



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

## **TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

Manifestación de niveles de generalización en  
estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que  
involucra relaciones funcionales

Presentado por  
Jason de Jesús Ureña Alpízar

Granada, 2017



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

## TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Manifestación de niveles de generalización en  
estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que  
involucra relaciones funcionales

Presentado por

Jason de Jesús Ureña Alpízar

Dirigido por

Dra. Dña. Marta Molina

Dr. D. Rafael Ramírez Uclés

Granada, 2017

## Presentación

Presentamos un estudio descriptivo y exploratorio en el que se analizan los diferentes niveles de generalización que manifiestan ocho estudiantes de cuarto curso de primaria en una entrevista semiestructurada, a la vez que se reconoce la influencia, en tales manifestaciones, de los estímulos efectuados a los alumnos por parte de la entrevistadora.

We present a descriptive and exploratory research in which we analyze the different levels of generalization demonstrated by eight fourth grade students of primary school in a semistructured interview, at the same time we recognize, in the students' manifestations, the influence of the stimuli made by the interviewer to the students.

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia (EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P), financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e innovación de la Junta de Andalucía.

*A mis padres quienes me han apoyado y acompañado incondicionalmente  
durante toda mi vida y a quienes les agradezco todo.  
A la vida que no deja de sorprenderme día a día,  
por sus presentes y las personas preciosas  
que pone en mi camino.*

## Agradecimientos

Agradezco a la Universidad de Costa Rica por su apoyo y financiamiento para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

Gracias a los profesores Marta Molina y Rafael Ramírez por su dirección, apoyo, consejo, motivación y por el aporte que me han hecho desde la riqueza de sus experiencias. Les agradezco el constante ánimo que me han dado durante todo el proceso de investigación y su acompañamiento.

Gracias a todos los profesores del máster, sus conocimientos me han enriquecido mucho.

Gracias a Diana quien ha estado presente durante todo el proceso de investigación, por animarme y acompañarme a la vez que me ofrecía su bella amistad.

Le agradezco a mis padres por su atención y acompañamiento a distancia, por la fuerza que me transmiten continuamente y los motivos para ser feliz que me dan.

Gracias a mis colegas, amigos y demás personas bellas que de forma desinteresada me han ayudado en mi trabajo a partir de sus experiencias, tiempo y consejo.

# Índice

Introducción .....	1
Estructura del trabajo .....	2
Capítulo 1. Justificación y objetivos de investigación .....	3
Desde la investigación: <i>early algebra</i> y pensamiento funcional.....	3
Desde la investigación: generalización .....	4
Desde los documentos curriculares .....	6
Objetivos de investigación .....	7
Capítulo 2. Marco teórico y antecedentes .....	8
Early algebra. Pensamiento funcional.....	8
Generalización.....	12
Estímulos efectuados al estudiante.....	17
Capítulo 3. Metodología.....	22
Paradigma de investigación.....	22
Método de investigación .....	22
Técnica de recolección de información.....	23
Participantes .....	26
Análisis de la información .....	26
Capítulo 4. Análisis de los datos y resultados.....	39
Análisis individual de cada entrevista.....	39
Niveles de generalización .....	51
Influencia de los estímulos en la manifestación niveles de generalización ....	66
Capítulo 5. Conclusiones .....	68
Logro de los objetivos propuestos y principales aportes .....	68
Limitaciones.....	71

Líneas abiertas.....	71
Referencias.....	73

## Índice de tablas y figuras

Tabla 1 Simbología y abreviaturas empleadas en las tablas para el análisis de los datos .....	39
Tabla 2 Manifestación de generalizaciones por el estudiante A1 .....	43
Tabla 3 Manifestación de generalizaciones por la estudiante A2 .....	44
Tabla 4 Manifestación de generalizaciones por la estudiante A3 .....	45
Tabla 5 Manifestación de generalizaciones por el estudiante A4 .....	46
Tabla 6 Manifestación de generalizaciones por la estudiante A5 .....	47
Tabla 7 Manifestación de generalizaciones por el estudiante A6 .....	48
Tabla 8 Manifestación de generalizaciones por la estudiante A7 .....	49
Tabla 9 Manifestación de generalizaciones por la estudiante A8 .....	50
Tabla 10 Número de estudiantes que manifiestan generalización .....	51
Figura 1. Niveles de generalización y reconocimiento de la relación funcional ....	28
Figura 2. Manifestación de generalización .....	38
Figura 3. Cartel elaborado por estudiante A5 .....	60
Figura 4. Tabla de resumen de información estudiante A5 .....	66



## Introducción

La investigación que presentamos en esta memoria corresponde al Trabajo de Fin de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, del autor, y se ubica dentro de la línea de investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico. Se ha desarrollado en el marco de dos proyectos de investigación (EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P), financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, cuyo objeto de estudio es el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria.

Actualmente nuevas investigaciones se están llevando a cabo respecto a las capacidades algebraicas que los niños poseen y la forma en que las manifiestan. En el área del álgebra investigadores han mostrado que los estudiantes desde edades tempranas tienen la capacidad de pensar con ideas algebraicas y, en consecuencia, la introducción esta área matemática no tiene que postergarse a la educación secundaria, sino que desde antes ese potencial puede ser aprovechado.

Curricularmente en diversos países, entre estos, España, se considera incluir actividades asociadas al pensamiento funcional desde los primeros años escolares. Se reconoce la importancia del pensamiento funcional como medio para el establecimiento de generalizaciones y de relaciones entre cantidades que covarian, la identificación de patrones y el reconocimiento de leyes que describen los datos.

La generalización es considerada parte importante de la matemática y como la raíz del álgebra, de ahí que su fomento se puede apreciar como vía de aprendizaje y de adquisición de conocimientos prácticos al estudiante. Un factor que actúa en el proceso de construcción de generalizaciones por parte de los alumnos es la forma en que el docente interviene en ese proceso, ya que su mediación y los estímulos que efectúa influyen en los resultados que obtienen.

El trabajo que aquí se describe parte de estas ideas. Se enmarca en un experimento de enseñanza más amplio, y tiene como principal propósito analizar los niveles de generalización que manifiestan estudiantes de primaria al resolver una tarea que involucra el reconocimiento de una relación funcional considerándose a su vez la influencia de los

estímulos que se llevan a cabo sobre el<sup>1</sup> alumno. Estos estudiantes contaban con cierta experiencia previa en la resolución de tareas que implican relaciones funcionales al haber participado en el curso previo en un total de 4 sesiones realizadas en el marco del citado experimento de enseñanza.

Participan ocho estudiantes de cuarto curso de un colegio privado de educación primaria. En el contexto de una entrevista individual semiestructurada, se les propuso resolver una tarea cuya organización es inductiva y en la cual subyace una relación funcional.

Para el análisis de los datos se establecen categorías que distinguen niveles de generalización y tipos de estímulos efectuados al estudiante por parte de la entrevistadora. Los resultados informan sobre la capacidad de los estudiantes de reconocimiento de relaciones funcionales y de los diversos niveles de generalización que alcanzan, así como de la relación de ambos con los estímulos que efectúa la entrevistadora.

### Estructura del trabajo

El trabajo se estructura en cinco capítulos. El primero refiere a la justificación de la investigación realizada y se evidencia su relevancia, a la vez se establecen los objetivos que orientan la investigación. En el capítulo siguiente se expone el principal fundamento teórico que sustenta el trabajo, a la vez que se sintetizan algunas investigaciones que se relacionan con las tres áreas teóricas involucradas: *early algebra* y pensamiento funcional, generalización y estímulos efectuados al estudiante. En el tercer capítulo se explica la metodología que se implementa para cumplir con los objetivos propuestos. El análisis de los datos obtenidos y la exposición de los resultados se detallan en el cuarto capítulo. Por último, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones de la investigación.

---

<sup>1</sup> En esta investigación se empleará el uso del masculino gramatical de forma inclusiva para referirse a colectivos que agrupen hombres y mujeres, o a personas cuyo sexo se desconozca. Lo anterior, para atender las recomendaciones de la Real Academia Española, en el artículo *Sexismo lingüístico y visibilidad de la mujer*.

## Capítulo 1. Justificación y objetivos de investigación

Hoy en día nuevas investigaciones se están llevando a cabo respecto a las capacidades algebraicas que los niños poseen y la forma en que las exteriorizan. En nuestro estudio el problema de investigación gira en torno a caracterizar los niveles de generalización que alcanzan estudiantes de primaria al resolver tareas que involucran el reconocimiento de una relación funcional, considerándose los estímulos efectuados al estudiante por una entrevistadora.

A continuación se justifica la relevancia del estudio contemplando los diversos componentes con los que está asociado: el *early algebra* como propuesta curricular, el pensamiento funcional como vía curricular dentro del *early algebra* para la introducción de ideas algebraicas y el desarrollo de la capacidad de generalización a través de las funciones, la generalización como actividad matemática fundamental y raíz del álgebra, y los estímulos efectuados a los estudiantes como factor que influye en el proceso de construcción y manifestación de generalizaciones matemáticas por parte de ellos.

### Desde la investigación: *early algebra* y pensamiento funcional

Diferentes investigadores (Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Blanton y Kaput, 2011; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Warren, 2006) han mostrado cómo los estudiantes desde edades tempranas tienen capacidades asociadas al álgebra, motivando aprovechar ese potencial de los estudiantes desde los primeros años escolares. El *early algebra* tiene como meta profundizar en la comprensión de los estudiantes de lo que significa la generalidad de la matemática y no necesariamente brindar una formación en cálculo, de modo que se propone iniciar, con la escolaridad del niño, la construcción, expresión y justificación de generalizaciones y no dejarlo para años posteriores (Blanton y Kaput, 2011; Kaput, 2008). La atención al álgebra hasta la educación media o secundaria ha hecho que históricamente se enseñe como un tema aislado (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). De igual forma, a pesar de la importancia curricular que se ha dado a las funciones, también la postergación hasta la escuela secundaria ha determinado su enseñanza (Blanton y Kaput, 2011). Blanton et al. (2015) explican que esto se ha debido a la creencia de la necesidad de un nivel de abstracción que sólo se ha adquirido hasta ese

momento, pero en los últimos años se han considerado las funciones como un hilo que recorre todo el currículo escolar.

Con respecto al aporte de las funciones, gracias a múltiples investigaciones se ha mostrado cómo los niños usan diferentes recursos mediante los cuales razonan con estas, demostrando su capacidad para interactuar de un modo introductorio con las generalizaciones y las relaciones funcionales involucradas, y a la vez evidenciando que el abordaje de las funciones se puede llevar a cabo desde los primeros años escolares (Blanton y Kaput, 2011; Molina, 2009).

Precisamente el pensamiento funcional es una vía curricular para el desarrollo de la capacidad de generalización en los estudiantes (Blanton y Kaput, 2011). Mediante las funciones se puede promover la comprensión algebraica y, si bien no tiene que cumplir necesariamente un papel de apoyo en álgebra, sí podría ser una vía de introducción por los recursos que aporta, por ejemplo las diferentes representaciones que dan sentido a relaciones (Blanton et al., 2011). Blanton y Kaput (2011) mencionan al pensamiento funcional como un medio para la introducción de la construcción y generalización de patrones o relaciones a través de herramientas lingüísticas así como representaciones en el tratamiento de las generalizaciones o las funciones que subyacen como objetos matemáticos por sí mismos.

#### Desde la investigación: generalización

La generalización por su cuenta es considerada parte importante de la matemática y del álgebra en particular, de ahí que su fomento se puede apreciar como vía de aprendizaje y de adquisición de conocimientos prácticos al estudiante. En la propuesta del *early algebra* se promueve el trabajo con generalizaciones desde edades tempranas y se puede considerar en la visión del álgebra, como un medio para el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes.

Para Mason, Graham, Pimm y Gower (1985) “la generalización es el latido de la matemática y el álgebra es el lenguaje en el cual es expresada” (p.8). La importancia de la generalización dentro de la matemática se da por su propia naturaleza de establecer proposiciones sobre números y formas (Mason et al., 1985).

Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005), al iniciar el primer capítulo de su obra, exponen que las raíces del álgebra están en la posibilidad de generalización que se puede dar

a partir de los casos particulares y los niños al iniciar su escolarización muestran esta capacidad. El álgebra como tal tiene un cuerpo de simbolismo que permite representar y operar sobre la generalidad (Mason et al., 2005).

La adquisición de habilidades de generalización es un proceso gradual como sugieren Radford (2010) y el Ministerio de Educación Pública (2012). Y a pesar de que se puede considerar que es fácil mostrar pensamiento funcional, Mason et al. (2005) exponen que se requiere de tiempo para expresar, fortalecer y aumentar esa capacidad. Como parte del proceso, los profesores deben tener conciencia sobre la importancia de la generalización y propiciar que los estudiantes formulen situaciones en las cuales se evidencie a la vez que deben estar atentos de la presencia de la misma en las producciones de sus alumnos. Si lo anterior no se da, el pensamiento matemático no se llevará a cabo (Mason, 1996). En algunos casos no es que los estudiantes no tengan la capacidad de pensar algebraicamente, sino que no están expuestos frecuentemente a experiencias en las cuales se desarrolle este pensamiento (Blanton et al., 2011).

Mediante la generalización se fomenta el aprendizaje del álgebra, razón por la cual la propuesta de situaciones en las que los estudiantes llevan a cabo razonamientos asociados al pensamiento funcional es fundamental ya que les brinda herramientas de aprendizaje que a futuro les serán de utilidad y facilitarán una comprensión superior de los contenidos posteriores. Según Mason et al. (2005) “los aprendices solo comprenderán el álgebra como un lenguaje de expresión si ellos perciben y expresan la generalidad por sí mismos” (p.23).

En esta investigación se le da al estudiante la posibilidad de acercarse, trabajar y razonar sobre generalizaciones a través del trabajo con una situación que atiende a una relación funcional.

Un factor que también actúa en el proceso de construcción de generalizaciones por parte de los estudiantes es la forma en que el docente interviene en este, ya que su mediación y los estímulos que efectúa influyen significativamente en los resultados que obtienen los estudiantes.

Además de muchos de los autores mencionados antes, Warren (2006) al mismo tiempo de indicar que la actividad algebraica se puede dar a edades más tempranas de las que se cree, también añade que la propuesta de experiencias con una adecuada guía docente, asiste al estudiante y le ayuda para el futuro en su formación cuando sea adolescente.

## Desde los documentos curriculares

Considerando otra perspectiva, a nivel curricular en diversos países se muestra una atención al pensamiento funcional desde los primeros años escolares como parte importante del desarrollo del álgebra y una herramienta para la construcción de pensamiento matemático asociado a funciones, geometría y otras áreas matemáticas.

En España, país en el cual es llevado a cabo el presente estudio, mediante el Real Decreto 126/2014 se expone que la matemática está asociada con una serie de saberes relacionados con números y formas, así como situaciones que dentro de otros aspectos involucran la deducción, inducción, etc. De modo que la matemática permite analizar situaciones para generar modelos y establecer relaciones en las cuales no sólo se utilizan números y figuras, sino que se encuentran patrones, regularidades y leyes matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

Es evidente la importancia que se da a aspectos propios de la generalización y el pensamiento funcional como lo son la identificación de patrones, el establecimiento de relaciones entre cantidades y la formulación de leyes asociadas a los datos. En dicho decreto se establece que al finalizar la primaria se espera que el estudiante “sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19387).

En el currículo de otros países, por ejemplo en los Programas de Estudio de Matemáticas (Ministerio de Educación Pública, 2012) de Costa Rica, se organiza una introducción del pensamiento funcional desde primaria y ligado con varias áreas matemáticas. Con respecto al área de Relaciones y Álgebra se menciona

Se favorece un tratamiento ‘funcional’ de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de forma gradual. (Ministerio de Educación Pública, 2012, p.54)

En dicho programa de estudios el pensamiento funcional es introducido a los estudiantes de primaria mediante situaciones problema que involucran sucesiones. En este hay indicaciones explícitas en las cuales se promueve fomentar habilidades de

reconocimiento de patrones así como la comprensión de cambios. A la vez se espera que los estudiantes determinen valores faltantes en expresiones o bien que determinen nuevos términos en sucesiones de figuras o de números. Dentro de las consideraciones curriculares está que el estudiante ya es capaz de describir verbalmente patrones y regularidades al tiempo que relaciona objetos (Ministerio de Educación Pública, 2012).

A partir de lo expuesto anteriormente se argumenta la capacidad de los niños desde edades tempranas para trabajar con tareas que involucran de una forma incipiente el pensamiento algebraico. Se justifica la importancia de indagar sobre el proceso de generalización que llevan a cabo estudiantes de primaria como una manifestación del pensamiento funcional y como parte importante del aprendizaje y desarrollo matemático de los estudiantes. Se manifiesta también la relevancia de la investigación en cuanto al estudio de las intervenciones del docente o estímulos que se efectúan al estudiante como vehículo facilitador del proceso de generalización que llevan a cabo ante las tareas que resuelven y su proceso de aprendizaje, considerando a su vez la reducida literatura existente relacionada con el interés de la investigación.

Por todo lo anterior, en este trabajo se plantean los siguientes objetivos de investigación:

### Objetivos de investigación

#### *Objetivo general*

Analizar los niveles de generalización que manifiestan estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional.

#### *Objetivos específicos*

O1. Describir los niveles de generalización que evidencian estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional.

O2. Analizar cómo influyen los estímulos que se efectúan al estudiante de primaria en el proceso de generalización que evidencian durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional.

## Capítulo 2. Marco teórico y antecedentes

En este capítulo se presentan los principales fundamentos teóricos de esta investigación, los cuales son utilizados posteriormente como soporte y guía en el análisis de las manifestaciones de generalización que llevan a cabo estudiantes de primaria, esto enmarcado en la propuesta de *early algebra* y en correspondencia con el pensamiento funcional. También se exponen aportes de autores sobre el papel de las interacciones entre los participantes en actividades de aprendizaje. Estos aportes son un referente global sobre las intervenciones y estímulos que lleva a cabo un docente en el proceso de aprendizaje y sobre su posible incidencia en el proceso de construcción de generalizaciones por parte de los estudiantes.

En correspondencia con la teoría presentada, se sintetizan investigaciones previas que se relacionan con las tres áreas teóricas: pensamiento funcional en el marco del *early algebra*, generalización y estímulos efectuados al estudiante.

### Early algebra. Pensamiento funcional

El álgebra se puede ver desde diferentes puntos de vista. Kaput (2008) menciona que es una actividad humana y al ser reconocida como razonamiento algebraico, se considera como las formas de hacer, pensar y hablar matemáticamente. Pensar de forma algebraica consiste en “generalizar, expresar y justificar relaciones entre cantidades, así como razonar con generalizaciones expresadas a través de una variedad de representaciones” (Blanton et al., 2011).

Una vía de abordaje del álgebra desde los primeros años escolares es el *early algebra*. Esta propuesta curricular nace en Estados Unidos con base en investigaciones de James Kaput y su propósito es promover el aprendizaje y fortalecimiento del pensamiento algebraico desde edades tempranas (Cañadas y Molina, 2016).

Durante los últimos veinte años se ha hecho una mayor reflexión sobre la forma en que el álgebra se enseña en la escuela y el modo en que el pensamiento algebraico es fomentado en los escolares. A razón de esto es que para la mejora de la enseñanza de esta área nace la propuesta curricular del *early algebra* que plantea la introducción del álgebra desde los primeros años escolares y se orienta a una mejor comprensión de la matemática y



del álgebra (Molina, 2009). El álgebra se abarca como forma de razonamiento y actuación con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Molina, 2006). No hay un abordaje algebraico como se hace en la escuela secundaria en términos de aprendizaje de técnicas de resolución de ecuaciones o simplificaciones, su énfasis está en la generalización de ideas así como en el trabajo con esas generalizaciones como objetos por sí mismos sin necesidad de trabajar con números específicos (Blanton et al., 2011).

En la propuesta del *early algebra* cuando el énfasis del pensamiento algebraico son las funciones, se trabaja dentro del pensamiento funcional, en el cual las relaciones que se dan entre cantidades y su variación son parte importante del desarrollo del pensamiento algebraico. El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con funciones y sus elementos (Cañadas y Molina, 2016).

Este tipo de pensamiento implica la generalización de relaciones entre cantidades que covarian, justificar esas relaciones en múltiples formas y bajo distintos niveles de representación, y por último, razonar sobre las representaciones generalizadas de modo que se utilicen para predecir y reconocer el comportamiento de las funciones (Blanton et al., 2015).

A partir de la misma definición de función y el establecimiento de relaciones entre conjuntos es que se puede considerar el pensamiento funcional como medio que facilita el aprendizaje del álgebra desde edades tempranas. En Blanton et al (2011) “una función es una relación especial entre dos conjuntos, en la cual cada elemento de un conjunto, llamado el dominio, está asociado únicamente a un elemento del segundo conjunto, llamado codominio” (p.48).

El énfasis del pensamiento funcional está en la relación que existe entre cantidades que varían y la generalización de esas relaciones, también involucra expresar en palabras, símbolos, tablas, o gráficos las relaciones para trabajar con las representaciones y analizar el comportamiento de las funciones (Blanton et al., 2011; Smith, 2008). El trabajo con este tipo de pensamiento debe ser una de las metas de la enseñanza de la matemática (Rico, 2006).

La forma en que las cantidades varían en una relación entre conjuntos y la forma en que los patrones se presentan se pueden clasificar en tres tipos de relaciones funcionales: patrones recursivos, relaciones covariacionales y relaciones de correspondencia. El patrón recursivo se observa en la variación que se da sólo en una de las secuencias de valores que

se relacionan y es recursivo porque los valores que se van obteniendo surgen de los valores obtenidos previamente y sin considerarse la variable independiente. Por su parte el pensamiento covariacional implica el análisis de cómo las dos cantidades cambian entre sí, es decir, se estudia cómo el cambio de una afecta a la otra cantidad. Por último, en la relación de correspondencia la correlación que se da entre las cantidades es expresada por medio de una regla o fórmula que establece de forma generalizada la relación entre las dos cantidades (Blanton et al., 2011).

Muchas investigaciones se han realizado en el marco del *early algebra*, asociadas con el pensamiento funcional. En estas se trabaja con estudiantes de primaria y con fines muy variados. De las investigaciones existentes dos son mencionadas a continuación.

Los investigadores Blanton y Kaput (2004) realizan un estudio en el cual se observa el modo en que los estudiantes de escuela primaria de zonas urbanas de Estados Unidos desarrollan y expresan relaciones funcionales. Esta es una investigación relacionada con el pensamiento funcional en edades tempranas. A partir del análisis de respuestas escritas y entrevistas realizadas por un docente, en el estudio se consideran el modo en que los estudiantes utilizan representaciones, su progreso en el lenguaje matemático, cómo ubican y organizan la información y la interpretación de las relaciones funcionales de acuerdo a la operación involucrada (aditiva o multiplicativa).

Dicha investigación se lleva a cabo dentro de un programa de desarrollo profesional en escuelas urbanas para ayudar a los profesores a crear ambientes que favorezcan el pensamiento algebraico. Este trabajo es parte de una investigación longitudinal desde educación infantil hasta quinto grado de primaria. Implica una tarea relativa a la relación funcional existente entre una cantidad arbitraria de perros y la correspondiente cantidad de ojos o bien de ojos y colas.

En educación infantil se utilizaron materiales concretos en los cuales los estudiantes veían ilustraciones de perros, y carteles en los que hacían marcas de acuerdo a ojos y colas que luego contaban. En primer grado los estudiantes establecieron la relación entre cantidades según los perros tanto a nivel aditivo como multiplicativo; de acuerdo al número de perros había entonces el doble de ojos y el triple de ojos y colas juntos. En segundo grado los estudiantes describieron oralmente sus hallazgos y fueron capaces de predecir los resultados para 100 perros. En tercero, cuarto y quinto grado los estudiantes utilizaron de

forma fluida los carteles para organizar la información y expresaron con palabras y símbolos las reglas multiplicativas presentes. Como resultado de este estudio se muestra el pensamiento funcional de los estudiantes desde una corta edad y se sugiere que pueden trabajar con pensamiento covariacional desde educación infantil y progresar en los siguientes niveles en términos de representaciones y lenguaje.

Dentro del *early algebra*, Carraher et al. (2008) realizan una investigación longitudinal de tres años en una escuela metropolitana de Boston. La parte de la investigación que reportan fue desarrollada con 15 estudiantes de tercer grado de primaria (de aproximadamente 9 años) durante dos sesiones, y estaba orientada a estudiar temas asociados a funciones, patrones y la generalización que llevan a cabo. La generalización de los estudiantes se estudió mediante patrones de figuras geométricas para introducir funciones lineales. El problema trabajado hace alusión a la colocación de invitados alrededor de una mesa, en la cual sólo un invitado puede sentarse en cada borde y ninguno en las esquinas. En una lección se trabajó con la idea de que las mesas estaban separadas y en la otra se les dijo que las mesas se podían unir. A los estudiantes se les solicitaba determinar una relación o regla que se podía establecer entre la cantidad de mesas y la cantidad de invitados que se podían sentar. Las funciones implicadas son  $g(t) = 4t$  y  $f(t) = 2t + 2$ , donde  $t$  es la cantidad de mesas y  $g(t)$  y  $f(t)$  la cantidad de invitados de acuerdo a cada una de las situaciones. A los alumnos se les dio material con tablas para que establecieran relaciones entre la cantidad de mesas y de invitados. El trabajo de los estudiantes fue guiado por los investigadores.

En el estudio se observa cómo los estudiantes conceptualizan las funciones acorde a patrones recursivos. Según el modo en que son abordadas las funciones, el docente debe reconocer la forma en que los estudiantes generan el concepto de una función ya que pueden utilizar diversos recursos o formas de expresión: desde una forma recursiva, que puede generar concepciones erróneas que dificultan comprender el carácter variable de la variable independiente, a una donde se utilicen expresiones cerradas que permitan ver la relación entre las variables independiente y dependiente. A la vez se considera la forma en que los estudiantes razonan, argumentan y representan, iniciando desde una postura empírica a una de generalización teórica.

En la presente investigación el estudio de la manifestación de generalizaciones por parte de los estudiantes se realiza de acuerdo al modo en el evidencian indicios de reconocimiento de la relación funcional en la tarea. Como se mencionó antes, el pensamiento funcional como línea de investigación dentro del *early algebra* es una vía de propuesta de situaciones que le permiten al estudiante fortalecer, desarrollar o evidenciar el razonamiento asociado a la generalización. Este conocimiento y habilidad es fundamental dentro del álgebra y se detalla en el siguiente apartado.

### Generalización

Dada la importancia del proceso de generalización y lo que esta capacidad involucra, se exponen las concepciones más relevantes que expertos en el área han desarrollado. Entre estas ideas se encuentra el significado del término generalización (algebraica) así como algunas ideas sobre niveles de generalización que pueden ser desarrollados por los estudiantes.

Polya (1989) expone que la generalización radica en

Pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado. (p.97)

Polya (1989) concibe la generalización como el paso de la identificación de regularidades en casos particulares a otros casos más amplios que cumplen lo mismo. Mediante la generalización se establecen relaciones entre los datos en situaciones matemáticas y se identifican estructuras (Blanton et al., 2011).

Es importante reconocer que la generalización, como es concebida en matemática, difiere con la que es considerada en la educación matemática. En la matemática las generalizaciones se hacen sobre afirmaciones cuya validez es demostrada y sin importar cómo es que es comprendida por parte del aprendiz. Mientras que en la educación matemática se considera lo formal matemático y no se ignora el componente psicológico de cómo es que el estudiante lleva a cabo el proceso de generalización (Carraher et al., 2008).

La concepción de generalización que se ha adoptado en este trabajo es la de Radford (2010), quien considera que la generalización algebraica de un patrón consiste en la habilidad de reconocer lo común en los elementos de una secuencia de modo que se puede brindar una

expresión que represente a todos los términos de la sucesión. Así esa capacidad de reconocimiento de lo general a partir de lo particular se puede considerar la meta principal de la generalización de patrones. Este proceso de reconocimiento de lo común y la identificación de semejanzas y diferencias es progresivo (Radford, 2010).

Radford (2001) apunta que la generalización como tal es un proceso semiótico de los más naturales y con la semiosis se pueden objetivizar los objetos mediante signos que evolucionan a sistemas más complejos de representación conforme se avanza en generalizaciones. Este autor expone que mediante la generalización se logran concretar los objetos a través de símbolos.

Radford (2001, 2010) define tres niveles de generalización considerando lo simbólico y presimbólico. Define la generalización factual como aquella en la cual se utilizan acciones numéricas en forma de esquemas de operaciones pero siempre dentro del nivel numérico expresado en acciones concretas por lo cual aún no se enuncia lo indeterminado. Esta permite el trabajo con casos específicos de números pero sin necesidad del conteo ya que se determina un patrón.

Luego, está la generalización contextual en la cual los estudiantes observan un patrón y pueden explicarlo para cualquier figura dentro de la secuencia sin ser esta descrita por un número específico. En este tipo de generalización intervienen los elementos comunicativos y los matemáticos ya que deben existir las explicaciones. Hay un nivel de abstracción mayor que en el tipo de generalización anteriormente descrito y se presta atención al lenguaje utilizado por el estudiante que refleja un nivel de generalidad mediante expresiones específicas de indeterminación, por ejemplo: “la siguiente figura”, “para cualquier número”, entre otros. Se da una objetivación de un esquema operacional que actúa con la abstracción a pesar de que aún no hay un lenguaje simbólico que da mayor generalidad.

Por último, está la generalización simbólica que es la más general, trasciende al objeto o número específico de contextos concretos, se habla en general, hay una representación para todos los elementos de la sucesión o patrón.

Por otro lado, Radford (2010) plantea que existe otro tipo de generalización no algebraica, esta es la aritmética. En este caso en una sucesión o patrón los estudiantes observan lo común que han observado en algunas figuras sin la habilidad de extenderlo a

otros casos o incluso de usar información que ya han recabado anteriormente ni de brindar una expresión que represente a cada uno de los términos de la secuencia.

Mason y Pimm (1984) exponen que dentro de la matemática se da una confusión entre las concepciones de genérico y lo general cuando se introduce al estudiante en el álgebra y se trabaja con símbolos o letras para representar números. A partir de esto es que hacen una diferencia de lo que es específico, genérico y general.

Esta diferenciación está en términos de la intención que se quiera transmitir, es decir, hay un énfasis en el lenguaje o expresiones utilizadas para expresar la generalidad. Emplean el término específico si lo que se expresa son casos en los cuales siempre se trabaja con números concretos. Si se trabaja con expresiones que representan generalidad pero se requiere de ejemplos concretos para explicar, se habla de casos genéricos. Un ejemplo es genérico cuando se utilizan casos específicos como representantes de todo un grupo, es decir, se está pensando que el ejemplo engloba toda la generalidad. El caso general brinda una respuesta que representa a todos los elementos de los que se está hablando, hay una representación de lo indeterminado.

Mason y Pimm (1984) exponen un ejemplo de MacHale en el cual se observa la idea de genérico. Según ellos, a menudo el único ejemplo que se da de una función continua pero no diferenciable es la función valor absoluto,  $x \rightarrow |x|$ , y ocurre que para el docente esto es genérico, encierra a la familia de funciones  $x \rightarrow k|x + a| + c$ , sin embargo, lo que sucede con los estudiantes es que ven sólo un ejemplo y no al conjunto de funciones tal cual lo ve el docente.

Por otro lado, en el proceso de generalización es fundamental el reconocimiento de patrones (Cañadas, 2007), los cuales vienen a ser el resultado de situaciones repetidas con regularidad (Castro, 1995). Ese proceso se puede llevar a cabo por medio del razonamiento inductivo el cual se trabaja en un procedimiento de identificación de patrones y regularidades a partir de casos particulares (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Polya (1989) plantea que “la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones” (p.114). La actividad de reconocimiento de patrones, el trabajo y análisis sobre las regularidades así como el establecimiento de relaciones entre las formas son actividades propias de la matemática (Castro, 1995).

Múltiples investigaciones se han realizado en el marco de las generalizaciones que llevan a cabo los estudiantes y la caracterización de las mismas. En el caso de Radford (2010), la descripción de los niveles de generalización algebraicos expuestos anteriormente, se da con base en un estudio longitudinal sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra e involucra cuatro grupos desde la escuela media a la escuela secundaria. El estudio de las generalizaciones fue hecho sobre patrones y se pretendía investigar sobre el uso que los estudiantes daban a los signos y al significado de los procesos algebraicos. Dentro de las actividades a los estudiantes se incluía investigación aritmética en la que se les preguntaba sobre cuestiones asociadas a las figuras de posiciones específicas, también sobre las expresiones de generalización en palabras propias de los estudiantes o bien usando lenguaje algebraico.

Este autor determina que dentro del proceso de percepción de patrones entran en juego actividades semióticas como lo son las palabras, gestos, dibujos, entre otros, los cuales se utilizan como medios para objetivizar y alcanzar alguna de las capas (niveles) de generalización que describe. Expone que el fin no es que los estudiantes expresen lo mismo de formas diferentes, sino que obtengan formas más profundas de razonamiento. Por otro lado este autor se detiene a reconocer los recursos que utilizan los estudiantes y cómo contribuyen en los diferentes procesos de visualización que llevan a cabo.

En cuanto a investigaciones que se han llevado en la escuela primaria, Blanton et al., (2015) presentan el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje con estudiantes de primer grado (de 6 años aproximadamente) de seis grupos de dos escuelas ubicadas en el noreste de Estados Unidos.

Metodológicamente se llevó a cabo una investigación de diseño en la cual caracterizaron, en niveles de sofisticación, el progreso de los niños en cuanto al pensamiento funcional. Dicho pensamiento está relacionado con las formas de generalización que se dan ante varias relaciones funcionales, las cuales progresan en complejidad según lo demostrado en estudios previos. Los niveles de generalización que utilizan son ocho y no son considerados lineales, estos se describen a continuación:

- Nivel 1. Preestructural: los niños que exhiben este nivel no describen ni usan aunque sea implícitamente relaciones matemáticas para los datos dados, tampoco describen patrones recursivos en secuencias individuales de datos o

entre cantidades covariantes, de modo que no manifiestan haber identificado una relación entre las cantidades.

- Nivel 2. Recursivo-Particular: los niños en este nivel han conceptualizado un patrón recursivo como una secuencia de ejemplos particulares, esto es, el niño no identifica la característica que comparten todos los ejemplos y por lo tanto no ha notado una generalización que permita enunciar todo el patrón como una unidad.
- Nivel 3. Recursivo-General: en este nivel los niños conciben un patrón recursivo como una regla generalizada entre valores sucesivos arbitrarios y si se usan casos específicos para explicar lo que piensan.
- Nivel 4. Funcional-Particular: aquí se considera una relación funcional como un conjunto de relaciones entre valores específicos que se corresponden entre sí.
- Nivel 5. Primitivo Funcional-General: se da una conceptualización de una relación funcional entre dos cantidades pero a través de un conjunto de casos y no sólo dentro de un conjunto particular, sin embargo, las representaciones utilizadas son primitivas
- Nivel 6. Emergente Funcional-General: en este caso el niño refleja la emergencia de características claves propias de una relación funcional generalizada, aunque la representación puede que esté incompleta ya que en algunas ocasiones se puede transmitir una generalización de cantidades pero no la relación matemática o viceversa o bien se dan generalizaciones parciales.
- Nivel 7. Funcional-General Condensado: en esta categoría las funciones son conceptualizadas como relaciones generalizadas entre cantidades arbitrarias y explícitas lo que implica que la transformación matemática es evidente y la relación se representa por medio de palabras y notación algebraica
- Nivel 8. Función como objeto: aquí los niños perciben los límites de la generalidad de la relación lo que les permite concebir que la relación se mantiene sobre un conjunto de valores siempre que la situación del problema no cambie.



Las mismas autoras exponen que en la definición de las categorías anteriores hay características que hacen que unas se parezcan a otras, aunque siguen siendo diferentes. Esto evidencia que el reconocimiento de niveles de generalización no es sencillo y en algunos casos el investigador puede incurrir en una ambigüedad sobre la forma de interpretar la información pero desde su postura y lo que establece, lo justifica.

Las investigadoras determinan que los niños pueden aprender a pensar de forma sofisticada y generalizada sobre las funciones desde niveles educativos bajos y cruzando por diferentes niveles de generalización. Además se reconoce el aporte que genera el trabajo con patrones recursivos como preámbulo para el reconocimiento de relaciones funcionales, aunque también se observa que en algunos niños pudieron ver la relación entre cantidades sin la necesidad de los patrones.

Por otro lado, el modo en el que las interacciones son llevadas a cabo durante el proceso de generalización que desarrollan los estudiantes se puede considerar fundamental. Dicha interacción es mediada por una serie de intervenciones que se dan entre los participantes del discurso con fines determinados, en el caso de este estudio, se consideran los estímulos efectuados al estudiante por parte de la entrevistadora, por esa razón a continuación se expone el área de los estímulos efectuados al estudiante.

#### Estímulos efectuados al estudiante

La primera definición que la Real Academia Española brinda de estímulo refiere a un “agente físico, químico, mecánico, etc., que desencadena una reacción funcional en un organismo” (Real Academia Española, 2014). Moliner (2016) brinda la definición de estímulo en torno a un agente o variación que genera cambios en un organismo. Se considera en este trabajo entonces que un estímulo al estudiante es una acción que se efectúa como un desencadenante de efectos o cambios en el comportamiento, procesos o respuestas del estudiante al que se le realizan. En esta investigación se consideran los estímulos que efectúa la entrevistadora al alumno como medio para la manifestación de razonamientos asociados a la generalización.

Soller (2001) en su estudio, cuyo foco es el aprendizaje colaborativo, plantea que los estudiantes tienden a aprender de forma más efectiva en grupos en los cuales discuten, explican, preguntan, justifican y argumentan sus razonamientos a la vez que reflexionan

sobre su conocimiento, sin embargo, esto sólo se logra en equipos activos. En su investigación, llevada a cabo dentro de la interacción efectiva de aprendizaje colaborativo, se identificaron características que fueron divididas en cinco categorías: participación, fundamentación social, habilidades de aprendizaje activo conversacional, análisis de actuación y de grupo, e interacción promotora. Dentro de las características se observa cómo los estudiantes toman turnos para cuestionar, contribuyen en los aportes que se generan, sugieren, se contribuye a la comprensión de todos los involucrados en el grupo, etc., de modo que se promueve un aprendizaje grupal.

Para Soller (2001) “los estudiantes que más se benefician de la situaciones de aprendizaje colaborativo son aquellos quienes alientan a otros a justificar sus opiniones, y articular y explicar su pensamiento” (p.45).

Si bien la investigación que planteamos no está relacionada con el trabajo colaborativo y activo, se da una reinterpretación de lo expuesto y se reconoce el papel del profesor en las interacciones entre los participantes en los roles de preguntar, argumentar, motivar, discutir, etc., mientras se da una construcción o muestra de conocimiento.

A partir de las ideas de Soller (2001), bajo la naturaleza de nuestra investigación, en los roles activos de generación o evidencia de conocimiento por parte del estudiante, la entrevistadora obtiene información a través del planteamiento de preguntas y la ejecución de estímulos al estudiante, con el fin de tener referencias sobre su conocimiento o capacidad de generalización y así reorientar el aprendizaje o la situación que se está trabajando.

Soller (2001) considera tres habilidades relacionadas con el trabajo colaborativo: conversación, aprendizaje activo y conflicto creativo. Para su descripción se basa en la taxonomía de McManus y Aiken (1995) en la cual dentro de cada habilidad se ubican subhabilidades que a su vez involucran atributos, que vienen a ser tipos de actividades que las caracterizan. Se presenta una descripción de las habilidades, subhabilidades y atributos (los cuales se colocan entre paréntesis) que presenta esta autora en su trabajo

#### *Conversación*

- Reconocer: se reconoce la importancia de los aportes recibidos (apreciar, aceptar y rechazar).

- Mantener: se procura apoyar la cohesión e involucramiento de los participantes (solicitar atención, sugerir acciones, solicitar confirmaciones, escuchar y disculpar).
- Tarea: implica reorientar el trabajo hacia otro énfasis (coordinar procesos de grupo, solicitar cambio de énfasis, resumir información y finalizar la participación).

#### *Aprendizaje activo*

- Motivar: se da una retroalimentación y reforzamiento positivo (animar y reforzar).
- Informar: se avanza la conversación por medio de información o consejo (parafrasear, liderar, sugerir, elaborar, clarificar, justificar y afirmar).
- Solicitar: se solicita ayuda o sugerencias al resolver problemas (solicitud de información, elaboraciones, clarificación, justificaciones, opiniones e ilustración o explicaciones).

#### *Conflicto Creativo*

- Mediación: está relacionada con la intervención que lleva a cabo el docente y cómo es involucrado en el proceso.
- Discutir: se razonan los comentarios o sugerencias que otros han realizado (conciliar, estar de acuerdo o en desacuerdo, ofrecer alternativas, inferir, suponer, proponer excepciones y dudar).

Dentro de la taxonomía brindada anteriormente la autora también aporta algunas expresiones verbales que acorde con la intención de las mismas se asocian a cada uno de los atributos para que la habilidad mostrada pueda ser identificada con mayor facilidad.

En el trabajo de Soller (2001) se aprecia que a partir de una mediación activa en los procesos educativos en los que participan los estudiantes, las intervenciones contribuyen en un refuerzo o reorientación del proceso llevado a cabo para promover un mejor aprendizaje o bien exhibir conocimiento o habilidades ya presentes en los estudiantes.

Entre otros estudios, una investigación que permite valorar el impacto de las intervenciones docentes en el progreso de los estudiantes en su forma de expresar conocimientos es la de Warren (2006). Esta investigadora lleva a cabo un estudio con el cual pretende identificar cómo la relación que se da entre la habilidad de expresar generalizaciones

de forma escrita y simbólica se ve influenciada por la intervención docente. A través de la investigación determinó que tras las intervenciones, una quinta parte de los estudiantes podía realizar ambos tipos de generalizaciones, y no sólo eso sino que la ayuda docente contribuyó a la identificación de la generalización para expresarla como regla y como ecuación. Dicha investigación involucra situaciones con patrones crecientes, así que la generalidad se observa según posiciones dentro del patrón.

En la intervención docente se consideró el uso de materiales concretos, también se emplearon patrones lineales en los que era explícito lo visual así como la regla que se establecía entre la posición de los términos y el patrón, y se hacían preguntas que relacionaban u orientaban a determinar la relación. La autora manifiesta que los modos para determinar las reglas de acuerdo a la posición de los elementos dentro de un patrón recae en tres categorías: cuando se usa un solo término predecir la relación para otros términos, usando una estrategia aditiva notando relaciones entre términos consecutivos o bien mediante una estrategia funcional en la cual se establece una relación de dependencia entre dos conjuntos de datos, por ejemplo se toma en cuenta la posición para obtener la forma general de los términos.

En el estudio participan 27 niños de quinto grado de primaria (10 años), el profesor y dos investigadores. Las actividades se organizaron en cuatro sesiones de una hora y las tareas propuestas eran libres de contexto para que este no influenciara en el desarrollo del trabajo. Las acciones docentes efectuadas implicaron la utilización de un lenguaje y acciones que le permitiera a los niños establecer relaciones entre el patrón y las tablas de valores, así como incorporar lenguaje específico que les orientara a describir el patrón de forma más sencilla e incluso utilizar simbolismo tras su introducción.

Finalmente la investigadora menciona que los niños desde corta edad pueden trabajar con álgebra y que las acciones docentes influyen en el proceso de generalización que llevan a cabo, además de que considera que muchas de las dificultades que los niños tuvieron se han visto en otras investigaciones con jóvenes, lo que sugiere que tal vez lo que influye es la experiencia a la que se enfrentan los estudiantes. Tampoco se deja de lado que otro elemento que influye en el aprendizaje del álgebra es que en muchos casos es introducida junto con el simbolismo de una forma abrupta (Warren, 2006), lo cual recae nuevamente en las prácticas a las que los estudiantes son expuestos.

En otros estudios (Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008) se logra observar a partir de los resultados o la metodología empleada, que la intervención docente y acciones como parafrasear, organizar o redirigir las respuestas o procedimientos de los estudiantes, fueron importantes en el proceso de obtención de información y la demostración del pensamiento funcional de los niños.

Como síntesis, en este apartado se han expuesto los principales componentes teóricos que dan sustento a la investigación y permiten a su vez asumir una postura respecto a los niveles de generalización que los estudiantes manifiestan y los estímulos que se le pueden efectuar para tal efecto y contribuir en el proceso que llevan a cabo, de acuerdo a los aportes de diferentes autores, investigaciones previas que se han realizado y el contexto propio de esta investigación. En el siguiente capítulo se explica la forma en que la investigación ha sido llevada a cabo para abordar el problema de investigación planteado y dar respuesta a los objetivos propuestos, allí se expone el paradigma metodológico que se ha asumido, la técnica de recolección de datos empleada, los sujetos que participan así el modo en que la información recolectada ha sido analizada.

## Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se precisa el paradigma de investigación y el método que se ha adoptado en este estudio. También se describen el instrumento de recolección de información utilizado y las principales características de los participantes en el estudio. Por último se concreta cómo la información recogida fue analizada.

### Paradigma de investigación

En esta investigación se pretende analizar en profundidad los niveles de generalización que alcanzan estudiantes de cuarto curso de primaria, tomando en cuenta la intervención de estímulos realizados por una docente-entrevistadora al alumno mientras se enfrenta a una tarea que involucra una relación funcional. Se considera, por tanto, que este estudio se inscribe en el enfoque cualitativo, en el cual según Barrantes (2007) la investigación “postula una concepción fenomenológica, inductiva, orientada al proceso. Busca descubrir o generar teorías. Pone énfasis en la profundidad y sus análisis no necesariamente, son traducidos a términos matemáticos” (p.71). En este caso se persigue entender un fenómeno educativo en su realidad mediante el estudio de la interacción de los componentes del mismo: profesor, estudiante y el problema matemático. Hay un interés por comprender el fenómeno desde el punto de vista del actor (Barrantes, 2007).

En nuestro caso la intención principal es llevar a cabo un análisis del proceso y los niveles de generalización exteriorizados por el estudiante tomando en cuenta los estímulos que recibe de la entrevistadora.

### Método de investigación

La investigación que aquí se describe es parte de una investigación de diseño más general, concretamente un experimento de enseñanza. Este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa considerando contextos naturales en su complejidad, a la vez que se busca desarrollar y analizar un diseño de enseñanza específico (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

El experimento de enseñanza referido implica el trabajo en el aula con tareas diseñadas para promover manifestaciones de pensamiento funcional por parte de alumnos de

primaria. En algunas partes de las tareas se solicitaba al estudiante usar o interpretar diferentes sistemas de representación como tablas, lenguaje verbal y letras; estas últimas fueron introducidas para representar cantidades indeterminadas. La recolección de datos se realizó durante dos cursos académicos consecutivos. Durante el primer curso participaron tres grupos de una escuela primaria en el sur de España y de niveles diferentes: primer curso con 30 estudiantes, tercer curso con 27 estudiantes y quinto curso con 25 estudiantes. Los alumnos participantes no habían trabajado previamente en el aula actividades matemáticas relativas a funciones ni al uso de los sistemas de representación simbólico-algebraico o tabular. En el siguiente curso académico se trabajó con una selección de los mismos estudiantes que en este caso cursaban segundo, cuarto y sexto de primaria. En este curso se implementaron entrevistas semiestructuradas orientadas a complementar los datos recolectados el curso previo. La investigación que aquí se presenta considera los datos recogidos en este segundo curso académico con estudiantes de cuarto de primaria.

El diseño metodológico que se sigue es descriptivo, el cual según Hernández, Fernández y Baptista (2007) tiene como objetivo “indagar la incidencia y los valores en que se manifiestan una o más variables; o ubicar; categorizar y proporcionar una visión de una comunidad, un evento, un contexto, un fenómeno o una situación” (p.144). Por otro lado, la investigación también es exploratoria ya que se estudia una situación poco estudiada con anterioridad y hay insuficientes antecedentes relacionados (Hernández et al., 2007) y en consecuencia se desea investigar más sobre el tema y profundizar en los resultados que se obtienen.

En la investigación se pretende analizar y describir el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes al enfrentarse a una situación que involucra una relación funcional para poner de manifiesto su pensamiento funcional. Se describen a su vez los elementos de intervención docente que median en tal proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes.

### Técnica de recolección de información

La técnica de recolección de información que se ha utilizado en este trabajo es una entrevista semiestructurada e individual orientada a obtener información que permita luego

analizar los niveles de generalización que alcanzan los estudiantes durante la resolución de una tarea bajo el cual subyace una relación funcional.

La entrevista como método de recolección de datos consiste en una reunión mediante la cual se intercambia información entre el entrevistador y el entrevistado (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En particular, la entrevista que se desarrolla es semiestructurada, esto significa que se tiene una guía de preguntas que orientan la entrevista, sin embargo, hay flexibilidad a la hora de desarrollarla (Hernández et al., 2006).

La entrevistadora plantea una serie de preguntas a cada estudiante, acorde a la organización inductiva de la tarea que involucra una transición desde el trabajo con casos específicos hasta los más generales en los que finalmente se involucra simbología algebraica. Según considera necesario para reorientar el trabajo o resultados del estudiante, efectúa estímulos que faciliten la manifestación de pensamiento funcional y fomenten una evolución en el proceso de generalización.

Concretamente a los estudiantes se les propone una tarea basada en la siguiente situación:

A mi familia y a mí nos gusta mucho ir a esquiar a la sierra. Mientras esquiamos dejamos el coche en el parking. Entrar en el parking cuesta 2€ y cada hora completa que pasa el coche en el parking cuesta 1€.

La entrevista está estructurada en una secuencia de preguntas que asciende en niveles de generalización esperada en el estudiante, esta se describe en los párrafos siguientes.

Al iniciar la entrevista se plantean preguntas orientadas a que el estudiante trabaje con números específicos dentro de la situación planteada. Se espera que, a partir del trabajo con números concretos, el estudiante identifique la relación funcional que subyace en la situación planteada. Según la propia organización de la entrevista, se han considerado dos tipos de números específicos, en primer lugar las preguntas de la 1 a la 5 involucran números específicos pequeños, esto es números naturales menores al 100, luego de la 6 a la 7, números específicos grandes, es decir, números naturales mayores o iguales a 100. No en todas las entrevistas se utilizan los mismos números; en algunas ocasiones el número específico de horas para trabajar es solicitado al estudiante.



En las preguntas con números específicos pequeños se cuestiona al estudiante sobre el número de euros asociado a diferentes cantidades de horas. A continuación se exponen las cinco primeras preguntas de la entrevista:

1. Si hace mal tiempo y solo dejamos el coche una hora en el parking ¿cuántos euros nos cuesta?
2. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 3 horas?
3. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 5 horas?
4. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 10 horas?
5. Como lo estamos pasando muy bien, decidimos quedarnos allí una noche y esquiar al día siguiente. Entre los dos días dejamos el coche ha estado en el parking 20 horas ¿cuánto euros nos cuesta el parking?

En las preguntas que continúan se utiliza un número de horas igual o superior al 100. A continuación se muestran ejemplos de las preguntas 6 y 7:

6. Si pasamos un puente entero de cinco días (120 horas), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?
7. Decidimos pasar tres semanas (500 horas aproximadamente), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

Continuando con la entrevista, en la pregunta ocho se hace un cambio directo de intención, esta se orienta a que el estudiante empiece a manifestar un nivel de generalización superior. Si bien puede que el estudiante explique con números específicos el patrón que observa a partir de los resultados que obtiene, se espera que evidencie generalidad en la respuesta que brinda según expresiones verbales de indeterminación que implican generalidad.

La pregunta es la siguiente:

8. Lo estamos pasando tan bien que hemos perdido la noción del tiempo y no sabemos cuántas horas hemos pasado ¿cómo podemos saber cuántos euros nos cuesta el parking?

Finalmente la última pregunta está orientada a que el estudiante de forma general exprese la relación funcional e involucre una letra o simbología algebraica que represente lo indeterminado en la relación funcional subyacente en la tarea. Se espera que el estudiante brinde una expresión algebraica que represente a todos los términos que se obtienen de la relación funcional.

9. Imagina que llamamos  $N$  al número de horas que hemos dejado el coche en el parking mientras esquiábamos. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking?

Dado que a sólo a algunos estudiantes se les plantearon preguntas sobre la relación funcional inversa entre cantidades, en este estudio únicamente es considerada la información correspondiente a la relación funcional directa.

### Participantes

En las entrevistas participan ocho estudiantes de cuarto curso (de aproximadamente 9-10 años de edad) que estudiaban en una escuela privada y habían participado en la recogida de datos previa del experimento de enseñanza. Los sujetos fueron seleccionados intencionalmente de acuerdo a los criterios: disposición a contribuir y manifestación de diferentes niveles de rendimiento académico (bajo, medio y alto).

### Análisis de la información

En este apartado se expone el modo en que la información recolectada en el estudio es categorizada y analizada acorde con lo definido anteriormente.

Una vez que son realizadas las entrevistas, la información recabada por medio de grabaciones de video y producciones escritas<sup>2</sup>, es transcrita<sup>3</sup> y posteriormente codificada. En las transcripciones, de las intervenciones y preguntas que hace la entrevistadora se analizan

---

<sup>2</sup> Las producciones escritas de los estudiantes se pueden consultar en el vínculo <https://drive.google.com/open?id=0B-SiYaQ261YUdklN5NB5NGxwRmc>

<sup>3</sup> Las transcripciones de las entrevistas se pueden consultar en el vínculo <https://drive.google.com/open?id=0B-SiYaQ261YUaU9ONjd0ZnB2UkU>

los estímulos efectuados al estudiante y en las respuestas que da el estudiante se analizan las manifestaciones de generalización.

Las categorías empleadas en el análisis fueron generadas a priori, basadas en los aportes de diversos autores y conforme a una revisión superficial de los datos recolectados. Las categorías se dividen en dos grandes grupos, por un lado están los niveles de generalización que manifiestan los estudiantes y por otro los estímulos llevados a cabo por la entrevistadora.

#### *Niveles de generalización*

Como parte del análisis, las manifestaciones de generalización en las respuestas de los estudiantes son categorizadas. Si bien las preguntas de la entrevista están orientadas a obtener un tipo de respuesta esperada, las respuestas de los estudiantes son variadas y se pueden notar diferentes niveles de generalización en estas con una sola pregunta. Este fenómeno de variedad de opciones en las respuestas es motivado en cierta medida por las intervenciones hechas por la entrevistadora para obtener evidencias del pensamiento funcional de los alumnos.

La clasificación en niveles de generalización se hace de acuerdo a si el estudiante en sus respuesta muestra indicios del reconocimiento de la relación funcional subyacente en la tarea. Según la forma en que manifiesta la generalización, así se categoriza (ver Figura 1).

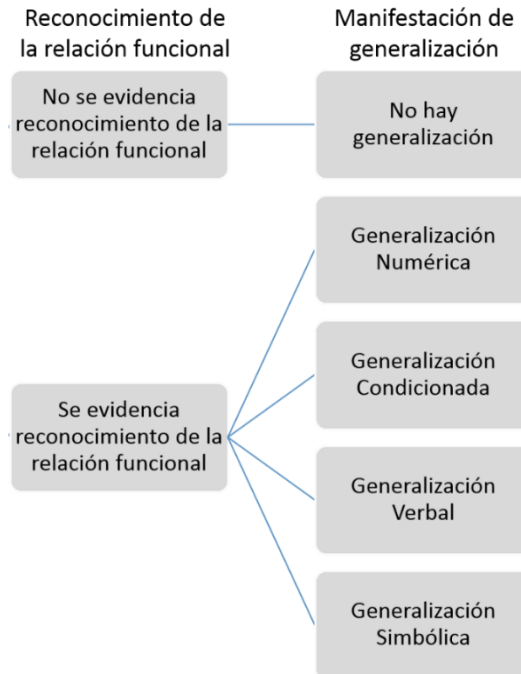


Figura 1. Niveles de generalización y reconocimiento de la relación funcional

Los niveles de generalización establecidos ascienden en nivel de generalidad desde una posición en la cual no se evidencia generalización, hasta otras que pasan por el uso de números concretos, expresiones verbales de indeterminación y finalizando con el uso de simbología algebraica como se describen a continuación.

- *No hay generalización (E0)*

En este nivel, ante las preguntas planteadas por la entrevistadora, el estudiante recurre a métodos de conteo o sumas repetidas en las cuales involucra números específicos mencionados en la pregunta u otros, no dando muestras de haber percibido la relación funcional que subyace en la tarea. A modo de ejemplo a continuación se muestra un extracto de entrevista con el alumno A4 en el que se observa cómo para obtener una respuesta recurre a un procedimiento de sumas repetidas haciendo uso de resultados previos. También es importante mencionar que en este caso hay un mayor énfasis por parte del alumno en obtener un resultado (el cual particularmente es incorrecto) que en determinar un patrón. Algunas de las respuestas dadas son correctas y otras no.

*E<sup>4</sup>. Imagínate que vas un día y lo pasas entero ahí, entonces claro debes dejar el coche en el parking, entonces lo terminas dejando 10 horas. ¿Cuánto tendrías que pagar?*

*A4. Pues..., 10 horas; 5+1 igual a 6; 6+1, 7; 7+1, 8; 8+1, 9; 9+1, 10; 10+1, 11; serían 21.*

- *Numérica: Numérica con números pequeños (N1) y Numérica con números grandes (N2).*

El estudiante da muestras de haber identificado la relación funcional que subyace en la situación planteada. En su respuesta utiliza números específicos involucrados en las preguntas que se le plantean. Dado el nivel de especificidad, la categoría se divide en dos según si en su respuesta el estudiante hace referencia a números pequeños (N1), es decir menores a 100, o con números grandes (N2), es decir mayores o iguales a 100. A continuación se muestran ejemplos de respuestas codificadas en cada una de estas categorías.

*E. Exactamente, son 20 horas que dejas el coche en el parking. ¿Cuánto tendrías que pagar A1?*

*A1. Pues 20, si cada hora tienes que pagar, pues, y tenemos 20 euros, pues 20 euros más los 2 que tenemos que pagar para entrar, 22, 22 euros.*

*E. Ahora dime un número muy grande A2.*

*A1. 1000*

*E. 1000, 1000 horas en el parking eso es dinero, eh. Imagínate que estás 1000 horas, dejas el coche 1000 horas en el parking, ¿cuánto tendrías que pagar?*

*A2. 1002 euros.*

*E. Y si estás, ..., otro número más grande.*

*A2. Un millón*

---

<sup>4</sup> El significado de las siglas empleadas en las entrevistas es el siguiente: E: Entrevistadora; A1: Estudiante 1; A2: Estudiante 2; A3: Estudiante 3; A4: Estudiante 4; A5: Estudiante 5; A6: Estudiante 6; A7: Estudiante 7 y A8: Estudiante 8.

*E. Un millón, bueno, pues será bastante dinero.*

*A2. Pues un millón de euros con dos.*

- *Condicionada (C)*

El estudiante da muestras de haber reconocido la relación funcional en casos generales pero recurre a una ejemplificación que involucra números específicos para explicar su respuesta. Por ejemplo, el alumno A2 manifiesta este nivel de generalización en el siguiente segmento de entrevista

*E. Imagínate que no sabemos exactamente el número de horas que dejamos el coche en el parking, lo voy a poner así “número de horas” [la entrevistadora lo escribe], el que sea. ¿Cómo estás calculando siempre lo que tienes que pagar?*

*A2. Porque por ejemplo 50, uno cada uno, así llegamos a 50, entonces 50 euros más 2 que he tenido que entrar al parking, pues me dan 52.*

- *Verbal (V)*

El estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando expresiones verbales generales con las que alude a lo indeterminado. A continuación se muestra un caso en el cual el estudiante evidencia la relación entre el número de horas en el parking y las de euros que se deben pagar y la expresa usando lenguaje verbal general. Utiliza la expresión “a lo que sea” para referir al número de horas.

*E. Aquí es un número cualquiera, el que sea, ¿cómo calcularías el número de euros?*

*A3. ¿No tengo el tiempo ahí? [Inaudible].*

*E. Sí, pero el problema es que no sabemos el número de horas que lo dejamos.*

*A3. Pues el tiempo que te cuenta.*

*E. El tiempo que se te cuenta, y ¿qué haces con ese tiempo que te cuenta?*

*A3. Pues le sumas 2 a lo que sea.*

- *Simbólica (S)*

En esta última categoría el estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando lenguaje algebraico simbólico. Incluimos en esta categoría los casos en los que el

estudiante muestra comprensión del uso de representaciones de indeterminación si estas son utilizadas o las manipula para expresar la generalidad de la relación funcional involucrada en la tarea: el estudiante explica verbalmente el funcionamiento de letras o expresiones de indeterminación que se utilizan para expresar la generalidad de la relación funcional involucrada en la tarea. También puede que el estudiante escriba la expresión algebraica asociada a la relación funcional implícita en la tarea cuando son introducidas letras que representan lo indeterminado.

Se muestra un ejemplo referido al estudiante A6 en el cual tras hacerse una aclaración del significado algebraico de la letra  $Z$ , de forma natural escribe la expresión algebraica que representa el total de euros a pagar según una cantidad indeterminada de horas que ha pasado el coche en el parking.

*E. Vale y si ponemos  $Z$  horas cómo lo podrías escribir, ¿se te ocurre alguna manera de escribirlo?*

*A6. Eh, es que no sé lo que es  $Z$  horas.*

*E. Le pasa como a  $X$ , es otro número que no sabemos cuál es, a las letras siempre les pasa eso, no sabemos exactamente qué número es, pero puede ser cualquier número.*

*A6. Pues podría poner a lo mejor  $Z+2$ , pues las horas que está más 2 del parking.*

*E. ¿Y si yo te pusiera  $N$  horas?*

*A6. Lo mismo.*

*E. ¿Lo mismo qué?*

*A6. Pues lo mismo que esto y que esto [señala el  $X+2$  y  $Z+2$ ]*

*E. ¿Cómo lo escribirías?*

*A6. Pues  $N+2$*

En la definición de los niveles de generalización anteriores son consideradas las contribuciones de Mason y Pimm (1984), Radford (2001, 2010) y Blanton et al., (2015) en esta área. Los primeros autores aportan una visión de lo que es considerado como genérico y general y la forma en que está presente en la matemática. Su caracterización permite la acotación de los casos en que los niños llevan a cabo un trabajo de generalización a partir

números específicos como se observa en la categoría N1 y N2, o bien con la intención de explicar una postura sobre la generalidad, se hace uso de ejemplos genéricos, lo cual se evidencia en la categoría de generalización C. Finalmente la manifestación de lo general que representa a todos los elementos de los que se habla en un patrón, es utilizada en la categoría V por medio de la cual se expresa la generalización de forma verbal y en S donde se recurre al uso de lenguaje algebraico.

Las capas de generalización de Radford (2001, 2010) se ponen de manifiesto en este trabajo desde la categoría E0. En la categoría E0, se incluyen rasgos de la generalización aritmética: el estudiante determina una característica común en una cantidad limitada de elementos y recurre a procesos aritméticos de sumas repetidas o de conteo para caracterizar la forma de los elementos. En cuanto a las capas de generalización algebraica, la factual está relacionada con la generalización numérica N1 y N2, los estudiantes identifican un patrón pero se hace uso de operaciones siempre con números concretos. La generalización contextual está vinculada con la generalización verbal V, en la cual los estudiantes relejan un reconocimiento del comportamiento de patrón y hacen uso de expresiones de indeterminación verbales. Posteriormente la generalización simbólica está matizada en este trabajo en la categoría S mediante el uso expresiones escritas de indeterminación cuando son introducidas al estudiante letras que representan lo indeterminado.

Las categorías de Blanton et al. (2015) a pesar de que no están correspondidas de una forma estricta con las aquí propuestas, son consideradas en términos de la manifestación de reconocimiento de la relación funcional implícita en la tarea como, se aprecia en la figura 1. Respecto a la relación de los niveles de generalización con la forma en que se reconoce la relación funcional, se ha considerado por ejemplo si los estudiantes hacen un reconocimiento de un patrón por medio de la recursividad como se podría percibir en la categoría E0 y sin trascender a casos siguientes, o bien si se reconoce una relación entre dos cantidades que varían, como se observa de diferente forma desde el nivel N1 hasta el S.

#### *Estímulos efectuados al estudiante*

En el segundo objetivo específico de este trabajo se plantea analizar cómo influyen los estímulos de la entrevistadora en el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes de primaria. Por esta razón es que dentro del análisis de los datos son



considerados dichos estímulos. Los estímulos efectuados no son descritos a nivel sintáctico, sino de intención; puede que una expresión o acción se use con dos intenciones completamente diferentes. A continuación, para cada uno de los estímulos que distinguimos se brinda la descripción así como un ejemplo de intervención de la entrevistadora en la que estos se ven involucrados.

- De confianza (I1): este estímulo se orienta a generar una atmósfera de tranquilidad para el estudiante para que trabaje de modo más sereno. Su propósito es crear un espacio ameno de conversación, se relaciona con la actividad de motivar y alentar al estudiante. Algunas expresiones que son utilizadas son por ejemplo: “tú tienes tiempo”, “no te preocupes” y otras.

En el siguiente extracto se muestra una intervención de la entrevistadora donde se lleva a cabo este tipo de estímulo I1 para transmitir tranquilidad.

*E. Entonces si lo dejas 10 horas, ¿cuánto te cobran por 10 horas?*

*A4. Ah, entonces por 10 horas me cobran 10.*

*E. Piénsalo, tú tienes tiempo, tú no contestes rápido, podemos pensar [I1]*

*A4. El resultado es 12, porque al principio nos anotan 2 euros y luego anotan 1 euro, pues serían 12, porque  $10+2$  son 12.*

- De reafirmación (I2): en este caso la entrevistadora afirma sobre el proceso que el estudiante lleva a cabo y en ocasiones solicita también una explicación sobre el procedimiento efectuado. Algunos estímulos de este tipo son: “muy bien”, “entiendo”, “¿cómo lo has hecho?”. Es posible que la respuesta del estudiante no sea correcta pero se busca que continúe razonando sobre la tarea o explique su razonamiento.

En el siguiente fragmento se muestra el estímulo de reafirmación mediante el cual se confirma al estudiante el resultado para que continúe.

*E. Exactamente, son 20 horas que dejas el coche en el parking. ¿Cuánto tendrías que pagar A1?*

*A. Pues 20, si cada hora tienes que pagar, pues, y tenemos 20 euros, pues 20 euros más los 2 que tenemos que pagar para entrar, 22, 22 euros.*

*E. Vale, muy bien. Muy bien, a ti no te engañan fácilmente. [I2]*

- De corrección (I3): se pretende que el estudiante identifique un error que ha cometido y lo corrija. Por ejemplo se interviene con expresiones como “¿estás seguro?”. Cuando el docente interviene para correcciones se fomenta la duda, también se mantiene la conversación cuando se solicita confirmación al estudiante sobre sus resultados buscando que reconozca el error en que está incurriendo.

En el siguiente segmento de entrevista al estudiante A1 la entrevistadora realiza una observación que le permite al estudiante encontrar un error y corregirlo.

*E. Sino imagínate que vamos a dejar el coche allí toda la noche si luego cierran el parking.*

*A1. [Anota] ya está.*

*E. Sabes, estoy pensando una cosa, hay algo que no entiendo bien.*

*Tú has puesto que una hora cuesta un euro, pero en realidad si pasa una hora ¿cuánto tendría que pagar? [I3]*

*A1.3 euros*

- De cambio de intención (I4): con el propósito de guiar y contribuir al estudiante en su progreso o bien obtener respuestas diferentes a las que ha obtenido, la entrevistadora cambia la intención de las interrogantes o intervenciones que ha hecho, razón por la cual parafrasea, replantea sus observaciones o preguntas y reorienta el proceso de obtención de información.

En la entrevista al estudiante A6 en un determinado momento se introduce la letra  $X$  que representa una cantidad indeterminada de horas que pasa el coche en el parking, para que el estudiante explique el modo en que utilizaría la letra. Este lo hace de forma verbal y dando ejemplos específicos, sin embargo, la entrevistadora hace un cambio de intención orientado a que el estudiante ahora explique de forma simbólica la forma en que se utiliza la letra, de este modo le pregunta si tiene sentido la forma escrita  $X+2$  para representar el dinero que se debe pagar, y se obtiene lo siguiente

*E. Tú imagínate que no sabemos exactamente las horas que vamos a estar, pero te digo, imagínate que voy a estar  $x$  horas,  $x$  no sabemos qué número es. Sabemos que es un número pero no sabemos cuál es. ¿Cómo puedo yo saber los euros que voy a pagar en el parking?, si yo tengo  $x$  horas.*

A6. *Pues que si tú tienes  $x$  horas pues le añades 2, todas las horas que estés le añades 2. Por ejemplo si estás 10 horas pues el añades 2 y si son 3 le añades 2. [en este momento escribe un 2 en el espacio]*

E. *¿Y eso lo podríamos poner así?, si yo te pongo cuántos euros van a ser, si yo te pongo esto  $x+2$  te parece que eso puede ser ¿o no?, ¿esto es distinto a lo que me estás diciendo? [I4]*

A6. *A ver, sí puede ser porque  $x$  es un número, el que sea, pues si le añades 2 tienes lo que tienes que pagar.*

E. *¿Y se podría escribir así?, como  $x+2$ .*

A6. *Sí.*

- De repetición de información (I5): en estos casos la entrevistadora repite datos que se han utilizado anteriormente con respecto a la información de la tarea o resultados previamente determinados. En este caso usa expresiones del tipo “recuerda que”.

En el ejemplo que se presenta, la entrevistadora de una u otra forma retoma información que anteriormente ha comunicado al estudiante para que la utilice en su razonamiento.

E. *Y ahora imagínate que no sabemos exactamente el número de horas. En número vamos a poner “cualquiera de horas”, ¿cómo calcularías tú el número de euros que tendrías que pagar?*

A3. *No sé.*

E. *Aquí es un número cualquiera, el que sea, ¿cómo calcularías el número de euros? [I5]*

A3. *¿No tengo el tiempo ahí? [inaudible]*

E. *Sí, pero el problema es que no sabemos el número de horas que lo dejamos. [I5]*

A3. *Pues el tiempo que te cuenta.*

- De sugerencia de procesos (I6): se insinúa al estudiante que puede llevar a cabo un proceso o procedimiento para determinar la respuesta deseada. Puede aludirse a procedimientos que el estudiante ya ha realizado antes. Se fomenta la discusión y la

obtención de información. Algunas intervenciones son realizadas en términos de “¿cómo harías esto?” o “¿qué operación realizarías?”

En el segmento siguiente se induce al estudiante a razonar sobre el procedimiento que ha estado llevando a cabo y de este modo explicar y examinar su estrategia.

*E. Vale. Yo te voy a escribir aquí una cosa.*

*Imagínate que no sabemos exactamente el número de horas que dejamos el coche en el parking, lo voy a poner así “número de horas”, el que sea.*

*¿Cómo estás calculando siempre lo que tienes que pagar? [I6]*

*A2. Porque por ejemplo 50, uno cada uno, así llegamos a 50, entonces 50 euros más 2 que he tenido que entrar al parking pues me dan 52.*

*E. ¿Y tú me lo sabrías explicar en general?, ¿Cómo lo haces sin tener que decirme 50, 100?, sin los números. [I6]*

- De aclaración (I7): la entrevistadora aclara al estudiante las intervenciones que hace o la nueva información que introduce en el transcurso de la entrevista.

Al estudiante A8 se le efectúa un estímulo de aclaración cuando son introducidas en la tarea las letras que representan lo indeterminado, la entrevistadora le explica la forma en que las letras son utilizadas

*A8. Que como la x en números romanos es 10, entonces serían 12.*

*E. Ah, vale, explícamelo aquí. Ahora te voy a poner una que no sepas qué significa en números romanos.*

*A8. “como x horas en números romanos es 10 entonces serían 12€”. [la estudiante escribe y luego lo lee en voz alta]*

*E. Y si tenemos Z horas [escribe “Z horas”], no sabemos el número que es, puede ser cualquier número, puede ser 5, 20, 20, 500 millones, 400, lo que sea. Yo lo que quiero que me expliques es si sabes que hay Z, ¿cómo calcularías lo que tienes que pagar? [I7]*

*A8. Pues el número que sea Z más 2. [Escribe “el número que sea Z más 2”]*

En la categorización de estímulos aquí descrita se ha hecho una reinterpretación de los aportes de Soller (2001), hacia acciones que lleva a cabo la entrevistadora durante el desarrollo de la resolución de la tarea por parte del estudiante, con el fin de ayudarlo en el proceso y a la vez evidenciar los niveles de generalización que pueden manifestar. Las características de interacción que Soller (2001) propone han inspirado la definición de los estímulos que se presentan, sin embargo, no están relacionadas de forma estricta con los estímulos propuestos.

En cuanto al vínculo del aporte de la autora, señalado en el marco teórico, y los estímulos propuestos, el estímulo I1 está asociado con las actividades de motivar, mediada por la acción de animar; I2 se relaciona con acciones como reforzar, animar, afirmar, confirmar, estar de acuerdo y a la vez, solicitar argumentaciones, justificaciones o explicaciones; I3 se vincula con el hecho de dudar o bien solicitar aclaraciones o justificaciones; I4 se asocia a las prácticas de parafrasear, sugerir, cambiar el énfasis que se ha dado; I5 se vincula con la actividad de resumir la información; I6 concierne a actuaciones como sugerir, ofrecer alternativas y sugerir acciones; por último I7 se liga con procesos como clarificar o explicar.

En la figura 2 se muestra en resumen la interacción entre los diferentes elementos considerados en el análisis de la información recogida. Los datos recolectados son analizados y puestos en contraste, esto es describiendo los niveles de generalización que los estudiantes alcanzan conforme a una la trayectoria de generalización y según la influencia de estímulos efectuados al estudiante por la entrevistadora, se puede apreciar una doble dirección en los estímulos, esto porque mediante los mismos se asciende y desciende en los niveles de generalización para lograr otros o bien retomar los ya manifestados.

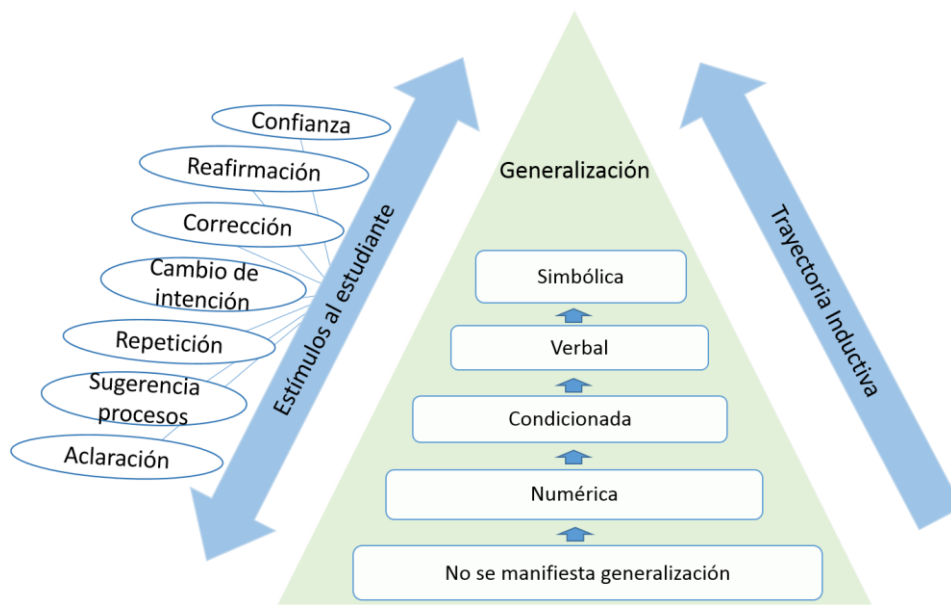


Figura 2. Manifestación de generalización

## Capítulo 4. Análisis de los datos y resultados

En este capítulo se describe el análisis de los datos recabados en las entrevistas y se presentan los resultados que de este se desprenden. Se estructura en tres partes: (a) el análisis individual de cada una de las entrevistas a los estudiantes, describiendo el recorrido efectuado por cada uno en el proceso de generalización así como la influencia de los estímulos efectuados por la entrevistadora en la manifestación de los diferentes niveles; (b) una síntesis de los hallazgos más importantes que se aprecian respecto a los niveles de generalización que manifestaron los estudiantes durante la resolución de la tarea, así como de (c) la influencia de los estímulos de la entrevistadora en la manifestación de los niveles de generalización.

### Análisis individual de cada entrevista

Para presentar y describir el análisis de los datos correspondientes a cada uno de los estudiantes, sintetizamos dicho análisis en una tabla en la que se detalla cómo se ha codificado su actuación según las categorías de generalización y los estímulos efectuados para facilitar al estudiante moverse entre los niveles de generalización. Después de cada tabla se hace una descripción de los niveles de generalización que manifiesta el estudiante considerando a la vez los estímulos que realiza la entrevistadora.

La simbología utilizada en las tablas y su respectivo significado se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1

#### *Simbología y abreviaturas empleadas en las tablas para el análisis de los datos*

Símbolo	Significado
■	El estudiante evidencia un nivel de generalización esperado al ser planteada la pregunta
□	El estudiante manifiesta un nivel de generalización no esperado de acuerdo a la pregunta planteada
○	Estímulo efectuado por la entrevistadora
△	El estudiante incurre en errores
◇	El estudiante no responde
◊	El estudiante brinda una respuesta no matemática en el contexto de la tarea

Símbolo	Significado
E0	No hay generalización
N1	Generalización numérica con números pequeños
N2	Generalización numérica con números grandes
C	Generalización condicionada
V	Generalización verbal
I1	Estímulo de confianza
I2	Estímulo de reafirmación
I3	Estímulo de corrección
I4	Estímulo de cambio de intención
I5	Estímulo de repetición de información
I6	Estímulo de sugerencia de procesos
I7	Estímulo de aclaración

Para explicar cómo se interpreta la información que contienen las tablas, se utiliza a continuación la Tabla 6 correspondiente a la estudiante A5 como referente. La información brindada en las tablas se lee de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Por ejemplo en la Tabla 6, en la segunda ocasión en que aparece la pregunta 9, se lee que la estudiante manifiesta los niveles de generalización en el siguiente orden: V, C, V, N1 y N2.

La continuidad de las líneas que unen los estímulos en las manifestaciones de generalización significa que el proceso ha transcurrido sin la necesidad de que la entrevistadora plantee explícitamente la siguiente pregunta, esto se observa por ejemplo en la segunda vez que aparece la pregunta 9, donde hay una transición hacia las preguntas 1-7 por medio de un estímulo I4 y no por el planteamiento explícito de las preguntas originales de la entrevista. Luego, cuando se plantean por primera vez las preguntas 1-5 y luego 6-7 se aprecia que no hay continuidad de la línea entre los bloques de preguntas, esto implica que las mismas fueron planteadas de forma directa.



Tabla 6  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A5*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○I2 ○I1 ○I2				
6-7			■		○I2-16	
8						◊
9						◊
6-7			○I4 ○I2			
9					○I5 ◊ ○I4-16 □	
1-7		○I4 ■	■	□	○I4 □	
9						◊

Por otro lado, el primer estímulo de una columna que se encuentre ligado por una línea en diagonal promueve una movilización entre niveles de generalización. Al considerarse la tabla anterior, esto se observa cuando se plantean las preguntas 6-7, la estudiante pasa del nivel N2 al V por medio de los estímulos I2-I6, luego en el segundo planteamiento de la pregunta 9, se observa que una línea diagonal une el cuadro blanco ubicado en la columna C con un círculo I4 ubicado en la columna V, esto significa que el estímulo I4 permitió una movilización entre el nivel C y V, de igual forma se aprecia en esa misma pregunta la existencia de una línea en diagonal que une el cuadro blanco de la columna V con el círculo I4 de la columna N1 que significa que el estímulo I4 promovió una movilización del nivel V al N1.

En las tablas se muestra el orden en que las preguntas fueron efectuadas las cuales en algunos casos aparecen repetidas ya que se plantearon más de una vez.

Si hay simbología de estímulos (círculos con el nombre de los estímulos) en alguna columna implica que un nivel de generalización se ha dado como respuesta a los estímulos

que la entrevistadora ha efectuado. Excepto en la tabla del estudiante A4 a quien a pesar de los estímulos manifiesta algunos errores y no alcanza el nivel de generalización de forma inmediata a las secuencias de estímulos, en este caso los estímulos permiten observar la dinámica de interacción y el movimiento entre niveles de generalización.

En la Tabla 6 se deduce que la estudiante manifiesta los niveles N1 y N2 sin la influencia de estímulos y de forma congruente con las preguntas planteadas. En las preguntas 1-5, la estudiante manifiesta el nivel N1 y cuando se plantean los estímulos I1 e I2 se reafirma este nivel, de forma similar ocurre en las preguntas 6-7 en las cuales el estudiante manifiesta primero el nivel N2 y tras la ejecución de los estímulos I2-I6, evidencia el nivel V. En la segunda ocasión en que se plantean las preguntas 6-7 la estudiante manifiesta el nivel de generalización N2 una vez que se ha realizado el estímulo I4 y luego se reafirma la respuesta de la estudiante por medio de un estímulo I2. En el segundo momento en que se hace la pregunta 9, en la manifestación del nivel V se hace un estímulo I5 y aunque la estudiante no brinda una respuesta matemática, la entrevistadora efectúa los estímulos I4-I6 y la estudiante evidencia el nivel V y C. Posteriormente manifiesta otra vez el nivel de generalización V por medio del estímulo I4 y finalmente hay un paso el nivel N1 y N2 por medio de un estímulo I4.

En caso de que en alguna columna no haya información se deduce que ese nivel de generalización no fue manifestado por el estudiante, así mismo si en alguna columna el único estímulo presente es I2 implica que las respuestas que brinda el estudiante son correctas y en consecuencia se reafirman los resultados por parte de la entrevistadora.

El orden en que son colocados los estímulos en las celdas está relacionado con el orden en que se efectuaron. Los estímulos que están separados por un guion se llevaron a cabo de forma simultánea.

Por último, en caso de que se manifieste un mismo nivel de generalización para diferentes estímulos en una misma pregunta, estos están agrupados y separados por un espacio dentro de la misma celda de la tabla, esto significa que por ejemplo en la columna N1 de la Tabla 6 cuando se hacen las preguntas 1-5 por primera vez, el agrupamiento de los estímulos I1, I2 y su separación del I2, significa que la estudiante manifiesta la generalización después de los primeros estímulos y posteriormente se hace un estímulo I2 de reafirmación.

*Estudiante A1*

A continuación se presenta la Tabla 2 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A1.

Tabla 2  
*Manifestación de generalizaciones por el estudiante A1*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○I2				
6-7			■ ○I2			
8				○I4 ○I3 ○I2		
9				□ ○I5 ○I6 □	○I6 ○I7 □	
1-5		○I3 ○I2				
6-7			■			

En la Tabla 2 se aprecia que los niveles N1 y N2 son manifestados de forma directa cuando se responde a las preguntas planteadas y sin la acción de estímulos. También el estudiante manifiesta el nivel C sin la influencia de estímulos pero en la pregunta 9 que invita a usar simbología algebraica para expresar la relación funcional.

Después de que el estudiante manifiesta el nivel N2 en las preguntas 6-7, un estímulo I4 permite al estudiante hacer una transición hacia el nivel C para que junto con la influencia de los estímulos I3 e I2 manifieste ese nivel de generalización. Ante el planteamiento de la pregunta 9, el estudiante evidencia el nivel C, luego tras los estímulos I5, I6 lo manifiesta una vez más para pasar al nivel V por la influencia de los estímulos I6 e I7. Al final de la entrevista se vuelven a plantear las primeras preguntas de la entrevista y aunque el estudiante se equivoca, luego de que se efectúa un estímulo I3, manifiesta el nivel N1 y se reafirma su

respuesta por medio de I2; para las preguntas 6-7 que se plantean al cierre, el estudiante manifiesta el nivel N2 sin la influencia de estímulos.

*Estudiante A2*

A continuación se presenta la Tabla 3 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A2.

Tabla 3  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A2*

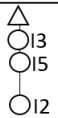


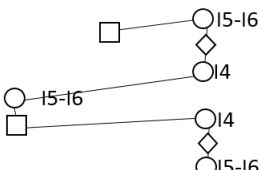
Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○I2				
6-7			■ ○I6			
8				■ ○I6		
9		□ ○I6 □				○I2-I4-I5-I6 □

Para la estudiante A2 los niveles N1, N2 y C son manifestados al plantearse las preguntas correspondientes y sin que los estímulos fueran llevados a cabo, el nivel N1 se manifiesta sin estímulo nuevamente pero cuando se plantea la pregunta 9. En los niveles N2 y C, tras la ejecución del estímulo I6 consolidan las ideas de la estudiante. Por último en la pregunta 9, el estudiante primero manifiesta un nivel N1 y aunque se efectúa un estímulo I6 vuelve a manifestar el mismo nivel, luego por medio de los estímulos simultáneos I2-I4-I5-I6 la estudiante llega a manifestar el nivel C.

*Estudiante A3*

A continuación se presenta la Tabla 4 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A3.

Tabla 4  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A3*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5						
6-7						
8						
9						

La estudiante A3 manifiesta el nivel N2 de forma directa cuando se plantean las preguntas respectivas y sin la influencia de estímulos. También manifiesta el nivel V sin la influencia de estímulos pero cuando es planteada la pregunta 9 que involucra el uso de simbología algebraica.

El nivel N1 es manifestado una vez que la entrevistadora efectúa los estímulos I3, I5, de igual modo el nivel V se evidencia cuando la entrevistadora plantea la pregunta 8 pero de acuerdo a los estímulos I5, I6. Finalmente en la pregunta 9, el nivel V se manifiesta inicialmente y tras la ejecución de los estímulos I5-I6 y luego I4, la estudiante llega a manifestar el nivel S, en seguida por medio de los estímulos I5-I6 la estudiante manifiesta también el nivel C y por medio de los estímulos I4 y luego I5-I6 nuevamente manifiesta el nivel de generalización simbólica.

Estudiante A4

A continuación se presenta la Tabla 5 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A4.

Tabla 5  
*Manifestación de generalizaciones por el estudiante A4*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5	△ ○13-15 △ ○13-11 ○13 ○15 △ ○13 △	○14 △ ○11 ○12				
6-7	△ ○13 △ ○11-16 ○13 △ ○12 □ ○14 □ ○16 □				○15 ○14 ○12	
8					■	
9	○15-16 ◇ ○16 □					

El estudiante A4 llega a manifestar el nivel de generalización V en correspondencia con la pregunta 8 y sin la influencia de estímulos.

Cuando la entrevistadora plantea las primeras preguntas de la entrevista, y ante las respuestas del estudiante ubicadas en un nivel E0, le efectúa una serie de estímulos sin que él brinde respuestas correctas, luego un estímulo I4 permite una transición en la que el estudiante manifiesta indicios de generalización N1 que son reforzados por los estímulos I1

e I2, posteriormente ante otras intervenciones de la entrevistadora, el estudiante responde de forma incorrecta pero el estímulo I6 facilita mostrar indicios del nivel E0.

Cuando son planteadas las preguntas 6-7 pasa lo mismo que ocurrió antes, el estudiante comete una serie de errores y la entrevistadora efectúa una secuencia de estímulos sin resultados relacionados con manifestaciones de niveles de generalización. El estímulo I5 permite que el estudiante muestre indicios de generalización N2 y luego por medio de los estímulos I2, I4 e I6 se manifiesta el nivel E0. Una nueva transición al nivel N2 se da por el estímulo I4.

Ante el planteamiento de la pregunta 9 el nivel de generalización que el estudiante manifiesta es el E0.

*Estudiante A5*

A continuación se presenta la Tabla 6 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A5.

Tabla 6  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A5*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○I2 ○I1 ○I2				
6-7			■		○I2-16	
8						◡
9						◡
6-7			○I4 ○I2			
9					○I5 ◡ ○I4-16 □	
1-7		○I4 ■	■	□	○I4 □	
9						◡

Los niveles de generalización que la estudiante A5 manifiesta de acuerdo a las preguntas planteadas y sin la mediación de estímulos por parte de la entrevistadora son N1 y N2.

Tras plantearse las preguntas 1-5 la estudiante manifiesta el nivel N1 y cuando se le efectúan los estímulos I2, I1, refuerza este nivel. Tras el planteamiento de las preguntas 6-7, la estudiante primero manifiesta el nivel N2, luego por medio de los estímulos I2-I6 manifiesta indicios de una generalización verbal. En la primera ocasión que se plantean las preguntas 8 y 9 no se obtienen respuestas matemáticas satisfactorias por parte de la estudiante por lo que se vuelven a plantear las preguntas 6-7 en un cambio de intención I4 y manifiesta el nivel N2. En el segundo momento en que se realiza la pregunta 9 a la estudiante se observa cómo se mueve entre diferentes niveles de generalización a causa de estímulos: por medio del estímulo I5 así como I4 e I6 manifiesta el nivel V, con los estímulos I4-I6 se manifiesta este nivel así como el C, dentro de la misma pregunta el estímulo I4 permite que la alumna manifieste una vez más el nivel V y luego por medio del mismo estímulo se manifiestan también los niveles N1 y N2. A pesar de que la pregunta 9 se plantea una última vez, la respuesta de la estudiante se sigue saliendo del contexto matemático de la tarea.

#### Estudiante A6

A continuación se presenta la Tabla 7 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A6.

Tabla 7  
*Manifestación de generalizaciones por el estudiante A6*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○I2				
6-7			■ ○I2 ○I6			
8					○I6 — ○I4-I6	
9				□ — □ — ○I4	○I5	



En la Tabla 7 se observa que el estudiante A6 manifiesta los niveles N1 y N2 sin influencia de estímulos en concordancia con las preguntas planteadas. Luego, los niveles C y V también son manifestados sin estímulos de por medio, pero en la pregunta 9 que introduce la simbología algebraica.

Los niveles N1 y N2 son reforzados por medio de estímulos como I2 o I6 una vez que el estudiante los manifiesta. Cuando se plantea la pregunta 8, el nivel C es evidenciado por medio del estímulo I6 y posteriormente se da una manifestación del nivel V como consecuencia de los estímulos I4-I6. En la pregunta 9 el estudiante manifiesta los niveles C y V en el momento en que se plantea la pregunta y tras la realización del estímulo I4, manifiesta el nivel de generalización S.

*Estudiante A7*

A continuación se presenta la Tabla 8 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A7.

Tabla 8  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A7*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		■ ○ <sub>I2</sub>				
6-7			■			
8					○ <sub>I6</sub> ○ <sub>I2</sub>	
9						■ ○ <sub>I6</sub> ○ <sub>I5</sub> ○ <sub>I6</sub>

La estudiante A7 manifiesta sin la influencia de estímulos, los niveles de generalización N1, N2 y S.

El estímulo I2 efectuado en las preguntas 1-5 se lleva a cabo para reafirmar lo hecho por la estudiante. El nivel V es manifestado cuando se plantea la pregunta 8 considerando el estímulo I6 efectuado, y luego el I2 que refuerza las respuestas de la estudiante. Cuando se

propone la pregunta 9, la estudiante manifiesta indicios del nivel S, luego los estímulos I6, I5 contribuyen a que la estudiante manifieste y refuerce sus aportes asociados a ese nivel de generalización.

*Estudiante A8*

A continuación se presenta la Tabla 9 en la que sintetizamos el análisis realizado de la entrevista al estudiante A8.

Tabla 9  
*Manifestación de generalizaciones por la estudiante A8*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5		△ ○I3-15 ○I2				
6-7			■ ○I6			
8					○I6 ← ■	
9		○I1-15 □				○I4 ○I6

Los niveles N2 y V son manifestados por la estudiante A8 sin que los estímulos de la entrevistadora hayan mediado en la manifestación.

Al iniciarse la entrevista, ante el planteamiento de las preguntas 1-5 la estudiante incurre en errores pero una vez que se efectúan los estímulos I3-I5 la estudiante manifiesta el nivel N1. En las preguntas 6-7 es manifestado el nivel N2 que es afianzado por medio del estímulo I6. En las respuestas a la pregunta 8 la estudiante muestra evidencias primero de la generalización V y luego de C, después de la ejecución del estímulo I6. En la última pregunta de la entrevista, la estudiante primero manifiesta el nivel N1 una vez que son efectuados los estímulos I1-I5 y luego se da una transición a la generalización S después de que se lleva a cabo el estímulo I4.

Sintetizando los resultados anteriores, se presenta a continuación una tabla que contiene el número de estudiantes que manifiestan cada nivel de generalización en cada pregunta sin la influencia de estímulos así como el total de los que manifiestan dicho nivel de generalización.

Tabla 10  
*Número de estudiantes que manifiestan generalización*

Preguntas	Nivel de generalización					
	E0	N1	N2	C	V	S
1-5	0(1)	5(8)				
6-7	0(1)		7(8)		0(1)	
8				1(4)	2(5)	
9	0(1)	2(3)	1(1)	3(5)	2(4)	1(4)

*Nota:* las casillas sombreadas relacionan el posible nivel de generalización esperado de acuerdo a las preguntas de la entrevista. En las casillas, el número que está fuera del paréntesis se asocia a la cantidad de estudiantes que manifiestan el nivel de generalización sin estímulo y el número entre paréntesis se asocia al total de alumnos que manifiesta el nivel de generalización.

En la Tabla 10 se aprecia en términos numéricos la influencia de los estímulos al estudiante en sus manifestaciones de generalización. Por ejemplo, se aprecia que tres estudiantes requirieron de estímulos para manifestar el nivel N1 durante las primeras preguntas de la entrevista. El nivel N2 es manifestado casi por el total de los estudiantes sin la influencia de estímulos. Con respecto a los niveles C y V, en la pregunta ocho se observa que los estímulos contribuyeron a que aumentara el total de estudiantes que manifiestan los niveles. Por otro lado, de los estudiantes que manifiestan el nivel S en la última pregunta de la entrevista, la mayoría lo hace mediada por estímulos. Por último cabe destacar que en la pregunta nueve se manifiestan todos los niveles de generalización, no solo el esperado.

A continuación, en correspondencia con las tablas anteriores, se hace una descripción de los principales resultados obtenidos en la investigación.

### Niveles de generalización

Para cada uno de los niveles de generalización se detallan a continuación, los hallazgos más significativos tanto en términos de la generalización y la forma en que los estudiantes la manifiestan como con respecto a la influencia de los estímulos de la

entrevistadora en tales manifestaciones. También es considerada la organización de la entrevista en cuanto a las preguntas efectuadas y que están asociadas con los niveles.

*No hay generalización: E0*

Este nivel es evidenciado de forma explícita sólo por el estudiante A4 y está caracterizado por la constante manifestación de conteo y de sumas repetidas en el cálculo de los resultados. Utiliza resultados anteriores (no necesariamente consecutivos) para determinar nuevos, mediante una estrategia recursiva. El estudiante evidencia un mayor énfasis en obtener respuestas que en identificar una regularidad o estructura que le permita averiguar de forma eficiente los resultados de las preguntas conforme avanza.

Como en todos los casos, la entrevista se inicia con una contextualización del problema y planteándose las preguntas que contemplan números específicos, primero los pequeños y luego los grandes. Para ambos tipos de números, el estudiante A4 manifiesta casi siempre una estrategia aritmética de sumas repetidas. Al principio los errores cometidos se deben a que no determina o identifica la operación que debe llevar a cabo, sino que para obtener resultados involucra, en sumas o multiplicaciones, el número mencionado en la pregunta. Esto provoca que las respuestas sean erróneas. A pesar de los diferentes estímulos I3 de corrección e I1 de confianza para dar tranquilidad al estudiante, no hay un cambio de comportamiento.

Durante la primera etapa de la entrevista, tras un cambio de intención (estímulo I4) orientado a replantear preguntas previas para que el estudiante reconozca datos, manifiesta un nivel incipiente de generalización N1 en el que al número 10 de horas que han transcurrido, le suma 2 para obtener los euros que debe pagar. En el momento en que la entrevistadora propone determinar el monto a pagar para 30 horas, el estudiante brinda inicialmente una respuesta correcta, pero cuando justifica el resultado, cambia de idea, aspecto que hace dudar sobre la manifestación de la generalización numérica.

*E. 30, ahora imagínate entonces que vas a pasar casi un fin de semana entero allí en sierra, entonces dejarás el coche en el parking 30 horas. ¿Cuánto tendrías que pagar?*

*A4. Pues tendría que pagar 32.*

*E. ¿Cómo lo sabes? [I2]*

A4. Porque si 10 son 12, lo hago 3 más grande, le sumo 20 y son 24, lo sumo son 24, lo sumo 30, son 32, 36.

E. ¿32 o 36? [I3]

A4. 36

E. A ver, piénsalo y explícamelo otra vez, que es que me he liado un poco. [I3]  
Son 30 horas, ¿no?, lo que dejas el coche en el parking, entonces cómo lo has pensado [I6]

A4. Entonces son 32.

E. Vale.

A4. Porque cuando llegaste dan 2, tienes que pagar 2 euros y estás ahí 10 horas, te dan 12, más 10 horas, 22, más 10 horas, 32.

E. Vale, entiendo... [I2]

Cuando se plantea un estímulo I6 en el que se le pregunta por un método, el estudiante recapacita sobre los resultados y llega a una respuesta correcta por medio de sumas repetidas como se observa en el extracto anterior.

Al aumentarse el tamaño del número de horas en las preguntas 6-7, el estudiante determina el monto a pagar para 100 horas tras un estímulo I5 por medio del cual se le repite la información de la tarea y manifiesta un nivel N2, sin embargo, para otros números más grandes obtiene las respuestas correctas pero recurriendo a sumas e involucrando los resultados que ya ha determinado con anterioridad. Sigue un razonamiento recursivo pero sin evidenciar que reconoce la relación funcional implícita. Como ejemplo se muestra un trozo de la entrevista

E. ¿Sí?, tú crees que está bien, pues ponlo ahí, que no se nos pase ese dato que has dicho.

Ahora vamos a aumentar un poco más el número de horas. Supongamos que dejas el coche en el parking 120 horas, ¿Cuánto tendrás que pagar A4?

A4. Pues 122

E. ¿Por qué? [I2]

A4. Pues cada hora, lo que he dicho de que cada hora se dan uno, 100, llevo 100 y luego llevo 20 más los 2 que he mandado llevo 22, 122.

Uno de los errores asociados a la falta de reconocimiento de la operación de la relación funcional se observa en el siguiente fragmento en el que aprecia que el estudiante no es consciente de la operación que debe aplicar, hay cierto énfasis en obtener resultados.

*E. ... Y vamos a poner un número más grande A4, 100 horas.*

*A4. 100 horas, pues 115.*

*E. ¿Por qué? [I3]*

*A4. Porque si son 100 horas, 100 horas, eh, más 10, si son, si son, 100 horas, son ciento, 105.*

*E. Piénsalo, piénsalo bien, ¿cómo lo estás haciendo?, pero piénsalo con calma que no hay prisa. [I1-I6]*

*Si tienes que hacer alguna operación la puedes hacer en el folio o lo que sea. [I6]*

*A4. [El niño escribe] 100, 100, 53 horas son 55, 53 más 53 son 106 y si es más de 50.*

*E. ¿Por qué sumas 53 y 53 A4? [I3]*

*A4. Porque ya tengo los euros entonces **estoy intentando hacer el doble a ver si me sale**. Y entonces son 50 más 50 son 52, 52, 54, no sería más 54, 54 euros, serían, um, repítemelo.*

Cuando se reorientan las preguntas a números aún más grandes de horas, por ejemplo mil o un millón, el estudiante parece que llega a reconocer una relación entre la cantidad de horas que pasa el coche en el parking y la de euros por pagar.

Al final de la entrevista cuando se introduce la letra *N* de la pregunta 9, se da una situación en las respuestas del estudiante que permite comprender respuestas previas. Cuando se le pregunta al alumno sobre la forma de calcular el resultado con la letra, responde que se debe considerar la cifra y que sería “ene dos”. Cuando se avanza, se llega a entender que lo que quiere decir es que el resultado depende de la última cifra del número, esto es, que si el número termina en cero, entonces al sumarle 2, este terminaría en 2 y sería “N2”, si la suma termina en 3 sería “N3” y así sucesivamente. El alumno se centra en la posible forma del número asociado a *N*, habla en términos de las cifras del número, en donde en el caso en que las unidades estén comprendidas entre el 0 y el 7, al sumar 2 se conserva la misma cifra de

las decenas, de ahí las formas N1, N2, N3, N4, N5,... y N9. A partir de lo expuesto, se ha considerado que esto se encuentra en un nivel E0 de generalización en el cual hay un mayor detenimiento en el resultado, su forma y en operar, que en determinar una relación entre las cantidades que varían.

Incluso, con respecto a lo mencionado en el párrafo anterior, se considera que es un poco difícil determinar si el alumno manifestó una generalización numérica con números grandes ya que estos terminaban en cero y parece que era fácil operar así añadiendo un dos al final del número.

Por otro lado es importante recalcar que algunos de los estímulos I4 de cambio de intención consistieron en una reiteración de preguntas previas orientadas a que estudiante retomara datos que ya había determinado con anterioridad y así determinara relaciones que le permitieran avanzar.

#### *Numérica: N1 y N2*

La generalización numérica es evidenciada por todos los estudiantes al ser planteadas las primeras preguntas de la entrevista que involucran números específicos. La mayoría de los alumnos trabaja sin mayores dificultades, razón por la cual el principal estímulo que es llevado a cabo por la entrevistadora de las preguntas 1 a la 5, que involucran los números pequeños, es el I2, a través del cual se reafirman los resultados que los estudiantes obtienen y se les solicita argumentaciones que los refuercen y permitan a su vez comprender el razonamiento de los estudiantes. Este estímulo al mismo tiempo le imprime fluidez a la entrevista en la transición hacia otras preguntas.

Cuando son planteadas las primeras preguntas de la entrevista, las respuestas iniciales de la mayoría de los estudiantes son correctas (como muestra el cuadro negro en las tablas presentadas en el primer apartado de este capítulo). Con los estímulos que efectúa la entrevistadora, conforme se avanza en el trabajo con números específicos, los estudiantes muestran indicios de ir reconociendo la relación funcional implícita en la tarea, esto se aprecia por ejemplo en el siguiente fragmento.

*E. Ah. Ahora imagínate que vas pero vas a estar un rato más, vas a estar 5 horas, ¿cuánto tendrías que pagar?, bueno tú no, pagarán tus padres, ¿no?*

*A2. Sí.*

*E. Mejor. ¿Cuánto tendrían que pagar?*

*A2. 7*

*E. ¿7?, ¿Por qué? [I2]*

*A2. Pues lo mismo, las 5 horas, porque las 5 horas un euro, entonces serían un euro cada una y me da 5 más las 2 que para al entrar. 7.*

Reforzando la idea anterior, cuando son planteadas las preguntas 6-7 a la estudiante A5, y se cuestiona sobre la cantidad de euros que se pagan cuando han transcurrido 120 horas, ella responde rápidamente lo siguiente

*E. 22. Y si, imagínate que en vez de 2 días, eh, vais a pasar un puente son cinco días, un puente de cinco días de los que son largos, largos, largos y son ¿cuántas horas más o menos?, pues más o menos unas 120 horas. ¿Cuánto tendrías que pagar? Esas son muchas horas ya.*

*A5. 122.*

*E. Vale, vale, ¿por qué? [I2]*

*A5. Porque mira.*

*E. ¿Cómo lo estás haciendo siempre A5? [I6]*

Se aprecia una manifestación del nivel N2, en la que la estudiante A5 ha reconocido la relación funcional en la tarea cuando trabaja con números específicos. Luego por medio de un estímulo I6, mediante el que se pregunta por la forma en que hace los cálculos, la estudiante expone con sus propias palabras la operación que se realiza para la obtención de los resultados, mostrando al mismo tiempo un indicio de manifestación verbal que se explicita en el siguiente apartado.

En el trabajo con números específicos grandes el estímulo I6 de sugerencia de procesos le permite a los estudiantes explicar su razonamiento, afianzarlo e ir asumiendo una postura, ya que se les cuestiona sobre el procedimiento que están llevando o que llevarían a cabo, o bien se les motiva a organizar las ideas para que definan lo que podrían hacer.

En algunos casos el nivel de generalización numérica no solo se manifiesta al inicio de la entrevista, debido a que la entrevistadora plantea más de una vez las preguntas que involucran números específicos para retomar resultados previos y que sirvan al estudiante de orientación para establecer conexiones entre los datos anteriores y los nuevos. Esto se



observa por ejemplo con la estudiante A5 a quien al plantearse por segunda vez la pregunta 9 que está relacionada con la generalización simbólica, manifiesta generalización verbal y condicionada y luego cuando es generado un estímulo de cambio de intención I4 manifiesta una generalización numérica. El cambio de intención se da involucrando números específicos en la actividad de elaboración de un cartel (Figura 3) que explique el funcionamiento del parking, y posteriormente de una tabla, con la intención de que la estudiante relacione los resultados involucrando simbología algebraica. En dicha tabla A5 coloca ejemplos numéricos por indicación de la entrevistadora, y evidencia la relación “número de horas + 2” la cual va exponiendo según la entrevistadora le pregunta cómo ha determinado los resultados para los números que va diciendo. Por ejemplo en el caso del 3 ella dice que se obtiene al efectuar la suma “1+2” y que si el resultado de euros es 10 se debe a la suma “8+2”. En ese proceso de avance y retroceso, la estudiante da respuestas correctas y evidencia una identificación de la relación funcional, sin embargo, no concluye matemáticamente para el caso general en el que se involucra simbología algebraica, a pesar de los estímulos.

Por otro lado, se presentaron también casos en los que durante la entrevista se plantearon a los estudiantes preguntas que no involucraban números específicos y, sin embargo, primero manifiestan una generalización numérica. Al estudiante A2 cuando se le plantea la pregunta nueve primero manifiesta una generalización numérica en la cual a la letra *N* le asigna el número 13 por su posición en el abecedario y posteriormente mediante otros estímulos pasa a la generalización condicionada. Por otra parte, cuando se le plantea la pregunta nueve en la que se involucra la letra *X* que representa las horas que pasa el coche en el parking al estudiante A8, expresa “como *x* horas en números romanos es 10 entonces serían 12€”. Es decir, la estudiante asigna un número a la letra, pero tras la realización de estímulos de cambio de intención la estudiante manifiesta una generalización simbólica como se mostrará en el apartado correspondiente.

Otro hecho que se dio fue que en algunos casos cuando se le pregunta a los estudiantes sobre la cantidad de euros por pagar dado un número específico de horas en el parking, cometen algún error al inicio. Esto le ocurre a los estudiantes A3 y A8, sin embargo, después de un estímulo, generalmente I3 de corrección, no se vuelven a equivocar, a excepción del estudiante A4 a quien se le hace una mayor inversión de estímulos dada la cantidad de errores que comete.

*Condicionada y Verbal: C y V*

Los niveles de generalización condicionada y verbal son detallados de forma conjunta ya que son manifestados por la mayoría de los estudiantes al ser planteada la pregunta ocho de la entrevista. En algunos casos los estudiantes sólo manifiestan uno de los niveles, en otros los dos o bien, tras la realización estímulos, se pasa de un nivel al otro.

Uno de los alumnos que muestra indicios de manifestación verbal en preguntas previas es A5, a quien en el momento de explicar la cantidad de euros a pagar cuando han transcurrido 120 horas, en las preguntas 6-7, recurre a una explicación en la que se nota una generalización verbal como se aprecia en el siguiente extracto.

*A5. 122.*

*E. Vale, vale, ¿por qué? [I2]*

*A5. Porque mira.*

*E. ¿Cómo lo estás haciendo siempre A5? [I6]*

*A5. Porque cuando entra, tú me has dicho que cuando entro en el parking tienes que pagar 2 euros y después cuando pasa una hora tiene que pagar otro euro y otro euro y otro euro y si **cada número que pasa le sumamos los 2 euros**, le sumamos los 2 euros que ha utilizado al cruzar a la playa, digo a la valla y se suma y ya tienes los euros que tienes que pagar. Bueno, que has pagado y que tienes que pagar.*

Una vez que se han planteado las preguntas que involucran números específicos, la entrevistadora introduce la octava pregunta de cómo determinar los euros a pagar si no se sabe cuántas horas han pasado o bien cómo calcular la cantidad de euros que se pagan para “una cantidad cualquiera de horas” que ha estado el coche en el parking. El cuestionamiento es realizado de formas diferentes según el ritmo de resolución de cada estudiante y la facilidad de repuesta que tiene.

Una de las actividades de cambio de intención (estímulo I4 como se aprecia en la Tabla 2 del estudiante A1), introducida como transición entre el trabajo con números específicos y una cantidad indeterminada de horas, es la elaboración de un cartel que permita comprender el funcionamiento del parking, de modo que se induce al estudiante a utilizar una explicación más general con respecto a lo que ha trabajado anteriormente. Esta actividad es planteada a los estudiantes A1 y A5. El primer estudiante recurre a casos particulares para

explicar su postura de modo que expresa una generalización condicionada. Incluso cuando se le plantea al estudiante la opción de explicar el funcionamiento del parking si una letra representa las horas que han transcurrido, nuevamente la respuesta es condicionada y no simbólica como se muestra en el siguiente extracto:

*E. Si yo quiero poner ahí algo. Imagínate que no sabemos las horas que vamos a dejar el coche en el parking. Son muchas y vamos a poner  $N$ , le vamos a llamar  $N$  el número de horas, ¿cómo calcularías los euros que tienes que pagar para  $N$  horas?*

*A1. ¿ $N$  qué número es?*

*Pues no sé, si son 30 horas tienes que pagar lo que te diga el parking.*

*E. Y si por ejemplo ponemos aquí así “son  $N$  horas”, ¿cómo sabrías lo que tienes que pagar? [I5]*

*A1. Igual, las horas que te quedas.*

*E. Igual... Le vamos a llamar a esto número de horas, ¿cómo calcularías el número de euros? [I6]*

*A1. Pues una hora un euro entonces sumando, sumando, sumando y luego 2 de entrada y si estaba 30 horas, pues, pues 32.*

Cuando se plantea la pregunta correspondiente a la estudiante A5, no concibe cómo es que no se sabe la cantidad de horas que el coche pasa en el parking y brinda respuestas no matemáticas, por ejemplo, alude a que hay cámaras que registran o bien un maquinista en el parking. Para reorientar las respuestas de la estudiante, en dos ocasiones se involucra la letra  $X$  que representa un número de horas que se desconoce, pero nuevamente la estudiante no responde con información matemática, por esa razón se aprovecha la información para preguntar cómo calcularía el dinero a pagar sabiendo el tiempo que ha transcurrido, obteniéndose en este caso cierta manifestación de generalización verbal y condicionada como se muestra en el siguiente extracto:

*E.  $X$  horas, no sabemos las que son, pero son  $X$  horas, entonces yo te digo pues yo sé cuánto fueron,  $X$ , ¿Cuánto tendrías que pagar? [I5]*

*A5. Pues no sé, podría revisar las cámaras de seguridad y ver cuánto tiempo estuvo el coche ahí.*

E. ¿Y cuando sepas la cantidad de horas que has estado?, ¿cómo calcularías el dinero que tienes que pagar? [I4-I6]

A5. Pues **por cada una un euro más dos siempre**, entonces sería un millón de horas, un millón de euros más 2 euros.

El cartel se le introduce a la estudiante después de las respuestas anteriores, se le pregunta por una tabla y elabora lo siguiente

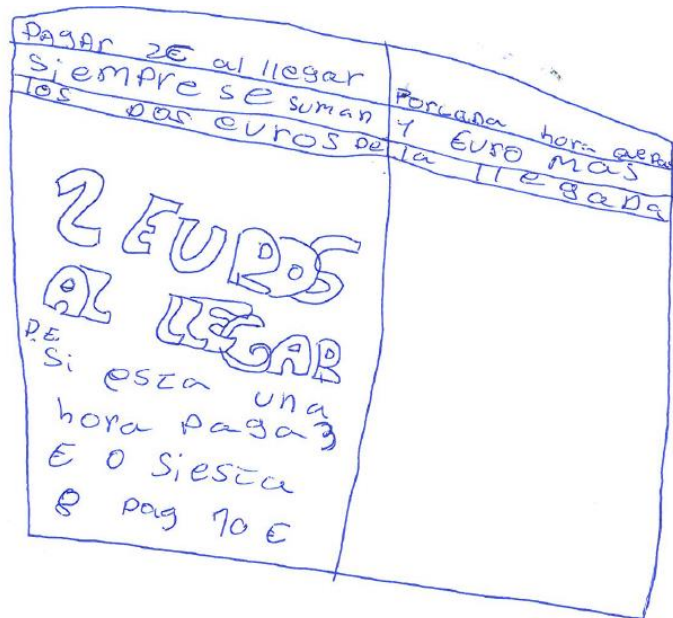


Figura 3. Cartel elaborado por estudiante A5

Esta actividad permite a la alumna manifestar lo que ha comprendido y evidencia la identificación de la relación funcional como “2 más algo”, ella menciona que escribiría “para entrar necesario pagar 2 euros posteriormente cuantas más horas esté su coche en el parking más cantidad de dinero tendrá que pagar” e incluso de forma indirecta brinda una característica de la relación funcional al decir que entre más tiempo pase más dinero se tendrá que pagar. En esta actividad se reafirma el trabajo con los números específicos como se explica en el apartado anterior.

Por otro lado, algunos estudiantes ante la pregunta 8 responden inmediatamente de forma condicionada, por ejemplo la estudiante A2 como se aprecia en Tabla 3, y aunque se le pregunta por un procedimiento para explicar de forma más general su razonamiento, no sabe cómo hacerlo. O bien ante esta pregunta, se aprecia en las respuestas de los estudiantes una generalización verbal, como en el estudiante A4 a quien se le pregunta por un proceso

que le permita calcular los euros para “un número cualquiera de horas” y el alumno dice lo siguiente

*A4. Pues cada hora ya llevo, te suma un euro, un euro, un euro, pero al principio te dan 2 euros, entonces, entonces al principio te dan 2 euros y **sumas todas las horas con 2 euros que pagas y ese es el resultado que te da.***

En algunas ocasiones puede que los estudiantes tengan dificultades para expresar sus ideas o comprender lo que se les pregunta, sin embargo, los estímulos les permite exponer sus ideas con mayor claridad. Esto ocurre con la estudiante A3 a quien después de un estímulo I5 de repetición de información y un I6 mediante el que se le pregunta por la acción que llevaría a cabo para saber los euros por pagar para “cualquier número de horas”, pasa de no saber qué responder, a una generalización verbal, al decir que al tiempo que se cuenta se le suma 2, esto determina la forma de la relación funcional como “número de horas + 2”. Y a la estudiante A7 cuando se le pregunta sobre cómo calcularía siempre lo que se paga, responde

*A7. Pues **a ese número le pones dos euros de la entrada y esos serían los euros.***  
*E. Vale.*

*O sea, el número cualquiera le pones dos [la entrevistadora agrega junto a lo que había anotado antes “número cualquiera le pones 2€ más”] [I2]*

*A7. Sí.*

Una nueva situación se da cuando un estudiante pasa de un nivel a otro: el estudiante A6 inicia explicando cómo calcular con 183 horas diciendo que añade 2 para obtener los euros por pagar, hay una generalización condicionada. La pregunta es reorientada con un estímulo I4 y se le pregunta por una forma mediante la cual le explicaría a otra persona el funcionamiento del parking (esta misma propuesta se hace a la estudiante A8) y a pesar de que se muestra al inicio confundido, concluye con evidencias de generalización verbal:

*E. Ahora imagínate que yo voy a subir a la sierra y te pregunto “A6 voy a subir este sábado a la sierra pero no sé exactamente cuántas horas voy a estar, ¿tú me puedes decir cómo saber lo que yo tengo que pagar en el parking?” [I4-I6]*

*A6. Ah.*

*E. ¿Cómo me lo contarías?*

*A6. Pues, el número de horas que estés, te cuenta un euro pero luego le tienes que sumar 2 porque es lo que te cobra obligatoriamente el parking.*

Por otro lado, la estudiante A8 tras exponer “entonces luego le sumo las horas que has estado más 2”, a causa de un estímulo I6, pasa también a usar números específicos para explicar lo que piensa cuando la entrevistadora escribe la expresión “número de horas” y le pregunta cómo está calculando lo que paga.

En la pregunta 9 el estudiante A2 pasa también de manifestar otro nivel generalización, en este caso N1, a condicionada cuando se lleva a cabo un estímulo I4 de cambio de intención.

*Simbólica: S*

Este nivel de generalización es expresado por los estudiantes de formas diferentes. De los ocho estudiantes, cuatro manifestaron de alguna forma una generalización simbólica: tres evidenciaron una comprensión sobre el uso de las letras para representar la relación funcional subyacente a la tarea y uno utilizó la simbología sugerida para escribirla.

De las preguntas de la entrevista, la número nueve es la que involucra la letra  $N$ ,  $X$  u otra para representar una cantidad indeterminada de horas que pasa el coche en el parking.

La estudiante A3 transita entre niveles de generalización antes de mostrar indicios de una generalización simbólica. Después de que manifiesta una generalización verbal en la pregunta ocho en la que exponía que al tiempo que pasaba se le sumaba 2, se le introduce la letra  $X$  para preguntarle cuánto se paga en el parking si han transcurrido  $X$  horas a lo responde que igual que antes, refiriendo a la explicación verbal previa. Esto refiere a que la estudiante comprende que independientemente de la representación que se dé a “cualquier número de horas” sólo se le suma el 2.

En la pregunta nueve la estudiante recorre niveles de generalización, primero de una generalización verbal a una simbólica por medio de un estímulo I5 en el que se le repite lo que significa la  $X$  así como un I6 en el que se le sugiere pensar en una manera de calcular lo que se paga y aunque la estudiante no sabe cómo hacerlo, hay un cambio de intención por I4 y se pregunta si tiene sentido la expresión  $x+2$  a lo que ella dice que sí. Cuando se involucra la letra  $N$  en lugar de la  $X$  la estudiante no sabe cómo operar, sin embargo, cuando se le repite la información sobre el significado de las letras y se le pregunta sobre cómo lo haría, explica

con un ejemplo específico manifestando generalización condicionada. Mediante el ejemplo específico es que explica de forma más sencilla lo que ella piensa y le sirve para tener claridad en cuanto a la relación funcional ya que luego cuando la entrevistadora vuelve a cambiar de intención por un estímulo I4 para que la estudiante involucre la letra N, ella dice y explica que es entonces “ene más 2”. Esta estudiante a partir de sus respuestas muestra indicios de una comprensión del uso de la simbología algebraica para representar la relación funcional y en ese proceso de transición entre niveles de generalización y la ayuda de los estímulos es que finalmente usa las letras.

Otros estudiantes que recorren niveles de generalización en la última pregunta son A6 y A8. Cuando la entrevistadora introduce la letra X para representar en general las horas que han transcurrido y pregunta a A6 sobre el modo de calcular los euros por pagar, el estudiante dice:

*Pues que si tú tienes  $x$  horas pues le añades 2, todas las horas que estés le añades 2. Por ejemplo si estás 10 horas pues le añades 2 y si son 3 le añades 2.*

Se aprecia de esta forma una manifestación de generalización simbólica, a la vez que ejemplifica lo que significa.

A partir de lo que expresa el estudiante, la entrevistadora hace un cambio de intención para representar algebraicamente la relación funcional y determinar si el estudiante comprende la forma  $X+2$ , él dice que sí puede ser esa la expresión que representa los euros porque X es un número y si se le añade 2 ya se tiene lo que hay que pagar. Para reforzar la idea se le plantea entonces la pregunta de cómo calcular los euros por pagar para Z horas y luego para N, el estudiante se muestra un poco confundido pero una vez que se repite la información sobre el papel de X, escribe por su cuenta que lo que se paga serían  $Z+2$  y lo mismo para  $N+2$ .

Según lo que el estudiante brinda y la explicación y uso que da a la letra se observa que ha alcanzado un nivel de generalización simbólica el cual ha sido promovido por la organización inductiva de la tarea y guiado por las intervenciones de la entrevistadora. Él es el único estudiante que por cuenta propia escribe algebraicamente la relación funcional.

Luego, en el caso de A8, la letra X es involucrada después de que ha manifestado una generalización verbal. Sin embargo, la estudiante asocia esa letra con el número 10 en números romanos, razón por la cual la entrevistadora efectúa un cambio de intención y

reemplaza la  $X$  por una  $Z$  y repite la pregunta de cómo calcular lo que se tiene que pagar, a lo que la estudiante responde “el número que sea  $Z$  más 2”. Como continuación la entrevistadora le pregunta si le encuentra sentido a la expresión “ $Z+2$ ” y la alumna argumenta que sí ya que  $Z$  podría ser cualquier número más 2.

Este nivel de generalización es expresado directamente por la estudiante A7 cuando se le plantea la pregunta final. Antes la estudiante había manifestado una generalización verbal que sirve de preámbulo para el momento en que la letra  $X$  es introducida, ya que la estudiante sostiene que es lo mismo anterior, que sólo debe modificar lo que se ha escrito antes, como se aprecia en el siguiente trozo

*A7. Pues, serían esas  $X$  horas, igual que aquí [señala los resultados anteriores], sólo que en vez de “un número” sería una  $X$ .*

La entrevistadora le pregunta cómo escribir eso, en este caso la estudiante menciona que se lía un poco por lo que se le vuelve a explicar el significado de la letra, como respuesta la estudiante escribe textualmente “le sumas 2€ de la entrada a la  $X$  y te sale”.

Dados los resultados de la estudiante, la entrevistadora le sugiere analizar si la expresión  $X+2$  está bien y ella expresa lo siguiente

*A7. Es lo mismo.*

*E. Es lo mismo ¿por qué?*

*A7. Porque aquí esto, aquí lo hemos resumido en números y cruces.*

*E. Ah, muy bien, lo estás haciendo muy bien A7.*

En este caso la alumna reconoce que es lo mismo que había pensado pero tal vez no sabía cómo expresarlo simbólicamente, en esta etapa se alcanza un nivel de generalización simbólica la cual refuerza cuando se le plantea usar la letra  $Z$  con la misma funcionalidad de la  $X$  a lo que la estudiante vuelve a responder que basta con cambiar la  $X$  por una  $Z$  en la expresión  $X+2$ .

En cuanto a los estudiantes que no manifiestan generalización simbólica, en el caso de A1 no se aprecia de una forma explícita. En la actividad del cartel la entrevistadora inmediatamente propone el procedimiento de escribir entonces “número de horas + 2” para determinar si el estudiante comprende el uso y significado de la indeterminación, la respuesta



obtenida es interesante ya que inicialmente parece que el estudiante está de acuerdo, pero luego cambia de opinión

*E. ... Yo aquí pongo el número de horas [inaudible] y te digo ¿cuántos euros tendrías que pagar?, pues el número horas más 2.*

*¿Eso crees que está bien?*

*A1. No.*

*E. ¿No?, ¿qué es lo que está fallando ahí? [I6]*

*A1. Pues que el número de horas más dos sería, tú te darías cuenta que la entrada vale 2 euros.*

*E. Ajá*

*A1. Entonces se supone que tienes que pagar las horas que has estado, las horas que has estado con dinero, primero pagas dos euros de la entrada obligatoriamente y luego pagar las horas que has estado.*

Lo que se distingue en la respuesta del estudiante es que en realidad sí comprende la relación funcional, lo que no está considerando es la conmutatividad de la suma, ya que para él debería ser “2 + número de horas”. Cuando se introduce la letra  $N$  no se concreta una comprensión del simbolismo, pero sí una manifestación del nivel de generalización verbal.

Por otro lado en el caso de la estudiante A2, como se expuso antes, en el momento de preguntar el monto a pagar si han transcurrido  $N$  horas, considera que esa letra está asociada al número 13 del abecedario, ante un cambio de intención la entrevistadora introduce la letra griega alfa pero lo que se expresa es una generalización condicionada.

Por último la estudiante A5 ante la pregunta nueve y el involucramiento de letra  $N$ , y pese a los cambios de intenciones por estímulos I4 la respuesta obtenida es no matemática, por ejemplo en la tabla que se muestra la estudiante va explicando la correlación que hay entre el número de horas y los euros que se pagan por medio de sumas como se ve en lo que está escrito fuera de la tabla a la derecha, sin embargo, cuando la letra  $N$  es introducida ella escribe “comprobar”, de modo que no se aprecia una comprensión de lo indeterminado. Para finalizar, la entrevistadora le pregunta si la expresión  $X+2$  está bien para representar los euros que se deben pagar, pero la estudiante dice que no en todo momento porque puede que engañen al dueño del coche al no precisarse las horas que han pasado ya que pueden ser más de las que en realidad ha estado el coche en el parking.

Número de horas	€	
1	3	$(1+2)$
8	10	$(8+2)$
10	12	$(10+2)$
20	22	$(20+2)$
1000	1002	$(1000+2)$
⋮		
N	Comprende	
X	X+2	

Figura 4. Tabla de resumen de información estudiante A5

Por su cuenta, el estudiante A4 recurre a una explicación que se ha considerado aritmética para explicar cómo calcular la cantidad de dinero que se paga de acuerdo a las horas que han transcurrido como se describe en el nivel E0 de este apartado.

#### Influencia de los estímulos en la manifestación niveles de generalización

A partir de los resultados expuestos en el apartado anterior, a continuación se explicitan los estímulos que tienen mayor influencia en la manifestación de los niveles de generalización.

El estímulo I2 de reafirmación, a través de cual se le confirma al estudiante sobre las acciones y operaciones que realiza, se orienta a que refuerce sus ideas a la vez que se le solicita argumentarlas. Este es el principal estímulo efectuado en la manifestación del nivel N1 en el cual los estudiantes evidencian que han identificado una relación entre un número pequeño de horas que ha transcurrido y el de euros por pagar. Este estímulo cuando es llevado a cabo en otros niveles, le da fluidez a la entrevista ya que se aceptan los resultados que el estudiante va obteniendo.

Por otro lado, el estímulo I6 de sugerencia de procesos, les permite a los estudiantes explicar su razonamiento, afianzarlo e ir asumiendo una postura sobre la operación involucrada y la forma en que puede ser expresada la relación funcional. En la manifestación del nivel N2, en algunos casos este estímulo ha tenido lugar cuando se pregunta al estudiante sobre el procedimiento que está llevando o que llevaría a cabo para obtener los euros que se pagan de acuerdo a las horas que han transcurrido, de modo que se le motiva a organizar las ideas para que defina lo que podría hacer. Esto ocurre también en niveles de generalización superiores, dentro de los cuales este estímulo promueve que el estudiante refuerce ideas y se

le invita a que analice sobre la forma de determinar el dinero a pagar conforme se progresa en el uso de las indeterminaciones, desde el involucramiento de “un número cualquiera de horas” hasta el uso de una letra que lo representa.

Por último, el estímulo I4 de cambio de intención, ha sido uno de los que más presencia ha tenido durante la entrevista: guía, reorienta y ofrece al estudiante opciones para progresar en sus razonamientos y explicaciones, o bien para obtener y expresar ideas diferentes a las que manifestaba. Este estímulo promueve también en muchas ocasiones una transición entre niveles de generalización.

## Capítulo 5. Conclusiones

El presente capítulo está estructurado en tres secciones, en primer lugar se describe el logro de los objetivos de la investigación así como los principales aportes de la misma, posteriormente se mencionan las limitaciones del trabajo y por último se nombran algunas líneas de investigación abiertas tras la ejecución del estudio.

### Logro de los objetivos propuestos y principales aportes

En esta investigación se ha efectuado una entrevista semiestructurada en la que se propone a estudiantes de primaria resolver una tarea, con organización inductiva, en la cual subyace una relación funcional. Las respuestas de los alumnos se han analizado para determinar manifestaciones de pensamiento funcional asociadas a la generalización; para tal efecto se diseñaron categorías con niveles de generalización así como de estímulos que se efectúan al estudiante por parte de la entrevistadora.

Tras llevarse a cabo un análisis de los datos recolectados, considerando los intereses de la investigación, se ha determinado información sobre las habilidades matemáticas de los estudiantes de primaria, referente a su capacidad de trabajo con situaciones asociadas al pensamiento funcional desde edades tempranas.

Siendo más específicos, en esta investigación se evidencian manifestaciones de diferentes niveles de generalización y la forma en que lo hacen los estudiantes de primaria analizados, que poseen entre 9 y 10 años, apoyados por estímulos llevados a cabo por un profesional de la educación. Otros estudios han expuesto resultados asociados a niveles de generalización (Blanton et al., 2015; Radford, 2010), sin embargo, este estudio aporta una nueva categorización asociada a niveles de generalización y estímulos que se efectúan al estudiante cuando trabaja con tareas que involucran relaciones funcionales.

Durante la ejecución de la entrevista a cada estudiante y el análisis de la información, se observa que la obtención de respuestas por parte de los alumnos no ha sido una actividad pasiva de planteamiento de preguntas y registro de la primera respuesta que da el estudiante, se ha ido más allá hacia un proceso de interacción, promoviéndose un progreso y consolidación de ideas relacionadas con la manifestación de generalización por medio de estímulos.

Con respecto al logro de los objetivos propuestos, para el primer objetivo específico de este estudio correspondiente a “describir los niveles de generalización que evidencian estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional”, se han identificado cinco niveles de generalización en las respuestas de los estudiantes, siendo el nivel E0 de “No generalización” el menos notorio. Se advierte que todos los estudiantes han mostrado en diferentes grados un reconocimiento de la relación funcional subyacente a la tarea tratada y lo han exteriorizado por medio de la justificación de resultados que van desde el establecimiento de una relación entre un número específico de horas con un número de euros por pagar, pasando por cantidades indeterminadas de horas y la forma de calcular los euros correspondientes por pagar, hasta el uso de simbología algebraica para la representación de la relación funcional. Si bien, sólo uno de los estudiantes representó simbólicamente, por sí mismo, la relación funcional de la tarea, otros estudiantes pusieron de manifiesto entender el funcionamiento de las letras y explicar entonces el significado de la expresión que representa la relación funcional, si esta era dada.

Los hallazgos reafirman algunos de los resultados expuestos por Blanton y Kaput (2004) quienes muestran que los niños pueden trabajar y describir situaciones de pensamiento funcional, la relación entre cantidades que varían, además de observarse un progreso en la forma en que usan el lenguaje matemático a través de los años. Estos autores también señalan que niños de tercer y cuarto nivel expresan de forma simbólica la relación funcional. En nuestro estudio, aunque los datos se recolectaron en un solo curso, se aprecia también que los estudiantes reconocen la relación entre las cantidades que varían, como se mencionó antes, y que progresan en el uso del lenguaje, desde el uso de expresiones verbales de indeterminación que involucran en ocasiones lenguaje natural, hasta llegar a usar o comprender el funcionamiento del lenguaje algebraico para describir la relación funcional.

En las tablas del capítulo anterior se muestra el recorrido que ha efectuado cada estudiante durante la resolución de la tarea y se explicitan los niveles de generalización que se van alcanzando y la influencia de los estímulos de la entrevistadora en los mismos. En dichas tablas se pone de manifiesto una relación entre las preguntas de la entrevista y la manifestación de los niveles de generalización.

Es importante mencionar que las preguntas en las que hubo un mayor dinamismo y en las cuales los estudiantes usaron diversos recursos (ej., casos particulares, expresiones de

indeterminación) para expresar sus ideas con la influencia de los estímulos, son las últimas en que se involucraban los casos más generales. Ambas preguntas resultaron ser más desafiantes que las anteriores que incluían números específicos. En estas los estudiantes tendieron a usar más recursos para hacerse entender. Lo anterior sin dejar de lado que el replanteamiento de preguntas más de una vez contribuyó al estudiante a aclarar ideas o a retomar resultados anteriores.

Se aprecia que la propuesta de una situación que involucra el trabajo con patrones y en la cual subyace una relación funcional ha permitido al estudiante estructurar ideas y razonamientos que lo han conducido a dar evidencias de generalización en diferentes grados. Lo anterior refuerza aportes de Warren (2006), de quien se aprecia que las experiencias y prácticas a las que son sometidos los estudiantes influyen en su proceso de generalización. Al mismo tiempo se apoya la idea del pensamiento funcional como recurso de desarrollo de ideas algebraicas, y la construcción y generalización de patrones.

En relación al segundo objetivo específico expuesto como “analizar cómo influyen los estímulos que se efectúan al estudiante de primaria en el proceso de generalización que evidencian durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional”, en el capítulo anterior se ha detallado la forma en que los estímulos que lleva a cabo la entrevistadora durante la ejecución de la entrevista son determinantes en: la obtención de respuestas del estudiante, la consolidación de ideas y construcciones asociadas al reconocimiento de la relación funcional de la tarea, las manifestaciones y movilización entre niveles de generalización.

Como ejemplo de la influencia de los estímulos, el estímulo I6 (de sugerencia de procesos) ha permitido al estudiante consolidar ideas sobre la forma de la relación funcional y la operación involucrada, se considera también que el I4 (de cambio de intención), es uno de los que ha promovido mayor trabajo por parte del estudiante y una mayor inversión de argumentación que resalta características matemáticas de la relación funcional.

A partir de todo lo anterior, se afirma que el objetivo general “analizar los niveles de generalización que manifiestan estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra el reconocimiento de una relación funcional” se ha cumplido. Al igual que otros investigadores (Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2011; Carraher et al., 2008; Warren, 2006) se ponen de manifiesto las habilidades matemáticas que tienen estudiantes de primaria

y su potencial algebraico. Se han expuesto niveles de generalización que estudiantes de corta edad pueden manifestar ante tareas que involucran relaciones funcionales a la vez que la mediación docente, por medio de estímulos, contribuye en el proceso.

Por otro lado, en este estudio se destaca el papel de las funciones, en particular del pensamiento funcional como un medio de acercamiento al estudiante al pensamiento algebraico y al desarrollo de habilidades asociadas (Blanton y Kaput, 2011). Por último, y sin restarle protagonismo, se resalta el valor de los estímulos efectuados al estudiante en el proceso de generación, refuerzo del conocimiento y habilidades algebraicas de los estudiantes.

### Limitaciones

La primera limitación de esta investigación, dado el tiempo de ejecución de la misma, es la dificultad para profundizar en el análisis de los datos y el establecimiento de una mayor cantidad de relaciones entre estos.

Por otro lado, otra limitación se asocia a la cantidad pequeña de sujetos que participaron en el estudio, además de que sólo es analizada una de las tareas implementadas con ellos, lo cual restringe los resultados.

Si bien los datos existentes permiten dar respuesta a los objetivos de investigación propuestos, se considera que una mayor inversión de tiempo con los estudiantes y en la recolección de información por medio de otros instrumentos, puede contribuir a identificar con mayor facilidad las manifestaciones de generalización a partir de los razonamientos y contribuciones de los alumnos.

Por otro lado, al ser una investigación pionera en cuanto al reconocimiento de estímulos que influyen en la manifestación de niveles de generalización, se es consciente de la posibilidad de determinar nuevos estímulos así como de proponer otros niveles de generalización.

### Líneas abiertas

Con respecto a la investigación realizada, una primera línea de investigación abierta se relaciona con determinar cómo los estudiantes del mismo curso en que se realizó este estudio, utilizarían diferentes representaciones para construir y expresar generalizaciones en

tareas con organización inductiva, si previamente ha habido una capacitación sobre sistemas de representación.

Otra posible línea abierta se asocia a determinar los niveles de generalización que manifiestan estudiantes del mismo curso (cuarto curso de primaria) cuando se enfrentan a tareas con organización inductiva y que involucran relaciones funcionales de diversa complejidad.

Luego, considerándose la misma tarea abordada en esta investigación y su organización inductiva, se genera un cuestionamiento sobre cómo estudiantes de primaria llevarían a cabo las manifestaciones de generalizaciones en un ambiente de aula en el que interviene el trabajo colaborativo, considerándose a su vez la influencia de intervenciones y estímulos del docente en estos.

Por último, dado que la enseñanza del álgebra ha sido un tópico que se ha destinado a la escuela secundaria con mayor fuerza, un elemento que se puede considerar en investigaciones futuras es determinar cómo estudiantes de primeros cursos de secundaria, llevan a cabo generalizaciones en tareas con organización inductiva y que involucran relaciones funcionales de diversa complejidad, y cómo las representan con base en su bagaje matemático. Esto puede dar insumos para llevar a cabo a futuro una investigación que contraste con hallazgos de otros estudios realizados en primaria.



## Referencias

- Barrantes, R. (2007). *Investigación: un camino al conocimiento, un enfoque cuantitativo y cualitativo*. San José, Costa Rica: EUNED.
- Blanton, M., Brizuela, B., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-old's thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Hoinés y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Noruega: PME.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5–23). New York, N. Y.: Springer.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares.
- Carraher, D., Martínez, M. y Schliemann, A. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 3–22.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55–67.

- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). México, D.F., México: McGraw-Hill.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación*. México, D.F., México: McGraw-Hill.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65–86). Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University y Paul Chapman Publishing.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Milton Keynes: The Open University Press.
- Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277–287.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas*. San José, Costa Rica: MEP.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria (Vol. BOE N°52, pp. 19349-194420). Madrid, España: Autor.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135–156.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, 29(1), 75–88.
- Moliner, M. (2016). *Diccionario del uso español* (4th ed.). España: Gredos.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D.F.: Trillas.

- Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalization in algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). Utrecht, Holanda: PME.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37–62.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23rd ed.). España: Autor. Consultado en <http://dle.rae.es>
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47–66.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 12(1), 40–62.
- Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, M. Krátka y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377–384). Praga: PME.