

SEIEM 2021



Valencia del 8 al 10 de septiembre de 2021

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXIV

Pascual D. Diago
Dionisio F. Yáñez
M^a Teresa González-Astudillo
Dolores Carrillo



VNIVERSITAT ID VALÈNCIA [UAE]
Facultat de Magisteri



Departament de
Didàctica de la Matemàtica

VNIVERSITAT ID VALÈNCIA

Vicerectorat de Cultura i Esport



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA
E INNOVACIÓN

Servicio de Formación
Permanente e Innovación
Educativa (SFPIE)

VNIVERSITAT ID VALÈNCIA



65 RUBIO

DE LA CONSTRUCCIÓN A LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Rodríguez, M. L., Gómez, B. y Filloy, E.</i>	529
SENTIDO ESPACIAL EN FUTUROS MAESTROS <i>Roura, R. y Ramírez, R.</i>	537
ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA PARA LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD USANDO UN RECURSO COMPUTACIONAL <i>Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E. y Carrillo, J.</i>	545
UN ESTUDIO DE CASO DE CÓMO ENTIENDE LA CREATIVIDAD Y SU DESA- RROLLO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS UN FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS <i>Sánchez, A., Font, V., Diamantidis, D. y Breda, A.</i>	553
RELACIONES NUMÉRICAS ESTABLECIDAS POR ALUMNADO DE PRIMARIA <i>Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A.</i>	563
SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HERMENÉUTICA EN LA ENSEÑANZA MA- TEMÁTICA <i>Sanz, H., Cuida, A. y Martínez-Moro, E.</i>	571
ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE VISUALIZACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D Y REALIDAD AUMENTADA <i>Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A.</i>	579
ESTRATEGIAS DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE EN LAS AULAS DE MATE- MÁTICAS Y DE FÍSICA <i>Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J.</i>	587
RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS: LA ESTRATEGIA DE RESO- LUCIÓN CON RELACIÓN AL PROBLEMA INVENTADO <i>Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J.</i>	595
PRIMERAS EXPERIENCIAS CON UNA TABLA EN SEGUNDO DE EDUCA- CIÓN PRIMARIA. APROXIMACIÓN FUNCIONAL AL PENSAMIENTO AL- GEBRAICO <i>Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A.</i>	603
REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE PRI- MARIA Y SECUNDARIA (11-13 AÑOS) EN UNA TAREA FUNCIONAL <i>Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C.</i>	613
LA GESTIÓN DE UN REI EN SECUNDARIA: ¿CUÁNTO TIEMPO SE TARDA EN ABRIR UN CANDADO? <i>Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M.</i>	621
CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO A PARTIR DE UNA TAREA FORMATIVA SOBRE VISUALIZACIÓN <i>Vergara, L., Climent, N. y Codes, M.</i>	629

REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA (11-13 AÑOS) EN UNA TAREA FUNCIONAL

Primary and secondary students (11-13 years old)' representation of generalization in a functional task

Ureña, J.^a, Ramírez, R.^a, Molina, M.^b y Cañadas, M. C.^a

^aUniversidad de Granada, ^bUniversidad de Salamanca

Resumen

Describimos las representaciones de la generalización que manifiestan estudiantes de sexto curso de educación primaria (11-12 años) sin conocimientos formales de álgebra y alumnos de primero (12-13 años) y segundo curso de secundaria (13-14 años) que inician su formación algebraica. Participan 313 estudiantes que resuelven una tarea de generalización en el contexto funcional del álgebra escolar. Dicha tarea forma parte de una prueba de selección de un programa de estímulo del talento matemático. Los resultados muestran que los estudiantes representan la generalización de las relaciones funcionales verbal y simbólicamente. También evidencian que, a diferencia del uso de relaciones funcionales, las representaciones de generalización sí se ven influenciadas por el curso. En secundaria se detecta mayor diversidad en las estructuras de las relaciones funcionales.

Palabras clave: *generalización, pensamiento algebraico, relaciones funcionales, representaciones de generalización*

Abstract

We describe the representations of generalization used by elementary school sixth graders (12 years old), without formal knowledge of algebra, and first and second graders in high school (13 and 14 years old, respectively), who begin their algebraic training. A total of 313 students participated in solving a generalization task in the functional context of school algebra. The task was part of a selection test to participate in a mathematical talent program. The results inform that students represent the generalization of the functional relationships verbally and symbolically. They also show that, unlike the use of functional relationships, the representations of generalization are influenced by the students' grade. The representations of the functional relationships in high school are more diverse in structure.

Keywords: *generalization, algebraic thinking, functional relationships, representations of generalization*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la investigación centrada en el pensamiento algebraico revela que las dificultades que muestran los estudiantes en primaria son similares a las de los estudiantes de secundaria (e.g., Warren, Trigueros y Ursini, 2016). Así mismo, destacan la generalización, su representación, el sentido de variabilidad y la relación que se puede establecer entre variables como elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Radford, 2018; Warren et al., 2016). Se sugieren estos elementos como dimensiones a incorporar en el currículo desde los primeros cursos (Kaput, 2008). En esta línea, el enfoque funcional del álgebra comprende la generalización y la representación de relaciones entre cantidades covariantes así como el razonamiento con estas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Dentro de la investigación en pensamiento algebraico es fundamental la generalización y, en consecuencia, la representación de la generalización y las estrategias para generalizar (Kaput, 2008; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Radford, 2018). Estudios sobre la generalización revelan una extendida dificultad en los estudiantes para emplear estrategias adecuadas para generalizar (e.g., Moss y Beatty, 2006; Stacey, 1989). Las estrategias funcionales que abordan el establecimiento de una relación entre las variables destacan como las más útiles y eficaces para generalizar (e.g., Amit y Neria, 2008; Zapatera Llinares, 2018).

La literatura evidencia la capacidad de estudiantes de primaria y primeros cursos de secundaria para generalizar, usar estrategias funcionales y emplear representaciones variadas. Investigaciones en el enfoque funcional del *early algebra* evidencian las capacidades de estudiantes de primaria sin formación algebraica previa. Torres, Cañadas y Moreno (2019) identifican que estudiantes de segundo curso de primaria (7-8 años) reconocen estructuras y son consistentes en su empleo en casos particulares, aunque no siempre las generalizan. Los investigadores destacan que los estudiantes emplean representaciones verbales y numéricas en sus respuestas. Ureña et al. (2019) evidencian que estudiantes de cuarto curso (10-11 años), sin instrucción previa, usan distintas representaciones al generalizar (e.g., numérica, verbal y simbólica) y se mueven entre ellas. La distinción entre las representaciones radica en el modo en que expresan implícita o explícitamente la relación funcional que se reconoce entre las cantidades de las variables implicadas. Pinto y Cañadas (2017, 2019) muestran que estudiantes de tercer y quinto curso (8-9 y 10-11 años, respectivamente) generalizan relaciones funcionales, principalmente por medio de lenguaje natural, y observan que los mayores fueron más consistentes en el empleo de una estructura en su trabajo. Radford (2018), en un estudio longitudinal desde segundo curso (7-9 años) hasta séptimo (12-13 años), destaca la variedad de sistemas semióticos (e.g., gestos, lenguaje natural, símbolos) en la generalización. Con alumnos de sexto a octavo curso (10-15 años), Akkan (2013) observó que los estudiantes menores usaron más representaciones verbales en sus generalizaciones, a diferencia de los de cursos superiores, donde emplearon más simbología algebraica. Otros estudios en *early algebra*, muestran que, con instrucción, escolares desde los primeros cursos de primaria son capaces de identificar variables y la dependencia entre estas, progresar en el uso de representaciones conforme aumenta el curso, así como representar y generalizar diferentes relaciones funcionales (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Blanton y Kaput, 2004).

En este estudio tenemos como objetivo analizar las representaciones de estudiantes de último curso de primaria y primeros cursos de secundaria al generalizar en una tarea que involucra una relación funcional. Las producciones de estos alumnos permitirán evidenciar cómo la formación algebraica y experiencias educativas que han recibido influyen en su representación de la generalización. Estos estudiantes no han recibido formación algebraica previa a la educación secundaria. Analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes que se presentan a resolver una prueba para ingresar a un programa de talento matemático.

MARCO CONCEPTUAL

Este trabajo se centra en el pensamiento funcional, reconocido como uno de los componentes del pensamiento algebraico (Warren y Cooper, 2005). El pensamiento funcional comprende la manipulación, generalización y representación de relaciones entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2011). Nos centramos en la generalización considerada como el corazón del pensamiento algebraico (Kaput, 2008), para describir las representaciones de generalización de los estudiantes.

En este contexto se distinguen tres tipos de relaciones funcionales: (a) de recurrencia, que atiende a la variación de los valores asociados a una sola de las variables, los cuales se obtienen a partir de otros valores de la misma variable determinados previamente, (b) correspondencia, que aborda la correlación entre pares de valores correspondientes asociados a la variable independiente y la dependiente y (c) covariación, que implica el análisis de cómo el cambio en una variable afecta a la

otra (Smith, 2008). Las relaciones de correspondencia representadas o utilizadas por los alumnos pueden ser caracterizadas en términos de su estructura, que hace referencia a cómo se organiza y expresa la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017).

Diferentes concepciones de generalización coinciden en el reconocimiento de la regularidad, la generación de nuevos casos y su representación. Según Pólya (1989), generalizar consiste en generar nuevos casos con base en la regularidad de un conjunto de elementos. Radford (2018), en la generalización algebraica, involucra también la elaboración de una expresión que represente a todos los elementos. Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela (2017) distinguen la generalización como proceso o producto, donde el producto sería el resultado de alguno de tres procesos: (a) la identificación de una regularidad en un conjunto de elementos, (b) extender el razonamiento más allá de los casos originales o (c) la ampliación de los resultados desde casos particulares.

En el contexto funcional de este trabajo, consideramos la generalización de una relación funcional como la identificación y representación de la regularidad subyacente a la tarea extendiendo el razonamiento más allá de los casos en los que fue originado (Ureña et al., 2019). Las representaciones de la generalización son un componente medular de la generalización (Kaput, 2008; Radford, 2018), y hacen referencia a cómo la generalización es manifestada y representada.

METODOLOGÍA

El estudio es descriptivo y exploratorio. Intencionalmente participan 313 estudiantes: 33 estudiantes de sexto curso de primaria (6EP), 167 de primer curso de secundaria (1ESO) y 113 de segundo curso de secundaria (2ESO). Los estudiantes resuelven un cuestionario de cinco tareas como prueba de ingreso a un programa de estímulo de talento matemático. Trabajamos con estos alumnos al presuponerse una actitud positiva hacia la matemática y mayor habilidad para generalizar, permitiendo obtener información directa sobre las representaciones de generalización que manifiestan. Analizamos aquí las respuestas a la primera tarea que implica la generalización de una relación funcional lineal.

Para el análisis de la información y la presentación de los resultados, cada estudiante fue designado por la letra E y un número del 1-313 así como un subíndice numérico (6=6EP, 1=1ESO, 2=2ESO) que refiere al curso. Por ejemplo, el estudiante E110₁ refiere al estudiante número 110 y está en 1ESO.

Tarea propuesta

La tarea (Figura 1) solicita a los estudiantes determinar la cantidad de cuadrados que se pueden formar habiendo marcado unos puntos que hacen de vértices. Esta tarea sigue una organización inductiva, es decir, va de los casos particulares (3, 4 y 100 días) al general (n días), e invita a los estudiantes a generalizar la función $y=4x-6$, que se establece entre el número de días (variable independiente) y la de cuadrados que se pueden formar (variable dependiente).

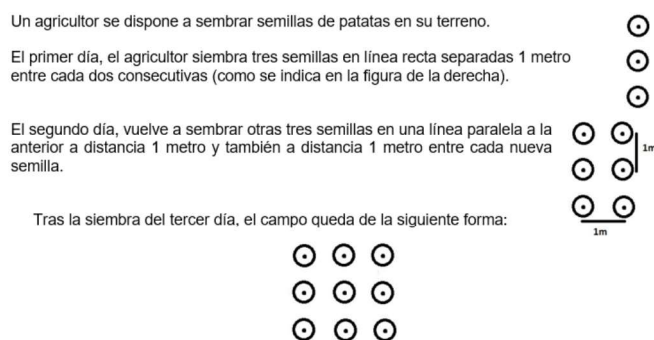


Figura 1. Tarea propuesta

Análisis

Analizamos las respuestas de los estudiantes a la tarea distinguiendo si evidencian o representan la generalización, en qué casos lo hacen y qué representación emplean. Las unidades de análisis son las respuestas a las preguntas para los casos 3 y 4, 100 y n, independientemente de si estas son correctas o incorrectas. Para analizar las representaciones de generalización de los estudiantes partimos de las categorías de representaciones de generalización definidas por Ureña et al. (2019) (numérica, verbal y simbólica) de las cuales seleccionamos las manifestadas por nuestros participantes. Distinguímos por tanto los siguientes casos según si el estudiante:

- (a) No representa la generalización ni da evidencias de haber identificado ninguna regularidad en los casos particulares trabajados.
- (b) No representa la generalización, pero sí da evidencias de haber identificado cierta regularidad en los casos particulares trabajados. En estos casos los estudiantes expresan sus respuestas con representaciones numéricas.
- (c) Representa la generalización: el estudiante representa una regla que relaciona las cantidades indeterminadas involucradas. Diferenciamos dos casos:
 - a. Representaciones verbales de la generalización: la regla general es representada por medio de lenguaje natural que refiere a las cantidades indeterminadas relacionadas.
 - b. Representaciones simbólicas de la generalización: la regla general es representada utilizando simbolismo algebraico como representación de las cantidades indeterminadas.

RESULTADOS

Las generalizaciones de los estudiantes tienen lugar en las respuestas a las preguntas vinculadas a los casos 100 y n. La tabla 1 presenta estos datos distinguiendo el curso de los estudiantes, los casos en que representan la generalización y el tipo de representación empleada.

Tabla 1. Representaciones de generalización por caso y curso

Curso	Caso n	Caso n	Caso n	Caso n	Total
	No representa ni identifica	No representa pero identifica	Representación Verbal	Representación Simbólica	
	Caso 100 No representa ni identifica				
6EP	0	0	1	0	1
1ESO	0	0	0	3	3
2ESO	0	0	0	1	1
	Caso 100 No representa pero identifica				
6EP	1	0	1	0	2
1ESO	0	0	0	7	7
2ESO	1	0	0	7	8
	Caso 100 Representación Verbal				
6EP	4	0	1	2	7
1ESO	7	0	7	10	24
2ESO	1	0	4	10	15
	Caso 100 Representación Simbólica				
6EP	1	0	0	0	1
1ESO	0	0	0	4	4
2ESO	0	0	0	2	2

Un total de 11 (de 33) estudiantes de sexto de primaria, 38 (de 167) de primero de secundaria y 26 (de 113) de segundo de secundaria identifican cierta regularidad o representan la generalización estableciendo una relación funcional entre dos variables. Los casos en que el estudiante no representa, pero sí identifica una regularidad se dan sólo en el caso 100 y principalmente en secundaria. Los estudiantes relacionan las cantidades concretas asociadas a las variables haciendo uso de una

regularidad derivada de las soluciones a los primeros casos particulares. Por ejemplo, E85₁ responde que se forman $98 + 99 \cdot 2 = 296$ cuadrados, es decir, emplea la relación funcional $(n-2)+(n-1) \cdot 2$. La mayoría de estos estudiantes representan la generalización simbólicamente en el caso n.

En lo que respecta a las representaciones de generalización, distinguimos diferencias según el caso al que dan respuesta los estudiantes. En el caso 100 la representación de generalización más común en todos los cursos es la verbal (Tabla 1). Llama la atención que las representaciones de generalización más frecuentes son de la forma “cada día aumenta en 3 cuadrados” o similares, en las que expresan una regularidad general de tipo recursivo. Sin embargo, al analizar de forma global sus respuestas a la tarea, las relaciones funcionales generalizadas son de correspondencia. Dichas relaciones en ocasiones presentan estructura multiplicativa de la forma $3n$ o análogas (observadas en mayor cantidad en secundaria), pero también apreciamos relaciones funcionales con estructuras más complejas. Por ejemplo, en sexto curso, E1₆ generaliza verbalmente “cada día se añaden 3” y emplea la relación funcional de correspondencia $3(n-4)+8$ tomando como base 8 cuadrados que se forman en 4 días (Figura 2). Análogamente, E20₆ reconoce que “cada día se forman 2 cuadrados de $1m^2$ y 1 de $4m^2$ ” y obtiene un total de $96 \cdot 3 = 288$ cuadrados. En secundaria, las representaciones verbales de generalización son similares, aunque reconocemos algunas que se ajustan más a la estructura de la relación funcional implícita en sus producciones. Ejemplificando, E210₂, quien reconoce todos los cuadrados posibles, afirma que “cada día que pasa se pueden formar 4 cuadrados más. Le restamos dos porque el segundo día sólo se pueden formar dos cuadrados, dos menos que cuatro. Luego le quitamos 4 porque el primer día no se forma ninguno”. Él emplea la relación funcional de correspondencia $4n - 2 - 4$, generalizada simbólicamente en el caso n. E98₁ plantea que en 100 días hay “ $x=2+98 \cdot 3=296$ porque me he dado cuenta de que cada día hay tres cuadrados más que el día anterior, entonces he pensado que como hay 2 cuadrados en 2 días habrá que sumarle 3 durante 98 días”. En el caso n también son evidenciadas representaciones verbales de generalización parecidas a las descritas en el caso 100, principalmente en sexto curso de primaria.

Cada día se añaden 3 = \square , \square , \square
 Así que = $(3 \cdot 96) + 8 = 296$

Figura 2. Respuesta de E1₆, caso 100

En el caso n la representación de generalización más común en secundaria es la simbólica (Tabla 1), donde los estudiantes representan relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diferentes utilizando la letra propuesta (n). Distinguimos dos formas de representación simbólica de la generalización según si involucran términos generales a modo de variables o simbología alfanumérica. Ambas casuísticas se observan en sexto de primaria en los dos casos 100 y n, mientras que en primero de secundaria sólo se aprecia en el caso 100. Las relaciones funcionales representadas en sexto de primaria son sencillas y tienen principalmente una estructura multiplicativa, a pesar de que en el caso 100 usan otras estructuras (acorde con su trabajo en los casos previos). E1₆ por ejemplo pasa de la representación verbal (Figura 2) a simbólica en el caso n, y cambia la estructura de la relación funcional que identifica. En el último caso él escribe que se forman $(n \cdot 3)$ cuadrados. En el caso 100 sobresale un estudiante que plantea simbólicamente la relación Solución = N° de día $\cdot 3$, involucrando términos generales como variables. En secundaria, por otro lado, son expresadas simbólicamente generalizaciones con estructuras más diversas, coherentes con las empleadas por los mismos estudiantes en los casos anteriores de la tarea. Por ejemplo, E292₂ anota la relación $2n+(n-4)$ de acuerdo a la tabla que elabora previamente (Figura 3). Otros estudiantes escriben las siguientes expresiones simbólicas: $2(n-1)+n-2$ (E272₂), $n \cdot 3-4$ (E208₂) o $(n-2)+(n-1) \cdot 2$ (E85₁), entre otras.

Día	Nº de	Nº Simbólicas	Nº Verbales
1	0	8	0
2	8	6	2
3	16	9	5
4	24	12	8
100	300	300	300

Diagrama de transición: $\begin{matrix} \circ 8 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ 3 \end{matrix}$ con flechas que indican transiciones de 8 a 3 y de 3 a $n-2$ y $n-4$.

Figura 3. Tabla de E292₂, caso 100

La tabla 1 también muestra un contraste entre las representaciones de generalización de los estudiantes de primaria y secundaria. Los alumnos de sexto curso por un lado representan la generalización mayoritariamente en el caso 100 y principalmente de forma verbal. Solo tres alumnos generalizan en ambos casos 100 y n. Partiendo de la representación verbal de la generalización en el caso 100, uno de ellos mantiene la representación verbal en el caso n y los otros dos cambian a la representación simbólica. Por otro lado, en secundaria sobresale una mayor representación simbólica de la generalización en el caso n. También destaca el paso de la identificación de la regularidad o la representación verbal de la generalización a la representación simbólica entre el caso 100 y n. Y mientras que en secundaria una disminuida cantidad de estudiantes representa simbólicamente la generalización en ambos casos, en primaria esto no ocurre.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo describimos las representaciones de la generalización, en un contexto funcional, manifestadas por estudiantes que finalizan la educación primaria y estudiantes que inician su formación algebraica formal en secundaria. Aportamos una reorganización de las representaciones de generalización en contextos funcionales definidas por Ureña et al. (2019).

Tanto en primaria como en secundaria las representaciones de generalización evidenciadas son verbales o simbólicas. Entre primaria y secundaria cambian las estructuras de las relaciones funcionales y la coherencia entre la representación de generalización y la relación funcional usada. No identificamos grandes contrastes en las estructuras de las relaciones funcionales o las representaciones de generalización empleadas por los estudiantes de los dos cursos de secundaria. Sí observamos que, si bien los estudiantes de sexto curso usan en el caso 100 relaciones funcionales acordes con una regularidad derivada de los casos previos, es principalmente en secundaria dónde en el caso n los estudiantes representan de forma general (principalmente simbólicamente) las relaciones funcionales empleadas. El trabajo permite concluir que, si bien el establecimiento de relaciones funcionales no se ve influenciado por la edad y formación de los estudiantes, las representaciones de generalización sí probablemente como consecuencia de la formación algebraica recibida por los alumnos de secundaria. En concordancia con más investigadores (e.g., Akkan, 2013; Radford, 2018), apreciamos que conforme aumenta el curso mejora el rendimiento de los estudiantes para generalizar y representar.

Algunos estudiantes, mayoritariamente de secundaria, no representan la generalización en el caso 100 y sí en el caso n, dando incluso una representación simbólica de la relación funcional identificada. Las respuestas de estos estudiantes al caso 100 sugieren la identificación de una regularidad que, aunque no es representada, queda expresada implícitamente mediante las expresiones numéricas utilizadas. Interpretamos que este resultado se debe a la naturaleza numérica de la cuestión planteada. En consecuencia, destacamos la necesidad de proponer cuestiones generales a los estudiantes que demanden explícitamente la generalización para favorecer la expresión de la misma.

La representación verbal de generalización es observada principalmente en el caso 100. Coincidimos con otros trabajos (e.g., Akkan, 2013; Pinto y Cañadas, 2017, 2019; Torres et al., 2019) en reconocer

la inclinación de los estudiantes de primaria a usar la representación verbal en sus generalizaciones. Esto se puede deber a que no han sido introducidos al uso del simbolismo algebraico. Por otro lado, en esta forma de expresar la generalización apreciamos en todos los cursos una tendencia a referir al incremento constante entre los casos, sugiriendo la identificación de una relación funcional recursiva, y que, sin embargo, se ha vinculado con el empleo de relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diversas. Este hallazgo evidencia la falta de precisión de las expresiones verbales de los estudiantes. Coincidimos con Barbosa et al. (2012) en la necesidad de proveer oportunidades a los estudiantes para que desarrollen y ejerciten la comunicación y expresión verbal de sus ideas.

La representación simbólica de la generalización es exhibida en el caso n y principalmente en secundaria como consecuencia de su familiaridad en el uso de letras. Este hallazgo evidencia además mayor habilidad de los estudiantes de secundaria para ir más allá del uso de una relación funcional hacia su representación general simbólica. Por otro lado, identificamos representaciones simbólicas que no sólo involucran simbolismo algebraico convencional y que han permitido la representación estructurada de relaciones funcionales. Como en otros trabajos, reconocemos la variedad de representaciones que validan el pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Amit y Neria, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018; Ureña et al., 2019).

Llama la atención que, aunque se podría presuponer habilidades matemáticas de los participantes para generalizar, la mayoría de estudiantes no generaliza, incluso en secundaria habiendo sido introducidos al álgebra. Contrastando nuestros resultados con estudios previos en el marco de la propuesta *early algebra* (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Blanton et al., 2015), reconocemos capacidades iguales o superiores en estudiantes de edades inferiores. Valoramos que una limitada experiencia de nuestros participantes con prácticas algebraicas desde los primeros cursos escolares puede haber limitado sus producciones. En línea con la promoción del pensamiento algebraico de los estudiantes y la habilidad de generalización en contextos funcionales, los resultados sugieren la pertinencia de (a) facilitar a los estudiantes situaciones que impliquen la generalización de relaciones funcionales con estructuras diversas que a su vez exijan un uso razonado de estrategias diferentes para generalizar e (b) invitar a la manipulación y representación de cantidades indeterminadas, así como de las relaciones entre estas por medio de distintos tipos de representaciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento de los estudios de posgrado del primer autor por parte de la Universidad de Costa Rica y como parte de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

- Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders's efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema*, 27(47), 703-732.
- Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40(1), 111-129.
- Barbosa, A., Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(3), 273-293.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Blanton, M, Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 59-78.
- Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441-465.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-019-00300-2
- Pólya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México, DF: Trillas.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA: NCTM.
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.
- Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614.
- Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162.
- Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Rotterdam, Países Bajos: SensePublishers.
- Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87-114.