gran cantidad de tiempo, pudiendo incidir en la calidad de dicho proceso. Por otra parte, los medios de cómputo han contribuido de forma positiva a la automatización de diversas tareas y para de esta forma reducir el tiempo de procesamiento de la información, lo cual se ha manifestado en el proceso antes referido.

Particularmente, en los últimos años se ha desarrollado un conjunto de software con la finalidad de contribuir a la mejora del proceso de Selección de Personal. Estos software fundamentalmente inciden en la etapa de procesamiento y evaluación de los candidatos, automatizando esta tarea, y reduciéndola a un tiempo muy pequeño.

En este caso, se realizará una valoración de algunos de los software existentes en el mercado que están dirigidos a la Selección de Personal, entre los que se pueden citar los descritos a continuación.

6.2. Software utilizados en la Selección de Personal.

- **Sistema de apoyo a la decisión (DSS)**

En la bibliografía estudiada se registran varias propuestas de software para la Selección de Personal, estableciendo nuevos enfoques en dicho proceso, entre los mismos se puede citar el referido en el artículo "Sistema de apoyo a la decisión para el diagnóstico de conflictos en la selección de personal"[84].

El software propuesto por los autores antes referidos, está dirigido a evaluar características de la personalidad para el trabajo en grupo, ayudando a detectar conflictos potenciales entre sus miembros.

El sistema de forma general, está organizado por un grupo de componentes sobre la base de un determinado flujo de información, el cual se muestra en la fig. 6.1.

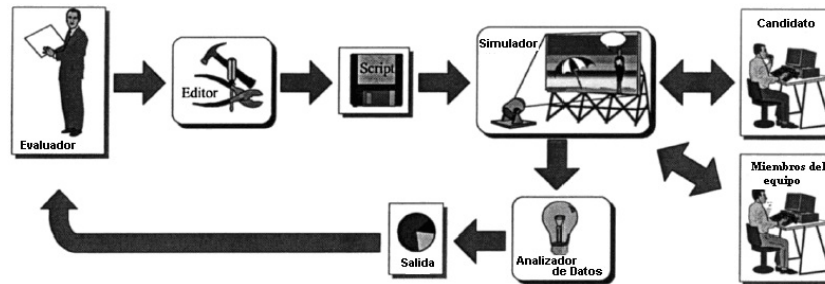


Figura 6.1: Esquema del flujo de información.

La concepción asumida, es que el evaluador a través de una aplicación (editor) crea un script que define un árbol de decisiones (fig. 6.2). Cada nodo del árbol se corresponde con una escena que representa el trabajo en equipo, mostrando fotos o imágenes a un número de participantes, incluido los candidatos, donde se intercambia opiniones sobre el tema que se representa en la situación. Se utilizan dos tipos de escenas, que son clasificadas en Escenas de Decisión y Escenas de Continuación.

En las Escenas de Decisión, se muestra al candidato un número de opciones y él debe seleccionar la que mejor representa su reacción. En el caso de las Escenas de Continuación, solo hay una opción y el objetivo es crear un contexto de una secuencia realista de un evento.

Después de concluidas las sesiones de trabajo con el simulador, por parte del candidato y los miembros del equipo de trabajo, el analizador de datos genera los resultados y el evaluador lo utiliza como criterios para decidir la inclusión del candidato en el equipo de trabajo.

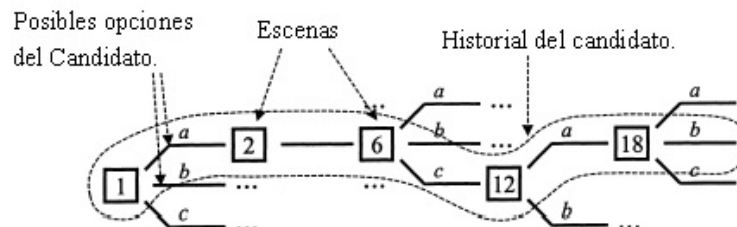


Figura 6.2: Estructura del árbol de decisión generado.

■ Sistema GREHU

El GREHU es un software desarrollado por el Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría de Ciudad Habana (CUJAE), el cual está estructurado como un conjunto de módulos independientes para el control de los Recursos Humanos, incorporando un subsistema de selección y contratación del personal.

Para poder seleccionar de entre un grupo de personas, quién o quiénes reúnen las condiciones para ocupar un determinado puesto de trabajo, el sistema asume partir de la especificación de un conjunto de requisitos predefinidos, por ejemplo: Edad, Sexo, Provincia, Municipio, Escolaridad, Profesión, entre otras y tanto para personal interno como externo asociados a la bolsa de empleo.

El usuario, después de tener registrada la información antes referida y de especificar las características a utilizar en la búsqueda, obtiene del sistema un listado de las personas que cumplen el patrón de búsqueda definido. También le permite describir los puestos de trabajo y especificarlo como elemento de búsqueda [28].

■ Software SELSOFT

El software SELSOFT fue desarrollado por la actual empresa Desoft.SA. La concepción asumida en este software es integrar el proceso en tres etapas fundamentales:

1. Análisis y control documental (Hoja de Vida, Datos generales y otros antecedentes).
2. Evaluación psicológica del Candidato, a partir de Resultados de los Test Psicométricos.
3. Evaluación de la Aptitud y Eficiencia Real del individuo para el puesto al cual aspira.

Está concebido para cubrir satisfactoriamente las etapas uno y dos, mediante un riguroso almacenamiento de información, brindando de forma rápida y eficiente los resultados e informes que se requieren para una depuración inicial de los candidatos, posteriormente, sentar las bases para hacer menos engorrosa la tercera etapa del proceso de Selección de Personal.

Una de las grandes potencialidades de este software es que facilita el proceso de aplicación y calificación de un total de 14 pruebas psicológicas, clasificadas en Test de Inteligencia, Test de Habilidades, Test de Personalidad y Test de Aptitudes. A través del mismo se puede obtener interpretación numérica, gráfica o textual, según el interés del usuario.

También, el usuario del sistema puede definir el perfil del puesto y vincularlo a los datos generales, así como a los resultados de pruebas psicológicas, para realizar procesos de selección [27].

■ Herramienta DEXi

La herramienta DEXi [56], [57], es un software desarrollado por el Instituto Jozef Stefan y la Facultad de Ciencias Organizacionales de la Universidad de Maribor. La misma utiliza un modelo de decisión que se basa en atributos organizados en una estructura en forma de árbol, donde las hojas son las opciones que describen los valores, los nodos superiores se denominan atributos de agregación y la raíz del árbol representa el resultado final de la evaluación. Los atributos tienen valores discretos y palabras ordinales que pueden ser utilizados para definirlos.

Los atributos de agregación (los nodos que no son hoja del árbol) tienen asociado funciones de utilidad, donde cada fila de la tabla de función de utilidad pueden leerse como una expresión lógica simple. Al principio las tablas son generadas de forma lineal y están basadas en los pesos de los atributos. Las funciones de utilidad pueden verificarse y cambiarse a través de las tablas de funciones como expresiones lógicas.

La utilización del software se apoya en una metodología que está formada por 8 fases y se representa a continuación [57].

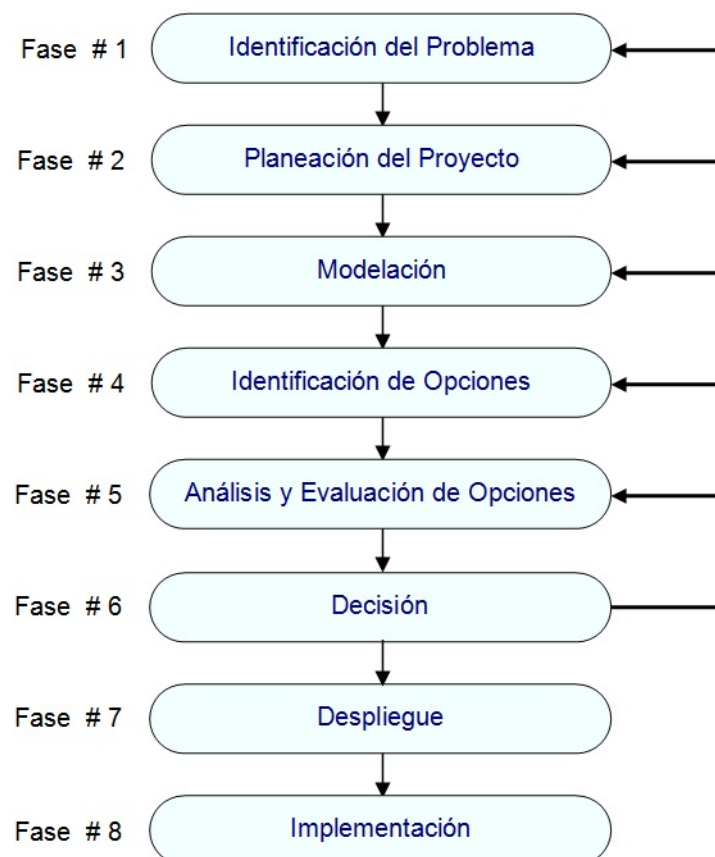


Figura 6.3: Estructura de la metodología.

Descripción de las fases● Identificación del problema:

Es la fase inicial de la metodología, su complejidad radica en saber identificar las características básicas del problema para orientar la búsqueda de la solución. Entre los aspectos a tener presente se pueden referir los siguientes:

- Analizar las diferentes opciones o alternativas (Candidatos).
- Descomponer el problema en sub-problemas menos complejos.
- Valorar y ordenar los diferentes candidatos en orden de preferencia.
- Las características básicas de los candidatos se pueden representar de forma gráfica.

● Planeación del Proyecto:

Es la fase donde se realiza la planeación del proyecto, identificando las acciones a realizar, recursos a emplear, determinando los miembros del equipo de proyecto. Se deciden los diferentes individuos o grupos de colaboradores, así como la metodología a seleccionar.

● Modelación:

A través de un modelo multi-criterio se orienta la solución del problema, organizándolo en una estructura en forma de árbol, por lo que se deben definir:

- Los atributos a utilizar.
- La estructura de los atributos, identificando la jerarquía entre los mismos.
- La escala de medida de cada atributo en nominal, ordinal o continuo.
- Las funciones de utilidad, las cuales establecen la operatoria entre los diferentes atributos, según su jerarquía.

En esta fase, la herramienta DEXi juega un papel importante para registrar la información modelada y brindar la representación gráfica en correspondencia con los atributos definidos.

● Identificación de Opciones:

Se identifican los mejores candidatos que pueden ser escogidos y se registran sus respectivas descripciones. Es importante destacar que la herramienta DEXi no requiere de forma obligatoria registrar toda la información de los atributos, en este caso los asume como carencia de valores.

● Análisis y Evaluación de Opciones:

Se realiza la evaluación y análisis de los candidatos, generalmente de forma iterativa; también puede ser simultánea o de manera combinada. La evaluación de

cada candidato se obtiene a partir del cálculo a través de las respectivas funciones de utilidad, desde las hojas hasta la raíz del árbol definido. Estos resultados son obtenidos en una ventana de la herramienta (ver Fig.6.4).

En el análisis de los candidatos se valoran los resultados obtenidos y se determina si es necesario modificar algunos de los valores asignados a los atributos de los candidatos, o se requiere la modificación de alguna función de utilidad. En este momento se preparan las condiciones para la próxima fase.

Option	A	B	C	D	E
Manger's adequacy evaluation	excellent	good	good	excellent	less approp
Work	very good	very good	very good	very good	very good
Know-how	very good	very good	very good	very good	very good
Education	good	good	good	good	good
Field	good	good	good	good	approp
Deegre	good	good	good	good	good
Languages	approp	approp	good	approp	good
Skills	good	good	good	good	good
Relational skills	good	good	good	good	good
Interpersonal	good	approp	good	good	good
Communication	good	good	good	good	approp
Working skills	good	good	good	good	good
Technical	approp	good	good	good	approp
Organisation	good	approp	good	good	good
Decision making	good	good	approp	good	approp
Efficiency	good	good	good	very good	very good
Performance	good	good	good	good	good
Quality	approp	approp	approp	approp	good
In time	good	good	good	good	approp
Aims	good	good	good	good	good
Creditivity	approp	approp	approp	good	good

Attributes: 44 (28 basic, 16 complex) | Scales: 44 | Functions: 16 | Options: 5

Figura 6.4: Ventana de resultados de la herramienta DEXi.

- Decisión:
Sobre la base de la información obtenida en la fase anterior, se realiza la propuesta del o los candidatos seleccionados para un determinado puesto de trabajo o para cumplir una tarea dada.
- Despliegue e Implementación:
En la fase de despliegue, se documentan los diferentes aspectos utilizados para tomar la decisión y se comunica a las instancias correspondientes (directivos que no participaron de forma directa en el proceso de selección). En la implementación se realiza la materialización práctica de la decisión tomada.

■ Software RH-CITMA

El software RH-CITMA versión 1.0, es un sistema formado por varios módulos interrelacionados que dan tratamiento a un grupo de actividades de Recursos Humanos, y dentro de ellos, se encuentra un módulo para la Selección de Personal que permite registrar la información básica de los diferentes procesos de Selección de Personal efectuados en las entidades, lo que hace posible obtener la propuesta de candidatos [35].

Todos estos software valorados, reúnen indistintamente un conjunto de diferentes potencialidades que facilitan y ayudan al proceso de Selección de Personal; sin embargo, la concepción que poseen en cierta medida limitan el nivel de precisión de los candidatos propuestos para ocupar un puesto de trabajo o realizar una actividad dada.

Ventajas.

- Definición dinámica de criterios a evaluar en los candidatos (DEXi) y (DSS).
- Permite determinar una evaluación final para cada candidato (DEXi) y (DSS), lo cual ayuda a la decisión en el proceso de selección.
- Permite aplicar y procesar los resultados de una gran variedad de test psicológicos (Selsoft).

Desventajas.

- No permiten obtener quiénes son los candidatos que más se acercan al perfil deseado de forma ordenada, (excepto DEXi).
- No determina una evaluación final de los candidatos a partir de criterios definidos, (excepto DEXi y DSS).
- Todos los criterios utilizados para evaluar a los candidatos tienen el mismo nivel de significación.
- Utilizan de forma estricta los principios de la lógica booleana para obtener los resultados, (excepto DEXi y DSS).
- Los criterios utilizados para evaluar a los candidatos son, de forma general, estáticos en correspondencia con las características del software, (excepto DEXi y DSS).
- No utilizan métodos de análisis multicriterio, tal que se defina el ideal de búsqueda de los criterios de forma variable, tal que admita valores desde el valor máximo hasta el mínimo.

6.3. Propuesta de Software para la Selección de Personal (*SelPersonal*).

A partir de los software analizados anteriormente, así como de las consideraciones referidas en el epígrafe 5.3, sobre como estructurar el proceso de Selección de Personal y el método de análisis multicriterio expuesto en el epígrafe 3.6, para realizar el procesamiento de la información correspondiente, se propone el software *SelPersonal*, con las características generales siguientes:

- Definición del modelo de selección de personal de forma dinámica a través de una estructura jerárquica de los respectivos criterios.
- Utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios 4.45, 4.3.6 , 4.5, 4.6.
- Utilización de un método de análisis multicriterio, tal que el valor ideal de los criterios, se defina dinámicamente por un conjunto de valores que se encuentre entre el máximo y el mínimo 3.6.
- Procesamiento de la información a través del método propuesto 3.6 y del método TOP-SIS, para facilitar la interpretación de resultados.
- Control de la exclusión de las alternativas a partir de un valor dado.
- Agregar la información mediante datos Discretos, Continuos y Ordinales.

Las diferentes características planteadas se han analizado en epígrafes anteriores, sin embargo para el desarrollo del software se requiere de la formalización a seguir en el trabajo con variables de tipo ordinal, aspecto que se describe a continuación.

Tratamiento de las Variables ordinales.

Una variable ordinal puede evaluarse en un conjunto de etiquetas lingüísticas, manifestándose un orden entre las mismas, en correspondencia con la característica que se estudia.

Para el trabajo con variables ordinales que su dominio son etiquetas lingüísticas, primero es necesario transformar el conjunto de etiquetas lingüísticas a su correspondiente valor métrico. Para ello, se asignará un número difuso a cada etiqueta lingüística.

El proceso de asignación del número difuso a cada etiqueta lingüística se puede realizar tal que:

- Los número difusos son definido utilizando algunos de los modelos planteados en el epígrafe 2.6.
- Los números difusos son definidos por los propios expertos.

No obstante, en la propuesta de software, se asume la concepción de asignar un valor numérico a cada etiqueta que recibe el nombre de densidad y a partir de éste se calcula su correspondiente número difuso.

Definición 6.3.1. *La densidad de una etiqueta lingüística es la magnitud con que se refleja numéricamente una característica dada, perteneciente a un universo de discurso.*

Ejemplo 6.3.1. *Sea la variable de estudio Edad, que permite clasificar a una persona en las categorías siguientes: Niño, Adolescente, Adulto, según los rangos de la tabla 6.1.*

Tabla 6.1: Rangos y categorías de la variable "Edad".

Rangos	Categorías
0 - 11	Niño
11- 17	Adolescente
Más de 17	Adulto

Si en esta tabla se registra la cantidad de años de cada categoría, entonces se puede asignar la magnitud asociada a cada categoría lingüística, que en este caso recibe el nombre de densidad (ver tabla 6.2). El valor de la densidad no tiene una regla en particular, ya que depende del contexto de trabajo y del enfoque que se desee dar.

Tabla 6.2: Categorías de la variable "Edad" y sus respectivas densidades.

Categorías	Densidad
Niño	11
Adolescente	6
Adulto	103
(si máxima edad es 120)	

Para calcular los números difusos asociados a las etiquetas de un conjunto se utilizará la definición siguiente.

Definición 6.3.2. Sea el conjunto ordenado de etiquetas lingüísticas $S = \{l_0, l_1, \dots, l_g\}$ que se relaciona de forma directa con el conjunto de densidades $D = \{d_0, d_1, \dots, d_g\}$, tal que $d_k \in \mathfrak{R}$ y $d_k > 0$, entonces se obtiene un número difuso triangular a través de la función:

$$\begin{aligned} \varphi : S \oplus D &\longrightarrow [0, 1] \oplus [0, 1] \oplus [0, 1] \\ \varphi(l_k, D) &= (a_k, b_k, c_k) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Donde,

$$\begin{aligned} a_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ b_k - \frac{d_k}{\sum_{i=0}^{g-1} \text{máx}(d_i, d_{i+1})} & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \\ b_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{\sum_{i=0}^{g-1} \text{máx}(d_i, d_{i+1})} \sum_{i=0}^k \text{máx}(d_i, d_{i+1}) & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \\ c_k &= \begin{cases} b_k + \frac{d_k}{\sum_{i=0}^{g-1} \text{máx}(d_i, d_{i+1})} & \text{si } k \neq g \\ 1 & \text{si } k = g \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.2. Sea la variable ordinal Calidad de la tarea, tal que, el conjunto de etiquetas lingüísticas que tiene como dominio es $S = \{\text{Mal}, \text{Regular}, \text{Bien}, \text{MuyBien}, \text{Excelente}\}$ y el conjunto de densidad $D = \{10, 20, 30, 10, 5\}$. Al calcular los respectivos números difusos a través de la definición 6.3.2, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 6.3 (ver fig. 6.5).

Tabla 6.3: Etiquetas de la variable “Calidad de la tarea” y sus respectivos números difusos.

Etiquetas	Densidad	Número difuso
Mal	10	(0,0,0.11)
Regular	20	(0 , 0.22, 0.44)
Bien	30	(0.22 , 0.56 , 0.89)
Muy Bien	10	(0.78 , 0.89, 1)
Excelente	5	(0.94 ,1 ,1)

Finalmente los valores b_k son los utilizados en el proceso de agregación de información implementado en el software.

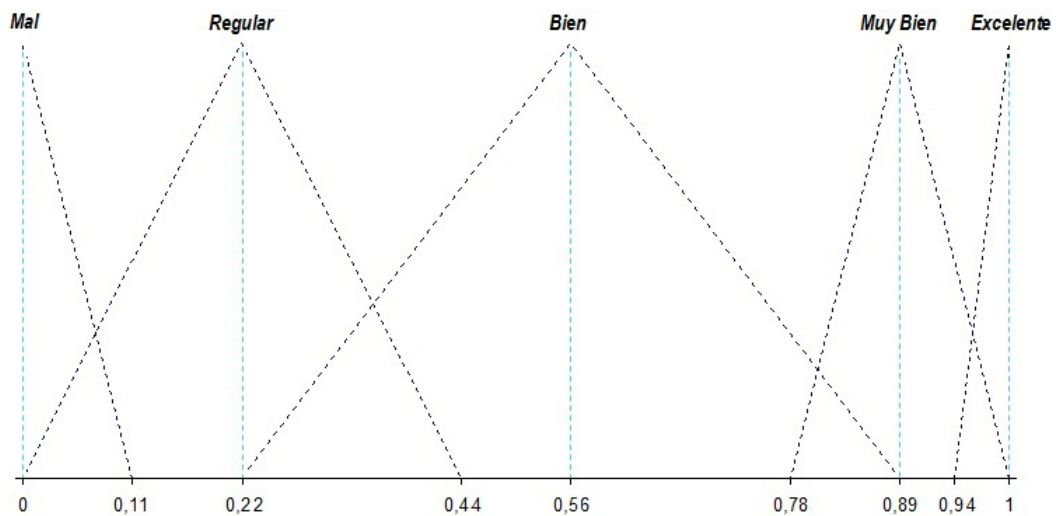


Figura 6.5: Representación de las etiquetas.

6.3.1. Especificaciones del software.

Para dar cumplimiento a las características generales propuestas para este software, se identificaron un conjunto de requerimientos, que se describen a continuación:

Requerimientos Funcionales.

1. Asociados a los dominios de datos.
 - a) *Gestionar Dominios*: Gestiona los procesos de inserción, actualización y borrado de los dominios de datos a utilizar en los modelos de selección.
 - b) *Mostrar Dominios*: Recupera y muestra los dominios definidos de la base de datos.
 - c) *Verificar integridad del Dominio*: Verifica que el dominio seleccionado se corresponda con el tipo definido.
 - d) *Definir Intervalo Discreto*: Gestiona los intervalos de trabajo de tipo discreto.
 - e) *Definir Intervalo Continuo*: Gestiona los intervalos de trabajo de tipo continuo.
 - f) *Definir Intervalo Ordinal*: Gestiona los intervalos de trabajo de tipo ordinal.
 - g) *Gestionar Etiquetas lingüísticas*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de las etiquetas lingüísticas.
2. Asociados a los Modelos de Selección.
 - a) *Gestionar Criterios*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los criterios asociados a los modelos de selección.

- b) *Mostrar Criterios hijos*: Recupera de la base de datos y muestra los criterios hijos de uno seleccionado.
- c) *Gestionar Modelos de Selección*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los modelos de selección de personal.
- d) *Mostrar Modelos de Selección*: Recupera de la base de datos y muestra los modelos de selección de personal.
- e) *Mostrar árbol de Modelos de Selección*: Recupera de la base de datos y muestra los modelos de selección de personal, en una estructura jerárquica con sus respectivos criterios.
- f) *Chequear integridad del Modelo de Selección*: Verifica que el modelo seleccionado está definido de forma correcta.
- g) *Ajustar peso y orden de los Criterios*: Gestiona el orden de los pesos, editando sus respectivos pesos, así como el cálculo de los pesos por diferentes métodos.

3. Referidos a los datos de los candidatos.

- a) *Gestionar datos generales de los candidatos*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los datos generales de los candidatos.
- b) *Gestionar modelos de selección asociado a los candidatos*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los modelos de selección asociado a los candidatos.
- c) *Generar formulario según modelo*: Generar de forma dinámica el formulario de captación de los datos específico de los candidatos en función de los criterios asociados al modelo de selección correspondiente.
- d) *Gestionar datos específicos de los candidatos*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los datos específico de los candidatos, según el modelo de selección asociado.
- e) *Mostrar datos específicos de los candidatos*: Recupera de la base de datos y muestra los datos específicos de los candidatos, en correspondencia con el modelo de selección asociado.

4. Para el procesamiento de la información.

- a) *Gestionar procesamiento de información de los Modelos de Selección*: Gestiona la inclusión, borrado y visualización de los procesamientos de información realizados
- b) *Realizar procesamiento de información*: Define los elementos básico de la información a procesar (Modelos, métodos y candidatos) y ejecuta el procesamiento de información.

- c) *Visualizar candidatos procesados*: Visualiza los resultados de los candidatos procesados de forma alfanumérica o gráfica, y los muestra de forma organizada.
- 5. *Gestionar política de usuarios*: Gestiona la inserción, actualización y borrado de los usuarios del software.

Requerimientos no Funcionales.

1. *El procesamiento de la información de los candidatos utilizará los métodos definidos en los epígrafe 3.6, 5.3.*
2. *Realizar el cálculo de los pesos asociado a los criterios a través de los métodos expuestos en los epígrafe 4.3.6, 4.5, 4.6, 4.45.*
3. *Exportar resultados del procesamiento.*
4. *Aplicación software de escritorio (DESKTOP).*
5. *Para el desarrollo del software se propuso el lenguaje de programación Java, con el entorno de desarrollo NetBean 6.5.1, además de los marcos de trabajo Hibernate para la persistencia de los datos [9] y Spring Framework 2.5 para la lógica de negocio [59], [113].*
6. *La interfaz gráfica de usuario utiliza la biblioteca Openswing.*
7. *El software realizará la persistencia de la información mediante un servidor de base de datos de Postgres SQL.*
8. *Restringir el acceso de los usuarios a las funcionalidades de acuerdo a los roles jugados por los actores del sistema.*
9. *Utilización de un estándar de codificación, convenciones de nombramiento, bibliotecas de clases, etc, para facilitar su posterior mantenimiento.*

Requerimientos de hardware y software para la utilización de SelPersonal.

Para la utilización del software (SelPersonal) se necesita como mínimo un ordenador con 512 MB de memoria RAM, se recomienda 1 GB, microprocesador a 1.6 GHz de velocidad o superior. Debe tener instalado: Java Virtual Machine 1.6, así como conectividad para acceder a la base de datos de Postgres SQL 8.2.6.

Actores del software.

Los usuarios que se definan para el trabajo con el sistema tendrán asociado el rol correspondiente a uno de tres actores propuestos (ver 6.4).

Tabla 6.4: Actores del software.

Actores	Descripción
Administrador	Define los usuarios que tienen acceso al software.
Supervisor	Tiene acceso a todas las opciones relacionadas con la definición de puestos de trabajo, modelos de selección, datos de los candidatos, procesamiento de información.
Estándar	Tiene acceso a todas las opciones referida a la capacitación de candidatos y procesamiento de información de los mismos. Es una generalización de todos los actores anteriores.

Arquitectura del software.

La arquitectura de clases del software adopta la siguiente estructura organizativa (ver fig. 6.6)

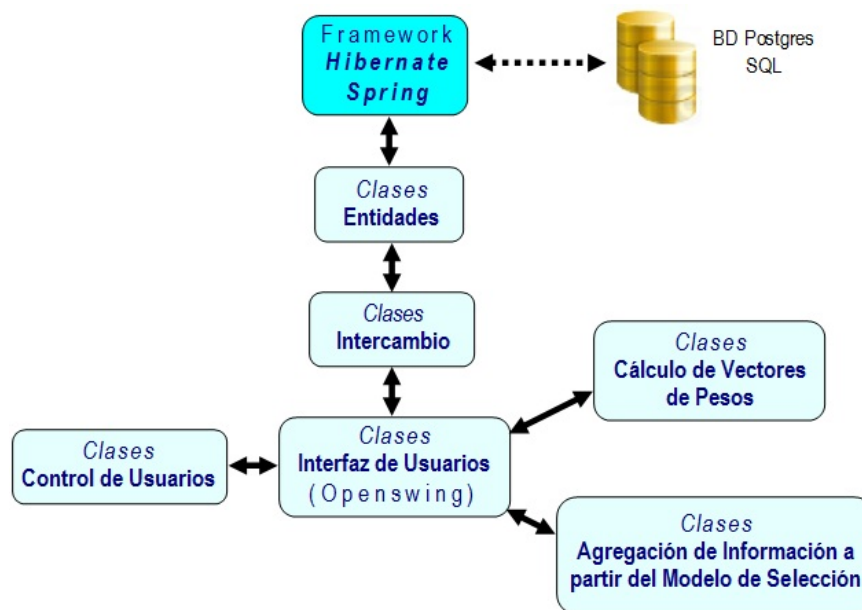


Figura 6.6: Esquema de la arquitectura de clases del software.

Donde:

Clases de Entidades: Contiene el diseño de clases en correspondencia con la base de datos.

Clases de Cálculo de Vectores de Pesos: Conformar las clases para realizar las operaciones referentes a los diferentes métodos (4.3.6, 4.5, 4.6, 4.45) para calcular los vectores de pesos.

Clases de Agregación de Información: Conforman las clases para realizar los procesos de agregación de información del método TOPSIS y el definido en 3.6, 5.3.

Clases de Interfaz de Usuario: Contiene las clases para el intercambio visual de información con los usuarios mediante el uso de la biblioteca de Openswing.

Clases de Control de Usuario: Contiene las operaciones para el control de los usuarios del software.

Clases de Intercambio: Realiza las operaciones de intercambio de datos entre las clases Entidades y las de interfaz de usuarios.

Finalmente, el proceso de persistencia de los datos se realiza mediante Hibernate.

Modelo de Datos.

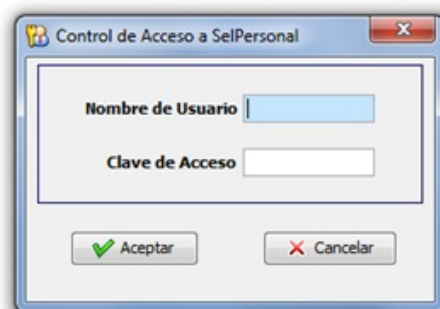
El modelo de datos que utiliza el software *SelPersonal*, está formado por una base de datos relacional, tal que, su esquema se descompone en 21 tablas para la persistencia de los datos (ver apéndice C).

6.3.2. Descripción para el trabajo con el software SelPersonal.

Al ejecutar el software *SelPersonal*, se muestra la ventana de identificación de la aplicación (ver fig. 6.7(a)) y a continuación se activa la ventana para el control de usuarios con acceso al sistema (ver fig. 6.7(b)).



(a)



(b)

Figura 6.7: Ventana Inicial (a), ventana de Control de Usuario (b).

Después de chequear que el usuario tiene acceso al sistema, abre la ventana principal (ver fig. 6.8), activándose las diferentes opciones del menú y de barra de herramientas, en correspondencia con el tipo de usuario que se registró.

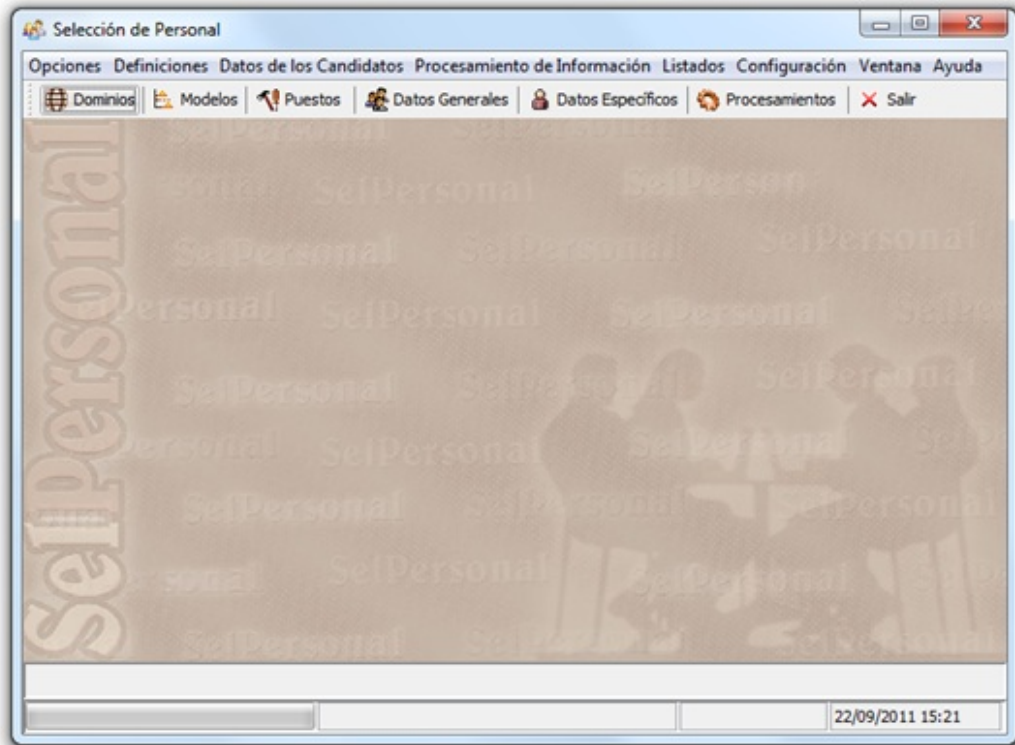


Figura 6.8: Ventana Principal del Software SelPersonal.

Esta ventana (ver fig. 6.8) posee una barra de herramienta que contiene accesos directos a las opciones principales del menú, está formado por: Opciones, Definiciones, Datos de los Candidatos, Procesamiento de Información, listado, configuración, Ventana y Ayuda, y estas agrupan las opciones siguientes:

Opciones: Contiene las operaciones de cambiar contraseña y salir del software (ver Fig. 6.9)

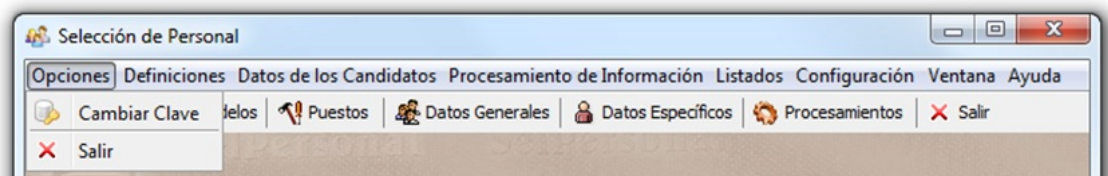


Figura 6.9: Ventana Principal con el submenú *Opciones* activado.

Definiciones: Contiene las opciones para la definición de los elementos básicos del proceso de selección (ver Fig. 6.10), tales como:

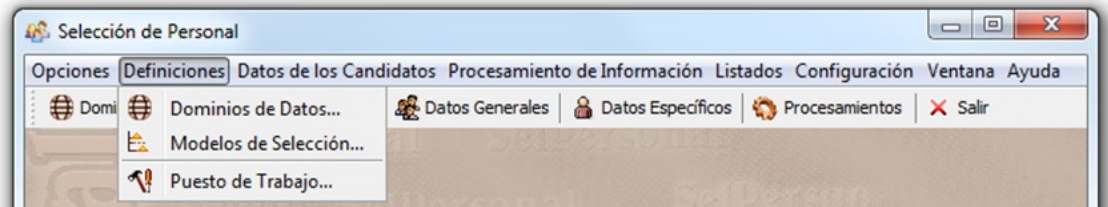


Figura 6.10: Ventana Principal con el submenú *Opciones* activado.








- *Dominios de Datos:* Permite acceder a la definición de los dominios a utilizar en la elaboración de los modelos para la selección del personal (ver fig. 6.11).

Descripción del Dominio	Tipo de Dominio	Dominio
Nivel de Escolaridad	Ordinal	...
Edad (23-48)	Discreto	...
Limitaciones Físicas	Ordinal	...
Tres Categ. (BRM)	Ordinal	...
No. de [0 - 5]	Discreto	...
No. de [0 - 10]	Discreto	...
No. de [0 - 15]	Discreto	...
Coficiente Intelectual	Ordinal	...
Temperamento	Ordinal	...
Coficiente de Atención	Ordinal	...
Estabilidad Emocional	Ordinal	...

Fila Seleccionada: 1 de 11

Figura 6.11: Ventana para la definición de los dominios de trabajo.

Como se observa en esta ventana (fig. 6.11), aparecen un grupo de botones, los cuales presentan una iconografía común para cualquier ventana del software, adaptando su correspondiente función con el objeto de trabajo de cada una de ellas. En este caso, la ventana tiene como objeto de trabajo los dominios, por tanto, las operaciones a realizar con los diferentes botones están asociadas a los dominios.

-  Añadir un nuevo objeto.
-  Modificar los objetos.
-  Eliminar el objeto seleccionado.
-  Refrescar el contenido de la ventana.
-  Exportar la información de los objetos de la ventana.
-  Guardar la información.
-  Salir de la ventana.

- *Modelos de Selección:* Activa la ventana que permite la definición de los Modelos de Decisión para la selección del personal (ver fig. 6.12). Esta ventana se divide en tres particiones, barra de herramientas, panel izquierdo y panel derecho.

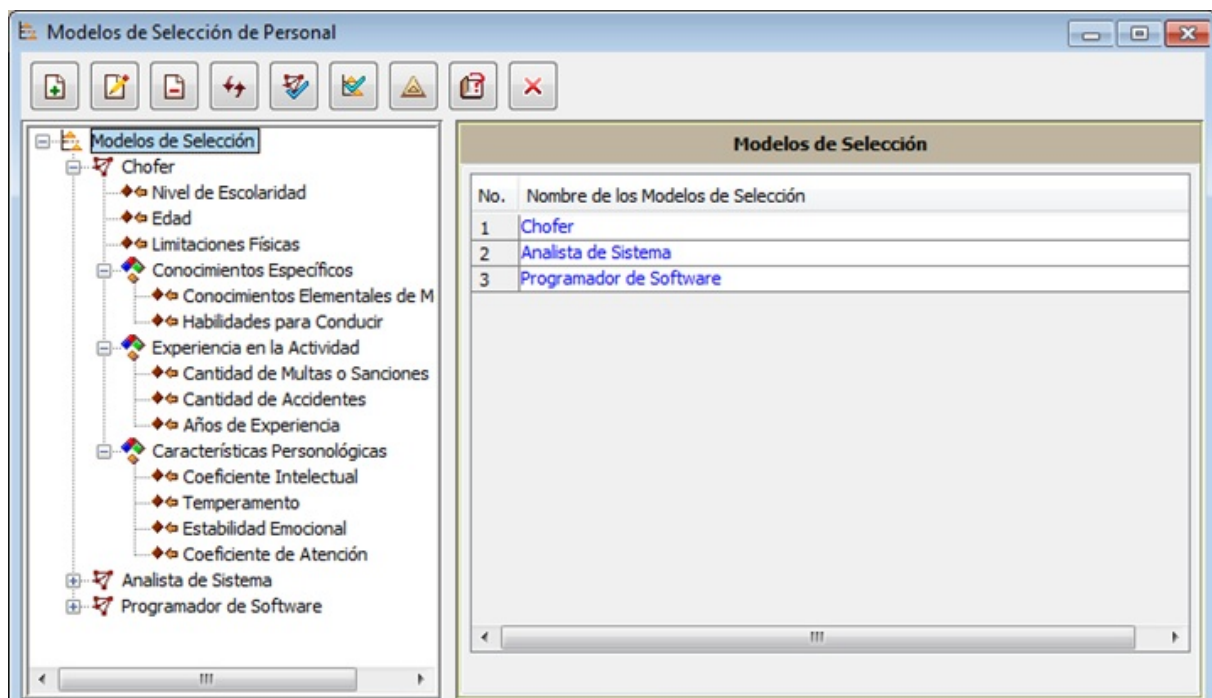










Figura 6.12: Ventana donde se definen los Modelos de Decisión para la selección.

En el Panel izquierdo: Se muestra la estructura jerárquica de los Modelos definidos, por tanto en este panel se realizan operaciones con 4 objetos diferentes, donde cada uno es representado por un icono en particular, como se describe a continuación:

-  Representa el conjunto de Modelos de Selección definidos.
-  Identifica a un Modelo de Selección en particular, por ejemplo en la fig. 5-6, se indica que existen tres Modelos de Selección definidos (Chofer, Analista de Sistema y Programador de Software).
-  Hace referencia a los criterios de tipo Resumen.
-  Hace referencia a los criterios tipo Evaluados.

Nota: Cada uno de estos objetos se activan al hacer clic sobre ellos.

En el Panel derecho: Se muestra la descripción del objeto que está seleccionado en el panel izquierdo. La barra de herramienta incorpora otros botones con funciones muy específicas, tales como:

-  Chequea e informa si el modelo seleccionado está definido correctamente, en caso contrario especifica los errores que posee.
-  Chequea e informa si todos los modelos están definidos de forma correcta, en caso contrario especifica los modelos con problemas.
-  Activa la ventana para calcular los pesos de los criterios hijos del nodo seleccionado (ver fig. 6.13). En esta ventana, también se modifica el orden de los criterios, y se realiza el cálculo de los pesos según el método de cálculo seleccionado (4.45, 4.3.6, 4.5, 4.6).
-  Activar la Ayuda.

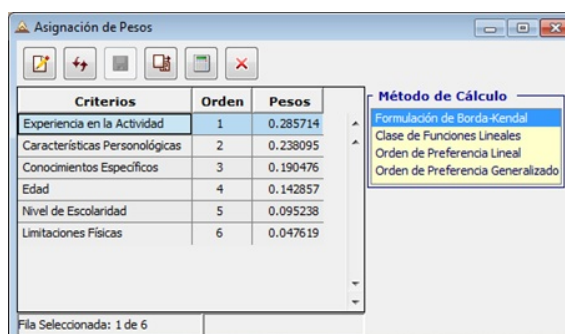


Figura 6.13: Ventana para gestionar el cálculo de los pesos.

Cuando en el panel izquierdo es seleccionado un modelo o un criterio tipo Resumen, y se realiza la operación de añadir, se activa la ventana Fig. 6.14, iniciando la captación de los datos Nombre, tipo y peso del Criterio.

Cuando se especifica que el tipo de criterio es Evaluado entonces se activa la captación del resto de los datos, tales como (ver Fig. 6.15):

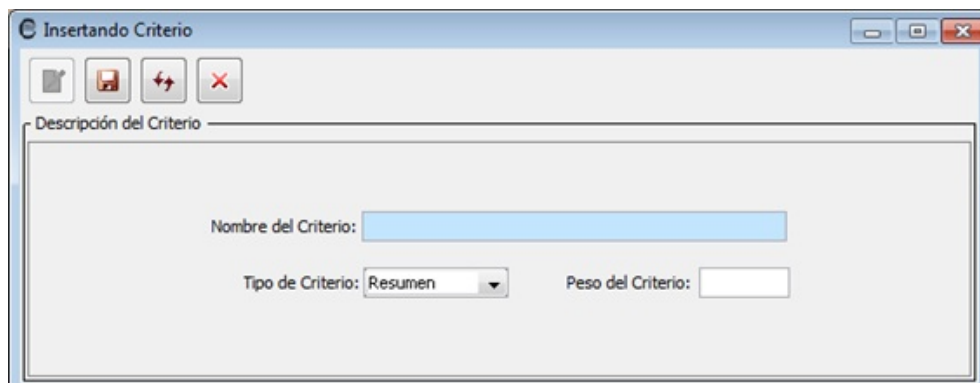


Figura 6.14: Ventana inicial de captación de datos del criterio.

- Si el criterio es excluyente y a partir de qué valor.
- Tipo de función de normalización a utilizar (3.22 o 3.23).
- Tipo de dominio asociado, el cual puede ser Discreto, Continuo u Ordinal.
- Intervalo de trabajo.
- Intervalo de mayor significación.

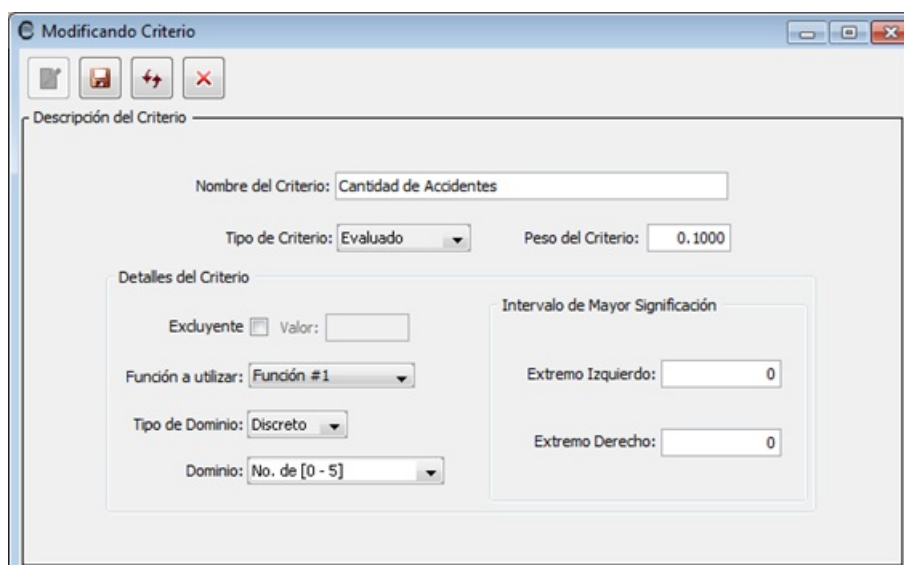


Figura 6.15: Ventana de captación de datos del criterio con tipo de dominio discreto.

La captación de los datos referidos al intervalo de trabajo y el de mayor significación varía según el tipo de dominio, por ejemplo al ser Discreto o Continuo se asume la forma mostrada en la Fig. 6.15, sin embargo, al ser del tipo Ordinal cambian los controles correspondientes.

- *Puestos de trabajo*: Activa la ventana para registrar los puestos de trabajo, donde se asocia el correspondiente Modelo de Selección a utilizar para cada uno (ver fig. 6.16).

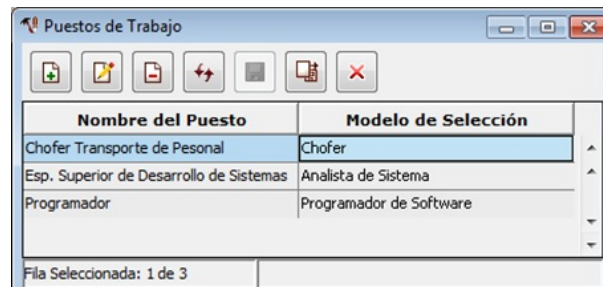


Figura 6.16: Ventana para registrar los puestos de trabajo.

Datos de los Candidatos: Contiene las opciones referentes a la captación de datos generales y específicos de los candidatos para el Proceso de Selección (ver fig. 6.17), tales como:

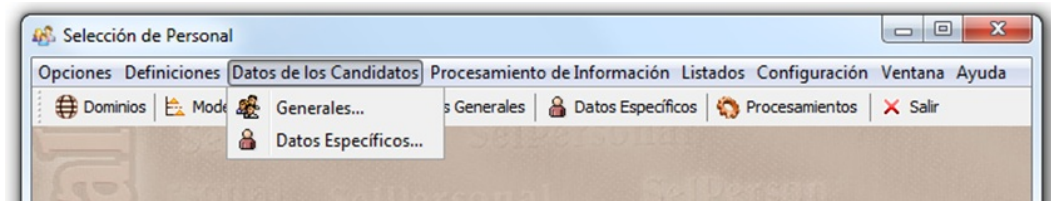


Figura 6.17: Ventana Principal con el submenú *Datos de los Candidatos*

- *Generales*: Activa la ventana de captación de datos generales de los candidatos (ver fig. 6.18) y en la misma se registran las generalidades de los candidatos y los puestos de trabajos por los que opta.

Nombre	Primer Apellido	Segundo Apellido	No. Identidad	Dirección Particular	Localizar	Observaciones	Solicita
Candidato B	1er Apellido B	2do Apellido B	1B	No se indica			[Icono]
Candidato A	1er Apellido A	2do Apellido A	2A	No se indica			[Icono]
Candidato C	1er Apellido C	2do Apellido C	3C	No se indica			[Icono]
Candidato D	1er Apellido D	2do Apellido D	4D	No se indica			[Icono]
Candidato E	1er Apellido E	2do Apellido E	5E	No se indica			[Icono]

Fila Seleccionada: 1 de 5

Figura 6.18: Ventana de captación de datos generales de los candidatos.

- *Datos Específicos*: Esta opción activa la ventana donde se selecciona el puesto de trabajo para el cual se efectuará la captación de datos específicos que están en correspondencia con el modelo que tiene asociado. En esta ventana, se visualizan los candidatos que optan por el puesto de trabajo seleccionado (ver fig. 6.19(a)).

Al hacer clic sobre el botón de edición de información, se activa una ventana (ver fig. 6.19(b)) donde se muestra el nombre del candidato y los datos a captar de cada criterio; así como una barra de navegación (ubicada en la parte superior de la ventana) que permite trasladarse por todos los candidatos registrados para el mismo puesto de trabajo.

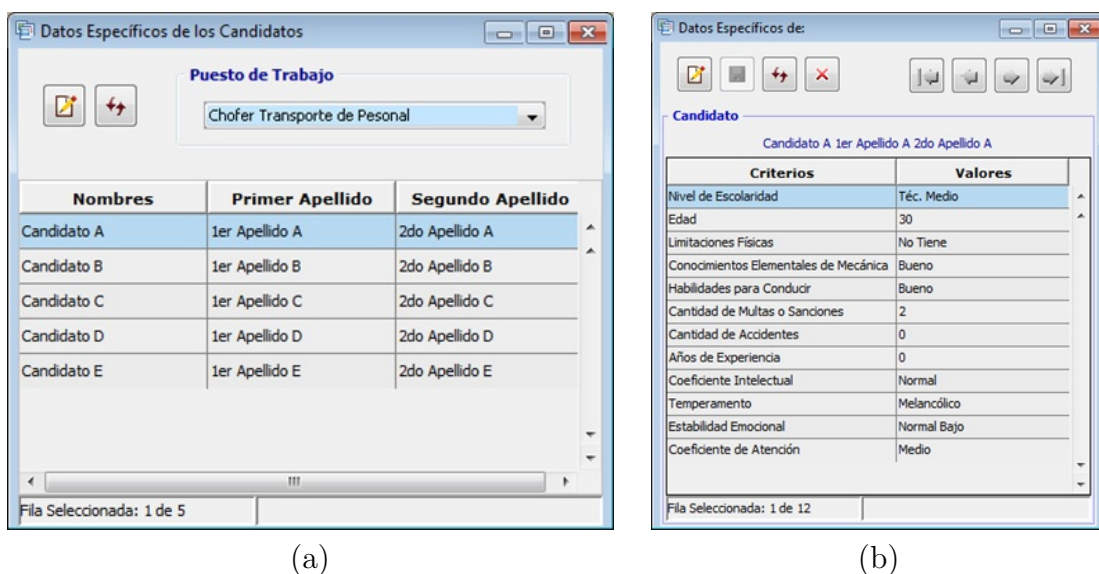


Figura 6.19: Ventana de candidatos y Puestos de Trabajo (a), ventana de captación de datos específicos (b).

Procesamiento de Información: Contiene las opciones referentes al procesamiento de la información y su registro (ver fig. 6.20).

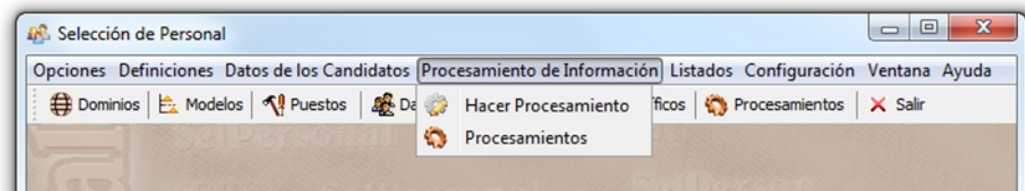





Figura 6.20: Ventana Principal con el submenú *Procesamiento de Información*.

- *Hacer Procesamiento*: Activa la ventana para definir el procesamiento de información y ejecutarlo (ver fig. 6.21). En esta ventana, se puede seleccionar el puesto de trabajo que se desea procesar, a través de que métodos de agregación y si participarán o no todos los candidatos asociados a dicho puesto de trabajo. Como resultado del procesamiento se asigna una puntuación a cada candidatos, la cual se encuentra en el intervalo $[0,1]$, y significa que, mientras más cerca esté del valor 1, entonces está más próximo del ideal definido.



Figura 6.21: Ventana para la definición y ejecución del procesamiento de información.

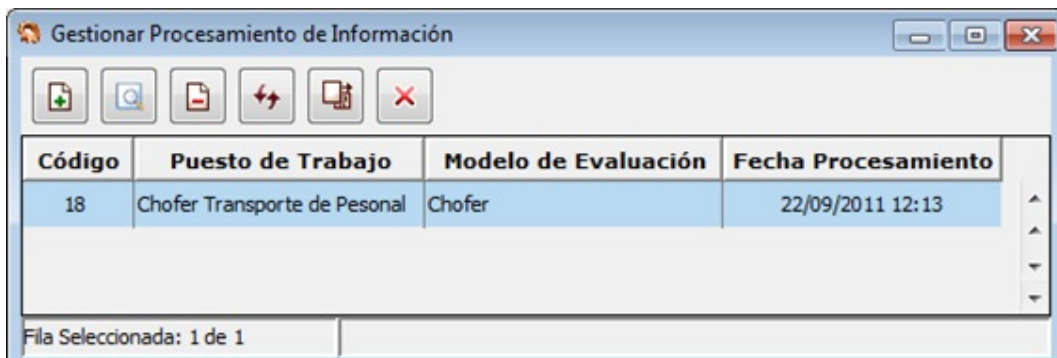
En la ventana, se incorporan botones para acceder a otras operaciones, tales como:

-  Marca todos los candidatos
-  Desmarca a todos los candidatos.
-  Este botón se activa al tener seleccionado como método de agregación a TOPSIS, permitiendo el acceso al formulario que permite definir para los criterios de tipo Evaluado cual es el ideal de búsqueda (máximo o mínimo).



Realiza el procesamiento de la información y lo almacena en la base de datos.

- *Procesamientos*: Activa la ventana que muestra los procesamiento de información realizados, especificando la fecha en cada caso (6.22).



The screenshot shows a window titled "Gestionar Procesamiento de Información". It contains a table with the following data:

Código	Puesto de Trabajo	Modelo de Evaluación	Fecha Procesamiento
18	Chofer Transporte de Pesonal	Chofer	22/09/2011 12:13

Below the table, it indicates "Fila Seleccionada: 1 de 1".

Figura 6.22: Ventana del procesamiento de información realizado.

El botón de visualización de resultados, permite activar la ventana (ver fig. 6.23), la cual muestra el resultado del procesamiento de la información de los candidatos asociados a un determinado puesto de trabajo, a través de los métodos de agregación seleccionados. Estos resultados también se pueden obtener de forma gráfica (ver fig. 6.24).



The screenshot shows a window titled "Resultados de Procesamientos". It includes a dropdown menu for "Seleccionar Método de Procesamiento" set to "Método Ideal Variable". Below this, there are input fields for "Puesto de Trabajo" (Chofer Transporte de Pesonal) and "Modelo de Selección Asociado" (Chofer). The main part of the window is a table titled "Candidatos Procesados" with the following data:

Código	Nombres	Primer Apellido	Segundo Apellido	Valor
4	Candidato A	1er Apellido A	2do Apellido A	0.78068700
7	Candidato D	1er Apellido D	2do Apellido D	0.71298600
5	Candidato B	1er Apellido B	2do Apellido B	0.67131300
8	Candidato E	1er Apellido E	2do Apellido E	0.65251000
6	Candidato C	1er Apellido C	2do Apellido C	0.50095400

At the bottom, it indicates "Fila Seleccionada: 1 de 5".

Figura 6.23: Ventana de visualización de los resultados del cálculo realizado.

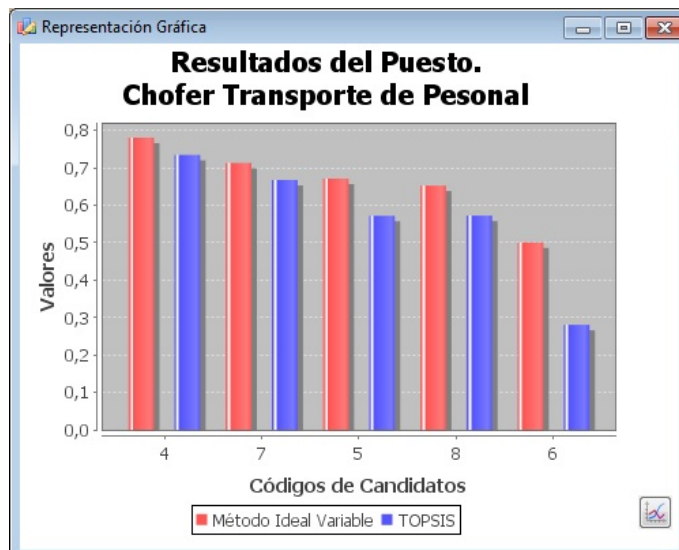


Figura 6.24: Representación gráfica de los resultados.

Listados: Mediante este submenú se obtiene los listados correspondientes (ver fig. 6.25).

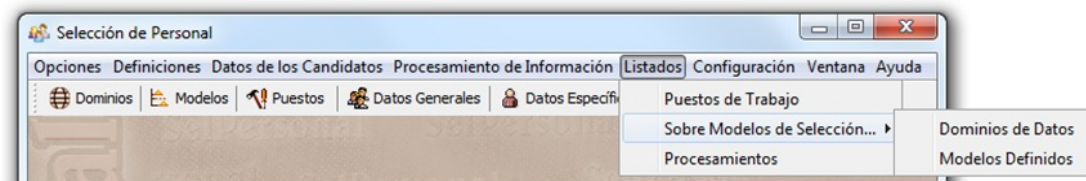


Figura 6.25: Ventana Principal con el submenú *Listado*.

Configuración: Permite acceder a las opciones para (ver fig. 6.26), de control de usuarios del software (ver fig. 6.27) y a la definición de las etiquetas lingüísticas (ver fig. 6.28) para el cálculo de los pesos asociados a los criterios.

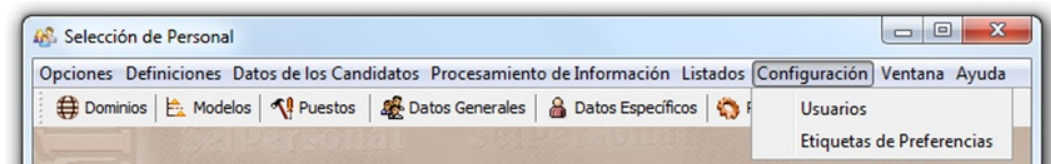


Figura 6.26: Ventana Principal con el submenú *Configuración*.

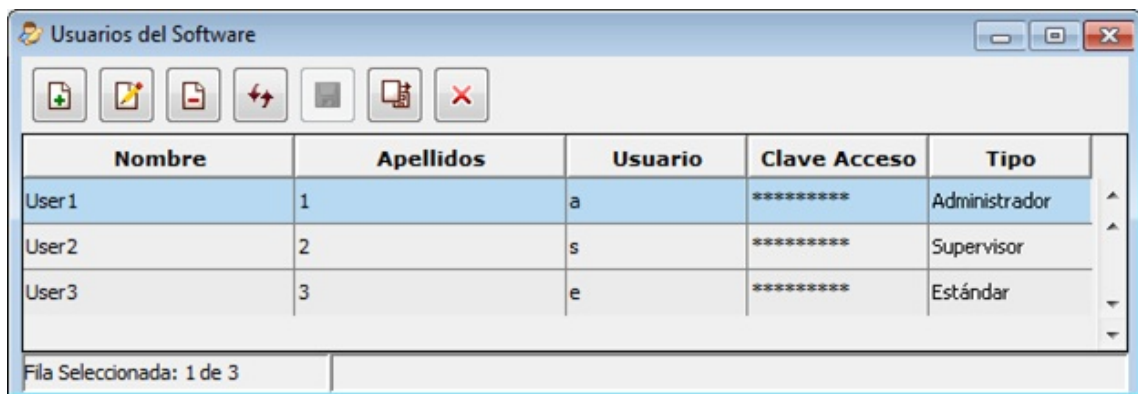


Figura 6.27: Ventana para la gestión de usuarios del software.

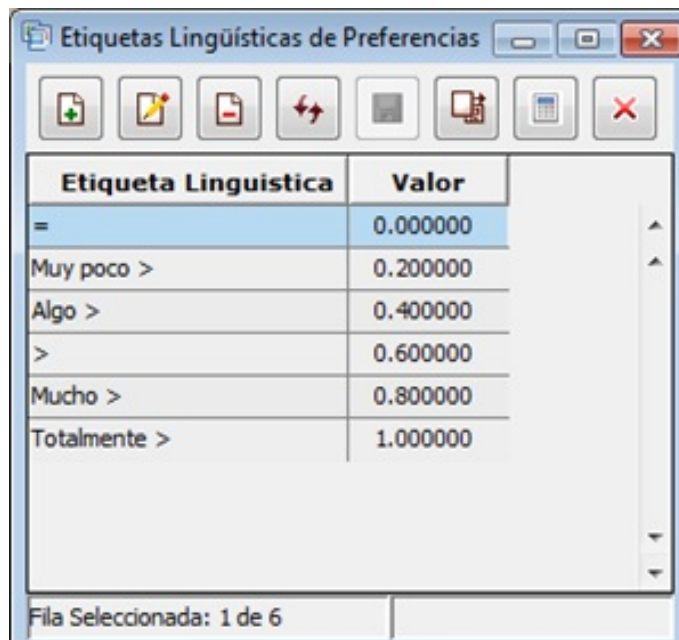


Figura 6.28: Ventana para la gestión de etiquetas lingüísticas.

En la ventana (fig. 6.28) se incorpora un botón que permite calcular los valores asociados a las etiquetas de forma proporcional según el total de etiquetas, aunque es posible editar el mismo y asignarlo en función de los intereses del usuario.

6.4. Conclusiones.

En este capítulo se realiza un estudio de las características fundamentales de los software utilizados en el proceso de selección de Personal, identificando los aspectos positivos y negativos que inciden en la calidad del proceso para el cual están diseñados. Por otra parte, se ha tenido en cuenta los supuestos establecidos en los epígrafes anteriores y que inciden de forma directa en la Selección de Personal de las entidades. Todos estos elementos permitieron identificar los requerimientos funcionales y de esta forma implementar el software SelPersonal con las características generales siguientes:

- La definición dinámica del modelo de selección a utilizar.
- Utilización de criterios cuantitativos y cualitativos.
- Utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, a través de los OWAs desarrollados en los epígrafes 4.3.6, 4.5, 4.6 y la fórmula de Borda-Kendall (4.45).
- Implementación del método de análisis multicriterio definido en el epígrafe 3.6.
- Exclusión de alternativas a partir de un valor dado.

Además, se implemento el procesamiento de la información a través del método TOPSIS, tal que le permita a los usuarios tener un referente comparativo respecto a los resultados y facilite de forma más efectiva la decisión final de los candidatos.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajos Futuros

7.1. Conclusiones

Teniendo en cuenta el papel significativo que desempeñan los recursos humanos para el desarrollo y avance de cualquier entidad; y particularmente el proceso de su Selección, como vía para garantizar las personas más idóneas en correspondencia con los puestos de trabajo. En esta tesis se aborda una contribución a esta área, orientándose a la búsqueda de métodos y procedimientos que ampliarán el nivel de precisión de los resultados de dicho proceso.

El estudio inicial de la problemática planteada permitió orientar el trabajo de investigación en las direcciones básicas siguientes:

- El estudio de los números difusos.
- Métodos de análisis multicriterio.
- Métodos para calcular el vector de pesos, con la finalidad de indicar la importancia relativa entre los criterios.
- Métodos para la Selección de Personal.
- La utilización de software como vía de automatización de procesos.

A partir de las direcciones de trabajo identificadas se desarrollaron los diferentes capítulos de la tesis, obteniéndose los resultados siguientes.

Teniendo en cuenta la diferencia de los dominios en que están definidos los criterios, se hizo necesario determinar funciones de pertenencia para estandarizar a una misma unidad de medida los datos que representan magnitudes y significados diferentes.

Por la necesaria utilización de los métodos de análisis multicriterio en el proceso de Selección de Personal, el estudio realizado al respecto, permitió identificar los mismos como la vía para facilitar la selección de las mejores alternativas. Luego, se obtuvo un método para la agregación de información con las características siguientes:

- La definición de la solución ideal de cada criterio se realiza de forma dinámica, tal que su nivel de variación puede ser un valor que se encuentre entre el valor máximo y el valor mínimo, sin tener que ser estrictamente los valores extremos.
- La utilización de un vector de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, manteniendo este principio de los métodos analizados.
- La exclusión de las alternativas a partir de un valor para el cual se considera crítico, aspecto no tratado en los métodos restantes.
- Un método que es independiente del conjunto de datos, por tanto al incluir una alternativa solo se requiere hacer el procesamiento de la información para dicha alternativa; mientras que al utilizar otros métodos hay que procesar a todo el conjunto de candidatos.

Como generalidad, los diferentes métodos de análisis multicriterio han utilizado un vector de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios que intervienen en la agregación de información. El cálculo del vector de pesos puede ser más o menos complejo dependiendo del método utilizado; sin embargo, lo más importante en ellos es obtener un vector que se adapte a la situación del problema planteado. Luego, a partir del estudio de los diferentes métodos existentes para calcular el vector de pesos, fue posible obtener otras variantes para su cálculo, tal que, el vector de pesos resultante verifique las propiedades de los OWA; entre estas variantes se encuentran:

- La clase de funciones lineales, que se basa en obtener la función lineal con una pendiente dada, y que permite generar el vector de pesos. Esta clase de funciones lineales verifican las propiedades siguientes:
 - Si $a < 0$ el valor de $\alpha > 0.5$ y si $a > 0$ entonces el valor de $\alpha < 0.5$.
 - La dispersión del conjunto de funciones lineales F que permiten obtener los w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ y constituyen OWA tiende a infinito.
 - Es posible determinar la función lineal perteneciente a la clase de funciones lineales que constituyen OWA a partir del valor de α .

Para el trabajo con esta concepción, se definió un algoritmo para calcular el vector de pesos a partir del valor de la pendiente y la dimensión del vector de pesos. También se

formuló un algoritmo para el caso en que se parte de los valores de α y de n , condicionante que coincide con los resultados obtenidos por Byeong Seok Ahn [3].

- La utilización de un orden lineal y cuantificadores de preferencia, el mismo tiene como base de partida la ley de Borda-Kendall, y la relación de preferencia cuantificada entre los pesos adyacentes. Luego, se realizan una serie de transformaciones, donde no solo incide el orden de los pesos, sino también, la cuantía entre los pesos; y por tanto la influencia de esta cuantía en el resultado final. En esta formulación se verifican las propiedades siguientes:
 - La ley de Borda-Kendal representa una función lineal, por tanto la relación entre los pesos es constante.
 - Si todos los valores del vector de cuantía son cero, entonces se obtiene el vector de pesos promedio.
 - Si todos los valores del vector cuantía son uno, entonces se obtiene el vector inicial, actuando como la operación idéntica.
 - Mediante el mismo procedimiento de actuación se verifica que, si la relación de preferencia es tal, que la cuantía en el vector es la misma $v_i = c \forall i = 1, \dots, n - 1$, entonces se obtiene un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal y su función lineal correspondiente se encuentra comprendida entre la función inicial y la función $y = \frac{1}{n}$.

En este método se formaliza un algoritmo para su utilización.

- La utilización de cuantificadores de preferencia y la constante inicial de diferencia máxima entre pesos adyacentes. Este método, a partir de una relación de preferencia cuantificada, y la constante inicial de diferencia máxima, obtiene el vector de pesos, que puede tener un comportamiento lineal o no lineal, en dependencia del cumplimiento o no de determinadas condiciones. Para este método se verifica que:
 - Se puede obtener el vector de pesos máximo, mínimo y promedio del operador OWA.
 - Se define el vector de cuantía y a partir de él se obtiene un vector de pesos que tiene un comportamiento lineal y al variar la constante inicial de diferencia máxima en el intervalo correspondiente, se generan los mismos vectores de pesos que los obtenidos con la clase de funciones lineales.
 - Se puede obtener el vector de pesos simétrico a partir de dos variantes, una con eje de simetría la recta $y = \frac{1}{n}$ y otra con eje de simetría la recta paralela al eje y que pasa por el punto $P_0 \left(\frac{1+n}{2}, 0 \right)$.

- El vector de pesos obtenido por $W = \psi(V^*, k, p_m)$ y su correspondiente vector de peso simétrico W' , verifican que el $orness(W) = 1 - orness(W')$.

Se puede plantear que este método es una generalización de los dos primeros.

- Los OWAs basados en una escala de razón. Se fundamentan en la razón de proporcionalidad existente entre los pesos adyacentes, utilizándolos como elementos de entrada para obtener a partir de ellos el vector de pesos. Con relación a este método se pueden expresar los aspectos siguientes:
 - Si todos los valores del vector de razón de proporcionalidad son iguales a 1, entonces se obtiene el vector de pesos promedio $W = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.
 - Si el último elemento del vector de proporcionalidad es $v_{n-1} = 0$, aplicando el teorema 4.7.1 entonces se obtiene el vector de pesos mínimo $W = (0, 0, \dots, 1)$.
 - Si el primer elemento del vector de proporcionalidad es $v_1 = 0$, aplicando el teorema 4.7.2 entonces se obtiene el vector de pesos máximo $W = (1, 0, \dots, 0)$.
 - Si se considera un vector de proporcionalidad constante, la aplicación del teorema 4.7.1 permite obtener un vector de pesos que es equivalente al obtenido por el teorema 4.7.2 pero en orden inverso.

Después de formular el método para la agregación de información, la forma de cálculo del vector de pesos y el estudio de los fundamentos utilizados por los diferentes métodos para el proceso de Selección de Personal, se consideró estructurar dicho proceso sobre la base del método propuesto en el epígrafe 3.6, resultando una nueva concepción con las características siguiente:

- La selección de un candidato, tal que, el ideal de los criterios utilizados, pueda ser un valor definido de forma dinámica que se encuentre entre el mejor y peor valor.
- La exclusión de los candidatos a partir de un valor dado en alguno de los criterios.
- La utilización de pesos para indicar la importancia relativa entre los criterios.

Finalmente, se implementó el software *SelPersonal* para apoyar el proceso de Selección de Personal, teniendo como referente los aspectos positivos y negativos de otros software utilizados con este fin. Además, de la concepción descrita para este proceso en el epígrafe 5.3, lo cual ha permitido obtener el software *SelPersonal* con las características generales siguientes:

- Definición dinámica del modelo de selección a utilizar.
- La definición de criterios cuantitativos y cualitativos.
- La utilización de pesos para indicar la importancia relativa de los criterios, y la utilización de los métodos propuestos en los epígrafes 4.3.6, 4.5, 4.6, para calcular los pesos.
- La implementación del método de análisis multicriterio definido en el epígrafe 3.6.
- La exclusión de alternativas a partir de un valor dado.

7.2. Trabajos Futuros

Hasta el momento se ha obtenido otra forma de estructurar del proceso de Selección de Personal sobre la base de un nuevo enfoque para la agregación de la información y para el cálculo de los pesos asociados a los criterios, a través de un software; lo cual ha permitido sentar las bases para trabajos futuros, tales como:

- Métodos para determinar la solución ideal de los criterios, sobre la base del consenso de un grupo de expertos, tal que no solo se utilice la información particular de los candidatos.
- Métodos para determinar el consenso de un grupo de expertos al evaluar criterios cualitativos en un grupo de alternativas.
- Búsqueda de procedimientos y métodos para determinar el vector de razón de proporcionalidad a partir del condicionamiento del problema de análisis multicriterio a resolver y posteriormente calcular el vector de pesos por el método propuesto en el epígrafe 4.7.
- Profundizar en el nivel de relación existente entre el método propuesto y el TOPSIS.
- La relación de los OWAs de preferencia cuantificada con los resultados obtenidos mediante AHP para los pesos.

7.3. Publicaciones realizadas

- **E. Cables Pérez**, M.S. García-Cascales, M.T. Lamata. “The LTOPSIS: An alternative to TOPSIS decision-making approach for linguistic variables”. *Expert Systems With Applications*. Vol. 39, No. 2, pp. 2119-2126, 2012.

- M.Teresa Lamata, **E. Cables Pérez**. “Obtaining OWA Operators starting from a linear order and preference quantifiers”. International Journal Of Intelligent Systems. (Aceptado)
- **E. Cables Pérez**, M.S. Garcia-Cascales, M.T. Lamata, J.M. Sánchez-Lozano. “Metodología OWA-TOPSIS para la evaluación de tecnologías de fabricación de células fotovoltaicas”. Congreso Español sobre tecnologías y lógica Fuzzy (ESTYLF´2012). (Aceptado).
- **E. Cables Pérez**, M.T. Lamata. “OWAs basados en una escala de razón”. Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial (CAEPIA 2011).
- **E. Cables Pérez**, M.S. García-Cascales, M.D. Gómez-López, M.T. Lamata. “A framework for evaluating rabbit-breeding farm in the Mediterranean: a TOPSIS approach”. International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA 2011).
- M.T. Lamata, J.L. Verdegay, **E. Cables Pérez**. “Linear-OWA operators”. Proc. of EUROFUSE´09. Preference Modelling and Decision Analysis, 2009.
- **E. Cables Pérez**, M.T. Lamata. “OWA weights determination by means of linear functions”. Mathware & Soft Computing. Vol. 16, pp. 107-122, 2009, ISSN: 1134-5632.
- M.T. Lamata, **E. Cables Pérez**. “Software para la selección de personal con enfoque difuso”. Memorias de FIMAT XXI, 2009, ISBN: 978-959-18-0498-3.
- M.S. García-Cascales, M.T. Lamata, **E. Cables Pérez**. “The use of different norms in the topsis decision making method”. Computational Intelligence in Decision and Control, ed. Da Ruan et al., World Scientific, pp. 623-628., 2008, ISBN: 13-978-981-279-946-3.
- M.S. García-Cascales, M.T. Lamata, **E. Cables Pérez**. “Relation between OWA operator and the SMARTER method”. Proc. Of IPMU´08. L. Magdalena, M. Ojeda-Aciego, J.L. Verdegay (eds), pp. 1260-1265 Torremolinos (Málaga), 2008.

Bibliografía

- [1] A.R. Afshari, M. Mojahed, R.M. Yusuff, T.S. Hong, y M.Y. Ismail. Personnel selection using ELECTRE. *Journal of Applied Sciences*, 10(23):3068–3075, 2010.
- [2] B.S. Ahn. On the properties of OWA operator weights functions with constant level of orness. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14:511–515, 2006.
- [3] B.S. Ahn. Some remarks on the LSOWA approach for obtaining OWA operator weights. *International Journal of Intelligent Systems*, 24:1265–1279, 2009.
- [4] B.S. Ahn y H.C. Park. Least-squared ordered weighted averaging operator weights. *International Journal of Intelligent Systems*, 23:33–49, 2008.
- [5] A. Alarcón, S. Chelech, C. Flores, E. Harnisch, y A. Ortiz. Reclutamiento y selección de personal. <http://www.apsique.com/wiki/LaboRetselper>, 2002.
- [6] Esra Albayrak y Yasemin Claire Erensal. Using analytic hierarchy process (AHP) to improve human performance: An application of multiple criteria decision making problem. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 15:491–503, 2004.
- [7] M.A. Alles. *Diccionario de preguntas, gestión por competencias*. Ediciones Granica S.A. Buenos Aires, Argentina, 4ta edition, 2008.
- [8] K.J. Arrow. *Social choice and individual values*. Yale University Press. 2nd ed., 1963.
- [9] C. Bauer y G. King. *Java Persistence with Hibernate*. Manning Publications Co., 2007.
- [10] M. Besson. Rang moyen et agrégation de classements. *Revue fr. autom. Inf. Rech. opér.*, 9:37–58, 1975.
- [11] J.P. Brans y B. Mareschal. PROMETHEE V: MCDM problems with segmentation constraints. *INFORMS*, 30(2):85–96, 1992.
- [12] J.P. Brans y B. Mareschal. The PROMETHEE VI procedure. how to differentiate hard from soft multicriteria problems. *Journal of Decision Systems*, 4:213–223, 1995.

- [13] J.P. Brans, P. Vincke, y B. Mareschal. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*, 24:228–238, 1986.
- [14] J.J. Buckley. The multiple judge, multiple criteria ranking problem: A fuzzy set approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(1):25–37, 1984.
- [15] G. P. Bunk. La transmisión de las competencias en la formación y el perfeccionamiento profesionales en la RFA. *Revista Europea de Formación Profesional*, 1:8–14, 1994.
- [16] M. Butteriss. *Reinventando Recursos Humanos: Cambiando los roles para crear una organización de alto rendimiento*. EDIPE, 2000.
- [17] Gülcin Büyüközkan y Da Ruan. Evaluation of software development projects using a fuzzy multi-criteria decision approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77:464–475, 2008.
- [18] E. Cables Pérez y M.T. Lamata. OWAs basados en una escala de razón. CAEPIA, 2011.
- [19] L. Canós, T. Casasús, T. Lara, V. Liern, y J.C. Pérez. Un algoritmo fuzzy para la selección de personal basado en agregación de competencias. *XV Jornadas de ASEPUMA y III Encuentro Internacional*, 2007.
- [20] L. Canós, T. Casasús, T. Lara, V. Liern, y J.C. Pérez. Técnicas flexibles para la gestión de recursos humanos: La selección de personal basada en la valoración de competencia. *Trabajo parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN-2005-08404-C04 y GV-2007-218*, 2009.
- [21] L. Canós y V. Liern. Soft computing-based aggregation methods for human resource management. *European Journal of Operational Research*, 189(1):669–681, 2008.
- [22] L. Canós, J. Valdés, y P.C. Zaragoza. La gestión por competencias como pieza fundamental para la gestión del conocimiento. *Boletín de Estudios Económicos*, (180):445–463, 2003.
- [23] C. Castellano Palomo. El factor humano en el contexto empresarial actual. <http://www.monografias.com/trabajos45/factor-humano-empresa/factor-humano-empresa.shtml>, 2006.
- [24] Ling-Show Chen y Ching-Hsue Cheng. Selecting is personnel use fuzzy gdss based on metric distance method. *European Journal of Operational Research*, 160:803–820, 2005.
- [25] I. Chiavenato. *Administración de Recurso Humanos*. Mac Graw-Hill, México., 1988.

- [26] Sung-Bae Cho. Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 13:359–375, 1995.
- [27] Empresa DESOFT SA. Cuba. Selsoft. <http://www.infocompu.com/SELSOFT.HTM>, 2002.
- [28] CUJAE. GREHU sistema de recursos humanos. <http://grehu.cujae.edu.cu/General/Caracteristicas.asp>, 2002.
- [29] M. Delgado, J.L. Verdegay, y M.A. Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(3):351–370, 1993.
- [30] G. Dieter. *Engineering Design. A Materials and Processing Approach*. Tokyo: McGraw-Hill, 1983.
- [31] Y. Dong, Y. Xu, y S. Yu. Computing the numerical scale of the linguistic term set for the 2-tuple fuzzy linguistic representation model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(6):1366–1378, 2009.
- [32] W. Dongrui y J.M. Mendel. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1145–1161, 2007.
- [33] M. Dursun y E.E. Karsak. A fuzzy MCDM approach for personnel selection. *Expert Systems with Applications*, 37:4324–4330, 2010.
- [34] W. Edwards y F.H. Barron. SMARTS and SMARTER: improves simple methods for multiattribute utility measurement. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 60(1):306–325, 1994.
- [35] P.O. Falcón Villaverde y R.A. Prendes Gutiérrez. La gestión por procesos y los recursos humanos. presentación del software. <http://www.monografias.com/trabajos30/gestion-procesos/gestion-procesos.shtml>, 2005.
- [36] M. Fernández Ríos. *Diccionario de Recursos Humanos, Organización y Dirección*. 1995.
- [37] D.P. Filev y R.R. Yager. On the issue of obtaining OWA operator weights. *Fuzzy Set Systems*, 94:157–169, 1998.
- [38] P.C. Fishburn. Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey. *Management science*, 20(11):1442–1471, 1973.
- [39] R. Fullér y P. Majlender. An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operator weights. *Fuzzy Sets Systems*, 124:53–57, 2001.

- [40] R. Fullér y P. Majlender. On obtaining minimal variability OWA operator weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 136:203–215, 2003.
- [41] M.S. García-Cascales y M.T. Lamata. Fuzzy analytical hierarchy process in maintenance problem. *N.T. Nguyen et al. (Eds.): IEA/AIE, LNAI*, 5027:815–824, 2008.
- [42] J. Gil Aluja. *La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*. Centro de Estudios Ramón Areces, 1996.
- [43] J. Gil Lafuente. *Algoritmos para la Excelencia*. Milladoiro.Vigo-España., 2002.
- [44] G. Gómez Ceja. *Planeación y Organización de Empresas*. Mac Graw-Hill, México., 1994.
- [45] Z. Güngör, G. Serhadlioglu, y S.E. Kesen. A fuzzy ahp approach to personnel selection problem. *Applied Soft Computing Journal*, 9(2):641–646, 2009.
- [46] Adem Golec y Esra Kahya. A fuzzy model for competency-based employee evaluation and selection. *Computers Industrial Engineering*, 52:143–161, 2007.
- [47] F. González Santoyo, J. Flores Romero, y B. Flores Romero. *La Incertidumbre en la Evaluación Financiera de las Empresas*. FeGoSa- Ingeniería Administrativas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (México), Morelia México, 2001.
- [48] F. Herrera y E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 27(5):646–656, 1997.
- [49] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.
- [50] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, y J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic owa operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:175–190, 1996.
- [51] F. Herrera y L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
- [52] F. Herrera y L. Martínez. An approach for combining linguistic and numerical information based on 2-tuple fuzzy linguistic representation model in decision-making. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8(5):539–562, 2000.

- [53] E. Herrera-Viedma, G. Pasi, A.G. López-Herrera, y C. Porcel. Evaluating the information quality of web sites: A methodology based on fuzzy computing with words. *Journal of American Society for Information Science and Technology*, 57(4):538–549, 2006.
- [54] C.L. Hwang, Y.J. Lai, y T.Y. Liu. A new approach for multiple objective decision making. *Computers and Operations Research*, 20(8):889–899, 1993.
- [55] C.L. Hwang y K. Yoon. *Multiple attribute decision making methods and applications*. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [56] E. Jereb, M. Bohanec, y V. Rajkovic. Dexi - racunalniski program za vecparametrsko odlocanje (dexi: computer program for multi-attribute decision making). *Kranj: Moderna organizacija*, 2003.
- [57] E. Jereb, U. Rajkovic, y V. Rajkovic. A hierarchical multi-attribute system approach to personnel selection. *International Journal of Selection and Assessment*, 13(3):198–205, 2005.
- [58] A. Jessop. Minimally biased wieght determination in personal selection. *European Journal of Operational Research*, 153:433–444, 2004.
- [59] R. Johnson y et al. *Professional Java Development with the Spring Framework*. Wiley and Sons, 2005.
- [60] C. Kahraman, U. Cebeci, y Z. Ulukan. Multi-criteria supplier selection using fuzzy AHP. *Logistics Information Management*, 16(6):382–394, 2003.
- [61] E.E. Karsak. Personnel selection using a fuzzy MCDM approach based on ideal and anti-ideal solutions. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 507:393–402, 2001.
- [62] E.E. Karsak. Personnel selection using an MCDM approach that integrates numerical and linguistic information. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2006), Paris*, pages 308–314, 2006.
- [63] A. Kaufmann y J. Gil Aluja. *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Milladoiro. España., 1986.
- [64] G.j. Klir y B. Yuan. *Fuzzy sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
- [65] Y.J. Lai, T.Y. Liu, y C.L.; Hwang. Topsis for MCDM. *European Journal of Operational Research*, 76(3):486–500, 1994.

- [66] M.T. Lamata y E. Cables Pérez. OWA weights determination by means of linear functions. *Mathware & Soft Computing*, 16:107–122, 2009.
- [67] M.T. Lamata, J.L. Verdegay, y E. Cables Pérez. Linear-owa operators. Proc. of EUROFUSE´09. Preference Modelling and Decision Analysis, 2009.
- [68] O. Larichev y H. Moshkovich. ZAPROS: A method and system for ordering multiattribute alternatives on the basis of a decision-maker´s preferences. *Moscow: Preprint of All Union Institute for Systems Studies*, 1991.
- [69] O.G. León. *Tomar decisiones difíciles*. Segunda Edición, ed Universidad Autónoma de Madrid, 2001.
- [70] D.F. Li. Multiattribute group decision making method using extended linguistic variables. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(6):793–806, 2009.
- [71] X. Li, D. Ruan, J. Liu, y Y. () Xu. A linguistic-valued weighted aggregation operator to multiple attribute group decision making with quantitative and qualitative information. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(3):274–284, 2008.
- [72] G.S. Liang. Theory and methodology fuzzy MCDM based on ideal and anti-ideal concepts. *European Journal of Operational Research*, 112:682–691, 1999.
- [73] M.J.J. Liang, G.S. nad Wang. Personnel selection using fuzzy MCDM algoritm. *European Journal of Operational Research*, 78:22–33, 1994.
- [74] X. Liu. On the properties of equidifferent OWA operator. *International Journal of Approximate Reasoning*, 43:90–107, 2006.
- [75] E. López González, C. Mendaña Cuervo, y M.A. Rodríguez Fernández. La selección del personal con un algoritmo genético borroso. *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 2(2):61–76, 1996.
- [76] S. Mahmoodzadeh, J. Shahrabi, M. Pariazar, y M.S. Zaeri. Project selection by using fuzzy AHP and TOPSIS technique. *International journal of Humanities and Social Sciences*, 1(3), 2007.
- [77] P. Majlender. OWA operators with maximal renyi entropy. *Fuzzy Sets and Systems*, 155:340–360, 2005.
- [78] L. Martinez, D. Ruan, y F. Herrera. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):382–395, 2010.

- [79] C. Mei-Tai, Gwo-Hshiung T. Joseph, S., y K. Rajiv. Comparison among three analytical methods for knowledge communities group-decision analysis. *Expert Systems with Applications*, 33:1011–1024, 2007.
- [80] J.M. Mendel. Computing with words and its relationships with fuzzistics. *Information Sciences*, 177(4):988–1006, 2007.
- [81] M. Mojarro y J. Macias. Mejoramiento de la técnica TOPSIS mediante la integración de la distancia de mahalanobis. *Revista Ingeniería Industrial - ITC. RII-Enero2007-Junio 2007*, 2007.
- [82] G. Morales-Luna. *Introducción a la lógica difusa*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV-IPN), 2002.
- [83] S.E. Moya Moya. Sistema de selección de personal. <http://www.monografias.com/trabajos47/seleccion-personal/seleccion-personal.shtml>, 2006.
- [84] M. Nussbaum, M. Singer, R. Rosas, M. Castillo, E. Flies, R. Lara, y R. Sommers. Decision support system for conflict diagnosis in personnel selection. *Information and Management*, 36:55–62, 1999.
- [85] M. O'Hagan. Fuzzy decision aids. pages 624–628, 1987.
- [86] M. O'Hagan. Aggregating template rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. pages 681–689, 1988.
- [87] S. Opricovic. Multi-criteria optimization of civil engineering systems. *Faculty of Civil Engineering, Belgrade.*, 1998.
- [88] S. Opricovic y G.H. Tzeng. Multicriteria planning of postearthquake sustainable reconstruction. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 17:211–220, 2002.
- [89] S. Opricovic y G.H. Tzeng. The compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. *European Journal of Operational Research*, 156(2):445–455, 2004.
- [90] S. Opricovic y G.H. Tzeng. Extended VIKOR method in comparison with outranking methods. *European Journal of Operational Research*, 178:514–529, 2007.
- [91] H. Pastijn y J. Leysen. Constructing an outranking relation with ORESTE. *Math1 Comput. Modelling*, 12(10/11):1255–1268, 1989.
- [92] M.B. Peña. *Dirección de Personal*. 6ª edition, 1987.

- [93] J.I. Peláez y J.M. Doña. Lama: A linguistic aggregation of majority additive operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 18(7):809–820, 2003.
- [94] P.V. Polychroniou y I. Giannikos. A fuzzy multicriteria decision-making methodology for selection of human resources in a greek private bank. *Career Development International*, 14(4):372–387, 2009.
- [95] H. Raiffa. *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [96] M. Roubens. Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making. *European Journal Operational Research*, 10:51–55, 1982.
- [97] B. Roy. Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 8:57–75, 1968.
- [98] B. Roy. ELECTRE III: Un algorithme de rangement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Cahiers du Centre d'Etudes de recherche opérationnelle*, 20:3–24, 1978.
- [99] B. Roy y P. Bertier. La méthode electre ii. une application au mediaplanning. *Operational Research '72; Ross, N. ed. North Holland*, pages 291–302, 1973.
- [100] B. Roy y D. Bouyssou. Aide multicritère à la décision: Méthodes et cas. *Economica, Paris*, 1993.
- [101] B. Roy y J. Hugonnard. Ranking of suburban line extension projects on the paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research*, 16A(4):301–312, 1982.
- [102] B. Roy y J. Skalka. ELECTRE IS, aspects méthodologiques et guide d'utilisation. *Cahier du LAMSADE. Université Paris-Dauphine. Paris*, (30), 1985.
- [103] T.L. Saaty. *The analytic hierarchy process*. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [104] T.L. Saaty. Eigenvector and logarithmic least squares. *European Journal of Operational Research*, 48:156–160, 1990.
- [105] T.L. Saaty. How to make a decision: The analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 48:9–26, 1990.
- [106] T.L. Saaty. Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/network processes. *European Journal of Operational Research*, 168:557–570, 2006.
- [107] F. Sikula. *Administración de Recursos Humanos en Empresas*. México: Ed. Limusa, 1991.

-
- [108] L.M. Spencer y S.M. Spencer. *Competence at work, models for superior performance*. John Wiley & Sons, Inc. Nueva York, 1993.
- [109] I.B. Türksen. Type 2 representation and reasoning for CWW. *Fuzzy Sets and Systems*, 127:17–36, 2002.
- [110] F. Tunc Bozbura y A. Beskese. Prioritization of organizational capital measurement indicators using fuzzy AHP. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44:124–147, 2007.
- [111] R. Valle Cabrera. *Gestión estratégica de los recursos humanos*. Buenos Aires: Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [112] R.C. Van Den Honert y F.A. Lootsma. Group preference aggregation in the multiplicative ahp the model of the group decision process and pareto optimality. *European Journal of Operational Research*, 96(2):363–370, 1997.
- [113] C. WALLS y R. Breidenbach. *Spring in Action*. Manning Publications Co., 2da edition.
- [114] J.H. Wang y J. Hao. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):435–445, 2006.
- [115] Y.M. Wang, Y. Luo, y X.W. Liu. Two new models for determining OWA operator weights. *Computers and Industrial Engineering*, 52(2):203–209, 2007.
- [116] Mondy Wayne R. *Administración de Recursos Humanos*. 1997.
- [117] W. Werther y D. Keith. *Human Resource and Personnel Management*. Mc Graw Hill Companies Inc., 1996.
- [118] Z. Xu. An overview of methods for determining OWA weights. *International Journal of Intelligent Systems*, 20:843–865, 2005.
- [119] Z.S. Xu. Eowa and eowgoperators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6):791–810, 2004.
- [120] Z.S. Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166(1-4):19–30, 2004.
- [121] Z.S. Xu. Induced uncertain linguistic owa operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2):231–238, 2006.
- [122] Z.S. Xu y Q.L. Da. The uncertain OWA operator. *Int J Fuzzy Intell Syst.*, 17:569–575, 2002.

- [123] Z.S. Xu y Q.L. Da. Approaches to obtaining the weights of the ordered weighted aggregation operators. *J Southeast Univ*, 33:94–96, 2003.
- [124] R.R. Yager. A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets. *Decision Sciences*, 12:589–600, 1981.
- [125] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.
- [126] R.R. Yager. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:39–75, 1991.
- [127] R.R. Yager. On a semantics for neural networks based on fuzzy quantifiers. *International Journal of Intelligent Systems*, 7:765–786, 1992.
- [128] R.R. Yager. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59:125–148, 1993.
- [129] R.R. Yager. Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. *Group Decision and Negotiation*, 2(1):81–93, 1993.
- [130] R.R. Yager. On the completion of qualitative possibility measures. *IEEE Trans Fuzzy System*, 1:184–194, 1993.
- [131] R.R. Yager. On the maximum entropy negation of a probability distribution. 1993.
- [132] R.R. Yager. Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:49–73, 1996.
- [133] R.R. Yager. Aggregation of ordinal information. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(3):199–219, 2007.
- [134] R.R. Yager. Prioritized aggregation operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48:263–274, 2008.
- [135] R.R. Yager. Prioritized OWA aggregation. *Fuzzy Optim Decis Making*, 8:245–262, 2009.
- [136] R.R. Yager y D.P. Filev. Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators. *Int J Gen Syst*, 22:297–316, 1994.
- [137] R.R. Yager y D.P. Filev. Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 29:141–150, 1999.
- [138] W. Ying-Ming y C. Parkan. A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights. *Information Sciences*, 175:20–29, 2005.

-
- [139] K. Yoon. Systems selection by multiple attribute decision making. *PhD dissertation, Kansas State University, Manhattan*, 1980.
- [140] W. Yu. ELECTRE TRI: Aspects méthodologiques et manuel d'utilisation. *Document du LAMSADE, Université Paris-Dauphine*, (74), 1992.
- [141] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [142] L.A. Zadeh. A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges. *J. Of Cybernetics*, 2(2):4–34, 1972.
- [143] L.A. Zadeh. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I*, 8(3):199–249, 1975.
- [144] L.A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computing and Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1983.
- [145] L.A. Zadeh. Soft computing and fuzzy logic. *IEEE Software*, 11(6):48–56, 1994.
- [146] S.M. Zhou, R.I. John, F. Chiclana, y J.M. Garibaldi. On aggregating uncertain information by type-2 owa operators for soft decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):540–558, 2010.
- [147] H.J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

Apéndice A

Entrevista a Especialistas de Recursos Humanos

Objetivo: Identificar los aspectos esenciales del proceso de Selección de Personal y la forma de procesar la información.

- ¿Qué etapas o fases realizan en el proceso de Selección de Personal?
- ¿Qué instrumentos o técnicas utilizan para obtener la información más relevante de los candidatos?
- ¿Cómo procesan la información de los candidatos para un puesto de trabajo?
- ¿Si utilizan software, para conducir este proceso, qué ventajas o desventaja le confiere?
- ¿Qué aspectos considera se deban mejorar en este proceso?
- ¿Qué facilidades debe brindar un software para automatizar el proceso de Selección de Personal?

Apéndice B

Entrevista a Especialistas en Informática

Objetivo: Identificar los requerimientos del software para el proceso de Selección de Personal.

Para iniciar la entrevista un especialista de Recursos Humanos expondrá como se estructura el proceso de Selección de Personal.

- ¿Qué requerimientos debe tener un software para la Selección de Personal?
- ¿Cómo estructurar el flujo informativo del proceso de Selección de Personal, a través de un software?
- ¿Qué entorno de desarrollo y herramientas considera más apropiadas?

Apéndice C

Diagrama de la Base de Datos

