El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos

Cristina Ayala-Altamirano y Marta Molina

A partir de un análisis microgenético del proceso de generalización de tres estudiantes de cuarto de primaria, se describe cómo construyen, dan sentido y expresan una relación funcional en un contexto de resolución de problemas. Los resultados contribuyen a la comprensión y reflexión sobre la integración del enfoque funcional en las aulas de primaria. Se distinguen diferentes grados de sofisticación en el proceso de generalización según los medios semióticos empleados. Uno de los estudiantes expresa de forma explícita la generalización mientras que en los otros dos casos queda implícita en las acciones de los estudiantes sugiriendo una incipiente conciencia sobre lo indeterminado o presencia de la analiticidad.

Términos clave: Educación primaria; Generalización; Medios semióticos; Pensamiento funcional

Process of Generalizing and Generality in Action. A Case Study.

Based on a microgenetic analysis of the generalization process of three fourth grade students, we describe how they construct, make sense of and express a functional relationship in a problem-solving context. The results contribute to the understanding and reflection on the implementation of the functional approach in primary classrooms. Different degrees of sophistication in the generalization process are distinguished according to the semiotic means employed. One of the students explicitly expresses generalization while in the other two cases it is implicit in the students' actions suggesting an incipient awareness of indeterminacy or presence of analyticity.

Keywords: Elementary education; Functional thinking; Generalization; Semiotic means

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA, 15*(3), 211-241.

En el marco de la propuesta *Early algebra*, esta investigación parte del enfoque funcional o concepción del álgebra denominada estudio de las funciones. Desde esta perspectiva “las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas” (Cañadas y Molina, 2016, p.212) son elementos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos. En este trabajo se busca complementar las investigaciones existentes sobre este enfoque en las etapas de educación primaria adoptando una perspectiva semiótica histórico-cultural y una perspectiva multimodal del pensamiento. Nuestro objetivo es describir cómo tres estudiantes (9 a 10 años) construyen, dan sentido y expresan la relación funcional durante el proceso de generalización. Para esto, indagamos cuáles son las estrategias que emplean, en qué momento se producen cambios en su actividad, cómo comunican las relaciones que identifican y qué características de la tarea motivan a los estudiantes a cambiar de estrategia o generalizar.

Las cuestiones que son de nuestro interés han sido investigadas previamente a través de estudios longitudinales que se han centrado en el aprendizaje a lo largo del tiempo y utilizan progresiones y trayectorias de aprendizaje como herramientas para comprender y representar el desarrollo de la comprensión de los estudiantes (Stephens et al., 2017). Por ejemplo, Blanton y colaboradores han propuesto trayectorias hipotéticas sobre la generalización (Blanton et al., 2015) y sobre la apropiación de la notación de la variable (Blanton et al., 2017). A diferencia de estos estudios, este trabajo busca aportar al estudio de la generalización a partir de un seguimiento detallado del proceso efectuado por cada estudiante en una sola sesión de clases. Por esto seleccionamos una muestra pequeña y realizamos un análisis microgenético. Este tipo de investigación permite profundizar en cómo los estudiantes razonan hasta llegar a la generalización y cómo expresan dicha generalización. Además, facilita la observación de los cambios y permite detectar la variabilidad del comportamiento de los estudiantes ante la misma tarea u otras similares (Bermejo, 2005; Wertsch y Stone, 1978).

En el estudio de los distintos medios semióticos movilizados por los estudiantes consideramos tanto representaciones personales como convencionales. Atendemos así a una línea de investigación abierta señalada por Kaput (2009) y complementamos investigaciones previas sobre el desarrollo de pensamiento algebraico desde los primeros cursos que describen cómo los estudiantes logran establecer la relación entre las variables y expresarlas de diversas formas por medio de representaciones convencionales tales como tablas, notación algebraica o gráficos (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Blanton et al., 2017; Ureña et al., 2019).

Pensamiento algebraico y pensamiento funcional

Asumimos que el álgebra se refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados) que se utilizan de manera analítica. La analiticidad es clave para diferenciar lo aritmético de lo algebraico. Significa que, aunque no se conozcan las cantidades, se realizan operaciones matemáticas como si fueran conocidas (Radford, 2018). Implica deducir métodos generales para resolver problemas similares (Ursini, 2001). Al pensar algebraicamente se razona sobre la generalidad, se reconoce la estructura algebraica subyacente en una situación y las relaciones entre las cantidades. Además, el álgebra recurre a modos de representación idiosincrásicos o específicos culturalmente evolucionados (Radford, 2018).

En la perspectiva adoptada en este trabajo, el pensamiento funcional es parte del pensamiento algebraico. Se centra en el estudio de las funciones y las familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton y Kaput, 2011). El tipo de relaciones que se pueden establecer entre las variables implicadas en los problemas son de covariación o correspondencia (Smith, 2008). También pueden establecerse relaciones de recurrencia, pero solo las consideramos de tipo funcional cuando conectan las variables implicadas.

Para estudiar el pensamiento funcional adoptamos una perspectiva multimodal del pensamiento. Consideramos que el pensamiento se produce en y a través de una sofisticada coordinación semiótica. No se trata solo de ideas abstractas e intangibles situadas en la mente (Radford, 2009). Desde la perspectiva multimodal las personas comprenden ideas matemáticas tomando en cuenta diversos recursos cognitivos, materiales y perceptivos, tales como: símbolos orales y escritos, dibujos, gestos, artefactos físicos y electrónicos y su propio cuerpo (Radford et al., 2009). Los medios semióticos, por una parte, permiten entender cómo las personas conocen y comprenden los objetos matemáticos y, por otra, permiten hacerlos presentes. Son herramientas psicológicas que permiten a los sujetos reflexionar, planificar y llevar a cabo diversas acciones; actúan como mediadores culturales de las funciones psicológicas (Radford y Sabena, 2015). Además, están incluidos en la actividad de los niños alterando la forma en que entienden el mundo y a sí mismos y se desarrollan de acuerdo a las demandas de la comunicación e interacción social (Wertsch, 1995).

GENERALIZACIÓN

Entendemos la generalización de patrones y relaciones funcionales como un proceso (generalizing) así como un producto (generalization). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: identificar los elementos comunes a todos los casos, ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó y obtener resultados más amplios que los casos particulares y proporcionar una expresión directa que permita obtener cualquier término (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Strachota et al., 2018). Al generalizar, la actividad de los estudiantes puede incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Cañadas y Castro, 2007; Blanton, 2008; Pinto y Cañadas, 2018). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos de abducción, inducción o deducción, por ejemplo. Así mismo, los alumnos, para responder a los diferentes ítems planteados durante el proceso de generalización, podrían emplear estrategias de conteo u operatoria (suma, resta, descomposición, entre otras) (Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018).

Durante el proceso de generalización los estudiantes recurren a distintos medios semióticos para percibir, dar sentido y expresar las relaciones observadas. La expresión de la generalidad tendrá distintos grados de sofisticación según la contracción de los medios semióticos empleados. En el grado más sofisticado hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de los que se expresa la generalidad (Radford, 2010). Por otra parte, cabe destacar que los medios semióticos empleados pueden tener distintos grados de generalidad para cada individuo, ya que lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996).

Un punto importante a tratar es el carácter algebraico de la generalización. Mucho se ha discutido sobre esto y no existe un acuerdo concluyente (e.g. Dörfler, 2008; Radford, 2018). En coherencia con nuestra descripción del pensamiento algebraico, consideramos que una generalización algebraica está caracterizada por: referirse a cantidades indeterminadas, involucrar un razonamiento analítico y recurrir a diversas formas de expresión. Una generalización será aritmética si resuelve algunos casos de forma aislada sin reconocer una estructura común y/o no se observa evidencia que permita dar cuenta de la analiticidad del razonamiento. Además, en estos casos el foco de atención de los estudiantes será encontrar un resultado numérico concreto, sin establecer relación entre los casos particulares (Blanton, 2017).

Basándonos en las ideas de Radford (2010), consideramos distintos tipos de generalización algebraica que se caracterizan según los medios semióticos involucrados en la toma de consciencia de la generalidad del objeto matemático. Estas son factual, contextual y simbólica. En la generalización factual la indeterminación queda sin nombrar, está implícita en las acciones, gestos, usos de símbolos numéricos y la actividad perceptual, se trata de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. En la generalización contextual lo indeterminado está explícito y se relaciona con objetos del contexto. Es un avance con respecto a la generalización factual; en este caso no se generalizan solo las acciones, sino que la indeterminancia se vuelve objeto del discurso. Finalmente, en la generalización simbólica la indeterminación es explícita y representada por medio de lenguaje alfanumérico.

En una de sus investigaciones Vergel (2019) observa que durante el proceso de generalización la consciencia de los estudiantes sobre el sentido de lo indeterminado o la presencia de la analiticidad puede ser incipiente y no llegan a generalizar del modo descrito por Radford (2010). En concreto, los estudiantes a través de sus acciones pareciera que perciben la generalidad, pero no se refieren a cantidades indeterminadas de forma analítica. Sin embargo, el sentido estructural y el reconocimiento de una estructura asociada a la situación problema es la evidencia que permite inferir que comienzan a razonar de modo analítico. En este estudio esta forma de generalización la denominaremos *generalización en acto*. Este término fue propuesto por Mason (1996) quien lo describe como una posibilidad de pensar algebraicamente y se observa cuando los niños actúan como si percibieran la generalidad sin llegar a expresarla. En nuestra propuesta adaptamos la idea de generalización en acto para referirnos a una forma de generalización que se situaría entre la generalización aritmética y algebraica antes definidas. En este tipo de generalización ni la acción ni las declaraciones de los estudiantes son garantía concluyente de que la generalidad fue percibida y se refiere a cantidades indeterminadas de forma analítica, más bien son indicadores que los estudiantes comienzan a tener consciencia de esto.

MÉTODO

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es indagar en las capacidades de generalizar, representar, justificar y resolver problemas que manifiestan los estudiantes de Educación Primaria a través de la resolución de problemas que involucran una relación funcional. Es de tipo cualitativa y descriptiva. En el proyecto se diseñó e implementó una recogida de datos que incluye un diagnóstico inicial, cuatro sesiones de clase y dos entrevistas semiestructuradas individuales, una al inicio y otra al final. En este trabajo analizamos las entrevistas finales.

Participantes

Los tres entrevistados fueron seleccionados de un grupo de 25 estudiantes de 4º de primaria (9-10 años) con el objetivo de representar diferente nivel de capacidades académicas con relación a su desempeño en el diagnóstico. Estos resultados fueron contrastados con la opinión de su maestra. Mateo en el diagnóstico obtuvo una puntuación de nivel bajo, no obstante, según su maestra en las clases tenía un rendimiento alto y destacaba dentro de su grupo de clase. Hugo y Sofía obtuvieron una puntuación de nivel medio en el diagnóstico y, según la maestra, ellos tendrían un nivel académico medio-bajo en las clases de matemáticas. Para mantener el anonimato hemos cambiado sus nombres.

Los estudiantes, antes de la implementación de la intervención diseñada, no habían recibido instrucción sobre la generalización ni expresión de ideas algebraicas. En sus clases habituales habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas básicas y los números hasta un millón. La entrevistadora fue la primera autora de este trabajo, quien también participó dirigiendo las sesiones de clases junto con otros miembros del equipo.

Contexto de la investigación

En la implementación se trabajaron situaciones en las que estaban implicadas las relaciones funcionales $2x + 1$, $x + 3$ y $2x$ bien de forma explícita en el enunciado o implícita (se conocen valores de las variables independiente y dependiente). Cada relación funcional estaba asociada a contextos cercanos a los estudiantes, tales como el dinero gastado en un parque de atracciones o la cantidad de sorpresas necesarias en una fiesta de cumpleaños. Las preguntas estaban organizadas de lo particular a lo general, es decir, los estudiantes comenzaban analizando casos numéricos específicos y no consecutivos, para poco a poco llegar a plantear las relaciones observadas en términos generales. Lo general fue representado en las tareas a partir de distintos medios, tales como lenguaje natural, dibujos y lenguaje alfanumérico. También se motivó a los estudiantes a justificar sus respuestas de forma escrita y oral y a hacer uso de recursos tales como material manipulativo, tablas, sus propias manos o lápiz y papel. En Ramírez et al. (2020) se caracterizan detalladamente cada una de las sesiones y entrevistas que forman parte del estudio.

Recogida de datos

Las entrevistas individuales semiestructuradas duraron entre 25 y 30 minutos. Este tipo de entrevistas favorecen la obtención de información detallada al permitir variar las preguntas, dentro de un esquema definido, según las respuestas de los estudiantes (Ginsburg, 1997). A cada entrevistado se le pidió que pensara en voz alta mientras resolvía varias preguntas propuestas de forma oral. Las intervenciones o mediaciones del investigador para profundizar en las respuestas de los estudiantes estaban definidas en el protocolo (e.g. repetir pregunta de forma exacta, variar o destacar algunos elementos, repetir respuesta, aclarar lenguaje o introducir estímulos con expresiones de interés) y se basaban en investigaciones previas realizadas en el marco del mismo proyecto de investigación (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Ureña et al., 2019).

El contexto para todas las preguntas fue el siguiente: "En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños". Tras presentar el contexto se realizaron preguntas relacionadas con cuatro momentos: los tres primeros se enumeran en la tabla 1 y el último corresponde a la expresión de la relación inversa, la cual no tratamos en este trabajo. Las preguntas que aludían a cantidades desconocidas o indeterminadas se formularon de diversas formas: por medio de lenguaje natural, palabras claves y lenguaje alfanumérico.

Consideramos dos posibles formas expresar la relación funcional: directamente (cómo se relaciona la variable dependiente con la variable independiente) o inversamente (cómo se relaciona la variable independiente con la variable dependiente). Las relaciones que podrían establecer se muestran en la figura 1.

Los estudiantes disponían de diversos recursos que podían usar libremente y que habían sido empleados en las sesiones previas. Estos eran hojas de papel y lápiz, una tabla de doble columna para rellenar, imágenes de apoyo para visualizar la situación y globos representados en papel que podrían ser manipulados (por ejemplo, para contar o repartir).

Tabla 1
Ejemplos de preguntas planteadas

Momento	Dato desconocido	Ejemplos
1. Identificar elementos comunes en casos particulares.	Relación entre las variables	Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
2. Extender el razonamiento más allá del rango que los originó (otros casos particulares)	Valor de la variable dependiente	Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita? Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita?

Tabla 1
Ejemplos de preguntas planteadas

Momento	Dato desconocido	Ejemplos
		Un niño de la clase dice que hay 8 invitados, por lo que necesitaran 22 globos. ¿Estás de acuerdo con él?
3. Extender el razonamiento a casos indeterminados	Variable dependiente	¿Cómo le explicarías a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?
		Cuando hay "muchos" / "infinitos" invitados, ¿cuántos globos necesita?
		Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?
		¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos" ?, ¿por qué?
		¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan W globos" ?, ¿por qué?

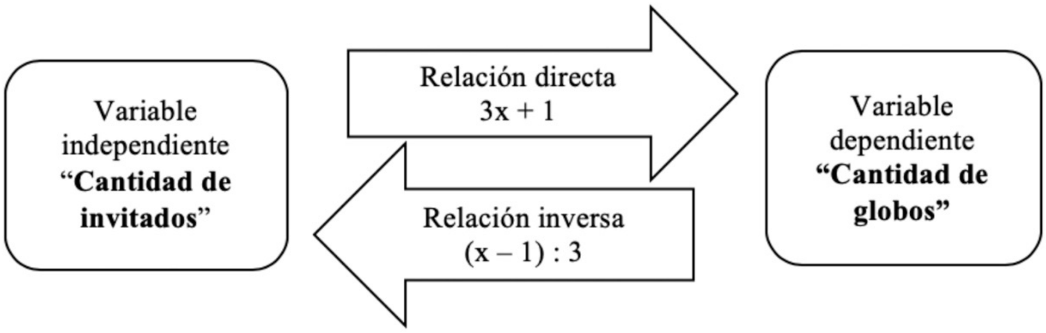

Figura 1. *Relación funcional*

Análisis de datos
Las fuentes de información fueron las grabaciones en vídeo de la entrevista final, su transcripción y las producciones escritas de los estudiantes. Con base en estas, realizamos un análisis microgenético de la actividad de los estudiantes (Radford et

al., 2009; Vygotski, 1979), el cual consistió en la observación y análisis de los intentos de los estudiantes en la solución del problema planteado. Este tipo de análisis permite el estudio de una habilidad, concepto o estrategia dentro de una sola sesión, facilita la observación de los cambios y permite detectar la variabilidad del comportamiento de los estudiantes ante una misma tarea u otras similares (Bermejo, 2005; Wertsch y Stone, 1978).

En primera instancia, las transcripciones fueron complementadas con capturas de pantalla de la videograbación donde captamos las acciones de los estudiantes y los medios semióticos (lenguaje natural, gestos, lenguaje aritmético y lenguaje alfanumérico) que utilizaron para comunicar sus respuestas. Luego, basándonos en los trabajos de Blanton (2008), Cañadas y Castro (2007), Dörfler (1991) y Pinto y Cañadas (2018), clasificamos las acciones según las categorías que mostramos en la Tabla 2.

A su vez, identificamos las estrategias que utilizan los estudiantes y las asociamos con las acciones antes descritas. En la tabla 3 describimos las categorías relativas a las estrategias, procedentes de trabajos previos (Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018).

Tabla 2
Categorías de análisis de las acciones para generalizar

Actividad del estudiante	Descripción
Explorar	Experimenta y busca solución a situaciones que involucran casos particulares.
Organizar datos	Organiza los datos de alguna manera, como por ejemplo una tabla.
Explorar	Experimenta y busca solución a situaciones que involucran casos particulares.
Organizar datos	Organiza los datos de alguna manera, como por ejemplo una tabla.
Identificar una estructura	La estrategia de acción se fija y se extiende a otros casos, explicitando cómo esta se relaciona con la situación propuesta.
Conjeturar	Propone una afirmación que explica la relación entre las variables.
Validar	Explica la veracidad de su conjetura.
Extender la acción/ generalizar	Replica de modo consistente una estrategia para establecer la relación entre diversos casos propuestos. Si logra

Tabla 2
Categorías de análisis de las acciones para generalizar

Actividad del estudiante	Descripción
	verbalizar esta relación y lo hace de modo general, se produce la generalización (como producto).
Revisar la acción/conjetura	Busca otra estrategia o modifica su conjetura.

Finalmente, programamos una Macro en Excel® que nos permitió graficar y observar cuáles fueron las estrategias empleadas por los estudiantes, captar el momento en que se produjeron cambios y relacionarlos con la pregunta. En la figura 2, se muestran cada uno de los elementos incluidos en los gráficos. No incluimos las preguntas que involucraban lenguaje alfanumérico porque la atención de los estudiantes se centró en dar sentido a este nuevo medio semiótico, no en generalizar la relación funcional, pasando a un segundo plano la situación problema.

Tabla 3
Categorías de análisis estrategias

Estrategia	Código	Descripción
Respuesta directa	RD	Presenta el resultado, sin dar explicación alguna.
Conteo	C_i	Cuenta, con apoyo concreto o no, donde i representa la secuencia de conteo seguida, por ejemplo, C_2 significa conteo de 2 en 2.
Reparto	R_i	Con material manipulativo realiza repartos, donde i representa la cantidad de objetos que reparte cada vez, por ejemplo, R_3 significa que realizó un reparto de 3 en 3.
Suma	S	Propone o realiza una adición.
Multiplicación	M	Propone o realiza una multiplicación.
División	D	Propone o realiza una división.
Comparar casos	CC	Vuelve a casos previos y los compara entre ellos o con el caso que está resolviendo.

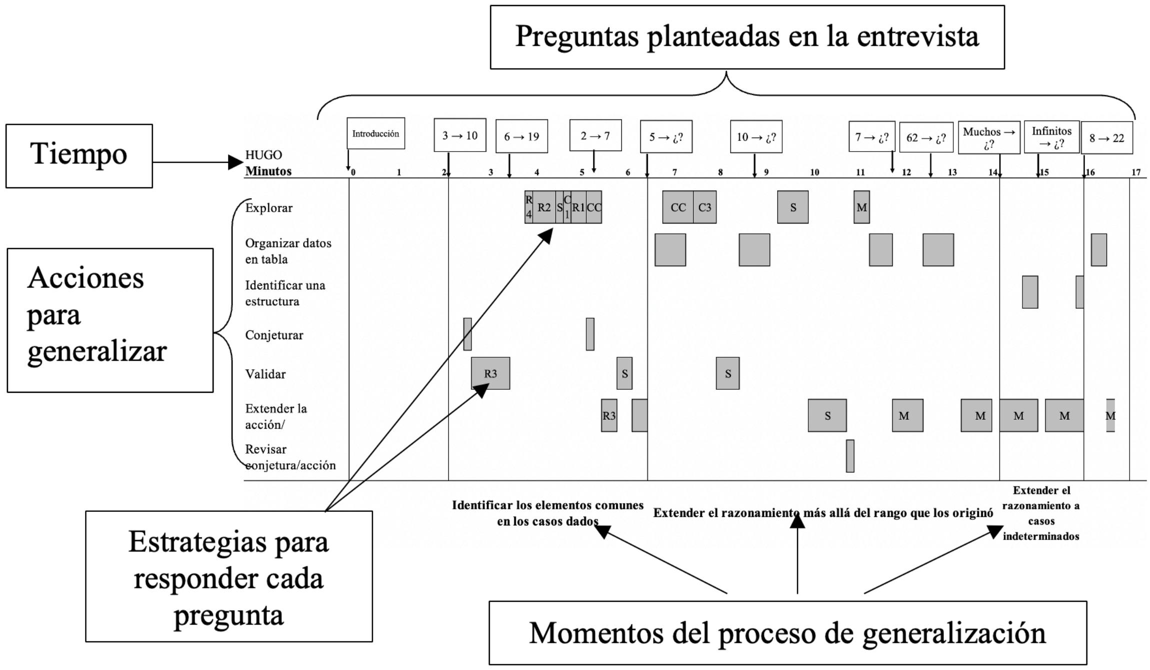

Figura 2. *Relación funcional*

RESULTADOS

El análisis descrito en el apartado previo que implicó graficar y describir las estrategias empleadas por los estudiantes nos ha permitido identificar dos formas de generalizar: Mateo generaliza de modo contextual, mientras que, Sofía y Hugo evidencian una generalización en acto. Posteriormente, al final de esta sección de resultados, comparamos la actividad de los estudiantes en relación al tiempo empleado en cada una de las preguntas.

Generalización contextual

Mateo identificó la relación involucrada en el problema y la expresó refiriéndose a cantidades indeterminadas de manera analítica. La figura 3 resume su actividad. A continuación, describimos el proceso seguido.

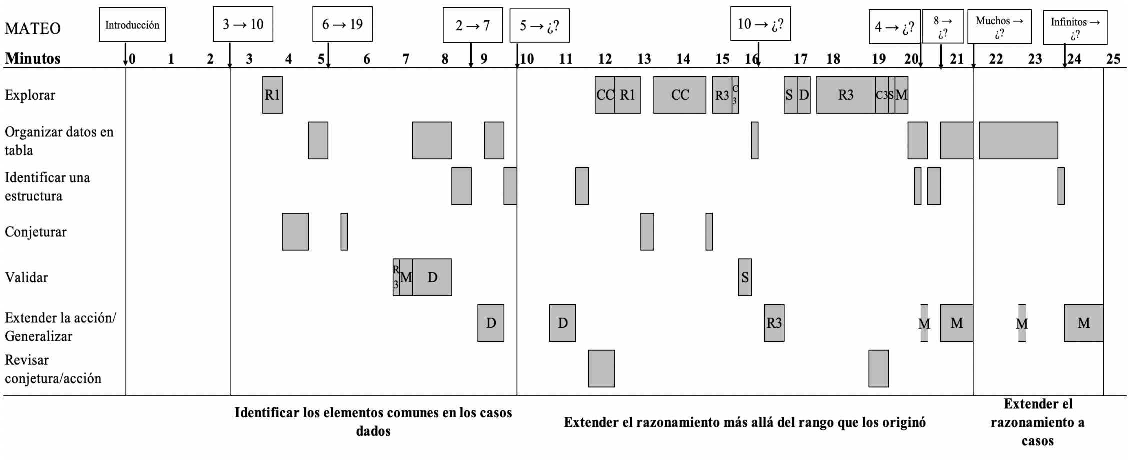

Figura 3. *Gráfico de la actividad de Mateo*

Identificar los elementos comunes.

En el primer momento de la entrevista se le propone a Mateo, de uno en uno, los siguientes pares de valores de cantidad de invitados y de globos utilizados: (3, 10); (6, 19); (2, 7). Debía explorar y explicar qué hizo Isabel con los globos. Para hallar la respuesta a la primera pregunta (3 invitados y 10 globos) utilizó los globos de papel. Seleccionó la cantidad total de globos y luego hizo un reparto uno a uno (ver figura 4). Su conjetura fue que Isabel dio tres globos a cada uno y puso uno en la puerta para saber dónde era el cumpleaños.

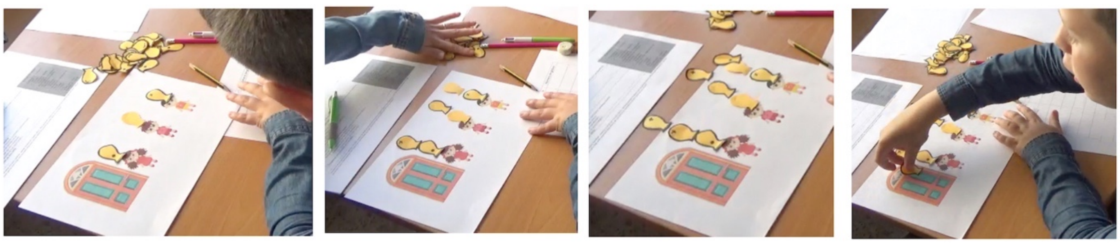

Figura 4. *Reparto de 1 en 1*

En la siguiente pregunta (6 invitados y 19 globos) repitió la conjetura propuesta anteriormente: "Pues pone uno en la puerta y tres para cada uno". Para validarla usó el material: dejó un globo en la puerta y repartió tres a cada invitado. Cuando se le preguntó cómo se podría comprobar su respuesta Mateo miró la imagen y dijo "contando" pero, en mitad del conteo, propuso dividir. Luego verbalizó su cálculo realizando una multiplicación pero, por escrito, registró una división. Su estrategia se volvió más sofisticada, del conteo y reparto uno a uno, pasó al conteo y reparto de 3 en 3, para finalmente proponer el cálculo como se muestra en la figura 5 (fila A).

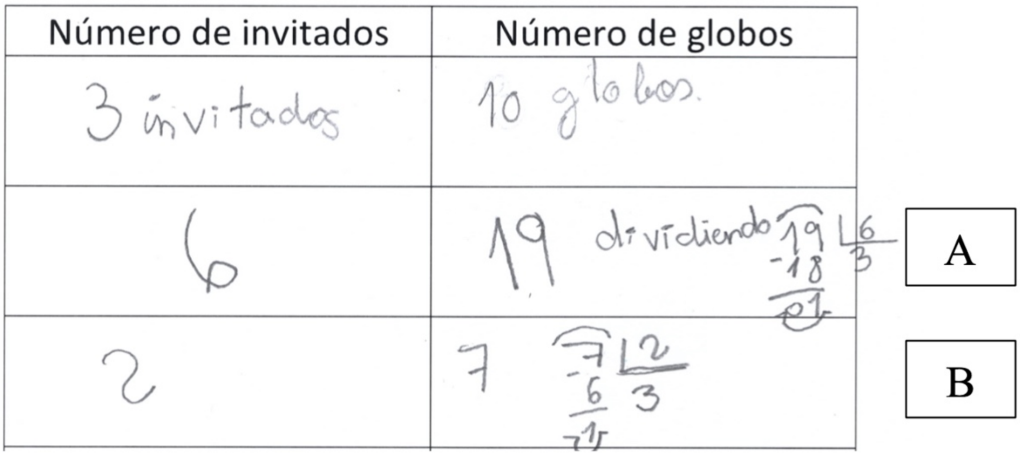

Figura 5. *Registro escrito de Mateo*

Al preguntarle qué significaba el cálculo realizado (ver figura 5, fila A), evidenció que identificaba una estructura para la situación. Mencionó los elementos del problema, tal como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

Mateo: ¿El tres? Lo que le damos a cada niño.

Entrevistador: Lo que le damos a cada niño, ¿y ese uno?

Mateo: Lo que le damos a la puerta.

En la siguiente pregunta (2 invitados, 7 globos), repitió su estrategia tal como se muestra en la figura 5 (fila B). Su explicación fue similar a la dada anteriormente y volvió a identificar la estructura.

Extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.

En este segundo momento, Mateo da respuesta al número de globos que se necesitan dadas cantidades concretas de invitados (5, 10, 4, 8). Al responder al primer caso propuso una nueva relación donde a cada invitado se le dio cinco globos y lo expresó como se muestra en la figura 6.

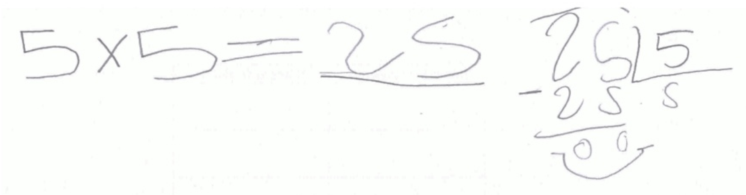

Figura 6. *Nueva relación propuesta para el cuarto caso*

Ante esto, la investigadora lo motivó a revisar su estrategia y explorar los casos anteriores. Mateo recurrió a recursos que le otorgaron mayor confianza: volvió a repartir los globos de papel en vez de calcular. Cuando justificó su respuesta dijo: “Porque le doy tres a cada uno y he sumado todos los globos que he puesto aquí” (Ver figura 7).

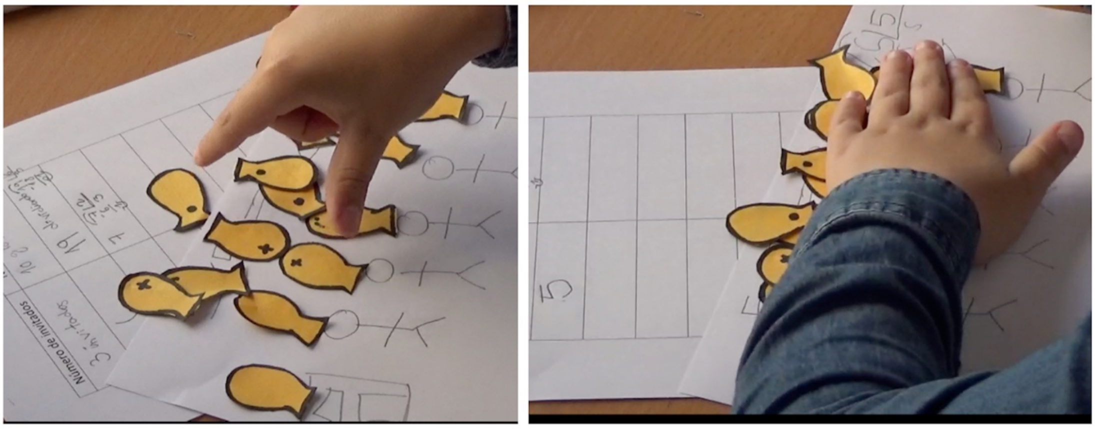

Figura 7. *Reparto en el cuarto caso*

En la siguiente pregunta Mateo solo sabía que había 10 invitados. En primera instancia los representó a través de un dibujo e intentó repartir los globos de papel, pero al no tener suficientes globos cambió de estrategia. Propuso sumar e intentó dividir diez entre tres. Pero no logró explicar su estrategia, lo que lo motivó a volver al reparto con el material manipulativo. Enseguida la investigadora le preguntó: ¿Cuántos globos hay?, ¿cómo lo pensarás? Dijo “sumas 3”, al tiempo que apunta los grupos de tres globos que representó con el material. Luego, la entrevistadora lo motivó a escribir sus cálculos (Ver figura 8, fila A). Mientras lo hacía, revisó su conjetura y mantuvo el siguiente diálogo con la entrevistadora:

Mateo: Tres por 10 igual a 30. Necesitamos 30 globos.

Entrevistador: ¿Esos tres qué significa?

Mateo: Lo que le dio a cada uno.

Entrevistador: ¿Y ese 10?

Mateo: El número de invitados.

Entrevistador: ¿Y qué pasa con la puerta?

Mateo: Que le sumo la puerta y es igual a 31.

Entrevistador: ¿Entonces cuántos globos va a necesitar?

Mateo: 31

Las limitaciones del material y la extensión del conteo favorecieron que Mateo propusiera una forma más sofisticada para encontrar la cantidad de globos. El reparto con el material ayudó a comprender la situación y fue el sustento para proponer la multiplicación. Mateo dio sentido a la fórmula que obtuvo relacionándola con el contexto. Esto evidencia que identificó una estructura relacionada con la situación. Los siguientes casos numéricos los resolvió con facilidad extendiendo la estrategia (Ver figura 8, filas B y C).

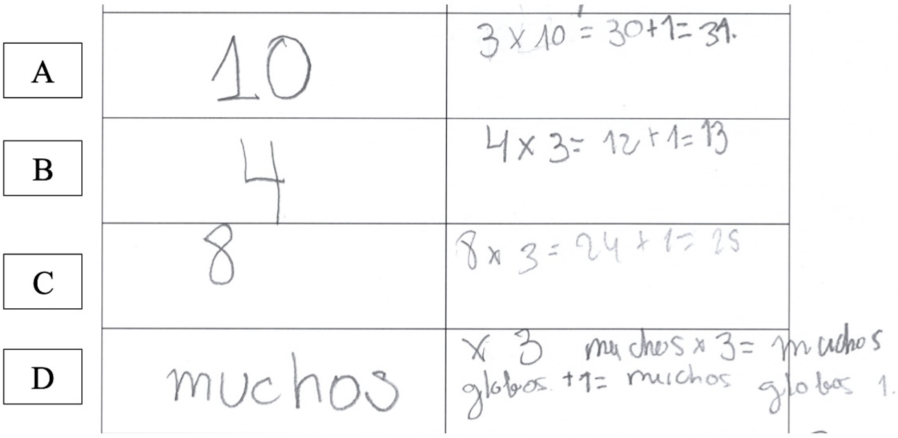

Figura 8. *Cálculo escrito de Mateo*

Extender el razonamiento a casos indeterminados.

En el tercer momento de la entrevista se preguntó a Mateo por la cantidad de globos dada una cantidad indeterminada de invitados a la que la entrevistadora refiere primero como “muchos”, después como “infinitos” y, finalmente, por medio de símbolos alfanuméricos. En el primero de estos tres casos, en coherencia con la estructura planteada en los tres casos anteriores, Mateo completó la tabla (Ver figura 8, fila D). Mientras escribía, este fue el diálogo que sostuvo con la entrevistadora.

Entrevistador: Pero ella sabe el número, solo que no te lo quiere decir a ti. Solo te dice que son muchos. ¿Cómo le explicas tú a ella qué tiene que hacer para saber la cantidad de globos? ¿Qué hiciste tú antes que ahora le puede servir?

Mateo: Multiplicar y darle tres globos a cada uno. Multiplica por tres.

Entrevistador: Y ahí cuando multiplique por tres si son muchos, ¿qué hace después?

Mateo: Muchos por tres... Igual a... a muchos globos.

Entrevistador: ¿Solo multiplica por tres? ¿Qué pasaba con la puerta?

Mateo: Más uno es igual a... muchos globos uno.

Cuando la entrevistadora preguntó qué pasaba si iban infinitos invitados, Mateo volvió a expresar la relación del mismo modo: “Pues multiplicando por tres, infinito. Por tres es igual a infinito. Entonces infinito globos, más uno, infinitos globos uno”. En ambos casos expresó la relación de forma indeterminada y realizó las operaciones matemáticas como si las cantidades fueran conocidas, representando las variables por medio de las palabras propuestas en el contexto. Al igual que le ocurrió al trabajar con el caso de 10 invitados, requirió de la mediación de la entrevistadora para implicar el globo que se coloca en la puerta, que sí incluyó al dar respuesta a los primeros casos propuestos. Sin esta intervención quizás hubiera generalizado la relación 3x. En las siguientes cuestiones consideró el número de globos de la puerta sin mediación previa de la entrevistadora.

Finalmente, al representar la investigadora la variable independiente con símbolos alfanuméricos, Mateo asignó un valor a cada letra según su forma. La letra “R” dijo que era equivalente a 2, mientras que la letra “Y” era 4 (Ver figura 9). Otra vez extendió la relación, aunque esta vez tuvo que recurrir a cantidades concretas.

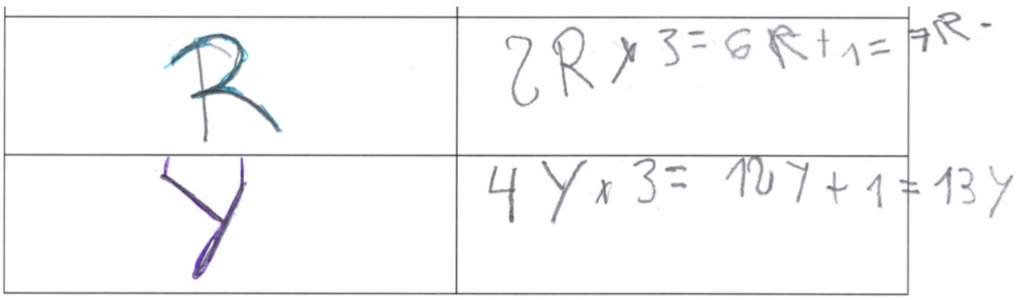

Figura 9. *Variable independiente expresada con letras*

Posteriormente evaluó la veracidad de tres pares de valores: (Z, Z+Z+Z), (Z, W) y (Z, Zx3 +1). En el primer caso Mateo señaló que era correcto porque “en vez de multiplicar, suma”. Cuando se le preguntó si se estaban considerando todos los elementos de la situación, dijo que no, que faltaba uno más para la puerta, por lo que cambió su respuesta. En la siguiente pregunta primero señaló que era correcto, luego evaluó las letras Z y W como 7 y 11 respectivamente y divide 11 entre 7, para concluir que sobran 3 globos. Cuando se le preguntó por Z invitados y Z x 3 + 1 globos, primero dijo que era correcto. Enseguida, evaluó la letra como 7 y, a medida que realizó el cálculo, lo relacionó con el contexto, mencionando explícitamente las variables.

Generalización en acto

Sofía y Hugo identificaron la relación funcional. La aplicaron y extendieron de manera coherente a todos los casos propuestos como se muestra en los gráficos de su actividad (ver figuras 10 y 11). No obstante, cuando se les preguntó por cantidades indeterminadas (muchos, infinitos o letras) recurrieron a casos particulares.

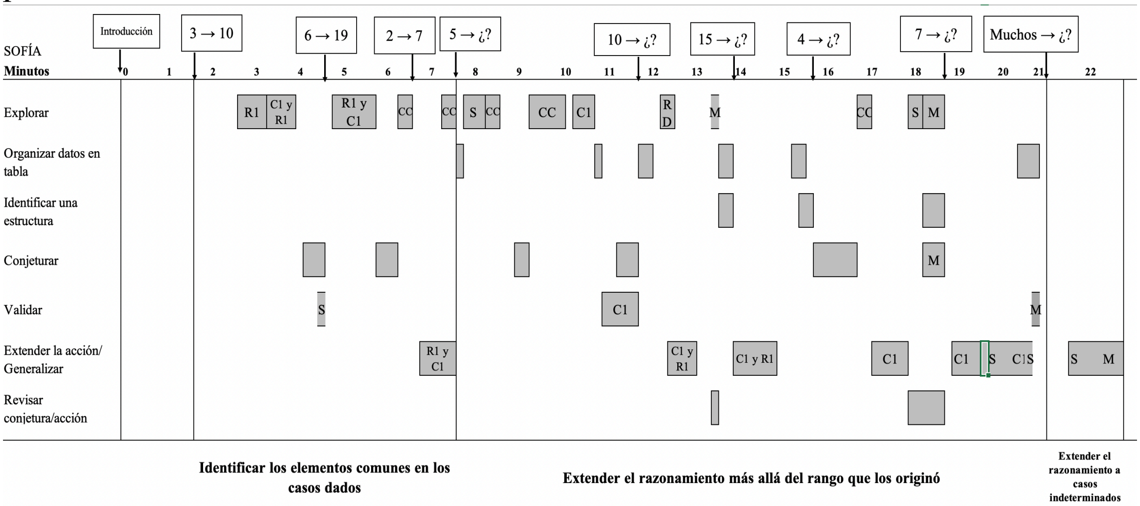

Figura 10. *Gráfico de la actividad de Sofía*

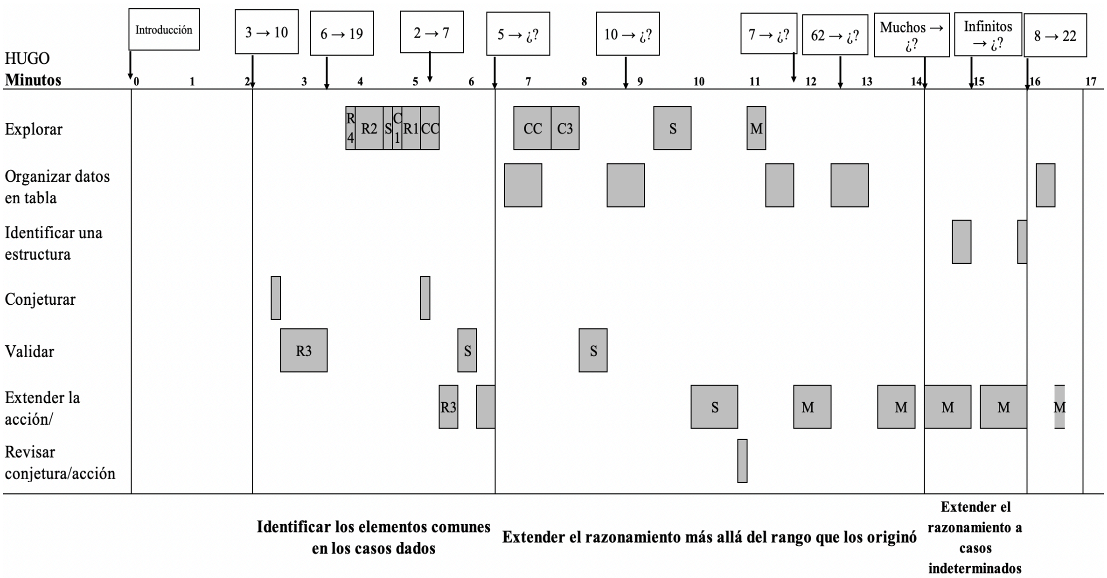

Figura 11. *Gráfico de la actividad de Hugo*

Identificar los elementos comunes

Hugo conjeturó inmediatamente que había que dar 3 globos a cada niño. Acompañó su explicación realizando gestos del reparto con su mano (Ver figura

12). Mostró tres dedos y movió su mano hacia su derecha tres veces: “Pues repartió tres. Le dio tres a cada niño y los demás se los quedó ella”. Luego validó su conjetura haciendo el reparto con el material.

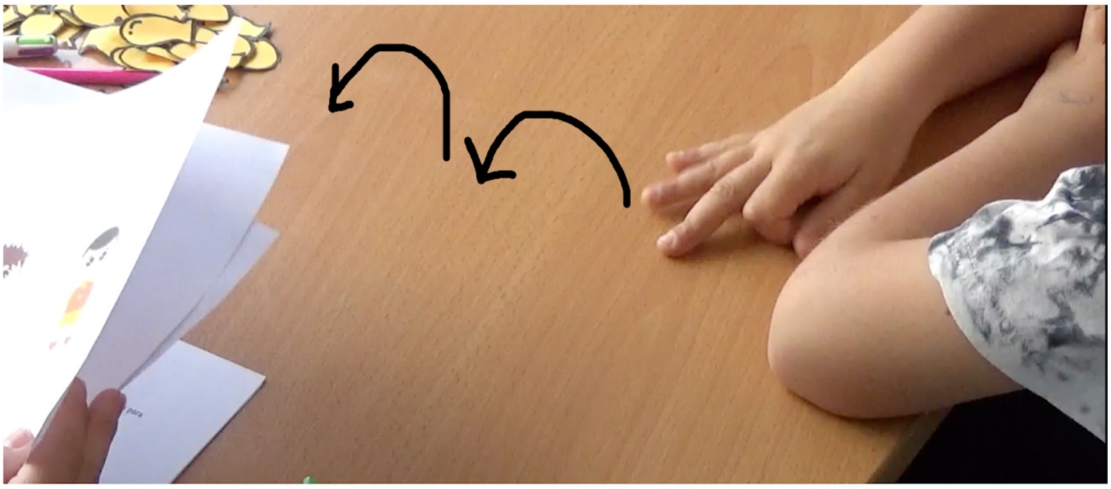

Figura 12. *Reparto con gestos*

En la segunda pregunta (6 invitados, 19 globos) no extendió inmediatamente su conjetura. Volvió a explorar la situación realizando diversos repartos acompañados de la verbalización de sumas o del conteo con los dedos. En la figura 13 se muestra cómo Hugo realizó primero un reparto de dos en dos. Luego contó cuántos globos había utilizado y apoyándose en sus dedos determinó por conteo cuántos globos le faltaban para completar 19. Finalizó comparando esta situación con la anterior, dice: “que les dio a todos los niños tres”. En la tercera pregunta repitió la acción de repartir el material y lo comprobó sumando (3 + 3 + 1). Luego, refiriéndose a todos los casos observados generalizó la relación señalando: “siempre si van algunas veces nueve o tres niños, siempre le da tres globos a cada niño”.

Sofía abordó el problema de modo similar al de Hugo. Resolvió las tres primeras preguntas a partir del reparto y conteo de globos de papel. Su conjetura fue que Isabel daba tres a cada uno y ponía uno en la puerta, la cual validó sumando 3 tantas veces como invitados había y uno más por la puerta. Comparó los casos a medida que los resolvía. Al responder a la tercera pregunta evidenció que había identificado una regularidad expresando que siempre estaba repartiendo tres globos a cada amigo.

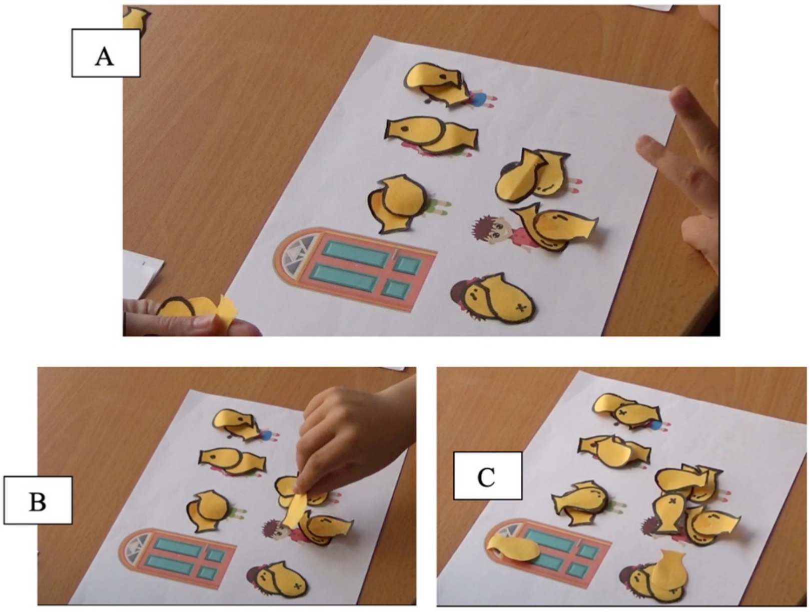

Figura 13. *Reparto 19 globos*

Extender el razonamiento más allá del rango que los originó

Al preguntar por 5 invitados, Hugo y Sofía cambiaron la relación y propusieron otros repartos. Fue necesario aclararles que se podían comprar todos los globos que quisieran. Hugo observó y comparó las imágenes de los repartos anteriores. Enseguida contó con sus dedos cinco veces tres y respondió la cantidad de globos. Para comprobarlo sumó en voz alta de tres en tres apoyándose en el registro escrito que se muestra en la figura 14.

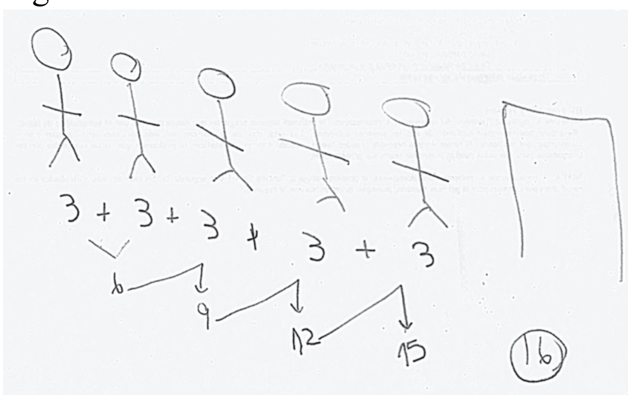

Figura 14. *Representación de Hugo para cinco invitados*

Por su parte, Sofía organizó sus ideas por escrito como se muestra en la figura 15A. La entrevistadora le preguntó qué significaban y Sofía dijo “uno en la puerta. Porque para que… si hay cinco invitados uno tres, otro tres... [cuenta de uno en uno con los dedos] quince” (Ver figura 15B). Ella verbalizó su estrategia de la siguiente forma: "porque mis dedos son, por ejemplo, los invitados. Entonces yo voy contando de tres en tres y me sale el número". En las siguientes preguntas extendió esto, apoyando su conteo con sus manos y la mano de la entrevistadora.

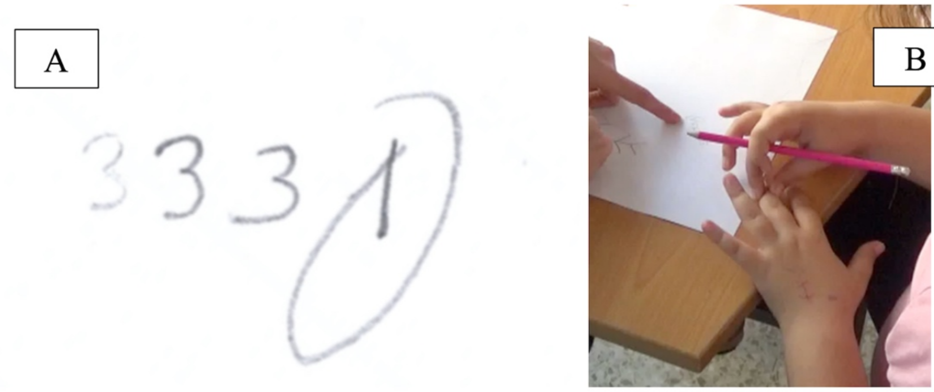

Figura 15. *Conteo con los dedos realizado por Sofía*

Cuando se indicó que había 10 invitados, ambos cambiaron su estrategia, al igual que Mateo. Hugo sumó con apoyo gráfico. En este caso su representación icónica fue más abstracta (ver Figura 16). Tras preguntarle si había otra forma de saber la respuesta, revisó su acción y dijo: "pero porque si es multiplicando, puede salir el número, pero es más difícil". A partir de este momento, Hugo extendió la estrategia de multiplicar para todas las otras preguntas tal como se muestra en la figura 16.

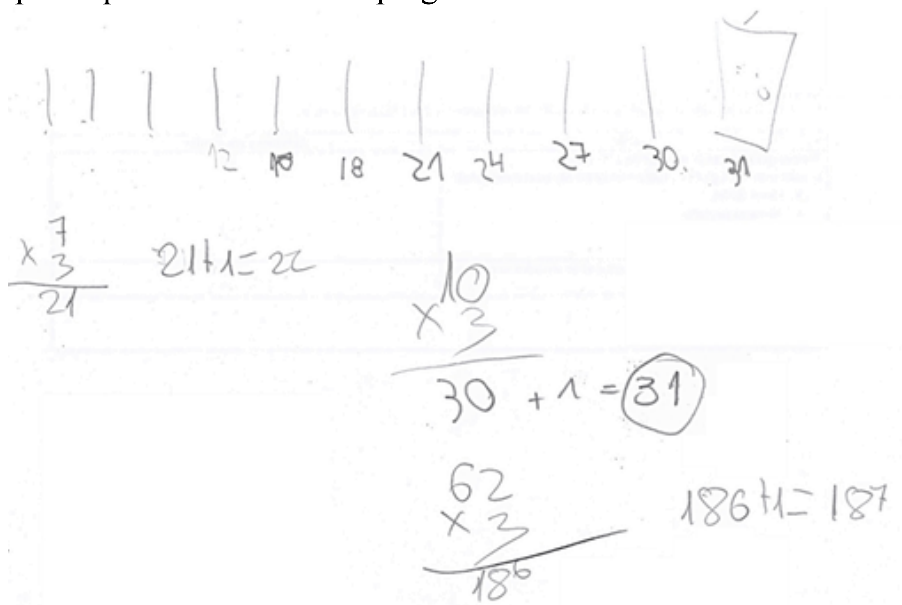

Figura 16. *Respuesta de Hugo para diez, siete y 62 invitados*

Sofía dijo inmediatamente 30, pero al no estar segura volvió al conteo. Señaló:

Sofía: Es que antes lo he hecho multiplicando y tenía la respuesta bien.

Entrevistador: ¿También se puede hacer multiplicando?

Sofía: Sí

Entrevistador: ¿Y qué multiplicaste?

Sofía: Treinta... diez por tres.

Entrevistador: Diez por tres te dio treinta y esos serían los globos para los invitados. ¿Y solo esos globos necesitamos o necesitamos más globos?

Sofía: Uno más para la puerta.

Entrevistador: Ese le sumamos uno más y nos daría...

Sofía: Treinta y uno.

Tal como se muestra en la figura 17, en los siguientes casos particulares Sofía resolvió sumando y multiplicando, aunque en primera instancia recurrió al conteo de dedos para hallar la respuesta. Identificó la estructura de la situación al relacionar sus cálculos con el contexto.

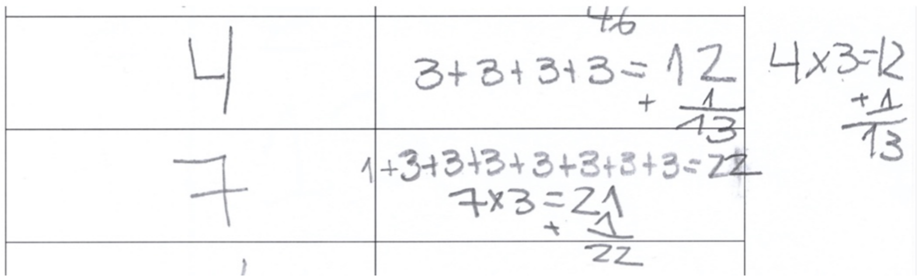

Figura 17. *Registros en tabla de Sofía*

Extender el razonamiento a casos indeterminados

Al igual que a Mateo, se les preguntó por "muchos" e "infinitos" invitados. Hugo y Sofía propusieron, como ejemplo, un número de invitados. Hugo, en el caso de "muchos", dijo "Por lo menos, si son muchos, como 100". Para "infinitos" propuso 1.000 invitados. A medida que realizó los cálculos los relacionó con la situación, dijo que el resultado de la multiplicación son los globos para los invitados y hay que sumar uno más para la puerta. Esto evidenció que había identificado una estructura. Hugo demostró aplicar la relación incluso cuando se le planteó un caso falso. Esto se evidencia en el siguiente diálogo.

Entrevistador: Y si ella te dice que son... ella te dice que son ocho invitados y que compró 22 globos, ¿tú le vas a decir que está bien calculada la cantidad de globos o que está mal calculada la cantidad de globos?

Hugo: [Hace el cálculo en el folio 8 x 3 = 24] Que está mal calculada.

Entrevistador: ¿Por qué? ¿Cuántos globos son en realidad?

Hugo: Veinticinco.

Entrevistador: ¿Por qué?

Hugo: Porque a la puerta le ponemos uno.

En el caso de Sofía, solo se le preguntó por "muchos" invitados. Lo primero que dijo fue que no podía hacer la cuenta si no sabía el número de invitados. Luego señaló que tenía que sumar o multiplicar. Propone ocho invitados para la suma: "por ejemplo, hay que sumar ocho veces tres y luego le sumas uno, que es el globo de la puerta" y nueve invitados para la multiplicación. Aclaró que el número nueve es solo un ejemplo y explicó los pasos para encontrar el resultado.

Cuando se representó una cantidad indeterminada de globos con letras, ambos actuaron de modo distinto. Hugo señaló que no sabía lo que era e ignoró la letra. Formuló multiplicaciones como "R x A" o "R x 3 = 3", pero no las relacionó con la situación. Sofía, por su parte, les asignó valores según el orden del alfabeto y extendió lo realizado anteriormente como muestra el siguiente extracto:

Entrevistador: Explícame, qué pasaba cuando invitaba a B invitados.

Sofía: Pues yo, como la B es la segunda letra, pues sumaría dos veces tres, porque tres más tres, son seis, entonces el número que habría pensado son seis, le sumo uno, que el uno es de la puerta. Son siete.

Ella no reconoció la relación en la expresión Z x 3 + 1, aunque en el caso de Z invitados y Z globos, argumentó haciendo referencia a la relación,

Entrevistador: Y si fuese Z invitados, y ella dice que necesita Z globos, ¿eso está bien o está mal?

Sofía: Esta mal.

Entrevistador: ¿Por qué?

Sofía: Porque si tenía que repartir a sus invitados, tres globos pues no... Porque si sumas Z más Z sería 27 globos, pero en vez de tres, uno.

Entrevistador: ¿No le estaría dando tres globos a cada uno?

Sofía: No, le estaría dando uno.

Comparación temporal de la actividad de los estudiantes

En la tabla 4 comparamos el tiempo empleado por cada estudiante para responder cada pregunta. Establecer la relación entre el tiempo empleado en responder cada pregunta y el proceso seguido por cada estudiante nos permite conjeturar sobre la demanda de cada una de las preguntas. En concreto, observamos que al identificar elementos comunes tardaron menos en responder la tercera pregunta, que las dos primeras. Esto podría ser porque los dos primeros casos les permitieron identificar la regularidad, la que extendieron al tercero.

Tabla 4
Tiempo (minutos) por pregunta

Momento	Preguntas	Estudiantes		
		Mateo	Sofía	Hugo
Identificar elementos comunes	3 → 10	2:33	2:57	1:17
	6 → 19	3:34	1:58	1:52
	2 → 7	1:14	0:56	1:13
Extender el razonamiento más allá del rango que los originó	5 → ¿?	6:06	4:15	2:17
	10 → ¿?	4:17	2:13	3:01
	15 → ¿?		1:43	
	4 → ¿?	0:26	3:03	
	8 → ¿?	0:45		
	7 → ¿?		2:23	0:45
	62 → ¿?			1:26
Extender el razonamiento a casos indeterminados	Muchos → ¿?	2:28	1:41	1:01
	Infinitos → ¿?	0:54		1:00
	8 → 22			0:58

En la cuarta y quinta pregunta fue donde los estudiantes invirtieron más tiempo. Esto coincide con el cambio en la forma de preguntar. En la cuarta pregunta Mateo fue quien más tardó pues al no conocer el valor de la variable dependiente no pudo emplear su estrategia de dividir la cantidad de globos entre la cantidad de invitados. Esto implicó que tuviera que volver a revisar los casos anteriores para, posteriormente, proponer la relación directa (ver figura 1) a partir del reparto del material manipulativo.

En la quinta pregunta, cuando se les preguntó por 10 invitados, todos multiplicaron y relacionaron sus cálculos con el contexto. Hugo explicitó que multiplicar era más difícil y Sofía recurrió al conteo para comprobar sus respuestas. Probablemente ella no se sentía segura de sus conocimientos sobre los hechos multiplicativos básicos. En adelante, el tiempo de respuesta de los tres estudiantes fue menor al repetir la estrategia de multiplicar.

DISCUSIÓN

En este estudio nuestro objetivo es describir cómo tres estudiantes construyen, dan sentido y expresan la relación funcional durante el proceso de generalización. Para esto, gracias al análisis microgenético realizado, hemos evidenciado las estrategias que emplean, captado el momento en el que se producen cambios en su actuación, descrito los medios semióticos que emplean durante la resolución de la tarea y la variabilidad del comportamiento de los estudiantes frente a la misma situación problema. Comentamos, a continuación, cada una de estas dimensiones de los resultados presentados.

Construcción y sentido de la relación funcional

Al comparar la actividad de los tres estudiantes, notamos que muestran distintos modos de pensar al hacer uso de distintos medios semióticos. Al igual que evidencian Pinto y Cañadas (2018), durante el proceso de generalización los estudiantes exploraron, formularon, revisaron y validaron sus conjeturas, organizaron los datos en tablas (uno de los recursos facilitados, empleado en sesiones previas) e identificaron una estructura. Complementando dicha investigación, evidenciamos que durante la exploración los estudiantes recurren a múltiples medios semióticos para dar sentido a la situación y hallar la relación funcional. Los gestos de reparto, el conteo, dibujos y registros escritos de sus cálculos fueron recursos que les permitieron elaborar conjeturas sobre la relación y se convirtieron en entidades de confianza (Mason, 2017) para manipular y dar sentido a la relación entre las variables. Luego, se convirtieron en garantía para justificar sus conjeturas o acciones. Por ejemplo, Sofía, aunque propone como regla multiplicar por tres y sumar uno, recurre al conteo de sus dedos (gesto) para validar sus respuestas.

Una clave para evidenciar que los estudiantes generalizaron fue notar que identificaron la estructura involucrada en el problema, aun cuando no lo expresaran explícitamente. Los estudiantes relacionaron las expresiones que emplearon en sus cálculos con el contexto y lo hicieron de forma coherente y recurrente en la mayoría de las preguntas. Su pensamiento algebraico se vio enriquecido dado que apreciaron de dónde provenía la expresión (Warren et al., 2013).

Expresión de la relación funcional

Desde la perspectiva adoptada en este estudio, entendemos que las acciones llevadas a cabo por los estudiantes son mediadas por las herramientas culturales de las que disponen (Radford, 2018). Con base a esto, mostramos dos formas distintas de generalizar que evidencian distintos grados de sofisticación en el pensamiento de los estudiantes.

Mateo, quien generaliza de modo contextual, expresa explícitamente la relación funcional y lo hace recurriendo a cantidades indeterminadas de modo analítico. En su trabajo es posible notar la contracción semiótica de los recursos al lograr expresar la relación en una fórmula que refiere a cantidades indeterminadas. Lo logra cuando se le pregunta por “muchos” o “infinitos” invitados. Estos términos fueron más cercanos a él que el uso de letras. Esto evidencia la importancia de incorporar variedad de formas de preguntar por lo indeterminado en el tránsito al uso de convenciones algebraicas. Quizás estos términos podrían aceptarse como formas personales de expresión.

La generalización en acto la identificamos en la actividad de Sofía y Hugo. Ellos tras analizar los tres primeros casos particulares emplean el deíctico siempre para evidenciar haber advertido una característica común, la que extienden a otros casos particulares. No obstante, no llegan a articular la relación funcional recurriendo a cantidades indeterminadas. Al responder preguntas que referían a cantidades indeterminadas, proponen casos concretos a modo de ejemplo. Sus acciones muestran que pueden encontrar valores del codominio, conociendo el valor del dominio, o pueden determinar la veracidad de una relación extendiendo la relación hallada previamente. La importancia de la generalización en acto reside en que permite describir el potencial que tienen los estudiantes para pensar algebraicamente (Mason, 1996) aun cuando su razonamiento analítico o el sentido de lo indeterminado sea incipiente. En el trabajo de Sofía y Hugo, las evidencias no son suficientes para concluir que han desarrollado el sentido de lo indeterminado como incógnitas, variables o parámetros. Hugo dice que “muchos” es "como 100”, esto podría indicar que 100 es un ejemplo o tal vez que propuso una estimación de esa cantidad. Por su parte, Sofía en sus respuestas explicita que los casos numéricos que escogen son solo ejemplos, por lo que queda abierta la posibilidad de que interprete esas cantidades indeterminadas como cualquier número, es decir una variable, pero que no pueda expresarlo de modo general, tal como lo han evidenciado otras investigaciones (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020)

La tarea y la actividad de los estudiantes

En este trabajo y en otros se ha evidenciado que los estudiantes comprenden la generalidad antes de expresarla con notación algebraica (e.g. Ayala-Altamirano y

Molina, 2020; Dörfler, 1991; Radford, 2018). A continuación, profundizamos en las características de la tarea que favorecieron esta comprensión.

En primera instancia, se motivó a los estudiantes a examinar e investigar la relación funcional a partir de un grupo de casos particulares que incluían números que facilitaron los cálculos y el uso de material manipulativo, permitiendo estrategias como el reparto o el conteo. Una vez que los estudiantes identificaron la relación entre las variables, se buscó que la extendieran, pero cambiando la forma de preguntar. Ya no conocían la cantidad de globos total, solo el número de invitados. Tal como lo evidenciamos en los resultados, al comparar el tiempo empleado para responder cada pregunta, la cuarta pregunta fue clave para que los estudiantes comprendieran mejor la situación propuesta y comprobar que establecían correctamente la relación entre número de invitados y cantidad de globos. La quinta pregunta fue clave para motivar el cambio de estrategia, quizás por las limitaciones del material o lo extenso que sería hacer el reparto o el conteo cuando el número de invitados era una cantidad mayor a las antes analizadas. El extender la relación funcional a otros casos también ayudó a los estudiantes a identificar una estructura, relacionando sus cálculos con los datos del problema.

En el tercer momento de la tarea se buscaba que los estudiantes expresaran la relación de modo general, para esto preguntamos de tres formas distintas por lo indeterminado. Esto en otras investigaciones se suele preguntar empleando letras o motivando a los estudiantes a que las utilicen. En dichos casos, al igual que en los resultados obtenidos en este estudio, los estudiantes tienden a rechazar las letras o les asocian un valor según algún referente como el abecedario o la forma de las letras (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Blanton et al., 2017; Molina et al., 2018). El uso de este medio semiótico implicó entrar en una zona de desconfianza o desconocida para los estudiantes. Una contribución de este trabajo es mostrar la efectividad de preguntar por lo indeterminado recurriendo a conceptos como “muchos” o “infinitos”. Estas formas alternativas de preguntar mantuvieron a los estudiantes en una zona de confianza, lo que les permitió focalizar su atención en la situación problema y transferir la relación identificada en los casos particulares. Aunque podría ser discutible su carácter general o indeterminado, como hemos precisado previamente, entendemos que la generalidad no es única, lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996). Esta forma de preguntar podría ser un recurso para permitir la aparición de ideas incipientes sobre lo indeterminado por parte de los estudiantes.

CONCLUSIONES

Este artículo contribuye a la reflexión sobre cómo los estudiantes abordan el proceso de generalización en un contexto funcional y a la comprensión del mismo.

La riqueza de detalle que permite el tipo de análisis realizado es uno de los aportes de este trabajo. Se evidencian los cambios en el proceso de resolución de un problema que involucra la generalización de una relación funcional y se detecta la variabilidad en el comportamiento de los estudiantes atendiendo a los medios semióticos involucrados en la tarea y los empleados por los estudiantes y las características de la tarea (distintas formas de preguntar por los casos particulares y por los casos generales).

Al atender a la introducción del pensamiento algebraico en las aulas de primaria y querer favorecer su desarrollo desde la enseñanza es importante reconocer las diferencias que se constatan entre los modos de pensamiento de los estudiantes. Ellos a veces expresan sus conocimientos de forma explícita y otras en su manera de actuar. El término generalización en acto es relevante en este contexto para llamar la atención sobre un tipo de generalización, entre lo aritmético y lo algebraico, que evidencia una incipiente conciencia sobre el sentido de lo indeterminado o presencia de la analiticidad en su pensamiento. Los resultados de nuestro trabajo también contribuyen a la comprensión del papel de los medios semióticos en la actividad del estudiante. En la acción, los estudiantes transitaron desde el reparto con material concreto a formas más sofisticadas de expresión, dieron sentido a la situación progresivamente, haciendo uso de múltiples medios semióticos.

Por otra parte, este trabajo contribuye a la identificación de características de las tareas que contribuyen a la expresión de ideas algebraicas. En concreto destacamos la importancia de preguntar por lo indeterminado de distintos modos, así como incluir diversos medios semióticos que permitan comprender la tarea y expresar las ideas propias.

Una limitación del estudio fue la poca experiencia de los estudiantes en justificar sus respuestas o explicar y reflexionar sobre sus razonamientos. Esto condujo a la entrevistadora a cuestionarles reiteradamente sobre su procedimiento y preguntarles si habían considerado todos los elementos de la situación. Sin esta intervención quizás los estudiantes no habrían generalizado la relación correcta, dado que en ocasiones olvidaban considerar el globo de la puerta. Por otra parte, considerar una muestra pequeña podría ser otra limitante, sin embargo, esto permitió comparar en detalle cada una de las acciones de los estudiantes. En coherencia con los criterios de calidad de las investigaciones cualitativas, buscamos que la generalización de nuestra investigación se logre al poder transferir los hallazgos a otros contextos (Flick, 2012) gracias a la presentación en detalle de las actividades realizadas y el contexto en el que se aplicaron.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Una de las autoras es beneficiaria de una Beca de Doctorado otorgada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, folio 72180046.

REFERENCIAS

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings Attributed to Letters in Functional Contexts by Primary School Students. *International Journal of Science and Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema, 17*(4), 559-562.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L. (2017). Algebraic reasoning in grades 3-5. In M. T. Battista (Ed.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 67-102). NCTM.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-23). Springer.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69–81.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211–220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En

E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, and J. V. Dormolen (Eds), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61–85). Springer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, *40*(1), 143–160. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0071-y

Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221–262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Flick, U. (2012). *Qualltative Sozialforschung* [Introducción a la investigación cualitativa]. Ediciones Morata.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M.C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fenema and T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). LEA

Kaput, J.J. (2009). Building intellectual infrastructure to expose and understand ever-increasing complexity. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 211–215. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9169-6

Mason, J. H., Grahamn, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press, Milton Keynes.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Springer.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97–117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Molina, M., Ambrose, R. & del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to-12-year-olds, ICME-13* (pp. 261-280). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457–466). SEIEM.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70(*2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3–12). Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 (pp. 3–25).* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91–95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, and N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7.

Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, M. L. Blanton y D. W. Carraher (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.133–163). Nueva York, NY: LEA.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M. L., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Strachota, S., Knuth, E. y Blanton, M. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 351–378). Springer. https://doi.org/10. 1007/978-3-319-68351-5_15

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation / Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ursini S. (2001) General methods: a way of entering the world of Algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, and R. Lins (Eds), *Perspectives on School Algebra.* (pp. 209-229). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_12

Vergel, R. (5 – 10 de mayo 2019). *Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico*. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM-IACME.

Vygotski, L. S. (1979). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* [El Desarrollo de los procesos psicológicos superiores]. (Trad. S. Furió). Harvard University Press y Editorial Planeta. (Trabajo original publicado en 1978).

Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75–84.

Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky and the social formation of mind* (J. Zanón & M. Cortés, Trans.; 2nd ed.). Ediciones Paidós. (Original work published 1985).

Wertsch, J. & Stone, C. A. (1978). Microgenesis as a tool for developmental analysis. *Quaterly Newsletter Laboratory of Comparative Human Cognition*, *1*(1) 8-10.

Cristina Ayala Altamirano
Universidad de Granada, España
cayala.altamirano@gmail.com

Marta Molina González
Universidad de Salamanca, España
martamolina@usal.es

Recibido: Enero de 2021. Aceptado: Junio de 2021
doi: 10.30827/pna.v15i3.18109

ISSN: 1887-3987