Rev.Acad.Canar.Cienc., XI (Núms. 1-2), 23-27 (1999)

SOBRE LA VARIEDAD DE LOS PRODUCTOS ESCALARES LORENTZIANOS EN DIMENSION 2

Rafael Ramírez y Miguel Sánchez
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada, Espaa.

Resumen

En el presente artıculo se soluciona un problema relativamente simple (y, hasta donde sabemos, nuevo) en Geometría Lorentziana: calcular la estructura diferenciable local de los productos escalares lorentzianos sobre $\mathbb{R}^2$. Para ello se sigue una aproximación pedagógica en la que se resaltan las diferencias y similitudes con el caso euclídeo. Así, se esbozan primero diferentes modos de resolver el problema análogo en el caso definido positivo, cuya solución ($\mathbb{R}^3$) es bien conocida. Discutimos entonces cuál de estos métodos puede aplicarse al caso lorentziano. Finalmente, se comprueba que la estructura global es difeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ y se discute el problema desde un punto de vista físico.

1 Introducción

Sea $Gl(2)$ el grupo de las matrices reales regulares de orden 2, y sean $O(2)$ y $O_1(2)$, los subgrupos formados por las matrices ortogonales para los productos escalares euclídeo y lorentziano usuales de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, esto es $O(2)=\{M\in Gl(2): M^t \cdot M = Id\}$ y $O_1(2)=\{M\in Gl(2)$: $M^t \cdot G \cdot M = G\}$, donde ^{t} denota trasposición y $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por ser $Gl(2)$ un grupo de Lie y $O(2)$ y $O_1(2)$ dos subgrupos cerrados, los cocientes $Gl(2)/O(2)$ y $Gl(2)/O_1(2)$ presentan estructuras de variedad diferenciable de dimensión $\dim Gl(2)$-$\dim O(2,\mathbb{R})= 3 =\dim Gl(2)$-$\dim O_1(2,\mathbb{R})$ (ver, por ejemplo, [1]). Un problema sencillo clásico es mostrar explícitamente que $Gl(2)/O(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Nuestro objetivo en el presente artículo es calcular la estructura diferenciable global de $Gl(2)/O_1(2)$. Este problema, aunque es sencillo, no resulta trivial, y con él perseguiremos, en primer lugar, ilustrar algunas diferencias y analogías entre las Geometrías Euclídea y Lorentziana. Así en la Sección 2, se esbozan cuatro métodos distintos para calcular la estructura de $Gl(2)/O(2)$. Como se muestra en la Sección 3, ninguno de los tres primeros puede aplicarse (de modo razonablemente directo) para hallar la de $Gl(2)/O_1(2)$. El cuarto método sí resulta traspasable al caso lorentziano, aunque la prueba es más larga, debido a los distintos caracteres causales que puedan presentarse. Por este método se prueba que $Gl(2)/O_1(2)$ es difeomorfo a cierto abierto de $\mathbb{R}^3$ y, finalmente, se obtendrá que es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, ($\mathbb{S}^1$: circunferencia unidad). Finalmente, en la Sección 4 discutiremos cómo $Gl(2)/O_1(2)$ se identifica naturalmente con el conjunto de todos los productos escalares lorentzianos sobre $\mathbb{R}^2$, y daremos una interpretación suya desde el punto de vista de la Relatividad Especial.

2 Estructura diferenciable global de $Gl(2)/O(2)$

En esta sección, denotaremos por $\sim$ la relación binaria que define $Gl(2)/O(2)$, esto es, dadas $M', M\in Gl(2)$, $M' \sim M \iff \exists R\in O(2)$: $M' = M \cdot R$. Denotaremos por $[M]$ a la clase de equivalencia de M.

Método I (Descomposición Polar)

Sea $S_2(\mathbb{R})_+$ el conjunto de las matrices simétricas de orden 2 que son definidas positivas, esto es, $S_2(\mathbb{R})_+=\{\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$: $a > 0$, $d > 0$, $c\in]-\sqrt{ad},\sqrt{ad}[\}$. Cualquier matriz regular $M\in Gl(2)$ se descompone de forma única como un producto $M = P\cdot R$ donde $R\in O(2,\mathbb{R})$ y $P\in S_2(\mathbb{R})_+$ (descomposición polar de M). Esta descomposición nos permite definir la aplicación:

$$\tilde{F}_1 : Gl(2) \longrightarrow S_2(\mathbb{R})_+$$
$$M = P\cdot R \longmapsto P$$

La diferenciabilidad de $\tilde{F}_1$ es consecuencia del procedimiento que se utiliza para hallar la descomposición polar; por otra parte, no es difícil comprobar que $\tilde{F}_1$ es sobreyectiva con diferencial sobreyectiva en todo punto (sumersión). Además $\tilde{F}_1$ es inducible en el cociente $Gl(2)/O(2)$, ya que dos matrices regulares $M_i = P_i\cdot R_i$, $i = 1,2$, están relacionadas si y solamente si $P_1 = P_2$. Se induce así la aplicación inyectiva $F_1 : Gl(2)/O(2) \longmapsto S_2(\mathbb{R})_+$ caracterizada porque hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Gl(2) \arrow[rr, mapsto, "\tilde{F}_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S_2(\mathbb{R})_+ \\ & Gl(2)/O(2) \arrow[ur, "F_1"'] & \end{tikzcd}$$

La diferenciabilidad de $\tilde{F}_1$ implica que F_1 sea diferenciable, más aún, al heredar F_1 y su diferencial el carácter sobreyectivo, se tiene que F_1 es un difeomorfismo.

$$Gl(2)/O(2) \cong S_2(\mathbb{R})_+ \cong \mathbb{R}^3$$

Método II (Bases ordenadas)

Para cada $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in Gl(2)$, escribamos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de modo que $B = (X, Y)$ es una base (ordenada) de $\mathbb{R}^2$. Puesto que la clase $[M]$ se obtiene a partir de M componiendo con todas las isometrías, siempre existe un representante de esta clase del tipo $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, con $a > 0$ (compóngase con un giro, si es necesario), $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, con $d > 0$, (compóngase con una reflexión respecto del eje horizontal). No es difícil demostrar que este representante es único, obteniéndose así un difeomorfismo:

$$F_2 : Gl(2)/O(2) \longrightarrow A = \{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : a > 0, d > 0\}$$

En consecuencia:

$$Gl(2)/O(2) \cong A \cong \mathbb{R}^3$$

Método III (Ortonormalización de Gram-Schmidt)

Sea M y $B = (X, Y)$ como en el método anterior. Denotaremos por $<,>$ y$\|.\|$ el producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$ y su norma asociada. Aplicando el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt a B se obtiene una nueva base ordenada $B_0 = (E_1, E_2)$ con

$$E_1 = \frac{X}{\|X\|} \text{ y } E_2 = \frac{Y-(<X,Y>/<X,X>)X}{\|Y-(<X,Y>/<X,X>)X\|}.$$

Llamando $\Omega = \|Y - \frac{<X,Y>}{<X;X>}X\| = (\|Y\|^2 - \frac{<X,Y>^2}{\|X\|^2})^{1/2}$, podemos escribir la matriz de cambio de base entre B_0 y B como

$$M(1, B_0, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|X\|} & \frac{-<X,Y>}{\Omega<X,X>} \\ 0 & \frac{1}{\Omega} \end{pmatrix} \in \mathrm{A}$$

La aplicación así obtenida $\tilde{F}_3 : Gl(2)/O(2) \longrightarrow A$, $\tilde{F}_3(X, Y) = M(Id, B_0, B)$ se induce bien en el cociente, y por los argumentos expuestos en el Método I, se puede demostrar que la aplicación $F_3 : Gl(2)/O(2) \longmapsto A$ es un difeomorfismo. Se obtiene así, de nuevo:

$$Gl(2)/O(2) \cong A \cong \mathbb{R}^3$$

Método IV (Producto euclídeo de elementos de una base)

Consideremos la aplicación diferenciable $\tilde{F}_4 : Gl(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\tilde{F}_4(X, Y) = (< X, X >, < Y, Y >, < X, Y >)$$

cuya diferencial

$$(d\tilde{F}_4)_{(X,Y)}(V_1, V_2) = (2 < X, V_1 >, 2 < Y, V_2 >, < X, V_2 > + < Y, V_1 >)$$

es claramente sobreyectiva en cada punto. $\tilde{F}_4$ es inducible en el cociente, siendo la aplicación inducida $F_4 : Gl(2)/O(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable (ver Método I). Puesto que F_4 está definida entre variedades de igual dimensión y tambien tiene diferencial sobreyectiva, es un difeomorfismo local. Comprobemos que es inyectiva, con lo que $Gl(2)/O(2)$ será difeomorfo a la imagen de F_4, $\mathrm{Im}F_4$. En efecto, en cualquier clase de equivalencia podemos conseguir un representante del tipo (E_1, E_2) siendo $E_1 = (1, 0)\|E_1\|$ y $E_2 = (a, \sqrt{1-a^2})\|E_2\|$ con $-1 < a < 1$ (método II), de donde resulta inmediata la inyectividad. Por último, obsérvese que $\mathrm{Im}F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0, y > 0, |z| < xy\}$, conjunto que no es difícil demostrar resulta difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

3 Estructura diferenciable global de $Gl(2)/O_1(2)$

Denotaremos ahora por $\sim$ y $[.]$ la relación y clase de equivalencia producidas por $O_1(2)$, y por $<, >_L$, el producto lorentziano usual $< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} >_L = a\tilde{a} - b\tilde{b} : a, \tilde{a}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}$. Análogamente escribiremos

$$\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \|_L = \sqrt{| < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >_L |}.$$

Como es usual diremos que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ es temporal (respectivamente luminoso, espacial) si $< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >_L <$ 0(resp. $= 0, > 0$). Si intentamos ahora aplicar los métodos anteriores, se presentan los siguientes problemas:

Mét. I Mediante matrices ortogonales lorentzianas no existe una descomposición análoga a la polar.

Mét. II En el caso lorentziano, habrá que distinguir distintos casos según los vectores de cada base sean espaciales, luminosos o temporales, lo que dificulta visualizar la estructura global de variedad diferenciable.

Mét. III El procedimiento de Gram-Schmidt no puede aplicarse a un base $B = (X, Y)$ en el caso lorentziano cuando X sea un vector luminoso (no podemos dividir por su norma).

A continuación, nuestro objetivo será trasladar el método IV al caso lorentziano. Sea

$$\tilde{F} : Gl(2) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
$$M = (E_1, E_2) \longmapsto (< E_1, E_1 >_L, < E_2, E_2 >_L, < E_1, E_2 >_L)$$

Como en el caso euclídeo se obtiene una aplicación $F : Gl(2)/O_1(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es un difeomorfismo local. Seguidamente veremos que F es inyectiva y que $\mathrm{Im}F (= \mathrm{Im}\tilde{F}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > xy\}$. Para ello distinguiremos entre las restricciones de $\tilde{F}$ y F a los siguientes casos, cuyas imágenes son claramente disjuntas:

1. E_1, E_2 espaciales (o, análogamente, E_1, E_2 temporales). Mediante isometrías de Lorentz podemos suponer $E_1 = (1, 0)\|E_1\|$; en general, podemos escribir $E_2 = (\pm\sqrt{1+a^2}, a)\|E_2\|$ para algún $a \neq 0$, y usando, si es preciso, reflexiones respecto al eje horizontal, $a > 0$. En consecuencia, $< E_1, E_2 >_L = \pm \sqrt{1+a^2}\|E_1\|\|E_2\|$, luego $z^2 > xy$. Es inmediato comprobar que para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z^2 > xy$, existe una única preimagen por F, $[(E_1, E_2)]$, donde $E_1 = (1, 0)\sqrt{x}, E_2 = (\pm \sqrt{1+a^2}, a)\sqrt{y}, a > 0$, siendo $z = \pm \sqrt{1+a^2}\sqrt{x}\sqrt{y}$.

2. E_1 espacial, E_2 temporal (o, análogamente E_1 temporal, E_2 espacial). Se resuelve de forma análoga al anterior; nótese que, ahora, $xy < 0$ por lo que no hay restricción sobre la coordenada z.

3. E_1 espacial, E_2 luminoso (o, análogamente, uno luminoso y otro no). Podemos suponer $E_1 = (1,0)\|E_1\|$ y, mediante reflexiones respecto a los ejes de coordenadas, $E_2 = (\pm\, a, a), a > 0$, con lo que $< E_1, E_2 >_L = \pm\, a\|E_1\|$. Claramente la imagen cumple $z^2 > xy$, y la restricción de F a este caso es inyectiva.

4. E_1, E_2 luminosos. Podemos suponer, mediante isometrías de Lorentz, que $E_1 = (1,1)$ y $E_2 = (a,-a), a \neq 0$, con lo que $< E_1, E_2 >_L = 2a$. F vuelve a salir inyectiva y la imagen cumple $z^2 > xy$.

En conclusión, $Gl(2)/O_1(2)$ es difeomorfo a $U \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > xy\}$.

Comprobemos a continuación que U es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

(A) Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq xy\}$ y C el interior del cono de revolución que resulta de girar los ejes x e y sobre la bisectriz $b \equiv \{y = x, z = 0\}$. Es fácil comprobar que $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 \leq xy\}$ y, por tanto, U es difeomorfo a $\mathbb{R}^3 \backslash C$.

(B) Para ver que $\mathbb{R}^3 \backslash C$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, consideremos la siguiente aplicación $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash C$, (ver Figura). Dado $(e^{i\theta}, r, l) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definimos la rama de la rama de la hipérbola $H_r = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, xy = r\}$. Partiendo de $P = (\sqrt{r}, \sqrt{r}, 0) \in H_r$, avanzamos en la hipérbola hasta el punto $P(l) = (e^l\sqrt{r}, e^{-l}\sqrt{r}, 0)$. Por definición, $H(e^{i\theta}, r, l)$ es el punto que se obtiene girando $P(l)$ un ángulo θ alrededor de la bisectriz b. Explícitamente:

$$H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash C.$$

$$H(e^{i\theta}, r, l) = \begin{pmatrix} \frac{cos\theta}{2} + \frac{1}{2} & \frac{cos\theta}{2} - \frac{1}{2} & \frac{-sen\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{cos\theta}{2} - \frac{1}{2} & \frac{cos\theta}{2} + \frac{1}{2} & \frac{-sen\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} & \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^l\sqrt{r} \\ e^{-l}\sqrt{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que H es un difeomorfismo, por lo que:

$$Gl(2)/O_1(2) \cong R^3 \backslash C \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2.$$

4 Discusión

El cociente $Gl(2)/O_1(2)$ admite la siguiente interpretación geométrica (análogas consideraciones se pueden hacer en el caso euclídeo). Dar una producto escalar lorentziano sobre $\mathbb{R}^2$ equivale a dar todas sus bases ortonormales; fijada una de ellas B, las demás se obtendrán por la acción de $O_1(2)$. Así, se puede establecer una biyección natural de $Gl(2)/O_1(2)$ sobre el conjunto de todos los productos escalares lorentzianos sobre $\mathbb{R}^2$: identificando cada matriz $M' \in [M]$ con una base ordenada B' (como en el Método II), se asigna a $[M]$ el único producto escalar lorentziano para el que B' es una base ortonormal, lo que es claramente independiente de la matriz M' escogida en $[M]$. Ahora bien, fijada la base usual en $\mathbb{R}^2$, hay una biyección natural entre los productos escalares lorentzianos y las matrices simétricas de orden 2 con determinante negativo. Así se consigue una biyección entre $Gl(2)/O_1(2)$ y

$$V = \{\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} : ad < c^2\}$$

(para el caso euclídeo, se consigue una biyección entre $Gl(2)/O(2)$ y $S_2(\mathbb{R})_+$, definido en el Método I). El que esta biyección sea un difeomorfismo es una consecuencia de la Sección 3 (aunque también puede comprobarse directamente, produciéndose así un método alternativo más).

Por otra parte, el cociente $Gl(2)/O_1(2)$ admite la siguiente interpretación desde el punto de vista de la Física. De acuerdo con la Relatividad Especial, si nos restringimos a una dimensión espacial, el espacio-tiempo admite una estructura de espacio afín bidimensional con una producto escalar de Lorentz g. Fijado un punto de este espacio afín (un "evento: aquí y ahora") las bases ortonormales para g son, grosso modo, los "observadores inerciales". Experimentalmente, g se determina a través de estos "observadores": se supone que la experimentación nos permite distinguirlos y, una vez se ha determinado cualquiera de ellos, los demás quedan fijados por la acción de $O_1(2)$ (transformaciones de Lorentz bidimensionales). Así, cada elemento de $Gl(2)/O_1(2)$ es un conjunto completo de candidatos a observadores inerciales, y $Gl(2)/O_1(2)$ es el espacio cuyos elementos son los conjuntos de todos los posibles candidatos a observadores inerciales. Los autores quedarían muy agradecidos si se les diera alguna razón física por lo que este conjunto deba tener la particular estructura diferenciable obtenida.

Referencias

[1] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Co. Glenview, Illinois (1971)