



Universidad
de Granada



TRABAJO FIN DE GRADO

SUPERFICIES REGLADAS ASOCIADAS A LA ARQUITECTURA MODERNA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA | CURSO 2018/19

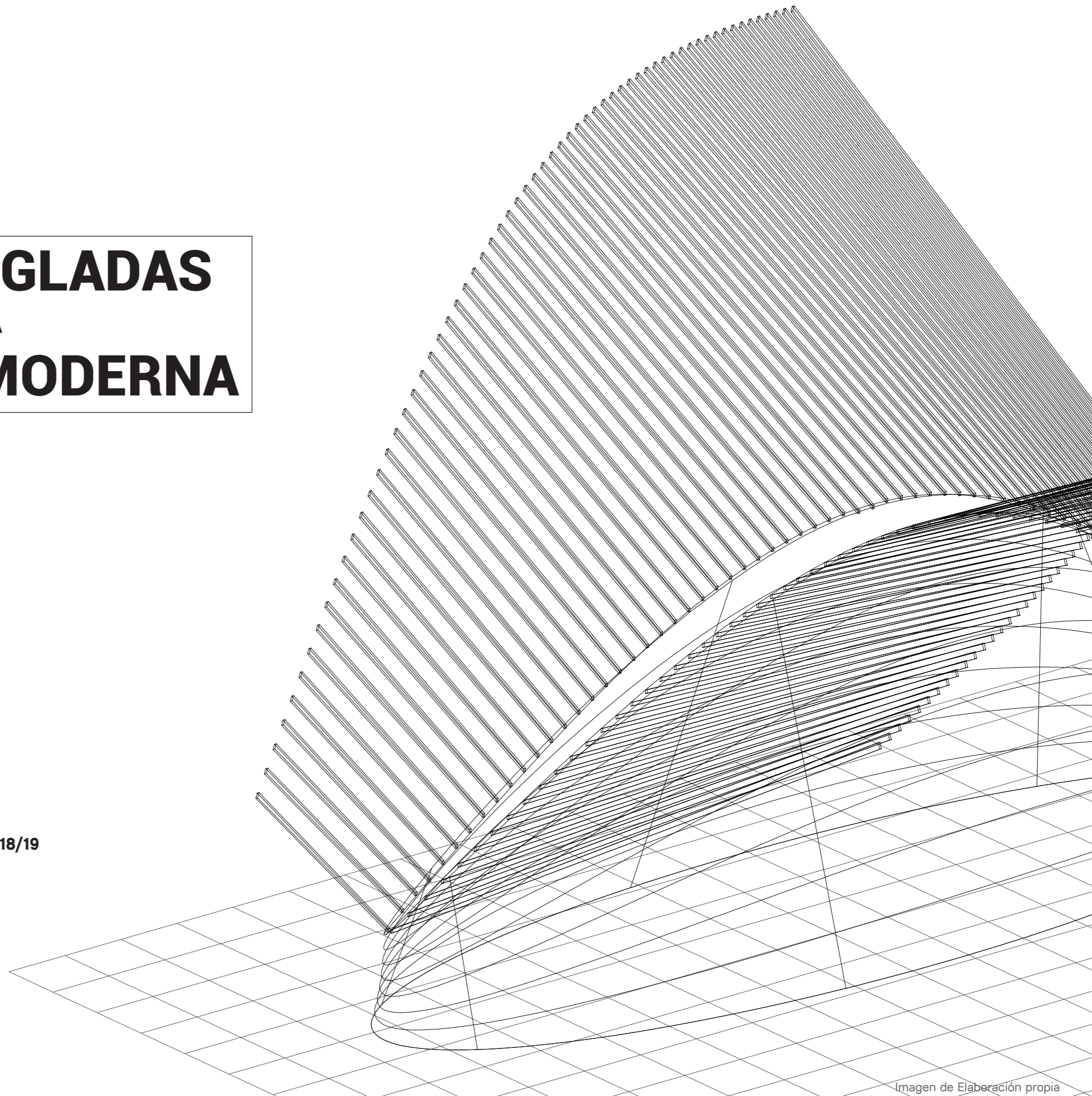
ALUMNO

Alejandro Gutiérrez Plata

TUTORIZACIÓN

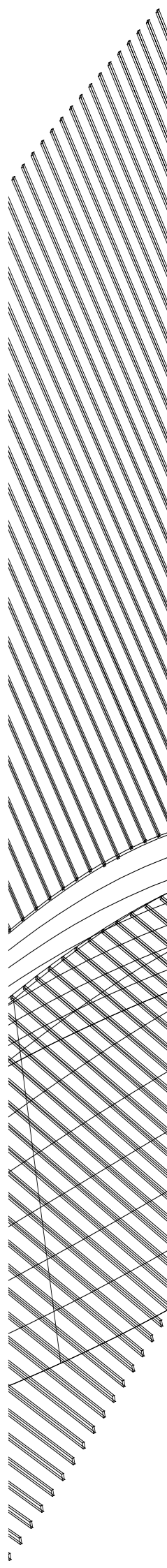
D^a. Maria Luisa Márquez

D. Miguel Pasadas

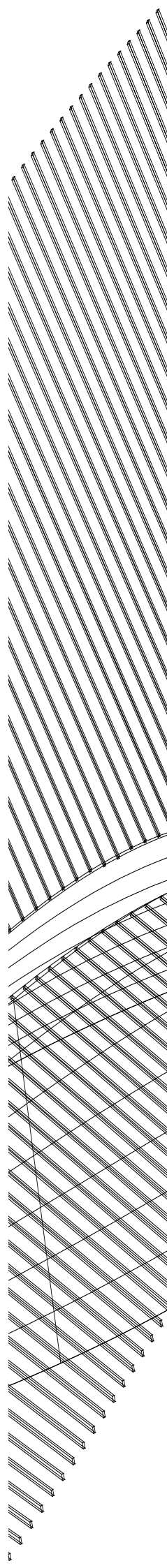


CONTENIDO

1. Revisión histórica	3
2. Geometría diferencial de las superficies regladas	7
2.1 Introducción	8
2.2 Ejemplos	9
2.3 Propiedades de las superficies regladas	11
2.4 Superficies desarrollables	12
2.5 Clasificación según la curvatura de Gauss	12
3. La Geometría en la obra de tres grandes arquitectos	13
3.1 Antonio Gaudí (1852-1926)	15
3.2 Félix Candela (1910-1997)	22
3.3 Santiago Calatrava (1951-)	28
4. Conclusiones	35
5. Bibliografía	37
6. Índice de figuras	40



1. REVISIÓN HISTÓRICA



INTRODUCCIÓN

La palabra “geometría” procede del griego antiguo y significa “medida de la tierra”.

Las matemáticas nacen en el mismo momento en que se crea el cosmos.

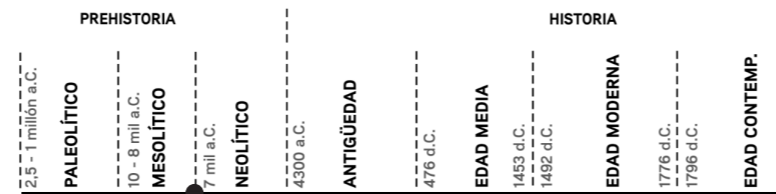
El hombre ha estado desde su origen rodeado de geometría. Es obvio que actualmente los órdenes que observamos rutinariamente se rigen por la geometría; las ruedas de nuestro coche trazadas por circunferencias, carreteras con sus límites marcados por dos bordillos paralelos, alcorques cuadrados dónde hay un árbol, losetas rectangulares en las aceras, etc.

Pero no siempre hemos vivido con las mismas satisfacciones tecnológicas actuales.

Propongámonos volver a las raíces y preguntarnos sobre los principios de las cosas. En la búsqueda de un prelude de la geometría que diera a luz debido a las necesidades de encontrar un orden. Tenemos pruebas catalogadas a miles de años antes de la Era de Cristo de manifestaciones artísticas, como son las pinturas rupestres y las esculturas de piedra tallada y esculturas de huesos, donde podemos ver que no eran regidas arbitrariamente. Es seguro que el Australopitecos (hace 5 a 1,5 millones de años) clasificaba los objetos que le rodeaban según su forma. Era un método intuitivo y de abstracción que sería inconscientemente el primer acercamiento a la geometría.

La arquitectura prehistórica da cuenta de las primeras estructuras rudimentarias creadas por el hombre para guarecerse de la intemperie. Sin embargo, en el período Paleolítico (hace 2,5 millones a 10.000 años) el hombre vivía era nómada y vivía en cuevas y no hay pruebas de construcciones creadas por el hombre en este período.

En el período Mesolítico (hace 10.000 a 9.000 años) el hombre ya sustituía las vasijas de barro por los pesados vasos de piedra. Hay vestigios de chozas construidas de arcilla y de cabañas circulares que posteriormente serían construidas de planta rectangular, con divisiones interiores.



El período Neolítico (hace 7.000 años) se caracterizó por la construcción de grandes monumentos de piedra. A veces eran piedras levantadas a modo de columnas, otras estaban alineadas según ciertos patrones, otras eran en forma de enormes osas horizontales apoyadas sobre otras dos verticales, etc.



[1] Fuente: thinkstockphotos.es

Como tipología de superficie reglada de paraboloides de revolución. Encontramos en el iglú de los esquimales su equivalente en la arquitectura. El iglú es un espacio cubierto con una cúpula de bloques de hielo. Formado con una estructura de huesos de ballena y pieles de foca. Los primeros esquimales conocidos los situamos hace unos 5.000 años en Alaska y probablemente ellos evolucionaron a partir de los grupos siberianos que ya existían 10.000 y 15.000 años atrás. Los nómadas eran procedentes del noreste Asiático.

Los iglús tienen una larga etapa, han sido construidos durante decenas de miles de años por nómadas que recorrían el mundo en busca de alimentos y nuevas herramientas.

Aún hoy día se pueden ver al ser una edificación que garantiza la estabilidad al tener la disposición de cúpula.



[2] Fuente: houdinis.es

Como tipología de superficie reglada de superficie cónica de revolución. Encontramos su equivalente en la arquitectura en la tienda cónica. Tienen su origen en las sociedades primitivas que al final del Neolítico realizaron las primeras construcciones. El tipi(3) es una tienda cónica, originalmente hecha de pieles de animales como el bisonte, y palos de madera. El tipi era utilizado por los pueblos indígenas nómadas de Estados Unidos de las Grandes Llanuras.



[3] Fuente: inoxidable.net

Sin embargo, el surgimiento de las habitaciones en forma rectangular, estas cubiertas quedaron destinadas a la arquitectura funeraria, por ejemplo en los tholos.

Un tholos es vinculado a una casa circular neolítica. Los restos documentados de más edad se han encontrado en Khirokitia (Chipre), h. 5800 a. C. Estos describen paredes de tapial y cañizo con barro y presentaban cubiertas de tipo cupular.

Estas viviendas se extendieron ampliamente en el Neolítico final también por Creta. En las Cícladas se ha hallado un tipo de construcción en tholos, pero para su utilización como granero. Posteriormente, sobre todo en Chipre y Creta, éstas cabañas circulares se emplearían como tumbas colectivas.

Se han hallado unas viviendas parecidas en Los Millares, España. Actualmente, puede visitarse.

En Antequera se ubica el tholos de El Romeral como ejemplo de sepulcro de doble cámara del Calcolítico (3800 a.C).



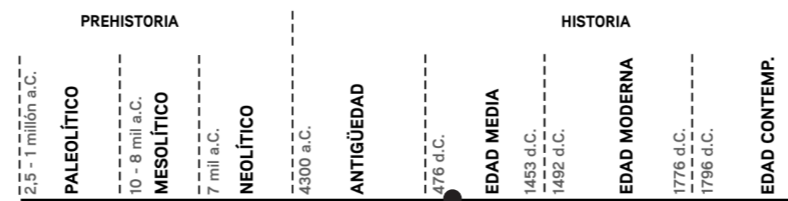
[4] Fuente: depositphotos.com

El Tholos de Atenas fue construido en el Ágora de Atenas en el 465 a. C.

El Tholos de Delfos, concretamente está localizado en el Santuario de Atenea Pronaia. Esta tipología circular fue construida entre el 390 y el 370 a. C. Tiene 20 columnas dóricas ordenadas en un círculo de 15 metros de diámetro exterior, con 10 columnas de orden corintio en su interior. El Tholos está localizado a unos 800 m del conjunto arquitectónico de Delfos.

La cúpula es un elemento arquitectónico que utilizamos para solucionar el encuentro de una planta circular, cuadrada, poligonal o elíptica. Para ello nos servimos de arcos de perfil semicircular, parabólico u ovoidal, girados respecto a un punto central o pivote.

El uso de este nuevo elemento no fue muy común en la Antigua Grecia, y hasta el Imperio Romano no se empezaron a construir las primeras cúpulas. Los complejos de termas y los palacios romanos fueron las edificaciones que empezaron a utilizar las cúpulas como cubiertas.



El imperio bizantino heredó de los romanos la técnica constructiva de las cúpulas. Desarrollaron la técnica y evolucionaron hasta lograr imponer la estructura sobre un cubo, mediante el uso de elementos arquitectónicos como la pechina, una bóveda cónica común en la arquitectura romana. El ejemplo referente del período es Hagia Sophia de Constantinopla, actual Estambul, edificada en el siglo VI durante el reinado del emperador Justiniano I. Cubre un espacio rectangular de 77 por 71 metros. Con un diámetro de 32 metros y una altura de casi 57 metros.

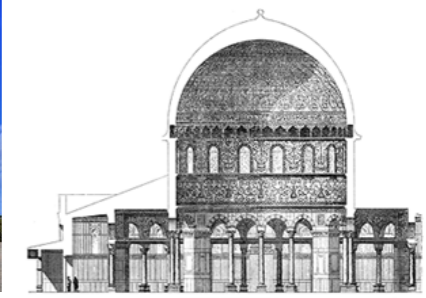


[5] Fuente: infocatolica.com



[6] Fuente: study.com

La Cúpula de la Roca en Jerusalén, construida entre 687 y 691, está cargada de valor simbólico e histórico. La cúpula se levanta con un diámetro de casi 23 metros sobre un tambor cilíndrico que se une a una base octogonal, que da composición a la fachada. Representa el paso de la tierra al cielo.



[7] [8] Fuentes: biblewalks.com y mivivaje.com

Como tipología de superficie reglada de superficie cilíndrica de revolución. El equivalente de esta tipología a la arquitectura es la torre. La torre es una construcción cilíndrica, más alta que ancha y de superficie cilíndrica o poligonal.

La torre más antigua conocida es la Torre de Jericó del siglo VIII a.C. Es una estructura de 9 metros de diámetro y corresponde al período Neolítico. La referencia más antigua a la torre la encontramos en el Imperio romano.



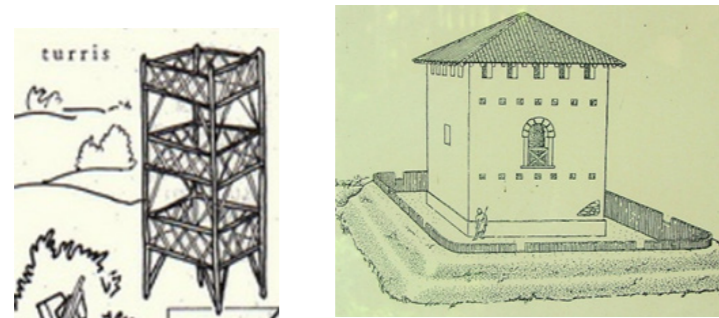
[9] Fuente: es.123rf.com

Las yurtas de Asia central son tiendas de base circular y cubiertas conoidales. La Yurta es una vivienda utilizada por los nómadas de Asia Central. Desde la Edad Media muchas tribus han vivido en estas tiendas. En la Edad Media, la vida nómada de los mongoles obligó a que tuvieran una vivienda para sus constantes desplazamientos. Esta tienda de campaña estaba protegida por una gruesa cubierta, era fácil de transportar y óptima para soportar los intensos cambios climáticos de Mongolia.

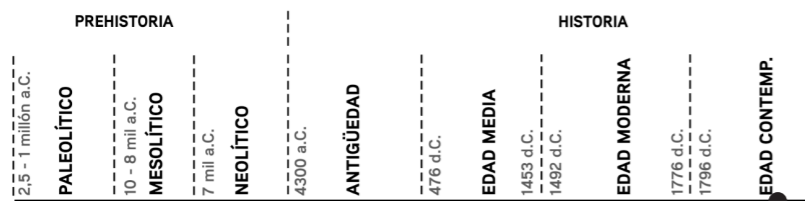


[10] Yurta

En los limes (límites fronterizos del Imperio romano) se construyeron turrus y burgus. En el Medievo existían las torres Bailey y las casas-torre. La Edad Media se construyeron torres militares y religiosas.



[11]Turrus y [12] Burgus

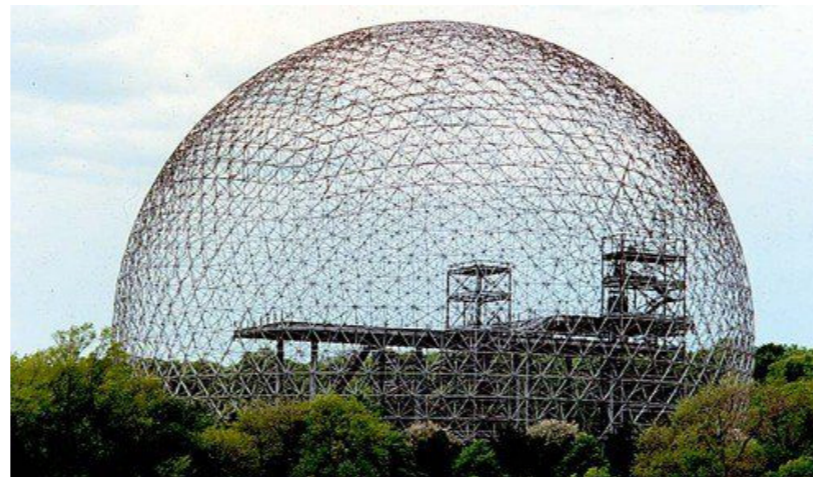


El desarrollo de las técnicas constructivas del siglo XX modificó de forma radical el criterio técnico de la edificación y diseño de las cúpulas.

Una cúpula geodésica es una estructura semiesférica de sección mínima basada en un poliedro geodésico. Los elementos triangulares de la cúpula son estructuralmente rígidos y reparten las tensiones de esfuerzos por toda la estructura. De esta forma, las cúpulas geodésicas son capaces de soportar cargas muy pesadas para su tamaño.

La primera cúpula que “geodésica” fue diseñada después de la Primera Guerra Mundial por Walther Bauersfeld.

La cúpula geodésica fue patentada en 1947 por Richard Buckminster Fuller, un arquitecto americano. Esta consiste en la yuxtaposición de unos módulos livianos tridimensionales que generan estructuras muy estables.



[13] Cúpula geodésica

Las cúpulas geodésicas se basan en el Teorema de poliedros de Euler.

Las innovaciones en el diseño de cúpulas de hormigón armado, originalmente edificadas por Pier Luigi Nervi, a partir del 1960, permitieron la solución de grandes luces mediante losas casetonadas y encofrados perdidos.

El Palazzetto dello Sport es un pabellón multifuncional situado en la ciudad de Roma. Fue construido entre 1958 y 1960 como equipamiento para los Juegos de la XVII Olimpiada. La cubierta circular de 60 metros de diámetro fue realizada completamente mediante elementos prefabricados de hormigón armado.



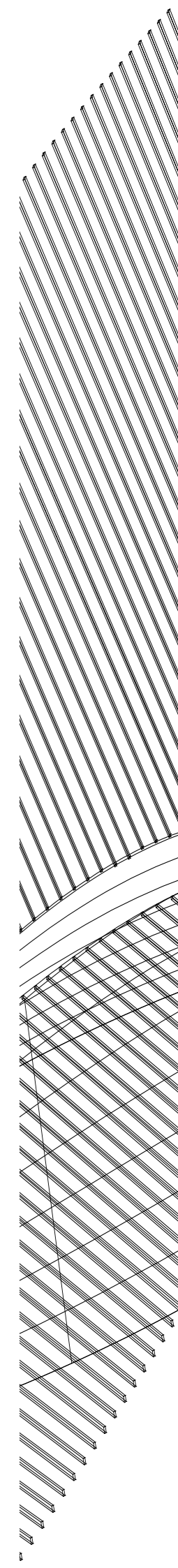
[14] Fuente: ilgiornaledellarchitettura.com

Los avances en la tecnología del acero desde finales del siglo XIX, han permitido soluciones en cubierta de grandes espacios sin apoyos intermedios, inclusive en estadios deportivos con cerchas. Se utilizan sistemas de cables tensores, estructuras reticuladas tridimensionales y disposiciones estructurales basadas en catenarias.



[15] Fuente: Renault Center. Norman Foster

2. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS SUPERFICIES REGLADAS



En este trabajo estudiamos las superficies regladas como la traza resultante de desplazar una recta mediante un movimiento rígido en el espacio.

Comenzamos introduciendo las superficies regladas como aquéllas que consisten en fijar una curva en el espacio que denominamos *directriz*, y en cada punto de ella, adjuntar una recta que llamamos *generatriz*.

Seguidamente realizamos un estudio de las propiedades básicas de las superficies regladas para lo cual suponemos que las generatrices no son constantes en ningún abierto lo cual no es una condición muy restrictiva. Además resulta que existe una directriz única independiente de la parametrización de la superficie y perpendicular a todas las generatrices, llamada línea de estricción, y los puntos que la constituyen, puntos centrales.

A continuación, probamos la existencia y unicidad de una función escalar que se conoce como *parámetro de distribución*, que mide el inverso de la velocidad a la que rota el plano tangente conforme avanzamos por una generatriz.

Introducimos las superficies desarrollables como superficies regladas que, intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas ni distorsionarlas, es decir, localmente isométricas al plano. Caracterizaremos además las *superficies desarrollables* como las superficies con parámetro de distribución nulo, y tales que el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

Seguimos con una clasificación de las superficies regladas en superficies de revolución, y, en base al concepto de curvatura de Gauss, superficies con curvatura de Gauss nula, entre las que se encuentran las desarrollables.

Definimos la curvatura media y clasificamos las superficies regladas con curvatura media nula, también llamadas *superficies regladas minimales*. Únicamente el plano y el helicoides forman parte de esta categoría.

Finalmente, clasificamos las *superficies doblemente regladas*, es decir, aquéllas tales que por cada punto pasan dos rectas distintas. Como por ejemplo, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico y el plano son las únicas existentes.

2.1 INTRODUCCIÓN



[01] L'Oceanografic (Valencia, España)

Intuitivamente las superficies se suelen presentar como subconjuntos bidimensionales del espacio euclídeo que son, localmente, semejantes al plano y suficientemente suaves.

A la familia de parches locales semejantes con el plano la llamamos una parametrización de la superficie, y nos permite identificar los puntos de la superficie con pares de coordenadas cartesianas, para así reducir el estudio analítico de la superficie.

Definición 1 Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto $p = (x, y, z) \in S$ existe otro punto $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, un entorno U de q y una aplicación $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V := X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que X es diferenciable e inyectiva en todo punto de U .

El par (X, U) es una **parametrización** o **carta**, y la colección de tales cartas (bajo ciertas condiciones de compatibilidad) es un **atlas**.

La inyectividad de la diferencial asegura la existencia de un plano tangente en todo punto de la superficie.

Algunos de los ejemplos más comunes son los planos, las cuádricas, los helicoides, los grafos de funciones diferenciables, o las preimágenes de valores regulares mediante funciones diferenciables de tres variables (superficies de nivel).

Definición 2 Una aplicación diferenciable $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con U abierto se denomina una **superficie parametrizada**. Se dirá **regular** si la diferencial es inyectiva en todo punto de U . Al subconjunto imagen $X(U)$ se le llama la **traza**.

Se puede demostrar que la traza de una superficie parametrizada regular es, localmente, una superficie regular.

Intuitivamente, las superficies regladas son superficies regulares en las que por cada punto pasa, al menos, una recta completamente contenida en la superficie.

De este modo, tiene sentido construir la superficie fijando el camino que sigue tal recta y su dirección en cada momento, que puede interpretarse como el movimiento rígido de la recta generatriz. La traza de este movimiento será la superficie. Por tanto, fijamos una curva parametrizada en el espacio

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y, en cada punto de la curva, indicamos la dirección de la recta asignando un vector, es decir,

$$w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

de modo que la superficie consistirá en el conjunto de las rectas que pasan por $\alpha(t)$ con dirección $w(t)$, para todo $t \in I$. Obsérvese que $\alpha(t)$ se interpreta como punto, mientras que $w(t)$ como vector.

Definición 3 Una superficie reglada es una superficie regular parametrizada por una expresión cualquiera de la forma

$$X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(t, s) = \alpha(t) + sw(t),$$

donde las funciones

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

son diferenciables. A la curva $\alpha(t)$ se le llama *directriz* y a cada recta $\beta_t(s) = X(t, s)$ *generatriz*.

2.2 EJEMPLOS

Ejemplo 1 El ejemplo más sencillo es un **plano**, que se puede obtener cuando la directriz es una recta, y las generatrices son paralelas entre sí. Por ejemplo, el plano que pasa por el punto p generado por los vectores v, w se puede parametrizar como

$$X(t, s) = p + tv + sw,$$

donde v, w sean linealmente independientes.

Ejemplo 2 Otro ejemplo particular y relevante son los **cilindros**. Éste es el caso cuando la curva directriz α es plana, y las generatrices son todas paralelas entre sí. Así pues, tenemos una parametrización de la forma

$$X(t, s) = \alpha(t) + sv,$$

con α plana y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Que no sea coplanario con α .

Cuando la directriz es una circunferencia, se obtiene el cilindro usual: por ejemplo,

$$X(t, s) = (\cos t, \sin t, 0) + s(0, 0, 1)$$

es el cilindro recto de base circular y radio 1 a lo largo del eje Z.



[02] Cilindro recto circular

Ejemplo 3 El **cono** se obtiene cuando todas las generatrices se cortan en un punto fijo p , el vértice del cono. Su parametrización es

$$X(t, s) = p + s(\gamma(t) - p),$$

donde $\gamma(t)$ es una curva plana y $p \in \mathbb{R}^3$ es el vértice del cono, que no debe ser coplanario con γ , pues en caso contrario se obtiene de nuevo un plano.

En particular, si $\gamma(t)$ es una circunferencia, y el vector que une p con el centro de la circunferencia es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia, se obtiene el cono usual. Por ejemplo, tenemos que

$$X(t, s) = s(\cos t, \sin t, 1)$$

es un cono con vértice en el origen y directriz circular perpendicular al eje Z.

Ejemplo 4 Hiperboloide de una hoja. No es obviamente reglado dada su forma curva, y no tiene una sino dos familias de rectas generatrices linealmente independientes. Dicho de otro modo, por cada punto pasan dos rectas distintas contenidas en la superficie. A este tipo de superficies se las conoce como **superficies doblemente regladas**.

Una expresión implícita para un hiperboloide cuyo eje es el eje Z viene dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$. Se trata de una de las pocas superficies regladas de revolución.

Es fácil ver que la doble familia de rectas dada por la expresión

$$X^\pm(t, s) = (a(\cos t \mp s \sin t), b(\sin t \pm s \cos t), cs)$$

son dos parametrizaciones del hiperboloide de una hoja

Ejemplo 5 El **paraboloide hiperbólico** también doblemente reglado. De hecho, estos dos ejemplos son las únicas superficies doblemente regladas no planas.

Salvo transformaciones afines, viene descrito por la ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

con $a, b > 0$. Una parametrización que desvela la doble familia de generatrices de la superficie es

$$X(t, s) = (at, 0, t^2) + s(a, \pm b, 2t) = (a(t+s), \pm b s, t^2 + 2ts),$$

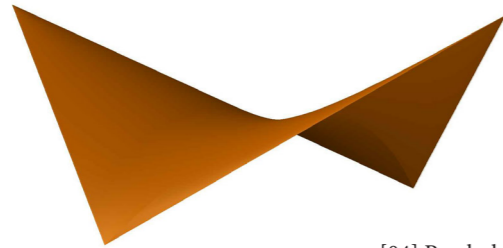
donde hemos usado una de las parábolas de la superficie como generatriz.

Ejemplo de hiperboloide de una hoja



[03] Hiperboloide de revolución con $a = b = c = 1$

Ejemplo de paraboloides hiperbólicos



[04] Paraboloides con $a = b = 1$

Ejemplo 6 Superficies tangentes a una curva. Se trata de superficies regladas en las que las generatrices son los vectores tangentes a directriz. Por tanto una parametrización es

$$X(t, s) = \alpha(t) + s \alpha'(t),$$

siendo $\alpha(t) \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular dada como directriz.

Se verifica que las superficies tangentes a curvas regulares son superficies regulares cuyos puntos singulares se localizan sobre la propia curva α , y sobre las generatrices que parten de los puntos de α con curvatura nula.

Ejemplo 7 Helicoide. Tiene la propiedad de ser la única superficie reglada no plana que es minimal. Se obtiene fijando un eje arbitrario, digamos el eje Z de coordenadas, hacemos rotar una recta perpendicular al eje a velocidad constante conforme la vamos moviendo sobre éste, también a velocidad constante.



[05] Ejemplo de helicoide

Así pues, tomaremos el eje Z como directriz α , y como dirección w de las generatrices el vector $(\cos t, \sin t, 0)$, obteniendo la parametrización $X(t, s) = (0, 0, at) + s(\cos t, \sin t, 0) = (s \cos t, s \sin t, at)$, donde $a > 0$ determina la velocidad a la que se recorre el eje Z.

Modificando la parametrización, y tomando $b, c > 0$:

$$X(t, s) = (0, 0, at) + s(b \cos t, c \sin t, 0) = (bs \cos t, cs \sin t, at),$$

Obtenemos un helicoide elíptico.

Ejemplo 8 La banda de Möbius es una superficie reglada, aunque tenemos que relajar la condición de recta a segmento si queremos obtener una superficie regular.

También podemos realizar la misma construcción que realizamos para las superficies tangentes a curvas con el resto de vectores del *triedro de Frénet*. Tomando como generatrices los normales de la directriz obtenemos las **superficies normales**. Por otro lado, tomando como generatrices los binormales obtenemos igualmente las **superficies binormales**.

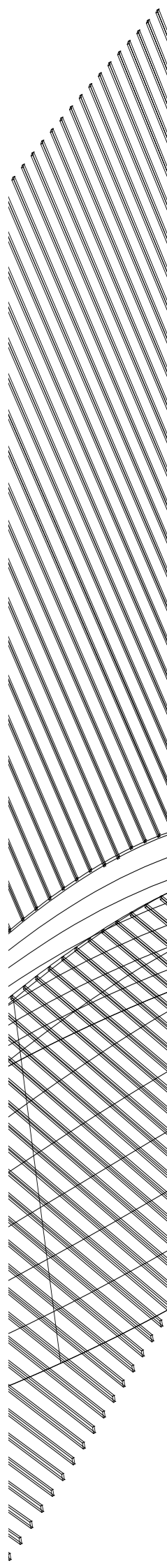
En el caso particular en que todas las generatrices sean paralelas a un mismo plano, se tiene una **superficie de Catalan**. Si además todas las generatrices intersectan una misma recta (que llamaremos eje), obtenemos el denominado **conoide**. Si el eje es perpendicular al plano, tenemos un **conoide recto**. El helicoide es claramente un ejemplo de conoide recto.

El paraboloides hiperbólico es un conoide con dos ejes.

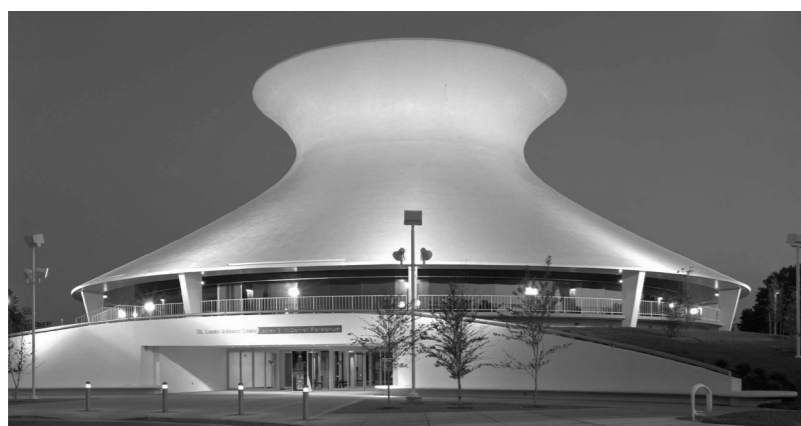
Una parametrización para este conoide puede ser

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, 2 \sin \theta \cos \theta) = (0, 0, \sin 2\theta) + r(\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Otro ejemplo que podemos mencionar es el **paraguas de Whitney**, que se construye tomando como eje por ejemplo el eje Z de coordenadas, y considerando una parábola contenida en un plano paralelo al eje Z, pero que no pase por el origen. Entonces, la unión de las rectas que cortan perpendicularmente al eje y que intersecan a la parábola, es justamente un paraguas de Whitney.



2.3 PROPIEDADES DE LAS SUPERFICIES REGLADAS



[06] James S. McDonnell Planetarium

A lo largo de este capítulo presentaremos algunas de las principales características y propiedades de las que gozan las superficies regladas, y que resultan fundamentales para el estudio más profundo de las mismas. Las referencias fundamentales serán [Car76, sec. 3.5], [GAS06, cap. 14] y [Kre91, sec. 58].

Dada una superficie reglada

$$X(t, s) = \alpha(t) + sw(t),$$

con $\alpha(t)$ la directriz y $w(t)$ la dirección de las generatrices, es interesante observar que podemos expresar una curva en la superficie de un modo muy cómodo, haciendo el parámetro s función de t , de modo que una curva cualquiera β se expresaría bajo la parametrización como

$$\beta(t) = \alpha(t) + s(t)w(t).$$

Definición 3 Una superficie reglada se dice **no cilíndrica** si $w^t(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 1 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada mediante $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ con $|w(t)| = 1$, existe una curva en la superficie parametrizada por

$$\beta(t) = \alpha(t) + s(t)w(t)$$

tal que $\beta^t(t) \perp w^t(t)$ para todo t , y que no depende de la directriz escogida para parametrizar la superficie.

Definición 4 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ se llama **línea de estricción** a la única curva sobre la superficie que corta a las generatrices perpendicularmente en todo punto. Asimismo, llamamos **puntos centrales** a los puntos de la superficie que se encuentran en la traza de la línea de estricción.

Consideremos la superficie reglada parametrizada como $X(t, s) = \beta(t) + s w(t)$, siendo $\beta(t)$ la línea de estricción.

Definición 5 Dado un punto regular de una superficie, llamaremos **base canónica** a la base obtenida como imagen de la base canónica euclídea mediante la diferencial de la parametrización.

Denotaremos estos vectores como X_t, X_s en relación a los nombres de las variables.

Por bilinealidad del producto escalar, en cada punto la métrica del plano tangente queda determinada por los coeficientes

$$E = (X_t, X_t), F = (X_t, X_s) = (X_s, X_t), G = (X_s, X_s),$$

que conforman la llamada **primera forma fundamental**, un concepto intrínseco de la superficie. Esta herramienta nos permite medir longitudes, ángulos y áreas, entre otras cosas.

Por otro lado, si consideramos las derivadas segundas de la parametrización los coeficientes

$$e = (X_{tt}, N), f = (X_{ts}, N) = (X_{st}, N), g = (X_{ss}, N),$$

donde N es el vector normal a la superficie y unitario en cada punto, quedan unívocamente determinado salvo el signo (al menos localmente, y globalmente si la superficie es orientable). Estos coeficientes conforman la **segunda forma fundamental**, un concepto extrínseco de la superficie. Como el vector normal es ortogonal al plano tangente, se puede definir como

$$N = \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|}$$

Dado un punto de una superficie, podemos considerar el corte de la superficie con planos que contienen al vector normal, obteniendo las **curvas normales**. Las curvaturas de tales curvas se llaman **curvaturas normales** de la superficie, denotadas por $k_n(p, v)$, donde p es el punto y v el vector tangente que determina la dirección del corte del plano. A las curvaturas normales mínima y máxima se les llama **curvaturas principales**, que denotaremos por k_1 y k_2 . Las direcciones de las curvas normales respectivas se denominan **direcciones principales**, y las curvas cuyo tangente siempre es una dirección principal se conocen como **líneas de curvatura**. Análogamente, las direcciones donde la curvatura normal sea nula se llaman **direcciones asintóticas**, y las curvas cuya dirección siempre es asintótica se denominan **curvas asintóticas**.

Al vector normal unitario visto como función de los puntos de la superficie se le conoce como **aplicación de Gauss** y se tiene que la forma cuadrática que define la segunda forma fundamental viene dada por $II_p(v) = dN_p(v)$, v para cada punto p y vector tangente v . Es más, se tiene $k_n(p, v) = II_p(v)$. Una consecuencia importante de esto es que las curvaturas principales son los autovalores del operador forma, y las direcciones principales son los autovectores correspondientes.

Finalmente la **curvatura de Gauss** K se define (o se demuestra) como el producto de las curvaturas principales, y la **curvatura media** H como la media de las curvaturas principales. Como consecuencia, K es el determinante del operador forma y H es la mitad de la traza, por ser éstos invariantes. En adelante, *curvatura* hará siempre referencia a la curvatura de Gauss.

Las superficies con curvatura de Gauss idénticamente nula se llaman **superficies planas** o **llanas**, y aquellas con curvatura media idénticamente nula se llaman **superficies minimales** o mínimas.

Definición 6 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$, donde β es la línea de estricción, con $|w| = 1$, se define el **parámetro de distribución** de X como la única función escalar $\lambda(t)$ verificando $\beta'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w^t(t)$ para todo $t \in I$.

Es muy interesante la siguiente interpretación del parámetro de distribución, que como muestran obras clásicas como [HCV90, sec. 30, p. 208], [Sal15, Art. 462a, p. 85] ó [Eis09, Art. 105, p. 244], se trata, realmente, de la definición original del parámetro de distribución.

El parámetro de distribución mide el inverso de la velocidad a la que rota el plano tangente a lo largo de cada generatriz, o equivalentemente, la velocidad a la que cambia el ángulo del vector normal a la superficie a lo largo de dicha superficie.

Para probarlo, introduzcamos cierta terminología y resultados.

Definición 7 Dadas dos generatrices, consideremos el cociente entre el ángulo que determinan y su distancia. El límite cuando la distancia entre las generatrices tiende a 0 se llama la **estricción**.

Proposición 2 El parámetro de distribución es el inverso de la estricción.

2.4 SUPERFICIES DESARROLLABLES

Dentro de las superficies regladas encontramos un subconjunto destacado, el de las superficies desarrollables, cuyo nombre trata de reflejar la propiedad de que pueden ser *aplanadas* hasta conseguir planos sin modificar las distancias entre los puntos. Intuitivamente, se trataría de una superficie que puede transformarse en un plano, cortándola y doblándola, pero sin distorsionarla. Vamos a dar una definición más operativa, que luego veremos se traducirá en la interpretación anterior.

Definición 8 Una superficie reglada parametrizada por

$$X(t, s) = \alpha(t) + sw(t), \text{ con } w(t) = 1,$$

se dice **desarrollable** si $\det(w, w^t, \alpha^t) = 0$.

Son superficies desarrollables el plano, los cilindros, los conos y las superficies tangentes

Proposición 3 Las superficies desarrollables (no cilíndricas) son exactamente las superficies regladas cuyo parámetro de distribución es idénticamente nulo.

Proposición 4 Una superficie reglada (no cilíndrica) es desarrollable si y sólo si el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

2.5 CLASIFICACIÓN SEGÚN LA CURVATURA DE GAUSS

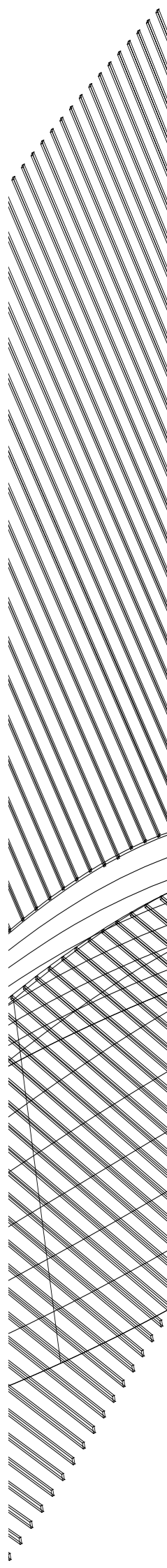
Las referencias fundamentales para este apartado serán [Car76, cap. 3, sec. 5] y [Kre91, sec. 58]. Un teorema más fuerte nos permitirá ver que, de hecho, toda superficie completa con curvatura de Gauss nula no sólo es necesariamente reglada, sino que además debe ser un plano o un cilindro. La referencia fundamental para este apartado será [Car76, cap. 5, sec. 8], y adicionalmente [HP10, caps. 3 y 7], [FT91, cap. 1, sec. 2], y adicionalmente [FT91, cap. 2], [FT07, Lec. 16].

Teorema 1 Las únicas superficies regladas de revolución son uniones de hiperboloides de una hoja, cilindros circulares rectos, conos circulares rectos, y planos.

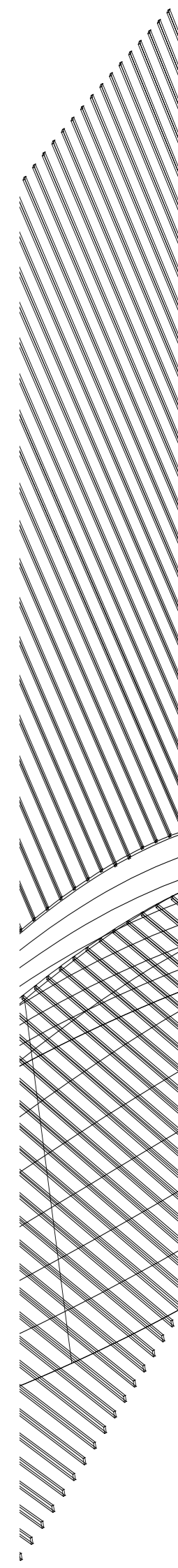
Teorema 2 Una superficie desarrollable parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ es localmente un fragmento de cilindro, cono, o superficie tangente, en entornos que no contengan puntos de acumulación de ceros de w^t .

Corolario 1 Las superficies regladas planas son uniones de fragmentos de planos, cilindros, conos y superficies tangentes.

Teorema 3 — Teorema de Catalan. Una superficie reglada minimal no plana es un fragmento de helicoide.



3. LA GEOMETRÍA EN LA OBRA DE TRES GRANDES ARQUITECTOS



ANTONIO GAUDÍ, FÉLIX CANDELA Y SANTIAGO CALATRAVA

El objetivo principal de este trabajo es mostrar el acercamiento de la Geometría Diferencial de Superficies Regladas a la Arquitectura Moderna.

El uso de formas geométricas a base de estas superficies ha sido habitual a lo largo de la historia de la Arquitectura y arquitectos destacados del s. XX como Le Corbusier, Félix Candela, Frank Gehry, Norman Foster o Santiago Calatrava las han usado ampliamente en sus proyectos.

Como objeto de estudio de este trabajo de investigación ubicamos tres grandes maestros de la ingeniería y la arquitectura que han trabajado a lo largo de sus vidas profundizando en el campo de las matemáticas.

Vamos a mostrar la evolución y el desarrollo de las obras de Antonio Gaudí, Félix Candela y Santiago Calatrava. Tres influyentes arquitectos separados en el tiempo que han proyectado la mayor parte de sus obras con la aplicación de las superficies regladas.

La obra de Gaudí forma un apartado fundamental de nuestro patrimonio arquitectónico nacional e internacional. Su uso magistral de las técnicas tradicionales constructivas y las originales soluciones estructurales que consiguió forman parte de unas de las páginas más brillantes de la arquitectura del siglo XX.

La genialidad de este arquitecto radica en el resultado de un análisis geométrico y constructivo, fruto de una vida de investigación sin precedentes en la historia de la arquitectura.

Por otro lado, Félix Candela, uno de los arquitectos que mejor ejemplifica el uso del paraboloides hiperbólico en la arquitectura. La filosofía constructiva de la eficiencia en el trabajo y la economía, al igual que su motivación estética, ha hecho que se le haya reconocido como “artista estructural”.

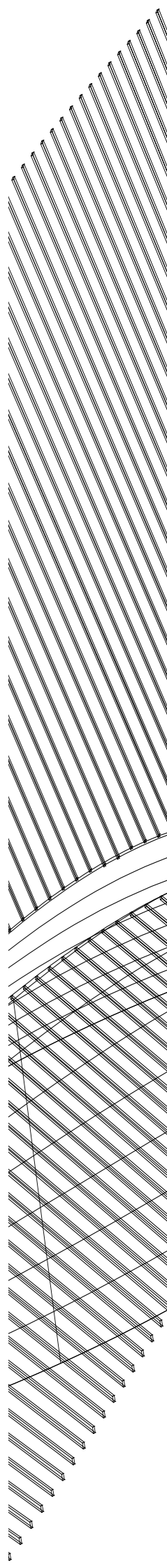
Candela fue invitado a trabajar por Calatrava en el Proyecto de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, que se inauguró en 1998 y fue de las más importantes intervenciones arquitectónicas llevadas a cabo allí.

Candela se encargó del proyecto “L Oceanografic” un parque temático con acuario, que se encuentra integrado junto al resto de obras de Calatrava.

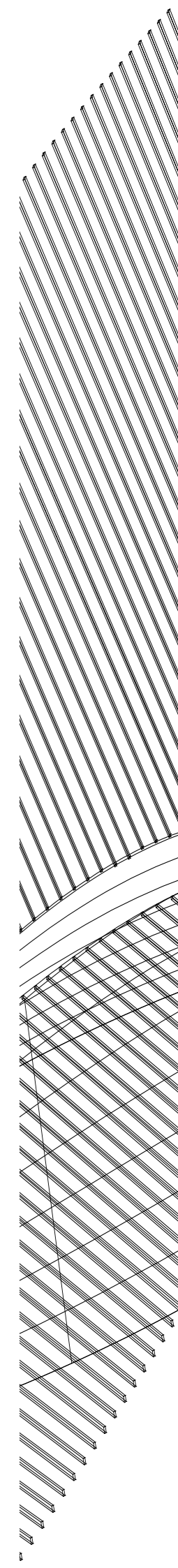
Como último caso de estudio, el arquitecto e ingeniero Santiago Calatrava, quien se sirve de sus conocimientos, con cierto aire futurista y de innovación, en sus trabajos. Doctorado en Ciencias Técnicas con la tesis Acerca de la plegabilidad de las estructuras, ha desarrollado su carrera desarrollando proyectos de gran complejidad.

Su carrera y sus proyectos alrededor de todo el mundo le han otorgado un reconocido prestigio internacional.

A través de los proyectos de estos grandes maestros, cronológicamente, observaremos la influencia de la geometría en sus carreras.



ANTONIO GAUDÍ (1852-1926)



ANTONIO GAUDÍ

Antonio Gaudí, máximo representante del modernismo y uno de los pioneros de las vanguardias artísticas del s. XX, nació el 25 de Junio de 1852. De su padre, que fue calderero en Riudoms, heredó la tradición artesanal.

Desde pequeño, Gaudí padeció un problema reumático que le impidió ir a la escuela y jugar con los niños de su edad, convirtiéndose en un gran observador de la naturaleza, de la que le atraían las formas, los colores y la geometría.

A los diecisiete, se traslada a Barcelona para entrar en la escuela de Arquitectura.

Dedicó su vida plenamente a la investigación de nuevas formas y nuevas técnicas.

Su originalidad y creatividad, junto con su capacidad innovadora, han convertido a Gaudí en una figura universal de la arquitectura.

Para Gaudí una obra no estaba terminada hasta el momento en que tanto forma, como decorado no se encontraban en perfecto complemento.

Partiendo de este punto, la figura de Antonio Gaudí se va a caracterizar por su binomio arquitectura/naturaleza. Sin duda alguna Antoni Gaudí encontraba su inspiración en los elementos vegetales y animales de la propia naturaleza. Su modo de entender y comprender el arte se caracterizó por la fuerte creencia en las leyes de naturaleza

Entre 1900 y 1910, el arquitecto experimentó su etapa de máximo esplendor profesional, abordando el proyecto actualmente inacabado de la Sagrada Familia, su obra maestra.

EL CAPRICHIO (COMILLAS, CANTABRIA - 1883-1885)

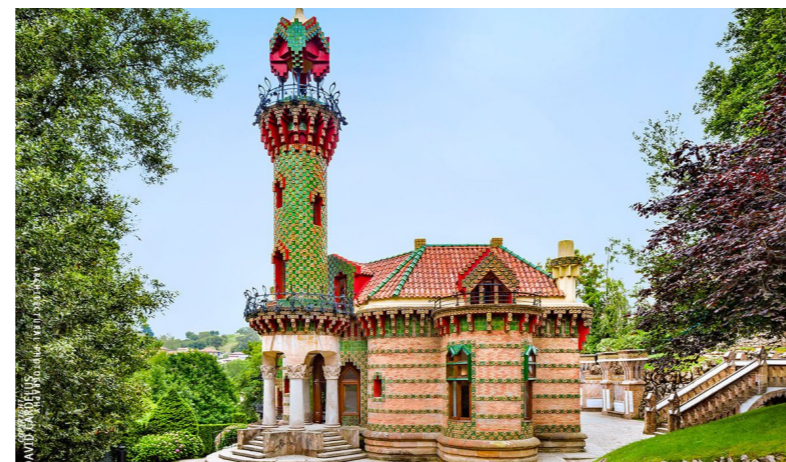
La casa se ideó como residencia de verano. La utilización de la línea curva tiene gran protagonismo.

Vemos en la cubierta, un juego de formas geométricas con las chimeneas y las formas cilíndricas de la entrada principal en la que se sitúa el pórtico exento, de piedra, rematado por la torre cilíndrica, que tiene apariencia de minarete. Sobre él se asienta un templete formado por cuatro columnas monolíticas de hierro de inspiración románica.



Fuente: Elaboración propia

Podemos encontrar cilindros la Torre Principal de El capricho



[16] Fuente: David Cardelus. designboom.com

FINCA GÜELL (BARCELONA - 1884-1887)

En 1884, Eusebi Güell encarga a Gaudí el primer proyecto realizado de lo que acabaría siendo una larga relación profesional y de amistad. Quería hacer una ampliación en la finca familiar y le encarga el diseño del muro y de las puertas de acceso a la propiedad.

Entre 1884 y 1887 trabajó rediseñando el jardín y levantando los dos pabellones de la entrada, destinados en su origen a la casa del portero y las caballerizas.

Las casas de la Finca Güell, con base de piedra, muestran paredes y arcos parabólicos de ladrillo y decoraciones con piezas de cerámica relucientes que dibujan formas geométricas. A un lado de la puerta, una torre coronada con fantasías vegetales luce un medallón con la inicial del nombre del propietario de los terrenos. [Art18]

También encontramos cilindros en la Finca Güell.



[17] Fuente: es.wikiarquitectura.com/edificio/finca-guell/

LA SAGRADA FAMILIA (BARCELONA - 1886-ACTUALIDAD)

Es la obra más conocida de Antoni Gaudí. La Sagrada Familia forma parte de la historia de Cataluña y de España. La monumentalidad de la obra, fruto del ingenio y la experiencia de Gaudí, quien abordó con 31 años la dirección de este proyecto, ha hecho que sea un icono mundial de la arquitectura. Así mismo, se hace evidente la grandeza de este arquitecto, quien por su genialidad, deja grabado su nombre en la historia. Antonio Gaudí morirá tempranamente dejando inacabada su obra maestra.

La Sagrada Familia es un templo basilical con planta en forma de cruz latina. Posee cinco naves centrales, el transepto de otras tres y ábside. Cuando esté acabado, el templo constará de dieciocho torres, alcanzando este una altura máxima de 172 metros de altura.

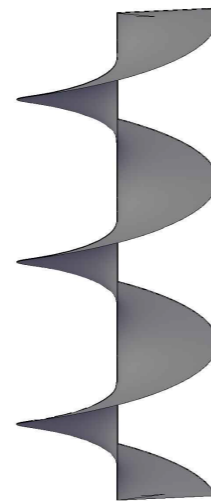
Las cargas se desplazan en sentido vertical, por ello el uso de pilares inclinados, para contrarrestar los desplazamientos laterales.

“Hiperboloides, paraboloides hiperbólicos, helicoides y conoides enlazan columnas con las bóvedas en un juego contrapuesto de estrellas, de vacíos y de llenos, que juegan con la luz que se desliza en una extraordinaria composición jamás imaginada. Las paredes de cierre de las naves son ligeras; son unos ventanales sin contrafuertes, que convierten en estructura activa las gradas para 1.200 cantores de las naves laterales. Unos campanarios de envolvente parabólica se encienden con el color del mosaico veneciano de sus pináculos.”

Jordi Bonet i Armengol.

Un helicoides es una superficie generada por el movimiento de una recta que se mueve paralela a un plano y se apoya en una recta perpendicular a éste.

En La Sagrada Familia encontramos escaleras de caracol espectaculares hechas de piedra. Estas escaleras situadas en las torres de la basílica son helicoidales.



Fuente: Elaboración propia



[18] Fuente: i.pining.c

Con paraboloides Gaudí creó superficies de enlace en las bóvedas y las cubiertas y las columnas de la fachada de la Pasión, así como elementos de más amplitud como las torres y las sacristías. Para el arquitecto representan la Santa Trinidad.



[19] Fuente: <http://baultoadelrte.blogspot.com>

La forma catenaria es una curva ideal que representa físicamente la curva generada por una cadena, o hilo cuando se cuelga de dos puntos y sólo soporta su propio peso. Gaudí se inspira en ellas para la fachada de La Pasión.



[20] Fuente: langues.education/la-sagrada-familia/

La ecuación de la catenaria, tomando su mínimo en el punto (0,a) es:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$$

donde

$$a = \left(\frac{T_o}{P}\right)$$

siendo T_o la componente horizontal de la tensión, que es constante y P el peso por unidad de longitud del hilo y cosh la función coseno hiperbólico.

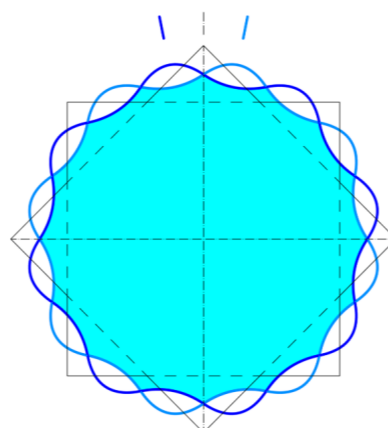
Gaudí sustituyó los contrafuertes del Gótico por arcos de catenaria invertidos, que reducían las tensiones que se creaban por el peso que soportan las columnas.

Para conseguir más estabilidad y un efecto estético más estilizado y armónico, Gaudí concibió todas las columnas ramificadas como unas columnas de doble giro, formadas por dos columnas helicoidales.

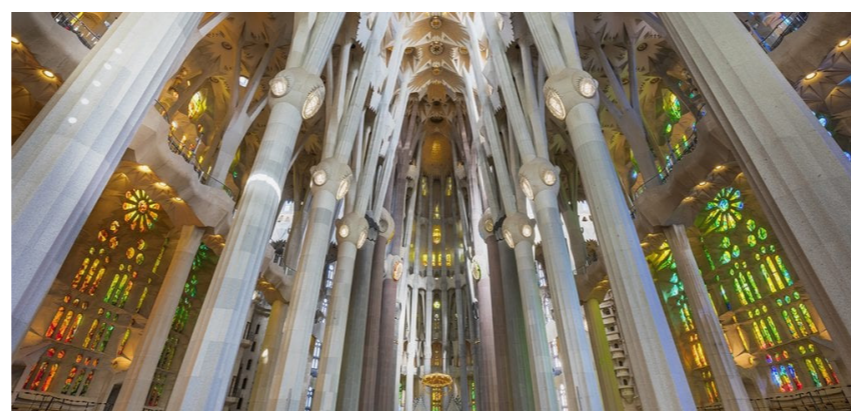
La columna de doble giro que él descubre sintetiza tres modelos históricos (columna lisa, columna griega y columna salomónica), ya que incluye el círculo, las estrías y las hélices.

Esta nueva columna llega al círculo partiendo de la estrella, se estrecha hacia arriba, con lo que se hace esbelta y elegante, y tiene una forma que multiplica las estrías hasta que la sección acaba siendo circular.

El fuste de la columna generado de esta manera queda dividido en tramos, ya que, para no volver a la forma de la plantilla estrellada original y tender progresivamente al círculo, cada vez que se dobla el número de puntas se acumula la parte ya suprimida y se genera un nuevo tramo.



[21] La columna de doble giro

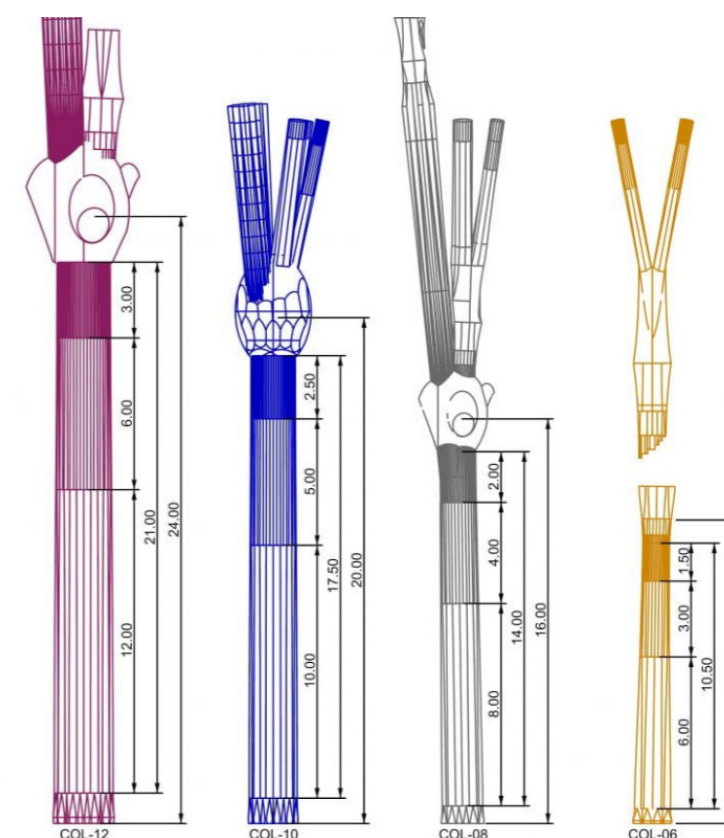


[22] Fuente: blog.sagradafamilia.org/es/especialistas/las-columnas-de-doble-giro/

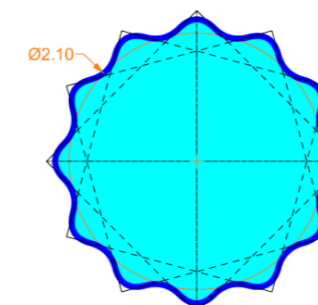
Todas las proporciones de los elementos constructivos involucran a los divisores de 12, que permite una factorización muy rica y su división en mitades y terceras partes. La explicación filosófica de por qué lo usó es que 12 es el número de los apóstoles de Jesucristo.

En todos los casos, estas estrellas tienen las puntas interiores y exteriores redondeadas mediante unos arcos parabólicos tangentes; así se consigue que la superficie que se ofrece al tacto del visitante en el tramo inicial de la columna presente una ondulación suave.

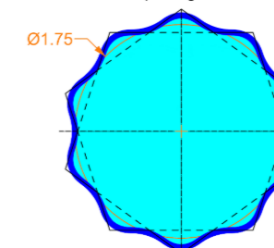
Ved, a continuación, cómo es la generación de las estrellas base de los cuatro tipos de columnas del templo:



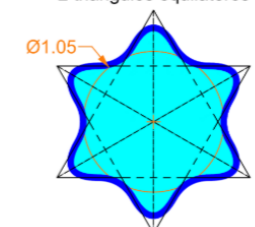
Base de la columna de 12 3 cuadrados



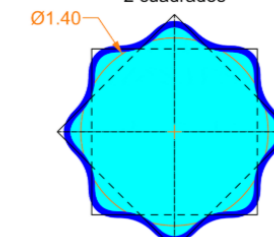
Base de la columna de 10 2 pentágonos



Base de la columna de 6 2 triángulos equiláteros



Base de la columna de 8 2 cuadrados



[23] Fuente: blog.sagradafamilia.org

PALAU GÜELL (BARCELONA - 1886-1890)

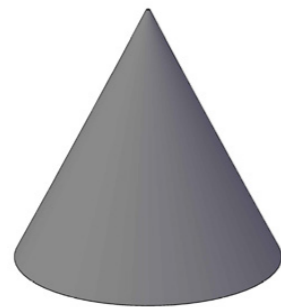
En el Palau Güell encontramos formas conoidales en los capiteles de las columnas interiores de los comedores, en el soporte del sol del panel que simboliza los rayos solares y, por descontado, en las chimeneas de la azotea.



[24] Fuente: pankchophoto.com/2017/08/11/palauuell/

El cono es una superficie generada por una recta que se mueve apoyándose en una curva y en una recta dadas y conservándose paralela a un plano.

Podemos describirlo fácilmente mediante rectas. Si tenemos una elipse en el espacio y un punto V que no está en el plano de la elipse, la superficie formada por (todos los puntos de) las rectas que pasan por V y por un punto de la elipse es un cono con vértice V .



PALACIO EPISCOPAL DE ASTORGA (BARCELONA - 1889-1893)

Encontramos torres conoidales en el Palacio Episcopal de Astorga tenemos torres conoidales siempre rematadas con paneles artísticos de hierro.

En este proyecto Gaudí vuelve a utilizar el cilindro, también haciendo mención al anterior tipo, con las torres cilíndricas de las esquinas.

El diseño de Gaudí nos presenta un edificio de planta central que se encuentra superpuesto en un cuadrado y una cruz. Su apariencia de castillo medieval nos traslada una vez más a la influencia que Gaudí recibió en sus primeros proyectos de la arquitectura gótica.



[25] Palacio Episcopal de Astorga

CASA BATLLÓ (BARCELONA - 1904-1906)

Cuando Gaudí proyecta esta obra, es un arquitecto consagrado con 52 años. Se inspira en las formas animales, en especial del océano. Lleva a cabo su lenguaje propio basado en la geometría a través de un trabajo con curvas que recuerdan partes del esqueleto humano.

La fachada mantiene una suave ondulación vertical. Los balcones de hierro forjado, cargados de simbolismo, son elementos muy notorios.

Sitúa una moldura helicoidal en el encuentro con uno de los edificios preexistentes para no entrar en conflicto.

En la cubierta encontramos una simbología con un dragón sin cabeza. Éste no es más que la cubierta de los pisos de buhardilla sustentados sobre arcos parabólicos.



[26] Casa Batlló en el centro y [27] Balcones

PARC GÜELL (BARCELONA - 1900-1914)

Tras adquirir 15 hectáreas, el político Eusebi Güell encarga a Gaudí el diseño de una urbanización de lujo en las afueras de Barcelona. La urbanización debía tomar como modelo las ciudades-jardín inglesas, muy importantes en el momento.



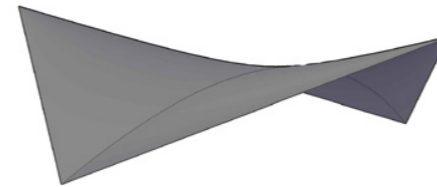
[28] Parc Güell

Una impresionante estructura ascendente formada por una escalinata nos lleva a un espacio que serviría de plaza central para los distintos vecinos de la urbanización. A un lado de la escalinata Gaudí diseña una cueva de forma circular que se sostiene en el centro por una columna de forma cónica. Utiliza arcos catenarios para crear los pasadizos del Parc Güell.



Pasadizos del Parc Güell. Fuente. 123rf.com

Observamos paraboloides hiperbólicos en la cubierta de la casa de la entrada del Parc Güell, donde aparece el paraboloides hiperbólico.



Fuente: Elaboración propia



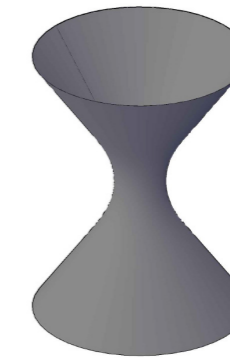
[29] Cubierta del pabellón de entrada del Parc Güell.

Encontramos más paraboloides hiperbólicos en los soportales de la Cripta de la Colonia Güell



[30] Cripta de la Colonia Güell.

El hiperboloide hiperbólico es la superficie reglada formada por la rotación de una recta (generatriz) alrededor de otra (directriz) que no corta y que no es paralela a ella.



Fuente: Elaboración propia

Se puede encontrar el hiperboloide de revolución en la columna central que sostiene el cobertizo para carruajes en el Park Güell



[31] Entrada de carruajes del Parc Güell.

CASA MILÁ (BARCELONA - 1906-1912)

Más conocida como La Pedrera, esta obra de Gaudí, de fachada ondulada y techo escultórico surrealista parece más orgánica que artificial.

La fachada con un oleaje sinusoidal da un movimiento armónico a la fachada de piedra, que representa al mar. De esta forma solventa las esquinas.

La estructura del edificio está formada por pilares y jácenas (vigas metálicas) que forman un entramado sobre el que se levantan bóvedas.

En la buhardilla volvemos a ver arcos catenarios, una solución muy empleada por Gaudí, al ser ligeros y fáciles de construir. Encontramos arcos hechos de ladrillo, sobre los cuales descansa la terraza.

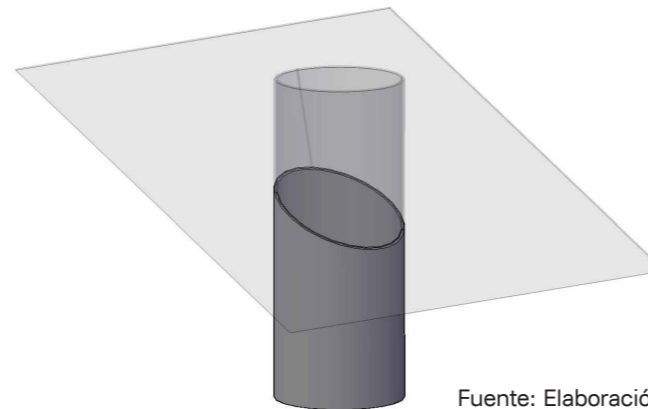


[32] Fachada de la Casa Milá



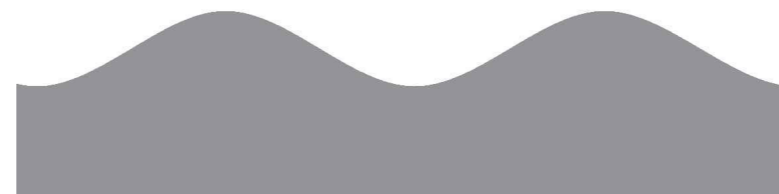
[33] Patio de la Casa Milá

Superficies regladas conoidales sinusoidales



Fuente: Elaboración propia

Sección elíptica de un cilindro. Al desplegar la superficie cilíndrica seccionada se genera una senoide.



Fuente: Elaboración propia

En la naturaleza podemos observar formas sinusoidales en las olas del mar, en los movimientos serpenteantes, cuando miramos líneas de cresta lejanas, o en suaves perfiles presentes en formas vegetales y animales.

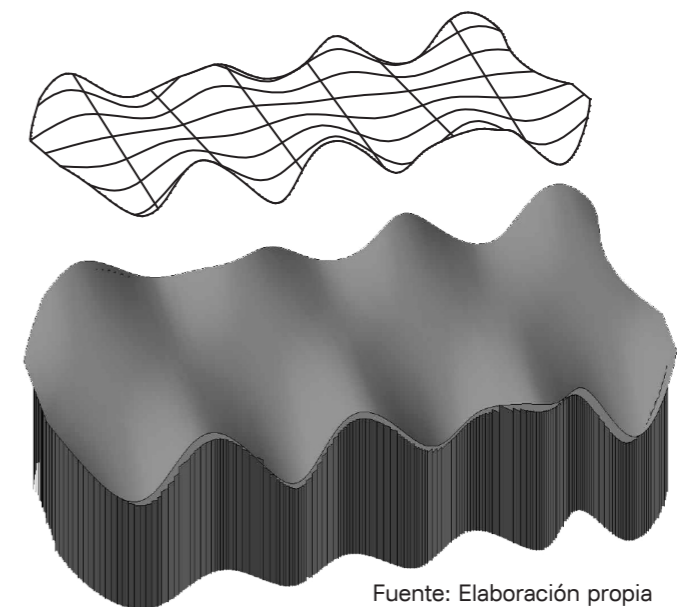
ESCUELAS PROVISIONALES DE LA SAGRADA FAMILIA (BARCELONA - 1908)

Superficies regladas conoidales sinusoidales de las Escuelas provisionales de la Sagrada Familia.

Encontramos unos muros curvilíneos rematados por un original techo ondulado, realizado a partir de una estructura cónica que se va repitiendo a lo largo de toda la cubierta. Estas formas curvas de los muros no fueron elegidas por cuestiones estéticas, sino que tenían el objetivo de aumentar su resistencia.

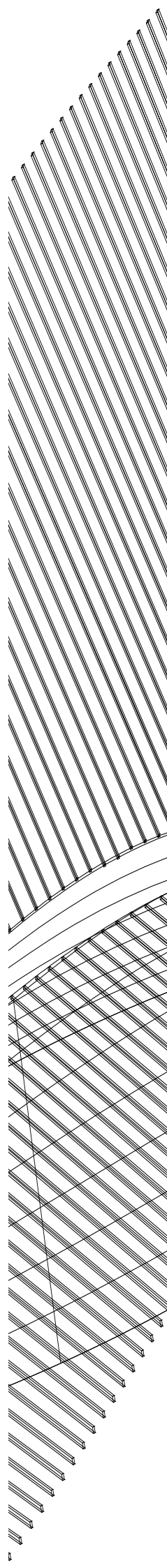


[34] Escuelas provisionales de la Sagrada Familia



Fuente: Elaboración propia

FÉLIX CANDELA (1910-1997)



FÉLIX CANDELA

Este arquitecto es reconocido mundialmente como una de las figuras más prominentes de la arquitectura del Siglo XX. Sus innovadores experimentos con concreto reforzado produjeron edificios icónicos llamados cascarones. [SeBu94]

Podemos dividir la carrera de Candela en tres tercios: el primero se ubica en España, donde se formó; el segundo en México, donde desarrolló la mayor parte de su carrera, el último en Estados Unidos, donde difundió su obra.

Se licenció como arquitecto e ingeniero en Madrid siendo discípulo de Eduardo Torroja. De él aprende que la estructura depende de la forma. También continuó con la línea de investigación de cubiertas livianas de hormigón.

Su capacidad para “ver en el espacio” y su curiosidad por cómo trabajan y se tienen en pie las estructuras, le llevaron a centrar su atención sobre los aspectos más técnicos y arduos de la edificación arquitectónica antes que sobre aquellos más artísticos.

Esta curiosidad le llevó, ya acabada la carrera, a fijarse en las cosas que estaba haciendo Torroja por aquel momento en España y en los estudios teóricos sobre estructuras laminares de hormigón que se llevaban a cabo en Alemania.

BÓVEDAS FUNICULARES

Los primeros cascarones de hormigón con los que comienza son bóvedas antifuniculares del tipo “ctesiphon”, sin acero de refuerzo y utilizando tela para los encofrados. La cuál para su construcción siguió los lineamientos de algunos prototipos erigidos en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial.

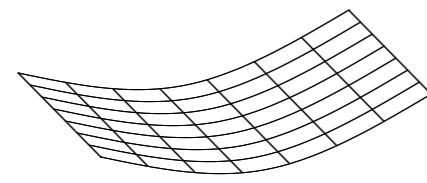
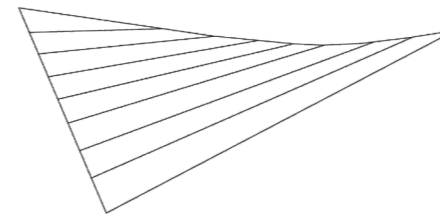
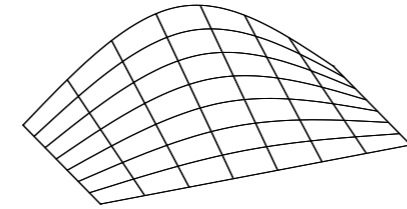


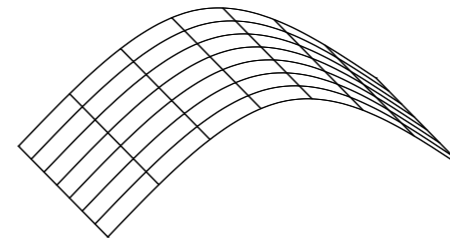
Lámina reglada con directriz catenaria



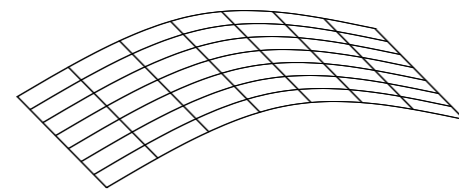
Paraboloides hiperbólico



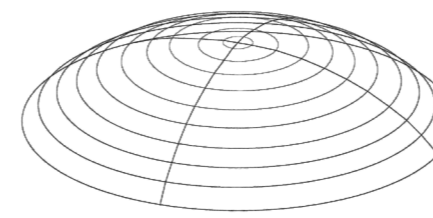
Bóveda formada por la unión reglada de una recta y un arco parabólico



Bóveda de arco parabólico



Bóveda de cañón de arco rebajado



Cascarón de generatriz elíptica

Fuente: Elaboración propia

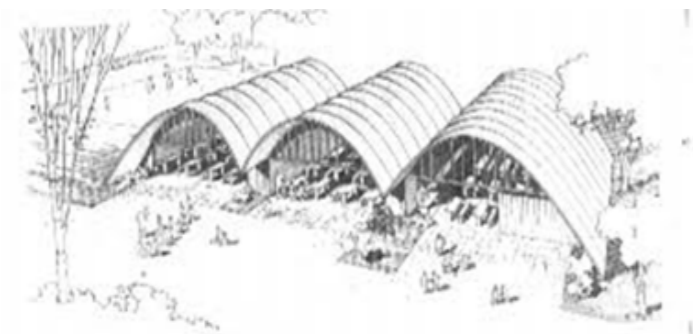


[35] Bóveda antifunicular experimental tipo ctesiphon (1949)

El éxito obtenido con este experimento incitó a Candela a considerar la posibilidad de dedicarse a la construcción de cascarones. Era esencial contar con algo diferente que ofrecer para sobrevivir en el campo intensamente competido de la construcción en México. Dice Candela, “no obstante la tradición mexicana de construir formas abovedadas audaces, los cascarones de concreto fueron mirados con recelo. Se creía que eran inseguros, por motivo de las condiciones del subsuelo y los frecuentes temblores” [SeBu94]

Más tarde, construirá las bóvedas cilíndricas largas, con luces de unos 12 m. El desarrollo de la técnica le llevaría a prescindir de las vigas de borde. Construye también cubiertas de diente de sierra utilizando este modelo de bóvedas cilíndricas.

Sin embargo, al aumentar el vano cubierto por las bóvedas aparecen nuevas tensiones y para evitar flexiones transversales, los vanos tienen que acortarse. Por tanto, Candela empieza a experimentar con bóvedas cilíndricas más cortas. Estas bóvedas si van a necesitar vigas de borde y cables tirantes que contrarresten los empujes laterales.



[36] Bóvedas antifuniculares.

Se construyen pocas cúpulas, pues el encofrado de las superficies sinclásticas es engorroso y complicado, a menos que sean muy planas. [MaFRFa]

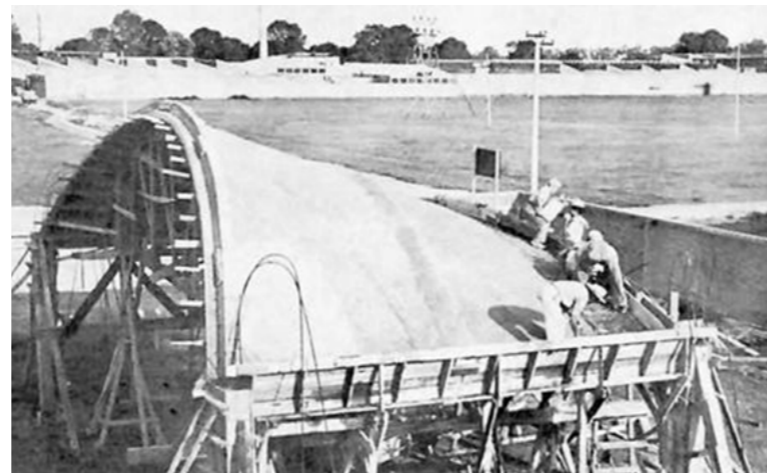
Utilizó generalmente, formas geométricas de doble curvatura que son resistentes por su propia forma, y de entre todas las posibles, fundamentalmente el paraboloide hiperbólico, una superficie reglada que permite ser hormigonada sobre un sencillo encofrado realizado a base de tablas de madera que siguen sus generatrices rectas.

CONOS

El primer “cascarón” de hormigón armado que construye Cubiertas Ala es en forma de conoide, con una luz de 14 m. y un espesor de 3 cm. [MaFRFa]

En su construcción se prolongan las columnas para atirantar por encima del cascarón y facilitar así el descimbrado. Se aprende con esta obra que la rigidez intrínseca de estas losas de doble curvatura permite no ser tan estricto como decía la teoría.

CONOIDE EXPERIMENTAL EN SAN BARTOLO (NAUCALPAN, MEXICO - 1950)



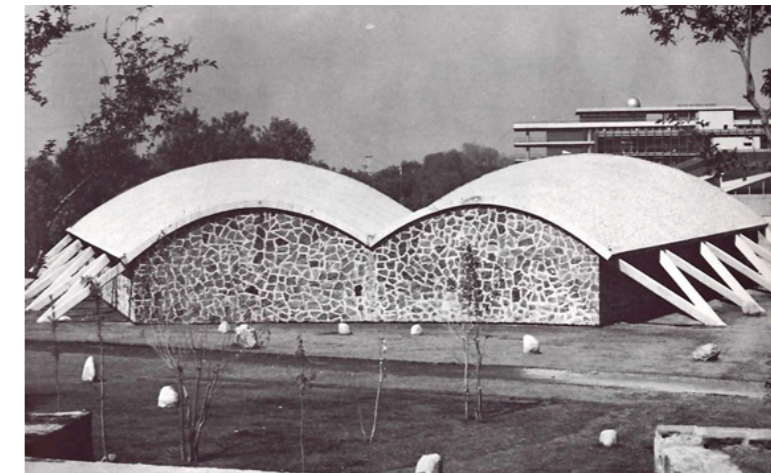
[37] Conoide experimental

En 1950 construye su primer experimental. Shell, la llamada “bóveda de Ctesiphon” en San Bartolo de Naucalpan, México.

Esta cáscara delgada experimental fue diseñada para la geometría más bien simple de un funicular catenario. Más tarde, cuando planeaba usar una nueva geometría o tamaño, Candela construyó armazones experimentales para monitorear su comportamiento estructural y diseñar formas de optimizar la construcción.

Félix Candela encontró la forma geométrica adecuada, para optimizar, no solo la belleza escénica de sus cascarones, sino a la vez, y de manera inseparable, su funcionamiento estructural, proceso de construcción, y coste.

AUDITORIO DE CIENCIAS QUÍMICAS CIUDAD UNIVERSITARIA DE MÉXICO (MEXICO DF, MEXICO - 1952)



[38] Auditorio de Ciencias Químicas.

El techo del Auditorio de Ciencias Químicas de la Ciudad Universitaria de México, está formado por 2 conos truncados, formada por una caja de muros de piedra originaria del lugar; el uso de este material fue una marca de muros de diseño que se acordó usar en todos los edificios del lugar.

Los arcos de los conos van de los 8 a los 16 metros y los puntales de concreto que aparecen en los costados solo estabilizan la vertical de los muros desligándose del trabajo estructural de la cubierta.. Esta es la única ocasión en que Candela ha trabajado con conos. El nos comenta : ” En cierto sentido evadí el problema de cálculo considerando los conos como cilindros y dándoles forma de catenarias”.

La estructura es también uno de sus pocos cascarones en México en el que ha actuado solamente como consultor (y no como contratista). Las luces de los conos aumentan de 9 a 18 cm. Los soportes inclinados fueron una característica que se agregó al diseño original para mejorar la apariencia.

PABELLÓN DE RAYOS CÓSMICOS EN LA UNAM (MEXICO DF, MEXICO - 1951)



[39] Pabellón de Rayos Cósmicos.

El Pabellón de Rayos cósmicos fue uno de los primeros cascarones construido por su propia empresa llamada Cubiertas Ala. Sería el primero en que se utilizaba el hyper para dar mayor rigidez a una liviana bóveda cilíndrica, ya que la doble curvatura lo hace especialmente estable. Esta estructura tiene gran importancia, pues fue la primera que brindó de prestigio a Candela, sus atributos, su sencillez formal y el alarde técnico que suponía su extrema delgadez.

El espesor de este cascarón oscila entre 1,5 y 2 cm, requisito funcional para dejar pasar a través de él los rayos cósmicos que se registraban en el interior.

En la planta baja aparecen tres arcos parabólicos con ménsulas hacia afuera; la parte alta de los arcos forma la viga que sostiene el piso del laboratorio; por encima, la membrana de la cubierta parece reposar sin ningún anclaje en el suelo.

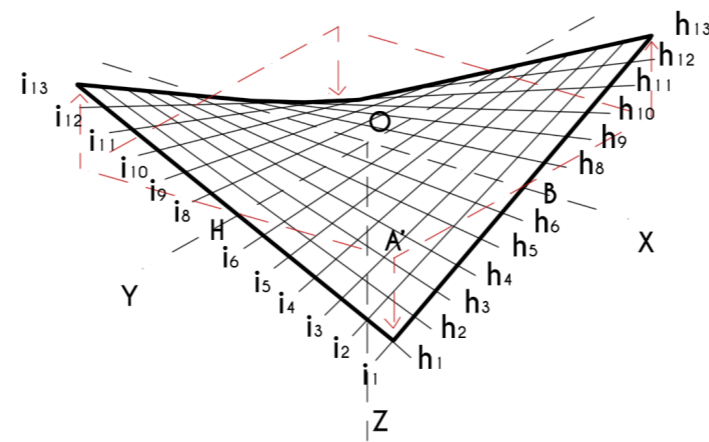
Las superficies onduladas de las dos cabeceras contribuyen, por su forma y superficie, a crear una imagen de monumentalidad aunque a escala reducida en contraposición al resto de los edificios del campus, que se distinguen por su densidad y magnitud.

EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (HYPAR)

El paraboloides hiperbólico, también conocido como silla de montar, contiene dos sistemas de generatrices rectas. Cada sistema de estas, es paralelo a un plano director y ambos planos forman un ángulo arbitrario. La superficie generada es de doble curvatura, y ambas tienen su concavidad en direcciones opuestas.

La propiedad más importante del paraboloides hiperbólico es que puede construirse con líneas rectas. Al tratarse de una superficie doblemente reglada se facilita la construcción del proyecto, pues el encofrado requiere únicamente piezas rectas.

Consigue, sin embargo, una forma no desarrollable o de doble curvatura.



Paraboloides hiperbólico con bordes rectos

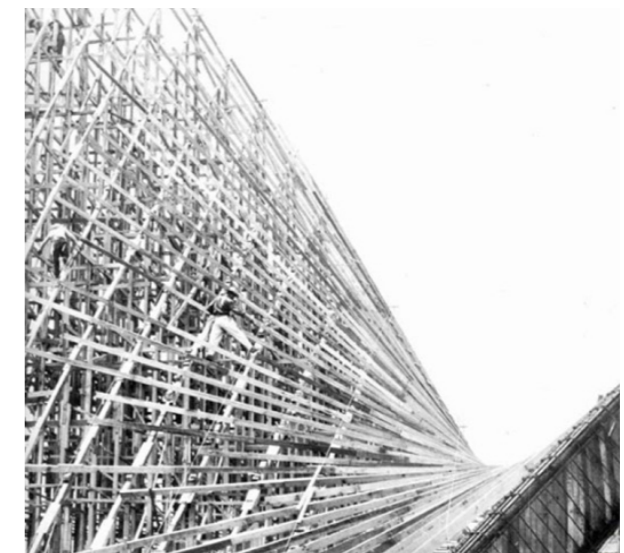
Felix Candela desarrollará su carrera utilizando e investigando acerca de estos paraboloides.

Construye los famosos paraguas invertidos, un soporte bajo una hyper que hoy día son las cubiertas de varias marcas de gasolineras.

CAPILLA DE LA PALMIRA (CUERNAVACA, MEXICO - 1958-1959)

En el cascarón de la capilla abierta de Lomas de Cuernavaca podemos encontrar el ejemplo de los tres tipos de corte que se pueden dar en la superficie del hyper, en este caso equilátero (parábola, hipérbola y casi rectos – degeneraciones de la otra parábola).

El espacio se presenta al espectador con una fuerza de atracción poco usual; las huellas de las reglas de madera del encofrado contribuyen a transmitir una nueva sensación dinámica y subrayan la direccionalidad hacia el fondo . [OsHen10]



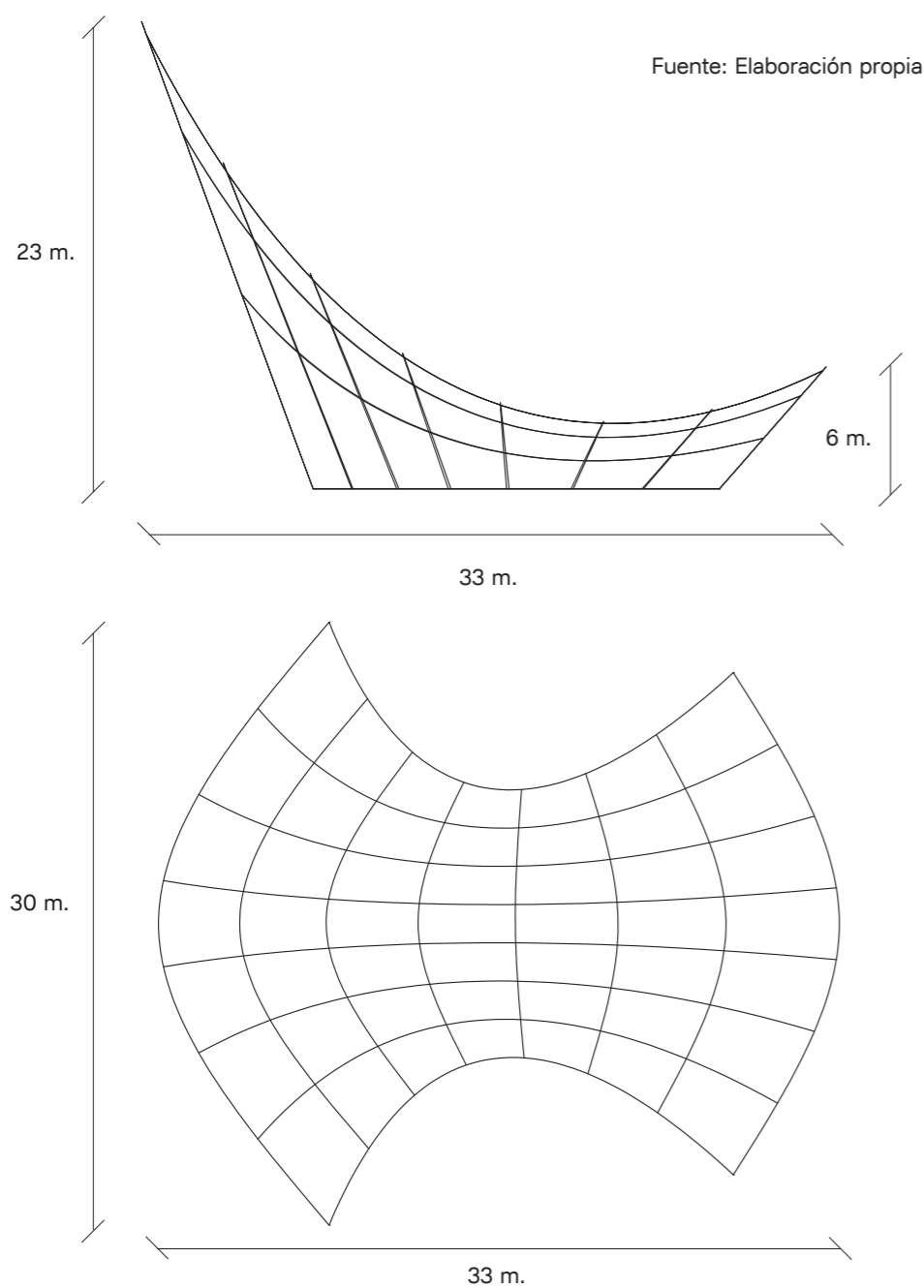
[40] Encofrado con listones rectos en una hyper

Se concibió a partir del enfrentamiento de dos paraboloides hiperbólicos gigantes de 25 x 30 metros en planta de borde recto y asimétrico, el manto corto se eleva casi a 90 grados respecto al horizontal y la cara vertical se relaciona con la del paraboloides hiperbólico opuesto mediante tensores de hacer de 2.5 cm. de diámetro.

Precisamente en la base del plano vertical están los apoyos a tierra generados por las vigas del borde del manto vertical



[41] Capilla de Cuernavaca durante su construcción.



RESTAURANTE LOS MANANTIALES (XOCHIMILCO, MEXICO - 1958)

Estamos ante la estructura que el propio Candela considera como su obra más significativa. Se encuentra situado al sur de la ciudad de México, en el Distrito Federal de Xochimilco, y fue construido en 1958.

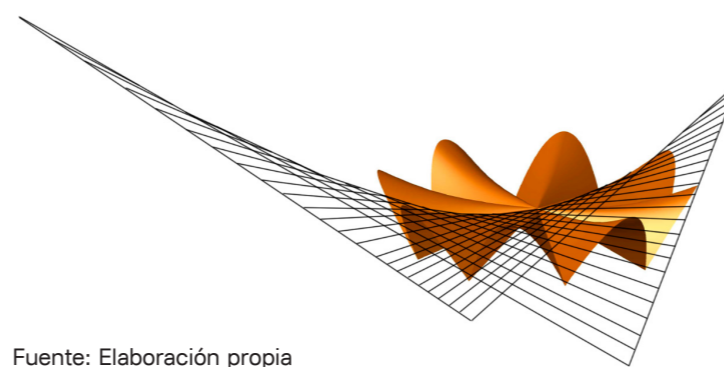
El proyecto es el Restaurante Los Manantiales, en Xochimilco, de planta octogonal y está formada por la intersección de cuatro hypars.

El encargo arquitectónico planteado fue la crear un espacio para mil personas con una sala de restaurante. Candela decidió diseñar una bóveda de planta circular que resultara por la intersección de ocho bóvedas provenientes del encuentro de cuatro paraboloides hiperbólicos. [OsHen10]

Durante el desarrollo de su carrera eliminaría la viga del borde, transmitiendo las cargas de la estructura en los apoyos, que se encuentran en el borde exterior de los ocho paraboloides. [BasOte]

El edificio tiene un diámetro de 42,7 metros con los apoyos inscritos en un cuadrado de 30 m. de lado. Posee una altura de casi 6 m. en el centro de la construcción mientras que en los puntos más altos alcanza los 10 m. [MaFRFa]

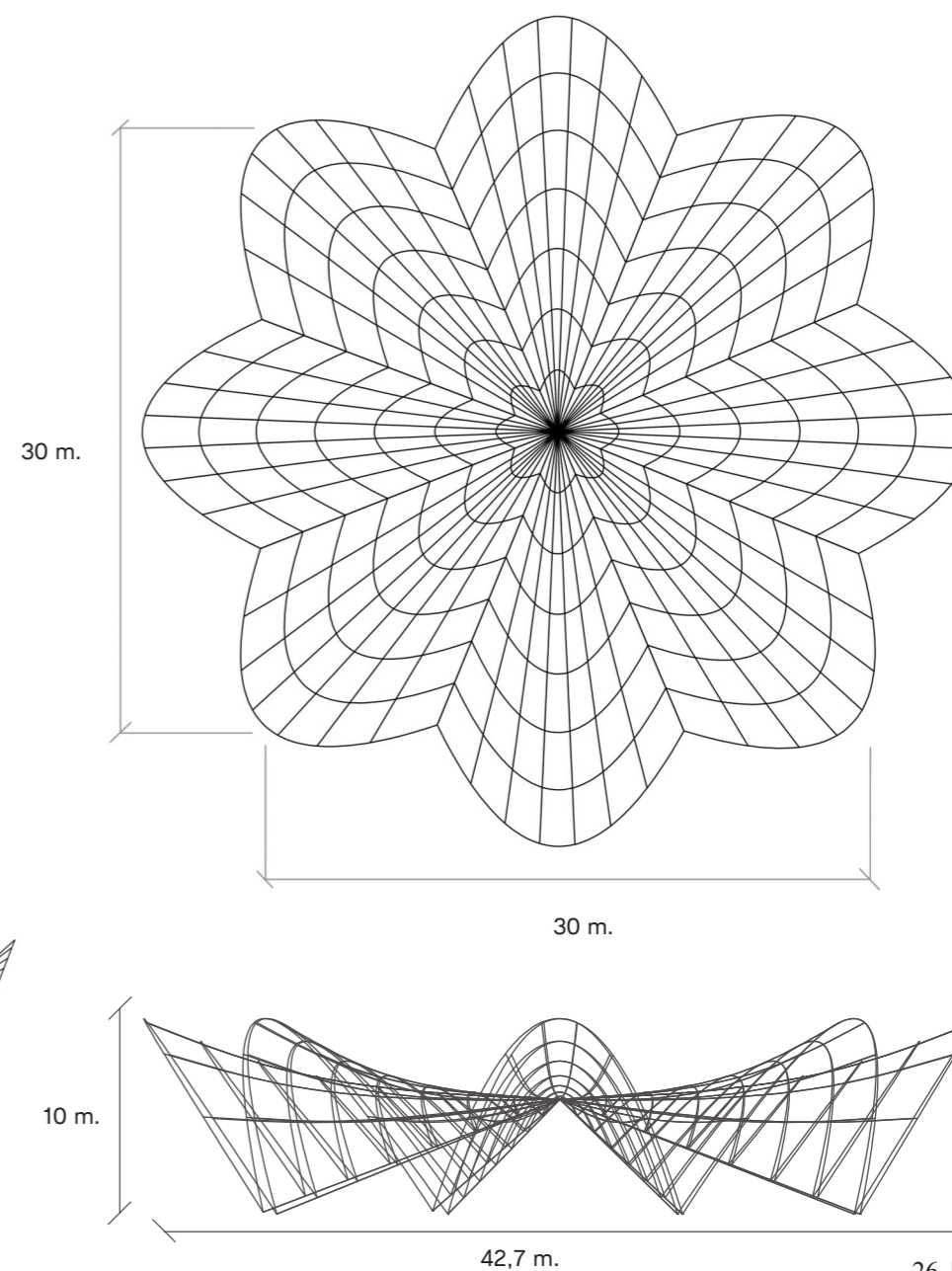
La forma de estos cascarones procede de la intersección de 2 planos con un paraboloides hiperbólico.



Fuente: Elaboración propia



[42] Restaurante Los Manantiales.



PALACIO DE LOS DEPORTES PARA LOS JUEGOS OLÍMPICOS (MEXICO DF, MEXICO - 1968)

El Palacio de los Deportes fue construido para los Juegos Olímpicos de 1968. Candela sustituyó el uso de los cascarones de hormigón por una estructura metálica semiesférica formada por secciones de planta cuadrada con subestructuras alabeadas de cobre.

El Palacio de los Deportes de Roma (ver figura 14), obra de Pier Luigi Nervi, fue su inspiración para diseñar esta obra.

En el interior del edificio hay cuatro niveles principales para las gradas y palcos. Las instalaciones fueron diseñados para una gran variedad de deportes, entre otros; boxeo, lucha, levantamiento de pesas, esgrima, etc. También se diseñó para albergar otras exposiciones.

La planta del edificio es circular. Se resuelve la cubierta con una cúpula geodésica. Esta se compone de paraboloides hiperbólicos unidos en dos ejes perpendiculares. Se utiliza el cobre para forrar la subestructura de láminas de madera, resistente al agua, sustentadas en grandes arcos de acero.

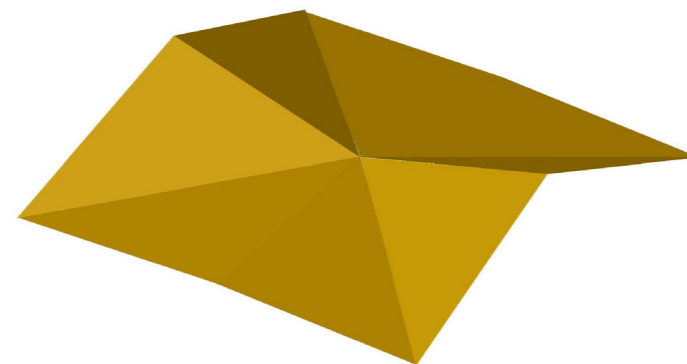
En el interior, hay decenas de pilares de hormigón cubiertos con ladrillo en los cuatro costados. Los pilares actúan como contrafuertes de la estructura de la cúpula, distribuyendo los esfuerzos y distribuyendo los espacios de acceso al recinto.



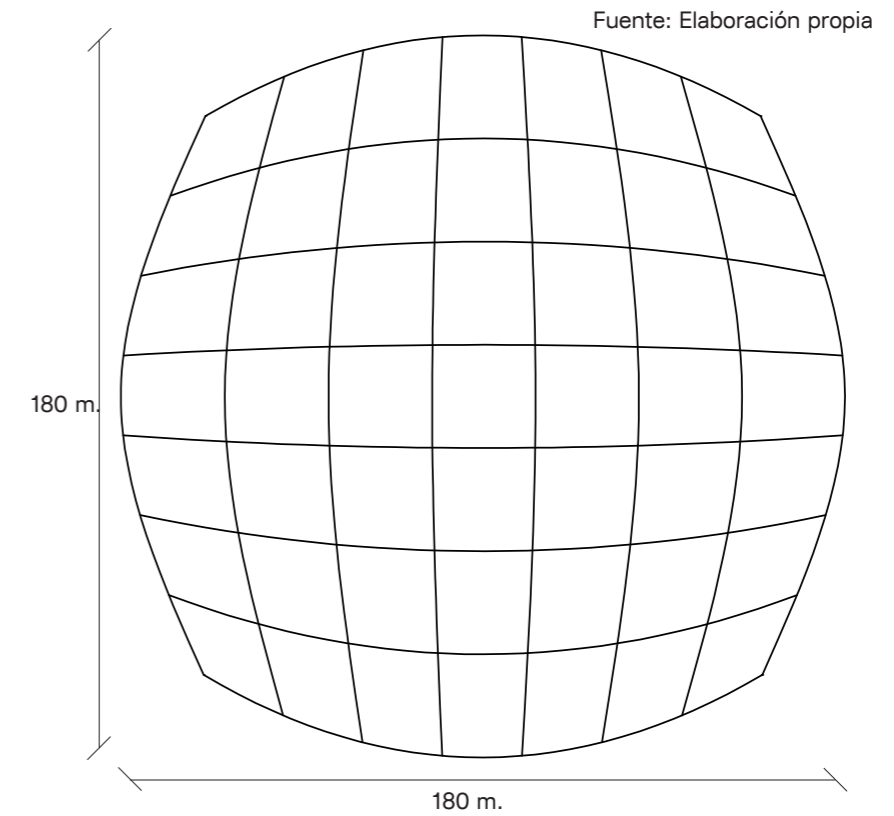
[43] Palacio de los Deportes durante su construcción



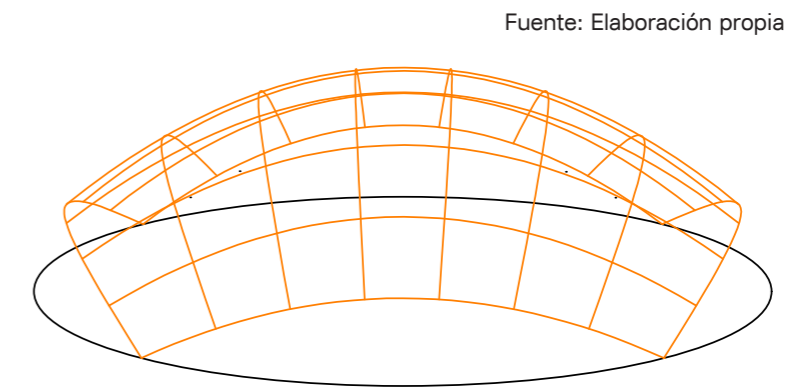
[44] Palacio de los Deportes en 1968



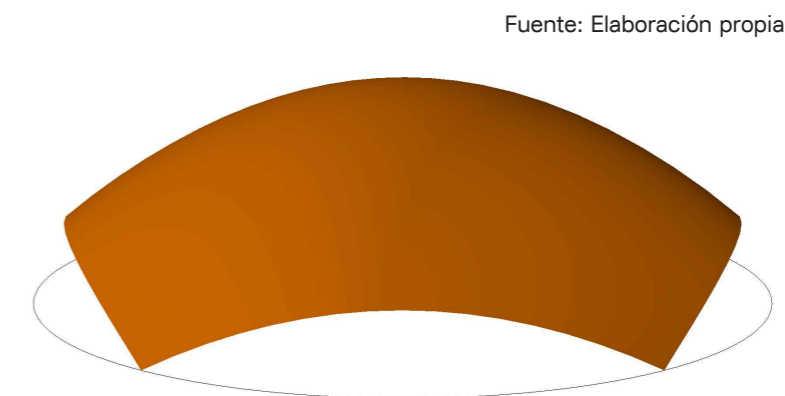
Detalle de paraboloides hiperbólicos. Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

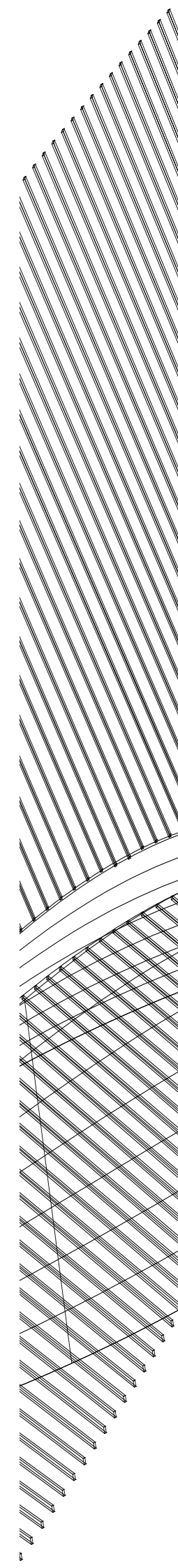


Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

SANTIAGO CALATRAVA (1951-)



SANTIAGO CALATRAVA

Santiago Calatrava, arquitecto español, nació en un pueblo de Valencia en 1951.

Santiago Calatrava es un arquitecto, ingeniero y escultor meticuloso y trabajador de las ideas. Así estudia y concibe cada proyecto como una obra viva donde todas las partes que la componen están estrechamente vinculadas.

Da gran importancia al efecto dinámico, al hormigón y al acero como materiales de construcción. Se inspira en la naturaleza, en las formas bellas y particulares de los organismos y en los esqueletos humanos. Sus estudios en arquitectura e ingeniería marcaron el porvenir de sus obras, de tal punto que van unidas en las obras del arquitecto.

“La obra de Calatrava se basa y guarda relación con el funcionamiento de un organismo vivo: tiene una estructura, un receptáculo que a su vez soporta funciones de órganos vitales; la circulación de las personas se asocia a fluidos y a la sangre; por último, se concluye con una piel, que cubre tanto los órganos en funcionamiento como la estructura”. [Tzo11]

Calatrava inició su tesis en 1979, fomentando la investigación en <<estructuras plegables>>. La concepción de Calatrava para estas formas se basaba en que las figuras geométricas abstractas son como objetos físicos formados por varillas rígidas ensambladas por articulaciones móviles. Cuando las varillas rígidas articuladas cambian de posición, marcan geométrica y matemáticamente un recorrido o una curva que genera otra superficie. Lo que quiso demostrar Calatrava es que esa gran complejidad que producían las formas podía fundamentarse en mecanismos simples.

L'HEMISFERIC (VALENCIA - 1994-1998)

“En este edificio se hace una analogía literal con un ojo humano, tanto en planta como en alzado, pues textualmente este ojo parpadea, al abrir mecánicamente los lados, que dan sobre una extensa superficie de agua, dejando ver la pupila o esfera central, que corresponde al auditorio”. [Tzo11]

Esta creación de Calatrava se ha convertido quizás en una de las más representativas de la Ciudad de las Artes y Ciencias. Su aspecto peculiar y claramente semejante a un globo ocular la han puesto en el centro de la escena

El edificio principal emerge como un gran caparazón que está formado por estructuras fijas y estructuras móviles que cubren una gran semiesferadispuesta en el centro del edificio.

La cúpula esférica del edificio se conforma sobre el graderío, inclinado y semicircular, que se encierra con una serie de volúmenes esféricos, los cuáles van asumiendo distintas funciones.

La estructura del edificio es de hormigón armado, excepto la cubierta que es de acero.

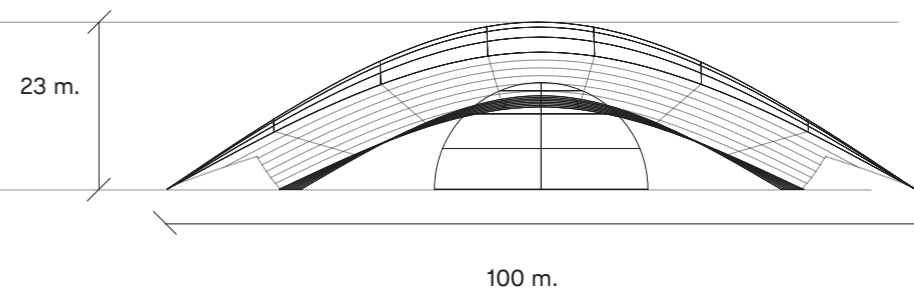
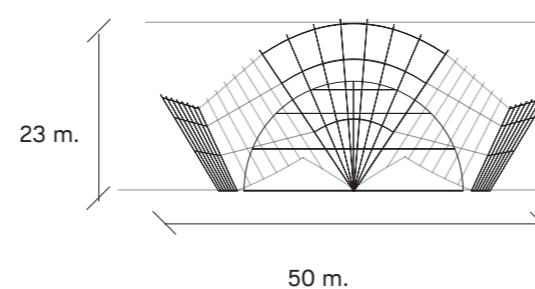
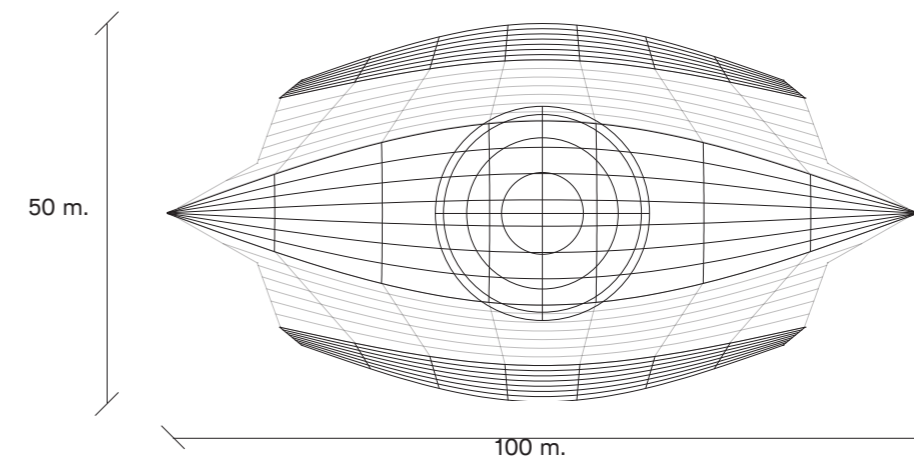
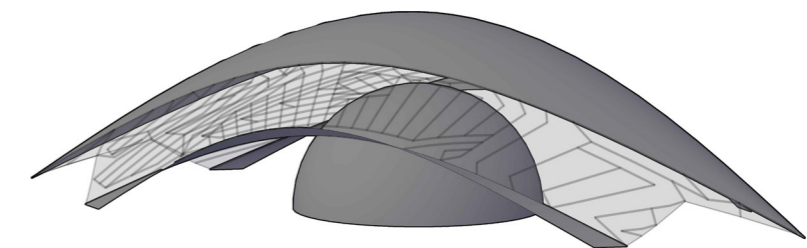
La cubierta de acero se compone de una serie de arcos transversales que transmiten los esfuerzos hacia otros arcos longitudinales que van a parar a la cimentación.

De nuevo el uso de esta forma de curvatura favorece la estabilidad del edificio.



[45] L'Hemisfèric en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia.

Fuente: Elaboración propia



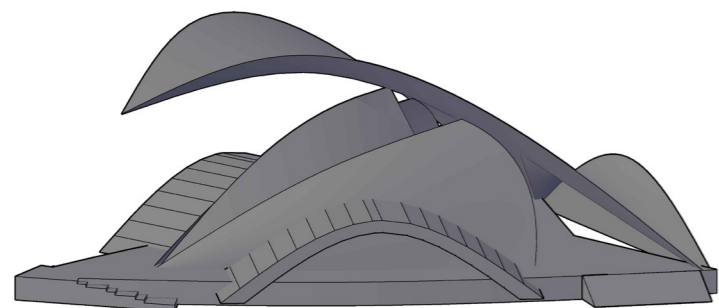
AUDITORIO DE TENERIFE (STA. CRUZ DE TENERIFE - 1997-2003)

El auditorio de Santa Cruz de Tenerife se pensó para satisfacer la gran necesidad existente de unas instalaciones para eventos culturales.

La mayor parte de los diferentes volúmenes de esta intrincada y compacta composición resultan de formas geométricas u operaciones relativamente sencillas. Por ejemplo, la forma de la cubierta se define por la intersección de dos segmentos de cono. La forma de la concha interior simétrica de 50 metros de altura de la sala de conciertos se generó haciendo rotar una curva hasta describir una elipse: una cuña de aproximadamente 15 grados fue rotada desde el centro de este cuerpo de tal modo que sus dos segmentos forman una pronunciada acanaladura que soporta la curvatura de la superficie

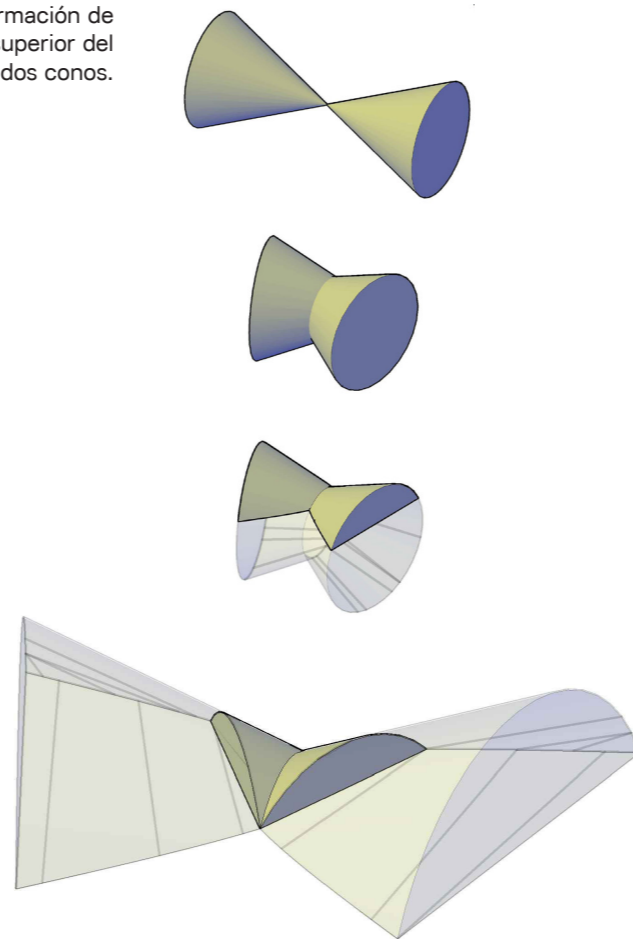


[46] Auditorio de Tenerife

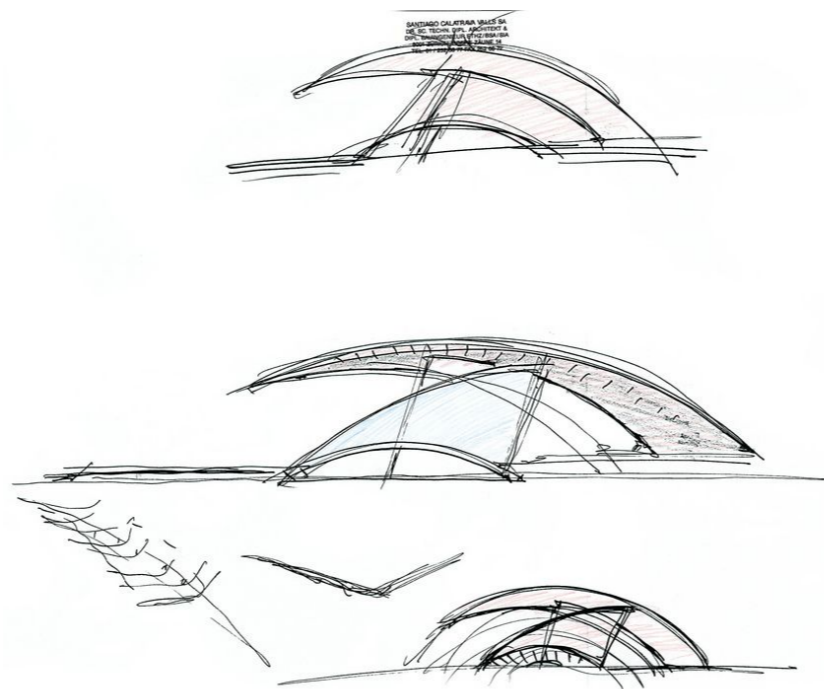


Fuente: Elaboración propia

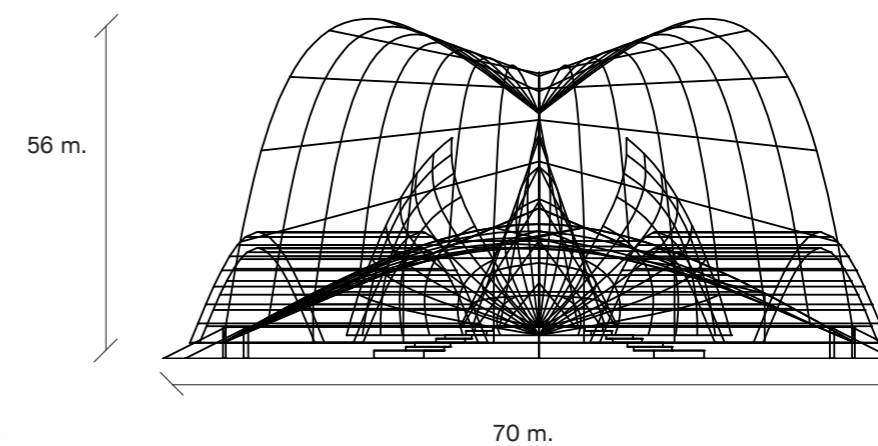
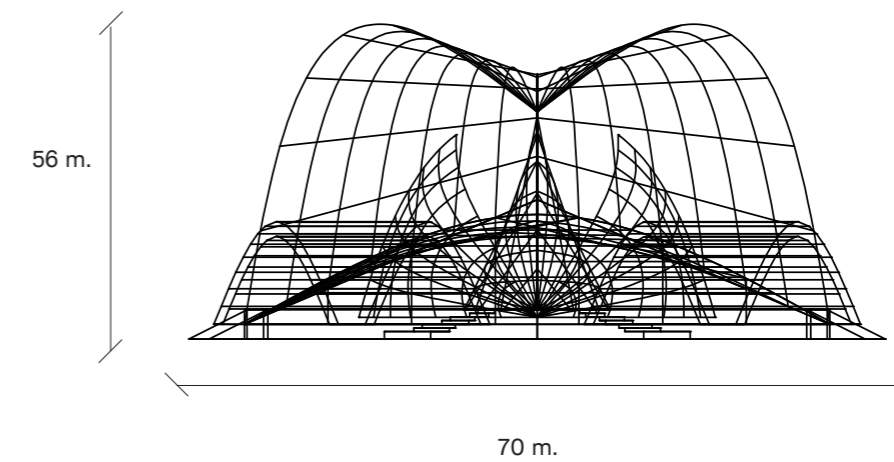
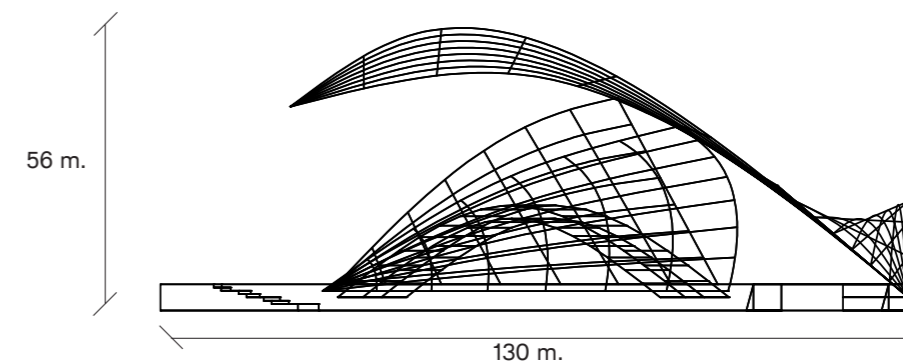
Desarrollo de la formación de la cresta superior del auditorio con dos conos.



Fuente: Elaboración propia



[47] Dibujos del arquitecto Santiago Calatrava



Fuente: Elaboración propia

BODEGAS YSIOS (LAGUARDIA, ALAVA - 1998-2001)

El complejo de Bodegas Ysios, en Laguardia, La Rioja, fue diseñado en 1998 para el grupo Bodegas y Bebidas.

El diseño debía responder a la necesidad de dar acomodo a las necesidades vinícolas básicas: hacer, almacenar y vender vino. Pero también trataba de satisfacer el deseo del cliente de una estructura icónica que funcionara como una especie de marca de fábrica para su prestigioso vino. [Tzo11]

El edificio está formado por dos muros de carga longitudinales de hormigón, separados por 26 metros y 196 metros de largo con una silueta sinusoidal en planta y alzado.

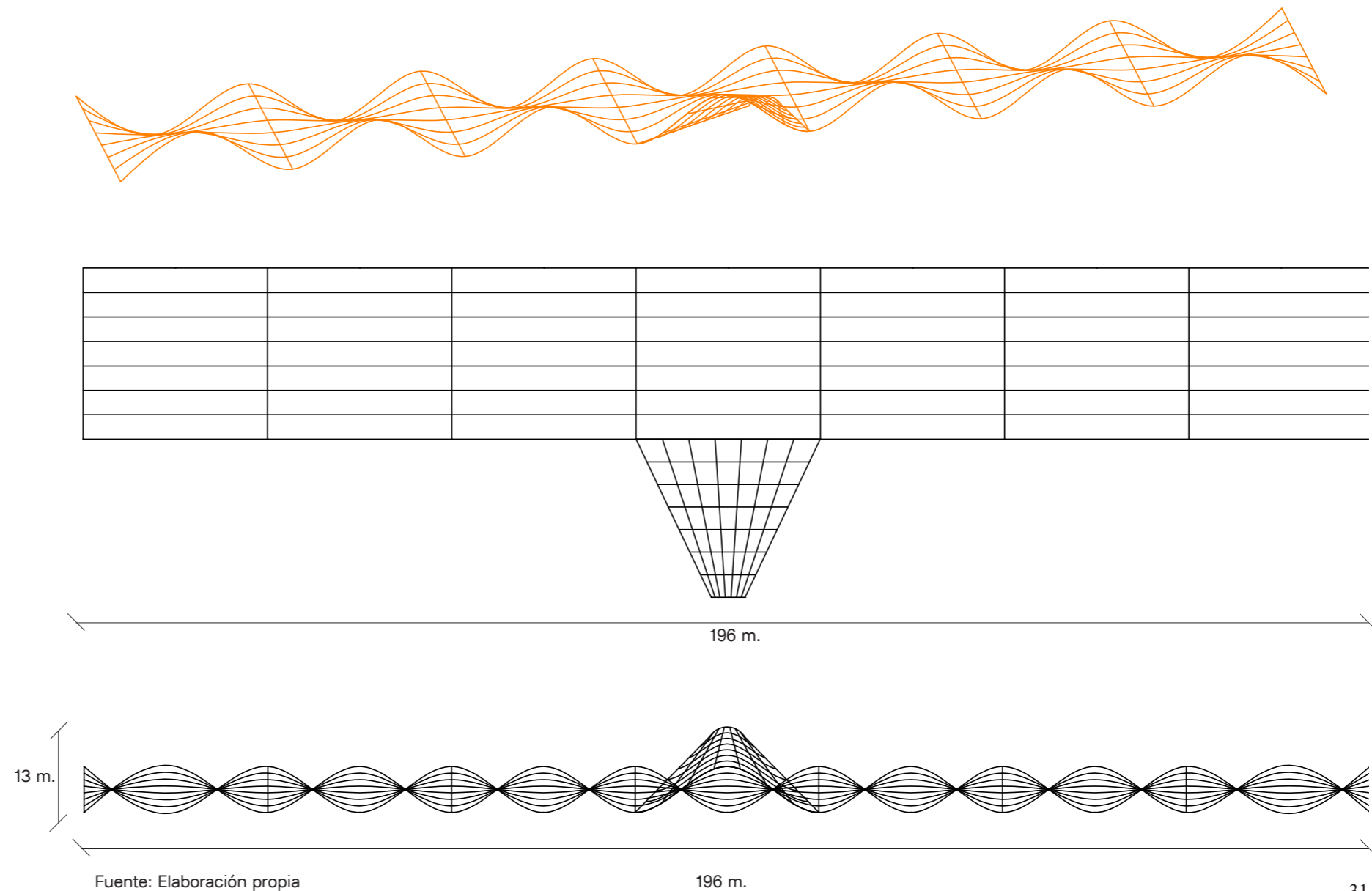
La superficie acanalada de la ola combina superficies cóncavas y convexas a medida que evoluciona a lo largo del eje longitudinal. La cubierta está hecha a base de vigas de madera revestidas de aluminio que dibujan la superficie ondulada creada por los muros portantes. Estas vigas se apoyan en la cornisa escalonada de los muros laterales.



[48] Bodegas Ysios



[49] Bodegas Ysios



ESTACIÓN TGV DE LYON SAINT-EXUPÉRY (LYON, FRANCIA- 1994)

También tenemos la utilización de superficies cónicas en esta obra de Santiago Calatrava.

La estación de Lyon-Saint-Exupéry es la terminal de los trenes TGV que hacen la conexión del aeropuerto a la ciudad de Lyon.

La estructura de casi cuarenta metros de altura en acero y concreto es la metáfora de un pájaro enorme que extiende hacia afuera sus alas, cubriendo o protegiendo a las vías del tren.

El alzado característico del edificio se basa en los dos arcos centrales de acero de unos 120 metros de largo y 40 metros de alto. La continuación de estos dos arcos parece fundirse con el cielo en forma de voladizo.

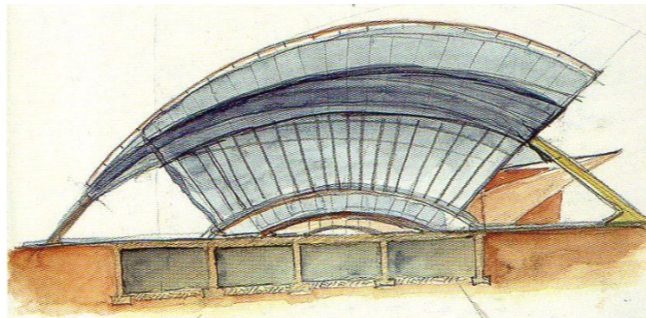
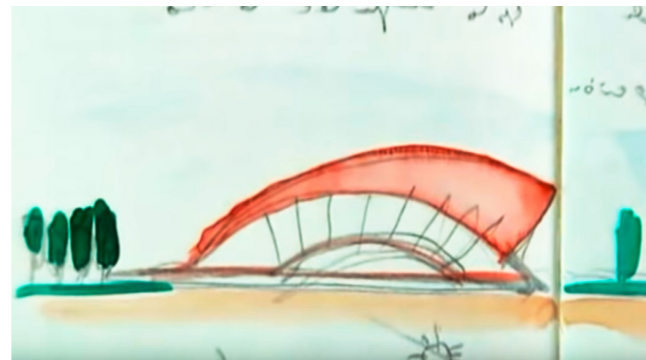
El acceso al Hall principal se realiza a través de un pórtico formado por un pilar de hormigón, a modo de contrafuerte, en forma de V que une los cuatro arcos de acero.

La estructura que soporta al hall principal, de forma triangular, está formada por 3 arcos arriostrados entre sí por vigas diagonales que se apoyan en un cimiento de hormigón que se deja entrever en la calle al este. Por otro lado vemos dos soportes, integrados con las torres de elevación en el lado oeste, los cuales son los encargados de transmitir la mayor parte de las cargas de la cubierta al terreno.

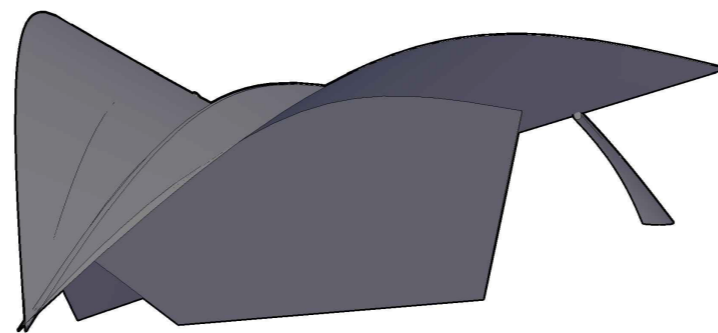
La cubierta central es un arco de acero de forma triangular, mientras que los dos arcos inferiores se componen de tubos de acero. Los arcos transversales que reparten las cargas varían en tamaño y se ensamblan cuatro por cuatro a lo largo de los tubos centrales.



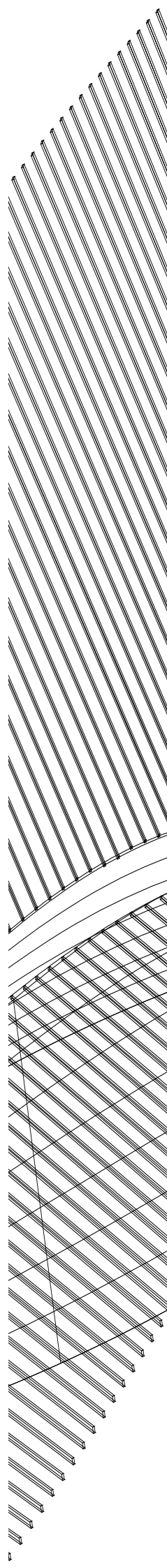
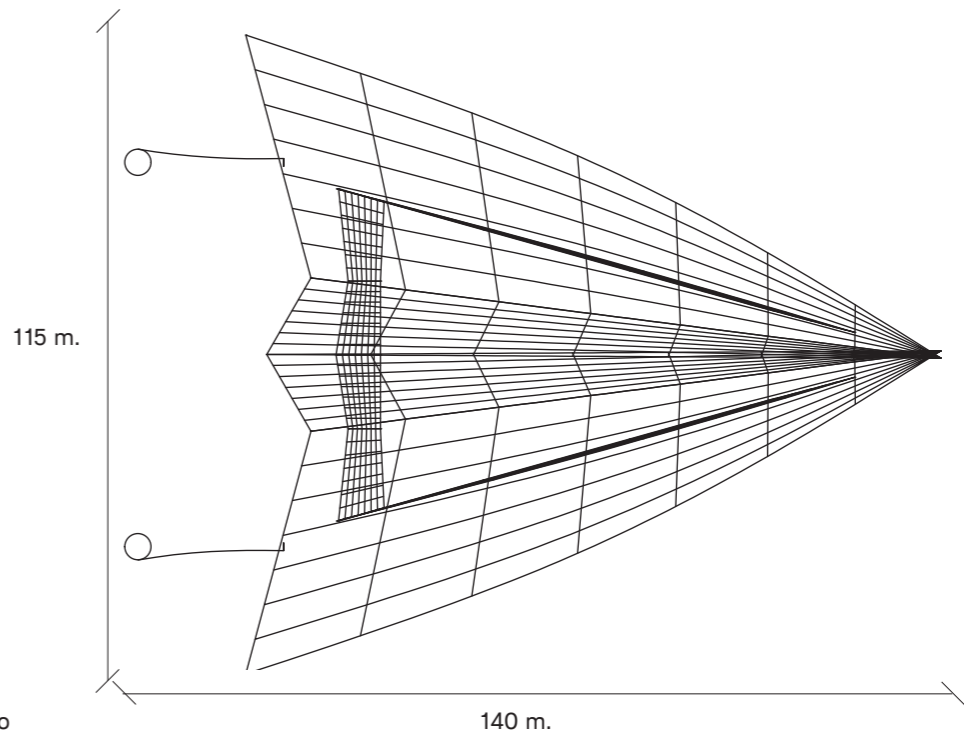
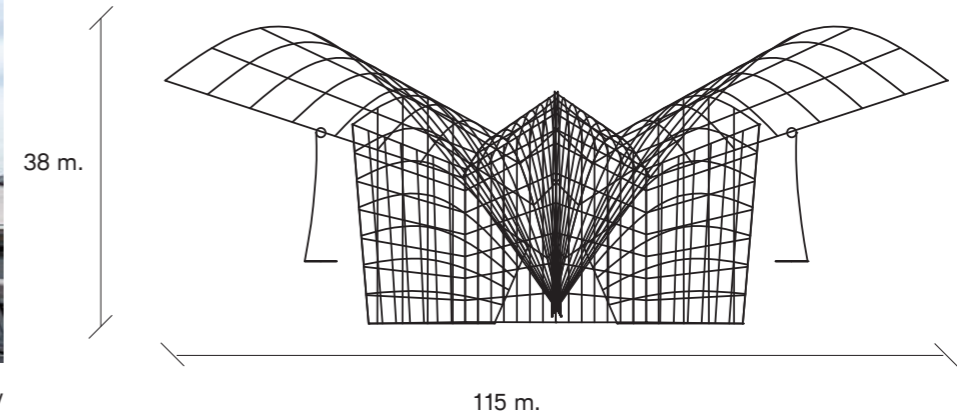
[50] Estación de TGV



Dibujos previos del arquitecto



Fuente: Elaboración propia



L'ÀGORA (VALENCIA - 2009)

Este edificio consta de una estructura metálica de planta elíptica en forma de ojo. Un área cubierta de más de 4.800 m² cubre un espacio interior que se ha recreado como una plaza pública cubierta, de planta transparente, integrada totalmente en los exteriores, con piscinas y vegetación. [Tzo11]

Como novedad de esta edificación, cabe apuntar que la parte superior de la cubierta cuenta con dos estructuras móviles que parecen alas que se abren y se cierran, un cerramiento de vidrio, estando la entrada de luz al interior regulada por la posición de apertura o cierre del “brisesoleil”.

El edificio está formado por 49 pórticos triarticulados (apoyados en 2 rótulas en cimentación y una tercera rótula en la cúspide). Estos tienen una separación de 2 m entre ellos, arriostrados longitudinalmente por 3 arcos a cada lado, esto confiere una gran rigidez al conjunto.



[51] L'Àgora en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia

OCULUS (NEW YORK - 2016)

En enero de 2004, Calatrava diseñó esta exótica estructura ubicada en el bajo Manhattan y este diseño modesto pero espinoso hubiera sido el nuevo Centro de Transporte del World Trade Center para una nueva instalación permanente con el nuevo estilo Calatraviano. Este proyecto reemplazó al sistema ferroviario Trans-Hudson (PATH) de la Autoridad Portuaria original que fue destruido el 11 de septiembre de 2001.

El ‘Oculus’ se compone de costillas de acero y vidrio dispuestas en una gran forma elíptica. Las costillas se extienden para crear dos cubiertas sobre las partes norte y sur de la plaza.

Las vigas brotan de dos arcos de 350 pies que flanquean el eje central del proyecto. Entre los arcos, un tragaluz operable de 330 pies enmarca una porción del cielo de Nueva York, y se abre en días templados, así como cada año, el 11 de septiembre. Aunque sugiere motivos de muchas tradiciones, la forma puede resumirse, según Santiago Calatrava, por la imagen de un ave liberada de las manos de un niño.

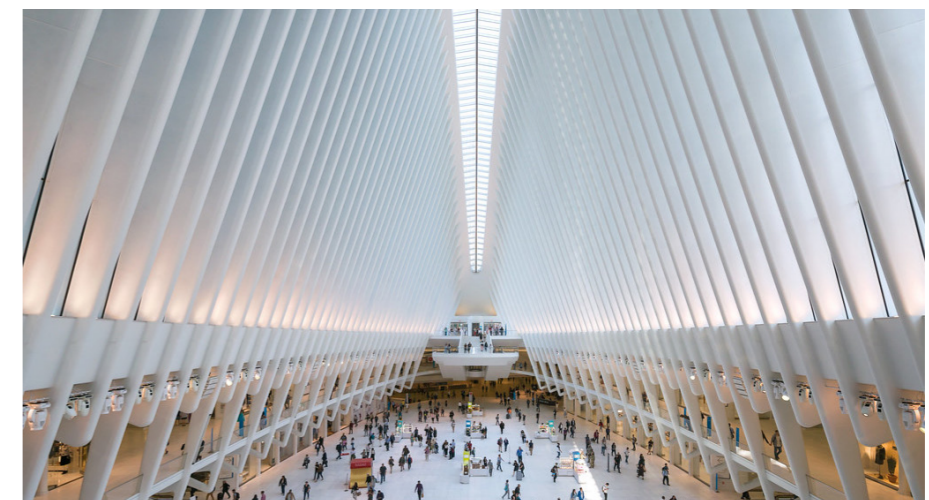
Este Oculus permite que la luz natural penetre en el Centro de Transporte del WTC; filtrando a través de todos los niveles hasta la plataforma del tren PATH, aproximadamente 60 pies por debajo de la calle. Por la noche, el edificio iluminado servirá como una linterna en su vecindario. Santiago Calatrava habla de la luz como un elemento estructural en el Centro de Transporte del WTC, diciendo que el edificio está sustentado por “columnas de luz”.



[52] Oculus durante su construcción



[53] El Oculus



[54] Interior de El Oculus

Considerando la elipse en el plano $z = 0$ con parametrización $c(u) = (2\cos(u), 3\sin(u), 0)$, $0 \leq u \leq 2\pi$

En cada punto de la elipse consideramos una recta en el plano normal a la curva y que forma un ángulo fijo respecto al plano $z=0$. Por tanto, el vector director de dichas rectas es: α_0

$$W(u) = \cos(\alpha_0) n(u) + \sin(\alpha_0) b(u),$$

Donde $n(u)$ y $b(u)$ son los vectores normal y binormal a la curva en el punto $c(u)$. La parametrización de la superficie es, por tanto,

$$\begin{aligned} R(u,v) &= c(u) + vW(u) \\ &= c(u) + v(\cos(\alpha_0)n(u) + \sin(\alpha_0)b(u)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq k(u) \end{aligned}$$

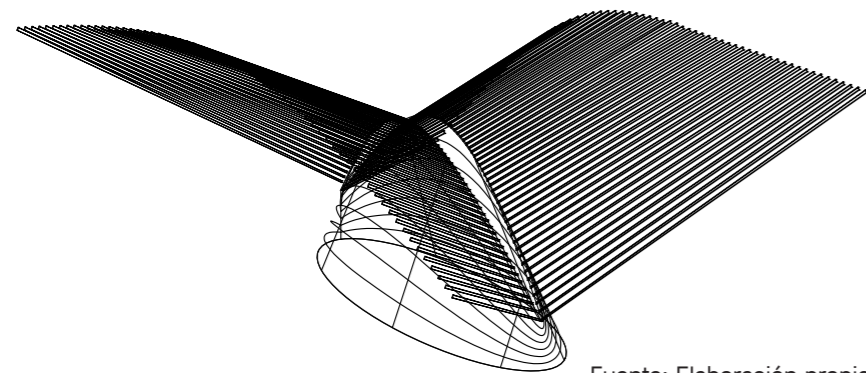
Se comprueba fácilmente que $p = 0$ y por tanto la superficie es desarrollable.

Tomando $\alpha_0 = \arcsin(1/\sqrt{5})$ tenemos:

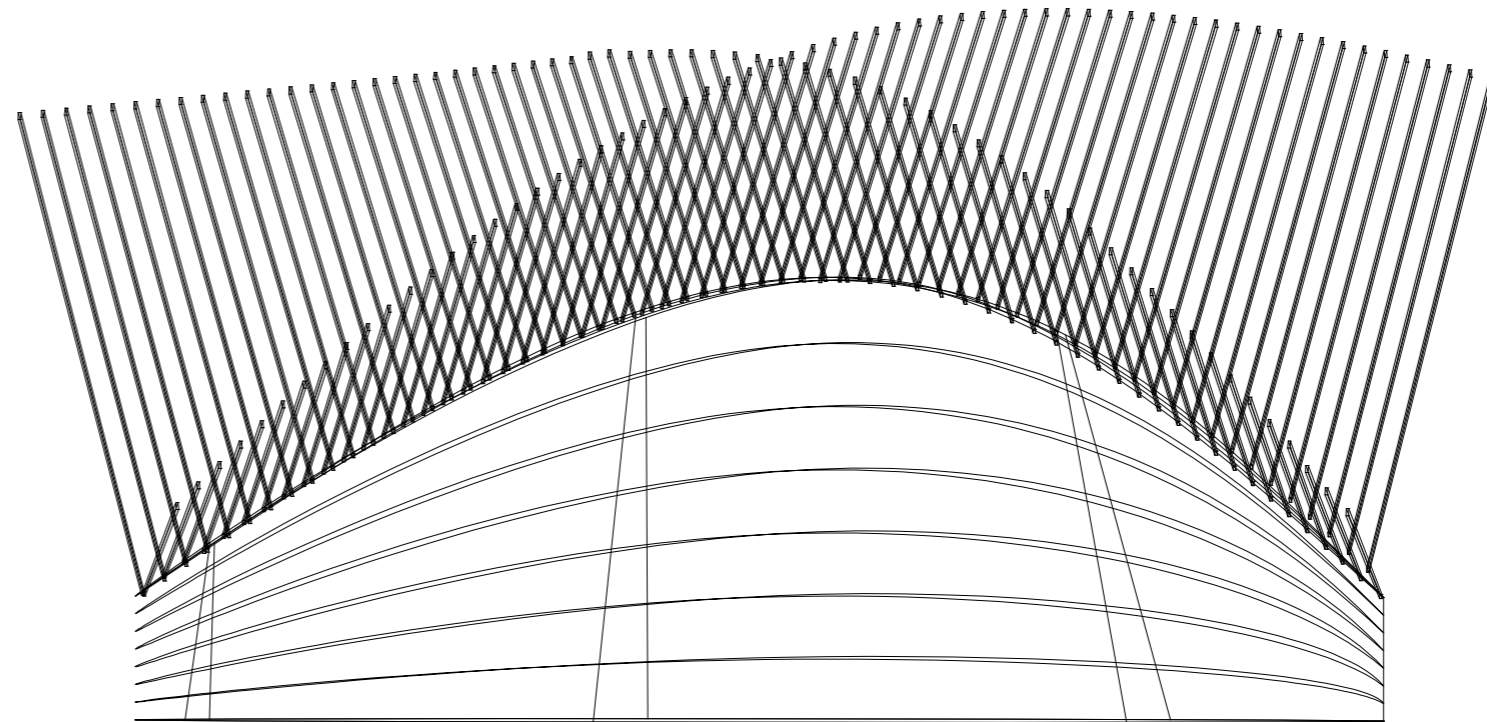
$$\lambda(u) = c'(u) \cdot w(u) = 0, \quad \mu(u) = \frac{c'(u) \cdot w'(u)}{\|w'(u)\|^2} = -\sqrt{5 \cos^2(u) + 4}$$

Luego la superficie es desarrollable tangencial y la arista de retroceso es:

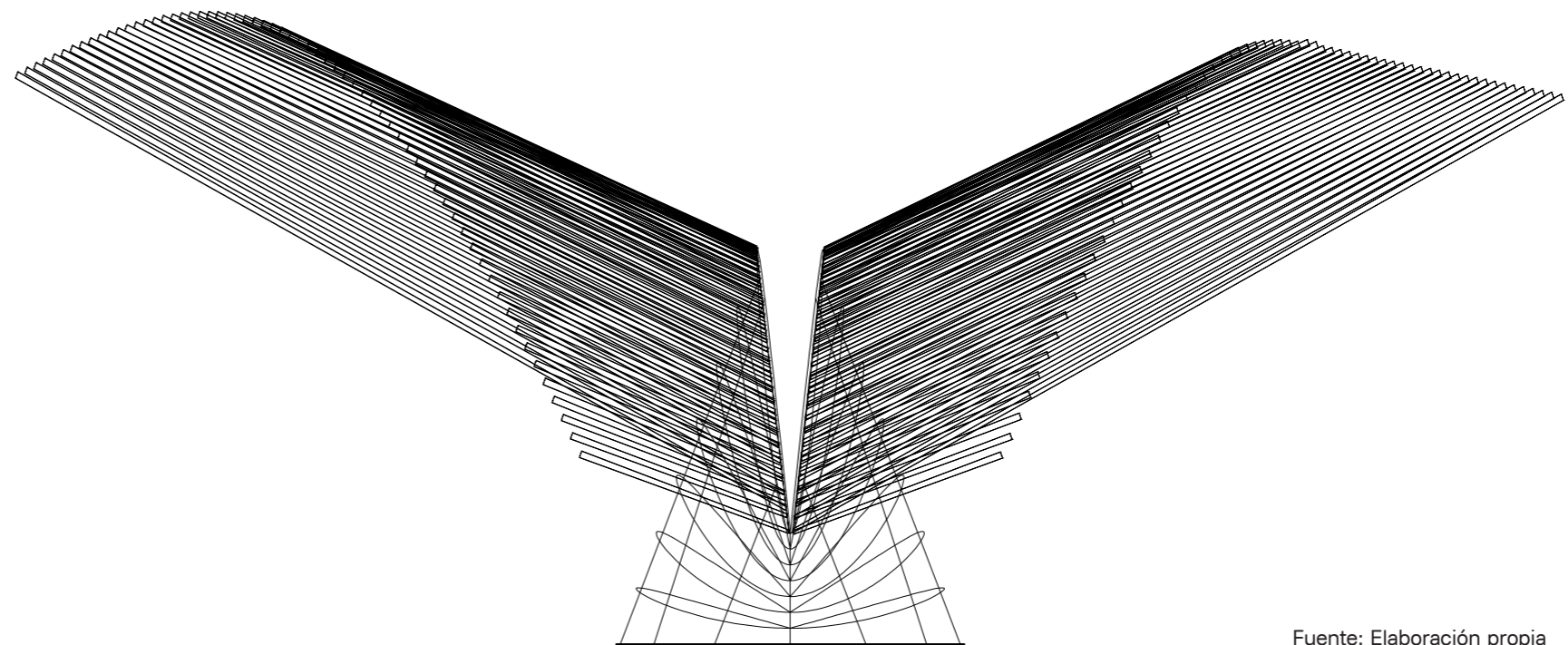
$$\tilde{c}(u) = r(u, \mu(u))$$



Fuente: Elaboración propia

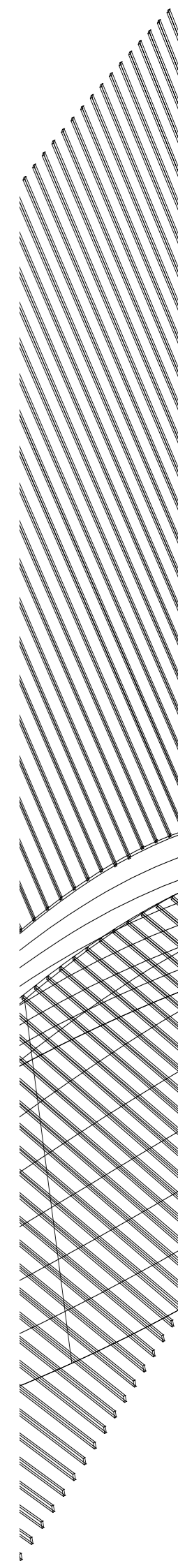


Fuente: Elaboración propia



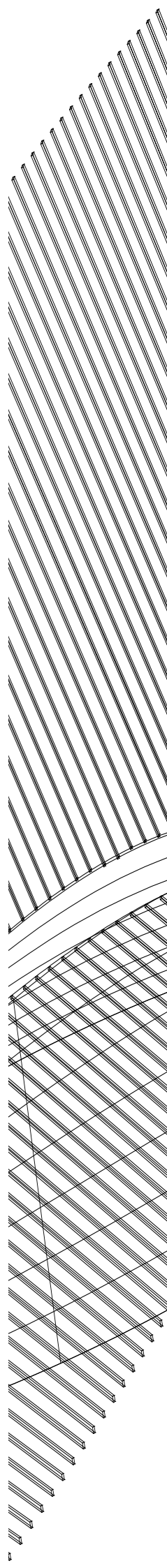
Fuente: Elaboración propia

4. CONCLUSIONES



CONCLUSIONES

1. Aunque el trabajo ya está concluido para su presentación, quiero hacer constar que hemos estudiado un número de ejemplos representativos de los objetivos que nos habíamos propuesto, aunque el número de ejemplos se podría ampliar con nuevos casos tan interesantes como los que hemos estudiado.
2. En el estudio que hemos hecho, en los distintos ejemplos de las tres figuras de la arquitectura, se han analizado desde un punto de vista técnico, los aspectos geométricos desde un punto de vista arquitectónico y dentro de ese estudio subyace en cada ejemplo la parte matemática, necesaria para su ejecución.
3. Hemos podido comprobar del estudio de los ejemplos que hemos propuesto que la Geometría forma parte de la arquitectura y por ello la importancia de la enseñanza de la Geometría en la formación del arquitecto.
4. La Geometría nos permite pensar constructivamente las formas arquitectónicas, muchos casos han sido resueltos con superficies regladas.
5. La Geometría nos permite estructurar ideas arquitectónicas y hacerlas posibles, como se pone de manifiesto en los ejemplos analizados. El conocimiento de la Geometría nos enseña que cuando se descubre lo esencial, todo problema se vuelve sencillo. Y es que además, nos puede servir para ser económicos, funcionales y ecológicos.



5. BIBLIOGRAFÍA

LIBROS, REVISTAS Y ARTÍCULOS

- [AS60] L.V. Ahlfors y L. Sario. Riemann surfaces, Princeton, Nueva York: Princeton University Press, 1a ed., 1960.
- [Ber58] L. Bers. Riemann surfaces, Nueva York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1a ed., 1958.
- [Car76] M.P. Do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies, Río de Janeiro: Alianza Universidad Textos, 1a ed., 1976.
- [Che55] S-S. Chern. “An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface”, Proc. Amer. Math. Soc. 6:5 (1955), 771–782.
- [Eis09] L.P. Eisenhart. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Boston: Ginn and Company, 1a ed., 1909.
- [FT91] A.T. Fomenko y A.A. Tuzhilin. Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space, Providence, Rhode Island: AMS, 1a ed., 1991.
- [FT07] D. Fuchs y S. Tabachnikov. Mathematical omnibus: Thirty lectures on classic mathematics, Providence, Rhode Island: AMS, 1a ed., 2007.
- [GAS06] A. Gray, E. Abbena y S. Salamon. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Londres: Chapman and Hall/CRC, 3a ed., 2006.
- [HCV90] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen. Geometry and the imagination, Nueva York: Chelsea, 2a ed., 1990.
- [HP10] M.A. Hernández Cifre y J.A. Pastor González. Un curso de geometría diferencial, Madrid: CSIC, 1a ed., 2010.
- [Kre91] E. Kreyszig. Differential geometry, Nueva York: Dover, 1a ed., 1991.
- [Oss86] R. Osserman. A survey of minimal surfaces, Mineola, Nueva York: Dover, 1a ed., 1986. 54 Bibliografía
- [Sal15] G. Salmon. A treatise on the analytic geometry of three dimensions, vol. 2, Londres: Longmans, Green and Company, 5a ed., 1915.
- [Spi99] M. Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 3, Houston, Texas: Publish or Perish, Incorporated, 3a ed., 1999.
- [Tzo07] Tzonis, Alexander, (2007). Santiago Calatrava: obra completa. Barcelona, España. Polígrafa.
- [Tzo11] Tzonis, Alexander y Ortiz Monsalve, Viviana, (2011). Santiago Calatrava. Madrid, España. Tikal.
- [Art18] Artigas, Isabel, (2018). Gaudí: Obra completa. Kerkdriel, Holanda. Librero.
- [SeBu94] Seguí Buenaventura, Miguel, (1994). Félix Candela. Arquitecto. Madrid, España. Instituto Juan de Herrera.
- [CaHe11] Canales, Fernanda y Hernández Gálvez, Alejandro, (2011). Arquitectos del siglo XX en México. Ciudad de México, México. Arquine.
- [MaFRFa] Análisis gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela. Andres Martín, Francisco Ramón y Fadón Salazar, Fernando. Universidad de Cantabria, España.
- [BasOte] Félix Candela y el borde libre. Alfonso Basterra Otero. Doctor en Arquitectura. Profesor de la Escuela de Arquitectura de Valladolid, España.
- [OsHen10] Félix Candela y sus estructuras. (2010). Arquitecto Oscar Henry Castro Almeida. Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco.

PUBLICACIÓN DIGITAL

hisour.com/es/geodesic-dome-32059/

artespana.com/antoniogaudi.htm

arquitecturaorganica.wordpress.com/2008/01/23/felix-candela-vida-y-obra/

artespana.com/santiagocalatrava.htm

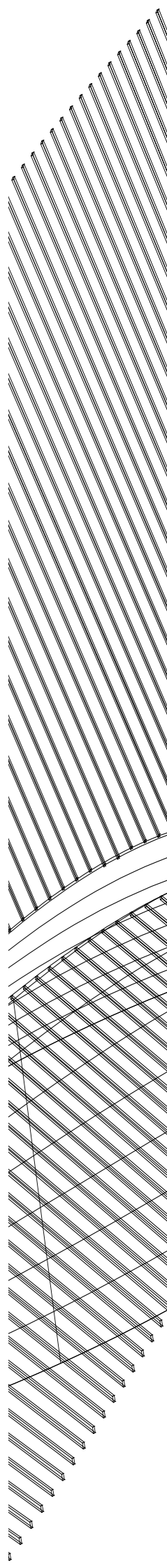
dezeen.com/2017/06/14/santiago-calatrava-world-trade-center-transportation-hub-oculus-continues-to-leak/

es.wikiarquitectura.com/edificio/estacion-tgv-de-lyon-saint-exupery/#tgv-lyon-10

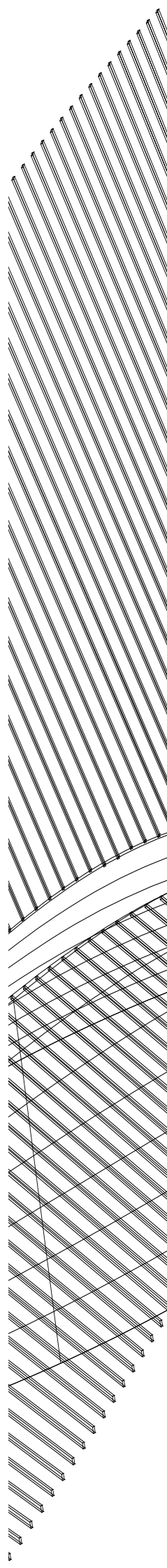
plataformaarquitectura.cl/cl/02-278690/clasicos-de-arquitectura-casa-mila-antoni-gaudi

baulitoadelrte.blogspot.com/2016/09/gaudi-y-la-geometria.html

blog.sagradafamilia.org/es/especialistas/las-columnas-de-doble-giro/



6. ÍNDICE DE FIGURAS



ÍNDICE DE FIGURAS

- [01] L'Oceanografic (Valencia, España). Fuente: flickr.com/photos/felipe_gabaldon/5192001055/
[02] Cilindro recto circular. Fuente: Elaboración propia.
[03] Hiperboloide de revolución con $a = b = c = 1$. Fuente: Elaboración propia.
[04] Paraboloide con $a = b = 1$. Fuente: Elaboración propia.
[05] Ejemplo de helicoides. Fuente: Elaboración propia.
[06] James S. McDonnell Planetarium (Saint Louis, MO, USA). Fuente: media-cdn.tripadvisor.com/media/photo-o/0c/a3/ea/ce/mcdonnell-planetarium.jpg
[1] Monumento megalítico de Stonehenge (Amesbury, Inglaterra). Fuente: thinkstockphotos.es
[2] Iglú, construcción de hielo en forma de media esfera. Fuente: houdinis.es
[3] Tipi, tienda india originalmente hecha de pieles de animales. Fuente: inoxidable.net
[4] Tholos de Atenas, edificio situado en el Ágora de Atenas, de planta circular y sede de los pritanos. Fuente: depositphotos.com
[5] La Basílica de Santa Sofía en Estambul. Fuente: infocatolica.com
[6] Sección de La Basílica de Santa Sofía. Fuente: study.com
[7] Cúpula de La Roca en Jerusalén. Fuente: biblewalks.com
[8] Sección de la Cúpula de La Roca. Fuente: miviaje.com
[9] Torre de Jericó, ubicada en Cisjordania. Fuente: es.123rf.com
[10] Yurta. Era una tienda redonda utilizada por los nómadas en Asia Central. Fuente: es.123rf.com
[11] Turrus. Torre vigía romana de planta rectangular. Fuente: sites.google.com/site/enriquealonsogutierrez/tagarroza
[12] Burgus. Fortificación de la era imperial tardía. Fuente: it.wikipedia.org/wiki/Burgus
[13] Cúpula geodésica patentada en 1947 por Richard Buckminster Fuller. Fuente: shutterstock.com
[14] Palazzetto dello Sport. Pabellón situado en Roma, obra del arquitecto italiano, Pier Luigi Nervi. Fuente: ilgiornaledellarchitettura.com
[15] Renault Center. Fuente: artchist.blogspot.com/2015/05/renault-center-en-swindon-norman-foster.html
[16] El Capricho, palacete diseñado por Antonio Gaudí. Fuente: David Cardelus. designboom.com
[17] Finca Güell. Son una serie de edificaciones ubicadas en el barrio de Pedralbes, Barcelona. Obra del arquitecto Antonio Gaudí. Fuente: es.wikiarquitectura.com/edificio/finca-gueell/
[18] Escaleras helicoidales en el interior de La Sagrada Familia, en Barcelona. Fuente: i.pinimg.com
[19] Columnas de la fachada de la Sagrada Familia. Fuente: http://baultoadelrte.blogspot.com
[20] La fachada de La Pasión de la Sagrada Familia. Fuente: langues.education/la-sagrada-familia/
[21] La formación de la columna de doble giro. Fuente: blog.sagradafamilia.org/es/especialistas/las-columnas-de-doble-giro/
[22] Columnas de doble giro en el interior de La Sagrada Familia. Fuente: blog.sagradafamilia.org/es/especialistas/las-columnas-de-doble-giro/
[23] Tipos de columnas del interior de La Sagrada Familia. Fuente: blog.sagradafamilia.org/es/especialistas/las-columnas-de-doble-giro/
[24] Chimeneas de la azotea del Palau Güell. Fuente: pankchophoto.com/2017/08/11/palau-guell/
[25] El Palacio Episcopal de Astorga. Fuente: caminocomodo.com/etapas/leon-cebreiro/palacio-episcopal-de-astorga-2/
[26] Casa Batlló. Fuente: estonoesloquepareze.com/wp-content/uploads/2018/12/casa-batlo-banner.jpg
[27] Balcones de La Casa Batlló. Fuente: catalunyaenimágenes-manel.blogspot.com
[28] Parc Güell. Fuente: getyourguide.es/barcelona-145/barcelona-visita-rapida-al-parque-gueell-t58190/

- [29] Cubierta del pabellón de entrada del Parc Güell. Fuente: flickr.com/photos/64182024@N06/8698396267
- [30] Soportales de la Cripta de la Colonia Güell. amanecerenpriego.blogspot.com/2018/02/cripta-de-la-colonia-guell.html
- [31] Entrada de carruajes del Parc Güell. Fuente: http://lasombradegaudi.blogspot.com/2014/04/la-entrada-para-carruajes-cochera-del.html
- [32] Fachada de la Casa Milá. Fuente: Gideon Jone. plataformaarquitectura.cl/cl/02-278690/clasicos-de-arquitectura-casa-mila-antoni-gaudi
- [33] Patio de la Casa Milá. Fuente: Gideon Jone. plataformaarquitectura.cl/cl/02-278690/clasicos-de-arquitectura-casa-mila-antoni-gaudi
- [34] Escuelas provisionales de la Sagrada Familia. Fuente: sites.google.com/site/barcelonamodernistaisingular/la-sagrada-familia---el-fort-pienc/la-sagrada-familia/escuelas
- [35] Bóveda antifunicular experimental tipo ctesiphon (1949). Fuente: jotdown.es/2011/11/los-hypars-de-felix-candela-i/
- [36] Bóvedas antifuniculares. Fuente: oocities.org/soho/gallery/1608/arqframe.html
- [37] Conoide experimental en San Bartolo.
- [38] Auditorio de Ciencias Químicas. Ciudad Universitaria de México. Fuente: 66.media.tumblr.com
- [39] Pabellón de Rayos Cósmicos. Fuente: plataformaarquitectura.cl/cl/02-110674/clasicos-de-arquitectura-pabellon-de-rayos-cosmicos-felix-candela
- [40] Encofrado con listones rectos en la hypar de la Capilla de Cuernavaca. Fuente: jotdown.es/2011/11/los-hypars-de-felix-candela-y-ii/
- [41] Capilla de Cuernavaca durante su construcción. Fuente: asoclcuernavaca.com/historia1.html
- [42] Restaurante Los Manantiales. Fuente: jotdown.es/wp-content/uploads/2011/11/Los-manantiales.jpg
- [43] Palacio de los Deportes durante su construcción. Fuente:
- [44] Palacio de los Deportes en 1969. Fuente: plataformaarquitectura.cl/cl/02-331368/clasicos-de-arquitectura-palacio-de-los-deportes-felix-candela
- [45] L'Hemisferic en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia. Fuente: gabytabone.wordpress.com/2011/11/08/las-genialidades-de-santiago-calatrava-2/
- [46] Auditorio de Tenerife. Fuente: Getty images
- [47] Dibujos del propio arquitecto Santiago Calatrava sobre el Auditorio de Tenerife.
- [48] Bodegas Ysios. Fuente: es.wikiarquitectura.com/edificio/bodegas-ysios/
- [49] Bodegas Ysios. Fuente: es.wikiarquitectura.com/edificio/bodegas-ysios/
- [50] Estación de TGV. Fuente: es.wikiarquitectura.com/edificio/estacion-tgv-de-lyon-saint-exupery/
- [51] L'Agora en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia. Fuente: architecturescope.com/lagora/
- [52] Oculus durante su construcción. Fuente: inhabitat.com/nyc/santiago-calatravas-world-trade-center-oculus-transportation-hub-begins-to-take-flight/
- [53] El Oculus. Fuente: dezeen.com/2016/08/29/santiago-calatrava-oculus-world-trade-center-transportation-hub-new-york-photographs-hufton-crow/
- [54] Interior de El Oculus. Fuente: flickr.com/photos/71458341@N05/43410849260