Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático

OPERADORES QUE ALCANZAN SU RADIO NUMERICO

Mª Dolores Acosta Vigil

Universidad de Granada
1990

Facultad de CIENCIAS

En Granada a 20 de SEPTIEMBRE de mil novecientos NOVENTA, reunido el Tribunal constituído por D. FERNANDO BOMBAL GORDON, D VICENTE MONTESINOS SANTALUCIA, D ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS, D WEND WERNER Y D CAMILO APARICIO DEL PRADO.

para juzgar la Tesis doctoral de Dª MARIA DOLORES ACOSTA VIGIL sobre el tema "OPERADORES QUE ALCANZAN SU RADIO NUMERICO"

procedió el doctorando a hacer la exposición de la labor preparatoria realizada, fases de investigación y análisis de fuentes bibliograficas con toda clase de medios instrumentales de que se ha servido, desarrollando esta exposición en el plazo reglamentario.

Terminado el acto anterior pasó a desarrollar el contenido de la Tesis y conclusiones obtenidas en la misma.

Hechas por el Tribunal las objecciones que estimaron oportunas, y aclaradas éstas por el doctorando, se dió por terminado el acto.

Reunido a continuación el Tribunal examinador, y expuesto el parecer de cada uno de sus miembros, se acordó por UNANIMIDAD otorgar la calificación de APTO "CUM LAUDE".

Para que conste, se extiende la presente firmada por todos los componentes del Tribunal, en la fecha ut supra.

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL,

C Aparicio

EL PRESIDENTE.

El Vocal,

El Vocal,

Angel Rodríguez

El Vocal,

El Vocal,

El Doctorando,

Mª Dolores Acosta

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Doctor Rafael Payá Albert.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ del Director:

Fdo: Rafael Payá Albert — Fdo: M$^{\underline{a}}$ Dolores Acosta Vigil

Universidad de Granada
1990

Contenido

Introducción

Operadores que alcanzan la norma

En su caso particular más interesante, el teorema, ya clásico, de Bishop-Phelps [5] afirma que, para cualquier espacio de Banach X, el subconjunto del espacio dual X^*, formado por los funcionales que alcanzan su norma, es denso en X^* para la topología de la norma. En el trabajo citado, E. Bishop y R. Phelps plantearon el problema de la posible validez de su resultado cuando se sustituye el cuerpo base por otro espacio de Banach Y. Más concretamente,

¿Para qué espacios de Banach X e Y se verifica que el conjunto $NA(X,Y)$ ("norm attaining") de los operadores (siempre lineales y continuos) de X en Y que alcanzan su norma es denso en el espacio de Banach $L(X,Y)$ de todos los operadores?

A principios de los años sesenta, J. Lindenstrauss [37] inició el estudio sistemático del problema anterior. Por su muy directo paralelismo con los resultados de esta memoria, merece la pena exponer con cierto detalle el contenido del trabajo de Lindenstrauss. A plena generalidad la respuesta al problema planteado es negativa, de hecho [37, Proposition 5]:

> *Existe un espacio de Banach X tal que $NA(X,X)$ no es denso en $L(X,X)$,*

pero pueden darse respuestas afirmativas parciales de gran interés. Así [37, Theorem 1]:

> *Para cualesquiera X e Y, el conjunto de los operadores de X en Y cuyos segundos adjuntos alcanzan la norma, es denso. En particular, si X es reflexivo, $NA(X,Y)$ es denso en $L(X,Y)$ para todo Y.*

Se llega así de forma natural a considerar las propiedades que Lindenstrauss llama "A" y "B": X tiene la propiedad "A" (resp. "B") cuando $NA(X,Y)$ (resp. $NA(Y,X)$) es denso en $L(X,Y)$ (resp. $L(Y,X)$) para todo Y. El teorema de Bishop-Phelps nos dice que el cuerpo tiene la propiedad "B" y el resultado de Lindenstrauss ya comentado afirma que todo espacio reflexivo tiene la propiedad "A". Lindenstrauss considera también algunas condiciones geométricas bastante restrictivas que son suficientes para que un espacio de Banach tenga la propiedad "A" ó la "B". Destacamos la siguiente [37, Proposition 1]:

> *Si la bola unidad de X es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de un conjunto E de puntos uniformemente expuestos, entonces X tiene la propiedad "A".*

Si $E = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, el que los puntos de E son uniformemente expuestos significa que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $f_\alpha \in X^*$ verificando:

i) $f_\alpha(x_\alpha) = \|f_\alpha\| = \|x_\alpha\| = 1$.

ii) Para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \in \Lambda \\ \|x\| \leq 1 \\ \operatorname{Re} f_\alpha(x) > 1 - \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|x - x_\alpha\| < \varepsilon.$$

A partir del trabajo pionero de Lindenstrauss, el problema de la densidad del conjunto de los operadores que alcanzan la norma suscitó un gran interés y la literatura al respecto es muy abundante. Citaremos brevemente los resultados más significativos de esta importante teoría. A nivel completamente general, cabe citar el trabajo de V. Zizler [54], publicado en 1971, en el que se mejora el teorema de Lindenstrauss, sobre los segundos adjuntos, probando [54, Proposition 4]:

> *Para cualesquiera X e Y, el conjunto de operadores de X en Y cuyos primeros adjuntos alcanzan la norma es denso.*

(nótese que si un operador alcanza su norma, también lo hace su adjunto, pero en general no es cierto el recíproco).

Sin embargo, el hecho que dio definitivamente mayor relevancia a la teoría de los operadores que alcanzan su norma fue el descubrimiento de su relación directa con la propiedad de Radon-Nikodym. Dicha relación fue establecida por J. Bourgain en un decisivo trabajo publicado en 1977 [11]. Remontándose a la versión general del teorema de Bishop-Phelps, que establece la densidad de los funcionales cuyo módulo alcanza su máximo en un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X (la bola unidad de X es sólo un caso particular), J. Bourgain introduce la "propiedad de Bishop-

Phelps". X tiene dicha propiedad cuando, para todo subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado B de X, y para todo espacio de Banach Y, los operadores $T \in L(X,Y)$ tales que la función $x \mapsto \|T(x)\|$ alcanza un máximo en B forman un conjunto denso en $L(X,Y)$. Como principal resultado, J. Bourgain probó [11, Theorem 7] que la propiedad de Bishop-Phelps es equivalente a la de Radon-Nikodym. En particular (tómese $B = B_X$, la bola unidad de X) la propiedad de Radon-Nikodym implica la propiedad "A" de Lindenstrauss. Puesto que la propiedad de Radon-Nikodym es estable por isomorfismos tenemos:

Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, todo espacio isomorfo a X tiene la propiedad "A".

Se abre así el camino hacia una discusión más completa sobre las propiedades "A" y "B", consistente en tratar de resolver las siguientes cuestiones:

i) ¿Qué espacios de Banach X verifican que todo espacio isomorfo a X tiene la propiedad "A"?

ii) La misma pregunta i) para la propiedad "B":

iii) ¿Qué espacios de Banach X se pueden renormar con la propiedad "A"?

iv) La pregunta iii) para la propiedad "B".

En 1980, R. Huff [30], analizando y refinando los argumentos de J. Bourgain probó que si un espacio de Banach X no tiene la propiedad de Radon-Nikodym existen dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en X, equivalentes a la de partida, tales que los operadores de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(X, \|\cdot\|_2)$ que alcanzan la norma no forman un conjunto denso. En particular, $(X, \|\cdot\|_1)$ no tiene la propiedad "A" y $(X, \|\cdot\|_2)$ no tiene la "B". Se tiene así la respuesta completa a la pregunta i):

X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si, y sólo si, todo espacio isomorfo a X tiene la propiedad "A".

Pero también tenemos información sobre la pregunta ii):

> *Si toda renormación equivalente de X tiene la propiedad "B", entonces X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

No existe, que sepamos, una respuesta completa a la pregunta ii). Como máximo exponente del desconocimiento existente al respecto, baste citar el problema que J. Johnson y J. Wolfe califican de "irritante": ¿tiene el espacio euclídeo bidimensional la propiedad "B"? [34, Question 6]

Pasando a las preguntas, menos exigentes, iii) y iv), a la vista de lo anterior, es claro que la clave para iii) empieza por saber si la propiedad "A" es ó no invariante por isomorfismos, y, en tales términos el problema estuvo abierto algún tiempo [34, Question 4]. La respuesta (negativa) fue obtenida por W. Schachermayer en 1983 probando [45]

> *Todo espacio de Banach débilmente compactamente generado puede renormarse con la propiedad "A"*

No se sabe si la hipótesis WCG puede suprimirse. Con respecto a la pregunta iv) la situación es mucho más diáfana. J. Partington [41, Theorem 1] probó:

Todo espacio de Banach puede renormarse con la propiedad "B".

Para completar esta exposición de los resultados más relevantes sobre los operadores que alcanzan la norma, algunos de los cuales guardan, como se verá, un marcado paralelismo con los resultados de esta memoria, cabe citar una serie de trabajos sobre operadores que alcanzan la norma entre espacios de Banach clásicos. Sin pretender una enumeración exhaustiva, nos parecen destacables los trabajos de Johnson y Wolfe [34], J. Uhl [52], A. Iwanik [32] y W. Schachermayer [46]. En todos ellos se discute la densidad del conjunto $NA(X, Y)$ en el caso de que X y/ó Y sea, bien un espacio de tipo $C(K)$, o bien un L_1-espacio.

Rango numérico de un operador

Sea H un espacio de Hilbert y notemos $L(H)$ al espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de H en H. Dado $T \in L(H)$, consideremos la forma cuadrática

$$(T(x)|x) \quad (x \in H)$$

asociada a T, donde $(\cdot|\cdot)$ es el producto escalar en H. El conjunto de valores de dicha forma en la esfera unidad S_H recibe el nombre de *rango numérico* del operador T y suele notarse $W(T)$:

$$W(T) = \{(T(x)|x) : x \in S_H\}.$$

Este concepto fue introducido en 1918 por O. Toeplitz [51], para el caso finito-dimensional. Su motivación original está, como se ha apuntado, en la teoría de formas cuadráticas, pero adquiere su verdadero significado en el ambiente de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Una excelente exposición de los resultados fundamentales sobre rango numérico de operadores en espacios de Hilbert y su conexión con la teoría espectral de dichos operadores puede encontrarse en la monografía de P. Halmos [27].

Comparativamente, la aparición del concepto de rango numérico para operadores en espacios de Banach generales es mucho más tardía, a pesar de que la definición de $W(T)$ se extiende de forma natural y sencilla a este ambiente más general. Dicha aparición se produce, de forma casi simultánea, pero independiente, en sendos trabajos de G. Lumer [39] y F. Bauer [3] publicados en 1961 y 1962, respectivamente. Si bien el trabajo de Lumer es sin duda más relevante en el desarrollo posterior de la teoría, la definición de Bauer, dada inicialmente para el caso finito-dimensional, pero aplicable literalmente al caso general, es la más coherente y la que finalmente resulta universalmente aceptada. Para motivar esta definición baste pensar que si H es un espacio de Hilbert y $x \in S_H$, $(T(x)|x)$ es el valor en $T(x)$ del funcional $(\cdot|x)$, único funcional lineal continuo con norma 1 en H que toma en x el valor 1. Dado un espacio de Banach arbitrario X, es natural entonces considerar, para cada $x \in S_X$ los funcionales $f \in X^*$ tales que $\|f\| = f(x) = 1$ y, moviendo x, el subconjunto $\Pi(X)$ de $X \times X^*$ dado por:

$$\Pi(X) = \{(x, f) \in X \times X^* : \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}.$$

La no vaciedad del conjunto $\Pi(X)$ viene asegurada por el teorema de Hahn-Banach. Para un operador $T \in L(X)$ se define su rango numérico $V(T)$, por:

$$V(T) = \{f(T(x)) : (x, f) \in \Pi(X)\},$$

y es evidente que, en el caso particular de que X sea un espacio de Hilbert, se tiene $V(T) = W(T)$ para todo $T \in L(X)$.

Hagamos un breve inciso para comentar la definición de Lumer, en términos de lo que él llama "productos semi-interiores" en un espacio de Banach. Para cada x en la esfera unidad de X se selecciona arbitrariamente un funcional f_x tal que $(x, f_x) \in \Pi(X)$. Las aplicaciones de la forma

$$(y, x) \longrightarrow f_x(y) \quad (y \in X, x \in S_X),$$

convenientemente extendidas por homogeneidad, son las que Lumer denomina productos semi-interiores (ver [8; páginas 85 y 86]). Cada producto semi-interior lleva asociado una definición de rango numérico de un operador $T \in L(X)$, a saber, el conjunto

$$\{f_x(T(x)) : x \in S_X\}.$$

El inconveniente está, naturalmente, en la elección no canónica del producto semi-interior, y Lumer lo resuelve probando que la envolvente convexo-cerrada del rango numérico así obtenido no depende del producto semi-interior utilizado. De hecho se tiene:

$$\overline{\mathrm{co}}\{f_x(T(x)) : x \in S_X\} = \overline{\mathrm{co}}\, V(T),$$

cualquiera que sea la elección $x \longrightarrow f_x$ utilizada, donde $\overline{\mathrm{co}}$ denota la envolvente convexo-cerrada. Digamos, de pasada, que el conjunto convexo y compacto $\overline{\mathrm{co}}\, V(T)$ recibe el nombre de *rango numérico de álgebra* del operador T y es caso particular de la noción abstracta de rango numérico de un elemento de un álgebra de Banach unital. Las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [7] y [8] contienen una exposición sistemática de la teoría general de rango numérico. Una versión más actualizada se consigue con el artículo expositorio de los mismos autores [9]. Trabajos más recientes sobre este tema se pueden encontrar en [13], [18], [19], [20], [24], [26], [31], [43] y [53].

Dado que no nos vamos a detener en explicar la relevancia del concepto de rango numérico en la teoría espectral de operadores en espacios de Banach, baste, para comprender la relación existente, la siguiente observación elemental:

Si λ es un autovalor del operador T, esto es, existe $x \in S_X$ tal que $T(x) = \lambda x$, tomando cualquier $f \in X^*$ tal que $\|f\| = f(x) = 1$ tenemos $f(T(x)) = f(\lambda x) = \lambda$, luego $\lambda \in V(T)$. De hecho, puede probarse (J. Williams, véase [7, Theorem 10.1]) que todo el espectro de T está contenido en el cierre del rango numérico. Aparece aquí implícitamente la patología con la que vamos a enfrentarnos en toda la presente memoria: el rango numérico de un operador en un espacio de dimensión infinita (aún en el caso particular de un espacio de Hilbert) puede no ser cerrado.

El *radio numérico* $v(T)$ de un operador $T \in L(X)$ se define por

$$v(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\},$$

y es fácil ver que v es una seminorma continua en $L(X)$, de hecho

$$v(T) \leq \|T\|, \quad \forall T \in L(X)$$

Incluso, como consecuencia de un teorema clásico de Bohnenblust y Karlin (ver [7, Theorem 4.1]) puede asegurarse que, si el espacio de Banach X es complejo, v es una norma en $L(X)$ equivalente a la usual.

Operadores que alcanzan el radio numérico

En claro paralelismo con la teoría ya esbozada de operadores que alcanzan la norma, esta memoria pretende estudiar sistemáticamente los operadores que alcanzan su radio numérico.

Notaremos $R(X)$ al conjunto de los operadores (siempre lineales y continuos) del espacio de Banach X en sí mismo que *alcanzan su radio numérico*, esto es, $T \in R(X)$ significa que existen $x_0 \in X$, $f_0 \in X^*$ tales que

$$\|f_0\| = \|x_0\| = f_0(x_0) = 1 \quad \text{y} \quad |f_0(T(x_0))| = v(T).$$

Para comentar los resultados sobre operadores que alcanzan su radio numérico, anteriores a esta memoria, partamos de un hecho elemental. Si X es un espacio normado de dimensión finita, todo operador lineal en X alcanza su radio numerico. Ya en el espacio de Hilbert infinito-dimensional separable deja de ser cierta una afirmación tan rotunda: es fácil imaginar un operador lineal continuo en ℓ_2 (incluso diagonal y autoadjunto) que no alcanza su radio numérico. En su tesis doctoral [44], fechada en 1972, B. Sims probó que todo operador autoadjunto en un espacio de Hilbert es límite en norma de una sucesión de operadores autoadjuntos que alcanzan su radio numérico. Planteó entonces el siguiente problema general que hoy por hoy sigue abierto:

> *¿Para qué espacios de Banach X se verifica que el conjunto $R(X)$ de los operadores en X que alcanzan su radio numérico es denso (en norma) en el espacio $L(X)$ de todos los operadores lineales continuos en X?*

Enumeramos algunas de las respuestas parciales, siempre afirmativas, a esta pregunta, conocidas hasta ahora:

En 1984, I. Berg y B. Sims [4] prueban que $R(X)$ es denso en $L(X)$ cuando X es un espacio de Banach uniformemente convexo. Teniendo en cuenta la dualidad entre convexidad uniforme y Fréchet diferenciabilidad uniforme de la norma, que ambas propiedades implican reflexividad [21, Theorem 4.1] y el hecho elemental de que un operador T en un espacio reflexivo alcanza su radio numérico si, y sólo si, lo hace su adjunto, se sigue que $R(X)$ es denso en $L(X)$ también en el caso de que la norma de X sea uniformemente Fréchet-diferenciable (X "uniformemente suave", en la nomenclatura más extendida). Esta observación se debe a C. Cardassi [16]. La misma autora, en 1985 ha probado la densidad del conjunto de operadores que alcanzan el radio numérico para una gama de espacios de Banach clásicos, concretamente c_0 y ℓ_1 [15], $L_1(\mu)$, siendo μ una medida de Borel positiva y finita en un espacio topológico de Hausdorff, compacto [17] y los espacios de Banach reales $C(K)$ [14]. Finalmente, M. Acosta y R. Payá [1], en paralelo con el resultado de J. Lindenstrauss sobre operadores que alcanzan su norma citado al principio de esta introducción, probaron en 1989 que, para cualquier espacio de Banach real o complejo X, el conjunto de los operadores en X cuyos segundos adjuntos alcanzan el radio numérico es denso en $L(X)$. Como consecuencia, si X es reflexivo, $R(X)$ es denso en $L(X)$ y los resultados de [4] y [16] antes citados quedan como casos muy particulares.

Mirando en su conjunto los precedentes comentados, y exceptuando quizá el resultado para espacios reflexivos, única condición suficiente estable por isomorfismos conocida hasta ahora, sólo encontramos respuestas afirmativas para espacios clásicos concretos, pero no un tratamiento sistemático que, como se ha apuntado anteriormente, pretendemos iniciar en esta memoria.

Resumen de la memoria

Pasamos a exponer brevemente el contenido de esta memoria, destacando los resultados que nos parecen más relevantes.

La memoria se inicia con un capítulo preliminar que contiene, aparte de algunos conceptos y resultados básicos sobre rango numérico de operadores, esencialmente conocidos y que se incluyen para facilitar la lectura de desarrollos posteriores, algunas nuevas aportaciones. A título de ejemplo, usando el teorema de Bishop-Phelps en la versión mejorada por Bollobás, una herramienta de gran utilidad en la teoría de rango numérico (ver por ejemplo [8, Chapter 5]), obtenemos una determinación del rango numérico de un operador $T \in L(X)$ que no involucra la totalidad del conjunto $\Pi(X)$, rara vez bien conocido, sino solamente los puntos de dicho conjunto cuya primera coordenada se mueve en un entorno de un subconjunto de la esfera unidad, cuya envolvente convexa es densa en la bola unidad.

Entrando en el estudio de los operadores que alcanzan el radio numérico discutimos la relación entre los conjuntos $NA(X, X)$ y $R(X)$ aquí presentados. La única relación clara consiste en que si un operador $T \in L(X)$ tiene radio numérico igual a la norma y alcanza el primero, también alcanza la segunda. Sin embargo, en el caso muy particular $X = \ell_2$, mostramos un ejemplo de un operador $T \in L(\ell_2)$ tal que $v(T) = \|T\|$, T alcanza su norma, pero no su radio numérico. Si el radio numérico no coincide con la norma, no cabe esperar ninguna relación y de hecho no la hay: para cada α con $0 \leq \alpha < 1$ encontramos un operador $S \in L(\ell_2)$ (caso real) tal que

$$\|S\| = 1, \ v(S) = \alpha, \ S \in R(\ell_2) \ \text{ y } \ S \notin NA(\ell_2, \ell_2).$$

Como consecuencia de un resultado de G. de Barra, J. Giles y B. Sims [2, Theorem 1], se obtiene que todo operador compacto en un espacio de Hilbert alcanza su radio numérico. Extendemos este resultado a los espacios $\ell_p(\Lambda)$ ($1 < p < \infty$, Λ un conjunto arbitrario), probando de hecho que el producto $[0, 1]V(T)$ es cerrado si T es un operador compacto en $\ell_p(\Lambda)$. Valga esta observación como ejemplo de una condición suficiente para que todos los operadores de una cierta clase alcancen su radio numérico, un problema muy poco estudiado y aparentemente difícil.

Tras estos preliminares, abordamos el problema de la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico. El principal resultado del capítulo 2 afirma:

Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Existe un operador nuclear A en X, de norma nuclear arbitrariamente pequeña, tal que $(T+A)^*$ alcanza su radio numérico. En particular, los operadores cuyos primeros adjuntos alcanzan su radio numérico son densos en $L(X)$.

No es difícil probar que si un operador alcanza su radio numérico, también lo hace su adjunto, no siendo cierto el recíproco. Por tanto, este teorema mejora al obtenido en [1, Theorem 4] para los segundos adjuntos, al igual que, para la norma, Zizler había mejorado el resultado anterior de Lindenstrauss. No obstante, por la misma razón, no se consigue la respuesta general al problema de B. Sims.

El hecho de que el operador A del teorema anterior sea nuclear permite deducir consecuencias interesantes sobre la posiblidad de aproximar un operador en una cierta clase distinguida $\mathcal{A} \subset L(X)$ (operadores nucleares, aproximables, compactos) por operadores de $\mathcal{A}$ cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico. Incluso, para operadores nucleares, podemos utilizar en la aproximación la norma nuclear en lugar de la usual de operadores, obteniendo una convergencia más fuerte de la sucesión aproximante.

La misma condición geométrica de la que J. Lindenstrauss deducía la propiedad "A" (la bola unidad es el cierre de la envolvente convexa de un conjunto de puntos uniformemente expuestos) garantiza también la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico, como demostramos en el teorema principal del capítulo 3. La demostración involucra, por una parte, una no trivial adaptación al caso del radio numérico de los argumentos de J. Lindenstrauss para la norma, adaptación un tanto dificultada por nuestro tratamiento simultáneo de los casos real y complejo (Lindenstrauss sólo se detiene en el caso real); por otra, se hace uso de la determinación del rango numérico a partir de ciertos subconjuntos distinguidos de la esfera, deducida del teorema de Bishop-Phelps-Bollobás y ya comentada, siendo precisamente el conjunto de puntos uniformemente expuestos el que juega el papel distinguido.

Las técnicas de renormación desarrolladas por W. Schachermayer para conseguir la propiedad "A" (véase la respuesta parcial de dicho autor a la pregunta iii) referente a operadores que alcanzan la norma, antes comentada), nos permiten deducir, del teorema principal del capítulo 3 y concluyendo así dicho capítulo, dos consecuencias importantes:

Todo espacio de Banach X débilmente compactamente generado admite una norma equivalente para la cual $R(X)$ es denso en $L(X)$.

Todo espacio de Banach X es (isómetricamente isomorfo a) un subespacio 1-complementado de un espacio de Banach Y, con el mismo carácter de densidad que X, y tal que $R(Y)$ es denso en $L(Y)$.

A la vista de estos dos resultados, caso de que existan espacios de Banach X que no posean la propiedad "$\overline{R(X)} = L(X)$" deberemos admitir que dicha propiedad va a ser muy inestable por isomorfismos y sólo se podrá heredar por subespacios muy especiales. Siguiendo, si se nos permite, en esta línea especulativa, puesto que la noción de rango numérico sólo es aplicable a operadores de un espacio en sí mismo, no parece fácil imaginar propiedades análogas a las "A" y "B" para el radio numérico. Sí cabe pensar en una posible relación entre la propiedad "$\overline{R(X)} = L(X)$" y alguna de las de J. Lindenstrauss. Alguno de los resultados comentados, pero sobre todo los del capítulo 4 que se exponen a continuación, nos invitan a apostar por la propiedad "A".

En el capítulo 4, en paralelismo con el trabajo de J.

Bourgain, damos entrada a la propiedad de Radon-Nikodym. Partiendo de la bien conocida caracterización geométrica de los espacios con la propiedad de Radon-Nikodym (ver [10] y [11]), C. Stegall consigue en 1978 [49] y perfecciona en 1986 [50] un importante teorema de optimización para funciones reales mayoradas y semicontinuas superiormente, definidas en un conjunto de Radon-Nikodym, conocido hoy día con el nombre de "principio de optimización no lineal de Bourgain-Stegall", que es la herramienta decisiva en el capítulo 4 de la memoria. Un argumento elemental, basado en cierta propiedad de semicontinuidad superior de la función de dualidad de un espacio de Banach, nos permite traducir el problema de que un operador alcance su radio numérico en un problema de optimización no lineal del tipo anterior. El teorema de C. Stegall, junto con un poco de trabajo adicional nos permiten concluir:

> *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$. Existe un operador $A \in L(X)$, de rango uno, con $\|A\| < \varepsilon$ tal que $T + A$ alcanza su radio numérico. En particular, $R(X)$ es denso en $L(X)$.*

En una segunda parte del capítulo trabajamos con espacios de Asplund, esto es, espacios de Banach cuyos duales tienen la propiedad de Radon-Nikodym [48]. Para ellos, mejorando el principal resultado del capítulo 2 probamos:

Sea X un espacio de Asplund, $S \in L(X^*)$ y $\varepsilon > 0$. Existe un operador $U \in L(X^*)$, de rango uno, w-continuo y con $\|U\| < \varepsilon$, tal que $S + U$ alcanza el radio numérico. En particular, si $T \in L(X)$, existe $A \in L(X)$, de rango uno y norma arbitrariamente pequeña tal que $(T+A)^*$ alcanza su radio numérico.*

Si se compara este teorema con el anterior, la novedad consiste en que el operador U es w*-continuo. Para conseguir esto, usamos un refinamiento del principio de optimización no lineal antes comentado, válido para espacios duales. La prueba de este retoque es una adaptación de la de C. Stegall, pero es incluso conceptualmente más sencilla, ya que en lugar de los resultados de J . Bourgain sobre la propiedad de Radon-Nikodym, podemos explotar, más a fondo de lo que ya lo hace C. Stegall, las viejas ideas de Smulian referentes a la dualidad entre Fréchet-diferenciabilidad de la norma y puntos fuertemente expuestos.

En el último capítulo de la memoria estudiamos el problema general planteado por B. Sims para una amplia clase de espacios que contiene a numerosos espacios clásicos a los que no son aplicables los resultados de los capítulos anteriores. Se trata de los CL-espacios, introducidos por R. Fullerton [25] . Un espacio de Banach real es un CL-espacio cuando la bola unidad de X es la envolvente absolutamente convexa de cada una de sus caras maximales. En su trabajo sobre extensión de operadores compactos J. Lindenstrauss [38] utiliza la noción de CL-espacio. Resultados de dicho trabajo, junto con otros posteriores de Å. Lima [36] muestran que los espacios reales del tipo $L_1(\mu)$, para cualquier medida positiva μ (L_1-espacios), así como sus preduales, entre los que se encuentran los espacios del tipo $C(K)$, son CL-espacios. Probamos lo siguiente:

Si X es un CL-espacio, todo operador en X tiene radio numérico igual a la norma y alcanza el radio numérico si, y sólo si, alcanza la norma.

Así pues, para CL-espacios, el problema de la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico equivale al correspondiente para la norma. En particular, el resultado de C. Cardassi sobre la densidad de $R(C(K))$ es equivalente al obtenido por Johnson-Wolfe [34] para la norma. De manera análoga, los resultados de A. Iwanik [32] sobre densidad de operadores que alcanzan la norma en $L_1(\mu)$ nos permiten obtener el resultado paralelo para radio numérico, pero esta vez, mejorando el resultado previamente conocido, ya que obtenemos la densidad de $R(L_1(\mu))$ para cualquier medida positiva μ.

Concluimos la memoria con un resultado que extiende el obtenido por C. Cardassi [15] para el espacio c_0.

Sea Λ un conjunto arbitrario y X un subespacio cerrado del espacio de Banach (real ó complejo) $\ell_\infty(\Lambda)$, que contiene a $c_0(\Lambda)$. Entonces $R(X)$ es denso en $L(X)$.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento:

A Rafael Payá Albert, quien sugirió el tema de esta memoria y ha dirigido mi trabajo de investigación durante estos últimos años, por su paciente labor, ayuda, acertadas críticas, sugerencias, así como su trabajo de cuidadosa lectura.

A Angel Rodríguez Palacios, por el interés demostrado y por sugerir la posibilidad de obtener nuevos resultados.

A Juan Francisco Mena Jurado, por su trabajo de lectura y corrección de erratas.

Al resto de mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático, por su ánimo y continuado apoyo.

A Richard Aron y Joe Diestel, por su ayuda y por sugerir nuevas líneas de investigación. También quiero agradecer al resto de los miembros del Departamento de Matemática de Kent State University su amable hospitalidad durante mi estancia allí.

Capítulo 1

Resultados básicos sobre rango numérico de operadores

La siguiente notación se usará, con carácter general en toda la memoria: X denotará un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente, salvo que se especifique concretamente cuál de los dos casos se considera); B_X será la bola unidad de X

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

y S_X la esfera unidad

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Notaremos X^* al dual topológico de X y $L(X)$ al espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de X en sí mismo, con su norma usual dada por:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\} =$$
$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in S_X\} \qquad (T \in L(X)).$$

La palabra "operador" significará siempre "operador lineal y continuo".

Recordamos el concepto de rango numérico de un operador:

Definición 1.1 Si X es un espacio de Banach y $x \in S_X$, el conjunto

$$\{f \in S_{X^*} : f(x) = 1\}$$

es no vacío (teorema de Hahn-Banach), convexo y w*-compacto (teorema de Banach-Alaoglú). Moviendo $x \in S_X$, notaremos $\Pi(X)$ al subconjunto no vacío de $X \times X^*$ dado por

$$\Pi(X) = \{(x, f) \in X \times X^* : \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}.$$

Dado ahora un operador $T \in L(X)$, llamamos **rango numérico** de T y notamos $V(T)$ al conjunto de escalares siguiente:

$$V(T) = \{f(T(x)) : (x, f) \in \Pi(X)\}.$$

Evidentemente el conjunto anterior está acotado; se llama entonces **radio numérico** de T al número real $v(T)$ definido por

$$v(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\}.$$

En el caso particular de que X sea un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot|\cdot)$, notando $\hat{x}$ al funcional

$$y \longrightarrow (y|x)$$

para cada $x \in X$, el teorema de Riesz-Fréchet nos da:

$$\Pi(X) = \{(x, \hat{x}) : x \in S_X\}$$

y por tanto,

$$V(T) = \{(T(x)|x) : x \in S_X\},$$

la definición clásica de rango numérico de un operador en un espacio de Hilbert que, para el caso finito-dimensional se remonta a O. Toeplitz [51].

Desde su aparición en trabajos de G. Lumer [39] y F. Bauer [3] (1961-62), los conceptos de rango y radio numérico de un operador han sido ampliamente estudiados. Referencias obligadas al respecto son las dos monografías debidas a F. Bonsall y J. Duncan [7] y [8], en las que se puede encontrar un amplio desarrollo de la teoría general de rango numérico, así como su relación con la teoría espectral.

A continuación daremos una lista de algunas de las propiedades básicas del rango y radio numéricos de un operador. Estas propiedades elementales se usarán constantemente, a veces sin mencionarlo explícitamente, en la memoria. Su comprobación es inmediata.

Proposición 1.2 [7] *Sea X un espacio de Banach, $S, T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) $V(T + \lambda I) = V(T) + \lambda$, *siendo I el operador identidad.*

ii) $V(\lambda T) = \lambda V(T)$.

iii) $V(T + S) \subset V(T) + V(S)$.

iv) $v(\lambda T) = |\lambda| v(T)$.

v) $v(T + S) \leq v(T) + v(S)$.

vi) $v(T) \leq \|T\|$.

Nótese que iv) y v) muestran que el radio numérico es una seminorma en $L(X)$, que por vi) es continua. En el caso de que el espacio de Banach X sea complejo, y como consecuencia del teorema de Bohnenblust-Karlin [7, Theorem 4.1], el radio numérico es una norma en $L(X)$ equivalente a la norma usual de operadores.

Con objeto de demostrar algunos resultados sobre rango numérico haremos uso del teorema de Bishop-Phelps en su versión mejorada, debida a B. Bollobás que afirma que un elemento de $X \times X^*$ próximo a satisfacer las condiciones que definen al conjunto $\Pi(X)$ está cerca de un elemento de dicho conjunto (en el sentido de la topología producto en $X \times X^*$):

Teorema 1.3 (Bishop-Phelps-Bollobás [6], ver [8, Theorem 16.1]) *Sea X un espacio de Banach y $0 < \varepsilon < 1$. Dados $x \in B_X$ y $f \in S_{X^*}$ verificando*

$$\mathrm{Re}\, f(x) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4},$$

existe $(y, g) \in \Pi(X)$ tal que

$$\|y - x\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|g - f\| < \varepsilon.$$

Si T es un operador en X, T^* denotará el operador adjunto de T, esto es, el operador en X^* definido por

$$[T^*(f)](x) = f(T(x)) \qquad (x \in X, f \in X^*).$$

Haciendo uso del teorema anterior, deduciremos que un operador y su adjunto tienen el mismo radio numérico. Por la importancia que tendrá este hecho en la presente memoria, damos una demostración.

Proposición 1.4 (ver [6] y [8, Corollary 17.3])

Si T es un operador en un espacio de Banach X se verifica

$$V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)},$$

y en consecuencia $v(T) = v(T^*)$.

Demostración. La inclusión $V(T) \subset V(T^*)$ se deduce inmediatamente del hecho de que, dado $(x, f) \in \Pi(X)$, si consideramos al vector x como elemento de X^{**}, se tiene obviamente $(f, x) \in \Pi(X^*)$. Probaremos ahora la otra inclusión, suponiendo, sin perder generalidad, que $\| T \| = 1$.

Sea $\lambda \in V(T^*)$ y $(f, F) \in \Pi(X^*)$ tal que $\lambda = F(T^*(f))$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ tal que:

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{(\varepsilon/3)^2}{4}\right\}.$$

En virtud de la densidad de la esfera de X en la de X^{**} para la topología débil-$*$ (teorema de Goldstine) podemos encontrar $x \in S_X$ tal que:

$$|F(f) - f(x)| < \delta \qquad \text{y} \qquad |F(T^*(f)) - f(T(x))| < \delta.$$

Por ser $F(f) = 1$, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) > 1 - \delta > 1 - \frac{(\varepsilon/3)^2}{4}$$

y aplicando el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, existe un elemento $(y, g) \in \Pi(X)$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notando $\mu = g(T(y))$ tenemos claramente $\mu \in V(T)$ y

$$\begin{aligned}|\lambda - \mu| &= |F(T^*(f)) - g(T(y))| \leq \\ &\leq |F(T^*(f)) - f(T(x))| + |f(T(x)) - g(T(y))| \leq \\ &\leq \delta + |f(T(x)) - f(T(y))| + |f(T(y)) - g(T(y))| \leq \\ &\leq \delta + \|f\|\,\|T\|\,\|x - y\| + \|T\|\,\|y\|\,\|f - g\| = \\ &= \delta + \|x - y\| + \|f - g\| < \delta + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.\end{aligned}$$

luego $\lambda \in \overline{V(T)}$, como se quería.

■

Una nueva aplicación del teorema de Bishop-Phelps-Bollobás nos permitirá demostrar un resultado sobre determinación del rango numérico semejante al que aparece en [7, Theorem 9.3] donde, esencialmente se afirma que cualquier subconjunto de $\Pi(X)$ cuya primera proyección sea un subconjunto denso en S_X, determina el radio numérico de cualquier operador en X. Alternativamente nosotros consideramos un subconjunto E de la esfera unidad que genera la bola por envolvente convexo-cerrada y usamos los puntos de $\Pi(X)$ cuya primera coordenada está suficientemente próxima a E. Ambas determinaciones del radio numérico son independientes; la nuestra será especialmente útil en capítulos posteriores, pero puede tener interés en sí misma, de ahí que la incluyamos aquí como un resultado general sobre rango numérico de operadores.

Notaremos $\overline{\text{co}}E$ a la envolvente convexo-cerrada de un subconjunto E de un espacio de Banach.

Teorema 1.5 *Sea X un espacio de Banach y $E \subset S_X$, tal que*

$$B_X = \overline{\text{co}}E.$$

Para cada operador $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\overline{\text{co}}V(T) = \overline{\text{co}}\{f(T(x)) : (x, f) \in \Pi(X), \text{dist}(x, E) < \varepsilon\}.$$

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, para $T \in L(X)$ pongamos

$$V_\varepsilon(T) = \{f(T(x)) : (x, f) \in \Pi(X), \text{dist}(x, E) < \varepsilon\}$$

y queremos probar que

(1) $$\overline{\text{co}}V(T) \subset \overline{\text{co}}V_\varepsilon(T)$$

(la otra inclusión es obvia).

Notemos

$$M(T) = \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in V(T)\} \quad \text{y}$$

$$M_\varepsilon(T) = \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in V_\varepsilon(T)\}.$$

Bastará probar que

(2) $$M(T) = M_\varepsilon(T), \quad \forall T \in L(X).$$

En efecto, supuesto demostrado (2), si $\lambda_0 \notin \overline{\text{co}}V_\varepsilon(T)$, el teorema de separación de conjuntos convexos (para el caso complejo, en caso real las cosas son aún más claras) nos daría un escalar μ con $|\mu| = 1$ tal que

$$\text{Re}\,(\mu\lambda_0) > \sup\{\text{Re}\,(\mu\lambda) : \lambda \in V_\varepsilon(T)\} = M_\varepsilon(\mu T)$$

y aplicando (2) al operador μT se tendrá

$$\text{Re}\,(\mu\lambda_0) > M(\mu T),$$

con lo que $\mu\lambda_0 \notin \overline{\text{co}}V(\mu T)$, esto es, $\lambda_0 \notin \overline{\text{co}}V(T)$.

Nos concentramos por tanto en la prueba de (2), para la cual podemos evidentemente suponer que $\|T\| = 1$ y, como quiera que T permanecerá fijo durante el resto de la demostración, escribiremos simplemente $M = M(T)$ y $M_\varepsilon = M_\varepsilon(T)$. Fijamos δ verificando $0 < \delta < 1$ y $\delta\varepsilon < 1$, tomamos $\eta = \delta\varepsilon$ y $\alpha = \dfrac{\eta^2}{20}$. Por definición de M, existirá $(y, g) \in \Pi(X)$ tal que

$$\text{Re}\ g(T(y)) > M - \eta$$

con lo cual se tendrá

$$g(y) + \alpha\text{Re}\ g(T(y)) > 1 + \alpha(M - \eta). \tag{3}$$

La hipótesis $B_X = \overline{\text{co}}E$, nos permite encontrar

$e_1, \cdots, e_n \in E$ y números positivos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \text{y} \qquad \|y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| < \eta\alpha.$$

Reemplazando y por $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ en (3) obtenemos

$$1 + \alpha M < \text{Re } g(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) + \alpha \text{Re } g(T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)) + 3\alpha\eta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\text{Re } \ g(e_i) + \alpha \text{Re } \ g(T(e_i))] + 3\alpha\eta,$$

luego ha de existir un natural $i \leq n$ tal que

(4) $\qquad 1 + \alpha M < \text{Re } \ g(e_i) + \alpha \text{Re } g(T(e_i)) + 3\alpha\eta$

por tanto,

$$\text{Re } g(e_i) > 1 - \alpha(-M + \text{Re } \ g(T(e_i)) + 3\eta) \geq$$

$$\geq 1 - \alpha(2 + 3\eta) \geq 1 - 5\alpha = 1 - \frac{\eta^2}{4},$$

donde se ha usado que $-M \leq \|T\| = 1$,

Re $g(T(e_i)) \leq 1$, $\eta < 1$ y la elección de $\alpha = \frac{\eta^2}{20}$. Aplicando el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás (Teorema 1.3) existe una pareja $(x, f) \in \Pi(X)$ tal que

$$(5) \qquad \|f - g\| < \eta \qquad \text{y} \qquad \|x - e_i\| < \eta,$$

en particular, se tiene $\operatorname{dist}(x, E) < \eta$, luego $\operatorname{Re} f(T(x)) \leq M_\eta$. Por otra parte, de (4), teniendo en cuenta $\operatorname{Re}\ g(e_i) \leq 1$ se obtiene

$$M < \operatorname{Re}\ g(T(e_i)) + 3\eta,$$

y usando (5) tenemos

$$\operatorname{Re}\ g(T(e_i)) = \operatorname{Re}\ g(T(e_i - x)) + \operatorname{Re}\ [g - f](T(x)) +$$

$$+ \operatorname{Re}\ f(T(x)) \leq 2\eta + \operatorname{Re}\ f(T(x)) \leq 2\eta + M_\eta.$$

Enlazando las dos últimas desigualdades, hemos probado

$$M < M_\eta + 5\eta.$$

Recordando la elección de $\eta = \delta\varepsilon$ tenemos

$$M < M_{\delta\varepsilon} + 5\delta\varepsilon \leq M_\varepsilon + 5\delta\varepsilon$$

donde se ha usado que $\delta\varepsilon < \varepsilon$ con lo que $V_{\delta\varepsilon}(T) \subset V_\varepsilon(T)$ y por tanto $M_{\delta\varepsilon} \leq M_\varepsilon$. Finalmente, haciendo $\delta \to 0$ llegamos a

$$M \leq M_\varepsilon.$$

La desigualdad contraria es evidente y hemos probado (2), lo que concluye la demostración. ■

El resultado anterior nos permite, en particular, determinar el radio numérico de un operador usando solamente puntos de la esfera arbitrariamente próximos al conjunto E. Puesto que sólo nos interesa ahora el radio numérico se puede incluso debilitar la hipótesis sobre E. Notaremos $\mathbb{D}$ a la bola unidad del cuerpo base y $\mathbb{T}$ a su esfera unidad. De esta forma, $\overline{\text{co}}(\mathbb{T}E) = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}E)$ es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de E.

Corolario 1.6 *Sea X un espacio de Banach y E un subconjunto de su esfera unidad tal que $B_X = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}E)$. Para $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$ se tiene:*

$$v(T) = \sup\{|f(T(x))| : (x, f) \in \Pi(X), \text{dist}(x, E) < \varepsilon\}.$$

Demostración. Si $(x, f) \in \Pi(X)$, $\lambda \in \mathbb{T}$, se tiene claramente

$$(\lambda x, \frac{1}{\lambda} f) \in \Pi(X) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\lambda} f(T(\lambda x)) = f(T(x)),$$

luego el segundo miembro de la igualdad a demostrar no se altera al sustituir E por $\mathbb{T}E$. Podemos por tanto suponer $E = \mathbb{T}E$, con lo que basta aplicar el teorema anterior. ■

Con el corolario anterior damos por concluido nuestro estudio de resultados generales sobre rango numérico de operadores y pasamos ya a considerar el tipo de operadores que vamos a manejar durante toda la memoria, concretamente, los operadores para los que el supremo que define a su radio numérico es de hecho un máximo:

Definición 1.7 Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$; decimos que T **alcanza su radio numérico** si existe un elemento $(x, f) \in \Pi(X)$ tal que $|f(T(x))| = v(T)$. Notaremos por $R(X)$ el conjunto de los operadores en X que alcanzan su radio numérico.

Vamos a dar algunos ejemplos para discutir la relación existente entre los operadores que alcanzan la norma y los que alcanzan el radio numérico.

Partamos de un hecho elemental:
Si un operador T tiene norma igual al radio numérico y T alcanza el radio numérico, es decir, existe $(x, f) \in \Pi(X)$ tal que $|f(T(x))| = v(T) = \|T\|$, en particular será $\|T(x)\| = \|T\|$, por lo que T alcanza la norma. Ahora bien, si un operador T tiene norma igual al radio numérico y alcanza la norma, en general no tiene porqué alcanzar el radio numérico, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.8 Sea H el espacio de Hilbert separable cuyo producto escalar notamos por $(\cdot|\cdot)$ y $T : H \longrightarrow H$ el operador que verifica

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2 \\ T(e_2) &= 0 \\ T(e_n) &= \alpha_n e_n, \quad \text{si} \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión convergente a uno con $0 < \alpha_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

El operador T se representa matricialmente en la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & & & 0 & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ \hline & & \alpha_3 & & & & \\ & & & \alpha_4 & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & 0 & & \alpha_n & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

y viene definido por:

$$T(x) = (x|e_1)e_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n (x|e_n)e_n \qquad (x \in H).$$

con lo que se tiene, para todo $x \in H$:

$$(T(x)|e_1) = 0$$

$$(T(x)|e_2) = (x|e_1) \quad \text{y}$$

$$(T(x)|e_n) = \alpha_n(x|e_n) \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

Es claro que $\|T\| \leq 1$ y que $T(e_1) = e_2$, luego $\|T\| = 1$ y T alcanza su norma en e_1. Por otra parte

$$v(T) \geq |(T(e_n)|e_n)| = \alpha_n \qquad (n \geq 3)$$

luego $v(T) \geq 1$ y por ser $v(T) \leq \|T\| = 1$, se tiene $v(T) = 1$. Además, vamos a ver que T no alcanza el radio numérico.

En efecto, dado $x \in S_H$, se tiene

$$|(T(x)|x)| = \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}(T(x)|e_n)(e_n|x)\right)\right| =$$

$$= \left|(x|e_1)(e_2|x) + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n |(x|e_n)|^2\right| \leq$$

$$\leq |(x|e_1)(e_2|x)| + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n |(x|e_n)|^2$$

y cabe ahora distinguir dos casos:

Si para algún $n \geq 3$ es $(x|e_n) \neq 0$ tenemos claramente

$$|(T(x)|x)| < \sum_{n=3}^{\infty} |(x|e_n)|^2 + |(x|e_2)|\,|(x|e_1)| \leq \|x\|^2 = 1$$

Supongamos pues que $(x|e_n) = 0$ para $n \geq 3$. Entonces,

$$|(T(x)|x)| = |(x|e_1)(e_2|x)| \leq \frac{1}{2}\left[|(x|e_1)|^2 + |(x|e_2)|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}.$$

En cualquier caso, $|(T(x)|x)| < 1$. ■

El ejemplo anterior parece indicar que para un operador es más difícil alcanzar su radio numérico que alcanzar su norma. Sin embargo, cuando el radio numérico no llega a ser igual a la norma, un operador puede alcanzar el primero sin alcanzar la segunda como mostramos a continuación:

Ejemplo 1.9 Dado un número real α con $0 \leq \alpha < 1$, existe un operador S en el espacio de Hilbert real separable H tal que $v(S) = \alpha$, $\|S\| = 1$, S alcanza su radio numérico pero no su norma.

Consideramos el operador

$$S : H \longrightarrow H$$

que verifica

$$\left.\begin{aligned} S(e_{3n-2}) &= -\alpha_n e_{3n-1} \\ S(e_{3n-1}) &= \alpha_n e_{3n-2} \\ S(e_{3n}) &= \alpha e_{3n}, \end{aligned}\right. \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales verificando $0 < \alpha_n < 1$ y $\{\alpha_n\} \to 1$.

La expresión matricial del operador es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \\ \hline \end{array} & & & & & \\ & \boxed{\alpha} & & & & \\ & & \begin{array}{|cc|} \hline 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \\ \hline \end{array} & & & \\ & & & \boxed{\alpha} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

y, explícitamente, S viene dado por:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x|e_{3n-1}) e_{3n-2} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x|e_{3n-2}) e_{3n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (x|e_{3n}) e_{3n} \qquad (x \in H),$$

con lo que se tiene, para $x \in H$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$(S(x)|e_{3n-2}) = \alpha_n (x|e_{3n-1}),$$

$$(S(x)|e_{3n-1}) = -\alpha_n (x|e_{3n-2}) \quad \text{y}$$

$$(S(x)|e_{3n}) = \alpha (x|e_{3n})$$

Si $x \in H$ es un elemento distinto de cero, se tiene

$$\|S(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(S(x)|e_n)|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n^2 |(x|e_{3n-1})|^2 + \alpha_n^2 |(x|e_{3n-2})|^2 + \alpha^2 |(x|e_{3n})|^2\right] <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = \|x\|^2,$$

de donde, $\|S\| \leq 1$.

Además, como $\|S(e_{3n-1})\| = \alpha_n$ y $\{\alpha_n\} \to 1$, ha de ser $\|S\| = 1$, y S no alcanza la norma.

Comprobamos ahora que S alcanza el radio numérico. Observemos en primer lugar que $v(S) \leq \alpha$. En efecto, sea $x \in S_H$ y calculemos $(S(x)|x)$

$$(S(x)|x) = \sum_{n=1}^{\infty}(S(x)|e_n)(e_n|x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x|e_{3n-1})(e_{3n-2}|x)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x|e_{3n-2})(e_{3n-1}|x) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha|(x|e_{3n})|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha|(x|e_{3n})|^2 \leq \alpha\|x\|^2 = \alpha.$$

por tanto $v(S) \leq \alpha$.

Por ser $(S(e_3)|e_3) = \alpha$, se tiene $v(S) = \alpha$ y además S alcanza el radio numérico. ■

Antes de plantear el problema central del que nos ocuparemos a lo largo de toda la memoria, daremos una serie de condiciones suficientes, bastante restrictivas por cierto, para que un operador alcance su radio numérico. Excepto, tal vez, el referente a los operadores compactos en espacios ℓ_p, estos resultados son conocidos aunque no aparecen explícitamente en la literatura. Empezamos con un hecho completamente elemental:

Proposición 1.10 *El rango numérico de un operador en un espacio normado finito-dimensional es un conjunto compacto. En particular, un tal operador alcanza su radio numérico.*

Demostración. Si X es un espacio normado finito-dimensional, el conjunto $\Pi(X)$ es compacto en $X \times X^*$ con la topología producto y, para $T \in L(X)$, la función bilineal

$$(x, f) \longrightarrow f(T(x))$$

es continua. ■

El ejemplo 1.8 muestra que un operador en el espacio de Hilbert separable puede no alcanzar el radio numérico. De hecho el ejemplo puede simplificarse, obteniendo, como se verá en el próximo capítulo, un operador diagonal y autoadjunto en dicho espacio que sigue sin alcanzar el radio numérico. Tal patología no se puede dar para operadores compactos como muestran los próximos resultados:

Proposición 1.11 *El rango numérico de un operador de rango finito en un espacio de Hilbert es un conjunto compacto.*

Demostración. Notaremos por H al espacio de Hilbert. Si $T \in L(H)$ es un operador de rango finito, T admite la forma

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|y_k)x_k \quad (x \in H),$$

para ciertos elementos $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in H$. Sea M el subespacio de H generado por

$$\{x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n\}$$

Se tiene claramente $T(M^\perp) = \{0\}$ y $T(H) \subset M$.

Dado un elemento x de la esfera unidad de H, consideramos la descomposición $x = a + b$, con $a \in M$, $b \in M^\perp$ y $\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|x\|^2 = 1$. Entonces:

$$(T(x)|x) = (T(a+b)|a+b) =$$

$$= (T(a)|a+b) = (T(a)|a).$$

por tanto,

$$V(T) = \{(T(x)|x) : x \in H, \|x\| = 1\} =$$

$$= \{(T(a)|a) : a \in M, \|a\| \leq 1\}.$$

Por ser M finito-dimensional, B_M es compacto y por tanto $V(T)$ también lo es.

■

Si un operador en un espacio de Hilbert es compacto, el rango numérico no tiene porqué ser cerrado. Considérese, por ejemplo, en el espacio de Hilbert separable, el operador dado por:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x|e_n)e_n \qquad (x \in H)$$

para cualquier base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H. Es claro que el operador T es compacto y $0 \notin V(T)$, ya que para $x \in H$, $\|x\| = 1$, se tiene

$$(T(x)|x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x|e_n)|^2}{n} > 0.$$

Si embargo, $0 \in \overline{V(T)}$, ya que

$$(T(e_n)|e_n) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Como consecuencia de un resultado de G. de Barra, Giles y Sims [2, Theorem 1] se obtiene que para un operador compacto T en un espacio de Hilbert, el conjunto

$$[0,1]V(T) = \{t\lambda : 0 \leq t \leq 1, \lambda \in V(T)\}$$

es compacto. Generalizamos este resultado, estableciéndolo para espacios $\ell_p(\Lambda)$ con $1 < p < \infty$ y Λ un conjunto arbitrario. Siguiendo la notación estándar, $\ell_p(\Lambda)$ es el espacio de las funciones $x : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que la familia

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$$

es sumable, con norma dada por

$$\|x\|^p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \quad (x \in \ell_p(\Lambda))$$

Usaremos la identificación de $\ell_p(\Lambda)^*$ con $\ell_q(\Lambda)$ donde q es el exponente conjugado de p: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mediante dicha identificación, un elemento $y \in \ell_q(\Lambda)$ se corresponde con el funcional $f \in \ell_p(\Lambda)^*$ dado por

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} y(\lambda)x(\lambda) \quad (x \in \ell_p(\Lambda))$$

Discutiendo la posible igualdad en la desigualdad de Hölder [35, página 137] se obtiene fácilmente que si x e y son puntos de la esfera unidad de $\ell_p(\Lambda)$ y $\ell_q(\Lambda)$, respectivamente y f es el funcional determinado por y, entonces $(x, f) \in \Pi(\ell_p(\Lambda))$ si y sólo si

$$y(\lambda) = |x(\lambda)|^{\frac{p}{q}} \alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

donde, para $\lambda \in \Lambda$, $\alpha(\lambda)$ es un escalar verificando que:

$$|\alpha(\lambda)| = 1 \quad \text{y} \quad |x(\lambda)| = \alpha(\lambda) x(\lambda).$$

Usaremos también el hecho de que la convergencia débil de elementos de la bola unidad de $\ell_p(\Lambda)^*$ equivale a la convergencia puntual de las correspondientes funciones de la bola unidad de $\ell_q(\Lambda)$.

Proposición 1.12 *Sea Λ un conjunto arbitrario, $1 < p < \infty$ y T un operador compacto en $\ell_p(\Lambda)$. Entonces, el conjunto $[0,1]V(T)$ es compacto.*

Demostración. Es suficiente probar que $\overline{V(T)} \subset [0,1]V(T)$. Sea $\mu \in \overline{V(T)}$ con $\mu \neq 0$ (si $\mu = 0$ no hay nada que demostrar), $\{(x_n, f_n)\}$ una sucesión de elementos de $\Pi(\ell_p(\Lambda))$ con $\{f_n(T(x_n))\} \to \mu$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea y_n el elemento de $\ell_q(\Lambda)$ que representa al funcional f_n. De acuerdo con los comentarios anteriores se tendrá:

$$y_n(\lambda) = |x_n(\lambda)|^{\frac{p}{q}} \alpha_n(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N})$$

donde $|\alpha_n(\lambda)| = 1$, $|x_n(\lambda)| = \alpha_n(\lambda) x_n(\lambda)$.

La reflexividad de $\ell_p(\Lambda)$ nos permite suponer que la sucesión $\{x_n\}$ converge en la topología débil a un elemento x de la bola unidad de $\ell_p(\Lambda)$, esto es, para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene $\{x_n(\lambda)\} \to x(\lambda)$. Pongamos, para cada $\lambda \in \Lambda$

$$|x(\lambda)| = \alpha(\lambda)x(\lambda) \qquad \text{con} \qquad |\alpha(\lambda)| = 1,$$

y sea

$$y(\lambda) = |x(\lambda)|^{\frac{p}{q}}\alpha(\lambda), \quad \forall\lambda \in \Lambda.$$

Es claro que y pertenece a la bola unidad de $\ell_q(\Lambda)$ y notamos f al correspondiente funcional en $\ell_p(\Lambda)$. Veamos que $\{f_n\}$ converge a f en la topología débil de $\ell_p(\Lambda)^*$, esto es, $\{y_n(\lambda)\} \to y(\lambda)$ $\forall\lambda \in \Lambda$. En efecto, si $x(\lambda) = 0$ se tiene $\{x_n(\lambda)\} \to 0 = y(\lambda)$, mientras que si $x(\lambda) \neq 0$ será $x_n(\lambda) \neq 0$ para n suficientemente grande, con lo que:

$$y_n(\lambda) = |x_n(\lambda)|^{\frac{p}{q}}\frac{|x_n(\lambda)|}{x_n(\lambda)} \to |x(\lambda)|^{\frac{p}{q}}\frac{|x(\lambda)|}{x(\lambda)} = y(\lambda).$$

Por la compacidad de T, la sucesión $\{T(x_n)\}$ converge en norma a $T(x)$. La desigualdad evidente

$$\begin{aligned}
&|f_n(T(x_n)) - f(T(x))| \leq \\
&\leq |f_n(T(x_n)) - f_n(T(x))| + |f_n(T(x)) - f(T(x))| \leq \\
&\leq \|f_n\| \, \|T(x_n) - T(x)\| + |(f_n - f)(T(x))| \leq \\
&\leq \|T(x_n) - T(x)\| + |(f_n - f)(T(x))|,
\end{aligned}$$

implica entonces que $\{f_n(T(x_n))\} \to f(T(x))$, luego

$$\mu = f(T(x)).$$

Por último, observemos que

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} y(\lambda)x(\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha(\lambda)|x(\lambda)|^{\frac{p}{q}}x(\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^{\frac{p}{q}+1} = \sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p =$$

$$= \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |x(\lambda)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\ \|x\|.$$

Por ser $\mu = f(T(x)) \neq 0$ se tiene $x \neq 0$ y $f \neq 0$, luego

$$\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{f}{\|f\|}\right) \in \Pi(\ell_p(\Lambda))$$

y

$$\mu = \|f\|\ \|x\| \left[\frac{f}{\|f\|}\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)\right] \in [0,1]V(T)$$

como se quería. ∎

Corolario 1.13 *Todo operador compacto en $\ell_p(\Lambda)$ ($1 < p < \infty$, Λ un conjunto arbitrario) alcanza su radio numérico. En particular todo operador compacto en un espacio de Hilbert alcanza su radio numérico.*

Si salimos de espacios tan perfectos geométricamente como los del tipo $\ell_p(\Lambda)$ es posible que incluso un operador de rango uno no alcance su radio numérico, como se muestra a continuación para el espacio ℓ_1 (un ejemplo similar podría construirse para c_0).

Ejemplo 1.14 El operador

$$T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$$

dado por

$$T(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x(n) \right) e_1 \quad (x \in \ell_1),$$

(e_1 es el elemento de ℓ_1 dado por $e_1(1) = 1$, $e_1(n) = 0$ para $n \geq 2$) tiene norma igual al radio numérico y no alcanza la norma (mucho menos el radio numérico).

En efecto, dado un elemento $x \in \ell_1$ distinto de cero, de la desigualdad evidente

$$\|T(x)\| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x(n)\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)|x(n)| < \|x\|$$

se tiene que $\|T\| \leq 1$. Si para cada natural n, e_n es el n-ésimo vector de la base canónica de ℓ_1, como se tiene

$\|T(e_n)\| = 1 - \dfrac{1}{n}$, de hecho $\|T\| = 1$, y T no alcanza la norma.

Para calcular el radio numérico del operador T, definimos para cada número natural n, el funcional f_n dado por

$$f_n(x) = x(1) + x(n) \quad (x \in \ell_1).$$

Así, el elemento (e_n, f_n) está en el conjunto $\Pi(\ell_1)$ y

$$f_n(T(e_n)) = 1 - \frac{1}{n},$$

de donde $v(T) \geq 1$ y por ser siempre $v(T) \leq \|T\|$ se deduce que $v(T) = 1$.

Tras las consideraciones anteriores, en general elementales, con las que hemos pretendido dar una idea de la dificultad que supone para un operador en un espacio de dimensión infinita el alcanzar su radio numérico pasamos a plantear el problema central del que vamos a ocuparnos durante el resto de la memoria.

En 1972 B. Sims, en su tesis doctoral, demostró que, en un espacio de Hilbert, el conjunto de los operadores autoadjuntos que alcanzan su radio numérico es denso en el conjunto de todos los operadores autoadjuntos. A partir de este resultado concreto formuló la siguiente pregunta general:

Problema

¿Para qué espacios de Banach X se tiene la densidad de los operadores en X que alcanzan su radio numérico?

La pregunta anterior guarda notable similitud con la referente a operadores que alcanzan su norma planteada por E. Bishop y R. Phelps que se enunció al principio de la introducción de esta memoria. Como se verá, las respuestas parciales al problema de Sims que hoy por hoy se conocen, incluidas las que vamos a obtener aquí, guardan también un marcado paralelismo.

Capítulo 2

Operadores que alcanzan el radio numérico en espacios de Banach generales

En este capítulo se considera el problema de la materialización del radio numérico para operadores definidos en espacios de Banach a los que no se exige ninguna propiedad geométrica. El primer resultado al respecto, válido para cualquier espacio de Banach, aparece en [1, Theorem 4], donde se probó que el conjunto de los operadores cuyos segundos adjuntos alcanzan el radio numérico es, siempre, denso. Nuestro primer objetivo es mejorar tal resultado, estableciendo la afirmación análoga para los primeros adjuntos.

Recordemos que $R(X)$ denota el conjunto de los operadores en el espacio de Banach X que alcanzan su radio numérico. Notaremos ahora $R_1(X)$ al conjunto de los operadores cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico, esto es:

$$R_1(X) = \{T \in L(X) : T^* \in R(X^*)\}.$$

Avanzando un paso más, podemos considerar el conjunto

$$R_2(X) = \{T \in L(X) : T^{**} \in R(X^{**})\}.$$

Como consecuencia del hecho de que un operador y su adjunto tienen el mismo radio numérico (Proposición 1.4), es inmediato comprobar que si un operador alcanza su radio numérico, también lo hace su adjunto. Se tiene por tanto, para cualquier espacio de Banach X, que

$$R(X) \subset R_1(X) \subset R_2(X).$$

Se verá más adelante que estas inclusiones pueden ser estrictas. Como se ha dicho, se probó en [1] que $\overline{R_2(X)} = L(X)$ para cualquier X y vamos a probar que, de hecho, $R_1(X)$ es ya denso en $L(X)$, también sin hipótesis sobre X.

Las siguientes consideraciones pueden ayudar a comprender la técnica de demostración que vamos a utilizar.

Dado un espacio de Banach X y un operador T en $L(X)$, elegimos una sucesión $\{(x_n, f_n)\}$ en $\Pi(X)$ tal que $\{|f_n(T(x_n))|\}$ converge al radio numérico de T. Desearíamos, naturalmente, conseguir algún valor adherente a la sucesión $\{(x_n, f_n)\}$ que pudiera materializar el radio numérico de T. El teorema de Alaoglú nos permite considerar sendos valores adherentes F y f a las sucesiones $\{x_n\}$

y $\{f_n\}$, en las topologías débil-$*$ de X^{**} y X^*, respectivamente. En el mejor de los casos el par (f, F) pertenecería a $\Pi(X^*)$ y podría materializar el radio numérico de T^*. Tal cosa no tiene por qué ocurrir:

Considérese, por ejemplo, el operador T en el espacio de Hilbert separable H, tal que

$$T(e_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n, \quad \forall n$$

donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H . Se puede comprobar fácilmente que

$$\|T\| = 1 \qquad \text{y} \qquad (T(e_n)|e_n) = 1 - \frac{1}{n},$$

por lo que $v(T) = 1$. Por otra parte, es claro que T no alcanza el radio numérico, ya que $\|T(x)\| < \|x\|$ para todo elemento x en la esfera unidad de H . La sucesión $\{e_n\}$ permite aproximar el radio numérico de T, pero converge débilmente a cero.

La clave para que el proceso descrito al principio pueda llevarse a cabo con éxito, consiste en que la sucesión $\{(x_n, f_n)\}$ sea tal que, no solamente $|f_n(T(x_n))|$ sea una buena aproximación del radio numérico de T, sino que también lo sea $|f_m(T(x_n))|$ para los naturales m posteriores a n, al tiempo que $|f_m(x_n)|$ también se aproxima a uno para m posterior a n .

La formalización de esta idea lleva al lema de caracterización de los elementos de $R_1(X)$, que enunciamos a continuación. Este resultado es similar al de Lindenstrauss [37, Lemma 1] que caracteriza los operadores cuyos segundos adjuntos alcanzan la norma.

Lema 2.1 *Sea X un espacio de Banach y $S \in L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) S^* alcanza su radio numérico.

ii) Existen sucesiones $\{x_n\}$ en X y $\{f_n\}$ en X^* tales que:

(a) $\|f_n\| = \|x_n\| = 1$

(b) $\lim_n \inf_k |f_{n+k}(x_n)| = 1$

(c) $\underline{\lim}_n \inf_k |f_{n+k}(S(x_n))| \geq v(S)$.

Demostración. i)$\Rightarrow$ii) Sea $(f, F) \in \Pi(X^*)$ tal que

$$|F(S^*(f))| = v(S^*) = v(S).$$

Usando la w*-densidad de B_X en $B_{X^{**}}$(teorema de Goldstine), podemos elegir, para cada n, un elemento x_n en la esfera unidad de X tal que

$$|f(x_n) - F(f)| \leq \frac{1}{n}$$

y

$$|f(S(x_n)) - F(S^*(f))| \leq \frac{1}{n}.$$

Se obtiene entonces

$$|f(x_n) - 1| \leq \frac{1}{n}$$

y

$$|f(S(x_n)) - v(S)| \leq \frac{1}{n},$$

es decir,

$$1 - \frac{1}{n} \leq |f(x_n)| \leq 1$$

y

$$-\frac{1}{n} + v(S) \leq |f(S(x_n))| \leq v(S) + \frac{1}{n},$$

con lo cual se verifican fácilmente las condiciones de ii) tomando $f_n = f$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

ii)$\Rightarrow$i)] En virtud del teorema de Banach-Alaoglú, podemos afirmar la existencia de un elemento f de B_{X^*}, valor adherente a la sucesión $\{f_n\}$ en la topología débil-$*$ de X^*. Análogamente, sea F un elemento de $B_{X^{**}}$ adherente a $\{x_n\}$ en la topología débil-$*$ de X^{**}. Fijado n, las desigualdades

$$\inf_k |f_{n+k}(x_n)| \leq |f_m(x_n)|$$

y

$$\inf_k |f_{n+k}(S(x_n))| \leq |f_m(S(x_n))|,$$

válidas para cualquier natural m posterior a n, implican

$$\inf_k |f_{n+k}(x_n)| \leq |f(x_n)| \leq 1$$

y

$$\inf_k |f_{n+k}(S(x_n))| \leq |f(S(x_n))|.$$

Puesto que $|F(f)|$ y $|F(S^*(f))|$ son valores adherentes a las sucesiones $\{|f(x_n)|\}$ y $\{|f(S(x_n))|\}$ respectivamente, las hipótesis b) y c) nos permiten concluir que

$$|F(f)| = 1$$

y

$$|F(S^*(f))| \geq v(S).$$

Tomando $\lambda = \frac{1}{F(f)}$, tenemos que $(f, \lambda F) \in \Pi(X^*)$, mientras que la segunda desigualdad nos da

$$v(S) \leq |\lambda F(S^*(f))|,$$

esto es, S^* alcanza su radio numérico.

■

El siguiente lema técnico muestra la forma de perturbar sucesivamente un operador, de manera que se consiga, tras un proceso iterativo, otro que verifique la condición ii) del lema anterior.

Lema 2.2 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Dados tres números reales positivos α , δ y ρ, y un elemento (x, f) de $\Pi(X)$ tal que*

$$|f(T(x))| > v(T) - \alpha,$$

sea $\hat{T}$ el operador definido por

$$\hat{T}(z) = T(z) + \lambda\delta f(z)x + \delta^2 f(z)T(x) \qquad (z \in X),$$

donde λ es un escalar de módulo uno tal que

$$f(T(x)) = \lambda|f(T(x))|.$$

Si $(y, g) \in \Pi(X)$ es tal que

$$|g(\hat{T}(y))| > v(\hat{T}) - \rho,$$

entonces

$$1 + \delta v(T) \leq |g(x)| + \delta|g(T(x))| + \frac{\rho}{\delta} + \frac{\alpha}{\delta}(1 + \delta^2).$$

Demostración. Es claro que

$$v(\hat{T}) < |g(\hat{T}(y))| + \rho \leq$$

$$\leq |g(T(y))| + \delta|f(y)|\ |g(x)| + \delta^2|f(y)|\ |g(T(x))| + \rho \leq$$

$$\leq v(T) + \delta|g(x)| + \delta^2|g(T(x))| + \rho,$$

donde se han usado la elección del par $(y, g) \in \Pi(X)$, la definición de $\hat{T}$ y la desigualdad evidente $|f(y)| \leq 1$.

Por otra parte, teniendo en cuenta la forma de elegir (x, f) en $\Pi(X)$ y λ en $\mathbb{K}$, tenemos:

$$v(\hat{T}) \geq |f(\hat{T}(x))| =$$

$$|f(T(x)) + \lambda\delta f(x)^2 + \delta^2 f(x) f(T(x))| =$$

$$= |(1 + \delta^2) f(T(x)) + \lambda\delta| =$$

$$= (1 + \delta^2)|f(T(x))| + \delta \geq$$

$$\geq (1 + \delta^2) v(T) - \alpha(1 + \delta^2) + \delta.$$

Enlazando las dos desigualdades anteriores se obtiene:

$$\delta + (1+\delta^2) v(T) \leq v(T) + \delta|g(x)| + \delta^2|g(T(x))| + \rho + \alpha(1+\delta^2)$$

y basta restar $v(T)$ en ambos miembros y dividirlos por δ para llegar a la desigualdad buscada. ∎

Estamos ya en condiciones de probar la densidad del conjunto de operadores cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico. Este resultado es análogo al obtenido por Zizler [54, Proposition 4] para operadores que alcanzan la norma, si bien la idea principal de la demostración se hallaba ya en el trabajo pionero de Lindenstrauss [37, Theorem 1]. La adaptación de estas ideas al caso del radio numérico precisa, como se verá, retoques esenciales.

Con objeto de resaltar todo el contenido de la demostración, merece la pena involucrar la noción de operador nuclear. Recordemos que un operador A en un espacio de Banach X se dice *nuclear* cuando puede expresarse en la forma

$$(*) \qquad A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n \qquad (x \in X)$$

donde $\{x_n\}$ y $\{f_n\}$ son sucesiones de elementos de X y X^*, respectivamente, verificando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|x_n\| < \infty.$$

La norma nuclear del operador A anterior viene dada por

$$\|A\|_{nuc} = \text{Inf}\ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|x_n\| \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones del operador A de la forma descrita en $(*)$ (véase, por ejemplo, [22, pag. 170]).

Teorema 2.3 *Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Existe un operador nuclear A en $L(X)$, de norma nuclear arbitrariamente pequeña, tal que $(T+A)^*$ alcanza su radio numérico.*

Demostración. Sea $T \in L(X)$, que podemos suponer de norma uno y $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Elegimos dos sucesiones decrecientes de números reales positivos $\{\delta_n\}$ y $\{\alpha_n\}$ verificando

$$\text{(1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\delta_n + 2\delta_n^2\right) < \varepsilon,$$

$$\text{(2)} \qquad \lim_n \frac{1}{\delta_n^2} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right) \right) = 0$$

y

$$(3) \qquad \left\{ \frac{\alpha_n}{\delta_n^2} \right\} \to 0.$$

(Se puede elegir, por ejemplo, $\delta_n = \dfrac{\varepsilon}{3.2^{n!}}$ y $\alpha_n = \delta_n^3$.)

A partir del operador T, vamos a construir por inducción una sucesión de operadores, iterando el proceso del Lema 2.2. Tomamos

$$(4) \qquad T_1 = T$$

y supuesto construido T_n, elegimos un elemento $(x_n, f_n) \in \Pi(X)$ tal que

$$(5) \qquad |f_n(T_n(x_n))| \geq v(T_n) - \alpha_n$$

y definimos T_{n+1} por

$$T_{n+1}(x) = T_n(x) + \lambda_n \delta_n f_n(x) x_n + \delta_n^2 f_n(x) T_n(x_n) \quad (x \in X),$$

donde λ_n es un escalar de módulo uno tal que

$$(6) \qquad f_n(T_n(x_n)) = \lambda_n |f_n(T_n(x_n))|.$$

Comprobamos por inducción que se verifica

$$(7) \qquad \|T_{n+1}\| \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} (\delta_i + 2\delta_i^2) \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En efecto, se tiene

$$\|T_2\| \leq \|T_1\| + \delta_1\|f_1\| \, \|x_1\| + \delta_1^2\|f_1\| \, \|T_1\| \, \|x_1\| \leq$$

$$\leq 1 + \delta_1 + \delta_1^2 \leq 2,$$

que es (7) para $n = 1$. Supuesto

$$\|T_{n+1}\| \leq 1 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_i + 2\delta_i^2) \leq 2,$$

tenemos

$$\|T_{n+2}\| \leq \|T_{n+1}\| + \delta_{n+1} + \|T_{n+1}\|\delta_{n+1}^2 \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{i=1}^{n}(\delta_i + 2\delta_i^2) + \delta_{n+1} + 2\delta_{n+1}^2 =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n+1}(\delta_i + 2\delta_i^2) \leq 1 + \varepsilon < 2$$

y (7) queda probado. Como consecuencia se obtiene

$$(8) \quad \|T_{n+k} - T_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} \|T_{i+1} - T_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right),$$

lo que, en vista de (1), implica que la sucesión $\{T_n\}$ es de Cauchy, luego converge a un operador S. Haciendo $k \to \infty$ en (8) obtenemos:

$$\|S - T_n\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

Nuestro objetivo ahora es probar que S verifica las condiciones del Lema 2.1. Para lograr esto, partimos de la desigualdad

$$\begin{aligned}
&|f_{n+k}(T_{n+1}(x_{n+k}))| \geq \\
&\geq |f_{n+k}(T_{n+k}(x_{n+k}))| - \|T_{n+k} - T_{n+1}\| \geq \\
&\geq v(T_{n+k}) - \alpha_{n+k} - \|T_{n+k} - T_{n+1}\| \geq \\
&\geq v(T_{n+1}) - \alpha_{n+k} - 2\|T_{n+k} - T_{n+1}\| \geq \\
&\geq v(T_{n+1}) - \alpha_n - 2\sum_{i=n+1}^{n+k-1} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right) \geq \\
&\geq v(T_{n+1}) - \alpha_n - 2\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right),
\end{aligned}$$

donde hemos usado (5), (8), el decrecimiento de $\{\alpha_n\}$ y el hecho de que $|v(T_{n+1}) - v(T_{n+k})| \leq \|T_{n+1} - T_{n+k}\|$. Estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.2, tomando $T = T_n$, $\alpha = \alpha_n$, $\delta = \delta_n$, $(x, f) = (x_n, f_n)$, con lo cual el operador $\hat{T}$ del lema coincide con T_{n+1} y la desigualdad recién probada nos dice que las hipótesis del lema se cumplen para

$(y, g) = (x_{n+k}, f_{n+k})$ y $\rho = \alpha_n + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right)$. El lema

nos da:

$$1 + \delta_n v(T_n) \leq |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(T_n(x_n))| +$$

$$+\frac{1}{\delta_n}\left[2\alpha_n + \alpha_n \delta_n^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right)\right].$$

Cambiando T_n por S en la desigualdad anterior y teniendo en cuenta la acotación del error así cometido, dada por (9) se obtiene

$$(10) \qquad 1 + \delta_n v(S) \leq |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(S(x_n))| + \varepsilon_n,$$

donde

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\delta_n}\left[2\alpha_n + \alpha_n \delta_n^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right)\right] +$$

$$+2\delta_n \sum_{i=n}^{\infty} \left(\delta_i + 2\delta_i^2\right)$$

y, las condiciones (1), (2), y (3) hacen que

$\left\{\frac{\varepsilon_n}{\delta_n}\right\} \to 0$. De (10), por ser $\|S\| \leq 2$, se deduce

$$\begin{aligned} 1 &\leq |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(S(x_n))| + \varepsilon_n \leq \\ &\leq |f_{n+k}(x_n)| + 2\delta_n + \varepsilon_n \end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$v(S) \leq |f_{n+k}(S(x_n))| + \frac{\varepsilon_n}{\delta_n}.$$

Las desigualdades anteriores, válidas para todo n y k nos permiten obtener

$$1 - 2\delta_n - \varepsilon_n \leq \inf_k |f_{n+k}(x_n)| \leq 1,$$

$$v(S) - \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} \leq \inf_k |f_{n+k}(S(x_n))|.$$

Teniendo en cuenta que $\{\delta_n\}$ y $\left\{\frac{\varepsilon_n}{\delta_n}\right\}$ convergen a cero

se tiene la condición ii) del Lema 2.1, por lo que S^* alcanza el radio numérico.

Tomando $A = S - T$, resta probar que el operador A es nuclear con $\|A\|_{nuc} < \varepsilon$. Nótese que, para $x \in X$ y n natural, se tiene

$$T_{n+1}(x) - T_n(x) = f_n(x)\left[\lambda_n \delta_n x_n + \delta_n^2 T_n(x_n)\right],$$

por tanto

$$(T_{k+1} - T)(x) = \sum_{n=1}^{k} (T_{n+1} - T_n)(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\left[\lambda_n \delta_n x_n + \delta_n^2 T_n(x_n)\right] \qquad (k \in \mathbb{N}), \tag{11}$$

y, tomando límite en k,

$$A(x) = (S - T)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) y_n,$$

donde

$$y_n = \lambda_n \delta_n x_n + \delta_n^2 T_n(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Finalmente, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|\,\|y_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\delta_n + \delta_n^2 \|T_n\|\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\delta_n + 2\delta_n^2\right) < \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración.

■

Considerando el caso particular de que el operador T del teorema anterior sea ya un operador nuclear obtenemos:

Corolario 2.4 *Todo operador nuclear en un espacio de Banach es límite, en la norma nuclear, de una sucesión de operadores nucleares cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico.*

Teniendo en cuenta que evidentemente

$$\|A\| \leq \|A\|_{nuc}$$

para cualquier operador nuclear A, así como la densidad de los operadores de rango finito en el conjunto de los operadores nucleares, del Teorema 2.3 deducimos

Corolario 2.5 *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{A}$ un subespacio cerrado de $L(X)$ que contiene a los operadores de* *rango finito. El conjunto de los operadores de $\mathcal{A}$ cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico es denso en $\mathcal{A}$.*

En particular, se puede tomar como $\mathcal{A}$ el espacio de los operadores aproximables, compactos ó débilmente compactos, pero la elección que nos interesa en lo que sigue es $\mathcal{A} = L(X)$:

Corolario 2.6 *Para cualquier espacio de Banach X, $R_1(X)$ es denso en $L(X)$.*

Como se comentó al principio de este capítulo, el corolario anterior mejora el obtenido en [1, Theorem 4] según el cual $R_2(X)$ es denso en $L(X)$. De cualquiera de estos dos resultados se deduce el siguiente hecho:

Corolario 2.7 [1, Corollary 5] *Si X es un espacio de Banach reflexivo, el conjunto de los operadores en X que alcanzan el radio numérico es denso en $L(X)$.*

El anterior corolario mejora los resultados de I.Berg-B. Sims [4, Theorem] y de C. S. Cardassi [16, Corollary 2] afirmando la misma tesis para espacios uniformemente convexos y uniformemente suaves, respectivamente. No obstante, el resultado se mejorará notablemente en un capítulo posterior.

A continuación nos detenemos a considerar una clase de espacios X, para los cuales las inclusiones

$$R(X) \subset R_1(X) \subset R_2(X)$$

son estrictas.

Dado cualquier espacio de Banach E, notaremos $c_0(E)$ al espacio de Banach de las sucesiones convergentes a cero en E, con norma dada por

$$\|x\| = \max\{\|x(n)\| : n \in \mathbb{N}\},$$

donde para $x \in c_0(E)$ y $n \in \mathbb{N}$, $x(n)$ es el n-ésimo término de la sucesión x.

Proposición 2.8 *Sea E un espacio de Banach y $X = c_0(E)$. Se tiene:*

$$R(X) \neq R_1(X) \neq R_2(X).$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que $R(X) \neq R_1(X)$. Para ello definimos un operador T en $L(X)$ por

$$T(x)(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(n)$$

y

$$T(x)(k) = 0, \quad \text{para} \quad k \neq 1.$$

Dado un elemento x de la bola unidad de X se verifica

$$(1) \quad \|T(x)\| = \|T(x)(1)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|x(n)\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

de donde $\|T\| \leq 1$. Comprobaremos ahora que $v(T) \geq 1$; para ello elegimos un elemento $(a, a^*) \in \Pi(E)$ y, fijado un natural k, definimos

$$u(n) = a \quad \text{si} \quad n \leq k, \quad u(n) = 0 \quad \text{si} \quad n > k \quad \text{y}$$
$$f(x) = a^* \left(x(1)\right) \qquad \forall x \in X.$$

Es inmediato comprobar que (u, f) es un elemento de $\Pi(X)$, luego

$$v(T) \geq |f\left(T(u)\right)| = \left| a^* \left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} a \right] \right| = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k},$$

y de la arbitrariedad de k se sigue que $\|T\| = v(T) = 1$. Por (1), T no alcanza la norma y, a fortiori, T no alcanza el radio numérico. Ahora bien, T^* sí alcanza el radio numérico. Para probarlo, usaremos en lo que sigue la total identificación de X^* con el espacio $\ell_1(E^*)$ de las sucesiones $y : \mathbb{N} \longrightarrow E^*$ tales que la serie $\sum_{n \geq 1} \|y(n)\|$ es convergente

con norma dada por

$$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y(n)\| \qquad \forall y \in \ell_1(E^*).$$

Esta identificación, notando $< \cdot, \cdot >$ a las formas bilineales canónicas correspondientes a los pares duales (X, X^*) y (E, E^*), viene dada por

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} < x(n), y(n) >$$

para $x \in X$ e $y \in \ell_1(E^*)$. Con ello, para $y \in \ell_1(E^*)$, $T^*(y)$ viene dado por

$$T^*(y)(n) = \frac{1}{2^n} y(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Elegimos un elemento (a^*, a^{**}) de $\Pi(E^*)$ y consideramos los elementos $v \in X^*$ y $F \in X^{**}$ dados por

$$v(1) = a^*, \quad v(n) = 0 \quad \text{para} \quad n \neq 1 \quad \text{y}$$

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{**}(y(n)), \quad (y \in \ell_1(E^*)).$$

El par (v, F) está en $\Pi(X^*)$ y fácilmente se obtiene que $F(T^*(v)) = 1$ con lo que T^* alcanza el radio numérico por ser $v(T^*) = v(T) = 1$. En resumen, T pertenece a $R_1(X)$ y no a $R(X)$.

Demostraremos ahora que la inclusión $R_1(X) \subset R_2(X)$ es estricta. Sea S el elemento de $L(X)$ definido por

$$S(x)(n) = \alpha_n x(n) \qquad (x \in X),$$

siendo $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales verificando $0 < \alpha_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_n\} \to 1$. Claramente se tiene

$$\|S(x)\| = \max_n \|\alpha_n x(n)\| \leq \|x\| \sup_n \alpha_n = \|x\|,$$

para todo x en X, de donde $\|S\| \leq 1$. Por otra parte, para cualquier natural n, $\alpha_n \in V(S)$; en efecto, dado $(a, a^*) \in \Pi(E)$, definiendo

$$(2) \qquad \begin{aligned} u(n) &= a, \quad u(k) = 0 \quad \text{para} \quad k \neq n \quad \text{y} \\ f(x) &= a^*(x(n)) \quad (x \in X), \end{aligned}$$

es claro que $(u, f) \in \Pi(X)$ y $f(S(u)) = \alpha_n$, luego $\alpha_n \in V(S)$. Así ,

$$1 = \sup_n \alpha_n \leq v(S) \leq \|S\| \leq 1,$$

de donde $v(S) = 1$.

El operador S^* viene dado por

$$S^*(y)(n) = \alpha_n y(n) \quad (y \in \ell_1(E^*) = X^*)$$

y S^* no alcanza su norma, ya que, para y en la esfera unidad de X^*, se tiene

$$\|S^*(y)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|y(n)\| < \sum_{n=1}^{\infty} \|y(n)\| = 1.$$

Como consecuencia, S^* no alcanza el radio numérico, esto es, S no pertenece a $R_1(X)$. Sólo resta comprobar que $S \in R_2(X)$. Para ello, notemos que, teniendo en cuenta la identificación de X^{**} con el espacio $\ell_\infty(E^{**})$ de las sucesiones acotadas de elementos de E^{**} (norma del supremo) el operador S^{**} viene dado por

$$S^{**}(z)(n) = \alpha_n z(n) \qquad (z \in \ell_\infty(E^{**})).$$

Fijemos a en la esfera unidad de E, y le consideraremos como un elemento de E^{**}. Definimos un elemento $w \in S_{X^{**}}$, por

$$w(n) = a, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto $D = \{\varphi \in X^{***} : (w, \varphi) \in \Pi(X^{**})\}$ es un subconjunto w*-compacto de X^{***} y $S^{**}(w)$ puede considerarse como un funcional w*-continuo en X^{***}, luego existe $\varphi_0 \in D$ tal que

$$|\varphi_0(S^{**}(w))| = \max\{|\varphi(S^{**}(w))| : \varphi \in D\},$$

máximo que denotaremos por ρ. Claramente $\varphi_0(S^{**}(w)) \in V(S^{**})$, luego sólo resta probar que $\rho = 1$. Sea a^* un elemento de E^* tal que $(a, a^*) \in \Pi(E)$, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y pongamos

$$v(n) = a^*, \ v(k) = 0 \quad \text{para} \quad k \neq n.$$

Es claro que $v \in \ell_1(E^*)$ y que, considerando a v como un elemento de X^{***}, $v \in D$. Así

$$\rho \geq |v(S^{**}(w))| = \alpha_n,$$

luego $1 \leq \rho \leq v(S) = 1$, como se quería. ■

La amplia clase de espacios descrita en la proposición anterior nos permite afirmar que el Corolario 2.6 mejora estrictamente el principal resultado de [1]; sin embargo, la misma proposición proporciona una gama de espacios para los cuales no se sabe si $R(X)$ es denso en $L(X)$.

Capítulo 3

Puntos fuertemente expuestos y operadores que alcanzan el radio numérico

En este capítulo probamos la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico para espacios que verifican una propiedad geométrica bastante restrictiva, que ya fue utilizada por J. Lindenstrauss en [37] en relación con operadores que alcanzan la norma. El interés de esta propiedad radica, en primer lugar, en el hecho de que, bajo hipótesis muy generales, un espacio de Banach puede renormarse de forma que la verifique, con lo que tal propiedad resulta muy poco restrictiva desde un punto de vista algebraico-topológico. Por otra parte, todo espacio de Banach es isométricamente isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con la mencionada propiedad. Ambos resultados se deben a W. Schachermayer [45, Theorems 4.4 and 4.6]. Obtenemos, por tanto, teoremas generales de renormación y de inmersión en espacios para los que se verifica la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico.

Para introducir la mencionada propiedad de Lindenstrauss precisamos fijar algunos conceptos:

Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X. Recordemos que $x_0 \in A$ es un *punto expuesto* de A cuando existe un funcional $f \in X^*$, tal que

$$\text{Re } f(x) < \text{Re } f(x_0), \qquad \text{para} \qquad x \in A \backslash \{x_0\};$$

esto es, la función Re f tiene máximo en A y lo alcanza solamente en el punto x_0. Si, además, se verifica que toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, tal que

$$\{\text{Re } f(x_n)\} \to \text{Re } f(x_0),$$

converge en norma a x_0, se dice que x_0 es un *punto fuertemente expuesto* de A. Resulta natural la siguiente "uniformización" del concepto anterior, que por comodidad introducimos para el caso particular en que A es la bola unidad.

Definición 3.1 [37, página 143]. *Si X es un espacio de Banach, diremos que una familia*

$$\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

de elementos de X^* expone uniformemente a una familia $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de elementos de X cuando se verifican

i) $\|x_\alpha\| = \|f_\alpha\| = f_\alpha(x_\alpha) = 1,\ \forall \alpha \in \Lambda.$

ii) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *puede encontrarse* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \in \Lambda \\ x \in B_X \\ \operatorname{Re} f_\alpha(x) > 1 - \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \|x - x_\alpha\| < \varepsilon.$$

Si no es necesario enfatizar los funcionales $\{f_\alpha\}$ diremos simplemente que el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es uniformemente expuesto.

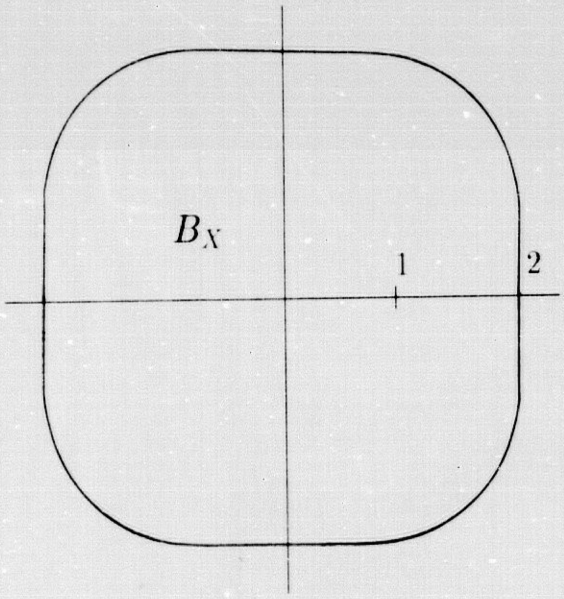
Como ejemplos ilustrativos de la definición anterior, citemos los de [37, página 143]:

- la esfera unidad de un espacio uniformemente convexo es una familia uniformemente expuesta.

- los puntos extremos de la bola unidad de ℓ_1 forman una familia uniformemente expuesta.

En ambos casos, la bola unidad del espacio coincide con el cierre de la envolvente absolutamente convexa de la citada familia uniformemente expuesta. Se afirma también en [37] la existencia de espacios de dimensión finita cuya bola unidad no puede obtenerse de esa forma. Por la trascendencia que más adelante tendrá este hecho, estudiamos con detalle un ejemplo concreto de esta situación.

Ejemplo 3.2 Se considera $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la norma cuya bola unidad es $B_X = \mathbb{D} + B_\infty$, siendo $\mathbb{D}$ y B_∞ las bolas unidad para la norma euclídea y la norma del máximo, respectivamente.



Probaremos que no existe ningún subconjunto uniformemente expuesto E de B_X tal que

$$B_X = \overline{\text{co}}(E \cup -E).$$

Notemos, en primer lugar, que los puntos de la forma $(t, 2)$ con $-1 < t < 1$ tienen norma uno, como puede comprobarse fácilmente. Por tanto estos puntos no son extremos, menos aún expuestos, luego no pueden formar parte de ninguna familia uniformemente expuesta de B_X.

Necesitamos hacer uso de la norma dual en X^*; tras la identificación natural de X^* con $\mathbb{R}^2$ dicha norma, $\|\cdot\|^*$, se calcula como sigue:

$$\|(a,b)\|^* =$$

$$= \sup\{|a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)| : (x_1,y_1)\in \mathbb{D},$$

$$(x_2,y_2)\in B_\infty\} =$$

$$= \sup\{|ax_1+by_1| : (x_1,y_1)\in \mathbb{D}\} +$$

$$+ \sup\{|ax_2+by_2| : (x_2,y_2)\in B_\infty\} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}+|a|+|b|,$$

así pues la norma en X^* es la suma de la norma euclídea con la norma de la suma.

Supongamos que la bola unidad B_X es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de un subconjunto uniformemente expuesto E. Como quiera que $E\cup -E$ también es uniformemente expuesto, podemos suponer que $E=-E$. Por ser $(0,2)\in B_X$ deberá existir una sucesión $\{(x_n,y_n)\}$ de puntos de E con $\{y_n\}\to 2$ y, por el comentario hecho anteriormente, se tiene $|x_n|\geq 1$ con lo que, pasando a una sucesión parcial puede tenerse de hecho $x_n\geq 1$ para todo n. Cada uno de los términos de la sucesión $\{x_n\}$, por el hecho de ser puntos expuestos, deberá obtenerse como suma de puntos extremos de $\mathbb{D}$ y B_∞, luego

$$(x_n, y_n) = (1, 1) + (\cos\varphi_n, \text{sen}\varphi_n)$$

con $\varphi_n \in [0, \pi/2]$ para todo n.

Sea ahora $(a_n, b_n) \in X^*$ tal que

$$\|(a_n, b_n)\|^* = a_n x_n + b_n y_n = 1.$$

Entonces,

$$1 = a_n + b_n + a_n cos\varphi_n + b_n \text{sen}\varphi_n \leq$$

$$\leq |a_n| + |b_n| + |a_n| cos\varphi_n + |b_n| \text{sen}\varphi_n \leq$$
$$\leq |a_n| + |b_n| + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \|(a_n, b_n)\|^* = 1,$$

donde se ha usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así pues, a_n, $b_n \geq 0$ y además

$$\frac{1}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}(a_n, b_n) = (\cos\varphi_n, \text{sen}\varphi_n).$$

Por ser $\{y_n\} \to 2$, ha de ocurrir que $\{\text{sen}\varphi_n\} \to 1$, con lo que $\{a_n\} \to 0$ y $\{b_n\} \to \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\{(a_n, b_n)(0, 2)\} = \{2b_n\} \to 1$$

y, sin embargo, $\|(0,2)-(x_n,y_n)\|$ no converge a cero, ya que $\{x_n\}$ no tiende a cero, luego los puntos $\{(x_n,y_n)\}$ no pueden ser uniformemente expuestos por los funcionales $\{(a_n,b_n)\}$.

■

Probaremos en este capítulo que para espacios de Banach cuya bola unidad es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia uniformemente expuesta se tiene la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico. En la construcción usada para demostrar este resultado, precisamos estimar el radio numérico de un operador usando puntos próximos a los de un conjunto uniformemente expuesto, para lo que usaremos el Teorema 1.5. Además precisamos los dos lemas siguientes:

Lema 3.3 *Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de puntos de X uniformemente expuesta por el conjunto de elementos de X^* $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supongamos que*

$$\lim_n \inf_{k>n} |f_n(x_k)| = 1,$$

entonces la sucesión $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente en norma.

Demostración. Para cada natural n, notamos

$$\gamma_n = \inf_{k>n} |f_n(x_k)|;$$

por hipótesis la sucesión $\{\gamma_n\}$ converge a uno.

Consideremos, ahora, para cada natural k, la sucesión α_k definida por

$$\alpha_k(n) = f_n(x_k) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Por ser $\|x_n\| = \|f_n\| = 1$ para todo natural n, $\{\alpha_k\}$ es una sucesión de elementos de la bola unidad de ℓ_∞. Usando ahora que la topología débil-$*$ de la bola unidad de ℓ_∞ es metrizable [33, Proposition 27.8], se consigue una sucesión parcial $\{\alpha_{\sigma(k)}\}$ convergente en la topología débil-$*$. Por tanto, para cada natural n, la sucesión $\{\alpha_{\sigma(k)}(n)\}_k = \{f_n(x_{\sigma(k)})\}_k$ converge a un escalar λ_n. Para n fijo y $k > n$, por ser $\sigma(k) > n$ se tiene

$$1 \geq |f_n(x_{\sigma(k)})| \geq \gamma_n,$$

de donde, haciendo $k \to \infty$ se obtiene

$$1 \geq |\lambda_n| \geq \gamma_n.$$

La hipótesis del lema implica entonces que $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 1$.

Extraemos una parcial $\{\lambda_{\sigma(\tau(n))}\}$ de la sucesión $\{\lambda_{\sigma(n)}\}$ convergente a un escalar λ, que ha de tener módulo uno. Tomamos ahora

$$y_n = x_{\sigma(\tau(n))},\ g_n = f_{\sigma(\tau(n))},\ \mu_n = \lambda_{\sigma(\tau(n))} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tenerse, para cada n natural

$$\lim_k f_n(x_{\sigma(k)}) = \lambda_n,$$

en particular se verifica

$$\lim_k f_{\sigma(\tau(n))}(x_{\sigma(k)}) = \lambda_{\sigma(\tau(n))} = \mu_n,$$

y por tanto

$$\lim_k f_{\sigma(\tau(n))}(x_{\sigma(\tau(k))}) = \mu_n,$$

esto es,

$$\lim_k g_n(y_k) = \mu_n, \qquad \text{para cada natural} \qquad n,$$

y evidentemente se tiene además $\lim_n \mu_n = \lambda$.

Probaremos ahora que $\{y_n\}$ (sucesión parcial de $\{x_n\}$) es convergente en norma.

Por ser $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto uniformemente expuesto por los funcionales $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, es claro que los conjuntos $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ también cumplen esta condición. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, puede encontrarse un positivo δ, verificando

$$x \in B_X, n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} g_n(x) > 1 - \delta \Rightarrow \|x - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ser $\lim_n \mu_n = \lambda$, se tiene

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |\mu_n - \lambda| < \frac{\delta}{2}.$$

Fijados ahora dos naturales p y q posteriores a n_0, usando que $\{g_p(y_k)\} \to \mu_p$ y $\{g_q(y_k)\} \to \mu_q$ tenemos

$$|g_p(y_k) - \mu_p| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{y} \qquad |g_q(y_k) - \mu_q| < \frac{\delta}{2},$$

para k suficientemente grande, y, por tanto,

$$|g_p(y_k) - \lambda| < \delta \quad \text{y} \quad |g_q(y_k) - \lambda| < \delta.$$

Teniendo en cuenta que λ tiene módulo uno, las expresiones anteriores se pueden escribir de la forma

$$|g_p(\lambda^{-1}y_k) - 1| < \delta \qquad \text{y} \qquad |g_q(\lambda^{-1}y_k) - 1| < \delta,$$

luego

$$\text{Re } g_p(\lambda^{-1}y_k) > 1 - \delta \qquad \text{y} \qquad \text{Re } g_q(\lambda^{-1}y_k) > 1 - \delta$$

y usando ahora el hecho de que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia uniformemente expuesta se tiene

$$\|(\lambda^{-1}y_k) - y_p\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \|(\lambda^{-1}y_k) - y_q\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde $\|y_p - y_q\| < \varepsilon$. Se ha probado que la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy, lo que concluye la demostración.

■

El segundo lema nos da una caracterización de los operadores que alcanzan el radio numérico, válida para cualquier espacio de Banach. La dificultad, en general, estriba en construir operadores cuyo radio numérico se pueda aproximar usando una sucesión convergente en norma.

Lema 3.4 *Sea X un espacio de Banach, $S \in L(X)$ y $\{(x_n, f_n)\}$ una sucesión de elementos de $\Pi(X)$, tal que*

$$\{|f_n(S(x_n))|\} \to v(S).$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge en norma, entonces S alcanza el radio numérico.

Demostración. Gracias al teorema de Banach-Alaoglú, podemos elegir un valor adherente f en la topología débil-$*$ de X^* a la sucesión $\{f_n\}$. Si llamamos x al límite de la sucesión $\{x_n\}$ se tiene

$$|1 - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \|f_n\| \ \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \leq$$
$$\leq \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)|,$$

de donde se deduce que $f(x) = 1$, ya que la sucesión $\{f_n(x)\}$ tiene a $f(x)$ como valor adherente. Así, la pareja (x, f) es un elemento de $\Pi(X)$, ya que $\|x\| = 1 = f(x)$ y $\|f\| \leq 1$.

Razonando de manera análoga con la desigualdad

$$|\ |f(S(x))| - |f_n(S(x_n))|\ | \leq |f(S(x)) - f_n(S(x_n))| \leq$$
$$\leq |f(S(x)) - f_n(S(x))| + |f_n(S(x)) - f_n(S(x_n))| \leq$$
$$\leq |(f - f_n)(S(x))| + \|f_n\| \ \|S\| \ \|x - x_n\| \leq$$
$$\leq |(f - f_n)(S(x))| + \|S\| \ \|x - x_n\|,$$

se deduce que $|f(S(x))|$ es un punto adherente a la sucesión $|f_n(S(x_n))|$, y por tanto coincidirá con el límite de dicha sucesión, es decir, $|f(S(x))| = v(S)$, por lo que S alcanza el radio numérico.

■

Teorema 3.5 *Sea X un espacio de Banach, tal que B_X es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia de puntos uniformemente expuestos. Dado $T \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe un operador nuclear A, con norma nuclear menor que ε y tal que $T + A$ alcanza el radio numérico.*

Demostración. Sea E el conjunto uniformemente expuesto cuya envolvente absolutamente convexa es densa en B_X. Suponemos que $\|T\| = 1$ y $v(T) \neq 0$ y elegimos una sucesión decreciente $\{\varepsilon_n\}$ de reales positivos, tal que

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon_n^2 \qquad y \qquad \varepsilon_n \leq \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A partir del operador T construimos por inducción una sucesión de operadores, mutando cada operador de la sucesión por otro de rango uno, para obtener el siguiente.

Definimos $T_1 = T$; supuesto construido T_n, aplicando el Corolario 1.6, elegimos $x_n \in E$ e $(y_n, g_n) \in \Pi(X)$, tales que

$$(3) \qquad \|x_n - y_n\| < \varepsilon_n^2 \quad \text{y}$$

$$(4) \qquad |g_n(T_n(y_n))| \geq v(T_n) - \varepsilon_n^2,$$

y definimos

$$(5) \qquad T_{n+1}(x) = T_n(x) + \lambda_n \varepsilon_n f_n(x) y_n \qquad (x \in X),$$

siendo f_n el funcional de norma uno asociado al punto fuertemente expuesto x_n, y λ_n un escalar de módulo uno verificando

$$(6)\quad |g_n(T_n(y_n)) + \lambda_n \varepsilon_n f_n(y_n)| = |g_n(T_n(y_n))| + \varepsilon_n |f_n(y_n)|.$$

Probaremos, en primer lugar, que la sucesión $\{T_n\}$ es convergente. Se tiene claramente

$$(7)\quad T_{n+1}(x) = T(x) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k f_k(x) y_k \qquad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

Por ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n \lambda_n f_n\| \, \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon,$$

poniendo

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n f_n(x) y_n \qquad (x \in X)$$

obtenemos un operador nuclear A cuya norma nuclear es menor que ε. Además, notando $S = T + A$ es claro que

$$(8)\qquad \|T_{n+1} - S\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k < {\varepsilon_n}^2 < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Una acotación que necesitaremos más adelante y se deduce claramente de (7) y (2) es:

$$(9) \qquad \|T_k - T_{n+1}\| \leq \sum_{j=n+1}^{k-1} \varepsilon_j <$$

$$< \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_j < {\varepsilon_n}^2 < \varepsilon \quad (n, k \in \mathbb{N}, k > n+1).$$

Sólo nos resta comprobar que S alcanza el radio numérico. Para ello tenemos en cuenta la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
v(T_{n+1}) &\geq |g_n(T_{n+1}(y_n))| = && \text{(por (5))}\\
&= |g_n(T_n(y_n)) + \lambda_n \varepsilon_n f_n(y_n)| = && \text{(por (6))}\\
&= |g_n(T_n(y_n))| + \varepsilon_n |f_n(y_n)| \geq && \text{(por (4))}\\
(10) \qquad &\geq v(T_n) - \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n |f_n(y_n)| \geq && \text{(por (3))}\\
&\geq v(T_n) - \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n(|f_n(x_n)| - \varepsilon_n^2) = &&\\
&= v(T_n) - \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n(1 - \varepsilon_n^2), &&
\end{aligned}$$

en particular, por la elección de ε_n se obtiene el crecimiento de la sucesión $v(T_n)$.

Usando la desigualdad anterior, y el hecho de que la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ es decreciente obtenemos, para naturales k posteriores a n,

$$|g_k(T_{n+1}(y_k))| \geq |g_k(T_k(y_k))| - \|T_k - T_{n+1}\| \geq \qquad \text{(por (4))}$$

$$\begin{aligned}
&\geq v(T_k) - \varepsilon_k^2 - \|T_k - T_{n+1}\| \geq \qquad (\text{por } (9))\\
&\geq v(T_k) - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_n^2 \geq\\
&\geq v(T_{n+1}) - 2\varepsilon_n^2 \geq \qquad (\text{por } (10))\\
&\geq v(T_n) - 3\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n(1 - \varepsilon_n^2).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se verifica

$$\begin{aligned}
|g_k(T_{n+1}(y_k))| = |g_k(T_n(y_k)) + \lambda_n \varepsilon_n f_n(y_k) g_k(y_n)| \leq\\
\leq v(T_n) + \varepsilon_n |f_n(y_k)|,
\end{aligned}$$

desigualdad válida para cualesquiera n y k. Uniendo ambas desigualdades y dividiendo por ε_n, se obtiene para n y k naturales con $k > n$

$$1 \leq |f_n(y_k)| + 4\varepsilon_n \quad (k > n),$$

y usando (3) para cambiar y_k por x_k en la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
1 \leq |f_n(x_k)| + 4\varepsilon_n + \varepsilon_k^2 \leq\\
\leq |f_n(x_k)| + 5\varepsilon_n \qquad (k > n).
\end{aligned}$$

Usando ahora que los puntos $\{x_n\}$ son uniformemente expuestos por los funcionales $\{f_n\}$, podemos aplicar el Lema 3.3, obteniéndose que la sucesión $\{x_n\}$ admite una parcial convergente en norma a un elemento x necesariamente de S_X. En vista de (3), la sucesión $\{y_n\}$ admite también una parcial, que seguiremos notando igual, convergente a x. Finalmente tenemos

$$|g_n(S(y_n))| \geq |g_n(T_n(y_n))| - \|T_n - S\| \geq \qquad (\text{por } (4))$$

$$\geq v(T_n) - \varepsilon_n^2 - \|T_n - S\| \geq$$
$$\geq v(S) - \varepsilon_n^2 - 2\|T_n - S\| \geq \qquad \text{(por (8))}$$

$$\geq v(S) - \varepsilon_n^2 - 2\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

por lo que la sucesión $\{|g_n(S(y_n))|\}$ converge a $v(S)$ y usando el Lema 3.4, S alcanza el radio numérico.

■

Si bien el resultado análogo al anterior es conocido para operadores que alcanzan la norma [37], ambos son independientes, como prueban los ejemplos 1.8 y 1.9.

Corolario 3.6 *Sea X un espacio de Banach cuya bola unidad es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia uniformemente expuesta. Si $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado de $L(X)$, que contiene a los operadores de rango finito, entonces los operadores de $\mathcal{A}$ que alcanzan el radio numérico son densos en $\mathcal{A}$.*

Como caso particular, tomando $\mathcal{A} = L(X)$, del resultado anterior obtenemos:

Corolario 3.7 *Sea X un espacio de Banach tal que B_X es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia uniformemente expuesta. Entonces los operadores en X que alcanzan el radio numérico son densos en $L(X)$.*

Con el objeto de dar los resultados de renormación e inmersión anunciados al principio de este capítulo, definimos la propiedad α, usada por W. Schachermayer [45] para estudiar ciertas cuestiones sobre el problema de densidad de operadores que alcanzan la norma.

Definición 3.8 [45, Definition 1.2]. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad α si existe una familia $\{(x_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ de puntos de $X \times X^*$ y un número real λ con $0 \leq \lambda < 1$ verificando*

i) $f_\alpha(x_\alpha) = \|f_\alpha\| = \|x_\alpha\| = 1 \qquad (\alpha \in \Lambda)$.

ii) *Si* $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta$, $|f_\alpha(x_\beta)| \leq \lambda$.

iii) *La bola unidad de X es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de la familia $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.*

Schachermayer demuestra [45, página 202, Fact] que los espacios con la propiedad α verifican la hipótesis del corolario anterior, es decir, su bola unidad es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia de puntos uniformemente expuestos, por lo que se verifica

Corolario 3.9 *Si X es un espacio de Banach con la propiedad α, el conjunto $R(X)$ es denso en $L(X)$.*

Usando ahora el teorema [45, Theorem 4.6] de inmersión de cualquier espacio de Banach en uno que posee la propiedad α se deduce el siguiente hecho:

Corolario 3.10 *Para cualquier espacio de Banach X, existe otro espacio de Banach Y con el mismo carácter de densidad que X, tal que X está 1-complementado en Y y $R(Y)$ es denso en $L(Y)$.*

Obsérvese que el hecho de que cualquier espacio de Banach real es un subespacio de otro espacio de Banach para el cual se tiene la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico es evidente, ya que cada espacio de Banach puede considerarse como subespacio del espacio de funciones continuas sobre la bola unidad de su dual de manera obvia, y para los espacios reales del tipo $C(K)$ se tiene la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico [14, Theorem 6].

Como todo espacio de Banach WCG puede renormarse equivalentemente de forma que tenga la propiedad α [45, Theorem 4.4] se obtiene

Corolario 3.11 *Todo espacio de Banach débilmente compactamente generado admite una renormación equivalente, para la cual los operadores que alcanzan el radio numérico son densos.*

Un caso particular e interesante del resultado anterior es el que sigue:

Corolario 3.12 *Todo espacio de Banach separable se puede renormar equivalentemente para que el conjunto de ope-*

radores que alcanzan el radio numérico sea denso en el conjunto de todos los operadores.

No sabemos (y probablemente es un problema abierto) si la hipótesis de que el espacio de Banach sea débilmente compactamente generado es esencial en el teorema de renormación de Schachermayer que se ha utilizado en los dos últimos corolarios. Queda planteada, por tanto, la cuestión de si todo espacio de Banach se puede renormar para conseguir la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico.

Capítulo 4

Densidad de operadores que alcanzan el radio numérico en espacios con la propiedad de Radon-Nikodym

Los resultados de este capítulo se refieren a espacios de Banach con alguna propiedad adicional, tales como los espacios de Asplund o los espacios con la propiedad de Radon-Nikodym. El teorema principal del capítulo afirma que, para espacios con la propiedad de Radon-Nikodym (RNP) el conjunto de operadores que alcanzan el radio numérico es denso. La RNP tiene su origen en la teoría de medidas vectoriales y, esencialmente, el que un espacio la posea significa que el teorema de Radon-Nikodym es válido para medidas vectoriales con valores en X, bajo ciertas condiciones naturales. Omitimos una definición rigurosa en estos términos dado que aquí sólo usaremos una caracterización intrínseca, de naturaleza geométrica, resultado de trabajos de R. Phelps, J. Bourgain y C. Stegall. La pléyade de caracterizaciones geométricas y analíticas de la RNP que hoy se conocen y, en general, información abundante sobre esta propiedad puede encontrarse en las monografías de J. Diestel y J. Uhl [22] y R. Bourgin [12].

Adoptamos el punto de vista "local" de la segunda de estas monografías y hablamos de conjuntos de Radon-Nikodym (RN), bien entendido que un espacio de Banach tiene la RNP si, y sólo si, su bola unidad es un conjunto RN. Para estos conjuntos C. Stegall [50] consigue un "principio de optimización no lineal" que será la herramienta fundamental de este capítulo.

Por otra parte, como segundo resultado importante de este capítulo, mejoramos, para espacios de Asplund, el obtenido en el Teorema 2.3 sobre la densidad del conjunto de operadores cuyos adjuntos alcanzan el radio numérico. Con el fin de probar esto último, se ha logrado un teorema de optimización para espacios duales con RNP que, en este caso particular, mejora al de Stegall recién mencionado. No obstante, nuestra demostración es una adaptación de la de Stegall.

Para enunciar la aludida caracterización geométrica de los conjuntos RN fijamos con precisión la noción de exposición fuerte, presente implícitamente en el capítulo anterior.

Definición 4.1 [12, Definition 3.2.1] Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto de X y $\Phi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función mayorada. Se dice que Φ **expone fuertemente** a C si existe $x \in C$ verificando

$$\Phi(x) = \max\{\Phi(c) : c \in C\}$$

y cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C verificando $\{\Phi(x_n)\} \to \Phi(x)$ converge (en norma) a x.

Nótese que en el caso particular de que Φ sea un funcional $\mathbb{R}$-lineal continuo, el punto x que aparece en la definición anterior es un punto fuertemente expuesto de C en el sentido del comentario previo a la Definición 3.1. Nos interesa ahora solamente la relación del funcional Φ con el conjunto C; el punto x, donde, por así decirlo, se realiza la exposición, perderá totalmente su protagonismo. De ahí el cambio de nomenclatura que no debería causar confusión.

Teorema 4.2 (Phelps, Bourgain, Stegall; ver [12, Theorems 3.5.4 & 3.5.5]). *Sea X un espacio de Banach real y C un subconjunto de X, convexo, cerrado y acotado. C es un conjunto de Radon-Nikodym si, y sólo si, para cada subconjunto $D \subset C$ cerrado acotado y convexo, el conjunto de los elementos de X^* que exponen fuertemente a D es un conjunto G_δ-denso en X^*.*

Nota 4.3 Para una correcta comprensión de lo que sigue, puede tomarse muy bien como definición de conjunto RN la caracterización dada por el teorema anterior. Este planteamiento es natural cuando se manejan solamente aspectos geométricos de los conjuntos RN (véase por ejemplo [47]).

Enunciamos ahora el principio de optimización obtenido por C. Stegall que usaremos más adelante:

Teorema 4.4 [50, Theorem 14] *Sea X un espacio de Banach real, C un subconjunto de Radon-Nikodym de X y $\Phi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función superiormente semicontinua y mayorada. Entonces el conjunto*

$$\{f \in X^* : \Phi + f \quad \text{expone fuertemente a} \quad C\}$$

es un subconjunto G_δ denso de X^*.

El problema de que un operador alcance su radio numérico se puede reformular en términos de optimización de una función definida en la esfera unidad de X. Considérese para cada $x \in X$ de la esfera unidad, el subconjunto de X^* dado por

$$D(x) = \{f \in X^* : \|f\| = f(x) = 1\}.$$

Observemos que $D(x)$ es w*-compacto, por tanto, el conjunto

$$\{f(y) : f \in D(x)\}$$

es también compacto para cada elemento y de X. Esta observación nos permite definir para cada operador $T \in L(X)$ una función

$$\phi_T : S(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\phi_T(x) = \max\{|f(T(x))| : f \in D(x)\}.$$

De la definición de radio numérico se sigue evidentemente que:

$$v(T) = \sup\{\phi_T(x) : x \in S_X\}.$$

Si T alcanza el radio numérico tenemos

$$v(T) = |f_0(T(x_0))| \quad \text{con } x_0 \in S_X \quad \text{y} \quad f_0 \in D(x_0),$$

luego $v(T) = \phi_T(x_0)$ y la función ϕ_T alcanza su máximo en x_0. Recíprocamente, si $\phi_T(x_0) = v(T)$ para algún $x_0 \in S_X$, tomando $f_0 \in D(x_0)$ tal que $|f_0(T(x_0))| = \phi_T(x_0)$ obtenemos que $T \in R(X)$. Esta observación nos permitirá sacar partido del principio de optimización de Stegall. Para ello necesitamos conseguir, a partir de la función ϕ_T, otra que verifique las hipótesis del Teorema 4.4. Empezamos por extender ϕ_T a la bola unidad de X.

Definición 4.5 Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Definimos una función Φ_T en la bola unidad de X por

$$\Phi_T(x) = \max\{|f(T(x))| : f \in D(x)\} \quad \text{si} \quad \|x\| = 1$$

$$\Phi_T(x) = \|x\|\Phi_T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{si} \quad 0 < \|x\| < 1 \quad \text{y}$$

$$\Phi_T(0) = 0.$$

Comprobamos a continuación que la función Φ_T verifica las hipótesis del Teorema 4.4. Puesto que, obviamente, $\Phi_T(x) \leq v(T)$ para $x \in B_X$, sólo resta comprobar la semicontinuidad superior.

Lema 4.6 *Para* $T \in L(X)$, Φ_T *es semicontinua superiormente.*

Demostración. Podemos suponer que $T \neq 0$ y teniendo en cuenta que $\Phi_{\lambda T} = |\lambda|\Phi_T$ para cualquier escalar λ, tomaremos $\|T\| = 1$. Con ello se tiene $\Phi_T(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in B_X$. Probaremos que para cada $r > 0$ el conjunto

$$\{x \in B_X : \Phi_T(x) \geq r\}$$

es cerrado.

Dado $r > 0$ y una sucesión $\{x_n\}$ en la bola unidad de X convergente a x_0 y verificando

$$\Phi_T(x_n) \geq r, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene $\|x_n\| \geq r$, y, por tanto, $\|x_0\| \geq r$. Notamos

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

y elegimos, para $n \geq 1$, un elemento $f_n \in D(y_n)$ tal que

$$|f_n(T(y_n))| = \Phi_T(y_n).$$

Sea f_0 un valor adherente a la sucesión $\{f_n\}$ en la topología débil-$*$ de X^*. Entonces,

$$|1 - f_0(y_0)| = |f_n(y_n) - f_0(y_0)| \leq$$

$$\leq |f_n(y_n) - f_n(y_0)| + |f_n(y_0) - f_0(y_0)| \leq$$

$$\leq \|y_n - y_0\| + |(f_n - f_0)(y_0)|,$$

por lo que $1 = f_0(y_0)$, ya que $\{y_n\}$ converge a y_0 y $f_0(y_0)$ es un valor adherente a la sucesión $\{f_n(y_0)\}$. También se tiene

$$|f_n(T(y_n)) - f_0(T(y_0))| \leq$$
$$\leq |f_n(T(y_n)) - f_n(T(y_0))| + |f_n(T(y_0)) - f_0(T(y_0))| \leq$$
$$\leq \|y_n - y_0\| + |(f_n - f_0)(T(y_0))|,$$

por lo que $f_0(T(y_0))$ es un valor adherente a la sucesión $\{f_n(T(y_n))\}$.

De la desigualdad

$$|f_n(T(y_n))| = \Phi_T(y_n) = \frac{1}{\|x_n\|}\Phi_T(x_n) \geq \frac{r}{\|x_n\|},$$

deducimos que $|f_0(T(y_0))| \geq \dfrac{r}{\|x_0\|}$, y siendo $f_0 \in D(y_0)$

tenemos $\Phi_T(y_0) \geq \dfrac{r}{\|x_0\|}$, esto es,

$$\Phi_T(x_0) = \|x_0\|\Phi_T(y_0) \geq r,$$

como se pretendía. ■

Todo está ya preparado para el teorema principal de este capítulo.

Teorema 4.7 *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Dado $T \in L(X)$, existe un operador $A \in L(X)$, de rango uno y norma arbitrariamente pequeña, tal que $T + A$ alcanza su radio numérico. En particular, $R(X)$ es denso en $L(X)$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplicando el Teorema 4.4 (si X es complejo dicho teorema se aplica al espacio real subyacente a X), existe $g \in X^*$ con $0 < \|g\| < \varepsilon$, tal que $\Phi_T + \mathrm{Re}\,(g)$ expone fuertemente la bola unidad de X. En particular, existe un punto x_0 en la bola unidad tal que

$$(1) \qquad \Phi_T(x_0) + \mathrm{Re}\; g(x_0) \geq \Phi_T(x) + \mathrm{Re}\; g(x)$$

para todo x en B_X.

Teniendo en cuenta que $\Phi_T(\lambda x) = \Phi_T(x)$ para todo escalar λ verificando $|\lambda| = 1$, de (1) se deduce que

$$(2) \qquad \Phi_T(x_0) + \mathrm{Re}\; g(x_0) \geq \Phi_T(x) + |g(x)|,$$

para todo x en la bola unidad de X. En particular, tomando $x = x_0$, Re $g(x_0) = |g(x_0)|$, por lo que $g(x_0) \geq 0$. Por ser $g \neq 0$, el elemento x_0 no es cero y tomando

$x = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ en (1), se obtiene que $\|x_0\| = 1$. Elegimos

$f_0 \in D(x_0)$ tal que

$$(3) \qquad \Phi_T(x_0) = |f_0(T(x_0))|$$

y definimos el operador A en X por

$$A(x) = \lambda g(x) x_0 \quad (x \in X),$$

donde λ es un escalar de módulo uno tal que

$$f_0(T(x_0)) = \lambda |f_0(T(x_0))|. \tag{4}$$

A es un operador de rango uno y

$$\|A\| = \|g\| \|x_0\| = \|g\| < \varepsilon.$$

Probaremos ahora que el operador $T + A$ alcanza el radio numérico. En efecto, si $(x, f) \in \Pi(X)$, usando (2) y (3) tenemos

$$\begin{aligned} |f\,[(T + A)(x)]\,| &\leq |f(T(x))| + |\lambda g(x) f(x_0)| \leq \\ &\leq \Phi_T(x) + |g(x)| \leq \\ &\leq \Phi_T(x_0) + g(x_0) = \\ &= |f_0(T(x_0))| + g(x_0), \end{aligned}$$

mientras que, por otra parte,

$$\begin{aligned} |f_0\,[(T + A)(x_0)]\,| &= |f_0(T(x_0)) + \lambda g(x_0) f_0(x_0)| = \\ &= |\lambda |f_0(T(x_0))| + \lambda g(x_0) f_0(x_0)| = \\ &= |f_0(T(x_0))| + g(x_0), \end{aligned}$$

ya que λ verifica (4) . De las dos desigualdades anteriores se deduce que $v(T+A) \leq |f_0\,[(T + A)(x_0)]\,|$, y, por tanto, $T + A$ alcanza el radio numérico en (x_0, f_0).

■

Como quiera que en el resultado anterior se perturba un operador arbitrario por otro de rango uno, se obtiene, como consecuencia, el resultado siguiente para una serie de clases de operadores.

Corolario 4.8 *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Si $\mathcal{A}$ es un subespacio de $L(X)$ (no necesariamente cerrado), que contiene a los operadores de rango finito, entonces los operadores en $\mathcal{A}$ que alcanzan el radio numérico son densos en $\mathcal{A}$.*

Dado que los espacios reflexivos verifican la propiedad de Radon-Nikodym [22, página 218], como consecuencia del Teorema 4.7, se deduce el siguiente resultado que mejora el del Corolario 2.7.

Corolario 4.9 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $T \in L(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un operador $A \in L(X)$, de rango uno con $\|A\| < \varepsilon$ y tal que $T + A$ alcanza el radio numérico.*

Corolario 4.10 *Sea X un espacio de Banach dual separable, entonces los operadores en X que alcanzan el radio numérico son densos. Es más, cualquier operador en X se puede perturbar por otro, de rango uno y norma arbitrariamente pequeña, para que alcance el radio numérico.*

El resultado anterior es consecuencia del hecho de que los espacios de Banach separables que son duales satisfacen la RNP [22, página 218]

Nota 4.11 Observemos que las hipótesis del Teorema 4.6 y del Teorema 3.5 son independientes. En efecto, como prueba el Ejemplo 3.2, existen espacios de Banach finito-dimensionales (por tanto RNP) cuya bola unidad no coincide con el cierre de la envolvente absolutamente convexa de ninguna familia de puntos uniformemente expuesta. Por otra parte, como consecuencia del resultado de Schachermayer [45] todo espacio de Banach separable puede renormarse equivalentemente para que posea la propiedad α, y por tanto, su bola unidad es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de una familia de puntos uniformemente expuesta. Si esta última propiedad implicase RNP todo espacio de Banach separable sería RNP, afirmación que evidentemente no es cierta.

En el caso de que apliquemos el Teorema 4.7 a un espacio de Banach dual X^* con la propiedad de Radon-Nikodym, se obtiene que todo operador $T \in L(X^*)$ se perturba por otro operador A en $L(X^*)$ de rango uno y norma arbitrariamente pequeña de forma que $T + A$ alcanza su radio numérico. Si el operador T de partida es w*-continuo, el operador que se obtiene, en general, no tiene porqué serlo. Si se analiza la demostración de este resultado, para poder obtener operadores w*-continuos es suficiente que exista un elemento $x \in X$ tal que la función $\Phi_T + x$ alcance su máximo. Con este fin nos hemos planteado la posibilidad de obtener un principio de optimización semejante al de Stegall para espacios duales RNP. Como es conocida la dualidad entre los espacios de Asplund y los espacios RNP [49, Theorem 1], es por esto que en el resto del capítulo impondremos a nuestro espacio de Banach esa nueva propiedad. A continuación definiremos este concepto, en el que interviene el de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet.

Definición 4.12 [42, Definition 1.12] Sea X un espacio de Banach, U un subconjunto abierto de X y $p : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que p es **Fréchet diferenciable** en un punto $x \in U$ si existe $f \in X^*$ verificando la siguiente condición:

Para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$, verificando

$$y \in X, \|y\| < \delta \Rightarrow |p(x+y) - p(x) - f(y)| < \varepsilon \|y\|.$$

Un espacio de Banach X es un **espacio de Asplund** si toda función continua y convexa p definida en un subconjunto abierto y convexo U de X es Fréchet diferenciable en un subconjunto G_δ-denso de U.

El siguiente lema extiende a un resultado de Smulian que aparece en [50]. Este resultado relaciona los conceptos de exposición fuerte y Fréchet diferenciabilidad.

Lema 4.13 *Sea X un espacio de Banach real y D un subconjunto cerrado y acotado de X^*. Definimos un funcional*

$$\sigma_D : X^{**} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\sigma_D(F) = \sup \{F(f) : f \in D\}.$$

Las condiciones siguientes equivalen:

i) *σ_D es Fréchet-diferenciable en $x \in X$.*

ii) *La restricción de σ_D a X es Fréchet-diferenciable en $x \in X$.*

iii) *x expone fuertemente a D.*

Demostración. i) $\Rightarrow$ii] Trivial.

ii) $\Rightarrow$iii)] Por ser la restricción de σ_D a X Fréchet diferenciable en x, existe $f_0 \in X^*$, tal que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ verificando

$$y \in X, \|y\| \leq \delta \Rightarrow \sigma_D(x+y) - \sigma_D(x) - f_0(y) < \frac{\varepsilon}{2}\|y\|$$

Tomamos $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}\delta$ y $z \in S_X$. Si $f \in D$ verifica

$f(x) > \sigma_D(x) - \alpha$, tenemos

$$(f - f_0)(z) = \frac{1}{\delta}(f - f_0)(\delta z) =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[f(x + \delta z) - f(x) - f_0(\delta z)\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left[\sigma_D(x + \delta z) - \sigma_D(x) + \sigma_D(x) - f(x) - f_0(\delta z)\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\varepsilon}{2}\|\delta z\| + \sigma_D(x) - f(x)\right] \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{\delta} = \varepsilon.$$

Por ser z arbitrario en S_X, obtenemos $\|f - f_0\| \leq \varepsilon$. Hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\alpha > 0$ tal que

$$f \in D, f(x) > \sigma_D(x) - \alpha \Rightarrow \|f - f_0\| \leq \varepsilon.$$

Tomando ahora una sucesión $\{f_n\}$ de puntos de D con $\{f_n(x)\} \to \sigma_D(x)$, tenemos que $\{f_n\}$ converge en norma a f_0; en particular, $f_0 \in D$ y $f_0(x) = \sigma_D(x)$ y hemos probado que x expone fuertemente a D (en el punto f_0).

iii)$\Rightarrow$i)] Supongamos que x expone fuertemente a D; sea $f_0 \in D$ tal que $f_0(x) = \sigma_D(x)$ y $K = \sup\{\|f\| : f \in D\}$. Dado $\varepsilon > 0$, la definición de exposición fuerte nos permite encontrar $\eta > 0$ tal que

$$f \in D, f(x) > \sigma_D(x) - \eta \Rightarrow \|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \dfrac{\eta}{2K + \frac{\varepsilon}{2}}$; para $F \in X^{**}$ con $\|F\| < \delta$ probaremos

que

$$|\sigma_D(x + F) - \sigma_D(x) - F(f_0)| < \varepsilon\|F\|$$

obteniendo la Fréchet diferenciabilidad de σ_D en x con derivada f_0. En efecto, sea $f \in D$ tal que

$$\sigma_D(x + F) < f(x) + F(f) + \frac{\varepsilon}{2}\|F\|.$$

(f depende de F, pero esto no causará ningún problema.)

Entonces,

$$f(x) = f(x) + F(f) - F(f) >$$

$$> \sigma_D(x + F) - \frac{\varepsilon}{2}\|F\| - F(f) \geq$$

$$\geq \sigma_D(x) - \sigma_D(-F) - \frac{\varepsilon}{2}\|F\| - F(f) \geq$$

$$\geq \sigma_D(x) - \left(2K + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|F\| > \sigma_D(x) - \eta,$$

luego $\|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo que

$$0 \leq \sigma_D(x + F) - \sigma_D(x) - F(f_0) \leq$$

$$\leq f(x) + F(f) + \frac{\varepsilon}{2}\|F\| - f(x) - F(f_0) \leq$$

$$\leq F(f - f_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|F\| \leq \|f - f_0\| \, \|F\| + \frac{\varepsilon}{2}\|F\| \leq \varepsilon\|F\|,$$

como se quería. ■

Usando el lema enunciado antes demostraremos un resultado de optimización válido para funciones superiormente semicontinuas y acotadas, definidas en un subconjunto del dual de un espacio de Asplund. Seguimos fielmente el esquema de demostración dada por Stegall del Teorema 4.7, desglosando sus razonamientos en varios lemas y dando la demostración de los que precisan algún retoque.

Lema 4.14 *Sea X un espacio de Banach real, E un subconjunto de X^* cerrado y acotado de X^* y $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función mayorada. Construimos el conjunto D de $X^* \times \mathbb{R}$ dado por*

$$D = \left\{ \frac{t}{1 + M - \Phi(f)}(f, -1) : t \in [0, 1], f \in E \right\}.$$

siendo $M = \sup\{\Phi(f) : f \in E\}$ y definimos la función

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\varphi(x) = \sup\{\Phi(f) + f(x) - M - 1 : f \in E\}.$$

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) *Si Φ es superiormente semicontinua, entonces D es cerrado en norma.*

ii) *Sea $x \in X$, entonces $\Phi + x$ expone fuertemente a E si, y sólo si, el par $(x, \varphi(x))$, considerado como funcional lineal en $X^* \times \mathbb{R}$, expone fuertemente a D.*

La demostración de estas afirmaciones es, esencialmente la dada por Stegall [50, Theorem 14]. La afirmación dada en ii), aunque de comprobación inmediata, es la idea clave de la demostración de Stegall del "principio de optimización no lineal".

Lema 4.15 *Sea X un espacio de Banach, W un subconjunto denso de $X \times \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^+ W \subset W$ y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y convexa con $\varphi(0) < 0$. Entonces el conjunto $W \cap \mathrm{Graf}\ \varphi$ es denso en $\mathrm{Graf}\ \varphi$.*

Demostración. Por la continuidad de φ, el conjunto

$$\{(y, t) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(y) > t\}$$

es abierto, luego, por ser W denso en $X \times \mathbb{R}$, dado $(x, \varphi(x)) \in \mathrm{Graf}\ \varphi$, existe una sucesión $\{(x_n, t_n)\}$ de puntos de W, convergente a $(x, \varphi(x))$ y tal que:

$$\varphi_(x_n) > t_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n natural, por ser $\varphi(0) < 0$ y φ continua, podemos encontrar un número real ρ_n, con $0 < \rho_n < 1$ tal que

$$(1) \qquad \varphi(\rho_n x_n) = \rho_n t_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis $\mathbb{R}^+ W \subset W$, luego los pares $\rho_n(x_n, t_n)$ están en Graf $\varphi \cap W$. Bastará por tanto probar que $\{\rho_n\} \to 1$. De lo contrario existiría una sucesión parcial de $\{\rho_n\}$ (que seguimos notando $\{\rho_n\}$) convergente a un ρ con $0 \leq \rho < 1$. La condición (1) nos daría

$$\varphi(\rho x) = \rho\varphi(x)$$

lo cual es una contradicción, ya que, por ser $\varphi(0) < 0$ y φ convexa se tiene

$$\varphi(\rho x) \leq \rho\varphi(x) + (1-\rho)\varphi(0) < \rho\varphi(x).$$

■

Lema 4.16 *Sea X un espacio de Banach real, E un subconjunto cerrado (en norma) y acotado de X^* y $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función mayorada. Entonces, el conjunto*

$$\{x \in X : \Phi + x \quad \text{expone fuertemente a} \quad E\}$$

es un conjunto G_δ.

Demostración. Para $x \in X$ y $\alpha > 0$, notaremos:

$$M(x) = \sup\{\Phi(f) + f(x) : f \in E\}$$

y

$$S(x, \alpha) == \{f \in E : \Phi(f) + f(x) > M(x) - \alpha\}.$$

Claramente $\Phi + x$ expone fuertemente a E si y sólo si el diámetro de $S(x, \alpha)$ tiende a cero cuando α tiende a cero.

Para cada número natural n, definimos

$$V(n) = \left\{x \in X : \exists\alpha > 0, \text{diam } S(x, \alpha) < \frac{1}{n}\right\}$$

Puesto que $\Phi + x$ expone fuertemente a E si, y sólo si, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V(n)$, bastará probar que cada $V(n)$ es un conjunto abierto.

Sea $x \in V(n)$ y $\alpha > 0$ tal que diam $S(x, \alpha) < \dfrac{1}{n}$. Tomamos $K > \sup\{\|f\| : f \in E\}$, $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$ y un elemento $y \in X$ verificando $\|x - y\| < \dfrac{\alpha}{3K}$ y comprobaremos la inclusión

$$S(y, \beta) \subset S(x, \alpha).$$

Si $f \in S(y, \beta)$, se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned}\Phi(f) + f(x) = \Phi(f) + f(y) + f(x) - f(y) > \\ > M(y) - \beta - K\|x - y\| \geq \\ \geq M(x) - \beta - 2K\|x - y\| \geq \\ \geq M(x) - \frac{\alpha}{3} - 2K\frac{\alpha}{3K} \geq \\ \geq M(x) - \alpha.\end{aligned}$$

Una vez comprobada la inclusión anterior se tiene que

$$\operatorname{diam} S(y, \beta) < \frac{1}{n},$$

y por tanto $y \in V(n)$, lo que concluye la demostración. ■

Teorema 4.17 *Sea X un espacio de Asplund, E un subconjunto de X^* cerrado (en norma) y acotado y $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función superiormente semicontinua y mayorada. Entonces, el conjunto*

$$\{x \in X : \Phi + \operatorname{Re} x \quad \text{expone fuertemente a} \quad E\}$$

es G_δ-denso en X.

Demostración. Empezamos considerando el caso en que X es real. A partir del conjunto E y la función Φ construimos un subconjunto D de $X^* \times \mathbb{R}$ como sigue

$$D = \left\{ \frac{t}{1 + M - \Phi(f)}(f, -1) : 0 \leq t \leq 1, f \in E \right\},$$

siendo $M = \sup\{\Phi(f) : f \in E\}$. Como la función Φ es superiormente semicontinua, aplicando el Lema 4.14, el conjunto D, que es acotado, es también cerrado en norma. Por ser X un espacio de Asplund, también lo es $X \times \mathbb{R}$ [42, Theorem 2.34] y la función

$$\sigma_D : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\sigma_D(x, s) = \sup\{f(x) + ts : (f, t) \in D\}$$

que es continua y convexa, es Fréchet diferenciable en un subconjunto G_δ-denso de $X \times \mathbb{R}$, y por el Lema 4.13 existe un conjunto G_δ-denso de puntos de $X \times \mathbb{R}$ que exponen fuertemente a D. Definiendo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$\varphi(x) = \sup\{\Phi(f) + f(x) - M - 1 : f \in E\},$$

es fácil comprobar que la función φ es continua, convexa y $\varphi(0) = -1$. Aplicando al Lema 4.15 a esta función y al conjunto

$$W = \{(x,s) \in X \times \mathbb{R} : (x,s) \text{ expone fuertemente a } D\},$$

se obtiene un conjunto denso de puntos de la gráfica de φ que exponen fuertemente a E, y, usando ahora el apartado ii) del Lema 4.14 el conjunto

$$\{x \in X : \Phi + x \text{ expone fuertemente a } E\}$$

es denso en X. Finalmente, este conjunto es siempre un conjunto G_δ (Lema 4.16).

En el caso de que el espacio X sea complejo, notamos $\hat{X}$ al espacio real subyacente a X. $\hat{X}$ es un espacio de Asplund real y, previa la identificación canónica de los elementos de $\hat{X}^*$ con las partes reales de los elementos de X^*, aplicamos lo ya demostrado para el caso real al conjunto $\hat{E} = \{\text{Re } f : f \in E\} \subset \hat{X}^*$ y la función $\hat{\Phi} : \hat{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{\Phi}(\text{Re } f) = \Phi(f) \qquad \forall f \in E$$

obteniendo la tesis deseada, ya que es inmediato comprobar que, para $x \in X$, $\hat{\Phi} + x$ expone fuertemente a $\hat{E}$ si, y sólo si, $\Phi + \text{Re } x$ expone fuertemente a E.

■

El teorema de optimización anterior nos permite mejorar el Teorema 2.3 en el caso particular de un espacio Asplund:

Corolario 4.18 *Sea X un espacio de Asplund, $S \in L(X^*)$ y $\varepsilon > 0$. Existe $A \in L(X)$, de rango uno, con $\|A\| < \varepsilon$ tal que $S + A^*$ alcanza su radio numérico. En particular, dado $T \in L(X)$, existe $A \in L(X)$ de rango uno con $\|A\| < \varepsilon$ tal que $(T + A)^*$ alcanza el radio numérico.*

Demostración. Aplicamos el teorema anterior tomando $E = B_{X^*}$ y como Φ la función Φ_S asociada al operador S (Definición 4.5) que, por el Lema 4.6 es semicontinua superiormente y mayorada, obteniendo un $x \in X$ con $0 < \|x\| < \varepsilon$ tal que $\Phi_S + \mathrm{Re}\, x$ expone fuertemente a B_{X^*} y en particular, alcanza su máximo en un punto $f_0 \in B_{X^*}$.

Elegimos $F_0 \in S_{X^{**}}$ tal que $(f_0, F_0) \in \Pi(X^*)$ y $\Phi_S(f_0) = |F_0(S(f_0))|$ y definimos un operador $A \in L(X)$ por

$$A(y) = \lambda f_0(y) x \qquad (y \in X),$$

donde λ es un escalar de módulo uno tal que

$$\lambda |F_0(S(f_0))| = F_0(S(f_0)).$$

Es claro que $\|A\| \leq \|f_0\| \, \|x\| < \varepsilon$. Resta probar que $S + A^*$ alcanza su radio numérico. El argumento es idéntico al del Teorema 4.7; al igual que allí se tiene

$$\Phi_S(f_0) + \mathrm{Re}\, f_0(x) \geq \Phi_S(f) + |f(x)|, \qquad \forall f \in B_{X^*},$$

por lo que $f_0(x) \geq 0$, $\|f_0\| = 1$ y finalmente para $(f, F) \in \Pi(X^*)$, tenemos

$$|F(S + A^*)(f)| \leq \Phi_S(f) + |F(f_0)| \, |f(x)| \leq$$

$$\leq \Phi_S(f) + |f(x)| \leq \Phi_S(f_0) + f_0(x)$$

mientras que

$$|F_0(S + A^*)(f_0))| = |F_0(S(f_0)) + \lambda f_0(x)| =$$

$$= |F_0(S(f_0))| + f_0(x) = \Phi_S(f_0) + f_0(x).$$

■

Capítulo 5

CL-espacios. Espacios de Banach clásicos

Entre los espacios de Banach clásicos, esencialmente sólo los espacios $L_p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$ quedan cubiertos por los resultados de los capítulos anteriores. El hecho de que los operadores en $L_p(\mu)$ que alcanzan el radio numérico forman un conjunto denso se deducía ya del resultado de I. Berg y B. Sims [4], puesto que se trata de espacios uniformemente convexos, si bien ahora podemos aplicar a estos espacios resultados mucho más generales, como el Corolario 2.7, Corolario 3.7 ó Corolario 4.8, obteniéndose de hecho varias demostraciones independientes de la densidad de $R(L_p(\mu))$.

La excepción a la regla apuntada al principio lo constituyen los espacios $\ell_1(\Lambda)$ (Λ un conjunto arbitrario), a los que por tener la propiedad de Radon-Nikodym puede aplicárseles el Corolario 4.8. Independientemente, la bola unidad de $\ell_1(\Lambda)$ es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de un conjunto de puntos uniformemente expuestos, lo que nos permite también aplicar el Corolario 3.7 para obtener la densidad de $R(\ell_1(\Lambda))$.

Queda pues, una vasta colección de espacios clásicos a los que no son aplicables los resultados de los tres capítulos anteriores; concretamente, los espacios $L_1(\mu)$, cuando μ no es puramente atómica, y los preduales de L_1-espacios, entre los que destacan los espacios $C(K)$. Para estos últimos la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico ha sido probada por C. Cardassi [14] quien también ha conseguido obtener la densidad de $R(L_1(\mu))$, siendo μ una medida de Borel finita en un espacio topológico Hausdorff compacto (ambos resultados en caso real).

En este capítulo usamos el concepto de CL-espacio, introducido por R. Fullerton [25]. Resultados de J. Lindenstrauss [38] y Á. Lima [36] muestran que los espacios reales $L_1(\mu)$ y sus preduales son CL-espacios. Probaremos que un operador en un CL-espacio tiene norma igual al radio numérico y alcanza el segundo si, y sólo si, alcanza la primera.

Así, para CL-espacios, el problema de la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico se traduce en el estudio de la densidad del conjunto de operadores que alcanzan la norma. Conseguimos, pues, simplificar la demostración para $C(K)$ y probar la densidad de $R(L_1(\mu))$, para cualquier medida positiva μ. Conviene resaltar que las consideraciones anteriores sólo son aplicables en el caso real. Que sepamos, la noción de CL-espacio no se ha estudiado en caso complejo. Incluso cuál debería ser la noción apropiada de CL-espacio complejo resulta dudoso y la extensión formal del caso real pudiera no ser adecuada.

C. Cardassi también probó la densidad de $R(c_0)$ [15]. Puesto que c_0 es un CL-espacio, nuestro resultado sobre CL-espacios antes citado, permitiría obtener tal conclusión a partir de la densidad de los operadores en c_0 que alcanzan la norma, la cual es un caso muy particular de un teorema de J. Lindenstrauss [37]. Como segundo resultado destacable de este capítulo probamos que si X es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(\Lambda)$ que contiene a $c_0(\Lambda)$, $R(X)$ es denso en $L(X)$. En este caso, nuestra técnica se aplica indistintamentre al caso real o complejo.

Empezamos dando la definición de CL-espacio, en la que interviene el concepto de cara maximal.

Definición 5.1 *Sea X un espacio vectorial y B un subconjunto convexo de X. Un subconjunto convexo no vacío L de B es una cara de B si se verifica la siguiente con-*

dición:

$$\left.\begin{array}{r} x, y \in B \\ 0 < t < 1 \\ tx + (1-t)y \in L \end{array}\right\} \Rightarrow x, y \in L.$$

Una cara L de B se llama propia, cuando $L \neq B$. Una cara maximal es una cara propia que no está contenida estrictamente en ninguna cara propia.

Nos interesa el caso particular en que B es la bola unidad de un espacio normado. En el siguiente enunciado se recogen algunas propiedades básicas de las caras de la bola unidad, propiedades que son elementales y probablemente conocidas, pero a falta de una referencia apropiada, sugerimos su demostración.

Lema 5.2 *Sea X un espacio normado real y L una cara propia de B_X. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) $L \subset S_X$.

ii) *L está contenida en una cara maximal de B_X.*

iii) *Si L es maximal, existe un punto extremo f en B_{X^*} tal que*

$$L = \{x \in B_X : f(x) = 1\}.$$

En particular, las caras maximales de B_X son cerradas.

Demostración. i) Si L contuviese un punto interior de B_X la definición de cara nos daría inmediatamente $S_X \subset L$ y, por convexidad $B_X = L$.

ii) Es inmediato que la unión de una familia totalmente ordenada por inclusión de caras de un conjunto convexo sigue siendo una cara. Teniendo en cuenta i), el carácter de cara propia de B_X se conserva en dicha unión. Así pues, el conjunto de las caras propias de B_X, ordenado por inclusión, es inductivo y basta aplicar el lema de Zorn.

iii) Teniendo en cuenta i) podemos separar (ver por ejemplo [29, Theorem 11.E, página 63]) el conjunto convexo L de la bola unidad abierta, esto es, existe al menos un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que

$$(*) \qquad L \subset \{x \in B_X : f(x) = 1\}.$$

El conjunto de funcionales f que hacen cierta la inclusión anterior es una cara w*-compacta de B_{X^*}, luego por el teorema de Krein-Milman, contiene un punto extremo, que obligatoriamente será también punto extremo de B_{X^*}. Finalmente, como quiera que el conjunto

$$\{x \in B_X : f(x) = 1\}$$

es una cara propia de B_X, la maximalidad de L hace que la inclusión $(*)$ sea una igualdad, y L es cerrada en vista de la continuidad de f.

Definición 5.3 Se dice que un espacio de Banach real X es un CL-espacio si para toda cara maximal L de B_X, se verifica

$$B_X = \mathrm{co}(L \cup -L),$$

esto es, la bola unidad de X es la envolvente absolutamente convexa de cada una de sus caras maximales.

Ejemplos 5.4 i) Los espacios ℓ_∞^n y ℓ_1^n ($\mathbb{R}^n$ con la norma del máximo y de la suma, respectivamente) son CL-espacios. Los CL-espacios de dimensión finita son bien conocidos [28].

ii) No es difícil comprobar que ℓ_1 es un CL-espacio.

iii) *El espacio $C(K)$ de las funciones reales continuas en un espacio topológico Hausdorff y compacto K es un CL-espacio.*

Dado que utilizaremos más adelante este hecho conocido, damos una demostración directa y elemental del mismo. La prueba de Lima [36] involucra propiedades de intersección de bolas y es menos intuitiva.

Sea L una cara maximal de la bola unidad de $C(K)$. Usando el Lema 5.2.iii), existe un punto extremo f de la bola unidad de $C(K)^*$ tal que

$$L = \{x \in B_{C(K)} : f(x) = 1\}.$$

Usando el teorema de Krein-Milman, en su versión extendida (ver por ejemplo [29, §13.B Theorem, página 74]), existe un punto k_0 de K tal que f ó $-f$ coincide con el funcional de evaluación en k_0. Cambiando L por $-L$ podemos suponer que

$$L = \{x \in B_{C(K)} : x(k_0) = 1\}.$$

Nuestro problema consiste, por tanto, en expresar cada elemento de la bola unidad de $C(K)$ como combinación convexa de una función que vale 1 en k_0 con otra que vale -1, ambas en la bola unidad. Para ello consideremos las funciones auxiliares

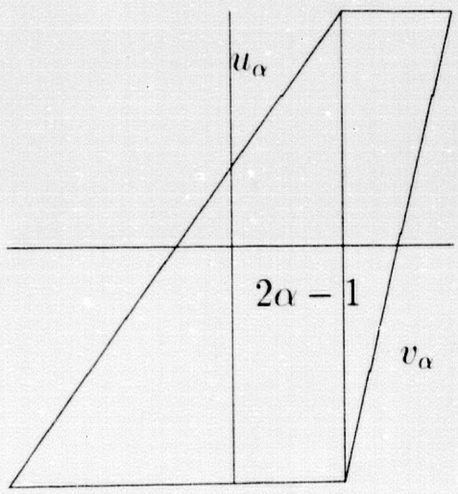
$$u_\alpha, v_\alpha : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dadas por

$$u_\alpha(t) = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha}(t+1) - 1\right\}$$

$$v_\alpha(t) = \max\left\{-1, \frac{1}{1-\alpha}(t-1)+1\right\},$$

donde α es un parámetro con $0 < \alpha < 1$.



Es inmediato comprobar que u_α y v_α toman valores en $[-1, 1]$ y verifican

$$\alpha u_\alpha(t) + (1-\alpha)v_\alpha(t) = t \quad (t \in [-1, 1]),$$

$$u_\alpha(2\alpha - 1) = 1, \quad v_\alpha(2\alpha - 1) = -1.$$

Sea x una función en la bola unidad de $C(K)$ y

$\alpha = \dfrac{x(k_0)+1}{2}$. Si $\alpha = 1$ tenemos $x(k_0) = 1$, luego $x \in L$;

si $\alpha = 0$, será $x \in -L$; sea pues $0 < \alpha < 1$ y tomemos

$$y(k) = u_\alpha(x(k)), \quad z(k) = v_\alpha(x(k)) \quad (k \in K).$$

Es inmediato que $y \in L, \quad z \in -L$ y

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z.$$

Así pues, en cualquier caso, $x \in \mathrm{co}(L \cup -L)$, como queríamos demostrar.

■

En un espacio de Banach arbitrario, si un operador tiene radio numérico igual a la norma, y alcanza el radio numérico, alcanza también la norma. Según afirma el resultado que sigue, para CL-espacios el recíproco también es cierto.

Teorema 5.5 *Sea X un CL-espacio y $T \in L(X)$. Entonces, se verifican:*

i) $\|T\| = v(T)$.

ii) *T alcanza su radio numérico si, y sólo si, T alcanza la norma.*

Demostración. i) Sea $0 < \varepsilon < \|T\|$, tomemos $x \in S_X$ tal que $\|T(x)\| \geq \|T\| - \varepsilon$, y sea $f_0 \in S_{X^*}$ tal que

$f_0\left(\frac{T(x)}{\|T(x)\|}\right) = 1$. El conjunto $L_0 = \{y \in B_X : f_0(y) = 1\}$

es una cara propia de B_X, que, por el Lema 5.2 estará con-

tenida en una cara maximal L. En particular, $\frac{T(x)}{\|T(x)\|} \in L$.

Además, el mismo lema nos da la existencia de un $f \in S_{X^*}$ tal que

$$L = \{y \in B_X : f(y) = 1\}.$$

Por ser X un CL-espacio tenemos $B_X = \text{co}(L \cup -L)$, luego x se expresa en la forma

$$x = (1-\lambda)y + \lambda(-z)$$

con $y, z \in L$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Por tanto,

$$\|T\| - \varepsilon \leq \|T(x)\| = |f(T(x))| \leq$$
$$\leq (1-\lambda)|f(T(y))| + \lambda|f(T(z))|$$

y se deberá tener

$$|f(T(y))| \geq \|T\| - \varepsilon$$

ó

$$|f(T(z))| \geq \|T\| - \varepsilon.$$

En cualquier caso existe $u \in L$ tal que

$$|f(T(u))| \geq \|T\| - \varepsilon.$$

Por ser (u, f) un elemento de $\Pi(X)$, se tendrá

$$v(T) \geq \|T\| - \varepsilon$$

y basta hacer $\varepsilon \to 0$.

ii) Nótese que si T alcanza la norma, se puede repetir la demostración de i) pero con $\varepsilon = 0$ obteniéndose $(u, f) \in \Pi(X)$ tal que $|f(T(u))| = \|T\|$ con lo que T alcanza su radio numérico.

Nota 5.6 Enlazando los resultados de Hansen-Lima [28, Proposition 2.11] y de McGregor [40, Theorem 3.1] se obtiene que un espacio normado real finito-dimensional X es un CL-espacio si, y sólo si, $\|T\| = v(T)$ para todo operador T en X. La hipótesis de que X sea un CL-espacio en la proposición anterior es, por tanto, esencial. No obstante, analizando la demostración, se observa fácilmente que si X es un espacio de Banach real con la propiedad de que $B_X = \overline{\text{co}}(L \cup -L)$ (cierre en norma de la envolvente convexa) para toda cara maximal L de B_X, entonces $\|T\| = v(T)$ para todo $T \in L(X)$. En caso finito-dimensional L es un compacto y por tanto también lo es $\text{co}(L \cup -L)$ con lo que recaemos en los CL-espacios, pero en general la debilitación podría tener interés. De hecho esta generalización de los CL-espacios se maneja tangencialmente en el trabajo fundamental de J. Lindenstrauss

[38]. Queda por tanto abierto el problema de si la coincidencia de la norma y el radio numérico en $L(X)$ obliga a X a ser un CL-espacio, sin perder de vista la noción intermedia recién sugerida.

J. Johnson y J. Wolfe probaron [34, Theorem 1] que si K, S son espacios topológicos Hausdorff compactos, el conjunto de los operadores de $C(K)$ en $C(S)$ que alcanzan la norma es denso. En el caso particular $K = S$, mediante una bastante laboriosa adaptación de la demostración, C. Cardassi [14] estableció la densidad del conjunto de operadores en $C(K)$ que alcanzan el radio numérico. El hecho de que $C(K)$ es un CL-espacio, junto con la proposición anterior, permite reducir sin dificultad el problema de radio numérico al de la norma:

Corolario 5.7 [14, Theorem] *Los operadores en el espacio $C(K)$ de las funciones reales y continuas sobre un espacio topológico Hausdorff compacto K, que alcanzan el radio numérico, forman un conjunto denso.*

Demostración. Basta usar el ejemplo 5.4.iii), el Teorema 5.5 y el teorema [34, Theorem 1]

Haciendo un razonamiento paralelo al del corolario anterior, obtenemos el mismo resultado para el espacio de Banach $L_1(\mu)$ de las funciones reales absolutamente integrables con respecto a una medida positiva μ:

Corolario 5.8 *Para cualquier medida positiva μ, el conjunto de operadores en (el espacio real) $L_1(\mu)$ que alcanzan su radio numérico es denso.*

Demostración. Los espacios $L_1(\mu)$ son CL-espacios [38, página 42, Corollary 1] y [36, Corollary 3.6]. Aplicando el Teorema 5.5 basta probar que los operadores en $L_1(\mu)$ que alcanzan la norma son densos. Este hecho ha sido probado por A. Iwanik [32].

En el caso particular de que μ sea una medida de Borel positiva finita en un espacio topológico de Haussdorf compacto, el corolario anterior se debe a C. Cardassi [17].

Aparte de los espacios $C(K)$, la respuesta (afirmativa) al problema anterior se conoce para c_0. Lindenstrauss [37, Proposition], demostró que c_0 tiene la propiedad que él llama "B", esto es, para cualquier espacio de Banach X, los operadores de X en c_0 que alcanzan la norma son densos. De hecho el resultado de Lindenstrauss se aplica a una clase más amplia de espacios de Banach. Concluimos esta memoria probando, mediante una adaptación de los argumentos de Lindenstrauss, la densidad de los operadores que alcanzan el radio numérico para un tipo de espacios que guardan cierta similitud con c_0, concretamente el contener un sistema biortogonal con un muy buen comportamiento geométrico.

Dado un conjunto arbitrario Λ, denotaremos por $\ell_\infty(\Lambda)$ al espacio de Banach de las funciones acotadas (reales ó complejas) en Λ con norma dada por

$$\|x\| = \sup\{\|x(\lambda)\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

$c_0(\Lambda)$ será el subespacio de $\ell_\infty(\Lambda)$ formado por las funciones que se anulan en el infinito, es decir, $x \in c_0(\Lambda)$ significa que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\}$$

es finito.

Teorema 5.9 *Sea Λ un conjunto arbitrario y X un subespacio cerrado de $\ell_\infty(\Lambda)$ que contenga a $c_0(\Lambda)$. Entonces:*

i) $v(T) = \|T\|$, $T \in L(X)$

ii) $R(X)$ *es denso en* $L(X)$.

Demostración. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $e_\lambda \in c_0(\Lambda) \subset X$ la función dada por $e_\lambda(\lambda) = 1$ y $e_\lambda(\mu) = 0$ para $\mu \neq \lambda$ y $f_\lambda \in X^*$ el funcional dado por $f_\lambda(x) = x(\lambda), \forall x \in X$. Evidentemente

$$\|x\| = \sup\{|f_\lambda(x)| : \lambda \in \Lambda\}, \quad (x \in X).$$

Sea $T \in L(X)$ con $\|T\| = 1$ y $0 < \varepsilon < 1$. Claramente

$$1 = \|T\| = \sup\{|T(x)(\lambda)| : x \in B_X, \lambda \in \Lambda\} =$$

$$= \sup\{|\,[T^*(f_\lambda)]\,(x)| : x \in B_X, \lambda \in \Lambda\} =$$

$$= \sup\{\|T^*(f_\lambda)\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

Elegimos $\alpha \in \Lambda$ tal que

$$\|T^*(f_\alpha)\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Aplicando el teorema de Bishop-Phelps [5] existe $g \in X^*$, un funcional que alcanza su norma, verificando

$$\|g\| = \|T^*(f_\alpha)\| \qquad \text{y} \qquad \|g - T^*(f_\alpha)\| \leq \varepsilon$$

Definimos $S \in L(X)$ por

$$S(x) = T(x) + [(1+\varepsilon)g(x) - [T^*(f_\alpha)]\,(x)]\,e_\alpha.$$

Es claro que

$$\|S - T\| \leq \|g - T^*(f_\alpha)\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Comprobamos ahora que S alcanza la norma. De hecho existe $x_0 \in S_X$ tal que

$$(*) \qquad |f_\alpha(S(x_0))| = \|S\|.$$

En efecto, si $\lambda \neq \alpha$, tenemos claramente

$$f_\lambda(S(x)) = f_\lambda(T(x)), \qquad \forall x \in X,$$

luego $\|S^*(f_\lambda)\| \leq \|T\| = 1$, mientras que

$$f_\alpha(S(x)) = f_\alpha(T(x)) + [(1+\varepsilon)g(x) - T^*(f_\alpha)(x)]\, f_\alpha(e_\alpha) =$$

$$= (1+\varepsilon)g(x) \quad ,\forall x \in X,$$

con lo cual

$$\|S^*(f_\alpha)\| = (1+\varepsilon)\|g\| \geq 1$$

luego

$$\|S\| = \sup\{\|S^*(f_\lambda)\| : \lambda \in \Lambda\} =$$

$$= \|S^*(f_\alpha)\| = (1+\varepsilon)\|g\|.$$

Además, el funcional $S^*(f_\alpha)$ alcanza la norma, pues coincide con $(1+\varepsilon)g$. Si $x_0 \in S_X$ es tal que

$$|f_\alpha(S(x_0))| = \|S^*(f_\alpha)\| = \|S\|,$$

se tiene $(*)$ como queríamos.

Pasamos a probar que S alcanza su radio numérico. Como $|f_\alpha(S(x_0))| \neq 0$, podemos encontrar $z \in \mathbb{K}$ con $|z| = 1$ tal que

$$\frac{f_\alpha(S(e_\alpha))}{f_\alpha(S(x_0))} = z\frac{|f_\alpha(S(e_\alpha))|}{|f_\alpha(S(x_0))|}.$$

Por ser $|f_\alpha(x_0)| \leq 1$ y $\lim\limits_{\rho \to +\infty} |f_\alpha(x_0) + \frac{\rho}{z}| = +\infty$, existirá

$\rho \geq 0$ tal que $|f_\alpha(x_0) + \frac{\rho}{z}| = 1$. Tomando $y = x_0 + \frac{\rho}{z} e_\alpha$, se

tiene $|f_\alpha(y)| = 1$ y para $\lambda \neq \alpha$, $|f_\lambda(y)| = |f_\lambda(x_0)| \leq 1$,

luego $\|y\| = 1$. Sea $g = \dfrac{f_\alpha}{f_\alpha(y)}$; el elemento (y, g) está en

$\Pi(X)$ y

$$|g(S(y))| = |f_\alpha(S(y))| = |f_\alpha(S(x_0)) + \frac{\rho}{z} f_\alpha(S(e_\alpha))| =$$

$$= \left| f_\alpha(S(x_0)) + \rho \frac{f_\alpha(S(x_0))}{|f_\alpha(S(x_0))|} |f_\alpha(S(e_\alpha))| \right| =$$

$$= |f_\alpha(S(x_0))| + \rho |f_\alpha(S(e_\alpha))| \geq |f_\alpha(S(x_0))| = \|S\|$$

Por tanto $v(S) = \|S\|$ y S alcanza el radio numérico.

En resumen, dado $T \in L(X)$, $\varepsilon > 0$, existe $S \in L(X)$, tal que $\|T - S\| \leq 2\varepsilon$, S alcanza el radio numérico (lo que demuestra ii)) y $v(S) = \|S\|$. Como quiera que la norma y el radio numérico coinciden en un subconjunto denso de $L(X)$ se tiene también i).

■

Nótese que la demostración utiliza la existencia de un sistema biortogonal (e_λ, f_λ) de elementos de $S_X \times S_{X^*}$ que verifica $\|x\| = \sup\{|f_\lambda(x)| : \lambda \in \Lambda\}$, $\forall x \in X$, pero realmente este hecho es equivalente a las hipótesis del teorema.

Bibliografía

[1] M. Acosta y R. Payá, *Denseness of operators whose second adjoints attain their numerical radii*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 97-101.

[2] G. de Barra, J. Giles y B. Sims, *On the numerical range of compact operators on Hilbert spaces*, J. London Math. Soc. 5 (1972), 704-706.

[3] F. Bauer, *On the field of values subordinate to a norm*, Numer. Math. 4 (1962), 103-111.

[4] I. Berg y B. Sims, *Denseness of numerical radius attaining operators*, J. Austral. Math. Soc. Ser A 36 (1984), 130-133.

[5] E. Bishop y R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 97-98.

[6] B. Bollobás, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 181-182.

[7] F. Bonsall y J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 2, Cambridge University Press, 1971.

[8] F. Bonsall y J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 10, Cambridge University Press, 1973.

[9] F. Bonsall y J. Duncan, Numerical ranges, In: *Studies in functional analysis (R. Bartle, Editor)*, pp. 1-49, MAA Studies in Math., Vol 21, 1980.

[10] J. Bourgain, *Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Mat. Soc. 58 (1976), 197-200.

[11] J. Bourgain, *On dentability and the Bishop-Phelps property*, Israel J. Math. 28 (1977), 265-271.

[12] R. Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property*, Lecture Notes in Math., vol. 993, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983.

[13] J. Bunce, *Shorted operators and the structure of operators with numerical radius one*, Integral Equations Oper. Theory 11 (1988), 287-291.

[14] C. Cardassi, *Numerical radius attaining operators on $C(K)$*, Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 537-543.

[15] C. Cardassi, Numerical radius attaining operators, In: *Banach spaces, Proceedings Missouri 1984, (N. Kalton and E. Saab, Editors)*, pp. 11-14, Lecture Notes in Math., vol. 1166, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985.

[16] C. Cardassi, *Density of numerical radius attaining operators on some reflexive spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 31 (1985), 1-3.

[17] C. Cardassi, *Numerical radius attaining operators on* $L_1(\mu)$, preprint.

[18] G. Cassier, *Image numerique simultanée d' une famille d' opérateurs sur l' espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 305 (1987), 681-684.

[19] K. Das, S. Majumdar y B. Sims, *Subsets characterizing the closure of the numerical range*, J. Aust. Math. Soc., Ser. A, 40 (1986), 1-4.

[20] K. Das, S. Majumdar y B. Sims, *Restricted numerical range and weak convergence on the boundary of the numerical range*, J. Math. Phys. Sci. 21 (1987), 35-42.

[21] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics*, Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.

[22] J. Diestel y J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys No. 15, Providence, Rhode Island, 1977.

[23] J. Duncan, C. MacGregor, J. Pryce y A. White, *The numerical index of a normed space*, J. London Math. Soc. 2 (1970), 481-488.

[24] M. Fan, *A result about the numerical range of operators*, Chin. Ann. Math., Ser. A, 7 (1986), 408-412.

[25] R. Fullerton, Geometric characterizations of certain function spaces, In: *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, pp. 227-236, Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford, 1961.

[26] H. Gowda y C. Puttamadaiah, *On spatial numerical ranges of operators on Banach spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. 19 (1988), 177-182.

[27] P. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, New York, 1967.

[28] A. Hansen y Å. Lima, *The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2 intersection property*, Acta Mathematica 146 (1981), 1-23.

[29] R. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[30] R. Huff, *On non-density of norm-attaining operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 25 (1980), 239-241.

[31] G. Isaev y T. Kuliev, *Analytical properties of the boundary of the numericcal range of operators in Hilbert space*, Sov. Math. Dokl. 34 (1987), 569-572.

[32] A. Iwanik, *Norm attainig operators on Lebesgue spaces*, Pacific J. Math. 83 (1979), 381-386.

[33] G. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974.

[34] J. Johnson y J. Wolfe, *Norm attaining operators*, Studia Math. 65 (1979), 7-19.

[35] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[36] Å. Lima, *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 1-62.

[37] J. Lindenstrauss, *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. 1 (1963), 139-148.

[38] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Memoirs Amer. Math. Soc., 48 (1964).

[39] G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 29-43.

[40] C. McGregor, *Finite dimensional normed linear spaces with numerical index 1*, J. London Math. Soc. 3 (1971), 717-721.

[41] J. Partington, *Norm attaining operators*, Israel J. Math. 43 (1982), 273-276.

[42] Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Math. 1364, Springer Verlag, Berlin and New York, 1989.

[43] S. Reich, *Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators*, J. Funct. Anal. 36 (1980), 147-168.

[44] B. Sims, *On numerical range and its applications to Banach algebras*, PH.D. dissertation, University of Newcastle, Australia, 1972.

[45] W. Schachermayer, *Norm attaining operators and renormings of Banach spaces*, Israel J. Math. 44 (1983), 201-212.

[46] W. Schachermayer, *Norm attaining operators on some classical Banach spaces*, Pacific J. Math., 105 (1983), 427-438.

[47] W. Schachermayer, *The sum of two Radon-Nikodyn-sets needs not be a Radon-Nikodym-set*, Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 51-57.

[48] C. Stegall, *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodym property*, Israel J. Math. 29 (1978), 408-412.

[49] C. Stegall, *Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces*, Math. Ann. 236, (1978), 171-176.

[50] C. Stegall, *Optimization and differentiation in Banach spaces*, Linear Alg. and Appl. 84 (1986), 191-211.

[51] O. Toeplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer*, Math. Zeit. 2 (1918), 187-197.

[52] J. Uhl, *Norm attaining operators on $L_1[0,1]$ and the Radon-Nikodym property*, Pacific. J. Math., 63 (1976), 293-300.

[53] Y. Yang, *Numerical ranges of operators on Hilbert C^*-modules*, Bull. Korean Math. Soc. 24 (1987), 52-52.

[54] V. Zizler, *On some extremal problems in Banach spaces*, Math. Scand. 32 (1973), 214-224.