UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo Fin de Máster

Máster en Matemáticas

Diferenciales holomorfas en superficies de Riemann

Autor
Juan Andrés Trillo Gómez

Tutor: Antonio Alarcón López
Geometría y Topología

Julio 2020

MÁSTER EN
MATEMÁTICAS

Presentación del Trabajo Fin de Máster

(UNA VEZ CUMPLIMENTADO, DEBERÁ PRESENTARSE JUNTO CON LA MEMORIA)

Máster en: Matemáticas

Curso académico: 2019-2020.

DATOS DEL ALUMNO

Apellidos: Trillo Gómez	**Nombre:** Juan Andrés
D.N.I.: 77668334W	**Tlf.:** 654840497
Correo electrónico: juantrillo1997@gmail.com	

DATOS DEL TRABAJO

TÍTULO: Diferenciales holomorfas en superficies de Riemann
NOMBRE DEL TUTOR/CO-TUTOR: Antonio Alarcón López

Declaro explícitamente que el trabajo presentado es original, entendido en el sentido de que no he utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada, a 17 **de** Julio **de 20**20.

Firmado: TRILLO GOMEZ JUAN ANDRES - 77668334W Firmado digitalmente por TRILLO GOMEZ JUAN ANDRES - 77668334W Fecha: 2020.07.21 15:24:57 +02'00'

Índice general

Resumen

Dada una superficie de Riemann abierta X , estudiamos los Teoremas de Gunning-Narasinham y de Kusunoki-Sainouchi. El primero, prueba que existen diferenciales holomorfas exactas y sin ceros, en otras palabras, la clase del cero en $H^1_{dR}(X)$ admite un representante holomorfo y sin ceros. El Teorema de Kusunoki-Sainouichi es más preciso y prueba que podemos encontrar una diferencial abeliana con divisor y periodos prescritos. Para llegar a los resultados desarrollamos herramientas de muchos campos de la Matemática, como son el Álgebra, Análisis Funcional, Análisis Real y Complejo así como los rudimentos de la Geometría Diferencial en Variedades, con el fin de demostrar, entre otros, el Teorema de Aproximación de Runge y el de Mergelyan-Bishop, concernientes al problema de aproximación de funciones holomorfas en compactos Runge.

Introducción

En este texto trabajamos el área de las Matemáticas conocida como Análisis Geométrico. Este área, es especialmente fructífera por la amplia cantidad de materias de las que se nutre. Precisamente, esta cualidad nos permite, definir conceptos, estudiar propiedades y demostrar resultados desde diferentes puntos de vista. Principalmente, este trabajo utiliza tres herramientas: el Análisis Matemático de Variable Real y Compleja, el Análisis Funcional y el Álgebra. Como hemos comentado, las demostraciones aquí expuestas, pueden ser vistas con otros enfoques. Hemos optado por una mezcla de las tres ramas anteriores, fusionando las técnicas de diferentes autores, como pueden ser T. Napier, O. Forster, R.C. Gunning, W. Rudin y R. Narasimhan entre otros.

Los objetos básicos sobre los que vamos a trabajar son las variedades topológicas y diferenciables junto con las superficies de Riemann. Una variedad topológica no es más que un espacio topológico usualmente conexo y localmente homeomorfo a ciertos abiertos de $\mathbb{R}^n$, donde n es un invariante de la variedad al que se conoce como dimensión. Las variedades diferenciables, son variedades topológicas que además, cuando transitamos de abiertos (cambio de cartas) obtenemos funciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Las superficies de Riemann son algo más restrictivo, pues son superficies diferenciables, esto es, $n = 2$, de forma que los cambios de cartas son funciones holomorfas entre abiertos del plano complejo. Los ejemplos más simples de superficies de Riemann son el plano complejo $\mathbb{C}$ y la *Esfera de Riemann*. De manera natural, podemos extrapolar las definiciones y resultados conocidos de variedades diferenciables a superficies de Riemann. Por ejemplo, una función será holomorfa si al representarla en cartas esta es holomorfa. Como es de esperar, no todos los resultados se llevan de un objeto a otro de forma tan simple.

Al igual que con las variedades diferenciables reales, construimos de manera análoga las formas diferenciales complejas. Dado que el ambiente es una superficie tendremos 1-formas y 2-formas diferenciales. En superficies de Riemann hay un tipo particular de 1-forma que no está definida en variedades diferenciables reales, nos referimos a las *1-formas holomorfas*, aquellas formas diferenciales que escritas en cartas, vienen representadas por funciones holomorfas. Igualmente, tenemos *1-formas meromorfas*, que con analogía son aquellas representadas localmente por funciones meromorfas. Cuando estas últimas están definidas en toda la superficie se las conoce como *diferenciales abelianas*. Las *diferenciales holomorfas* y *abelianas* son el eje principal de la memoria.

El estudio de estas diferenciales atiende principalmente a dos nociones, las *singularidades* y la *integración*. En el plano complejo, dado un dominio $D \subset C$ y una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tenemos *puntos distinguidos*, se destacan respecto de los otros sobre como se comporta respecto de la función dada. La teoría clásica nos da tres tipos de puntos

- **Ceros de la función** f. Como su nombre indice, un punto $z_0 \in D$ es cero de f si $f(z_0) = 0$. Si la función f es holomorfa en un entorno de z_0 tenemos una caracterización muy potente, similar a la factorización de polinomios, y es que existe un número natural k tal que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g : D(z_0, r) \subset D \longrightarrow \mathbb{C},$$

con g holomorfa en el disco y $g(z_0) \neq 0$. Al número k se le llama *orden del cero* z_0.

- **Polos de la función** f. Un polo de f es un punto $z_1 \in D$ tal que

  $$\lim_{z \to z_1} |f(z)| = +\infty.$$

  También se tiene una caracterización, y es que existe k natural tal que

  $$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1)^k}, \quad h : D(z_1, r) \subset D \longrightarrow \mathbb{C},$$

  con h holomorfa en el disco y $h(z_1) \neq 0$. Al número k se le llama *orden del polo* z_1.

- **Singularidad esencial de la función** f. La forma más intuitiva de presentar este tipo de singularidades es diciendo que $z_2 \in D$ es una *singularidad esencial* de la función f si para cualquier $r > 0$ con $D(z_2, r) \subset D$ se cumple que

  $$f(D(z_2, r) \setminus \{z_2\})$$

  es denso $\mathbb{C}$.

Si una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa salvo en un conjunto discreto P, de forma que todos los puntos de P son polos, diremos que f es *meromorfa* y son las funciones que nos atañen. Estos conceptos son extrapolables a superficies de Riemann, mediante cartas, y definiendo todo lo anterior a la representación coordenada. A nosotros nos atañen las funciones meromorfas. La factorización de los ceros y de los polos depende de la carta tomada, pero son conceptos consistentes en la teoría porque los órdenes no depende de la carta. Así, cuando tengamos una superficie de Riemann X y una función meromorfa $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tendremos estos puntos distinguidos. Es natural estudiarlos de manera global. Observemos que todos estos puntos tienen un peso su *orden*, ya sea como cero o como polo. Consideramos una función

$$(f) : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

que a cada $x \in X$ le asigne su orden como cero o polo de f y al resto de puntos le asigne el valor cero. Por definición el número de polos es discreto. Sin embargo, el número de ceros también lo es, gracias al Teorema de Identidad. A esta aplicación (f) se le llama *divisor principal asociado a* f. Así, toda función meromorfa f tiene asociada una aplicación de este estilo. Sin embargo, podemos ir más allá. Consideramos una aplicación

$$d : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

que se anula en todo X salvo un conjunto discreto sin puntos de acumulación. A estas aplicaciones las conocemos como *divisores*. La pregunta patológica es por tanto: dado un divisor d cualquiera ¿podemos encontrar una función meromorfa f tal que $d = (f)$? Si esto ocurre diremos que f es una solución del divisor d. Coloquialmente hablando, estamos diciendo que dados unos puntos de X y unos pesos asociados a tales puntos, ¿podemos encontrar una función meromorfa que tenga en esos puntos un cero o un polo cuyo orden sea el peso prefijado? Esta pregunta no es nada trivial. La duda quedará resuelta cuando

veamos el Teorema de Weierstrass (Teorema 8.0.1), que nos dice que en una superficie de Riemann no compacta, todo divisor tiene solución. En superficies compactas, por ejemplo, no siempre es posible, hace falta que la suma de los pesos del divisor sea cero.
De igual modo, si ω es una diferencial abeliana, localmente en una carta (U, z) se expresa como

$$\omega = f dz,$$

siendo f meromorfa en U. Definimos el orden del cero o polo de ω como el de f, y esta definición es correcta porque el orden no depende de la carta. Por tanto, nos preguntamos si dado un divisor d, podemos encontrar una diferencial abeliana ω tal que $(\omega) = d$.

Los órdenes de ceros y polos de una diferencial abeliana están altamente relacionados con la integración. La utilidad principal de las 1-formas diferenciales va a ser su integración sobre curvas en la superficie. Un ejemplo muy visual es cuando en el Análisis Complejo clásico aparecen expresiones del siguiente estilo:

$$\int_\gamma f(z) dz,$$

donde γ es un camino en $\mathbb{C}$ y f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. El integrando que aparece en la expresión anterior $f(z)dz$ es una diferencial abeliana del plano complejo $\mathbb{C}$ visto como superficie de Riemann. Podemos ir más allá. Sin lugar a duda, junto con las *Fórmulas de Cauchy* el resultado más importante del Análisis Complejo es el *Teorema de los Residuos*, que a grandes rasgos nos decía: si tomamos una función holomorfa $f : D(a, r) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ y un ciclo γ en $D(a, r) \setminus \{a\}$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \mathrm{Ind}_\gamma(a) \mathrm{Res}(f, a),$$

donde $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ es el *índice de γ respecto de a*, que es precisamente el número de vueltas que da γ alrededor del punto a. El valor de esta integral no depende de *deformaciones* de la curva γ, lo que se conoce como *clase de homología*. Así, si tenemos un ciclo homólogo a γ, el valor de la integral permanecerá invariante. El conjunto de las clases de homología de estos ciclos es lo que se conoce como *grupo de homología singular con coeficientes enteros*, que usualmente es denotado como $H_1(X, \mathbb{Z})$, donde X es el espacio topológico en el que trabajemos.

Todo esto que hemos contado en el plano complejo es también cierto en superficies de Riemann con sus respectivas diferenciales holomorfas y abelianas. La perspectiva introducida es que si tenemos una diferencial meromorfa la integración no depende de la clase de homología del ciclo sobre el que se integre. Si fijamos una diferencial meromorfa, llamémosla ω, en una superficie de Riemann X, podemos considerar la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} H_1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [\gamma] & \longmapsto & \int_\gamma \omega. \end{array}$$

Está bien definida porque la integración no depende de la clase de homología. Además el comportamiento lineal de la integral nos permite concluir que la aplicación anterior es un *morfismo de grupos abelianos* al que se conoce como **morfismo periodo**. Toda diferencial meromorfa tiene asociado un morfismo periodo, que es precisamente el definido anteriormente. Sin embargo, la pregunta patológica, es de nuevo: ¿si tengo un morfismo $\phi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$, existe una diferencial meromorfa cuyo morfismo periodo sea ϕ? Lo que estamos diciendo es si podemos encontrar una diferencial que valga lo que nosotros queramos en ciertos ciclos. Si lo anterior es posible, diremos que ω tiene *periodos prescritos por* ϕ.

Formuladas estas preguntas, nos planteamos un ambiente particular, una superficie de Riemann no compacta. Resulta, que las respuestas son afirmativas en ambos casos y no solo eso, si no que podemos hacer que se cumplan simultaneamente, esto es, en una superficie de Riemann no compacta, dados un divisor d y un morfismo $\phi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$, existe una diferencial abeliana ω que es solución del divisor d y que además tiene los periodos prescritos por ϕ. Este resultado se conoce como *Teorema de Kusunoki-Sainouichi*, con un caso particular muy remarcable, el *Teorema de Gunning-Narasinham*, que surge cuando pedimos que ω no tenga ceros y todos los periodos de ω sean nulos, es decir, que ω sea *exacta*, que no es más que pedir que admita primitiva.

Teorema de Gunning-Narasinham

Toda superficie de Riemann no compacta admite una diferencial holomorfa exacta y sin ceros.

Teorema de Kusunoki-Sainouchi

Sea X una superficie de Riemann abierta, $d \in \text{Div}(X)$ y $\phi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un morfismo de grupos. Existe una diferencial abeliana ω en X, asociada al divisor d y al homomorfismo ϕ, tal que

1. La diferencial ω es solución del divisor d
2. La diferencial ω tiene periodos prescritos por el morfismo ϕ.

Los *grupos de cohomología sobre haces* son una parte esencial del Álgebra que envuelve al estudio del anterior problema. Estos grupos permiten entender con una precisión superior los comportamientos de las formas diferenciales. En particular, establecen relaciones entre la naturaleza topológica de la superficie y su naturaleza análitica a través del Álgebra. Para ello es indispensable definir lo que es un *haz*, que no es más que un functor desde el conjunto parcialmente ordenado $Open(X)$ hasta una categoría, que para nosotros será la de grupos, más unas ciertas propiedades de compatibilidad. Estos grupos además adquieren una estructura de espacio vectorial. La forma de construirlos es puramente algebraica, y en concreto referente al lenguaje categórico, porque estos se definen en términos de límites y colímites de diagramas. Todo esto culminará con la ecuación *inhomogenea de Cauchy*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g.$$

Las soluciones de esta ecuación nos permiten construir funciones muy deseables en estos ambientes, pues pedir que su parte antiholomorfa sea cero es pedir que la función sea holomorfa.

Mediante herramientas de Análisis Funcional estudiaremos las cohomologías de las superficies sobre diferentes haces. La técnica fundamental será estudiar los funcionales lineales continuos que dan una imagen muy detallada de como las formas diferenciales actúan sobre la topología de la superficie. Los resultados principales a los que queremos llegar serán referentes a superficies de Riemann no compactas. Para trabajar adecuadamente serán necesarias ciertas exhauciones por compactos de tales superficies. Dado que buscamos teoremas globales y estamos partiendo la superficie en compactos, será menester tener una propiedad muy importante. Queremos abiertos o compactos que recubran a la superficie pero que cada función definida localmente sea posible aproximarla uniformemente por compactos por funciones definidas en toda la superficie. Así surge el concepto de *conjunto Runge* con los que recubriremos la superficie. Se motivará su construcción y se verá que es necesario pedir que los complementarios de estos conjuntos no posean componentes conexas relativamente compactas. Mostraremos también que esta propiedad no solo es necesaria, sino también suficiente. Esto es lo que se conocerá como *Teorema de Aproximación de Runge* y una versión aún más fuerte, el *Teorema de Aproximación de Mergelyan-Bishop*. Ambos teoremas tendrán demostraciones muy concernientes al Análisis Funcional.

Un peldaño fundamental en nuestro estudio será la clasificación de las superficies compactas con y sin borde. Es prioritario conocer como son estas superficies por dos motivos:

- Haremos exhauciones por compactos.
- La integración de formas diferenciales está intimamente relacionada con la homología singular.

Dado que vamos a trabajar con superficies de Riemann, que son siempre orientables, tendremos que las superficies compactas sin borde serán siempre una suma conexa de g-toros (género de la superficie) o una esfera. En el caso con borde serán g-toros o una esfera, con k discos removidos. Además, tendremos una descripción muy precisa de la homología singular de estas superficies.

Capítulo 1

Introducción a las superficies de Riemann

Definición 1.0.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff y sea una familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : U_\alpha \subset X\}$ con las siguientes propiedades,

1. La familia $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento por abiertos de X.

2. Cada aplicación $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset X \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ es un homeomorfismo. Al par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ le llamamos *carta compleja o coordenadas locales complejas de dimensión uno.*

3. Si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ con $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ entonces la aplicación

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U \cap V) \longrightarrow \varphi_\alpha(U \cap V)$$

   es biholomorfa. A estas aplicaciones las llamamos *funciones de transición* o *cambio de cartas.*

A la familia $\mathcal{A}$ se le denomina *atlas holomorfo de* X. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son atlas de X, diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ están relacionados si su unión es de nuevo un atlas sobre X. Esta relación es de equivalencia, y a la clase $[\mathcal{A}]$ se la conoce como *estructura holomorfa de dimensión uno sobre* X. Al par $(X, [\mathcal{A}])$ o simplemente X, le llamamos *variedad compleja de dimensión uno.* En el caso de X conexo diremos que es una ***superficie de Riemann.***

Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. La notación estándar para los discos complejos va a ser la siguiente:

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad D^*(a, r) := D(a, r) \setminus \{a\}$$

y

$$\mathbb{D} := D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

La notación usual para los anillos complejos será

$$A(a; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \quad R \in (0, \infty].$$

Observación 1.0.1. Observemos que si (U, φ) es una carta de una superficie de Riemann X, la aplicación φ toma valores en $\mathbb{C}$. Con este motivo, muchas veces denotaremos por (U, z) a las cartas y escribiremos $z = x + iy$.

Observación 1.0.2. En principio, al espacio topológico X solo se le pide que sea Hausdorff. Sin embargo, en muchos textos se le pide como condición que sea ANII, es decir, que X admita una base de la topología numerable. No obstante, cualquiera de las dos construcciones nos dan las mismas estructuras, pues aunque no se pida ANII, resulta que con las condiciones pedidas sobre los atlas, X es ANII.

Definición 1.0.2. Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$. Diremos que una carta (U, φ) está *centrada en p* si $\varphi(p) = 0$. Diremos que es un *conforme a un disco* si $\varphi(U)$ es un disco de $\mathbb{C}$.

Definición 1.0.3. Un superficie de Riemann X diremos que es *compacta* si el espacio topológico X es compacto. Cuando X no es compacta diremos que es *abierta*.

En este trabajo, las superficies de Riemann abiertas serán el objeto a tratar. Sin embargo, muchos cálculos que hagamos serán de carácter local. Esto nos lleva a tener que adquirir un cierto conocimiento de las superficies de Riemann compactas.

Damos algunos ejemplos de superficies de Riemann.

Ejemplo 1.0.1 (El plano complejo $\mathbb{C}$)**.** Sea $X = \mathbb{C}$ con su topología usual. Una estructura holomorfa de dimensión uno en $\mathbb{C}$ es la dada por el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}, Id)\}$. Observemos que X es una superficie de Riemann *abierta*.

Ejemplo 1.0.2 (Estructura inducida en un abierto)**.** Sea X una superficie de Riemann y sea D un abierto de X. Tómese $\mathcal{A}$ un atlas de la estructura holomorfa de X. Consideramos a D con su topología de subespacio. Un atlas holomorfo para D es el dado por $\{(U \cap D, \varphi|_{U\cap D}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$. Notemos que necesitamos que D sea abierto de X para poder restringir φ a la intersección. Además, el atlas anterior definido, dota a D de estructura holomorfa no de estructura de superficie de Riemann. Cuando D sea conexo, D sí será una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.0.3 (Esfera de Riemann)**.** Consideramos la compactación de Alexandroff por un punto de $\mathbb{C}$. Es conocido que $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\dot{\cup}\{\infty\}$ con al topología

$$\overline{\mathscr{T}} = \{(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\} : K \text{ compacto de } \mathbb{C}\}$$

es un espacio topológico conexo (por serlo $\mathbb{C}$) y compacto. Si denotamos por $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un atlas sobre $\overline{\mathbb{C}}$ es

$$\{(\mathbb{C}, Id), (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, T)\}, \quad T : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \quad T(z) = \frac{1}{z}.$$

Se debe tener en cuenta que T es continua definiendo $T(\infty) = 0$. Para probar que en efecto es continua, es muy útil la caracterización por sucesiones. Denotemos $D(0, r)$ al disco abierto de centro $0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. La familia $\{D(0, r)\}_{r>0}$ es una base de entornos de cero. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{C}^*$ convergente a infinito. Dado que $\overline{D}(0, r)$ es compacto entonces

$$U_r = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0, r) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > r\right\}.$$

es entorno de infinito. La sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a infinito. Existe $n_0 = n_0(r) \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in U_r$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto $|z_n| > r$ para todo $n \geq n_0$. Finalmente, para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|T(z_n)| = \left|\frac{1}{z_n}\right| < r$. Esto prueba que de un lugar en adelante

$T(z_n) \in D(0,r)$, lo que demuestra $\lim_{n\to\infty} T(z_n) = 0$.

T es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ y su inversa es ella misma (es una involución), es decir, T es biholomorfismo de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$. Las funciones de transición son bilomorfismos puesto que se trata de la propia T. Este es un ejemplo de superficie de Riemann compacta.

Observación 1.0.3. El nombre de esfera de Riemann es porque $\overline{\mathbb{C}}$ es difeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mediante la proyección estereográfica. De hecho,

$$\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1,$$

donde $\mathbb{CP}^1$ es el espacio proyectivo complejo de dimensión uno, al cual se puede dotar de estructura de superficie de Riemann.

Definición 1.0.4 (Funciones holomorfas)**.** Sea X una superficie de Riemann. Diremos que una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa en un punto* $p \in X$ si existe una carta (U, φ) alrededor de p en X tal que la aplicación

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{C} \\ \varphi(U) \arrow[ur, dashed, "f\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Al conjunto de funciones holomorfas en p lo denotamos por $\mathcal{O}_p(X)$. Diremos que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa en un abierto* $D \subset X$ si es holomorfa en cada punto de D. Si $A \subset X$ es un conjunto cualquiera de X, diremos que f es holomorfa en A si existe un entorno abierto U de A tal que f es holomorfa en U. Al conjunto de funciones holomorfas en A lo denotamos como $\mathcal{O}(A)$.

Observación 1.0.4 (La holomorfía es de carácter local)**.** Hemos definido el concepto de holomorfía en un punto como serlo en algún entorno de dicho punto.

Observación 1.0.5. La condición de $f \in \mathcal{O}(X)$ no depende de la carta elegida. Sea (V, ψ) con $U \cap V \neq \varnothing$ otra carta de la estructura holomorfa. Entonces

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}), \quad \text{en } U \cap V,$$

que es composición de aplicaciones holomorfas.

Observación 1.0.6. Si $p \in X$ y (U, φ) es una carta entorno a p, por definición $\varphi \in \mathcal{O}(U)$.

Definición 1.0.5. Sean X, Y dos superficies de Riemann y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Diremos que f es *holomorfa* si existe un par de cartas (U, φ) de X y (V, ψ) de Y $(f(U) \subset V)$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

es una función holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$.

$$\begin{CD} X @>f>> Y \\ @V\varphi VV @VV\psi V \\ \varphi(U) @>\psi\circ f\circ\varphi^{-1}>> \psi(V) \end{CD}$$

Al conjunto de todas estas aplicaciones lo denotamos por $\mathcal{O}(X,Y)$. Si la aplicación f es biyectiva y cumple $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ y $f^{-1} \in \mathcal{O}(Y,X)$ diremos que f es *biholomorfa*; además en el caso $X = Y$ diremos que f es *automorfismo*.

Otra estructura interesante sobre $\mathcal{O}(X)$ es la de álgebra. El conjunto de funciones holomorfas sobre una superficie de Riemann X es un $\mathbb{C}$-álgebra con el producto de funciones holomorfas. Podemos extrapolar a superficies de Riemann algunos de los teoremas clásicos de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.0.1. *Sean X, Y superficies de Riemann.*

- **Teorema de identidad**. *Si $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ y no constante entonces el conjunto $\{p \in X : f(p) = q\}$ con $q \in Y$ fijo, es un conjunto discreto sin puntos de acumulación en X. Además si $f, g \in \mathcal{O}(X,Y)$ coinciden en un conjunto con puntos de acumulación en X, entonces $f \equiv g$.*

- **Extensión de Riemann**. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua en todo X y holomorfa en $X \setminus P$ con P discreto, entonces f es holomorfa en todo X.*

- **Principio del módulo máximo**. *Toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $|f|$ alcanza máximo local en un punto $p \in X$ es constante. En particular, si X es compacta entonces $\mathcal{O}(X) = \{$funciones constantes$\}$.*

- **Teorema de la aplicación abierta**. *Si $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ y f no es constante, entonces $f(X)$ es abierto de Y.*

Definición 1.0.6. Sea X una superficie de Riemann y $f : X \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Diremos que f es *meromorfa*, si P es discreto, $f \in \mathcal{O}(X \setminus P)$ y para todo $p \in P$ se verifica que

$$\lim_{q \to p} |f(q)| = +\infty.$$

A los elementos de P les llamamos *polos de la función f*. Al conjunto de funciones meromorfas en X lo denotamos por $\mathcal{M}(X)$.

Proposición 1.0.1. *El conjunto de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann X, al que denotamos por $\mathcal{M}(X)$, es un $\mathbb{C}$-álgebra con el producto de funciones meromorfas. Además, $(\mathcal{M}(X), +, \cdot)$ es un cuerpo.*

Las funciones meromorfas se pueden identificar con aplicaciones holomorfas de X en $\overline{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.0.2. *Sea X una superficie de Riemann, $P \subset X$ discreto y $f \in \mathcal{O}(X \setminus P)$. Entonces, f es meromorfa en X con polos P si y sólo si admite una extensión $\widehat{f} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de modo que $P = \widehat{f}^{-1}(\infty)$.*

Demostración. Supongamos que f es meromorfa y sus polos son P. Definimos

$$\widehat{f} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X \setminus P, \\ \infty & \text{si} \quad x \in P. \end{cases}$$

Dado que $\lim_{x\to p} |f(x)| = +\infty$ para todo $p \in P$, nos dice que $\lim_{x\to p} \widehat{f}(x) = \infty$, es decir, $\widehat{f}$ es continua en todo X y holomorfa en $X \setminus P$. El teorema de extensión de Riemann nos dice que $\widehat{f}$ es holomorfa, es decir, $\widehat{f} \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{C}})$. Por construcción $P = (\widehat{f})^{-1}(\infty)$.

El recíproco es elemental. El conjunto P será discreto por el teorema de identidad.

□

Teorema 1.0.3 (Comportamiento local de las funciones holomorfas)**.** *Sean X e Y superficies de Riemann y sea $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ no constante. Sea $p \in X$ y $q = f(p) \in Y$. Existe $k \in \mathbb{N}$ y un par de cartas (U, φ) y (V, ψ) de p y $f(p)$ respectivamente satisfaciendo*

1. *$f(U) \subset V$ y $\varphi(p) = \psi(q) = 0$.*
2. *La aplicación $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$ para todo $z \in \varphi(U)$.*

Al número natural k le llamamos multiplicidad de la función f en el punto p.

Demostración. Es fácil encontrar cartas (U', ρ) y (V, ψ) de p y q satisfaciendo la primera propiedad. Llamemos $F = \psi \circ f \circ \rho^{-1}$. $F(0) = \psi(f(p)) = \psi(q) = 0$. Por la caracterización de ceros de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(z) = z^k g(z), \quad g(0) \neq 0, \quad g \in \mathcal{O}(\rho(U')).$$

Sea $D(0, r)$ con $D(0, r) \subset \rho(U')$ y tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(0, r)$. La función g es holomorfa en el disco $D(0, r)$ (simplemente conexo) y no se anula, por tanto, g admite logaritmo en $D(0, r)$. Definimos

$$h : D(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = \exp\left(\frac{\log(g(z))}{k}\right).$$

La función h es holomorfa en $D(0, r)$ y satisface $h^k = g(z)$, es decir, h es una raíz k-ésima de la función g en el disco $D(0, r)$. Entonces

$$F(z) = (zh(z))^k = \alpha(z)^k, \quad \forall z \in D(0, r),$$

donde $\alpha(z) = zh(z)$. La función $\alpha : D(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ biholomorfa en un entorno de cero. En efecto, como $g(0) \neq 0$ entonces $h(0) \neq 0$ y por el teorema de la función inversa

$$\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=0} = h(0) + 0 \cdot h'(0) = h(0) \neq 0.$$

Podemos suponer α es biholomorfa en el propio $D(0, r) \longrightarrow \alpha(D(0, r))$. Sea $U := \rho^{-1}(D(0, r))$ y

$$\varphi : U \longrightarrow \alpha(D(0, r)), \quad \varphi := \alpha \circ \rho.$$

Así pues

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = (\psi \circ f \circ \rho^{-1}) \circ \alpha^{-1}(z) = z^k, \quad \forall z \in \alpha(D(0, r)).$$

□

Definición 1.0.7. Sea X una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f(p) = 0$. Diremos que p es un *cero de orden m en p* si existe una carta (U, φ) en X del punto p con $\varphi(p) = 0$ tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = z^m, \quad \forall z \in \varphi(U).$$

Teorema 1.0.4 (Caracterización de polos de una función meromorfa)**.** *Sea $f \in \mathcal{O}(X \setminus \{p\})$. La función f tiene un polo en p si y sólo si existen un par de cartas (U, φ) y (V, ψ) de p y $f(p)$ respectivamente tales que*

1. *$f(U) \subset V$ y $\varphi(p) = \psi(f(p)) = 0$.*
2. *Se tiene que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z^m}$ para cierto $m \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \varphi(U)$.*

Diremos que m es el orden del polo p de la función f.

Demostración. La demostración es análoga a la dada en el caso de los ceros. □

Observación 1.0.7. Sea X una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{M}(X)$, p un polo de f y sea $(U, \varphi = z)$ una carta centrada en p conforme al disco unidad y tal que $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$. Notemos que

$$\lim_{q \to p} f(q) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z \to 0} |f \circ \varphi^{-1}(z)| = +\infty$$

La función $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*)$ tiene un polo en 0. Consideramos el desarrollo de Laurent en $\mathbb{D}^*$ de $f \circ \varphi^{-1}$

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in D * .$$

El desarrollo depende de la carta elegida y por tanto, es el *desarrollo de Laurent de f en p respecto de la carta (U, φ).*

Definición 1.0.8 (Desarrollo de Laurent)**.** Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa y sea p un polo de f. Sea (U, φ) una carta centrada en p conforme al disco unidad y de forma que $f \in \mathcal{O}(U)$. Definimos el desarrollo de Laurent de f en p como la serie de Laurent de $f \circ \varphi^{-1}$ en $\mathbb{D}^*$ centrada en $z = 0$. Definimos la *parte singular de f/parte regular de f* como la parte singular/parte regular de $f \circ \varphi^{-1}$. Al número complejo $c_{-1} \equiv c_{-1}(f, U, \varphi)$ le denominamos *residuo de f en p* y lo denotamos por $\text{Res}(f)_p$.

Proposición 1.0.2. *Sea $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa. Entonces f es cociente de polinomios, es decir, es una función racional.*

Demostración. Como f es meromorfa la Teorema 1.0.2 nos dice que existe una extensión $\widehat{f} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorfa. Dado que $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto, el teorema de identidad nos dice que solo puede existir un número finito[1] de polos $P = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Distinguimos varios casos.

1. Si ∞ no es un polo de f. Entonces el desarrollo de Laurent de f alrededor de cada polo lo hacemos con la carta $(\mathbb{C}, Id)$, es decir, es el desarrollo usual de $\mathbb{C}$. Consideramos para $i = 1, \ldots, r$ las partes singulares de tales desarrollos

$$h_i(z) = \sum_{j=-k_i}^{\infty} c_{ij}(z - p_i)^j, \quad \forall z \in D(0, r).$$

[1] Todo subconjunto infinito es un espacio compacto tiene puntos de acumulación.

Definimos $g = f - (\sum_{i=1}^{r} h_i)$ que es una función holomorfa en todo $\overline{\mathbb{C}}$. Dado que las únicas funciones holomorfas en $\overline{\mathbb{C}}$ son constantes, g es constante y por ende

$$f = \text{cte.} + \sum_{i=1}^{r} h_i.$$

2. Si ∞ es un polo de f, es decir, $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene un polo en $z = 0$. El desarrollo de F en cero es

$$F(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in D^*(0, r)$$

para cierto[2] $r > 0$. El desarrollo de Laurent de f en ∞ es por definición en la carta $(\mathbb{C}^*, z \mapsto 1/z)$

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad \forall z \in A\left(0; \frac{1}{r}, +\infty\right).$$

Consideramos la parte singular de f en ∞

$$h_\infty : A(0; 1/r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h_\infty(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$$

Sea $g = f - h_\infty$, donde h_∞ es la parte singular de f alrededor de ∞. Esta función g no tiene polo en infinito y podemos aplicar el apartado anterior.

$\square$

Definición 1.0.9 (Multiplicidad de una función meromorfa en un punto)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X)$. Definimos la *multiplicidad de f en p* como

$$\text{mult}_p f \equiv \begin{cases} m & \text{si } f \text{ tiene un cero de orden } m \text{ en } p \\ -m & \text{si } f \text{ tiene un polo de orden } m \text{ en } p \\ \infty & \text{si } f \equiv 0 \text{ en un entorno de } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.1. Espacio tangente

Para poder definir el espacio tangente necesitamos conocer qué es el *complexificado de un espacio vectorial real.*

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. El espacio vectorial real subyacente a V, al que notamos por $V_\mathbb{R}$, es el espacio V con la multiplicación por escalares restringida al cuerpo $\mathbb{R}$ cuya dimensión es

$$\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{R} = 2 \dim_\mathbb{C} V.$$

Además si $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una base de V, entonces

$$\{e_\lambda\} \cup \{ie_\lambda : i^2 = -1\},$$

es una base de $V_\mathbb{R}$.

[2] Esto no es más que el mayor disco punteado donde está definida de manera holomorfa.

Así, dado un espacio vectorial complejo V, siempre podemos obtener un espacio vectorial real a partir de él. La pregunta patológica es saber si a partir de un espacio vectorial real podemos construir un espacio vectorial complejo. La respuesta es afirmativa y nos la da el siguiente resultado de Álgebra Lineal ([15, pág. 407-409]).

Proposición 1.1.1. *Sean V y W espacios vectoriales reales.*

1. *El conjunto $V \times V$ con la suma dada por coordenadas y el producto por escalares*
$$z \cdot (u, v) = (xu - yv, yu + xv), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad u, v \in V,$$
es un espacio vectorial complejo al que denotamos por $V_{\mathbb{C}}$ y que satisface $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$. A los pares $(u, v) \in V_{\mathbb{C}}$ los denotamos por $u + iv$.

2. *La aplicación $\tau : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ dada como $\tau : u + iv \longmapsto \overline{u + iv} = u - iv$ es un isomorfismo.*

3. *Si $\alpha, \beta : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales entonces $\gamma : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$, $\gamma = \alpha + i\beta$ definida como*
$$\gamma(u + iv) = \alpha(u) - \beta(v) + i(\beta(u) + \alpha(v))$$
es una aplicación lineal.

4. *La aplicación $\overline{\gamma} = \alpha - i\beta$ cumple*
$$\overline{\gamma(u + iv)} = \overline{\gamma}(u - iv).$$
Además $\mathrm{Hom}(V, W)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$.

5. *Si $\alpha, \beta \in V^* \otimes V^*$ son dos aplicaciones bilineales y definimos $\gamma = \alpha + i\beta$, la extensión bilineal de $\gamma : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada de manera natural*
$$\begin{aligned} \gamma(u + iv, r + is) &= \alpha(u, r) - \alpha(v, s) - \beta(u, s) - \beta(v, r) \\ &+ i(\alpha(u, s) + \alpha(v, r) + \beta(u, r) - \beta(v, s)). \end{aligned}$$
De esta manera si $\overline{\gamma} = \alpha - i\beta$ se cumple que $\overline{\gamma(z, w)} = \overline{\gamma}(\overline{u}, \overline{w})$. Además, si α, β son antisimétricas entonces λ es antisimétrica y tenemos
$$(V^* \otimes V^*)_{\mathbb{C}} \cong V_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\mathbb{C}}^*, \quad (\Lambda^2 V^*)_{\mathbb{C}} \cong \Lambda^2 V_{\mathbb{C}}^*.$$

Una superficie de Riemann X tiene una estructura diferenciable real de dimensión dos identificando $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. De este modo, dado $p \in X$ y $(U, \varphi = z = x + iv)$ una carta entorno a p, podemos considerar los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$ que conforman una base de T_pX. Pretendemos hacer lo mismo pero rescatando las propiedades de las funciones holomorfas. Para ello, nos centramos primero en dada una variedad diferenciable, dotar en cada $p \in M$ al T_pM de estructura de espacio complejo.

En el caso de una superficie de Riemann, el espacio tangente complejo tendrá dimensión compleja dos, luego no lo podremos representar tan intuitivamente como aparece en la figura anterior.

Definición 1.1.2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Definimos la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim_{\mathcal{C}^\infty} g \Longleftrightarrow f \equiv g \text{ en un entorno del punto } p, \quad f, g \text{ diferenciables en el punto } p.$$

A las clases de equivalencias las llamamos *gérmenes de funciones diferenciables en el* ***sentido real*** *en el punto p*. Al conjunto de tales clases lo denotamos como $\mathcal{C}_p^\infty(X, \mathbb{K})$.

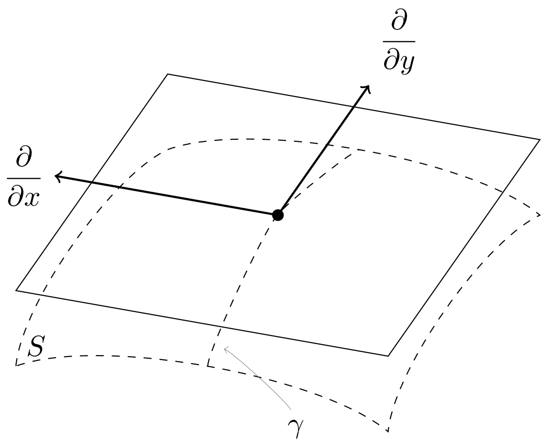


Figura 1.1: Espacio tangente real a una superficie.

Observación 1.1.1. A los gérmenes de funciones diferenciables en un punto p se les denota simplemente como f, sin necesidad de escribir $[f]_p$.

Al espacio vectorial $\mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K})$ se le puede dotar estructura de $\mathbb{K}$-álgebra,

$$f + g := f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}\,, \quad \lambda \cdot f := \lambda f, \quad f \cdot g := (f|_{U\cap V}) \cdot (g|_{U\cap V}),$$

para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$, f, g diferenciables en U y V respectivamente y tal que $p \in U \cap V$.

Definición 1.1.3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Diremos que v es un *vector tangente sobre* $\mathbb{K}$ si es una derivación en el álgebra de $\mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K})$, es decir,

$$v : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad v(f+g) = v(f) + v(g), \quad v(fg) = fv(g) + v(f)g.$$

Para cada $p \in M$, el espacio vectorial real de vectores tangentes en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es llamado *espacio tangente real* y lo denotamos por T_pM. Para cada punto $p \in M$, el espacio vectorial complejo de vectores tangentes sobre $\mathbb{C}$ a M es llamado *espacio vectorial complexificado tangente a M en p* y se denota por $(T_pM)_\mathbb{C}$. Más precisamente,

$$T_pM := \left\{v : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, v \text{ es derivación}\right\},$$

$$(T_pM)_\mathbb{C} := \left\{v : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, v \text{ es derivación}\right\}.$$

Observación 1.1.2. Cuando escribimos $(T_pM)_\mathbb{C}$ es únicamente notación, no nos referimos a la complexificación del T_pM. Más tarde, veremos que esta notación es consistente, es decir, $(T_pM)_\mathbb{C}$, es en efecto, la complexificación del T_pM.

Definición 1.1.4 (Diferencial de una función diferenciable)**.** Sea M una variedad diferenciable y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{K})$. Definimos la *diferencial de f en* $p \in M$ como la aplicación lineal

$$(df_p)(v) = v(f), \quad v \in T_pM \text{ ó } (T_pM)_\mathbb{C}.$$

Si (U, φ) es una carta entorno a $p \in M$, definimos para $i = 1, \dots, n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

Al igual que en el caso de $\mathbb{R}$, tenemos los siguientes dos resultados, para los cuales, introducimos una definición previa.

Definición 1.1.5. Sea $\alpha : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ una curva diferenciable. Definimos la aplicación $\alpha'(0) : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\alpha'(0)(f) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t), \quad \forall f \in \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K})$$

Con esta definición tenemos que $\alpha'(0) \in T_{\alpha(0)}M$ respectivamente $\alpha'(0) \in (T_{\alpha(0)}M)_{\mathbb{C}}$ y se le conoce como *vector tangente* o *vector velocidad de* α *en* $\alpha(0)$.

Teorema 1.1.1 (Base del espacio tangente)**.** *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, sea $p \in M$ y (U, φ) una carta alrededor de p. Entonces*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : \mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \right\}_{i=1}^n,$$

es una base de T_pM cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y es una base de $(T_pM)_{\mathbb{C}}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Además si $v \in T_pM$ ó $(T_pM)_{\mathbb{C}}$ se tiene que

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad \varphi = (x_1, \ldots, x_n).$$

En particular, $\dim_{\mathbb{R}} T_pM = \dim_{\mathbb{C}} (T_pM)_{\mathbb{C}} = n$.

Siempre que tenemos una base en un espacio vectorial, debemos preguntarnos como se comportan los cambios de base.

Proposición 1.1.2. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ dos cartas alrededor de p. Entonces*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

Al igual que hacíamos en variedades diferenciales, tenemos que estudiar el espacio cotangente complejo.

Definición 1.1.6. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. El *espacio cotangente* y *espacio cotangente complexificado* de M en p son los espacios vectoriales definidos como

$$T_p^*M := (T_pM)^*, \quad \left(T_p^*M\right)_{\mathbb{C}} := \left((T_pM)_{\mathbb{C}}\right)^*$$

Introducimos también el concepto de aplicación diferenciable ente variedades.

Definición 1.1.7. Sea $f : M \longrightarrow N$ diferenciable. La *aplicación diferencial en un punto* p se define

$$(df)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N, \quad (df)_p(v)(h) := v(h \circ f), \quad \forall h \in \mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N, \mathbb{R})$$

y

$$(df)_p : (T_pM)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T_{f(p)}N)_{\mathbb{C}}, \quad (df)_p(v)(h) := v(h \circ f), \quad \forall h \in \mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N, \mathbb{C}).$$

Otra notación usual es $(f_*)_p$.

El siguiente resultado nos ofrece la representación en coordenadas locales de la aplicación diferencial, estudiado en variedades diferenciales.

Teorema 1.1.2. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades de dimensión m y n respectivamente. Entonces para cada carta (U, φ) y (V, ψ) de M y N respectivamente tales que $f(U) \subset V$, se verifica*

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} .$$

La aplicación diferencial, induce aplicaciones pull-back o aplicaciones duales,

$$(f^*)_p : T^*_{f(p)} N \longrightarrow T^*_p M, \quad (f^*)_p(\alpha)(v) = \alpha((f_*)_p(v))$$

y

$$(f^*)_p : (T^*_{f(p)} N)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T^*_p M)_{\mathbb{C}}, \quad (f^*)_p(\alpha)(v) = \alpha((f_*)_p(v)).$$

Denotaremos por $\{(dx_i)_p\}_{i=1}^n$ a la base dual de $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$ de $T_p M$ (resp. $(T_p M)_{\mathbb{C}}$) en una carta $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$.

Observación 1.1.3. Algunas propiedades de las diferenciales son las siguientes,

1. Si v es un vector tangente a M en p y f es constante en un entorno de p entonces $v(f) = 0$.

2. *Regla de la cadena.* Si $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ son aplicaciones diferenciales, entonces

$$((g \circ f)_*)_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p, \quad ((g \circ f)^*)_p = (f^*)_p \circ (g^*)_{f(p)}$$

$$(Id_M)_* = Id_{T_p M}, \quad (Id_M)^* = Id_{T^*_p M},$$

es decir, $(\cdot)_*$ y $(\cdot)^*$ son funtores entre el $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty_p(M, \mathbb{K})$ y las aplicaciones lineales, con un comportamiento covariante y contravariante respectivamente.

Como advertimos previamente, existe una relación entre $T_p M$ y $(T_p M)_{\mathbb{C}}$ vistos como espacios vectoriales ([15, Proposición 9.4.2]).

Teorema 1.1.3. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$.*

- *La aplicación $F : T_p M \longrightarrow (T_p M)_{\mathbb{C}}$ tal que*

$$F(v)(f) := v(\mathrm{Re}(f)) + iv(\mathrm{Im}(f)), \quad \forall v \in T_p M, \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty_p(M, \mathbb{C}),$$

es un monomorfismo $\mathbb{R}$-lineal de espacios vectoriales. De este modo, mediante la anterior identificación, tenemos

$$(T_p M)_{\mathbb{C}} = T_p M \oplus i T_p M$$

y por tanto podemos identificar $(T_p M)_{\mathbb{C}}$ con la complexificación de $T_p M$ con las proyecciones $\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : (T_p M)_{\mathbb{C}} \longrightarrow T_p M$.

- *La aplicación* $G : T_p^*M \longrightarrow (T_p^*M)_{\mathbb{C}}$ *tal que*

$$G(\alpha)(v) := \alpha(\mathrm{Re}(v)) + i\alpha(\mathrm{Im}(v)),$$

es un monomorfismo $\mathbb{R}$*-lineal de espacios vectoriales. Por tanto, mediante la anterior identificación tenemos*

$$(T_p^*M)_{\mathbb{C}} = T_p^*M \oplus iT_p^*M$$

y por tanto, podemos identificar $(T_p^*M)_{\mathbb{C}}$ *con la complexificación de* T_p^*M *con las proyecciones* $\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : (T_p^*M)_{\mathbb{C}} \longrightarrow T_p^*M$.

Definición 1.1.8 (Espacio tangente y cotangente holomorfo)**.** Sea X una superficie de Riemann y $p \in X$.

1. Diremos que un vector $v \in (T_pX)_{\mathbb{C}}$ es de tipo $(1,0)$ si para todo $f \in \mathcal{O}_p(X)$ se verifica que $v\left(\overline{f}\right) = 0$. El subespacio de $(T_pX)_{\mathbb{C}}$ de vectores de tipo $(1,0)$ le llamamos *espacio tangente holomorfo* y lo denotaremos por $(T_pX)^{(1,0)}$.

2. Diremos que $v \in (T_pX)_{\mathbb{C}}$ es de tipo $(0,1)$ si para todo $f \in \mathcal{O}_p(X)$ se verifica $v(f) = 0$. El subespacio de $(T_pX)_{\mathbb{C}}$ de vectores de tipo $(0,1)$ le llamamos *espacio tangente antiholomorfo* y lo denotaremos por $(T_pX)^{(0,1)}$.

3. Diremos que un covector $\alpha \in (T_p^*X)_{\mathbb{C}}$ es de tipo $(1,0)$ si $(T_pX)^{(0,1)} \subset \ker\alpha$. Al subespacio de $(T_p^*X)_{\mathbb{C}}$ de covectores de tipo $(1,0)$ le llamamos *espacio cotangente holomorfo* y lo denotamos por $(T_p^*X)^{(1,0)}$.

4. Diremos que un covector $\alpha \in (T_p^*X)_{\mathbb{C}}$ es de tipo $(0,1)$ si $(T_pX)^{(1,0)} \subset \ker\alpha$. El subespacio de $(T_p^*X)_{\mathbb{C}}$ de covectores de tipo $(0,1)$ le llamamos *espacio cotangente antiholomorfo* lo denotamos por $(T_p^*X)^{(0,1)}$.

Dado que X tiene dimensión dos como variedad diferenciable real, entonces, T_pX tiene dimensión dos como espacio vectorial real. Ya sabemos que $(T_pX)_{\mathbb{C}}$ se puede identificar con la complexificación de T_pX y por ende

$$\dim_{\mathbb{R}} T_pX = \dim_{\mathbb{C}}(T_pX)_{\mathbb{C}} = 2.$$

Cada subespacio $(T_pX)^{(1,0)}$ y $(T_pX)^{(0,1)}$ tiene dimensión uno. Buscamos bases de estos subespacios complejos. Para ello introducimos los siguientes operadores.

Definición 1.1.9. Sea X una superficie de Riemann y sea $p \in X$. Tómese $(U, \varphi = z)$ una carta entorno a p. Definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, \quad (dz)_p := (dx)_p + i(dy)_p,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, \quad (d\overline{z})_p := (dx)_p - i(dy)_p.$$

Más concretamente, para cada $f \in \mathcal{C}_p^\infty(X, \mathbb{C})$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) := \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial z}(\varphi(p)), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) := \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial \overline{z}}(\varphi(p)).$$

Observación 1.1.4. Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y (U, z) carta alrededor de p. Algunas de las propiedades de estos operadores son las siguientes.

1. $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{C})$ es una función holomorfa si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. En efecto,
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = 0$$
si y sólo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann.

2. Se satisface que
$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(p) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(p)$$

Proposición 1.1.3 (Cambios de cartas)**.** *Sea X una superficie de Riemann y sean $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ cartas sobre p tal que $p \in U \cap V$.*

1. Se satisface
$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = \frac{\partial w}{\partial z}(p)\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p = \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p = \overline{\frac{\partial w}{\partial z}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p$$
y
$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}(p) = \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}(p) = 0.$$
Estas relaciones se pueden expresar matricialmente como
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}_p \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{w}} \end{pmatrix}_p .$$

2. Se satisface
$$(dz)_p = \frac{\partial z}{\partial w}(p)(dw)_p, \quad (d\overline{z})_p = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}(p)(d\overline{w})_p.$$

Demostración.

Basta usar el cambio de base en el caso real. Para no complicar la notación no pondremos el subíndice en p. Denotaremos $z = x + iy$, $w = x' + iy'$. De este modo, el cambio de base en variedades diferenciables nos dice
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}.$$
Sabiendo que
$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = i\left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right),$$
deducimos que
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} - i\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x} - i\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x} - i\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{2}\frac{\partial x'}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right) + \frac{1}{2i}\frac{\partial y'}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right) \\
&= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}.
\end{aligned}$$

Una vez calculado $\dfrac{\partial}{\partial z}$ podemos obtener $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}} = \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}.$$

Finalmente observemos que $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}}(p) = \dfrac{\partial \psi \circ \varphi^{-1}}{\partial \overline{z}}(\varphi(z)) = 0$ puesto que las funciones de transición son holomorfas. Del mismo modo,

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}(p) = \overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}}(p) = \overline{0} = 0.$$

Incorporando esto a las expresiones de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ anteriores, tenemos demostrado el enunciado.

Dado que $(dz)_p, (dw)_p \in (T_p^*X)^{(1,0)}$ y $\dim_{\mathbb{C}}(T_p^*X)^{(1,0)} = 1$, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$(dz)_p = \lambda \cdot (dw)_p.$$

Evaluando en $\left(\dfrac{\partial}{\partial w}\right)_p$ y usando el cambio de base en el espacio tangente,

$$\lambda = (dz)_p \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p = (dz)_p \left(\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = \frac{\partial z}{\partial w}(p)(dz)_p \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = \frac{\partial z}{\partial w}(p).$$

Análogamente se razona para $d\overline{z}$. $\square$

Observación 1.1.5. Si tenemos dos sistemas de coordenadas locales $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ en torno a p, es usual escribir

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = w(z), \quad \varphi \circ \psi^{-1}(w) = z(w).$$

Teorema 1.1.4. *Sea X una superficie de Riemann.*

1. *En cada punto $p \in X$ tenemos las descomposiciones*

$$(T_pX)_{\mathbb{C}} = (T_pX)^{1,0} \oplus (T_pX)^{0,1}, \qquad \left(T_p^*X\right)_{\mathbb{C}} = \left(T_p^*X\right)^{1,0} \oplus \left(T_p^*X\right)^{0,1}.$$

Para cada carta (U, z) alrededor de un punto $p \in X$ se verifica

$$\begin{aligned} (T_pX)^{1,0} &= \mathbb{C} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, \quad & (T_pX)^{0,1} &= \mathbb{C} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p \\ \left(T_p^*X\right)^{1,0} &= \mathbb{C} \cdot (dz)_p, \quad & \left(T_p^*X\right)^{0,1} &= \mathbb{C} \cdot (d\overline{z})_p \end{aligned}$$

y $\{(dz)_p, (d\overline{z})_p\}$ es la base dual asociada a $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right\}$. Además, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial tangente complexificado $(T_pX)_{\mathbb{C}}$ es canónicamente $\mathbb{C}$-isomorfo al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$, mediante el isomorfismo

$$h_{(U,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = (1,0), \quad h_{(U,\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p = (0,1),$$

que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^2 \arrow[dd, "d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}"] \\
(T_pX)_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "h_{(U,\varphi)}"] \arrow[dr, "h_{(V,\psi)}"'] & \\
 & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$

2. *Tenemos los siguientes isomorfismos canónicos*

$$\left(T_p^*X\right)^{1,0} \cong \left((T_pX)^{1,0}\right)^*, \quad \left(T_p^*X\right)^{0,1} \cong \left((T_pX)^{0,1}\right)^*$$

3. *Se verifica que* $\overline{(T_pX)^{(1,0)}} = (T_pX)^{(0,1)}$. *Ídem con el espacio cotangente.*

Demostración. 1. Tenemos que $\dim_{\mathbb{C}}(T_pX)_{\mathbb{C}} = 2$. Sea (U,z) carta alrededor de p y veamos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \in (T_pX)_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$$

es de tipo $(1,0)$. Sea $f \in \mathcal{O}_p(X)$. La Observación 1.1.4 nos dice que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p)} = \overline{0} = 0.$$

Por tanto, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$ está en el espacio tangente holomorfo. De igual modo, se prueba que $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p$ es de tipo $(0,1)$. Observemos que $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$ y $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p$ son $\mathbb{C}$- linealmente independientes. En efecto, supongamos que existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p + \mu \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p = 0,$$

esto es, $\forall f \in \mathcal{C}_p^\infty(X,\mathbb{C})$ se tiene que

$$0 = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p (f) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p (f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(p),$$

Consideramos la función $\varphi = z : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Por definición, $\varphi \in \mathcal{O}_p(X)$ y por tanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(p) = 0.$$

Así pues,

$$0 = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}(p) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(p) = \lambda \frac{\partial (\varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial z}(p) = \lambda,$$

es decir, $\lambda = 0$. Considerando la función $\overline{\varphi} \in \mathcal{C}_p^\infty(X, \mathbb{C})$

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}} = \overline{0} = 0$$

y por tanto $\mu = 0$. esto prueba que ambos vectores son $\mathbb{C}$-linealmente independientes. Como $(T_pX)_\mathbb{C}$ dimensión compleja igual a dos cada subespacio tendrá dimensión uno, esto es

$$(T_pX)^{(1,0)} = \mathbb{C} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, \quad (T_pX)^{(0,1)} = \mathbb{C} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p.$$

Observemos también que

$$\begin{aligned}
(dz)_p \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p &= \frac{1}{2}(dx + idy)_p \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= 1. \\
(dz)_p \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p &= \frac{1}{2}(dx + idy)_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= 0. \\
(d\overline{z})_p \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p &= \frac{1}{2}(dx - idy)_p \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= 0. \\
(d\overline{z})_p \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p &= \frac{1}{2}(dx - idy)_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= 1.
\end{aligned}$$

Probamos que $(T_pX)_\mathbb{C}$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{C}^2$. Damos el isomorfismo explícito. Sea $(U, \varphi = z)$ una carta alrededor de $p \in X$. Definimos

$$\begin{array}{rccc}
h_{(U,\varphi)}: & (T_pX)_\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\
& \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)_p & \longmapsto & (1,0) \\
& \left(\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p & \longmapsto & (0,1),
\end{array}$$

extendida linealmente. Dado que $h_{(U,\varphi)}$ lleva una base a otra, es isomorfismo lineal.

2. Es de comprobación inmediata que

$$\Phi : (T_p^*)^{(r,s)} \longrightarrow \left((T_pX)^{(r,s)}\right)^*, \quad \Phi(\alpha) = \alpha|_{(T_pX)^{(r,s)}},$$

es isomorfismo.

3. Sea (U, z) carta sobre p. Basta notar que $\overline{\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p} = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p$ y al cumplirse la propiedad para la base, al ser la conjugación lineal, se tiene para todo el subespacio.

□

Observación 1.1.6. Es interesante el notar que $T_pX \cong \mathbb{R}^2$ y que $(T_pX)_\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$. Recordemos que $(T_pX)_\mathbb{C}$ se identificaba con la complexificación de T_pX. Por otro lado $\mathbb{C}^2$ es la complexificación de $\mathbb{R}^2$. Esto tiene mucho sentido porque la complexificación es un proceso funtorial entre espacios vectoriales reales y los complejos. De hecho, la complexificación de un espacio vectorial V, no es más que $V \otimes \mathbb{C}$. En particular

$$(T_pX)_\mathbb{C} \cong (T_pX) \otimes \mathbb{C}, \quad \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}.$$

Esto se puede expresar como

$$(T_pX \cong \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\otimes\mathbb{C}} (T_pX \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}) = (T_pX)_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^2.$$

Si vemos $(T_pX)_{\mathbb{C}}$ con su estructura $T_pX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, entonces un elemento $v \otimes z \in T_pX \otimes \mathbb{C}$ actuará sobre $f + ig \in \mathcal{C}_p^{\infty}(X, \mathbb{C})$ como

$$(v \otimes z)(f + ig) = z \cdot [v(f) + iv(g)].$$

Más aún

$$Der(\mathcal{C}_p^{\infty}(X, \mathbb{C})) \cong T_pX \otimes \mathbb{C} \cong Der(\mathcal{C}_p^{\infty}(X, \mathbb{R})) \otimes \mathbb{C}.$$

El conocimiento del espacio tangente y cotangente nos permite expresar la diferencial en cartas.

Corolario 1.1.1. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable. Sea (U, z) carta alrededor de p. Entonces la diferencial de f admite la siguiente expresión*

$$(df)_p = \frac{\partial f}{\partial z}(p)(dz)_p + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p)(d\overline{z})_p.$$

En particular, f es holomorfa en p si y solo si $(df)_p = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p)(dz)_p$.

Demostración. Sea $p \in X$ y (U, z) un carta alrededor de p. Omítimos el índice p para simplificar la notación. Como $\{dz, d\overline{z}\}_p$ es una base de $(T_pX^*)_{\mathbb{C}}$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que

$$df = \lambda dz + \mu d\overline{z}.$$

Ahora bien, por ser $\{dz, d\overline{z}\}_p$ la base dual de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right\}_p$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z} = df(\partial/\partial z) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = df(\partial/\partial \overline{z}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu,$$

de donde se sigue el enunciado. □

También podemos dar el cambio de cartas.

Corolario 1.1.2. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación diferenciable, $p \in X$ y sean $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ cartas de p. Entonces,*

$$df = \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z}dw + \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{w}.$$

Definición 1.1.10. Sean X e Y superficies de Riemann, $f : X \longrightarrow Y$ diferenciable, $p \in X$ y $(U, \varphi = z)$, $(V, \psi = w)$ cartas de p y $f(p)$ respectivamente. Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial z} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial \overline{z}} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \overline{z}}.$$

Queda así definida la acción de los operadores $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial\overline{z}$ a una función entre superficies de Riemann $f : X \longrightarrow Y$. La idea es simplemente componer con la carta de la imagen para obtener una función con imagen en $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\psi\circ f"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

Corolario 1.1.3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable entre superficies de Riemann y $p \in X$. Sean (U, z) y (V, w) cartas de p y $f(p)$ respectivamente tales que $f(U) \subset V$. Entonces*

$$df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial\overline{f}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{w}} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial\overline{F}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{w}}$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right) = \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial\overline{w}} = \frac{\partial F}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial\overline{w}},$$

donde $F = w \circ f \circ z^{-1}$. En particular, si la función f es holomorfa en U

$$df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} = F'\frac{\partial}{\partial w},$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right) = \frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial\overline{w}} = \overline{F'}\frac{\partial}{\partial\overline{w}},$$

Demostración. $(df)_p(\partial/\partial z)$ es un vector tangente a Y en el punto $f(p)$. Podemos hallar sus coordenadas en la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial w}, \dfrac{\partial}{\partial\overline{w}}\right\}$. Para ello,

$$df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \lambda\frac{\partial}{\partial w} + \mu\frac{\partial}{\partial\overline{w}}$$

Para hallar los coeficientes basta saber que $\{dw, d\overline{w}\}$ es la base dual de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial w}, \dfrac{\partial}{\partial\overline{w}}\right\}$.

$$\lambda = dw\left(df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) = d(w\circ f)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial(w\circ f)}{\partial z}.$$

$$\mu = d\overline{w}\left(df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial(\overline{w}\circ f)}{\partial z}(p) = \frac{\partial\overline{F}}{\partial z}(p),$$

donde $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Así pues,

$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p = \frac{\partial F}{\partial z}(p)\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_{f(p)} + \frac{\partial\overline{F}}{\partial z}(p)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\right)_{f(p)}.$$

El mismo proceso se realiza con $\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}$.

Finalmente, si f es holomorfa tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}} = 0$, de donde se sigue el resultado. $\square$

este último corolario se puede ver de una manera matricial muy intuitiva. Fijado nuestro punto p y en las mismas condiciones que antes, tenemos que

$$df_p : T_pX \longrightarrow T_{f(p)}Y$$

es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal entre espacios vectoriales complejos de dimensión compleja dos. Tenemos las bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \right\}$$

de T_pX y $T_{f(p)}Y$ respectivamente. La matriz que representa a la aplicación df_p es entonces

$$df_p \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \\ \\ \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} & \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix}.$$

Expresiones en coordenadas

Sean X e Y superficies de Riemann, $p \in X$ y sean $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ cartas alrededor de p. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} = w'(z)\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \overline{w'(z)}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}.$$

$$dz = z'(w)dw, \quad d\overline{z} = \overline{z'(w)}d\overline{w}.$$

Sea $f : X \longrightarrow Y$ diferenciable y (W, ζ) carta entorno a $f(p)$ con $f(U) \subset W$, $F = \zeta \circ f \circ z^{-1}$. Entonces

$$df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}.$$

Si f es holomorfa en U

$$df\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} = F'\frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} = \overline{F'}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}.$$

1.2. Fibrados vectoriales

Vamos a introducir una clase particular de fibrados vectoriales complejos. Para ello, es importante conocer este concepto de manera abstracta sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una lectura avanzada sobre estos conceptos puede verse en [10] y [15].

Definición 1.2.1. Un *fibrado vectorial sobre* $\mathbb{K}$ es una terna (X, E, π) donde X y E son espacio topológicos y $\pi : E \longrightarrow X$ es una aplicación sobreyectiva y continua, de forma que para cada $x \in X$, el conjunto $\pi^{-1}(\{x\})$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Además, para cada punto $x \in X$, existe un par (U, φ), donde U es un entorno en X del punto x tal que

$$\widehat{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^n$$

es un homeomorfismo, con las siguiente propiedades

- Para todo $x \in U$,
$$\widehat{\varphi}(\pi^{-1}(\{x\})) = \{x\} \times \mathbb{K}^n.$$
- Para todo $x \in U$, la aplicación
$$\widehat{\varphi} : \pi^{-1}(\{x\}) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^n$$
es $\mathbb{K}$-isomorfismo de espacios vectoriales.

Al espacio X se le conoce como *espacio base*, al E como *espacio total* y a $\pi^{-1}(\{x\})$ *fibra de x*. Al par (U, φ) se le conoce como *trivialización local*. Al número natural n se le conoce como *rango del fibrado* y es constante en cada componente conexa de X.

Sea (X, E, π) un fibrado vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $(U, \widehat{\varphi})$ y $(V, \widehat{\psi})$ dos trivializaciones locales del fibrado. Tenemos que

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{K}^n \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{K}^n$$

es un homeomorfismo y además

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(x, z) = (x, Az), \quad A \in Gl(n, \mathbb{K}).$$

A estas funciones se las conoce como *funciones de transición*.

Definición 1.2.2. Sean (X_1, E_1, π_1) y (X_2, E_2, π_2) dos fibrados vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Un *morfismo de fibrados* es un par (f, g) de aplicaciones continuas tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

y tal que para cada $x \in X_1$ la restricción

$$f|_{\pi_1^{-1}(\{x\})} : \pi_1^{-1}(\{x\}) \longrightarrow \pi_2^{-1}(\{g(x)\})$$

es $\mathbb{K}$-lineal. La clase de todos los fibrados vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ junto con los morfismos de fibrados constituyen una categoría, a la que denotamos $Fib(\mathbb{K})$. Fijado el espacio base X, podemos también considerar $Fib_X(\mathbb{K})$.

Una noción fundamental que vamos a necesitar en nuestra teoría es el concepto de *sección de un fibrado.*

Definición 1.2.3. Sea (X, E, π) un fibrado vectorial sobre $\mathbb{K}$ y U un abierto de X. Diremos que $\alpha : U \longrightarrow E$ es una *sección de U* si $\pi \circ \alpha = 1_U$.

Dados dos fibrados (X, E_1, π_1) y (X, E_2, π_2), sobre el mismo espacio base, definimos la *suma directa* de ambos fibrados como

$$E_1 \oplus E_2 := \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}.$$

De este modo, podemos construir una proyección $\pi : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow X$ tal que

$$\pi(v_1, v_2) = \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2) \in X.$$

Definimos también el *producto tensorial* $E_1 \otimes E_2$ dado como

$$E_1 \otimes E_2 := \cup_{x \in X}(\pi_1^{-1}(\{x\}) \otimes \pi_2^{-1}(\{x\})).$$

La topología en este espacio se define como sigue: dada $\widehat{\varphi_i} : \pi_i^{-1}(\{x\}) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n_i}$ una trivialización local de E_i, $i = 1, 2$, la aplicación

$$\widehat{\varphi_1} \otimes \widehat{\varphi_2} : \pi_1^{-1}(\{x\}) \otimes \pi_2^{-1}(\{x\}) \longrightarrow U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$$

es un homeomorfismo.

1.3. Fibrados tangentes y cotangentes

Al igual que hacíamos con variedades, podemos definir los fibrados tangente y cotangentes de X,

$$TX := \bigcup_{p \in X} T_pX, \quad (TX)_{\mathbb{C}} := \bigcup_{p \in X} (T_pX)_{\mathbb{C}}, \quad T^*X := \bigcup_{p \in X} T_p^*X, \quad (T^*X)_{\mathbb{C}} := \bigcup_{p \in X} (T_p^*X)_{\mathbb{C}},$$

con sus respectivas proyecciones

$$\pi : TX \longrightarrow X, \quad \pi_{\mathbb{C}} : (TX)_{\mathbb{C}} \longrightarrow X, \quad \pi^* : T^*X \longrightarrow X, \quad \pi_{\mathbb{C}}^* : (T^*X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow X.$$

Es este caso, también tenemos los espacios tangentes y cotangentes holomorfos/antiholomorfos

$$(TX)^{(r,s)} := \bigcup_{p \in X} (T_pX)^{(r,s)}, \quad (T^*X)^{(r,s)} := \bigcup_{p \in X} (T_pX)^{(r,s)}, \quad (r, s) \in \{(1, 0), (0, 1)\},$$

con sus respectivas proyecciones

$$\pi^{(r,s)} : (TX)^{(r,s)} \longrightarrow X, \quad (\pi^*)^{(r,s)} : (T^*X)^{(r,s)} \longrightarrow X.$$

Al fibrado $(T^*X)^{(1,0)}$ se le llama[3] *fibrado cotangente holomorfo.*

Construir el fibrado tangente y cotangente, nos permite definir el concepto de campo de vectores y de forma diferencial en una superficie de Riemann. En las superficies de Riemann habrá diferentes tipos de campos de vectores, dependiendo del subfibrado en el que esté contenido.

Definición 1.3.1. Sea X una superficie de Riemann. Un *campo de vectores continuos* sobre X es una sección de $(TX)_{\mathbb{C}}$, esto es, una aplicación continua $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$ tal que $\pi_{\mathbb{C}} \circ V = 1_X$. Una 1-*forma* sobre X es una sección de $(T^*X)_{\mathbb{C}}$, esto es, una aplicación continua $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ tal que $\pi_{\mathbb{C}}^* \circ \alpha = 1_X$.

[3] En algunos textos se puede encontrar el nombre de *fibrado lineal canónico.*

Nosotros estamos interesados en campos de vectores que sean *suaves* respecto de la variación del punto p. Dado que tenemos estructura diferenciable en X, una primera idea sería pedir que las aplicaciones V y α fuesen diferenciables. esto es lo que hacíamos con variedades diferenciables. Sin embargo, ahora no trabajamos con un fibrado tangente real TX, sino con $(TX)_{\mathbb{C}} = TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La topología en $(TX)_{\mathbb{C}}$ es la asociada al producto tensor. Falta dotarlo de estructura diferenciable. El método es muy similar a como se hace en variedades y esto se debe a que una superficie de Riemann X posee una estructura diferenciable de dimensión dos subyacente. Para ello, tómese $(U, \varphi = z)$ una carta del atlas maximal de X. Consideremos $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \subset (TX)_{\mathbb{C}}$. Entonces $\pi_{\mathbb{C}}(\xi) = p \in X$, para todo $\xi \in U$, y tendrá coordenadas $\varphi(p) = z(p) \in \mathbb{C}$. Por otro lado, $\xi \in (T_pX)_{\mathbb{C}}$, por lo que en la carta $(U, \varphi = z)$

$$\xi = a(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p + b(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p = dz_p(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p + d\overline{z}_p(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p .$$

Definimos:

$$\widehat{\varphi} : \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}^2, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = (z(p), dz_p(\xi), d\overline{z}_p(\xi)).$$

Como $\varphi = z$ es biyectiva y existe un único $p \in X$ tal que $\xi \in (T_pX)_{\mathbb{C}}$, $\widehat{\varphi}$ es una biyección que induce una única topología en $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U)$ que hace a $\widehat{\varphi}$ un homeomorfismo. Esta condición genera una única topología sobre $(TX)_{\mathbb{C}}$, que es precisamente la topología dada para el producto tensorial de fibrados vectoriales. Consideramos $\mathcal{A}$ dado como

$$\mathcal{A} := \left\{(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U), \widehat{\varphi}) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\}.$$

Comprobemos que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable. Por construcción, solo es necesario comprobar que las funciones de transición son difeomorfismos. Sean $(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U), \widehat{\varphi})$ y $(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(V), \widehat{\psi})$ tales que $\xi \in \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(V)$. Entonces

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z, \zeta_1, \zeta_2) = \widehat{\psi}(\xi_{\varphi^{-1}(z)}),$$

donde por definición

$$\xi_{\varphi^{-1}(z)} \in (T_{\varphi^{-1}(z)}X)_{\mathbb{C}}, \quad \xi_{\varphi^{-1}(z)} = \zeta_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} + \zeta_2\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}.$$

Entonces

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z, \zeta_1, \zeta_2) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(z), dw(\xi_{\varphi^{-1}(z)}), d\overline{w}(\xi_{\varphi^{-1}(z)})\right).$$

Usando el cambio de coordenadas (todo está en el punto $\varphi^{-1}(z)$)

$$dw(\xi_{\varphi^{-1}(z)}) = \frac{\partial w}{\partial z}(dz)\left(\zeta_1\frac{\partial}{\partial z} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \zeta_1\frac{\partial w}{\partial z}$$

Por otro lado,

$$d\overline{w}(\xi_{\varphi^{-1}(z)}) = \zeta_2\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}.$$

De este modo,

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z, \zeta_1, \zeta_2) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(z), \zeta_1 w'(z), \zeta_2\overline{w'(z)}\right)$$

que son diferenciables. Análogamente se comprueba que $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}^{-1}$ es diferenciable. Podemos enunciar lo siguiente.

Proposición 1.3.1. *Sea X una superficie de Riemann. Entonces $(TX)_{\mathbb{C}}$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión seis.*

Observación 1.3.1. Las funciones de transición del $(TX)_{\mathbb{C}}$ no son biholomorfismos. Esto se debe a que

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z, \zeta_1, \zeta_2) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(z), \zeta_1 w'(z), \zeta_2 \overline{w'(z)}\right)$$

y su tercera componente es $\overline{w'(z)}$, que no es necesariamente holomorfa. Este comportamiento se debe a que $(TX)_{\mathbb{C}}$ contiene al subfibrado $(TX)^{(0,1)}$, que es antiholomorfo.

Si trabajamos del mismo modo con el subfibrado $(TX)^{(1,0)}$ y la proyección $\pi^{(1,0)}$, las funciones de transición serán

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z, \zeta) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(z), \zeta w'(z)\right)$$

que sí es holomorfo. Esto nos lleva a enunciar el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. *Sea X una superficie de Riemann. Entonces*

$$\mathcal{A} = \left\{ \left((\pi^{(1,0)})^{-1}(U), \widehat{\varphi} \right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X \right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : (\pi^{(1,0)})^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = (z(p), dz_p(\xi))$$

es un atlas holomorfo de dimensión dos de $(TX)^{(1,0)}$. En consecuencia, $(TX)^{(1,0)}$ es una variedad compleja de dimensión dos.

Un procedimiento análogo sobre los espacios cotangentes nos llevan a un resultado general.

Teorema 1.3.1 (Fibrados tangentes y cotangentes). *Sea X una superficie de Riemann. Entonces*

1. $(TX)_{\mathbb{C}}$ *es una variedad diferenciable de dimensión seis con un atlas diferenciable dado por*

$$\mathcal{A} := \left\{(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U), \widehat{\varphi}) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \subset (TX)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}^2, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = (z(p), dz_p(\xi), d\overline{z}_p(\xi)).$$

2. $(TX)^{(1,0)}$ *es una variedad compleja de dimensión dos con atlas holomorfo dado por*

$$\mathcal{A} = \left\{\left((\pi^{(1,0)})^{-1}(U), \widehat{\varphi}\right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : (\pi^{(1,0)})^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = (z(p), dz_p(\xi)).$$

3. $(TX)^{(0,1)}$ *es una variedad diferenciable de dimensión cuatro con atlas diferenciable dado por*

$$\mathcal{A} = \left\{\left((\pi^{(0,1)})^{-1}(U), \widehat{\varphi}\right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : (\pi^{(0,1)})^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = (z(p), d\overline{z}_p(\xi)).$$

4. $(T^*X)_{\mathbb{C}}$ *es una variedad diferenciable de dimensión seis con atlas diferenciable dado por*

$$\mathcal{A} = \left\{\left((\pi_{\mathbb{C}}^*)^{-1}(U), \widehat{\varphi}\right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : (\pi_{\mathbb{C}}^*)^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}^2, \quad \widehat{\varphi}(\alpha) = \left(z(p), \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right).$$

5. $(T^*X)^{(1,0)}$ *es una variedad compleja de dimensión dos con atlas holomorfo dado por*

$$\mathcal{A} = \left\{\left(((\pi^*)^{(1,0)})^{-1}(U), \widehat{\varphi}\right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : ((\pi^*)^{(1,0)})^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}(\alpha) = \left(z(p), \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right).$$

6. $(T^*X)^{(0,1)}$ *es una variedad diferenciable de dimensión cuatro con atlas diferenciable dado por*

$$\mathcal{A} = \left\{\left(((\pi^*)^{(0,1)})^{-1}(U), \widehat{\varphi}\right) : (U, \varphi) \text{ carta del atlas maximal de } X\right\},$$

donde

$$\widehat{\varphi} : ((\pi^*)^{(0,1)})^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}(\alpha) = \left(z(p), \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right).$$

En resumen, dada una superficie de Riemann X, todos los fibrados tangentes y cotangentes tienen estructura de variedad diferenciable y los fibrados lineales canónicos $(TX)^{(1,0)}$ y $(T^*X)^{(0,1)}$ tienen estructura de variedad compleja de dimensión dos. Tales estructuras nos permiten otorgar regularidad en los campos de vectores y 1-formas.

1.4. Campos de vectores y 1-formas

Dada una superficie de Riemann X, en la sección anterior hemos conseguido dotar a los fibrados vectoriales complejos $(TX)_{\mathbb{C}}$ y $(T^*X)_{\mathbb{C}}$ de estructura de variedad diferenciable real. Por tanto, una campo de vectores diferenciable no es más que una sección $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$ diferenciable. Una 1-forma diferencial será una sección $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ diferenciable. Como $(TX)_{\mathbb{C}}$ y $(T^*X)_{\mathbb{C}}$ contienen subfibrados que captan el carácter complejo de la superficie, es natural la siguiente definición.

Definición 1.4.1. Sea X una superficie de Riemann y $(r, s) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$. Diremos que un campo de vectores $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$ es de tipo (r, s) si para todo $p \in X$, se cumple que $V(p) \in (T_pX)^{(r,s)}$. Diremos que una 1-forma $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ es de tipo (r, s) si para todo $p \in X$, se cumple que $\alpha(p) \equiv \alpha_p \in (T^*_pX)^{(r,s)}$. Si V es un campo de vectores de tipo $(1, 0)$, diremos que es *holomorfo* si la restricción de imagen $V : X \longrightarrow (TX)^{(1,0)}$ es una aplicación holomorfa de una superficie de Riemann a una variedad compleja de dimensión dos. Si α es una 1-forma de tipo $(1, 0)$, diremos que es *holomorfa* si la restricción de imagen $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)^{(1,0)}$ es una aplicación holomorfa de una superficie de Riemann a una variedad compleja de dimensión dos. Un campo de vectores W de tipo $(0, 1)$ será *antiholomorfo* si $\overline{W}$ es holomorfo. Una 1-forma α de tipo $(0, 1)$ será *antiholomorfa* si $\overline{\alpha}$ es holomorfa.

Sea X una superficie de Riemannn y $(r, s) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(X) &:= \{\text{campos de vectores diferenciables sobre} X\}\,,\\
\mathcal{E}^1(X) &:= \{\text{1-formas diferenciales sobre } X\}\,,\\
\mathfrak{X}^{(r,s)}(X) &:= \{\text{campos de vectores diferenciables de tipo } (r, s) \text{ sobre } X\}\,,\\
\mathcal{E}^{(r,s)}(X) &:= \{\text{1-formas diferenciales de tipo } (r, s) \text{ sobre } X\}\,,\\
\Omega^1(X) &:= \{\text{1-formas holomorfas sobre } X\}\,,\\
\overline{\Omega}^1(X) &:= \{\text{1-formas antiholomorfas sobre } X\}\,.
\end{aligned}$$

1.4.1. Caracterizaciones de campos de vectores

Definición 1.4.2. Sea X una superficie de Riemann y sea $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$. Diremos que V es un *campo de vectores diferenciable vía cartas* (resp. *holomorfo vía cartas*) si para cada $p \in X$ existe una carta (U, z) alrededor de p tal que

$$V \circ \varphi^{-1}(z) \equiv V(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z} + g(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \quad \text{en todo punto de } U,$$

con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ (resp. $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \equiv 0$).

Definición 1.4.3. Sea X una superficie de Riemann y sea $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$. Diremos que α es una *1-forma diferencial vía cartas* (resp. *holomorfa vía cartas*) si para cada $p \in X$ existe una carta (U, z) alrededor de p tal que

$$\alpha \circ \varphi^{-1}(z) \equiv \alpha(z) = f(z)dz + g(z)d\overline{z}, \quad \text{en todo punto de } U,$$

con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ (resp. $f \in \mathcal{O}(U), g \equiv 0$).

Proposición 1.4.1. *En una superficie de Riemann, un campo de vectores es diferenciable si y sólo si es diferenciable vía cartas.*

Demostración. Veamos que ambas definiciones son equivalentes. Supongamos que V es diferenciable vía cartas, es decir,

$$V(\varphi^{-1}(z)) \equiv V(z) = f(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} + g(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Tenemos que comprobar que V es diferenciable visto como aplicación entre las variedades X y $(TX)_{\mathbb{C}}$. Sean (U, φ) y $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ cartas en tales espacios. Entonces

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1}(z) = (\varphi \circ \varphi^{-1}(z), f(z)) = (z, f(z), g(z)),$$

que es diferenciable porque $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.

Recíprocamente, supongamos que V es una sección diferenciable del fibrado tangente complexificado $(TX)_{\mathbb{C}}$ y veamos que es diferenciable vía cartas. En las cartas $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ y (U, φ) de $(TX)^{(1,0)}$

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1} \text{ es una función diferenciable.}$$

Por otro lado $V(z) \in (T_{\varphi^{-1}(z)}X)_{\mathbb{C}}$ para todo $z \in U$, luego existen $\lambda_z, \mu_z \in \mathbb{C}$ tales que

$$V(z) = \lambda_z \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} + \mu_z \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}.$$

Con esta notación

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1}(z) = (z, \lambda_z, \mu_z),$$

que es diferenciable en U. En particular, sus proyecciones son funciones diferenciables, esto es

$$\lambda, \mu : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \lambda_z, \quad z \mapsto \mu_z$$

son diferenciables en U. Hemos encontrado cartas tales que

$$V(z) = \lambda(z) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} + \mu(z) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)},$$

con $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$. esto prueba que V es diferenciable vía cartas. □

Proposición 1.4.2. *En una superficie de Riemann, un campo de vectores de tipo* $(1, 0)$ *es holomorfo si y sólo si es holomorfo vía cartas.*

Demostración. Veamos que ambas definiciones son equivalentes. Supongamos que se verifica que V es holomorfo vía cartas, es decir,

$$V(\varphi^{-1}(z)) \equiv V(z) = f(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \quad f \in \mathcal{O}(U).$$

Tenemos que comprobar que V es holomorfo entre la superficie X y la variedad compleja $(TX)^{(1,0)}$. Sean (U, φ) y $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ cartas en tales espacios. Entonces

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1}(z) = (\varphi \circ \varphi^{-1}(z), f(z)) = (z, f(z)),$$

que es holomorfa puesto que $f(z)$ es holomorfa en U.

Recíprocamente, supongamos que V es una sección del fibrado tangente holomorfo y veamos que es holomorfo en cartas. Dado que V es sección del fibrado tangente holomorfo, en las cartas $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ y (U, φ) de $(TX)^{(1,0)}$ y de X tales que (donde se pueda componer)

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1} \text{ es una función holomorfa.}$$

Por otro lado, $V(z) \in (T_{\varphi^{-1}(z)}X)^{(1,0)}$ para todo $z \in U$, luego existe un escalar complejo (que depende de z) al que denotamos por λ_z tal que

$$V(z) = \lambda_z \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}.$$

Con esta notación

$$\widehat{\varphi} \circ V \circ \varphi^{-1}(z) = (z, \lambda_z),$$

es holomorfa en U. En particular, su proyección sobre la segunda componente es una función holomorfa en U, es decir, la función $\lambda : z \longmapsto \lambda_z$ es holomorfa en U. Hemos encontrado una carta tal que

$$V(z) = \lambda(z) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \quad \lambda \in \mathcal{O}(U).$$

□

Observación 1.4.1. Se debe distinguir el concepto de *campo de vectores holomorfo* y el de *campo de vectores diferenciable de tipo* $(1,0)$. Observemos que la primera condición es más restrictiva, pues pide que la f sea una función holomorfa en U.

Ejemplo 1.4.1. En una carta $(U, \varphi = z)$, el operador $\dfrac{\partial}{\partial z}$ es un campo de vectores holomorfo sobre U.

1.4.2. Caracterizaciones de 1-formas

Proposición 1.4.3. *Sea X una superficie de Riemann y $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ una 1-forma. Entonces, α es diferenciable si y sólo si es diferenciable vía cartas.*

Demostración. Sea $p \in X$, $(U, \varphi = z)$ y $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ cartas en p y α_p respectivamente. La aplicación α será diferenciable si y sólo si $\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ lo es. Ahora bien, para cada $z \in \varphi(U)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}(z) &= \left(\varphi \circ \varphi^{-1}(z), \alpha_{\varphi^{-1}(z)} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \alpha_{\varphi^{-1}(z)} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}\right) \\
&= \left(z, \alpha_{\varphi^{-1}(z)} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \alpha_{\varphi^{-1}(z)} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}\right).
\end{aligned}$$

Como consecuencia, $\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ será diferenciable si y sólo si la segunda y la tercera componente lo son, es decir, si las aplicaciones

$$z \longmapsto \alpha_{\varphi^{-1}(z)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} \qquad z \longmapsto \alpha_{\varphi^{-1}(z)}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}$$

son diferenciables en U. Esto prueba la equivalencia. $\square$

Corolario 1.4.1. *Sea X una superficie de Riemann y $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ una aplicación tal que $\alpha(p) \equiv \alpha_p \in (T_p^*X)_{\mathbb{C}}$ para cada $p \in X$. Entonces, α es diferenciable si y sólo para todo campo de vectores diferenciable $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$, $p \mapsto V_p$, la aplicación*

$$\alpha\,(V) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha_p(V_p)$$

es diferenciable.

Demostración. Un campo V es diferenciable si y sólo si para cada $p \in X$ y $(U, \varphi = z)$ alrededor de p se tiene que

$$V(z) = f(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)} + g(z)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_{\varphi^{-1}(z)}, \quad f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(U, \mathbb{C}).$$

Esto prueba la equivalencia, puesto que

$$\alpha(V)|_U = \alpha\left(f\frac{\partial}{\partial z} + g\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = f\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + g\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

que es todo diferenciable. $\square$

Proposición 1.4.4. *Sea X una superficie de Riemann y $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)^{(1,0)}$ una 1-forma. Entonces, α es holomorfa si y sólo si es holomorfa vía cartas.*

Demostración. Sea $p \in X$, $(U, \varphi = z)$ y $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ cartas en p y α_p respectivamente. La aplicación $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)^{(1,0)}$ será holomorfa si y sólo si $\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ lo es. Ahora bien, para cada $z \in \varphi(U)$, tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}(z) &= \left(\varphi \circ \varphi^{-1}(z), \alpha_{\varphi^{-1}(z)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}\right) \\ &= \left(z, \alpha(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}\right).\end{aligned}$$

Como consecuencia, $\widehat{\varphi} \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ será holomorfa en U si y sólo si

$$z \longmapsto \alpha(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi^{-1}(z)}$$

es holomorfa en U. Esto prueba la equivalencia. $\square$

Con la misma técnicas tenemos el mismo resultado.

Proposición 1.4.5 (Caracterización de 1-formas antiholomorfas)**.** *Sea X una superficie de Riemann y $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)^{(0,1)}$ una 1-forma. Entonces, α es antiholomorfa si y sólo si es antiholomorfa vía cartas.*

Corolario 1.4.2. *Sea X una superficie de Riemann y $(U, \varphi = z)$ una carta de X. Entonces*

$$\begin{array}{rccc} dz: & U & \longrightarrow & (T^*U)^{(1,0)} \\ & p & \longmapsto & dz_p \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} d\overline{z}: & U & \longrightarrow & (T^*U)^{(0,1)} \\ & p & \longmapsto & dz_p \end{array}$$

son 1-formas diferenciales holomorfas y antiholomorfas respectivamente.

Dada una 1-forma α en X, podemos hallar su expresión en coordenadas locales en $p \in X$. Sea $(U, \varphi = z)$ una carta alrededor de p. Tenemos definidas en U las 1-formas $dz, d\overline{z} : U \longrightarrow (T^*U)_{\mathbb{C}}$. Como

$$(T_q^*X)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cdot (dz)_q \oplus \mathbb{C} \cdot (d\overline{z})_q, \quad \forall q \in U,$$

entonces

$$\alpha(q) = \lambda(q)dz(q) + \mu(q)d\overline{z}(q), \quad \lambda(q), \mu(q) \in \mathbb{C}.$$

Podemos hallar los escalares,

$$\alpha(q)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_q = \lambda(q), \quad \alpha(q)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_q = \mu(q).$$

Dado que α es una 1-forma diferenciable las aplicaciones $\lambda : p \mapsto \lambda(p)$ y $\mu : p \mapsto \mu(p)$ son diferenciables. En coordenadas locales toda 1-forma diferencial se expresa como

$$\alpha = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot dz + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \cdot d\overline{z}.$$

Podemos resumir todo el desarrollo para forma 1-formas diferenciales en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1. *Sea X una superficie de Riemann y sea $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)_{\mathbb{C}}$ una 1-forma. Son equivalentes las siguientes aserciones:*

1. *α es una 1-forma diferencial.*
2. *Para toda carta $(U, \varphi = z)$ de X, las aplicaciones*
$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p,$$
$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p,$$
son diferenciables.
3. *Para cada $p \in X$ existe $(U, \varphi = z)$ alrededor de p tal que*
$$\alpha(\varphi^{-1}(z)) \equiv \alpha(z) = f(z)dz + g(z)d\overline{z}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}).$$
4. *Para cada campo $V : X \longrightarrow (TX)_{\mathbb{C}}$ diferenciable la aplicación*
$$\alpha(V) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha(p)(V(p))$$
es diferenciable.

Análogamente lo podemos enunciar para 1-formas holomorfas.

Teorema 1.4.2. *Sea X una superficie de Riemann y sea $\alpha : X \longrightarrow (T^*X)^{(1,0)}$ una 1-forma. Son equivalentes las siguientes aserciones:*

1. *α es una 1-forma holomorfa.*
2. *Para toda carta $(U, \varphi = z)$ de X, la aplicación*
$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p,$$
es holomorfa.
3. *Para cada $p \in X$ existe $(U, \varphi = z)$ alrededor de p tal que*
$$\alpha(\varphi^{-1}(z)) \equiv \alpha(z) = f(z)dz, \quad f \in \mathcal{O}(U).$$
4. *Para cada campo $V : X \longrightarrow (TX)^{(1,0)}$ holomorfo la aplicación*
$$\alpha(V) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \alpha(p)(V(p))$$
es holomorfa.

Definición 1.4.4 (1-forma diferencial meromorfa)**.** Sea X una superficie de Riemann, P un subconjunto discreto de X y α una 1-forma diferencial de tipo $(1,0)$ sobre un abierto D de X. Diremos que α es una 1-*forma diferencial meromorfa* si en cada carta (U, z) con $U \cap P \cap D \neq \varnothing$,
$$\alpha = f dz, \quad f \in \mathcal{M}(U \cap D).$$
Al conjunto P se le conoce como *polos de α*. Al conjunto de todas las 1-formas meromorfas sobre D las denotamos por $\mathcal{M}^1(D)$. Si α es una 1-forma meromorfa sobre X, diremos que α es una *diferencial abeliana*.

1.5. 2-formas

Las formas diferenciales es un concepto estudiado en variedades diferenciales. Para el caso de superficies de Riemann, únicamente nos serán necesarios los conceptos de 1-formas y 2-formas.

Para estudiar las 2-formas diferenciales, podemos realizar un proceso similar al realizado con el espacio tangente y construir un fibrado vectorial, el conocido como *fibrado exterior*. Hay dos maneras de construirlo,

- Usar la estructura de 2-variedad real que posee una superficie de Riemann X y complexificar $\Lambda^2 T_p X$ y $\Lambda^2 T_p^* X$.
- Definirlo de manera intrínseca de un modo completamente análogo al de las variedades.

Empezamos introduciendo producto exterior.

Definición 1.5.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sean $\alpha, \beta \in V^*$ definimos el *producto exterior de α y β* y lo denotamos por $\alpha \wedge \beta$ a

$$\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v).$$

Proposición 1.5.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\alpha, \beta \in V^*$. Entonces $\alpha \wedge \beta$ es una aplicación bilineal antisimétrica y se verifican las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned}(\zeta\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\zeta\beta) = \zeta \cdot (\alpha \wedge \beta)\\ (\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma\\ \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha.\end{aligned}$$

Además, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in V^*$, entonces $\gamma = \alpha + i\beta$ (extensión bilineal a $V_{\mathbb{C}}$) satisface

$$\overline{\gamma(u, v)} = \overline{\gamma}(\overline{u}, \overline{v}), \quad \forall u, v \in V_{\mathbb{C}}$$

e induce

$$(V^* \otimes V^*)_{\mathbb{C}} \cong V_{\mathbb{C}}^* \otimes V_{\mathbb{C}}^*, \quad (\Lambda^2 V^*)_{\mathbb{C}} \cong \Lambda^2 V_{\mathbb{C}}^*.$$

En caso de dimensión finita, si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base de V^*, entonces

$$\{\alpha_i \wedge \alpha_j : i \leq j\},$$

es base de $\Lambda^2 V^*$, en particular $\dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^2 V^*) = \binom{n}{2}$.

Nosotros estamos interesados por el caso de superficies de Riemann y $(\Lambda^2 X)_{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.5.1. *Sea X una superficie de Riemann*

$$(\Lambda^2 X)_{\mathbb{C}} := \bigcup_{p \in M} \Lambda^2 (T_p^* X)_{\mathbb{C}}, \quad \pi : \Lambda^2 X_{\mathbb{C}} \longrightarrow X,$$

tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión cuatro con atlas diferenciable

$$\mathcal{A} := \left\{ (\pi^{-1}(U), \widehat{\varphi}) : (U, \varphi) \textit{ carta del atlas maximal de } X \right\}$$

donde

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{C}\\ \widehat{\varphi}(\alpha_p) = \left(\varphi(p), \alpha_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)_p \right) \right).\end{gathered}$$

En particular $\Lambda^2 X_{\mathbb{C}}$ es un fibrado vectorial diferenciable sobre X, conocido como fibrado exterior complexificado.

La demostración es completamente análoga a la vista para 1-formas. Por otro lado, para cada $p \in X$,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda^2 T_p^* X)_{\mathbb{C}} = 1,$$

luego si $\{e_1, e_2\}$ es una base de T_pX y $\{e_1^*, e_2^*\}$ su base dual, tenemos que

$$(\Lambda^2 T_p^* X)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cdot e_1^* \wedge e_2^*.$$

Definición 1.5.2. Sea X una superficie de Riemann. Una *2-forma* es una sección del fibrado $(\Lambda^2 X)_{\mathbb{C}}$, esto es, una aplicación $\alpha : X \longrightarrow (\Lambda^2 X)_{\mathbb{C}}$ tal que $\pi \circ \alpha = 1_X$. Diremos que α es una forma diferencial si es diferenciable. Al espacio vectorial de todas las 2-formas diferenciales sobre X lo denotamos por $\mathcal{E}^2(X)$.

Al igual que con las 1-formas, tenemos lo siguiente.

Proposición 1.5.2. *Sea X una superficie de Riemann y sea ω una 2-forma. Son equivalentes las siguientes aserciones:*

1. $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$.
2. *Para cada punto $p \in X$ existe una carta $(U, \varphi = z)$ alrededor de p tal que*

   $$\omega(\varphi^{-1}(z)) \equiv \omega(z) = f(z)\,(dz \wedge d\overline{z})_{\varphi^{-1}(z)}\,, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}).$$

   Más aún $f(z) = \omega(z)\left(\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$.
3. *Para cada carta (U, z) de X, la aplicación*

   $$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) : U \longrightarrow \mathbb{C},$$

   $$p \longmapsto \alpha(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right)$$

   es diferenciable.

Ejemplo 1.5.1 (Producto exterior de dos 1-formas en coordenadas)**.** Sea X una superficie de Riemann y sea ω y η 1-formas diferenciales, es decir, $\omega, \eta \in \mathcal{E}^1(X)$. En un sistema de coordenadas locales $(U, \varphi = z)$, se expresan como

$$\omega = f dz + g d\overline{z}, \quad \eta = h dz + u d\overline{z}, \quad f, g, h, u \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}).$$

De este modo, el producto exterior $\omega \wedge \eta$ (que viene dado punto a punto), es

$$\omega \wedge \eta = (f dz + g d\overline{z}) \wedge (h dz + u d\overline{z}) = (fu - gh)\, dz \wedge d\overline{z}.$$

En particular si ω y η son 1-formas diferenciales, su producto exterior es una 2-forma diferenciable.

Observación 1.5.1. Las dos formas en superficies de Riemann también son llamadas $(1,1)$-formas. esto se debe a que localmente toda 2-forma es $f dz \wedge d\overline{z}$, es decir,

$$\mathcal{E}^2 = \Omega^1 \wedge \overline{\Omega}^1.$$

Esta misma razón es la que no nos permite definir 2-formas holomorfas en superficies de Riemann. En efecto, supongamos que ω fuese una 2-forma holomorfa. Entonces, si (U, z) es una carta de X, $\omega = f dz \wedge d\overline{z}$, $f \in \mathcal{O}(U)$. Si tomamos otra carta (V, w) con $U \cap V \neq \varnothing$, los cambios de coordenadas nos dan que

$$\omega = f dz \wedge d\overline{z} = f \frac{\partial z}{\partial w} \overline{\frac{\partial z}{\partial w}} dw \wedge d\overline{w} = f \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 dw \wedge d\overline{w}.$$

La función $\left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2$ toma valores en $\mathbb{R}$, por lo que será holomorfa si y sólo si es constante. En consecuencia, la holomorfía de ω podría depender de la carta.

Otra forma de razonarlo es que $(\Lambda^2 X)_{\mathbb{C}}$ no tiene estructura de superficie de Riemann, los cambios de carta son

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1}(z) = \left(z, f \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 \right)$$

y la segunda componente no es necesariamente holomorfa.

Definición 1.5.3. Sea X una superficie de Riemann y sea ω una 2-forma diferenciable **real**, esto es,

$$\omega_p : (T_p X)_{\mathbb{C}} \times (T_p X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall p \in X.$$

Diremos que es es *positiva*, si para cualquier carta (U, z) de X

$$\omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right) > 0.$$

A estas formas diferenciables se les llama *(1,1)-formas de Kähler*.

1.5.1. Álgebra de formas diferenciales

Definición 1.5.4. Sea X una superficie de Riemann. Definimos el *álgebra de formas diferenciales* y lo denotamos por $\mathcal{E}(X)$ como

$$\mathcal{E}(X) := \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{E}^1(X) \oplus \mathcal{E}^2(X).$$

Además, definimos el *grado de una forma diferencial* como

$$\deg : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \{0, 1, 2\},$$

tal que si $\deg(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})) = \{0\}$, $\deg(\mathcal{E}^r(X)) = \{r\}$, con $r = 1, 2$.

Observación 1.5.2. La terna $(\mathcal{E}(X), +, \cdot, \wedge)$ es un $\mathbb{K}$-álgebra graduada.

1.6. Aplicaciones pullback

Hemos visto que el conjunto de formas diferenciales sobre una superficie de Riemann es un álgebra compleja graduada. A continuación vamos a construir un tipo de morfismos muy especiales, que se construyen grado a grado.

1.6.1. Pullback de funciones diferenciables

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable entre superficies de Riemann. Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$f^*h := h \circ f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}).$$

Hemos construido

$$\begin{array}{rccc} f^*: & \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}) \\ & h & \longmapsto & f^*h. \end{array}$$

este es el pullback para aplicaciones diferenciables. Si $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ y $h \in \mathcal{O}(Y)$ entonces $f^*h \in \mathcal{O}(X)$. Entonces f^* factoriza la restricción al subálgebra de funciones holomorfas cuando f es holomorfa:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}) \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}) \\ \mathcal{O}(Y) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^*|_{\mathcal{O}(Y)}"'] & \mathcal{O}(X) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Notamos además que $f^*(g + h) = f^*g + f^*h$ y $f^*(\lambda g) = \lambda f^*g$, es decir, f^* es una $\mathbb{C}$-aplicación lineal. Más aún, es un de morfismo de álgebras complejas, dado que $f^*(g \cdot h) = f^*g \cdot f^*h$.

1.6.2. Pullback 1-formas diferenciales

Podemos hacer lo mismo para 1-formas. Para cada $p \in X$, tenemos la aplicación lineal dada por la diferencial,

$$(df)_p \equiv (f_*)_p : (T_pX)_\mathbb{C} \longrightarrow (T_{f(p)}Y)_\mathbb{C}.$$

Podemos considerar la aplicación dual inducida por $(df)_p$, esto es,

$$(df)_p^* : (T^*_{f(p)}Y)_\mathbb{C} \longrightarrow (T^*_pX)_\mathbb{C}, \quad \beta \longmapsto (df_p)^*\beta(v) := \beta_{f(p)} \circ (f_*)_p(v).$$

Variando p, podemos definir

$$\begin{array}{rcccccc} f^*: & \mathcal{E}^1(Y) & \longrightarrow & \mathcal{E}^1(X) & & & \\ & \beta & \longmapsto & f^*\beta: & X & \longrightarrow & (T^*X)_\mathbb{C} \\ & & & & p & \longmapsto & \beta_{f(p)} \circ (f_*)_p. \end{array}$$

Veamos que f^* está bien definida, es decir, $f^*\beta$ es una 1-forma diferencial de X. Sean $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ cartas de X y de Y respectivamente tales que $f(U) \subset V$. En la carta (V, ψ) tenemos que

$$\beta|_V = \beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C}),$$

donde β_1 y β_2 vienen dadas explícitamente como

$$\beta_1 = \beta\left(\frac{\partial}{\partial w}\right), \quad \beta_2 = \beta\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right).$$

Sea $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$. El Corolario 1.1.3 nos dice que para todo $p \in U$

$$
\begin{aligned}
f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(p) &= \beta(f(p))\left((df)_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right) \\
&= \beta(f(p))\left(\frac{\partial F}{\partial z}(p)\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p + \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p\right) \\
&= \beta_1(f(p))\frac{\partial F}{\partial z}(p) + \beta_2(f(p))\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}(p).
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)(p) &= \beta(f(p))\left((df)_p\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right) \\
&= \beta(f(p))\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p\right) \\
&= \beta_1(f(p))\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(p) + \beta_2(f(p))\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(p).
\end{aligned}
$$

Dado que las aplicaciones $f^*\beta|_U\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ y $f^*\beta|_U\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$ dependen diferenciablemente de p en U, el Teorema 1.4.1 nos dice que $f^*\beta$ es una 1-forma diferencial. De hecho, podemos expresarlas como

$$
\begin{aligned}
f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= f^*\beta_1\frac{\partial F}{\partial z} + f^*\beta_2\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}, \quad \text{en } U \\
f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= f^*\beta_1\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} + f^*\beta_2\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}, \quad \text{en } U.
\end{aligned}
$$

Si f es holomorfa

$$
f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = f^*\beta_1 \cdot F'(z), \quad f^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = f^*\beta_2 \cdot \overline{F'(z)}, \quad \text{en } U.
$$

Por los comentarios previos, podemos escribir la expresión en coordenadas locales de (U, z) de la 1-forma $f^*\beta$

$$
f^*\beta|_U = \left(f^*\beta_1\frac{\partial F}{\partial z} + f^*\beta_2\frac{\partial \overline{F}}{\partial z}\right)\cdot dz + \left(f^*\beta_1\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} + f^*\beta_2\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}\right)\cdot d\overline{z}.
$$

Si suponemos que f es holomorfa, entonces la expresión es más simple en la carta (U, z)

$$
f^*\beta|_U = \left(f^*\beta_1 \cdot F'\right)\cdot dz + \left(f^*\beta_2 \cdot \overline{F'}\right)\cdot d\overline{z}.
$$

Aunque f sea holomorfa y β una 1-forma diferenciable, no podemos asegurar que $f^*\beta$ sea una 1-forma holomorfa. En cambio, si suponemos que $\beta \in \Omega^1(Y)$, en particular $\beta_2 \equiv 0$, por lo que en cada carta (U, z)

$$
f^*\beta|_U = f^*\beta_1 \cdot F' \cdot dz \in \Omega^1(U),
$$

por lo que $f^*\beta \in \Omega^1(X)$. Este es el mismo comportamiento que con el pullback de funciones diferenciables, es decir, si f es holomorfa, tenemos la siguiente factorización:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{E}^1(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega^1(Y) & \xrightarrow[f^*|_{\Omega^1(Y)}]{} & \Omega^1(X) \end{array}$$

Proposición 1.6.1 (Expresión en coordenadas del pullback)**.** *Sean X, Y superficies de Riemann, sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre ellas, sea $\beta \in \mathcal{E}^1(Y)$. Entonces, si $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ son sistemas de coordenadas locales de X y de Y respectivamente tales que $f(U) \subset V$, $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\beta = \beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C})$, se tienen las siguientes aserciones,*

1. *Si f es diferenciable, entonces*
$$f^*\beta = \left(f^*\beta_1 \frac{\partial F}{\partial z} + f^*\beta_2 \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}\right) \cdot dz + \left(f^*\beta_1 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} + f^*\beta_2 \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}\right) \cdot d\overline{z}, \quad \text{en } U.$$
2. *Si f es diferenciable y $\beta \in \mathcal{E}^{(r,s)}(Y)$, entonces $f^*\beta \in \mathcal{E}^{(r,s)}(X)$.*
3. *Si f es holomorfa, entonces*
$$f^*\beta = \left(f^*\beta_1 \cdot F'\right) \cdot dz + \left(f^*\beta_2 \cdot \overline{F'}\right) \cdot d\overline{z}, \quad \text{en } U.$$
4. *Si f es holomorfa y $\beta \in \Omega^1(Y)$ entonces $f^*\beta \in \Omega^1(X)$.*
5. *Si f es holomorfa y $\beta \in \mathcal{M}^1(Y)$ entonces $f^*\beta \in \mathcal{M}^1(X)$.*

Ejemplo 1.6.1. Sobre el plano complejo podemos considerar $dz \in \Omega^1(\mathbb{C})$. Sean
$$\alpha(z) = \frac{dz}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$
y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^z$. Como la aplicación $\frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$, entonces $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$. Hallemos $f^*\alpha$. Para ello, dado que f es holomorfa, la aplicación factoriza a los espacios de 1-formas holomorfas
$$f^* : \Omega^1(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}), \quad z \longmapsto f^*\omega(z) = \omega_{f(z)}\left((df)_z(\cdot)\right).$$
De este modo,
$$f^*\alpha(z) = \alpha_{f(z)}\left(f'(z)\right) = \frac{1}{e^z} \cdot e^z dz = dz, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 1.6.2. Sea $h : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como
$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+z^2}, & \text{si} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}, \\ 0, & \text{si} \quad z = \infty. \end{cases}$$
Es claro que $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\})$. Consideramos
$$\alpha(z) = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\}.$$

Es claro que α una 1-forma holomorfa en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\}$, porque $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\})$. Notemos que no puede extenderse a todo $\overline{\mathbb{C}}$ pues el límite en $\pm i$ de la función h no existe[4]. Si consideramos $f(z) = \tan(z)$, que está definida $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{-i, i\}$ y es holomorfa, se tiene

$$f^*\alpha(z) = \alpha_{f(z)}\left(f'(z)\right) = \frac{1}{1 + \tan^2(z)} \cdot (1 + \tan^2(z))dz = dz.$$

1.6.3. Pullback 2-formas diferenciales

Sean X, Y superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in X$, tenemos

$$(df)_p : (T_pX)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T_{f(p)}Y)_{\mathbb{C}}.$$

Moviendo el punto p, definimos

$$f^* : \mathcal{E}^2\left(Y\right) \longrightarrow \mathcal{E}^2\left(X\right), \quad \omega \longmapsto f^*\omega,$$

tal que

$$(f^*\omega)(p)(u, v) = \omega_{f(p)}((f_*)_p(u), (f_*)_p(v)) = \omega_{f(p)}\left((df)_p(u), (df)_p(v)\right), \quad \forall u, v \in (T_pX)_{\mathbb{C}}.$$

Veamos que esta aplicación está bien definida, es decir, $f^*\omega \in \mathcal{E}^2\left(X\right)$ para cada $\omega \in \mathcal{E}^2\left(Y\right)$. Sea $(U, \varphi = z)$ carta de X y $(V, \psi = w)$ carta de Y tal que $f(U) \subset V$. Sea $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$. En estas coordenadas, la Proposición 1.5.2 nos permite escribir

$$\omega|_V\left(\psi^{-1}(w)\right) \equiv \omega|_V\left(w\right) = \theta(w)dw \wedge d\overline{w}, \quad \theta(w) = \omega(w)\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right) \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C}). \tag{1.1}$$

Aplicando el Corolario 1.1.3 y la antisimetría de ω,

$$\begin{aligned} f^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)(p) &= \omega_{f(p)}\left(df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right), df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)_p\right)\right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial z}(p) \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}(p) - \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(p)\right) \omega_{f(p)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p\right). \end{aligned}$$

Dado que ω es una 2-forma diferencial de Y, la Proposición 1.5.2 nos dice que

$$p \longmapsto \omega_{f(p)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)_p\right) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}).$$

Por tanto, $f^*\beta$ aplicada sobre los campos coordenados es una función diferenciable. En consecuencia, $f^*\beta$ es una 2-forma diferencial de X. Con la notación dada por (1.1), tenemos en coordenadas locales

$$\begin{aligned} f^*\omega|_U &= \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right) \cdot (\theta \circ f) \cdot dz \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right) \cdot f^*\theta \cdot dz \wedge d\overline{z} \end{aligned}$$

El Corolario 1.1.3 nos permite escribir

$$f^*\omega|_U = \det df \cdot f^*\theta dz \wedge d\overline{z} = \det dF \cdot f^*\theta dz \wedge d\overline{z},$$

donde $\det df$ es el determinante en la base local de (U, z). En particular, si f es holomorfa

$$f^*\omega|_U = |F'|^2 \cdot f^*\theta \cdot dz \wedge d\overline{z}$$

[4]De hecho, recordemos que no hay 1-formas holomorfas no constantes en toda la esfera de Riemann.

Proposición 1.6.2. *Sean X,Y superficies de Riemann, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre ellas y $\omega \in \mathcal{E}^2(Y)$. Si $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ son cartas de X e Y tales que $f(U) \subset V$, $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\omega = \theta dz \wedge d\overline{z}$, $\theta \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$, se tienen las siguientes aserciones,*

1. *Si f es diferenciable entonces $f^*\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ y*

$$f^*\omega|_U = \det df \cdot f^*\theta dz \wedge d\overline{z} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right) f^*\theta dz \wedge d\overline{z}.$$

2. *Si f es holomorfa entonces*

$$f^*\omega|_U = |F'|^2 \cdot f^*\theta \cdot dz \wedge d\overline{z}$$

Un resultado conocido en variedades diferenciables y que sigue siendo cierto en superficies de Riemann es el siguiente.

Proposición 1.6.3. *Sean X, Y y Z superficies de Riemann (en general variedades diferenciables) y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ diferenciables. Se verifican las siguientes propiedades*

1. *$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*
2. *$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$, para todo par $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^1(X)$.*

En particular, f^* es un morfismo de grado cero del álgebra compleja graduada de formas diferenciales sobre una superficie de Riemann.

1.7. Derivada exterior

La derivada exterior ha sido estudiado en variedades diferenciables (véase [1]). Nosotros incluimos una breve introducción en este tema centrándonos en superficies de Riemann, o en su defecto, en variedades diferenciales de dimensión real dos. La derivada exterior se puede construir vía cartas o de manera intrínseca, viendo que existe un único operador con una serie de propiedades. Por supuesto, ambas nociones son completamente equivalentes y nosotros, por simpleza, vamos a construirla brevemente a partir de coordenadas.

Sea X una superficie de Riemann y empecemos tomando $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Para cada punto $p \in X$ tenemos definida la diferencial $(df)_p$. En una carta (U, z),

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}. \tag{1.2}$$

Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} df: & X & \longrightarrow & T^*X \\ & p & \longmapsto & df_p. \end{array}$$

En cada carta (U, z) de X, tenemos la expresión (1.2). El Teorema 1.4.1 nos garantiza $df \in \mathcal{E}^1(X)$.

Si suponemos $f \in \mathcal{O}(X)$ entonces

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

En este caso, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ es una función holomorfa en U. Dado que esta expresión es válida en cualquier carta, $df \in \Omega^1(X)$.

Esta construcción nos da el *operador derivada exterior para funciones diferenciables*,

$$d : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(X), \quad d|_{\mathcal{O}(X)} : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \Omega^1(X),$$

que hereda las propiedades de la diferencial de una función diferenciable punto a punto.

Vamos a extender este operador a formas diferenciales, $d : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^2(X)$. Sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ y sea $(U, \varphi = z)$ una carta de X. Entonces

$$\alpha(\varphi^{-1}(z)) \equiv \alpha(z) = f(z)dz + g(z)d\overline{z}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}).$$

Definimos entonces de manera natural,

$$d\alpha := df \wedge dz + dg \wedge d\overline{z}. \tag{1.3}$$

Es claro que d, definida como (1.3) es $\mathbb{C}$-lineal y $d^2 = 0$. Veamos su unicidad en U. Suponemos que d' es otro operador con las mismas propiedades que d y tal que $df = d'f$, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Entonces,

$$d(fdz) = df \wedge dz = d'f \wedge dz = d'(fdz).$$

Ídem con $gd\overline{z}$. Por tanto, coinciden en U puesto que coinciden en una base de cada punto. Veamos que no depende del sistema de coordenadas elegido. Sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$. Definimos $d\alpha(p) := (d\alpha|_U)(p)$. Por la unicidad de d en U, está bien definido y no depende de la carta pues es único en cada uno de ellas.

Observación 1.7.1. Notemos que d es una extensión $\mathbb{C}$-lineal de la derivada exterior en variedades diferenciables.

Observación 1.7.2. La diferencial exterior de $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ admite la siguiente representación equivalente en una carta $(U, \varphi = z)$, en virtud de la definición de los operadores $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$,

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

También es fácil comprobar el siguiente resultado,

Proposición 1.7.1. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable. Si $df = 0$ entonces f es constante.*

Proposición 1.7.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable entre superficies de Riemann. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "d"] & \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \arrow[d, "d"] \\
\mathcal{E}^1(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "d"] & \mathcal{E}^1(X) \arrow[d, "d"] \\
\mathcal{E}^2(Y) \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{E}^2(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para funciones diferenciables. Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$. Sea $p \in X$ y $v \in (T_pX)_{\mathbb{C}}$. Por la regla de la cadena

$$d(h \circ f)_p(v) = (dh)_{f(p)}\left((df)_p(v)\right) = f^*(dh)(p)(v).$$

Para 1-formas diferenciables. Sea $\beta \in \mathcal{E}^1(Y)$. Sea (V, w) una carta de Y y $\beta|_V = \beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C})$. Lo anterior nos asegura que

$$\begin{aligned} d|_U\left(f^*(\beta_1 dw)\right) &= d|_U\left(f^*\beta_1 \cdot f^*dw\right) = df^*\beta_1 \wedge f^*dw \\ &= f^*(d\beta_1) \wedge f^*dw = f^*(d\beta_1 \wedge dw). \end{aligned}$$

Análogamente $d|_U\left(f^*(\beta_2 d\overline{w})\right) = f^*(d\beta_2 \wedge d\overline{w})$. Por la linealidad,

$$d|_U\left(f^*\beta\right) = f^*(d\beta_1 \wedge dw) + f^*(d\beta_2 \wedge d\overline{w}) = f^*\left(d\beta\right).$$

□

Observación 1.7.3. Gracias a la definición del grado de una forma diferencial, tenemos la siguiente relación que engloba todas las consideraciones previas

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(X)$. Notemos que en particular, si $h \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ y α es una 1-forma, entonces

$$d(h \wedge \alpha) = dh \wedge \alpha + h \wedge d\alpha = dh \wedge \alpha + h \cdot d\alpha.$$

Definición 1.7.1. Sea X una superficie de Riemann y sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$. Diremos que α es *cerrada* si $d\alpha = 0$. Diremos que α es *exacta* si existe $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que $df = \alpha$. A esta función f se le llama *primitiva de* α en X.

Observación 1.7.4. Como $d^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. El recíproco es cierto a nivel local. De hecho, más adelante veremos que la simple-conexión nos permite afirmar el recíproco.

Proposición 1.7.3. *Toda* 1*-forma diferencial cerrada en una superficie de Riemann es localmente exacta.*

Demostración. Lo haremos en $\mathbb{R}^2$ para ser más ilustrativos. Esto no supone restricción tomando una carta (U, φ) tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$.

Sea $\gamma \mathcal{E}^1(X)$ cerrada. Si expresamos γ en coordenadas

$$\gamma = \gamma_1 dx + \gamma_2 dy, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}).$$

De este modo,

$$d\gamma = \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Por ser γ cerrada $\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x} = \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial y}$. Consideramos la función

$$f(x, y) = \int_0^x \gamma_1(t, y)dt + \int_0^y \gamma_2(0, t)dt.$$

- Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \gamma_1$.

- Usamos el teorema de derivación bajo el signo integral y la condición sobre las derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^x \gamma_1(t,y)dt + \gamma_2(0,y) = \int_0^x \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}(t,y)dt + \gamma_2(0,y)$$
$$= \gamma_2(x,y) - \gamma_2(0,y) + \gamma_2(0,y) = \gamma_2(x,y).$$

Por tanto, $\gamma_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $\gamma_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}$. De este modo,

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df.$$

□

Tenemos también el siguiente resultado, que nos dice que la cerradura de una forma da cierta regularidad a la propia forma.

Proposición 1.7.4. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$. Si ω_1 es cerrada entonces es holomorfa. Además, si $\omega_2 \in \Omega^1(X)$ entonces es cerrada.*

Demostración. Sea $(U, \varphi = z)$ un sistema de coordenadas en X. Existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $\omega_1|_U = fdz$. Dado que ω_1 es cerrada, entonces $d\omega_1 = 0$, es decir,

$$0 = d\omega_1 = df \wedge dz \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = 0,$$

lo que nos conduce a que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, es decir, f es holomorfa en U. Esto prueba que ω_1 es holomorfa vía cartas, es decir, ω_1 es holomorfa en X.

Demostremos la segunda parte. En coordenadas locales (U, z), $\omega_2|_U = hdz$ con $h \in \mathcal{O}(U)$. Por tanto,

$$d|_U\, \omega_2 = d\,(hdz) = \left(\frac{\partial h}{\partial z}dz + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = 0,$$

puesto que al ser h holomorfa en U se tiene que $\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 0$. □

Las 1-formas holomorfas, en caso de tener primitivas son especialmente regulares

Proposición 1.7.5. *Sea X una superficie de Riemann, D un abierto de X y supongamos que ω es una 1-forma holomorfa que admite primitiva en D, es decir, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{C})$ tal que $\omega|_D = df$. Entonces f es necesariamente holomorfa en D.*

Demostración. Supongamos que $\omega|_D = df$. En un sistema de coordenadas $(U \subset D, \varphi = z)$, $\omega|_U = hdz$, $h \in \mathcal{O}(U)$. Entonces,

$$hdz = \omega|_U = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$$

de lo que inferimos que f es holomorfa en U. Al ser la holomorfía de carácter local, f es holomorfa en D. □

Corolario 1.7.1. *Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma holomorfa sobre un abierto $D \subset X$ con parte real o parte imaginaria idénticamente nula. Entonces ω es constante cero.*

Demostración. Sea $(U, \varphi = z)$ una carta. Localmente, ω admite primitiva, es decir, existe f tal que $\omega = df$. Dado que ω es holomorfa, f también ha de serlo. Las condiciones de Cauchy Riemann aplicadas a la función $f \circ \varphi^{-1}$ (que tiene parte real nula) garantiza que f es constante en U y por ende, ω es nula en U. Por tanto, para cada $p \in X$ existe un entorno U tal que $\omega|_U \equiv 0$, por lo que $\omega \equiv 0$. □

1.7.1. Operadores ∂ y $\overline{\partial}$

La derivada exterior nos permite construir otro tipos de operadores en superficies de Riemann, que nos serán de vital importancia más adelante.

Definición 1.7.2. Sean X una superficie de Riemann. Definimos los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ en todo el álgebra graduada de formas diferenciables como sigue

$$\begin{array}{rccc} \partial : & \mathcal{E}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}(X) \\ & f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) & \longmapsto & \pi^{(1,0)}(df) \\ & \alpha \in \mathcal{E}^1(X) & \longmapsto & d\left(\pi^{(0,1)}(\alpha)\right) \\ & \omega \in \mathcal{E}^2(X) & \longmapsto & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \overline{\partial} : & \mathcal{E}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}(X) \\ & f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) & \longmapsto & \pi^{(0,1)}(df) \\ & \alpha \in \mathcal{E}^1(X) & \longmapsto & d\left(\pi^{(1,0)}(\alpha)\right) \\ & \omega \in \mathcal{E}^2(X) & \longmapsto & 0. \end{array}$$

Proposición 1.7.6. *Sean X una superficie de Riemann y (U, z) una carta de X.*

1. *Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ se tiene que*

$$\partial f|_U = \pi^{(1,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}dz \in \mathcal{E}^{(1,0)}(U),$$

$$\overline{\partial} f\big|_U = \pi^{(0,1)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \in \mathcal{E}^{(0,1)}(U).$$

2. *Para cada $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$, $\alpha = fdz + gd\overline{z}$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \partial\alpha|_U &= d\pi^{(0,1)}(fdz + gd\overline{z}) = d(gd\overline{z}) = dg \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge d\overline{z} = \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\big|_U \alpha &= d\pi^{(1,0)}(fdz + gd\overline{z}) = d(fdz) = df \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

En particular, una 1-forma diferencial α es holomorfa si y sólo si $\overline{\partial}\alpha = 0$.

Observación 1.7.5. Algunas propiedades elementales de estos operadores son las siguientes.

a) $d = \partial + \overline{\partial}$.

b) Se verfica que d, ∂ y $\overline{\partial}$ son de cuadrado nulo,

$$d^2 = \partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$$

Esta propiedad se prueba sin dificultad usando coordendas locales.

c) Se verifica

$$\overline{\partial\alpha} = \overline{\partial}\overline{\alpha}, \quad \overline{\overline{\partial}\alpha} = \partial\overline{\alpha}.$$

d) Los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ satisfacen

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge \partial\beta$$

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge \overline{\partial}\beta.$$

Proposición 1.7.7 (Expresión en coordenadas locales de $f^*\partial$ y $f^*\overline{\partial}$)**.** *Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable. Entonces, si f es holomorfa, entonces los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ conmutan con f^*, es decir,*

$$\partial f^*(\cdot) = f^*\partial(\cdot), \quad \overline{\partial} f^*(\cdot) = f^*\overline{\partial}(\cdot).$$

Además, bajo tales condiciones, si $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ son coordenadas locales de X y de Y respectivamente tales que $f(U) \subset V$, entonces

$$\begin{aligned} f^*\partial\beta|_U &= \frac{\partial(\beta_2 \circ f)}{\partial z} \cdot \overline{F'} dz \wedge d\overline{z} = f^*\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial w}\right) \cdot F' \cdot \overline{F'} dz \wedge d\overline{z}, \\ f^*\overline{\partial}\beta|_U &= -\frac{\partial(\beta_1 \circ f)}{\partial\overline{z}} F' dz \wedge d\overline{z} = -f^*\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\overline{w}}\right) F' \cdot \overline{F'} dz \wedge d\overline{z}, \end{aligned}$$

donde $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. En particular, si $h \in \mathcal{O}(Y)$ y $\beta \in \Omega^1(Y)$ entonces $f^*h \in \mathcal{O}(X)$ y $f^*\beta \in \Omega^1(X)$.

Demostración. esta propiedad se prueba de forma análoga que para la derivada exterior. No obstante, en este caso vamos a tener que suponer forzosamente que f sea holomorfa, porque en caso contrario no vamos a poder conseguir que permuten estos operadores con el pullback. Para ver esto, tomemos h una función diferenciable en Y, (U, z) y (V, w) sistemas de coordenadas en X e Y respectivamente tales que $f(U) \subset V$. Entonces en tales cartas

$$f^*\partial h = f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w} dw\right) = f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right) f^*(dw).$$

Sea $F = w \circ f \circ z^{-1}$. Por la Proposición 1.6.1

$$f^*(dw) = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} d\overline{z}, \quad f^*(d\overline{w}) = \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} dz + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^*\partial h &= f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} d\overline{z}\right) \\ &= f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)\frac{\partial F}{\partial z} dz + f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} d\overline{z}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\partial f^* h &= \pi^{(1,0)}\left(d(f^*h)\right) = \pi^{(1,0)}\left(\frac{\partial(h\circ f)}{\partial z}dz + \frac{\partial(h\circ f)}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right)\\ &= \frac{\partial(h\circ f)}{\partial z}dz = \frac{\partial h}{\partial w}(f)\frac{\partial F}{\partial z}dz = f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)\frac{\partial F}{\partial z}dz.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Comparando (1.4) y (1.5), debe satisfacerse que

$$f^*\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} \equiv 0.$$

Por tanto, forzamos a que $\dfrac{\partial F}{\partial \overline{z}} \equiv 0$, es decir, que la aplicación f sea holomorfa.

Damos el salto a 1-formas diferenciales, suponiendo esta vez que f es holomorfa. Tómese $\beta \in \mathcal{E}^1(Y)$ y escríbase en coordenadas locales $\beta = \beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C})$. Notemos que en esta ocasión, al suponer f holomorfa, la Proposición 1.6.1 nos dice que

$$f^*(dw) = F' dz, \quad f^*(d\overline{w}) = \overline{F'} d\overline{z}.$$

Teniendo esto en cuenta y sabiendo que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}\partial z} \equiv 0$, por ser F holomorfa,

$$\begin{aligned}\partial f^*\beta &= d\left(\pi^{(0,1)}\left(f^*\beta_1 f^*(dw) + f^*\beta_2 f^*(d\overline{w})\right)\right)\\ &= d\left(\pi^{(0,1)}\left(f^*\beta_1 F' dz + f^*\beta_2 \overline{F'} d\overline{z}\right)\right) = \underbrace{d\left(f^*\beta_2 \overline{F'} d\overline{z}\right)}_{\star}\\ &= \left(\frac{\partial(\beta_2\circ f)}{\partial z}\cdot \overline{F'} + f^*\beta_2 \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial z \partial \overline{z}}\right) dz \wedge d\overline{z}\\ &= \frac{\partial(\beta_2\circ f)}{\partial z}\cdot \overline{F'} dz\wedge d\overline{z} = f^*\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial w}\right)\cdot F' \cdot \overline{F'} dz \wedge d\overline{z}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}f^*\partial\beta &= f^*\left(d\pi^{(0,1)}\left(\beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}\right)\right) = f^*\left(d\left(\beta_2 d\overline{w}\right)\right)\\ &= d\left(f^*\beta_2 f^*(d\overline{w})\right) = d\left(f^*\beta_2\overline{F'}d\overline{z}\right),\end{aligned}$$

y el término obtenido coincide con $\star$. No obstante, hemos desarrollado la expresión en coordenadas para luego hacer ciertas observaciones.

La conmutativad del pullback con el operador $\overline{\partial}$ es consecuencia de la conmutatividad existente entre d y ∂ con el pullback y el hecho

$$\overline{\partial} = d - \partial.$$

No obstante, hallamos la expresión en coordenadas de $\overline{\partial} f^*\beta = f^*\overline{\partial}\beta$.

$$\begin{aligned}f^*\overline{\partial}\beta &= f^*\left(d\left(\pi^{(1,0)}\left(\beta_1 dw + \beta_2 d\overline{w}\right)\right)\right) = f^*\left(d\left(\beta_1 dw\right)\right)\\ &= d\left(f^*\beta_1 f^*(dw)\right) = d\left(f^*\beta_1 F' dz\right) = -\left(\frac{\partial(\beta_1\circ f)}{\partial \overline{z}}\frac{\partial F}{\partial z} + f^*\beta_1\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{z}\partial z}\right) dz\wedge d\overline{z}\\ &= -\frac{\partial(\beta_1\circ f)}{\partial \overline{z}} F' dz\wedge d\overline{z} = -f^*\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \overline{w}}\right)\overline{F'}\cdot F' dz\wedge d\overline{z}.\end{aligned}$$

□

esta proposición nos dice que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\infty}(Y,\mathbb{C}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\partial"', "\overline{\partial}"] & \mathcal{C}^{\infty}(X,\mathbb{C}) \arrow[d, "\overline{\partial}"', "\partial"] \\
\mathcal{E}^1(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\partial"', "\overline{\partial}"] & \mathcal{E}^1(X) \arrow[d, "\overline{\partial}"', "\partial"] \\
\mathcal{E}^2(Y) \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{E}^2(X)
\end{tikzcd}
$$

Capítulo 2

Integración en superficies de Riemann

Introducimos este capítulo con el concepto de *residuo de una* 1*-forma meromorfa*. En la Definición 1.0.8, se vio que el residuo de una función meromorfa dependía de la carta centrada en p tomada. En cambio, cuando definimos tal concepto para 1-formas esto no ocurre.

2.1. Residuo de una 1-forma meromorfa

Definición 2.1.1 (Residuo de una 1-forma)**.** Sea X una superficie de Riemann, $\alpha \in \mathcal{M}^1(X)$ y sea $P \subset X$ los polos de α. Sea $p \in X$, $(U, \varphi = z)$ una carta centrada en p tal que $U \cap P = \{p\}$ y sea $\alpha|_U = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ su correspondiente representación en coordenadas. Se define el *residuo de* α *en* p y se denota por $\mathrm{Res}_p(\alpha)$, al residuo de la función $f \circ \varphi^{-1}$ en cero.

Proposición 2.1.1. *El residuo de una 1-forma meromorfa no depende de la carta centrada en* p *elegida.*

Demostración. Sea $(U, \varphi = z)$ una carta centrada en p y $\alpha|_U = f dz$. Como $\varphi(U)$ es un entorno de cero, existe $r > 0$ tal que $D(0, r) \subset \varphi(U)$. Consideramos el desarrollo de Laurent en cero de $f \circ \varphi^{-1}$ en $D^*(0, r)$

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in D^*(0, r) \subset \varphi(U).$$

La serie de Laurent de $f \circ \varphi^{-1}$ presenta convergencia uniforme por compactos de $D^*(0, r)$. Podemos integrar término a término la serie

$$f \circ \varphi^{-1}(z) - \frac{c_{-1}}{z} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in D^*(0, r)$$

Obtenemos una primitiva explícitamente

$$g(z) := \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}, \quad z \in D^*(0, r)$$

De este modo,

$$g'(z) = f \circ \varphi^{-1}(z) - \frac{c_{-1}}{z}, \quad \forall z \in D^*(0, r)$$

es decir

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = g'(z) + \frac{c_{-1}}{z}, \quad \forall z \in D^*(0, r).$$

En particular,

$$\alpha_{\varphi^{-1}(z)} \equiv \alpha(z) = g'(z)dz + \frac{c_{-1}}{z}dz, , \quad \forall z \in D^*(0, r).$$

Observemos que el residuo de g' en cero es cero, puesto que

$$\mathrm{Res}_0(g'(z)) = \mathrm{Res}_0\left(f \circ \varphi^{-1}(z) - \frac{c_{-1}}{z}\right) = 0.$$

Por otra parte, el residuo en p de la forma $\dfrac{dz}{z}$ es uno, por tanto, $\mathrm{Res}(\alpha) = c_{-1}$. □

Respecto del pullback el residuo mantiene un comportamiento muy deseable.

Proposición 2.1.2. *Sean X, Y superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa. Sea $q \in Y$ un punto de multiplicidad k de f. Si $\beta \in \Omega^1(Y \setminus \{q\})$ entonces*

$$\mathrm{Res}_p\left(f^*\beta\right) = k\mathrm{Res}_q\left(\beta\right), \quad \forall p \in f^{-1}\left(\{q\}\right).$$

Demostración. Por la multiplicidad de p, podemos encontrar cartas $(U, \varphi = z)$ y $(V, \psi = w)$ de X e Y respectivamente, tales que $\varphi(p) = \psi(f(p)) = 0$ y con $f(U) \subset V$, de modo que

$$F(z) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k, \quad \forall z \in \varphi(U).$$

Escribimos en la carta (V, ψ), $\beta = \beta_1 dw$. La Proposición 1.6.1 nos da la expresión en coordenadas del pullback en la carta (U, z)

$$f^*\beta(z) = f^*\beta_1(z)F'(z)dz = \beta_1\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z)\right)F'(z)dz = \beta_1\left(z^k\right)kz^{k-1}dz.$$

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $G \in \mathcal{O}(D^*(0, \varepsilon))$, $G(z) := \beta_1\left(z^k\right)kz^{k-1}$. El desarrollo de β_1 en serie de Laurent en un entorno perfordado de cero es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \beta_1(z), \quad \forall z \in D^*(0, \delta),$$

donde $c_{-1} = \mathrm{Res}_0(\beta_1(z))$. Entonces,

$$k\beta_1(z^k)z^{k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} kc_n z^{nk+k-1}, \quad \forall z \in D^*(0, \varepsilon).$$

Ahora bien,

$$nk + k - 1 = -1 \Longleftrightarrow k(n+1) = 0 \Longleftrightarrow n = -1,$$

es decir,

$$\mathrm{Res}_0(G(z)) = kc_{-1} = k\mathrm{Res}_0\left(\beta_1(z)\right).$$

□

2.2. Integración de 1-formas

Sea X una superficie de Riemann. Para introducir la integración en superficies se siguen varios pasos y el primero de ellos es definir la integral de una 1-forma sobre una curva diferenciable a trozos, a lo que conocemos como *camino*. Recordemos que dada $\gamma : I \longrightarrow X$ una curva diferenciable y dada $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, podemos considerar el pullback

$$\gamma^* : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^1(I), \quad \gamma^*\omega : I \longrightarrow (T^*I)_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C},$$

$$(\gamma^*\omega)(t) = \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in I$$

Definición 2.2.1. Sea X superficie de Riemann y sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ una curva diferenciable a trozos. Dada una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, definimos la *integral de línea de ω a lo largo de γ* como

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b (\gamma^*\omega)(t)dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) dt.$$

Observación 2.2.1. La integración está bien definida porque $\gamma^*\omega$ es diferenciable en $[a,b]$, que es un intervalo compacto. Esto nos dice que la función $t \mapsto \gamma^*\omega(t)$ es integrable cuando el intervalo es compacto. Si no es compacto, puede ocurrir

$$\int_{\mathbb{R}} |\gamma^*\omega(t)|\, dt = +\infty.$$

Por otro lado, pedir que la curva γ sea diferenciable a trozos no supone restricción alguna en virtud de que el valor de la integral no se ve afectado por conjuntos de medida nula, como lo es un subconjunto finito de I.

Expresión en coordenadas de la integral de línea

Sea $\gamma : I \longrightarrow X$ curva diferenciable con $I = [a,b]$. De este modo, $\gamma(I)$ es compacto y se puede tomar $(U_k, \varphi_k = z_k)$ un recubrimiento finito mediante cartas de $\gamma(I)$ tal que U_k es conexo y relativamente compacto en X. En cada carta,

$$\omega = f_k dz_k + g_k d\overline{z_k}, \quad f_k, g_k \in \mathcal{C}^\infty(U_k, \mathbb{C}), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Sean $\gamma(t_k)$ y $\gamma(t_{k+1})$ los extremos de γ contenidos en U_k de modo que γ sea diferenciable en dicho intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. De este modo,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \gamma^*\omega(t)dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ f_k(\gamma(t))\left(x_k \circ \gamma\right)'(t) + g_k(\gamma(t))\left(y_k \circ \gamma\right)'(t) \right\} dt\end{aligned}$$

Es fácil ver gracias al teorema de la función inversa que la integración no depende de la reparametrización regular positiva. Decimos que una reparametrización $s : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ es *positiva* si $s' > 0$ en todo punto de $[a,b]$. Esto es básicamente que el difeomorfismo s preserve la orientación, es decir, si recorremos la curva desde x_0 hasta x_1, cuando reparametricemos se siga recorriendo en tal sentido, a pesar de que se pueda recorrer a diferente velocidad. Si tomamos por ejemplo una reparametrización negativa, el cambio de parámetros afectará como

$$\int_\gamma \alpha = -\int_{\gamma \circ s} \alpha,$$

donde $s : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ es un difeomorfismo con $s' < 0$. Más generalmente, podemos escribir

$$\int_\gamma \alpha = \text{signo}(s'(0)) \cdot \int_{\gamma \circ s} \alpha.$$

Por otra parte, de las propiedades heredadas de la integración en $\mathbb{R}$, es inmediato comprobar que,

$$\int_\gamma : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y que verifica

$$\int_{\gamma^{-1}} \alpha = -\int_\gamma \alpha, \quad \int_{\gamma\star\gamma'} \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_{\gamma'} \alpha.$$

El siguiente resultado, es la generalización a superficies de Riemann de la relación entre las derivadas y la integración.

Teorema 2.2.1. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable. Dada un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ se cumple que*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es un camino cerrado entonces $\int_\gamma df = 0$.

Demostración. Como ya vimos la expresión en coordenadas de $df \in \mathcal{E}^1(X)$ en un atlas finito (U_k, z_k)a lo largo de $\gamma(I)$ es

$$df|_{U_k} = \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_k}} d\overline{z_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Equivalentemente, si denotamos $z_k = x_k + iy_k$, tenemos

$$df|_{U_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k.$$

De este modo, dado que la función $t \longmapsto \frac{d}{dt} F(\gamma(t))$ es diferenciable, podemos utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo y concluir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma df &= \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right) (\gamma(t)) dt \\
&= \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} (\gamma(t)) d\left(x_k \circ \gamma(t)\right) + \frac{\partial f}{\partial y_k} (\gamma(t)) d(y_k \circ \gamma(t)) \right) \\
&= \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \sum_k F(\gamma(t_{k+1})) - F(\gamma(t_k)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

Este resultado, induce a la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Sea X una superficie de Riemann y $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$. Diremos que una función diferenciable $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$, es una primitiva de α si $dF = \alpha$.

Ejemplo 2.2.1. Sea $X = \mathbb{C}$ y $\alpha = -ydx + xdy \in \mathcal{E}^1(X)$. Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$. Entonces,

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 2\pi \left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right) dt = 2\pi.$$

Dado que γ es cerrado, la forma α no admite primitiva en $\mathbb{C}$. Más aún α ni siquiera es cerrada,

$$d\alpha = 2dx \wedge dy \neq 0.$$

Ejemplo 2.2.2. Sea $X = \mathbb{C}^*$ y consideramos $\alpha = \frac{dz}{z} \in \Omega^1(X)$. La 1-forma α carece de primitivas en $\mathbb{C}$ puesto que si $\alpha = dF$ entonces

$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = F(\gamma(0)) - F(\gamma(0)) = 0,$$

pero sin embargo, tomando una parametrización $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Con este ejemplo concluimos que la existencia de primitivas globales no está asegurada.

En la Proposición 1.7.3, vimos que toda 1-forma cerrada es localmente exacta, en otras palabras, admite una primitiva local. Por otro lado, sabemos que cualquier 1-forma holomorfa es siempre cerrada, luego admitirá primitiva de manera local. Por lo tanto, el problema de primitivas (para formas cerradas) **es un problema global**. Vamos a buscar condiciones *topológicas* sobre la superficie para poder encontrar primitivas de formas cerradas de manera global.

A estas alturas podemos dar un Teorema más general para la integración de 1-formas que caracteriza las 1-formas exactas.

Teorema 2.2.2. *Sea X una superficie de Riemann y α una 1-forma diferencial. Las siguientes aserciones son equivalentes,*

1. *Si γ y γ' son caminos en X con los mismos extremos entonces la integral de α a lo largo de ellos es idéntica, es decir, la integración de α solo depende de los puntos de integración y no del camino elegido.*

2. *Si γ es un camino cerrado entonces la integral de α a lo largo de γ es nula.*

3. *La 1-forma diferencial α es exacta, es decir, admite primitiva en X que es única salvo constantes.*

Demostración.

- La equivalencia entre los dos primeros puntos se sigue de

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma'} \alpha \Longleftrightarrow \int_{\gamma\star(\gamma')^{-1}} \alpha = 0,$$

puesto que $\gamma \star (\gamma')^{-1}$ es un camino cerrado en X.

- La implicación 3. $\Rightarrow$ 2. es consecuencia del Teorema 2.2.1.

- Veamos 1. $\Rightarrow$ 3. Fijemos $p_0 \in X$. Para cada $p \in X$ definimos la función
$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto \int_{\gamma_p} \alpha,$$
donde γ_p es un camino que une p_0 con p. La función f está bien definida por hipótesis. Veamos que f es una primitiva de α. Sea $p \in X$ y tómese $(U, \varphi = z)$ una carta conforme al disco unidad. En esta carta, existen funciones $F, G \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tales que
$$\alpha|_U = F dz + G d\overline{z}.$$
Para cada $q \in U$ tenemos que $\varphi(q) \in \varphi(U) = \mathbb{D}$. Dado que el disco es convexo, consideramos el segmento que une $\varphi(p) = 0$ con $\varphi(q)$ y lo llevamos a la superficie, es decir, consideramos el camino
$$\beta_q : [0,1] \longrightarrow U, \quad t \longmapsto \varphi^{-1}\left(t\varphi(q)\right),$$
que cumple $\beta_q(0) = p$ y $\beta_q(1) = q$.

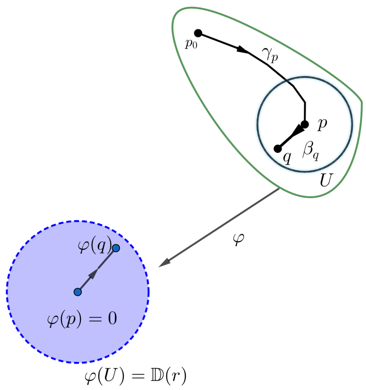


Figura 2.1: Caminos escogidos para la integración

Para cada $q \in U$ la función U se expresa como
$$f(q) = \int_{\gamma_p \star \beta_q} \alpha = \int_{\gamma_p} \alpha + \int_{\beta_q} \alpha = K + \int_{\beta_q} \alpha.$$
Comprobamos que f es diferenciable viendo su lectura en la carta (U, φ). Para cada $z \in \varphi(U)$ denotamos simplemente por β al camino anteriormente construido $\beta_{\varphi^{-1}(z)}$ que es simplemente $\beta(t) = \varphi^{-1}(tz)$. Así pues,
$$\begin{aligned}
f \circ \varphi^{-1}(z) = K + \int_\beta F dz + G d\overline{z} = K + \int_0^1 F(\beta(t)) d(\varphi \circ \beta(t)) dt \\
+ \int_0^1 G(\beta(t)) d\left(\overline{\varphi \circ \beta(t)}\right) dt \\
= K + \int_0^1 (F \circ \varphi^{-1}(tz)) \frac{d}{dt}(tz) dt + \int_0^1 (G \circ \varphi^{-1}(tz)) \frac{d}{dt}(t\overline{z}) dt \\
= K + \int_0^1 (F \circ \varphi^{-1}(tz)) z dt + \int_0^1 (G \circ \varphi^{-1}(tz)) \overline{z} dt
\end{aligned}$$

por tanto f es diferenciable. Además, el Teorema de Derivación bajo el Signo de la integral y la regla del producto nos da que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(p) &= \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial z}(0)\\ &= \int_0^1 \left.\frac{\partial (F\circ\varphi^{-1})}{\partial z}\right|_{z=0}(tz)\cdot t\cdot 0 + F(\varphi^{-1}(0))\left.\frac{\partial z}{\partial z}\right|_{z=0} dt\\ &+ \int_0^1 \left.\frac{\partial (G\circ\varphi^{-1})}{\partial z}\right|_{z=0}(tz)\cdot t\cdot 0 + G(\varphi^{-1}(0))\left.\frac{\partial \overline{z}}{\partial z}\right|_{z=0} dt\\ &= \int_0^1 F(p)dt = F(p).\end{aligned}$$

Análogamente $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(p) = G(p)$. Así pues,

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = Fdz + Gd\overline{z} = \omega|_U\,.$$

Dado que f está definida en todo X y para cada p hemos visto que $df_p = \omega_p$, f es una primitiva de ω en todo X.

□

Observación 2.2.2. Este resultado es para caminos no para curvas únicamente continuas. Más adelante, cuando definamos la integración sobre curvas continuas, tendremos un resultado más potente.

2.3. Propiedades fundamentales de la integración de formas

Para nuestros propósitos, vamos a trabajar con el tipo de homotopía relativa a los extremos para curvas y tipo de homotopía libre para curvas cerradas.

Definición 2.3.1 (Homotopía relativa a los extremos)**.** Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ curvas continuas tales que

$$a = \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad b = \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Diremos que γ_1 y γ_2 son del mismo *tipo de homotopía relativo a los extremos* si existe una aplicación continua

$$\mathscr{H} : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$$

- $\mathscr{H}(s,0) = \gamma_1(s)$, $\mathscr{H}(s,1) = \gamma_2(s)$, $\forall s \in [0,1]$.
- $\mathscr{H}(0,t) = a$, $\mathscr{H}(1,t) = b$, $\forall t \in [0,1]$.

Definición 2.3.2 (Homotopía libre)**.** Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ curvas continuas **cerradas** con puntos base x_1 y x_2 respectivamente. Diremos que γ_1 y γ_2 son del mismo *tipo de homotopía libre* si existe una aplicación continua

$$\mathscr{H} : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$$

- $\mathscr{H}(s,0) = \gamma_1(s)$, $\mathscr{H}(s,1) = \gamma_2(s)$, $\forall s \in [0,1]$.

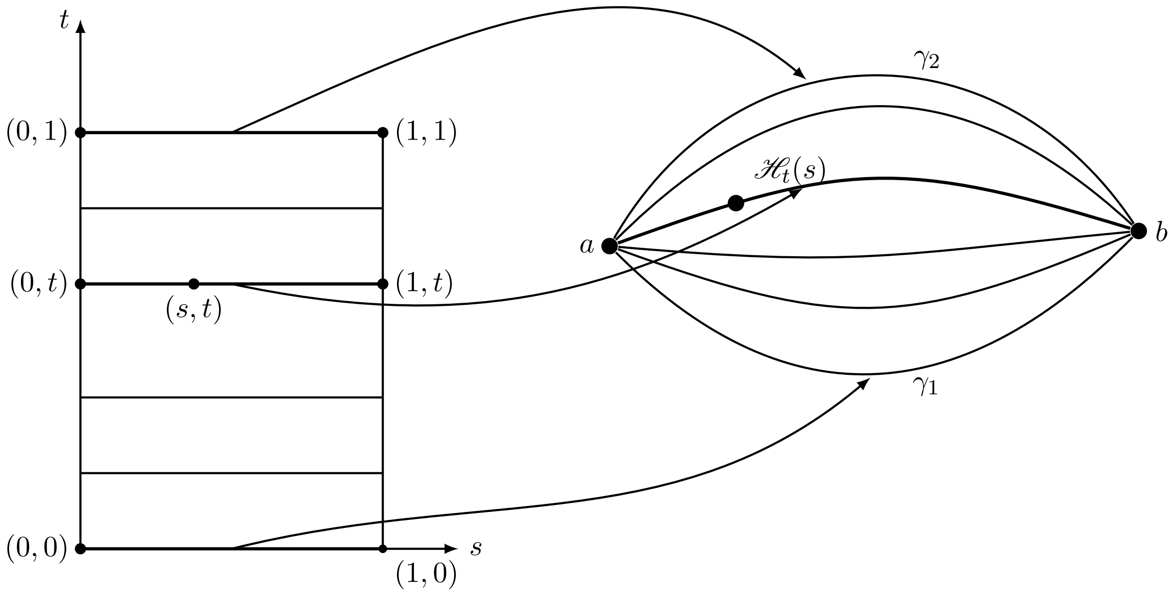


Figura 2.2: Homotopía relativa a los extremos entre las curvas γ_1 y γ_2

- $\mathscr{H}(0,t) = \mathscr{H}(1,t)$, $\forall t \in [0,1]$ (condición para que la deformación sea por curvas cerradas).

Si hablamos de curvas *homótopas* nos referiremos a curvas homótopas relativas a sus extremos[1].

Proposición 2.3.1. *Sea X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico Hausdorff y $f : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local. Entonces,*

$$\mathcal{A} := \left\{ \left(f^{-1}(U), \varphi \circ f\right) : (U, \varphi) \text{ carta de } X,\ \ f|_U \text{ homeomorfismo} \right\}$$

es un atlas holomorfo de Y. En particular, f es localmente biholomorfa y los espacios recubridores de superficies de Riemann admiten estructura de superficie de Riemann.

El siguiente resultado puede consultarse en [7, Teorema 10.5]

Proposición 2.3.2. *Sea X una superficie de Riemann y sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada. Existe un espacio recubridor (Y, π) conexo tal que $\pi^*\alpha$ admite primitiva global, es decir, existe $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que $dF = \pi^*\alpha$.*

Corolario 2.3.1. *Sea X una superficie de Riemann, sea $\Pi : \widehat{X} \longrightarrow X$ su recubridor universal y $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada. Entonces $\Pi^*\alpha$ tiene primitiva, es decir, existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C})$ tal que $dF = \Pi^*\alpha$.*

Demostración. Sea G una primitiva de $\pi^*\alpha$ dada por la Proposición 2.3.2. Al ser $\widehat{X}$ el

[1] Esto se debe a que en un espacio arcoconexo una curva cualquiera es homótopa, sin pedirle relativa a los extremos, a una curva constante.

recubridor universal de X existe una aplicación continua σ, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "\pi"] \\
\widehat{X} \arrow[ur, dotted, "\sigma"] \arrow[r, "\Pi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Observemos que σ es holomorfa. Sea $\widehat{x} \in X$. Dado que π es localmente biholomorfa existe un entorno U de en Y del punto $\sigma(\widehat{x})$ tal que $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ es biholomorfa. Dado que σ es continua, existe un entorno abierto V de $\widehat{x}$ en $\widehat{X}$ tal que $\sigma(W) \subset U$. Por la conmutatividad del diagrama

$$\pi \circ \sigma|_W = \Pi|_W \Longrightarrow \sigma|_W = \pi^{-1} \circ \Pi|_W .$$

Dado que π y Π son localmente biholomorfas, entonces σ es localmente biholomorfa. Consideramos ahora

$$F = G \circ \sigma = \sigma^* G \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C}).$$

Entonces,

$$\Pi^* \alpha = (\pi \circ \sigma)^* \alpha = \sigma^* \left(\pi^* \alpha\right) = \sigma^* \left(dG\right) = d\left(\sigma^* G\right) = dF.$$

□

Cerramos con el teorema más destacable.

Teorema 2.3.1. *En una superficie de Riemann simplemente conexa toda 1-forma diferencial admite primitiva.*

Demostración. Sea X simplemente conexa. Entonces $Id : X \longrightarrow X$ es el recubridor universal de X. Por el Corolario 2.3.1 tenemos que $(Id)^* \alpha = \alpha$ admite primitiva para cualquier α 1-forma diferencial cerrada. □

Los resultados anteriores nos permiten integrar las 1-formas cerradas sobre curvas de manera muy sencilla, generalizando aún mas el Teorema 2.2.1. Mostramos antes un lema previo.

Lema 2.3.1. *Sean X e Y superficies de Riemann, α una 1-forma diferencial de X (no necesariamente cerrada) y sea $f : Y \longrightarrow X$ una aplicación diferenciable. Entonces, para toda curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow Y$ diferenciable a trozos, tenemos que*

$$\int_\gamma f^* \alpha = \int_{f \circ \gamma} \alpha.$$

Demostración. Llamamos $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ a la curva diferenciable a trozos $f \circ \gamma$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f^* \alpha &\overset{\text{def.}}{=} \int_a^b (\gamma^* \circ f^* \alpha)(t) dt = \int_a^b \left((f \circ \gamma)^* \alpha\right)(t) dt \\
&= \int_a^b (\sigma^* \alpha)(t) dt \overset{\text{def.}}{=} \int_\sigma \alpha = \int_{f \circ \gamma} \alpha.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.2. *Sea X una superficie de Riemann y $\Pi : \widehat{X} \longrightarrow X$ recubridor universal de X. Sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada y $F \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C})$ primitiva de $\Pi^*\alpha$. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ es una curva diferenciable a trozos y $\widehat{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \widehat{X}$ un levantamiento de γ, entonces*

$$\int_\gamma \alpha = F(\widehat{\gamma}(b)) - F(\widehat{\gamma}(a)).$$

Demostración. El Lema 2.3.1 nos dice que

$$\int_{\widehat{\gamma}} \Pi^*\alpha = \int_{\Pi\circ\widehat{\gamma}} \alpha = \int_\gamma \alpha. \tag{2.1}$$

Dado que F es una primitiva de $\Pi^*\alpha$ entonces $\int_{\widehat{\gamma}} \Pi^*\alpha = F(\widehat{\gamma}(b)) - F(\widehat{\gamma}(a))$. La expresión (2.1) prueba el resultado. □

Como consecuencia obtenemos que la integración es invariante mediante el tipo de homotopía **libre** caminos cerrados. Esto nos permitirá definir la integral de 1-formas diferenciales cerradas (en particular, para las 1-formas holomorfas) para curvas únicamente continuas.

Corolario 2.3.2. *Sea X una superficie de Riemann, $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada y $\gamma, \sigma : [a,b] \longrightarrow X$ caminos en X con el mismo tipo de homotopía. Entonces*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$$

Además, si γ, σ son cerradas y tienen el mismo tipo de homotopía libre

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$$

Demostración. Consideramos $\Pi : \widehat{X} \longrightarrow X$ el recubridor universal de X. Consideremos $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\sigma}$ los levantamientos de γ y σ respectivamente. Como γ y σ son homótopas entonces sus respectivos levantamientos cumplen que

$$\widehat{\gamma}(a) = \widehat{\sigma}(a), \quad \widehat{\gamma}(b) = \widehat{\sigma}(b).$$

Por lo tanto, si F es una primitiva de $\Pi^*\alpha$, tenemos

$$\int_\gamma \alpha = F(\widehat{\gamma}(b)) - F(\widehat{\gamma}(a)) = F(\widehat{\sigma}(b)) - F(\widehat{\sigma}(a)) = \int_\sigma \alpha.$$

Para la segunda parte. Dado que X es arcoconexo, existe una curva $\delta : [a,b] \longrightarrow X$ que une el punto base x_0 de γ con el punto base x_1 de σ de forma que

$$\gamma \simeq \delta \star \sigma \star \delta^{-1}.$$

Por lo anterior, sabemos que al ser δ homótopo a la constante c_{x_0} su integral es nula. Por ende,

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\delta\star\sigma\star\delta^{-1}} \alpha = \int_\delta \alpha + \int_\sigma \alpha - \int_\delta \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

□

Recordemos que si M y N son variedades diferenciables con o sin borde y $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación continua entonces existe $\widetilde{F} : M \longrightarrow N$ diferenciable y homótopa a F. Además, si F es diferenciable en un cerrado $A \subset M$ entonces puede tomar $\widehat{F}$ homótopa relativa a A. Esto se conoce como uno de los *Teorema de Aproximación de Whitney.* Para una demostración de este resultado puede consultarse [14, Teorema 6.26]. En particular, toda curva continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ es homótopa a una curva diferenciable. Además, si γ es cerrada es libremente homótopa a una diferenciable.

Como el valor de la integración de 1-formas diferenciales cerradas no depende del tipo de homotopía de caminos tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2.3.3. Sea X una superficie de Riemann y $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ **cerrada**. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ una curva *continua* (resp. curva continua cerrada) y $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ una curva diferenciable homótopa a γ (resp. curva diferenciable cerrada libremente homótopa a γ). Definimos

$$\int_\gamma \alpha := \int_\sigma \alpha.$$

Veamos que la definición tiene sentido. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ continua y sean $\sigma, \tau : [a, b] \longrightarrow X$ dos curvas diferenciables homótopas a la curva γ. Entonces σ y τ son homótopas entre sí. Por el Corolario 2.3.2

$$\int_\sigma \alpha = \int_\tau \alpha,$$

para cualquier 1-forma diferencial cerrada α. Se procede de igual modo para curvas cerradas continuas y tipo de homotopía libre.

El Teorema 2.2.1 es cierto también para curvas continuas.

Teorema 2.3.3. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable. Dada una curva continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ se cumple que*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es una curva cerrada entonces $\int_\gamma df = 0$.

Demostración. Sea σ diferenciable y homótopa a γ. Aplicando 2.2.1 al camino σ

$$\begin{aligned}\int_\gamma df &\overset{\text{def.}}{=} \int_\sigma df \\ &= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Podemos definir el periodo de una 1-forma diferencial cerrada en el grupo fundamental. Además, como la integral es independiente respecto del tipo de homotopía libre, no tenemos que preocuparnos del punto base para el grupo fundamental.

Definición 2.3.4 (Periodo de una 1-forma diferencial cerrada)**.** Sea X una superficie de Riemann y α una 1-forma diferencial cerrada en X. Sea $[\gamma] \in \pi_1(X)$. Definimos el *periodo de α a lo largo de γ* como

$$\operatorname{per}(\alpha, \gamma) := \int_\gamma \alpha.$$

Definimos la aplicación

$$\operatorname{per}(\alpha) : \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [\gamma] \longmapsto \int_\gamma \alpha.$$

A esta aplicación se le llama *morfismo periodo asociado a* α.

Notemos que $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ está bien definida pues la integración de 1-formas diferenciales cerradas no depende de la clase en el grupo fundamental. Además es un morfismo entre el grupo $(\pi_1(X), \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{per}(\alpha, [\gamma] \cdot [\sigma]) = \operatorname{per}(\alpha, [\gamma \star \sigma]) &= \int_{\gamma \star \sigma} \alpha \\ &= \int_\gamma \alpha + \int_\sigma \alpha = \operatorname{per}(\alpha, [\gamma]) + \operatorname{per}(\alpha, [\sigma]). \end{aligned}$$

Este morfismo tampoco depende de la clase de cohomología de deRham de α. En efecto, sea $\beta = \alpha + df$, $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Por definición α y β tienen la misma clase en $H^1_{Rh}(X, \mathbb{C})$. Entonces, como la curva γ es cerrada

$$\operatorname{per}(\beta, [\gamma]) = \int_\gamma \alpha + \int_\gamma df = \int_\gamma \alpha + (f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))) = \int_\gamma \alpha.$$

Por lo tanto, podemos definir más generalmente

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{per}: & H^1_{Rh}(X, \mathbb{C}) \times \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & ([\alpha], [\gamma]) & \longmapsto & \int_\gamma \alpha. \end{array}$$

Ejemplo 2.3.1. Consideramos la forma $\alpha = \frac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ que es cerrada por ser holomorfa. Hallemos sus periodos. Es conocido que $\mathbb{C}^*$ es retracto de deformación fuerte de la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ a la que en notación compleja se la suele denotar por $\mathbb{T}$ o como $C(0,1)$. Por tanto, $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Un generador de $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ es $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0,1]$ y los representantes de las clases son

$$\gamma_n(t) = \exp(2\pi n i t), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, podemos hallar $\operatorname{per}(\alpha, \gamma_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usamos el Teorema de los Residuos clásico, sabiendo que γ_n recorre da n vueltas alrededor del cero,

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\gamma_n}(0) \cdot \operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi n i.$$

De este modo,

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{per}(\alpha): & \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [\gamma_n] & \longmapsto & 2\pi n i. \end{array}$$

También podemos ver que este es el morfismo dando la imagen del generador $\gamma = \gamma_1$.

Notemos también que si α es exacta entonces $\operatorname{per}(\alpha)$ es el morfismo trivial y todos los periodos son cero. Por tanto, debemos estudiar bajo que condiciones es cierto el recíproco, es decir, si tenemos una 1-forma diferencial cerrada con todos sus periodos nulos, ¿es exacta? La respuesta es afirmativa tal y como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.3.4. *Sea X una superficie de Riemann y α una 1-forma diferencial cerrada. Son equivalentes las siguientes aserciones,* *1. Todos los periodos de α son nulos.*

2. La integral entre dos puntos no depende de la curva escogida.

3. La 1-forma diferencial α admite primitiva.

Demostración. a) 1. $\Leftrightarrow$ 2. Sean γ y γ' curvas en X que unen x_0 y x_1. Entonces,

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma'} \alpha$$

si y sólo si $\int_{\gamma\star(\gamma')^{-1}} \alpha = 0$ puesto que $\gamma \star (\gamma')^{-1}$ es una curva cerrada.

b) 1. $\Rightarrow$ 3. Si α admite primitiva entonces $\int_\gamma \alpha = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$, para todo γ representante de $\pi_1(X)$.

c) 3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que todos los periodos de α son nulos y veamos que α admite primitiva. Consideremos $\Pi : \widehat{X} \longrightarrow X$ el recubrimiento universal de X. Por el Corolario 2.3.1 existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{X}, \mathbb{C})$ primitiva de $\Pi^*\alpha$. Consideramos

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = F \circ \Pi^{-1}(x).$$

Veamos que f está bien definida, es decir, si $a, b \in \Pi^{-1}(x)$ entonces $F(a) = F(b)$. Dado que $\widehat{X}$ es arco conexo podemos tomar una curva $\widehat{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \widehat{X}$ que una a y b. Sea $\gamma := \Pi \circ \widehat{\gamma}$. Dado que $\widehat{\gamma}$ tiene por extremos a puntos de la misma fibra, la curva γ es cerrada,

$$\gamma(0) = \Pi(\widehat{\gamma}(0)) = \Pi(a) = x = \Pi(b) = \Pi(\widehat{\gamma}(1)) = \gamma(1).$$

Por tanto, dado que α tiene todos sus periodos nulos $\int_\gamma \alpha = 0$. Dado que $\widehat{\gamma}$ es por definición un levantamiento de γ, el Teorema 2.3.2 afirma que

$$0 = \int_\gamma \alpha = F(\widehat{\gamma}(1)) - F(\widehat{\gamma}(0)) = F(b) - F(a).$$

Por lo tanto, $F(a) = F(b)$ y en consecuencia f está bien definida en todo X. Dado que Π es localmente biholomorfa y F es diferenciable, por ser la diferenciabilidad una propiedad local, f es diferenciable en todo X. Finalmente, para cada $p \in X$, tomemos W abierto de $\widehat{X}$, donde Π es biholomorfismo y tenga sentido escribir Π^{-1}. De este modo en W se tiene

$$df = d(F \circ \Pi^{-1}) = d\left(\left(\Pi^{-1}\right)^* F\right) = (\Pi^{-1})^* dF = (\Pi^{-1})^*(\Pi^*\alpha) = \alpha.$$

Concluyendo así que f es una primitiva de α.

□

Observación 2.3.1. Fijemos $p_0 \in X$. Sea $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada con todos sus periodos nulos. Acabamos de ver que tiene primitiva y que la integración sobre una curva de X **solo depende de sus extremos** (Teorema 2.2.1) y podemos escribir $\int_{p_0}^p \alpha$. De hecho,

$$f(p) := \int_{p_0}^p \alpha, \quad \forall p \in X,$$

es primitiva de α.

Corolario 2.3.3. *Si X es una superficie de Riemann compacta y α_1, α_2 son 1-formas diferenciales* ***holomorfas*** *tales que*

$$\int_\gamma \alpha_1 = \int_\gamma \alpha_2, \quad \forall [\gamma] \in \pi_1(X),$$

es decir, $\operatorname{per}(\alpha_1) \equiv \operatorname{per}(\alpha_2)$*, entonces* $\alpha_1 \equiv \alpha_2$*.*

Demostración. Consideremos $\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$, que es una 1-forma diferencial holomorfa (y por tanto cerrada) con todos sus periodos nulos. Existe entonces, $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $df = \alpha$. Dado que X es compacta entonces $f \equiv$ cte. concluyendo que $\alpha \equiv 0$. □

2.4. Integración de 2-formas

En la definición de superficie de Riemann que nosotros hemos dado, no exigimos que X sea ANII. Sin embargo, aunque esa condición no se suponga, el Teorema de Radó (Sección 3.2) nos dice que toda superficie de Riemann es ANII. Podemos construir *particiones diferenciables de la unidad* (véase [18, Teorema 1.3.1]) sabiendo que X es ANII. Esta herramienta nos ayuda a poder definir la integración de las 2-formas en superficies de Riemann al igual que se hacía con variedades diferenciables.

Definición 2.4.1. Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de M. Una *partición de la unidad* subordinada al recubrimiento $\mathcal{U}$ es una familia numerable $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ tales que

- Los soportes de φ_i son compactos y $0 \leq \varphi \leq 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- La familia de soportes es localmente finita y $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_{\alpha_i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i = 1$.

Como dijimos al inicio, estas particiones siempre existen en variedades diferenciables ANII.

Recordemos que una propiedad fundamental para poder definir la integración en variedades diferenciables era el concepto de *orientación*, es decir, que exista un atlas cuyos cambios de carta tengan determinante jacobiano positivo. Esto era necesario en variedades diferenciables, sin embargo, las superficies de Riemann siempre son orientables como consecuencia de las condiciones de Cauchy-Riemann.

Definición 2.4.2 (Orientación)**.** Sea M una variedad diferenciable. Diremos que M es *orientable* si existe una colección de cartas que recubren a M, tal que el determinante jacobiano de las funciones de transición es positivo. A dicha colección la llamamos *orientación de M*. A las cartas de la orientación fijada las llamamos *cartas positivas*. Una superficie de Riemann será orientable si vista como 2-variedad diferenciable lo es.

Proposición 2.4.1. *Toda superficie de Riemann es orientable.*

Demostración. Dada una estructura holomorfa en X y dos cartas $(U, \varphi = z)$,$(V, \psi = w)$ con $U \cap V$ de tal estructura, tenemos que $\psi \circ \varphi^{-1}$ es una función biholomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$. Las condiciones de Cauchy Riemann nos dicen que

$$\det\left(\operatorname{Jac}(\psi \circ \varphi^{-1})\right) = \left|(\psi \circ \varphi^{-1})'\right|^2 > 0,$$

por tanto X es orientable. □

Otro resultado interesante es el siguiente.

Proposición 2.4.2. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces M es orientable si y sólo si admite una forma de volumen sin ceros definida en todo M.*

Empezamos estudiando las 2-formas diferenciales de $\mathbb{C}$ con soporte compacto. El procedimiento es idéntico al dado para $\mathbb{R}^n$. Sea $\omega \in \mathcal{E}^2(\mathbb{C})$ con soporte compacto contenido en un abierto U de $\mathbb{C}$. De este modo, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ podemos escribir

$$\omega(z) = \omega(x,y) = f(x,y)dx \wedge dy = \frac{i}{2} f(z) dz \wedge d\overline{z}.$$

De este modo, definimos

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_U f(x,y)dxdy.$$

El teorema de cambio de variables para 2-formas diferenciales se puede extrapolar del siguiente modo. Supongamos que $\varphi : V \longrightarrow U$ es un difeomorfismo (en el sentido real). Entonces, el teorema de cambio de variables nos dice como integrar la función f,

$$\iint_U f(x,y)dxdy = \iint_V (f \circ \varphi)(u,v) \left| \det\left(\mathrm{Jac}(\varphi)\right) \right| (u,v) dudv. \tag{2.2}$$

Por otro lado, la Proposición 1.6.2 nos dice que

$$\begin{aligned} \varphi^*(dz \wedge d\overline{z}) &= \det(\mathrm{Jac}(\varphi))(\zeta, \overline{z}) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \\ \varphi^*(dx \wedge dy) &= \det(\mathrm{Jac}(\varphi)(u,v)) du \wedge dv, \\ \zeta &= u + iv. \end{aligned}$$

Por tanto, para que la definición concuerde con (2.2) vamos a necesitar que el jacobiano sea positivo, en otras palabras, que φ preserve orientaciones. Si suponemos que φ es biholomorfa (como lo son las cartas) entonces

$$\det\left(\mathrm{Jac}\, \varphi\right) = |\varphi'|^2 > 0.$$

Así tenemos una manera equivalente de expresar el teorema de cambio de variables,

$$\iint_{\mathbb{C}} \omega = \iint_U \omega = \iint_V \varphi^* \omega = \iint_{\mathbb{C}} \varphi^* \omega.$$

Esta observación va a ser crucial, pues este método será aplicado a cartas.

Sea X una superficie de Riemann y tómese $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ de soporte compacto. Supongamos que existe una carta $(U, \varphi = z)$ tal que $\mathrm{sop}(\omega) \subset U$. Dado que esta carta está definida desde U hasta $\mathbb{C}$, es decir, $\varphi : U \subset X \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ tenemos que

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* : \mathcal{E}^2(U) \subset \mathcal{E}^2(X) \longrightarrow \mathcal{E}^2(\varphi(U)) \subset \mathcal{E}^2(\mathbb{C}),$$

es decir, $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una 2-forma diferencial de $\mathbb{C}$ cuyo soporte, está contenido en $\varphi(U) \subset \mathbb{C}$. Definimos por tanto

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_{\varphi(U)} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega.$$

Esta definición es consistente, es decir, no depende de la carta elegida, pues si tomamos $(V, \psi = w)$ otra carta con $\mathrm{sop}(\omega)$ contenido en V, entonces, en la intersección de ambos abiertos de X, sabiendo que la función de transición es biholomorfa de U en V y aplicando el teorema del cambio de variable

$$\begin{aligned}\iint_X \omega &= \iint_U \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega \overset{\text{C.V.}}{=} \iint_V \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)^* \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega \\ &= \iint_V \left(\psi^{-1}\right)^* \omega = \iint_X \omega.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ de soporte compacto, sin que esté necesariamente en el dominio de definición de una carta. Por compacidad del soporte de ω, podemos recubrirlo mediante un número finito de cartas $(U_k, \varphi_k = z_k)$ con $k = 1, \ldots, n$ y $U_0 := X \setminus \operatorname{sop}(\omega)$. Sea $\{\lambda_k\}_{k=0}^n$ una *partición de la unidad subordinada al recubrimiento* $\{U_k\}_{k=0}^n$ *de* X. Definimos

$$\omega_k := \lambda \cdot \omega, \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Por consiguiente $\omega_k \in \mathcal{E}^1(X)$, $\operatorname{sop}(\omega_k) \subset U_k$, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, es decir, cada ω_k está en las condiciones anteriores. Por construcción

$$\omega = \sum_{k=0}^n \omega_k \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

En $(*)$ hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sop}(\lambda_0) \subset U_0 = X \setminus \operatorname{sop}(\omega)$. Definimos

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_X \omega_k.$$

La definición no depende de la partición de la unidad escogida ni de las cartas tomadas. En efecto, sea $\{(V_k, \psi_k)\}_{k=1}^m$ cartas que recubran al soporte de ω, $V_0 := X \setminus \operatorname{sop}(\omega) = U_0$ y $\{\mu_k\}_{k=0}^m$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento por abiertos de X dado por $\{V_k\}_{k=0}^m$. Dado que $\sum_{k=0}^m \mu_k = 1$, se tiene que para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\lambda_j \omega = \left(\sum_{k=0}^m \mu_k\right) \cdot \lambda_j \omega = \sum_{k=1}^m \lambda_j \mu_k \omega,$$

donde hemos usado que $\mu_0 \cdot \omega = 0$, pues μ_0 está definida en el complementario del soporte de ω. De este modo,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \iint_X \lambda_j \omega &= \sum_{j=1}^n \iint_{U_j} \lambda_j \omega = \sum_{j=1}^n \iint_{U_j} \sum_{k=1}^m \lambda_j \mu_k \omega \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \iint_{U_j \cap V_k} \lambda_j \mu_k \omega = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \iint_{U_j \cap V_k} \lambda_j \mu_k \omega \\ &= \sum_{k=1}^m \iint_{V_k} \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_k \omega = \sum_{k=1}^m \iint_X \mu_k \omega.\end{aligned}$$

Propiedades elementales

- Para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y $\omega, \widehat{\omega} \in \mathcal{E}^2(X)$ se tiene que

$$\iint_X a\omega + b\widehat{\omega} = a \iint_X \omega + b \iint_X \widehat{\omega}.$$

- Dado que X es orientable, entonces X admite exactamente dos orientaciones. A la superficie con orientación opuesta a la de X la denotamos por $-X$. De este modo, se cumple
$$\iint_{-X} \omega = -\iint_X \omega.$$

Comparemos el Teorema de cambio de variables de variedades diferenciables con el de superficies de Riemann.

Teorema 2.4.1 (Cambio de variables para variedades reales)**.** *Sean M y N variedades diferenciables orientables y orientadas. Sea $f : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo que preserva orientaciones. Entonces para toda forma de volumen ω de soporte compacto,*
$$\int_N \omega = \int_M f^*\omega.$$

En la versión compleja, la hipótesis de pedir que sean orientable es superflua. Pedir que f sea biholomorfa nos asegura que f preserva las orientaciones.

Teorema 2.4.2 (Cambio de variables para superficies de Riemann)**.** *Sean X e Y superficies de Riemann orientadas y $f : X \longrightarrow Y$ biholomorfa. Entonces para toda $\omega \in \mathcal{E}^2(Y)$ con soporte compacto, se verifica*
$$\iint_Y \omega = \iint_X f^*\omega.$$

El siguiente resultado es el caso particular del Teorema de Stokes para superficies de Riemann (sin borde).

Proposición 2.4.3. *Sea X una superficie de Riemann orientada y sea ω una 1-forma diferencial de soporte compacto. Entonces $\iint_X d\omega = 0$.*

Demostración. Dado que ω tiene soporte compacto entonces $d\omega$ también ($\operatorname{sop}(d\omega) \subset \operatorname{sop}(\omega)$), por tanto tiene sentido la integración. Sean (U_i, φ_i) con $i = 1, \ldots, r$ cartas de la orientación de X que recubran al soporte de ω y sea $U_0 = X \setminus \operatorname{sop}(\omega)$. Sea $\{\lambda_i\}_{i=0}^r$ una partición de la unidad diferenciable asociada al recubrimiento de X dado por $\{U_i\}_{i=0}^r$. Si llamamos $\omega_i = \lambda_i\omega$, tenemos
$$\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i, \quad d\omega = d\left(\sum_{i=1}^r \omega_i\right) = \sum_{i=1}^r d\omega_i.$$

Dado que $\operatorname{sop}(d\omega_i) \subset \operatorname{sop}(\omega_i) \subset U_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$, tenemos que
$$\iint_X d\omega \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^r \iint_{U_i} d\omega_i = \sum_{i=1}^r \iint_{\mathbb{C}} \left(\varphi^{-1}\right)^* (d\omega_i) = \sum_{i=1}^r \iint_{\mathbb{C}} d\left(\left(\varphi^{-1}\right)^* \omega_i\right).$$

Para cada $i = 1, \ldots, r$ tenemos que $(\varphi^{-1})^*\omega_i$ es una 2-forma de soporte compacto en $\mathbb{C}$. Llamemos $\eta_k = (\varphi^{-1})^*\omega_k$, $k = 1, \ldots, r$. Por ser η_k una 1-forma compleja
$$\eta_k = f_k dx + i g_k dy, \quad f_k, g_k \in \mathcal{C}^\infty(\varphi(U_k), \mathbb{C}).$$

Así
$$d\eta_k = df_k \wedge dx + i dg_k \wedge dy = \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Integrando,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} d\eta_k = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dado que las funciones a integrar son diferenciables y de soporte compacto, dichas funciones son integrables y podemos aplicar el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \right) dy - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(i\frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \right) dy - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo, la función $g_k(x, y_0)$ es una primitiva de $h_k(x) = \dfrac{\partial g_k}{\partial x}(x, y_0)$. Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} h_k(x)dx = \lim_{R\to\infty} (g_k(R, y_0) - g_k(-R, y_0)) \overset{(*)}{=} 0 - 0 = 0.$$

En $(*)$ hemos usado que $g_k(x, y_0)$ tiene soporte compacto. Por tanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_k}{\partial x} dx = 0$. Análogamente se hace para $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}$. Esto pone de manifiesto que

$$\iint_X d\omega = \sum_{k=1}^{r} \iint_{\mathbb{C}} d\eta_k = 0.$$

□

2.4.1. Variedades topológicas y diferenciables con borde

Introducimos brevemente el concepto de *variedad topológica/diferenciable con borde*. Denotaremos por H^n el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ tal que su última coordenada es no negativa.

Definición 2.4.3 (Variedad topológica con borde)**.** Una *variedad topológica con borde* M de dimensión n, es un espacio topológico Hausdorff, ANII y tal que para cada $p \in M$ existe un entorno abierto U de p en M y un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$, con V abierto de H^n. Al par (U, φ) lo llamamos *∂-carta* y a una familia que recubra a M mediante ∂-cartas se le llama *∂-atlas*.

Dado que los discos abiertos centrados en un punto son abiertos de H^n, toda variedad topológica es una variedad topológica con borde. Los ejemplos clásicos de variedades topológicas con bordes son : *los discos cerrados o semicerrados, los toros macizos o la banda de Moebius*. Claramente, existen dos tipos de puntos en las variedades topológicas con borde. Con esto en mente realizamos la siguiente observación. Sea V un abierto de H^n que corte a $\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Consideramos la aplicación $\iota : V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, que es inyectiva. También es continua. En efecto, dado O abierto de $\mathbb{R}^n$, por ser V abierto de H^n, existe V' abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $V = V' \cap H^n$. En consecuencia

$$\iota^{-1}(O) = O \cap V = (O \cap V') \cap H^n$$

es abierto de H^n, por ser la intersección de $O \cap V'$ (abierto de $\mathbb{R}^n$) y H^n. Al ser ι continua e inyectiva, el *Teorema de invariancia del dominio de Brower* afirma que $\iota(V) = V$ es abierto de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo V no puede ser abierto de $\mathbb{R}^n$ dado que los puntos de $V \cap \partial H^n$ no son interiores a V en la topología de $\mathbb{R}^n$. Esto nos dice además que si A y B son abiertos de H^n entonces todo homeomorfismo f satisface $f(A \cap \partial H^n) = B \cap \partial H^n$.
Aplicando esto a los cambios de ∂-cartas de una variedad topológica tenemos que si $\varphi(p) \in \partial H^n$ entonces para cualquier otra ∂-carta alrededor de p, ψ, se cumple que $\psi(p) \in \partial H^n$. Podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.4.4. Sea M una variedad topológica con borde de dimensión n. Diremos que p es *punto borde de M* si existe una ∂-carta alrededor de p tal que $\varphi(p) \in \partial H^n$. En caso contrario, diremos que p es un *punto interior*, es decir, admite un entorno alrededor suyo que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Al conjunto de los puntos borde se le llama *borde de M* y se denota por ∂M. Su complementario, se le llama *interior de M* y se denota por $\mathrm{Int}(M)$.

La noción de borde y de interior no coinciden en general con el concepto topológico. Obsérvese que la frontera topológica (en $\mathbb{R}^3$) del toro es él mismo y sin embargo no tiene puntos borde; además su interior en $\mathbb{R}^3$ es vacío y sin embargo $\mathrm{Int}(\mathbb{T}^2) = \mathbb{T}^2$.

Observemos que $\mathrm{Int}(M)$ es un abierto de M y por tanto ∂M un cerrado.

Proposición 2.4.4. *Sea M una variedad topológica con borde de dimensión n. Entonces* $\mathrm{Int}(M)$ *es una variedad topológica de dimensión n (sin borde) y ∂M es una variedad topológica de dimensión* $n-1$ *(sin borde).*

Demostración. Dado que $\mathrm{Int}(M)$ es abierto de M y solo admite cartas que provean homeomorfismo a $\mathbb{R}^n$ es inmediato que $\mathrm{Int}(M)$ cumple lo pedido. Para ∂M tómese $p \in \partial M$ y (U, φ) una ∂-carta. Sea $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección sobre las $n-1$ primeras coordenadas. De este modo, $\pi \circ \varphi$ es un homeomorfismo entre $U \cap \partial M$ y $\pi(\varphi(U \cap \partial M))$ (abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$). De este modo,

$$\mathcal{A}_{\partial M} := \{(U \cap \partial M, \pi \circ \varphi|_{U \cap \partial M})\},$$

es un atlas de ∂M. □

Recordemos que una aplicación diferenciable entre abiertos de H^n es una aplicación que admite una extensión diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Introducimos las variedades diferenciables con borde.

Definición 2.4.5. Un ∂-atlas *diferenciable* es un ∂-atlas tal que si (U, φ) y (V, ψ) son ∂-cartas con $U \cap V \neq \varnothing$ y del ∂-atlas entonces $\psi \circ \varphi^{-1}$ es una aplicación diferenciable. Diremos que dos ∂-atlas están relacionados si su unión es otro ∂-atlas diferenciable. A cada clase de equivalencia mediante esta relación se le denomina *∂-estructura diferenciable en M*. Una *variedad diferenciable con borde* es una variedad topológica con una ∂-estructura diferenciable.

Es de elemental comprobación el siguiente resultado.

Proposición 2.4.5. *Sea M una variedad diferenciable con borde de dimensión n. Entonces* $\mathrm{Int}(M)$ *es una variedad diferenciable de dimensión n (sin borde) y ∂M es una variedad diferenciable de dimensión* $n-1$ *(sin borde). Además, un atlas diferenciable de ∂M es el dado por*

$$\mathcal{A}_{\partial M} := \{(U \cap \partial M, \pi \circ \varphi|_{U \cap \partial M})\},$$

donde $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ *es la proyección sobre las* $n-1$ *primeras coordenadas y* (U, φ) *son cartas del atlas maximal de* M*. En particular, dicho atlas está conformado por cartas de* M *adaptadas a* ∂M *y dota a* ∂M *de estructura de subvariedad regular de* M*.*

Demostración. Sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ dos cartas de M del atlas maximal. Sean $\partial U = U \cap \partial M$ y $\partial V = V \cap \partial M$. En cada punto $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \varphi(\partial U) \cap \psi(\partial V)$ se verifica

$$(\pi \circ \psi) \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \pi \circ \psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

De este modo, lo que ocurre es que se elimina la última componente del difeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1}$,

$$(\pi \circ \psi) \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)), \quad x = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

que vuelve a ser difeomorfismo. □

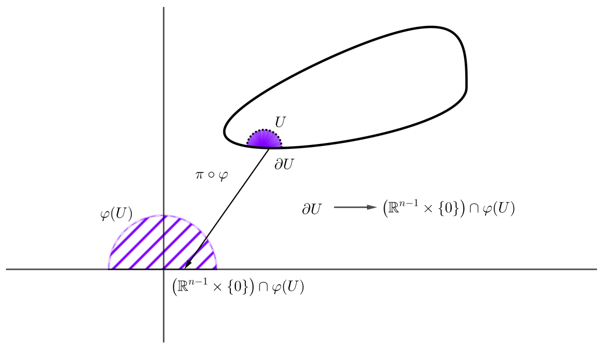


Figura 2.3: Carta de $\mathcal{A}_{\partial M}$

Muchos conceptos dados en variedades diferenciables se extrapolan a variedades diferenciable con borde: *vector tangente, espacio tangente en un punto, aplicaciones diferenciables, fibrado tangente, campo de vectores, formas diferenciales, derivada exterior, orientación, integración de formas de soporte compacto...*
Una observación interesante es la siguiente. Si X es una superficie de Riemann la podemos ver como una variedad diferenciable de dimensión dos. Esto nos lleva a concebir el siguiente concepto.

Definición 2.4.6. Sea Y una variedad diferenciable con borde de dimensión dos conexa. Diremos que Y es una *superficie de Riemann con borde* si ∂Y es una variedad diferenciable de dimensión uno y $\text{Int}(Y)$ es una superficie de Riemann.

Las variedades topológicas conexas 1-dimensionales están completamente clasificadas y son siempre homeomorfas a $\mathbb{R}$ o a la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Las superficies de Riemann con borde tienen la particularidad de que su borde es una variedad diferenciable de dimensión uno. Si tomamos una de las componentes conexas, esta será una curva que será difeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$.

Volviendo al caso de una variedad diferenciable con borde M, debemos introducir una orientación en el borde para poder integrar. Para cada $p \in \partial M$ podemos considerar la inclusión $\iota : \partial M \longrightarrow M$ que es un embebimiento por la Proposición 2.4.5. Tómese (U, φ) y $(\partial U, \pi \circ \varphi)$ carta de M y de ∂M respectivamente. En $p \in \partial U$, tenemos que

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i} \right)_p : i = 1, \ldots, n-1 \right\}$$

es base de $T_p \partial M$ en la carta adaptada $(\partial U, \pi \circ \varphi)$ y

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : i = 1, \ldots, n \right\}$$

es base de $T_p M$ en la carta (U, φ). Dado que ∂M es una subvariedad regular de M, $d\iota_p$ es un monomorfismo de espacios vectoriales tal que

$$d\iota_p : \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i} \right)_p \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Esto nos permite identificar $T_p \partial M$ con un subespacio vectorial $(n-1)$-dimensional de $T_p M$. Por comodidad en la notación, la base de $T_p \partial M$ será denotada mediante su representante en $T_p M$, es decir, haremos $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i}$. Por tanto, $v \in T_p M$ está en $T_p \partial M$ si y sólo si $v_n = 0$, donde

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p .$$

Así pues, el espacio tangente $T_p \partial M$ se puede ver como el subespacio de $T_p M$ tal que en cada carta alrededor a p, la última componente es nula. Diremos además que un vector en $T_p M$ *está dirigido hacia dentro (resp. hacia fuera)* si $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$). Esta última definición es consistente pues no depende de la carta elegida. Sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ sendas ∂-cartas alrededor de $p \in \partial M$. Sea $v \in T_p M$. Entonces, tenemos la siguiente relación

$$(w_1, \ldots, w_n) = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_1, \ldots, v_n), \quad \varphi(p), \psi(p) \in \partial H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

donde v_i y w_i son las coordenadas del vector v en las cartas (U, φ) y (V, ψ) respectivamente. Llamemos f a la función $\psi \circ \varphi^{-1}$, que está definida entre abiertos de H^n que intersecan a ∂H^n. Tenemos que

$$df_p(v) = \mathrm{Jac}(f)_p \cdot v \in \mathbb{R}^n,$$

por tanto, la n-ésima componente de $df_p(v)$ viene dada como

$$(df_p(v))_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(p) \cdot v_k, \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p .$$

Para cada $k < n$, dado que $(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, 0)$ está en $\varphi(U \cap V) \cap \partial H_n$, al ser f homeomorfismo, estos puntos van a parar a $\psi(U \cap V) \cap \partial H^n$, es decir, la última componente en la imagen es nula y por lo tanto,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_k}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Para $k = n$, para $h > 0$ (no tiene sentido tomar $h < 0$ pues estamos en H^n) tenemos que los puntos $(x_1, \ldots, x_{n-1}, h) \in H^n \setminus \partial H^n$, luego al ser f homeomorfismo estos puntos van a parar fuera de ∂H^n y en particular, su última componente es estrictamente mayor que cero, por lo cual

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, h)}{h} \geq 0.$$

Dado que f es difeomorfismo, necesariamente su jacobiana es no singular, es decir, $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) > 0$. Finalmente,

$$\operatorname{signo}(w_n) = \operatorname{signo}\left((df_p(v))_n\right) = \operatorname{signo}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) v_n\right) = \operatorname{signo}(v_n).$$

Por tanto, el signo de v_n no depende de la carta.

Proposición 2.4.6. *Sea M una variedad diferenciable con borde. Existe un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $p \in \partial M$ el vector X_p está dirigido hacia afuera. En particular, $X|_{\partial M}$ es un campo de vectores sin ceros en ∂M.*

Demostración. Tomemos un ∂-atlas diferenciable $\{(U_i, \varphi)\}$ sobre M. Sea $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ una partición diferenciable asociada al recubrimiento por abiertos de M dado por $\{U_i\}_{i \in I}$. Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ formado por los abiertos de $\{U_i\}_{i \in I}$ que intersecan al borde de M. Sea $\{U_k\}_{k \in K}$ el resto de abiertos, que no intersecan al borde de M. En cada carta $(U_j, \varphi_j = (x_1^j, \ldots, x_n^j))$ con $j \in J$, tomamos

$$X_j = -\frac{\partial}{\partial x_n^j} \in \mathfrak{X}(U_j).$$

Por definición X_j está dirigido hacia afuera en $U_j \cap \partial M$, para todo $j \in J$. En las cartas (U_k, φ_k) con $k \in K$, definimos $X_k = 0$. Definimos

$$X := \sum_{i \in I} \lambda_i X_i = \sum_{j \in J} \lambda_j X_j \in \mathfrak{X}(M).$$

Dado que los campos X_k son todos nulos, dado $p \in \partial M$, existe un entorno V de p de forma que $\lambda_i|_V \equiv 0$, para todo $i \in I \setminus F$, siendo F un subconjunto finito de J. Por consiguiente

$$X_p = \sum_{j \in F} \lambda_j(p) X_j(p).$$

Todos los $X_j(p)$ tienen su última componente estrictamente negativa y $\lambda_j(p)$ es mayor estricto que cero. Se deduce que la última componente de X_p es estrictamente negativa. $\square$

2.4.2. Orientación inducida en el borde

Sea M una variedad diferenciable con borde de dimensión n. Sea ω la forma de volumen sobre M que la orienta. La Proposición 2.4.6 asegura que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $p \in \partial M$, el vector X_p apunta hacia afuera. Consideramos la contracción $i_X\omega$ que es una $(n-1)$-forma de M, esto no es más que

$$p \overset{i_X\omega}{\longmapsto} \omega_p(X_p, \cdot, \overset{n-1)}{\cdots}, \cdot).$$

Restringimos $i_X\omega$ a ∂M. Para cada $p \in \partial M$, tenemos

$$\begin{array}{rccc} i_X\omega_p : & T_p\partial M \times \overset{n-1)}{\cdots} \times T_p\partial M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_{n-1}) & \longmapsto & \omega_p\left(X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}\right). \end{array}$$

Esta aplicación no puede ser idénticamente cero puesto que X_p apunta hacia afuera y por lo tanto $X_p \notin T_p\partial M$. Sea $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ y sea $\iota^* : \mathcal{E}^{n-1}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{n-1}(\partial M)$. Por los comentarios anteriores, la $(n-1)$-forma diferencial sobre ∂M dada por $\iota^* i_X \omega$ no tiene ceros, por tanto, es una *forma de volumen sobre* ∂M.

Definición 2.4.7. Sea M una variedad diferenciable con borde orientable y $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ la forma de volumen que determina su orientación. Sea X un campo de vectores que apunta hacia afuera sobre M y $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ la inclusión canónica. Definimos la *orientación inducida en* ∂M como la orientación que induce la $(n-1)$-forma diferenciable sin ceros $\iota^* i_X \omega$, es decir, una base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de $T_p\partial M$ está positivamente orientada si

$$\omega_p \left(X_p, v_1, \dots, v_{n-1}\right) > 0.$$

La orientación en ∂M no depende de ω ni del campo elegido. En efecto, sea ω' otra forma de volumen sobre M que determine la **misma** orientación que ω y X' otro campo de vectores sobre M que apunte hacia afuera en los puntos de ∂M. Sea $p \in \partial M$ y sea $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de $T_p\partial M$. Dado que X_p no está en $T_p\partial M$ entonces $\{X_p, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es una base de T_pM; en particular, existen escalares (que dependen de p) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tales que

$$X_p' = \lambda_0 X_p + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k v_k.$$

Dado que X_p y X_p' apuntan hacia afuera, al expresarlos en una base local de p, su última coordenada es negativa. Dado que X_p y X_p' tienen el mismo signo en su última coordenada, el escalar λ_0 ha de ser necesariamente positivo. Por tanto, de la antisimetría de ω_p se llega a

$$\omega_p \left(X_p', v_1, \dots, v_{n-1}\right) = \lambda_0 \omega_p \left(X_p, v_1, \dots, v_{n-1}\right). \tag{2.3}$$

- Independencia respecto del campo. La expresión (2.3) es cierta para cualquier base de $T_p\partial M$ y cualquier punto $p \in \partial M$, por definición

  $$\iota^* i_{X'} \omega = \lambda_0 \iota^* i_X \omega.$$

  Como $\lambda_0 > 0$, ambas formas determinan la misma orientación en el borde.

- Independencia respecto de la forma de volumen orientada. Dado que ω y ω' determinan la misma orientación sobre M, existe un escalar positivo $\mu \equiv \mu_p$ tal que $\omega_p = \mu \omega_p'$. Entonces

  $$\iota^* i_X \omega_p = \iota^* i_X \mu \omega_p' = \mu \iota^* i_X \omega_p'.$$

  Como $\mu > 0$, ambas formas determinan la misma orientación en el borde.

Ejemplo 2.4.1 (Orientación en un anillo)**.** Gracias a esta proposición vamos a poder construir una orientación en el borde de $M = A(c; r, R)$ con la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$ que es la dada por la forma de volumen

$$\omega := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

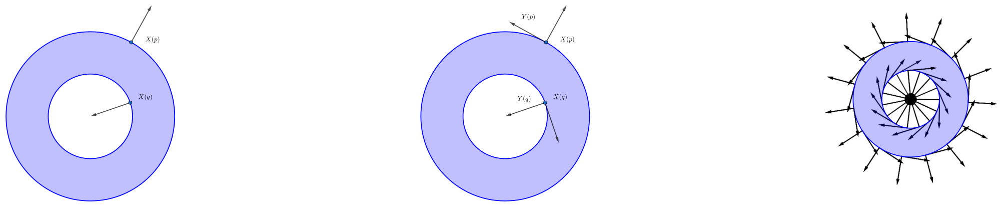
De este modo, es claro que si tomamos X un campo de vectores en el borde de M, la forma $\iota^* i_X \omega$ es simplemente hacer el determinante de los vectores que sean tomados por parámetros. La construcción de dicha orientación se hace como sigue: *Tómese* X *un* *campo de vectores sobre M tal que para cada $p \in \partial M$, el vector X_p apunta hacia afuera. Una vez que tenemos dicho vector en cada $T_p\partial M$, diremos que una base*

$$Y_1(p), \ldots, Y_{n-1}(p) \in T_p\partial M$$

está orientada si lo está la base

$$\{X_p, Y_1(p), \ldots, Y_{n-1}(p)\}$$

respecto de $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.



(a) Campos de vectores dirigido hacia afuera

(b) Base positiva en cada punto

(c) Recorrido del campo de vectores

Figura 2.4: Orientación en el borde del anillo

Cuando la frontera sean curvas, será el caso más importante en lo concerniente a superficies de Riemann con borde. La orientación positiva en el borde del anillo viene dada por el giro antihorario en la circunferencia interior y por el giro horario en la exterior.

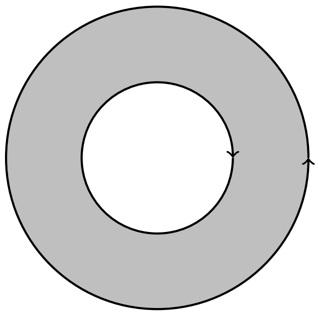


Figura 2.5: Orientación en el borde del anillo

Notemos que si $\mathrm{Int}(M)$ es orientable entonces ∂M lo es. El recíproco no es cierto. Si tomamos la banda de Moebius con su borde, tenemos que las componentes conexas de su borde son homeomorfas a una $\mathbb{S}^1$ y sin embargo, el interior de la banda no lo es.

2.4.3. Teorema de Stokes

Enunciamos el Teorema de Stokes para variedades diferenciables.

Teorema 2.4.3 (Stokes)**.** *Sea M^n una variedad diferenciable con borde orientable de dimensión, $n \geq 2$ y orientable. Supongamos que M está orientada y que en ∂M se tiene la orientación inducida. Entonces, para cada $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ de soporte compacto, se verifica que*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega,$$

donde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ es la inclusión canónica.

Observación 2.4.1. Para $n = 1$ el Teorema de Stokes se reduce al Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que en este caso es la Regla de Barrow.

2.4.4. Teorema de los residuos para superficies de Riemann. Una consecuencia del Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes nos brinda la versión del *Teorema de los residuos* en el caso de una superficie de Riemann compacta. Vamos a usar el conocido *Lema de Urysohn*. La demostración puede verse en [18, Corolario 1.3.2], nosotros únicamente lo enunciamos, aunque su demostración se basa únicamente en la existencia de particiones diferenciables de la unidad.

Lema 2.4.1 (Urysohn diferenciable)**.** *Sea M una variedad diferenciable, O un abierto y K compacto de M tal que $K \subset O$. Existe una función diferenciable en M tal que su restricción a K vale uno y su soporte está contenido en O.*

Recordemos también, que en el plano complejo, dado un disco $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ y $\gamma \subset D^*(z_0, r)$, para toda función $f \in \mathcal{O}(D^*(z_0, r))$ se satisface

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \int_\gamma f(z)dz.$$

Esta propiedad[2] la vamos a utilizar en la siguiente demostración.

Teorema de los residuos para 1-formas. *Sea X una superficie de Riemann y Ω un abierto de X relativamente compacto con borde diferenciable. Sea $\omega \in \Omega^1(X \setminus S)$ donde $S = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \Omega$. Entonces,*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}_{p_k}(\omega).$$

Demostración. Sea $\{(U_k, \varphi_k = z_k)\}_{k=1}^r$ una familia de cartas centradas en p_k y conformes al disco, de forma que $\{U_k\}_{k=1}^r$ sean disjuntos dos a dos. Para cada $k = 1, \ldots, r$

$$\omega|_{U_k \setminus \{p_k\}} = F_k dz_k, \quad F_k \in \mathcal{O}(U_k \setminus \{p_k\}).$$

Para cada $k = 1, \ldots, r$ sea $U'_k = \varphi_k^{-1}(D(0, 1/2))$ un entorno del punto p_k, relativamente compacto contenido en U_k. Sea f_k una función diferenciable en X con soporte contenido en U_k y $f|_{\overline{U'_k}} = 1$. Definimos la función diferenciable

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g := 1 - \sum_{k=1}^{r} f_k$$

Así, g es una función diferenciable en todo X y que se anula en cada $\overline{U'_k}$. Por lo tanto, las condiciones en el soporte de g hacen que $\widetilde{\omega} = g\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Suponiendo en $\partial\Omega$ la orientación inducida, el Teorema de Stokes afirma que

$$\iint_\Omega d\widetilde{\omega} = \int_{\partial\Omega} \widetilde{\omega}.$$

[2]Que no es más que un caso muy particular del Teorema de los Residuos Clásico de $\mathbb{C}$.

1. ω es holomorfa en el abierto $X \setminus S$. Dado que toda 1-forma holomorfa es cerrada, se tiene que
$$d\omega = 0, \quad \text{en } X \setminus S.$$

2. Para cada $k = 1, \ldots, r$ se tiene que $f_k\omega$ es cerrada en $U'_k \cap (X \setminus S)$. En efecto, como f_k es constante en U'_k,
$$d(f_k\omega) = df_k \wedge \omega + f_k d\omega = 0 \wedge \omega + df_k \wedge 0 = 0, \quad \text{en } U'_k \cap (X \setminus S).$$

3. Dado que f_k tiene soporte compacto entonces $f_k\omega$ tiene soporte compacto. En particular, vamos a poder integrarla.

4. Dado que g se anula en cada $\overline{U'_k}$ entonces $\widetilde{\omega}|_{U'_k} = 0$. En consecuencia
$$d\widetilde{\omega} = 0 \quad \text{en cada } U'_k,\ k = 1, \ldots, r. \tag{2.4}$$
Por otro lado, en $X \setminus S$,
$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega} &= d(g\omega) = dg \wedge \omega + g \wedge d\omega \\ &= dg \wedge \omega = -\sum_{k=1}^{r} df_k \wedge \omega = -\sum_{k=1}^{r} (df_k \wedge \omega + 0) \\ &= -\sum_{k=1}^{r} (df_k \wedge \omega + f_k d\omega) = -\sum_{k=1}^{r} d(f_k\omega). \end{aligned}$$
Dado que $d(f_k\omega) = 0$ en U'_k, entonces de (2.4) deducimos que
$$d\widetilde{\omega} = -\sum_{k=1}^{r} d(f_k\omega), \quad \text{en todo } X.$$
Esto nos lleva a
$$\iint_{\Omega} d\widetilde{\omega} = -\sum_{k=1}^{r} \iint_{\Omega} d(f_k\omega). \tag{2.5}$$

5. Por construcción $\varphi(\overline{U'_k}) = \overline{D(0, 1/2)}$, para cada $k = 1, \ldots, r$. La función f_k vale uno en $\overline{U'_k}$ con soporte compacto y contenido en U_k, para cada $k = 1, \ldots, r$. La función $f_k\varphi_k^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ la podemos extender diferenciablemente a todo $\mathbb{C}$ mediante cero y la seguimos denotando del mismo modo.

6. Como $d(f_k\omega) = 0$ en $U'_k \cap (X \setminus S) = U'_k \setminus \{p_k\}$ y $d(f_k\omega) = 0$ en $X \setminus U_k$ porque f tiene soporte compacto en U_k. Así pues
$$d(f_k\omega) = 0, \quad \text{en } (X \setminus U_k) \cup (U'_k \setminus \{p_k\}).$$
Dado que $\{p_k\}$ tiene medida cero es despreciable en la integración
$$\iint_{\Omega} d(f_k\omega) = \iint_{U_k \setminus (U'_k \setminus \{p_k\})} d(f_k\omega) = \iint_{U_k \setminus U'_k} d(f_k\omega).$$
Usando el Teorema de Stokes
$$\iint_{\Omega} d(f_k\omega) = \iint_{U_k \setminus U'_k} d(f_k\omega) = \int_{\partial(U_k \setminus U'_k)} f_k\omega.$$

7. Tenemos que $\varphi_k(U_k \setminus U_k') = \mathbb{D} \setminus D(0, 1/2)$, por lo tanto, usando la orientación dada en el Ejemplo 2.4.1,

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega d(f_k\omega) &= \int_{\partial(U_k \setminus U_k')} f_k\omega = \int_{C(0,1/2)\cup C(0,1)} f_k \circ \varphi_k^{-1}(z) \cdot F_k(\varphi_k^{-1}(z))dz \\
&= \int_{|z|=1} f_k(\varphi_k^{-1}(z)) \cdot F_k(\varphi_k^{-1})(z)dz - \int_{|z|=1/2} f_k(\varphi_k^{-1}(z)) \cdot F_k(\varphi_k^{-1}(z))dz \\
&= -\int_{|z|=1/2} 1 \cdot F_k(\varphi_k^{-1}(z))dz = -\int_{|z|=1/2} 1 \cdot F_k(\varphi_k^{-1}(z))dz \\
&= -2\pi i \mathrm{Res}_0(F_k \circ \varphi^{-1}(z)) \overset{\text{def.}}{=} -2\pi i \mathrm{Res}_{p_k}(\omega).
\end{aligned}$$

8. Hemos probado que para todo $k = 1, \ldots, r$

$$\iint_X d(f_k\omega) = \iint_\Omega d(f_k\omega) = -2\pi i \mathrm{Res}_{p_k}(\omega).$$

9. Dado que $\omega|_{\partial\Omega} = \widetilde{\omega}|_{\partial\Omega}$ entonces

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} \widetilde{\omega} = \int_\Omega d\widetilde{\omega} \overset{(2.5)}{=} -\sum_{k=1}^r \iint_\Omega d(f_k\omega) = 2\pi i \sum_{k=1}^r \mathrm{Res}_{p_k}(\omega).$$

□

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.1. *Sean X una superficie de Riemann compacta y $p_1, \ldots, p_r$ puntos de X. Sea ω una 1-forma holomorfa en $X \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}$. Entonces,*

$$\sum_{k=1}^r \mathrm{Res}_{p_k}(\omega) = 0.$$

Demostración. En este caso, $\Omega = X$ y $\partial\Omega = \varnothing$. Por lo tanto,

$$0 = \int_{\partial X} \omega = \sum_{k=1}^r \mathrm{Res}_{p_k}(\omega).$$

□

Observación 2.4.2. El Teorema de los Residuos puede generalizarse para $S \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω, sin que S sea necesariamente finito.

Corolario 2.4.2. *En una superficie de Riemann compacta, las funciones meromorfas no constantes tienen el mismo número de ceros que de polos contando su multiplicidad.*

Demostración. Sea X una superficie de Riemann compacta y $f \in \mathcal{M}(X)$. Consideramos $\omega = \frac{df}{f}$ que es una 1-forma holomorfa en $X \setminus Z(f)$. Entonces si p es un polo (resp. cero) de f, $\mathrm{Res}_p(\omega) = -m$ (resp. $\mathrm{Res}_p(\omega) = m$). El Teorema de los residuos para superficies compactas establece que

$$\sum_{p \in P(f)\cup Z(f)} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0,$$

de donde se sigue el resultado. □

2.5. Homología singular en variedades. Integración de 1-formas en 1-cadenas

La teoría que vamos a exponer en este capítulo puede verse recogida en las notas [2]. Otras fuentes para encontrar esta teoría es [14], para variedades diferenciables reales con y sin borde y [15], con un estudio más centrado en superficies de Riemann. En el estudio de la topología de un espacio topológico X, además del grupo fundamental están los grupos de homología singular, que nos ofrecen más información sobre las características de este espacio. En un principio, el grupo fundamental se encarga de dibujar lazos en X y sobre si estos se pueden reducir a un punto mediante homotópicamente. El grupo fundamental es un invariante mediante homeomorfismos y más aún, mediante el tipo de homotopía del espacio. Sin embargo, no facilita tanta información como deseamos. Por ejemplo todos los $\mathbb{R}^n$ son simplemente conexos y no son homeomorfos entre sí. Lo mismo sucede con las esferas de dimensión mayor igual que dos. Lo que está sucediendo es que el grupo fundamental no detecta las "dimensiones" de las variedades topológicas. Lo que se plantea es estudiar la imagen de aplicaciones que parten desde un espacio más grande para, por ejemplo, dibujar triángulos y tetraedros. Esta idea es la que concibe la noción de *grupo de homología singular*.

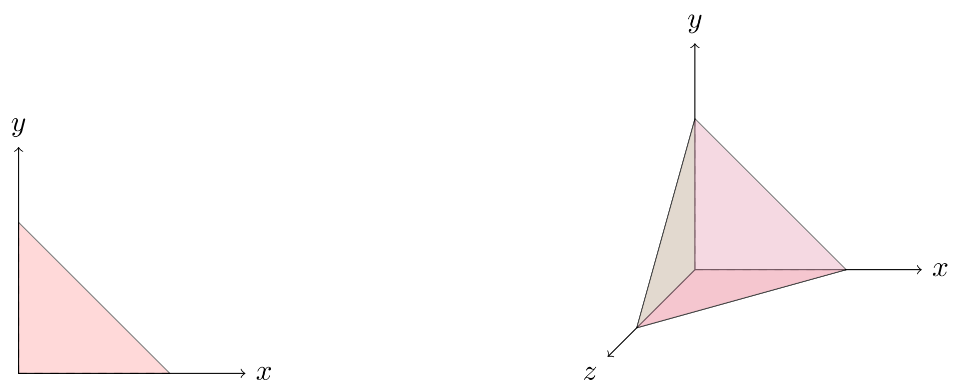
Definición 2.5.1 (Símplice canónico)**.** Llamaremos n-símplice canónico y lo notamos por Δ^n al subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los puntos de $\mathbb{R}^n$,

$$e_0 = 0_{\mathbb{R}^n}, e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1).$$

Explícitamente,

$$\Delta^n = \left\{ (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1, t_i \geq 0, \forall i = 1,\dots,n \right\}.$$

$\Delta^0 = \{0\}$.Δ^1 es el intervalo cerrado $[0,1]$. Δ^2 es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$ con su interior. Δ^3 es el tetraedro macizo de vértices $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.



(a) Δ^2. (b) Δ^3.

Figura 2.6: Símplices canónicos

Definición 2.5.2. Sea X un espacio topológico. Un *n-símplice singular* es una aplicación continua

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X.$$

Puesto que Δ^0 es un solo punto, se identifican los 0-símplices singulares con puntos de X. Como Δ^1 es $[0,1]$ los 1-símplices singulares son curvas continuas en X. Dado que Δ^2 es un triángulo, podemos pensar en la imagen de un 2-símplice como un triángulo dibujado sobre X.

Definición 2.5.3. Para cada $n \geq 0$ definimos el grupo de las *n-cadenas singulares* sobre un espacio topológico X, como el grupo libre y abeliano generado por los n-símplices singulares, denotando a estos grupos por $C_n(X,\mathbb{Z})$ o simplemente por $C_n(X)$.

Más generalmente se podría definir sobre como un R-módulo, pero para nuestros propósitos será suficiente tomar $R = \mathbb{Z}$. Con la definición dada, un elemento no nulo $c \in C_n(X,\mathbb{Z})$ es combinación $\mathbb{Z}$-lineal de n-símplices singulares,

$$c = \sum_{k=1}^{r} m_k(c) \cdot \sigma_k, \quad \sigma_k : \Delta^n \longrightarrow X.$$

Para $n < 0$ podemos definir $C_n(X) = 0$.

Definición 2.5.4. Sea X un espacio topológico. Definimos el *$\mathbb{Z}$-módulo graduado*

$$C(X) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n(X).$$

Por otra parte, si tenemos un subconjunto $U \subset X$, podemos identificar $C_n(U)$ con el conjunto de n-cadenas de X con imagen contenida en U. Esto induce a $C_n(U)$ de una estructura de $\mathbb{Z}$-submódulo graduado.

Definición 2.5.5 (Aplicación inducida)**.** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$(f_*)_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y), \quad \sigma \longmapsto f^*\sigma = f \circ \sigma$$

extendida linealmente[3] y donde $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ es un n-símplice singular. El morfismo f_* se extiende a un único morfismos de grado cero

$$f_* : C(X) \longrightarrow C(X), \quad c \in C_n(X) \longmapsto (f_*)_n(c).$$

Se comprueban inmediatamente las propiedades funtoriales covariantes de $(\cdot)^*$.

Definición 2.5.6 (Borde del n-símplice canónico)**.** Definimos el borde del n-símplice canónico (que es la identidad) $(e_0,\ldots,e_n) : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ y lo denotamos por $\partial_n(e_0,\ldots,e_n)$ a la $(n-1)$-cadena dada por

$$\partial_n(e_0,\ldots,e_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \in C_{n-1}(\Delta_n),$$

es decir $\partial_n(e_0,\ldots,e_n) : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$. Para $n = 0$ será la aplicación nula.

Definición 2.5.7 (Borde de un n-símplice singular y operador borde)**.** Sea X un espacio topológico y $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ un n-símplice singular. Definimos el *borde* de σ como la $(n-1)$-cadena singular,

$$\partial_n\sigma := \sigma_*\partial(e_0,\ldots,e_n) = \sigma \circ \partial(e_0,\ldots,e_n) \in C_{n-1}(X),$$

[3] Dado que estamos trabajamos con grupos libres abelianos todo morfismo queda determinado por la imagen de una base. En este caso, las bases son los n-símplices singulares.

donde $\sigma^* : C_{n-1}(\Delta^n) \longrightarrow C_{n-1}(X)$. Definimos el *operador borde* como el morfismo de grupos $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ que extiende a $\partial_n \sigma$ para cada σ. Esto induce un único morfismo entre $\mathbb{Z}$-módulos graduados de grado menos uno,

$$\partial : C(X) \longrightarrow C(X).$$

Estos operadores borde tienen una propiedad muy similar a la de la derivada exterior.

Proposición 2.5.1. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\partial^2 = 0$.*

Estas características subyacentes a las cadenas singulares, dota al par $(C(X), \partial)$ de estructura de *complejo de cadenas*, los cuales siempre tienen una *homología* asociada. En nuestro caso, será la *homología singular*.

Definición 2.5.8. Sea X un espacio topológico. Definimos el *grupo de homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de orden n* como el grupo abeliano $H_n(X)$ dado por

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X), \quad Z_n(X) = \ker \partial_n, \quad B_n(X) = \partial_{n+1}\left(C_{n+1}(X)\right).$$

A los elementos de $Z_n(X)$ les llamamos *n-ciclos* y a los de $B_n(X)$ *n-bordes*. Definimos también el módulo $\mathbb{Z}$-graduado $H(X) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(X)$. Además, dos ciclos con la misma clase de homología se dirán *homólogos*.

En nuestro objetivo, nos interesa estudiar verdaderamente espacios topológicos X que sean además variedades diferenciables o superficies de Riemann. Todo esto nos lleva a construir mediante el mismo proceso lo que son los *grupos de cadenas singulares diferenciables* que no es más que el grupo abeliano libre generado por los n-símplices $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ que sean diferenciables, no solo aplicaciones continuas. Estos grupos son denotados por $C_n^\infty(X, \mathbb{Z})$ o simplemente $C_n^\infty(X)$. Del mismo modo, se construye el módulo $\mathbb{Z}$-graduado $C^\infty(X)$ dado por la suma directa de los $C_n^\infty(X)$. Utilizando además lo ya conocido, el operador borde ∂ se restringe de modo natural a cada grupo de n-cadenas singulares diferenciables, otorgando a $C^\infty(X)$ una estructura de complejo de cadenas y pudiendo definir el grupo de homología diferenciable $H_n^\infty(X)$. Estudiando un poco más las propiedades intrínsecas de estos grupos se puede llegar a la conclusión de que ambas nociones cuando trabajamos en una variedad diferenciable coinciden, obteniendo como resultado un isomorfismo entre $H^\infty(X)$ y $H(X)$. De hecho se tiene lo siguiente (véase [5, Teorema 9.42]).

Proposición 2.5.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $i_\sharp : H_n^\infty(M) \longrightarrow H_n(M)$ es un isomorfismo.*

Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un morfismo en los grupos de homología. Más concretamente, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que $f_* : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ es un morfismo de grupos abelianos libres. Más concretamente, la propiedad $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$ hace que $f_*(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$ y que $f_*(B_n(X)) \subset B_n(Y)$. Esto hace que podamos definir,

$$f_\sharp : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), \quad [c] \longmapsto f_\sharp([c]) = [f_*(c)].$$

Esto también induce un morfismo de grado cero, $f_\sharp : H(X) \longrightarrow H(Y)$, de $\mathbb{Z}$-módulos graduados. Es rutinario comprobar que esta aplicación estable un funtor entre la categoría de los espacios topológicos y la categoría de grupos abelianos. Como consecuencia, si f es un homeomorfismo entre X e Y entonces $f_\sharp$ es un isomorfismo entre grupos de homología y a su vez

$$f_\sharp : H(X) \longrightarrow H(Y)$$

es un isomorfismo de grado cero entre $\mathbb{Z}$-módulos graduados.

Un resultado inmediato (véase [14, Proposición 18.3]) de las precedentes construcciones es la lectura que tiene el H_n uniones disjuntas (como pueden ser componentes arco conexas).

Proposición 2.5.3. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se tienen las siguientes propiedades*

1. *(Axioma de la dimensión) $H_0(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$ y $H_n(\{x_0\}) = 0$, $n \neq 0$.*
2. *Si $X = \dot{\cup}_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ entonces las inclusiones $\iota_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ inducen un isomorfismo entre $\oplus_{\alpha\in\Lambda} H_n(X_\alpha) \cong H_n(X)$.*
3. *Si Y es un espacio topológico del mismo tipo de homotopía[4] que X entonces*

$$H_n(X) \cong H_n(Y), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

También se satisface (véase [2, Teorema 1.8])

Teorema 2.5.1. *Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son aplicaciones homótopas entonces $f_\sharp = g_\sharp$. Como consecuencia se tiene*

1. *Si $h : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía entonces $f_\sharp$ es un isomorfismo.*
2. *Si X e Y tienen el mismo tipo de homotopía entonces $H(X) \cong H(Y)$.*
3. *Si Z es un espacio contráctil entonces $H_0(Z) \cong \mathbb{Z}$ y $H_n(X) = \{0\}$ para todo $n \neq 0$.*

Nuestros intereses de los grupos de homología inciden en algo más especial, y es como se relacionan las cadenas de X con las de $A \subset X$. Este estudio se puede hacer mediante un proceso geométrico o algebraico. Recordemos que $C_n(A)$ indicaban las n-cadenas singulares de X que tenían su imagen en A y que se identifica con un subgrupo de $C_n(X)$. La relación entre ambos grupos vendrá dada por el operador borde, lo que nos lleva a definir

$$Z_n(X, A) = \{c \in C_n(X) : \partial c \in C_{n-1}(A)\},$$

$$B_n(X, A) = C_n(A) + B_n(X).$$

A los elementos de estos subgrupos de $C_n(X)$ son conocidos como *n-ciclos* y *n-bordes relativos al par* (X, A) respectivamente.

Definición 2.5.9 (Grupo de homología singular de un par)**.** Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos el *grupo de homología singular de orden n del par* (X, A) como el grupo abeliano libre

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A)/C_n(X, A).$$

[4] Esto es, existen aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1X$. A las aplicaciones f, g se les llama equivalencias de homotopía.

Otra forma de construir la homología de un par (X, A) es definir $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ y el operador borde $\overline{\partial}$ inducido en dicho cociente que es el dado

$$\overline{\partial}_n : c + C_n(A) \longmapsto \partial c + C_{n-1}(A)$$

Podemos definir entonces $\overline{H}_n(X, A) = \ker \overline{\partial_n} / \operatorname{Im} \overline{\partial}_{n+1}$. Explícitamente,

$$\ker \overline{\partial}_n = Z_n(X, A)/C_n(A),$$

$$\operatorname{Im} \overline{\partial}_{n+1} = B_n(X, A)/C_n(A).$$

De este modo, la proyección canónica $p : Z_n(X, A) \longrightarrow Z_n(X, A)/C_n(A)$ induce un isomorfismo

$$p_\sharp : H_n(X, A) \longrightarrow \overline{H}_n(X, A).$$

Cuando X tenga estructura de variedad diferenciable y U sea abierto de X, podremos construir del mismo modo $H_n^\infty(X, U)$.

Las propiedades básicas de la homología relativa pueden encontrarse en [2, Capítulo 2].

Proposición 2.5.4. *Sea X es un espacio topológico. Se verifican las siguiente propiedades*

- $H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- *Si X es arco conexo y $A \neq \varnothing$, $H_0(X, A) = 0$.*
- *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es la familia de componentes arco conexas*

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_n(X_\alpha, X_\alpha \cap A), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

También tenemos el siguiente resultado (véase [5, Teorema 9.12]).

Lema 2.5.1. *Sea X un espacio topológico y $\{X_k\}$ una familia de subconjuntos de X tales que su unión disjunta es todo X. Supongamos que cada X_k es unión de componentes arco conexas de X. Sea $A \subset X$ y llamamos $A_k = X_k \cap A$. Entonces, las inclusiones*

$$\iota_k : (X_k, A_k) \hookrightarrow (X, A)$$

inducen el isomorfismo

$$\oplus_k (\iota_k)_\sharp : \oplus_k H_n(X_k, A_k) \longrightarrow H_n(X, A).$$

Definición 2.5.10 (Homotopía de aplicaciones entre pares)**.** Diremos que dos aplicaciones $f, g : (X, U) \longrightarrow (Y, V)$ son *homótopas* y lo denotamos $f \simeq g$, si existe una aplicación continua

$$H : (I \times X, I \times U) \longrightarrow (Y, V)$$

tal que para todo $x \in X$, $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$. Diremos que los espacios (X, U) y (Y, V) tienen el mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones continuas $\varphi : (X, U) \longrightarrow (Y, V)$ y $\psi : (Y, V) \longrightarrow (X, U)$ tales que $\varphi \circ \psi \simeq Id_{(Y,V)}$ y $\psi \circ \varphi \simeq Id_{(X,U)}$.

Análogamente estos conceptos se extrapolan a variedades diferenciables exigiendo que U y V sean abiertos y tanto las aplicaciones como la homotopía entre ambas sea una aplicación diferenciable. El resultado fundamental respecto de la homología es el siguiente (véase [Teorema 9.16][5]).

Teorema 2.5.2. *Sean $f, g : (X,U) \longrightarrow (Y,V)$ aplicaciones continuas entre pares. Entonces $f_\sharp = g_\sharp$. En particular, si (X,U) e (Y,V) tienen el mismo tipo de homotopía entonces $H_n(X,U) \cong H_n(Y,V)$. Más aún si $A \subset X$ es un retracto de deformación fuerte*[5] *de X entonces $H_n(X,A) = 0$.*

2.5.1. Sucesión exacta larga en homología

Vamos a conectar diferentes grupos de homología de diferentes espacios, lo que nos permite calcular la homología de unos en función de otros ([5, Teorema 9.20]).

Teorema 2.5.3 (Conexión entre H_n y H_{n-1}). *Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos y sean*

$$i : (U,V) \hookrightarrow (X,V), \quad j : (X,V) \hookrightarrow (X,U).$$

Para cada n existe un morfismo D_n tal que la siguiente sucesión es exacta larga

$$\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[dll, "D_{n+1}"'] \\
H_n(U,V) \arrow[r, "i_\sharp"] & H_n(X,V) \arrow[r, "j_\sharp"] & H_n(X,U) \arrow[dll, "D_n"'] \\
H_{n-1}(U,V) \arrow[r, "i_\sharp"] & H_{n-1}(X,V) \arrow[r, "j_\sharp"] & H_{n-1}(X,U) \arrow[dll, "D_{n-1}"'] \\
{} & &
\end{tikzcd}$$

Esta sucesión es conocida como sucesión exacta larga en homología de la terna (X,U,V). *Para $V = \varnothing$ tenemos la del par (X,U),*

$$\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[dll, "D_{n+1}"'] \\
H_n(U) \arrow[r, "i_\sharp"] & H_n(X) \arrow[r, "j_\sharp"] & H_n(X,U) \arrow[dll, "D_n"'] \\
H_{n-1}(U) \arrow[r, "i_\sharp"] & H_{n-1}(X) \arrow[r, "j_\sharp"] & H_{n-1}(X,U) \arrow[dll, "D_{n-1}"'] \\
{} & &
\end{tikzcd}$$

[5] Esto es, existe $r : X \longrightarrow A$ continua tal que $r \circ \iota = 1_A$ y $\iota \circ r \simeq_A 1_X$.

Corolario 2.5.1. *Si X es un espacio topológico y $A \subset X$ es contráctil entonces $H_n(X, A) \cong H_n(X)$.*

Corolario 2.5.2. *Si $f : (X, U, V) \longrightarrow (X', U', V')$ es una aplicación continua entre ternas entonces los cuadrados del siguiente diagrama conmutan*

$$\begin{tikzcd}
H_n(U,V) \arrow[r, "i_\sharp"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & H_n(X,V) \arrow[r, "j_\sharp"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & H_n(X,U) \arrow[r, "D_n"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & H_{n-1}(U,V) \arrow[d, "f_\sharp"'] \\
H_n(U',V') \arrow[r, "i'_\sharp"] & H_n(X',V') \arrow[r, "j'_\sharp"] & H_n(X',U') \arrow[r, "D'_n"] & H_{n-1}(U',V')
\end{tikzcd}$$

Pasamos a uno de los teoremas fundamentales en lo que concierne a la homología singular (véase [5, Teorema 9.32]).

Teorema 2.5.4 (Escisión)**.** *Sea X un espacio topológico y sean U y V tales que*

$$V \subset \overline{V} \subset \mathring{U} \subset U.$$

Entonces,

$$\iota : (X \setminus V, U \setminus V) \hookrightarrow (X, U)$$

induce un isomorfismo natural

$$\iota_\sharp : H_n(X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow H_n(X, U).$$

Como consecuencia, tenemos una caracterización de los grupos de homología singular de los cocientes por un cerrado.

Proposición 2.5.5. *Sea X espacio topológico y A un cerrado de X de modo que $A \subset U$ con U abierto y de forma que A sea retracto de deformación fuerte de U. Entonces la proyección canónica en el cociente $\pi : X \twoheadrightarrow X/A$ induce los siguientes isomorfismos*

$$H_n(X, A) \cong H_n(X/A), [a]) \cong H_n(X/A), \quad a \in A.$$

En el plano complejo $\mathbb{C}$, cuando integramos funciones holomorfas, el primer paso es integrar sobre curvas diferenciables a trozos (caminos). Una vez desarrollada la teoría de integración en este ambiente, como es el *Teorema de Cauchy* o el *Teorema de los residuos*, se define la integración sobre *cadenas de* $\mathbb{C}$, que no son más que sumas formales de caminos. Pretendemos adaptar este estudio a la superficies de Riemann y damos las siguientes definiciones completamente análogas a lo visto en $\mathbb{C}$. Además de esto introducimos la idea de *divisor*, que nos permite estudiar puntos de una superficie de Riemann que sean "distinguidos".

Definición 2.5.11. Sea X una superficie de Riemann. Consideramos el grupo libre y abeliano generado por los puntos de X al que denotaremos por $\mathrm{Div}(X)$; explícitamente

$$(\mathrm{Div}(X), +) := \left(\bigoplus_{x \in X} x \cdot \mathbb{Z}, + \right).$$

A los elementos de $\mathrm{Div}(X)$ les llamamos *divisores de* X y son sumas formales de puntos de X, es decir,

$$d \in \mathrm{Div}(X) \text{ si y sólo si } d = n_1x_1 + \cdots + n_rx_r, \quad x_i \in X, n_i \in \mathbb{Z}.$$

Escribiremos $d(x_i) = n_i$ y si $x \neq x_i$ para todo i entonces $d(x) = 0$. Se define el *grado* del divisor d como

$$\deg(d) := n_1 + \cdots + n_r.$$

Si $n_j \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$ diremos que d es un divisor *positivo*. Cuando esto ocurra escribimos $d \geq 0$.

Esta definición de divisor nos induce a identificarlos con las 0-cadenas, es decir, $C_0(X, \mathbb{Z})$. Esto se debe a que todo divisor d se puede ver como un morfismo entre X y $\mathbb{Z}$ precisamente por la notación $d(x_i) = n_i$. Por tanto, los divisores y las 0-cadenas son esencialmente lo mismo y se tratarán indistintamente.

Sea X una superficie de Riemann. Podemos dotar al grupo libre y abeliano $\mathrm{Div}(X)$ de un preorden, definiendo

$$d \leq \widehat{d} \Longleftrightarrow \widehat{d} - d \geq 0.$$

Es fácil ver que verifica las propiedades reflexiva y transitiva.

Tal y como anunciamos, los divisores sirven para "quedarnos" con los puntos de X que nos sean de interés, como son los ceros y polos de una función meromorfa. Si tomamos dos ceros distintos de una función meromorfa tienen una propiedad que los distingue, su orden. Esto otorga a un cero, de un "peso" distinto. Estos comentarios, propician la siguiente definición.

Definición 2.5.12 (Divisor subordinado a una función meromorfa)**.** Sea X una superficie de Riemann y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Sean $z_1, \ldots, z_n$ sus ceros y sean $p_1, \ldots, p_m$ sus polos donde $c_1, \ldots, c_n$ y $k_1, \ldots, k_m$ son sus respectivas multiplicidades. Definimos el *divisor asociado a* f y lo denotamos por (f) a

$$(f) := \sum_{i=1}^{n} c_i z_i + \sum_{j=1}^{n} k_j p_j.$$

Un divisor $d \in \mathrm{Div}(X)$ es llamado *principal* si existe una función meromorfa f tal que $(f) = d$, a tal función f le llamaremos una *solución* de d.

Es fácil comprobar que dadas $f, g \in \mathcal{M}(X)$ tenemos que

$$(fg) = (f) + (g).$$

Observación 2.5.1. Notemos que dado un divisor $d \in \mathrm{Div}(X)$ solución de $f \in \mathcal{M}(X)$, los polos y los ceros de f vienen prescritos por el d.

Dado que las superficies de Riemann son de dimensión topológica dos,

$$C_n(X, \mathbb{Z}) = C_2(X, \mathbb{Z}), \quad \forall n > 2,$$

porque no podemos pegar 3-símplices (tetraedro) en una superficie de Riemann sin que estos colapsen en la imagen de un 2-símplice. $C_1(X, \mathbb{Z})$ es el grupo libre y abeliano conformado por aplicaciones continuas desde $\Delta^1 = [0, 1]$ en X, es decir, curvas continuas. $C_2(X, \mathbb{Z})$ son sumas formales de aplicaciones continuas desde el Δ^2 en X, donde Δ^2 es el

(a) Δ^2.

(b) Recorrido del triángulo mediante ∂_2.

triángulo de vértices $(0,0)$,$(1,0)$ y $(0,1)$ con su interior, por tanto, $C_2(X,\mathbb{Z})$ son aplicaciones que dibujan triángulos en la superficie.

En dimensiones bajas las diferenciales tienen una representación clara. Sean $P_i \in X$, sean γ_i curvas en X (aplicaciones continuas desde $\Delta^1 = [0,1]$ a X) y D_i triángulos orientados (aplicaciones continuas desde Δ^2 a X). Consideramos las sumas formales

$$\sum n_i P_i, \quad \gamma := \sum n_i \gamma_i, \quad D := \sum n_i D_i,$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$. Denotamos (P_1, P_2) a la imagen en X del $[0,1]$ mediante la 1-cadena singular, que une precisamente P_1 con P_2 y sea $D_0 = (P_1, P_2, P_3)$ el triángulo orientado desde P_1 hasta P_3 (imagen del Δ^2). Definimos

$$\partial_1 : C_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_0(X,\mathbb{Z}), \quad \partial_1(P_1,P_2) = P_2 - P_1,$$

$$\partial_2 : C_2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_1(X,\mathbb{Z}), \quad \partial_2(P_1,P_2,P_3) = (P_1,P_2) + (P_2,P_3) + (P_3,P_1).$$

Dado que los $C_n(X,\mathbb{Z})$ son grupos abelianos libres, podemos extender linealmente ∂ dando imágenes únicamente de los generadores. Notemos que las diferenciales lo que hacen es ir recorriendo la respectiva cadena.

Observación 2.5.2. La condición de ser 1-ciclo es que su diferencial sea nula, es decir, que al recorrer la curva lleguemos al punto inicial. Por tanto, los 1-ciclos son sumas formales de curvas continuas cerradas. Además, nótese la dualidad con las formas diferenciales, la condición $\partial^2 = 0$ nos dice que toda 1-cadena que sea ∂D cumple que $\partial^2 D = 0$ (análogo a cerrada), sin embargo, puede darse que $\partial\gamma = 0$ sin que $\gamma = \partial D$ para alguna D (análogo a exacta).

Pensando en las 1-cadenas como suma de curvas continuas de $[0,1]$ en X podemos definir la integral de una manera muy intuitiva, integrar en cada curva y otorgarle su peso, que será el n_i que lo acompañe.

Definición 2.5.13. Sea X una superficie de Riemann y $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$. Dada $\gamma \in C_1(X,\mathbb{Z})$, definimos

$$\int_\gamma \alpha := \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \int_{\gamma_i} \alpha, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{n} n_i \gamma_i.$$

De manera análoga se define la integración sobre $C_n(M,\mathbb{Z})$ y M una variedad diferenciable.

De forma canónica tenemos $\partial : C_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_0(X,\mathbb{Z}) \equiv \mathrm{Div}(X)$. La diferencial actúa sobre los generadores $\gamma : \Delta^1 = [0,1] \longrightarrow X$ como

$$\partial\gamma \in \mathrm{Div}(X), \quad \partial\gamma = 0_{\mathrm{Div}(X)}, \text{ si } \gamma \text{ es curva cerrada},$$

$$\partial\gamma \in \mathrm{Div}(X), \quad \partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0).$$

Esta definición se extiende linealmente.

En relación a la integración de 1-formas, debemos conocer el *Teorema de Hurewicz* (véase [2, Capítulo 5]), que nos dice que si X es arco conexo (como lo son las superficies de Riemann) entonces la aplicación

$$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}), \quad [\gamma]_{\pi_1(X,x_0)} \longmapsto [\gamma]_{H_1(X,\mathbb{Z})} = \gamma + B_1(X, \mathbb{Z}),$$

es un epimorfismo de grupos tal que $\ker f_\sharp$ es el conmutador de x_0, lo que induce un isomorfismo entre el $\pi_1(X, x_0)$ abelianizado y el $H_1(X, \mathbb{Z})$. Por tanto, todo par de 1-ciclos que sean homótopos también serán homólogos. El recíproco sin embargo no es cierto.

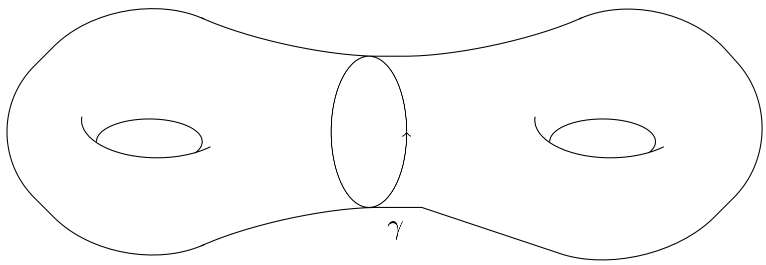


Figura 2.8: Ciclo null-homólogo que no es null-homótopo.

El ciclo γ es homólogo a cero porque acota a un toro con un disco borrado, es decir, es el borde de una suma de 2-cadenas. Es suma de dos cadenas porque podemos simplemente triangular la superficie:

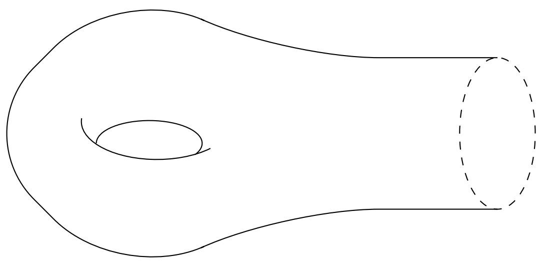


Figura 2.9: Toro T^2 con un disco removido

A pesar de que el recíproco no sea cierto, resulta que *la integración de 1-formas diferenciales cerradas es invariante por el tipo de homología de las curvas.*

Para trabajar adecuadamente con la integración en ciclos, vamos a necesitar un teorema más poderoso, análogo al del plano complejo, es decir, la integración en lazos es invariante por el tipo de homología. Esto es algo mucho más general, y radica esencialmente en el estudio de variedades diferenciales de *bordes angulosos* o *con esquinas.* Puede consultarse la demostración de la siguiente versión del Teorema de Stokes en [14, Teorema 18.12].

Teorema 2.5.5 (Stokes para n-cadenas singulares)**.** *Sea M una variedad diferenciable y sea σ una n-cadena singular diferenciable y denotemos por $\partial : C_n^\infty(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{n-1}^\infty(M, \mathbb{Z})$.*

Para cualquier $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ *se tiene que*

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

Ahora definimos la integral sobre n-cadenas sabiendo que $H_n(M,\mathbb{Z}) \cong H_n^{\infty}(M,\mathbb{Z})$ son canónicamente isomorfos a través de la inclusión canónica, es decir,todo elemento $[\sigma] \in H_n(M,\mathbb{Z})$ tiene un representante diferenciable.

Definición 2.5.14. Sea M una variedad diferenciable y sea σ una n-cadena singular. Dada $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ definimos

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\widehat{\sigma}} \omega,$$

donde $\widehat{\sigma}$ es un representante de la única clase $[\widehat{\sigma}] \in H_n^{\infty}(M,\mathbb{Z})$ tal que $i_\sharp([\widehat{\sigma}]) = [\sigma]$.

A nosotros únicamente nos interesan los 1-ciclos, es decir, curvas cerradas continuas en superficies de Riemann.

Proposición 2.5.6. *Sea* X *una superficie de Riemann y* ω *una 1-forma diferencial* ***cerrada****. Si* γ, σ *tienen el mismo el tipo de homología singular con coeficientes enteros entonces*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

Demostración. Sean γ y σ ciclos homólogos. Por definición $\gamma - \sigma = \partial D$, donde $D \in C^2(X,\mathbb{Z})$. Por el Teorema de Stokes para n-cadenas singulares y sabiendo que ω es cerrada

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\sigma} \omega + \int_{\partial D} \omega = \int_{\sigma} \omega + \int_{D} d\omega = \int_{\sigma} \omega.$$

□

Esta independencia nos permite definir el *morfismo periodo* de $H_1(X,\mathbb{Z})$.

Definición 2.5.15. Sea X una superficie de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada y γ un ciclo en X. Se define

$$\int_{[\gamma]} \omega := \int_{\gamma} \omega$$

En términos de diagramas, fijada una 1-forma diferencial cerrada ω

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\mathrm{per}(\omega)"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & \mathbb{C} \\ H_1(X) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Observemos también que la integración no depende el tipo de cohomología de deRham (aunque ω no sea cerrada) $[\omega] \in H^1_{Rh}(X)$. En efecto, pongamos $\omega + df$ con $f \in \mathcal{C}^{\infty}(X,\mathbb{C})$, esto es, un representante en cohomología. Dado que df es una 1-forma exacta, entonces las integrales sobre cualquier ciclo es nula. Entonces, si tomamos un ciclo cualquiera $\gamma \in Z_1(X)$,

$$\mathrm{per}(\omega + df)(\gamma) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} df = \int_{\gamma} \omega.$$

También tenemos inmediatamente la siguiente caracterización.

Corolario 2.5.3. *Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma diferencial cerrada. Entonces ω es exacta si y sólo si su integral sobre cualquier 1-ciclo es nula. Y recíprocamente, dos ciclos σ y γ son homólogos si y sólo si*

$$\int_\gamma \omega = \int_\sigma \omega,$$

para toda 1-forma diferencial cerrada ω.

De igual modo, por el isomorfismo $i_\sharp : H_1^\infty(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ tenemos lo siguiente.

Corolario 2.5.4. *Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma diferencial cerrada. Entonces ω es exacta si y sólo si su integral sobre cualquier ciclo es nula. Equivalentemente, una 1-forma diferencial cerrada es exacta si y sólo si su integral sobre cualquier ciclo es nula.*

Capítulo 3

Funciones armónicas

3.1. Funciones y formas armónicas

Sea X una superficie de Riemann y $D \subset X$ un dominio. Una función diferenciable $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es *armónica* si $\partial\overline{\partial}u = 0$. Equivalentemente, en un carta (U, z)

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial}u &= \partial\left(\pi^{(0,1)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right)\right) = \partial\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right)\\ &= d\left(\pi^{(0,1)}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right)\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}dz\wedge d\overline{z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dz\wedge d\overline{z}\end{aligned}$$

Dado que la armonicidad es un invariante mediante biholomorfismos, la anterior definición es consistente, esto es, no depende de la carta eligida.

Proposición 3.1.1. *Sea X una superficie de Riemann, D y D' dominios de X. Supongamos que existe $F : \overline{D} \longrightarrow \overline{D'}$ un homeomorfismo tal que $F|_D$ es un biholomorfismo. Entonces, si D es regular para el problema de Dirichlet, entonces D' también lo es.*

Demostración. Sea $f : \partial D' \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Dado que F es un homeomorfismo envía fronteras a fronteras y por tanto $F(\partial D) = \partial D'$. Esto nos dice que $f \circ F : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definida y es continua. Dado que D es regular para el problema de Dirichlet, existe $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, armónica en D y tal que $u|_{\partial D} = F \circ f$. Tenemos que $u \circ F^{-1}$ es armónica en D' por ser F^{-1} holomorfa y u armónica. Además es continua en $\overline{D} = F^{-1}(\overline{D'})$ por composición. Además, para cada $p \in \partial D'$,

$$(u \circ F^{-1})^{-1}(p) = u(F^{-1}(p)) = f(F(F^{-1}(p))) = f(p).$$

$\square$

Con analogía a lo que acontece en $\mathbb{R}^2$, definimos el *laplaciano de u en la carta* (U, z) como

$$\Delta u := 4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}} = 4\partial\overline{\partial}u\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right).$$

Algebraicamente, el conjunto de funciones armónicas están en el núcleo del operador $\overline{\partial}\partial$. Es conocido que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son siempre armónicas, por las condiciones de Cauchy Riemann. En el plano complejo, toda función armónica en un dominio simplemente conexo es la parte real de una función holomorfa. Esto también sucede en superficies de Riemann. En efecto, sea $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y sea $\alpha = \partial u \in \mathcal{E}^1(D)$. La 1-forma α es cerrada porque en cada carta (U, z) de D,

$$d\alpha = d\left(\frac{\partial u}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}\partial z}dz \wedge d\overline{z} = 0,$$

por la armonicidad de u. Así pues, α es una 1-forma diferencial cerrada en un dominio simplemente conexo. El Teorema 2.3.1 nos dice que existe $f \in \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{C})$ tal que $df = \alpha$. En una carta $(U, \varphi = z)$, se tiene

$$df = \alpha \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

De lo anterior, inferimos que $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$, es decir, f es holomorfa y que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$. Si denotamos $f = \widehat{u} + i\widehat{v}$, entonces

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial y},$$

es decir, $u = \widehat{u} + C = \mathrm{Re}(f) + C$ en cada carta (U, z). De la conexión de D, inferimos que $u = \widehat{u} + C$ en todo D.

Proposición 3.1.2. *Sea X una superficie de Riemann y D un dominio simplemente conexo. Entonces toda función armónica $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa en D.*

Proposición 3.1.3. *Sea X una superficie de Riemann y D, D' dominios de X. Sea $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica y $f : D' \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(D') \subset D$. Entonces $u \circ f : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica.*

Demostración. Tenemos que probar que $u \circ f : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica. Tómese $p \in D'$. Entonces $f(p) \in D$, luego existe un entorno V de $f(p)$, simplemente conexo tal que $f(p) \in V \subset D$. Por continuidad existe U entorno de p tal que $f(U) \subset V$. Dado que u es armónica en D entonces $u|_V$ es armónica y por la simple conexión de V, existe $g \in \mathcal{O}(V)$ tal que $u|_V = \mathrm{Re}(g)$. Para todo $q \in U$ tenemos que $f(q) \in V$, entonces

$$(u \circ f)(q) = u(f(q)) = \mathrm{Re}(g(f(q))) = \mathrm{Re}(g \circ f)(q), \quad \forall q \in U.$$

$g \circ f$ es composición de funciones holomorfas y $u \circ f$ es su parte real en U, por tanto $u \circ f$ es armónica en U. Por ser la armonicidad de carácter local, $u \circ f$ es armónica en D'. □

Otra característica importante de las funciones armónicas en $\mathbb{C}$ es que vienen caracterizadas por la propiedad del valor medio.

Definición 3.1.1. Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica en D. Diremos que u satisface la *propiedad del valor medio* si para cada $a \in D$ existe $\rho_a \in (0, \infty)$ tal que para todo $r \in (0, \rho_a]$ se satisface,

$$u(a) = \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta.$$

Teorema 3.1.1. *Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La función u es armónica en D si y sólo si satisface la propiedad del valor medio.*

Otros resultados conocidos son los siguientes.

Proposición 3.1.4. *Sea $u_n : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones armónicas que converge uniformemente por compactos a una función $u : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces u es armónica.*

Teorema de Harnack. *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en el disco $D(0,R)$. Supongamos que $\{u_n\}$ es creciente y acotada superiormente acotada de manera uniforme. Entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ presenta convergencia uniforme por compactos de $D(0,R)$ hacia cierta función armónica $u : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

También podemos definir el concepto de 1-forma armónica. Para ello sin embargo vamos a tener que hacer una pequeña salvedad. Hemos definido funciones armónicas como funciones con espacio de llegada $\mathbb{R}$ y que tienen laplaciano cero, o, equivalentemente que está en el núcleo del operador $\partial\overline{\partial}$. Sin embargo, en este núcleo podrían existir funciones, que no tienen espacio de llegada $\mathbb{R}$, como puede ser una función constante $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por ello, a los elementos del núcleo del operador de $\partial\overline{\partial}$ las llamaremos *funciones armónicas complejas.* esto simplemente lo que nos quiere decir es que su parte real e imaginaria son funciones armónicas.

Dada $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$, tenemos que

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X),\ \alpha_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X).$$

Definimos

$$\star\alpha := i\left(\overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2}\right).$$

De este modo se obtiene un isomorfismo $\star : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^1(X)$ de espacios vectoriales complejos $\mathbb{R}$-lineal. Si $\alpha \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ entonces en una carta (U,z), $\alpha_1 = f dz$ con f diferenciable en U, luego

$$\star\alpha = i\overline{\alpha_1} = i\overline{f dz} = i\overline{f} d\overline{z} \in \mathcal{E}^{(0,1)}(U).$$

Se deduce inmediatamente que $\star$ satisface,

$$\star : \mathcal{E}^{(r,s)}(X) \longmapsto \mathcal{E}^{(s,r)}(X), \quad (r,s) \in \{(1,0),(0,1)\}.$$

Observación 3.1.1. Algunas propiedades inmediatas son las siguientes: sean $f \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}), \omega \in \mathcal{E}^1(X)$, $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

1. $\star\star\,\omega = -\omega$, $\overline{\star\omega} = \star\overline{\omega}$.
2. $d\left(\star\left(\omega_1 + \omega_2\right)\right) = i\partial\overline{\omega_1} - i\overline{\partial}\overline{\omega_2}$.
3. $d\star df = 2i\partial\overline{\partial}\left(\overline{f}\right)$.

Definición 3.1.2. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Diremos que ω es una 1-forma diferencial *armónica* ó *armónica compleja* si para cada $p \in X$, existe un entorno de U de p y una función armónica compleja en U, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\omega = df$. Si la función f tiene imagen contenida en $\mathbb{R}$, diremos que ω es *armónica real.*

Esta definición puede darse de manera global sin tener que restringirse a entornos. Para ello es que introducimos el operador $\star$.

Teorema 3.1.2. *Sea X una superficie de Riemann y ω una 1-forma diferencial. Las siguientes aserciones son equivalentes,*

1. *ω es armónica compleja.*

2. $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$.

3. $\omega = \omega_1 + \omega_2$ *con* $\omega_1 \in \Omega^1(X)$ *y* $\omega_2 \in \overline{\Omega}^1(X)$.

4. *Las 1-formas ω y $\star\omega$ son cerradas.*

Demostración. Todas las implicaciones se siguen de las propiedades esbozadas en Observación 3.1.1, salvo la equivalencia entre 1. y 4.

Supongamos que ω es armónica compleja y probemos que ω y $\star\omega$ son cerradas. En efecto, para cada (U, z) suficiente pequeño tenemos que $\omega = df$ con f armónica en U. Por tanto,

$$d\omega|_U = d^2\, f|_U = 0.$$

Como U es arbitario entonces ω es cerrada. Ahora lo probamos para $\star\omega$. En la carta (U, z)

$$\omega|_U = df|_U = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Entonces,

$$\star\omega = i\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}d\overline{z} + \overline{\partial f}\overline{z}dz\right) \quad \text{en } U.$$

De la armonicidad de f,

$$\star\omega = d\star df = 2i\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}\partial z}dz \wedge d\overline{z} = 0 \quad \text{en } U.$$

Por la arbitrariedad del U (suficientemente pequeño) tenemos probado el resultado.

Recíprocamente, supongamos que ω y $\star\omega$ son cerradas. Sea (U, z) una carta conforme al disco unidad. Como ω es cerrada y U es simplemente conexo existe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable tal que $\omega = df$. Dado que $\star\omega$ es cerrada,

$$0 = d(\star\omega) = d\star df = 2i\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}\partial z}dz \wedge d\overline{z}, \quad \text{en } U$$

de lo que se sigue que f es armónica compleja. □

Definición 3.1.3. Sea X una superficie de Riemann. Denotamos al conjunto de funciones armónicas sobre X como $\mathrm{Harm}^1(X)$ y que satisface en vista del resultado anterior,

$$\mathrm{Harm}^1(X) = \Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega}^1(X).$$

El comportamiento en superficies de Riemann de las formas armónicas es mucho más poderoso. Recordemos que en un dominio simplemente conexo, toda función armónica es la parte real de una función holomorfa y la simple-conexión no podría ser suprimida, amén del típico ejemplo de $\log(|z|)$ en $\mathbb{C}^*$. En cambio, para las formas armónicas reales, la simple-conexión no es necesaria.

Teorema 3.1.3. *Toda 1-forma diferencial armónica real en una superficie de Riemann es la parte real de una única 1-forma diferencial holomorfa, es decir,*

$$\mathrm{Harm}^1(X)_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Re}\left(\Omega^1(X)\right).$$

Demostración. Sea ω una 1-forma armónica real. Podemos escribir $\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2}$ con $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(X)$. Dado que ω es real se tiene que $\omega = \overline{\omega}$ y por ende $\omega_1 = \omega_2$. Así pues,

$$\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2} = \omega_1 + \overline{\omega_1} = 2\mathrm{Re}(\omega_1).$$

Para la unicidad suponemos que existe $\eta, \sigma \in \mathrm{Harm}^1(X)$ tal que $\omega = \mathrm{Re}(\eta) = \mathrm{Re}(\sigma)$. Entonces $\alpha := \eta - \sigma$ es una 1-forma compleja armónica y holomorfa con parte real cero en todo X, por lo tanto ha de ser constantemente cero por el Corolario 1.7.1. $\square$

Observación 3.1.2. Sea $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con D dominio simplemente conexo. Dado que u es armónica entonces du es una 1-forma armónica real. El Teorema 3.1.3 nos dice que existe $\omega \in \Omega^1(X)$ tal que $du = \mathrm{Re}(\omega)$. Como D es simplemente conexo y ω es cerrada (por ser holomorfa), ω admite primitiva holomorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, y por tanto

$$du = \mathrm{Re}(\omega) = \mathrm{Re}(df).$$

Corolario 3.1.1 (Principio del Máximo para funciones armónicas)**.** *Sea X una superficie de Riemann y D un dominio de X. Sea $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y supongamos que existe $p \in D$ donde u alcanza un máximo local. Entonces u es constante.*

Demostración. La Observación 3.1.2 aplicada sobre un entorno U del punto $p \in X$, nos dice que existe $\omega \in \Omega^1(X)$ tal que $du = \mathrm{Re}(\omega)$ con $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $df = \omega|_U$. De este modo,

$$du|_U = \mathrm{Re}(\omega)|_U = \mathrm{Re}(df).$$

De esta igualdad se infiere que $u = \mathrm{Re}(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Llamamos $g = f + C$, que es holomorfa. Como u alcanza un máximo local en p, existe $V \subset U$ tal que $u(q) \leq u(p)$ para todo $q \in V$. De este modo, al darse $|e^g| = e^u$, se tiene que $|e^g|$ alcanza máximo local en p. Por el Principio del Máximo para funciones holomorfas, e^g es constante en V, y por el principio de identidad, e^g es constante en todo D por conexión. De este se deduce que u es constante en D. $\square$

Las funciones armónicas nos serán de gran utilidad cuando cumplan ciertas condiciones sobre bordes de dominios. Por ello conviene definir la siguiente noción.

Definición 3.1.4. Sea X una superficie de Riemann y sea D un dominio de X. Sea $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Por *Problema de Dirichlet* nos referimos a la búsqueda de una función $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea armónica en D y tal que $u|_{\partial D} = f$.

Los problemas de Dirichlet, en nuestro trabajo, serán usualmente en dominios D relativamente compactos y distintos de todo X, lo que asegura frontera no vacía. Además, planteado un problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u(p) = 0, & p \in D \\ u(x) = f(p), & p \in \partial D \end{cases}$$

donde $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua; si $u_1, u_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son soluciones entonces $u := u_1 - u_2$ se anula en ∂D. Por otra parte, $\overline{D}$ es compacto, luego u alcanza máximo en $\overline{D}$ por el Teorema de Weierstrass. Por el Principio de Módulo Máximo para funciones armónicas, u debe presentar su máximo en la frontera ∂D, donde u se anula. El mismo razonamiento sobre $-u$, nos da que alcanza su máximo en la frontera de D, es decir, u alcanza su mínimo en la frontera de D. Como consecuencia, $0 \leq u \leq 0$ y por ende $u \equiv 0$, es decir, $u_1 \equiv u_2$. Podemos enunciar lo siguiente.

Corolario 3.1.2. *Sea X una superficie de Riemann y D un dominio relativamente compacto y distinto de X. Dada una función continua $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, en caso de existir solución para el problema de Dirichlet, esta es única.*

En un disco $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, es conocido que el problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u(p) = 0, & p \in D(0,R) \\ u(x) = f(p), & p \in C(0,R) \end{cases}$$

tiene solución y esta viene dada por la *fórmula integral de Poisson*,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{\left|Re^{i\theta} - z\right|^2} f\left(Re^{i\theta}\right) d\theta \qquad \text{para } |z| < R$$

siendo u armónica en $D(0,R)$ y continua en $\overline{D(0,R)}$ satisfaciendo $u|_{C(0,R)} = f$. Por comodidad, se define el *núcleo de Poisson* como

$$P(z,\zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad \text{para cada } z \neq \zeta.$$

Recíprocamente, si $u : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica y $r < R$, podemos recuperar los valores de u conociendo únicamente los valores que toma en $C(0,r)$, pues gracias a la unicidad, la función u tendrá que venir dada como

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{\left|re^{i\theta} - z\right|^2} u\left(re^{i\theta}\right) d\theta, \quad \forall z \in D(0,r).$$

Lo que se ha dicho es que el disco $D(0,R)$ tiene una propiedad muy interesante, que ponemos a modo de definición.

Definición 3.1.5. Sea X una superficie de Riemann y D un dominio de X. Diremos que *D es regular para el problema de Dirichlet* si para toda función continua $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, existe una función $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, que es continua en $\overline{D}$, armónica en D y tal que $u|_{\partial D} = f$. Al conjunto de todos los dominios de X que son regulares para el problema de Dirichlet los vamos a denotar por $\mathrm{Reg}(X)$.

Estos resultados sobre la regularidad del disco $D(0,R)$, se llevan a cualquier otro disco $D(a,r)$, pues la armonicidad se respeta mediante biholomorfismos, como se observó al inicio del capítulo. De este modo todo abierto D relativamente compacto de una superficie de Riemann tal que $\overline{D}$ sea conforme a un disco $\overline{D}(a,r)$ tiene frontera regular para el problema de Dirichlet.

3.2. Topología ANII

Las superficies de Riemann pueden ser definidas como un espacio topológico Hausdorff y ANII con una serie de propiedades o suprimiendo la condición de ANII. Realmente, ambos caminos conducen al mismo destino, pues sin necesidad de pedir ANII en la definición, se llega a que necesariamente toda superficie de Riemann debe tener una base de topología numerable. Este resultado se conoce como *Teorema de Radó.*

Es claro que si $h : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces si τ_X es ANII entonces τ_Y también lo es. La prueba de esto es altamente elemental, si tomamos $\mathcal{B}$ una base numerable de (X, τ_X) y consideramos $\mathcal{B}'$ dada por las imágenes por h de los elementos de $\mathcal{B}$, se comprueba sin mayor dificultad que $\mathcal{B}'$ es base de (Y, τ_Y).

Podemos pensar también al revés, es decir, que condiciones son necesarias para traer una base numerable al espacio de partida. En el caso inverso, es decir, teniendo ANII en X, era suficiente tener una aplicación continua y sobreyectiva. Para este caso necesitamos pedir algo más.

Definición 3.2.1. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Diremos que $A \subset X$ es un *subespacio discreto* si $(A, \mathscr{T}_A)$ es discreto, equivalentemente, los puntos A son abiertos, esto es, para cada $a \in A$ existe $V \in \tau$ tal que $\{a\} = V \cap A$.
Sea $(Y, \mathscr{T}')$ espacio topológico y $h : (X, \mathscr{T}) \longrightarrow (Y, \mathscr{T}')$. Diremos que h es una *aplicación discreta* si la fibra de cada punto de Y es un subespacio discreto es X, es decir, $h^{-1}(\{y\}) \subset X$ es discreto para todo $y \in Y$.

Ejemplo 3.2.1 (Las aplicaciones holomorfas no constantes son discretas)**.** Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \longrightarrow Y$ holomorfa no constante. Sea $y \in Y$ y consideramos $A := f^{-1}(\{y\})$. Supongamos que A no fuese discreto, entonces para todo abierto O de X se tiene que $O \cap A \setminus \{a\} \neq \varnothing$. Esto es lo mismo que decir que A tiene puntos de acumulación. Por tanto estamos diciendo que $f|_A \equiv y$ en un conjunto A con puntos de acumulación. El Teorema de la Identidad nos dice que f es constante.

En [7, Lema 23.2] puede consultarse el siguiente resultado.

Lema 3.2.1 (Poincaré-Volterra)**.** *Sea X una variedad topológica conexa y sea Y un espacio topológico Hausdorff y ANII. Supongamos que existe una aplicación $h : X \longrightarrow Y$ continua y discreta. Entonces X es ANII.*

Teorema de Radó. *Toda superficie de Riemann es ANII.*

Demostración. Sea X una superficie de Riemann y (U, z) una carta conforme al disco unidad. Sean K_0 y K_1 conformes a discos compactos de $\mathbb{C}$ disjuntos y contenidos en U. Sea D el complementario en X de $K_0 \cup K_1$, que es un abierto de X tal que $\partial D = \partial K_0 \dot{\cup} \partial K_1$.

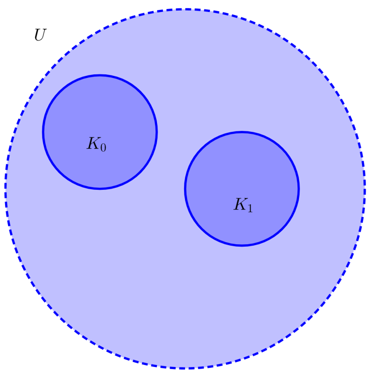


Figura 3.1: Entorno U y compactos K_0 y K_1

Claramente, ∂D es regular para el problema de Dirichlet. Consideramos la función h definida en ∂D tal que $h|_{\partial K_0} = 0$ y $h|_{\partial K_1} = 1$. h es continua puesto que ∂K_0 y

∂K_1 son disjuntos. Sabemos que ∂D es regular para el problema de Dirchlet, por tanto, podemos encontrar una función $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, armónica en D y tal que $u|_{\partial D} = h$. Consideramos la 1-forma real no trivial sobre D dada como $\alpha := \partial u$. La forma α no es trivial. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos $\alpha \equiv 0$ en D. Entonces, en $U \cap D$, tenemos

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

entonces $\dfrac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$ en $U \cap D$, es decir u sería constante en $U \cap D$, porque $U \cap D$ es conexo. Sin embargo, esto no es cierto puesto que vale uno en ∂K_1 y cero en ∂K_0.

El Teorema 3.1.2 nos dice que α es una 1-forma armónica, puesto que

$$\partial(\partial u) = \partial^2 u = 0, \quad \overline{\partial}\partial u = 0,$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la armonicidad de la función u. El Teorema 3.1.3, nos dice que existe $\omega \in \Omega^1(D)$ tal que $\mathrm{Re}(\omega) = \alpha$. Tómese $\pi : \widehat{D} \longrightarrow D$ el recubridor universal de D tal que $\pi^*\omega$ admite primitiva holomorfa en D (Proposición 2.3.2). Existe $f : \widehat{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\omega = df$. Se cumple lo siguiente:

1. $\widehat{D}$ es conexo y la aplicación $f : \widehat{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa no constante, por tanto, discreta. Por el Lema de Poincaré-Volterra, $\widehat{D}$ es ANII.

2. D es ANII. En efecto, $\pi : \widehat{D} \longrightarrow D$ es sobreyectiva y $\widehat{D}$ es ANII. Por tanto, D es ANII.

Finalmente, como D es ANII y U también lo es (por ser homeomorfo a un disco) inferimos que $X = D \cup U$ es ANII.

$\square$

Observación 3.2.1. Hay variedad topológicas que son localmente euclídeas y no ANII.

Capítulo 4

Grupos de cohomología y la ecuación inhomogénea de Cauchy

Los haces en *espacios topológicos* codifican información local y global del espacio. En muchas situaciones, propiedades que se definen en abiertos de un espacios topológico pueden "pegarse" y obtener resultados globales.

4.1. Una breve introducción a los haces en espacios topológicos

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $Open(X)$ a la categoríaset inducida por los abiertos de X con la inclusión.

Definición 4.1.1 (Prehaz en un espacio topológico)**.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría y X un espacio topológico. Un *prehaz en* $\mathcal{F}$ en X es un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : Open(X) \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Dados U y V abiertos de X tales que $V \subset U$, al morfismo $\mathcal{F}_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ de $\mathscr{C}$ inducido por el morfismo de $Open(X)$, $V \hookrightarrow U$, se le llama *restricción* y denotamos

$$\mathcal{F}_{UV}(\sigma) = \sigma|_V , \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U).$$

Ejemplo 4.1.1. Sea X una superficie de Riemann. Tenemos los prehaces sobre X

$$\mathcal{C}^k, \mathcal{E}^{(1,0)}, \mathcal{E}^{(0,1)}, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \Omega^1.$$

Definición 4.1.2 (Haz en un espacio topológico)**.** Sea X un espacio topológico, $\mathscr{C}$ una categoría y sea

$$\mathcal{F} : Open(X) \longrightarrow \mathscr{C}$$

un prehaz en X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un *haz en* X si satisface las siguiente condiciones

- Para todo abierto U de X y todo recubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U, si existen elementos $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ tales que $\sigma|_{U_i} = \tau|_{U_i}$, $\forall i \in I$, se cumple que $\sigma = \tau$.

- Para todo abierto U de X y todo recubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U, si existe $\{\sigma\}_{i\in I}$, $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con

  $$\sigma_i|_{U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U_i\cap U_j} ,$$

  entonces existe $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$, para todo $i \in I$.

Ejemplo 4.1.2. Sea X una superficie de Riemann. Los siguientes prehaces son todos haces sobre X
$$\mathcal{C}^k, \mathcal{E}^{(1,0)}, \mathcal{E}^{(0,1)}, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \Omega^1.$$

Ejemplo 4.1.3. Sea $\mathcal{B}$ el prehaz de funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas. Tomemos $U_n = (n - 1/3, n+4/3)$, que es un recubrimiento de $\mathbb{R}$. Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones acotadas en cada U_n, que coinciden en la intersección. La función $f(x) = x$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la que cumple $f|_{U_n} = f_n$, sin embargo, f no está acotada en $\mathbb{R}$ y por tanto, $f \notin \mathcal{B}$.

Lema 4.1.1. *Si $\mathcal{F}$ es un haz sobre un espacio topológico X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento por abiertos de U entonces $\mathcal{F}(U) = \cap_{i\in I}\mathcal{F}(U_i)$.*

Demostración. Supongamos que U está recubierto por dos abiertos $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ tenemos el pushforward U del diagrama

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \arrow[r] \arrow[d] & U_i \\ U_j & \end{tikzcd}$$

obteniendo

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \arrow[r] \arrow[d] & U_i \arrow[d] \\ U_j \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

Por ser $\mathcal{F}$ contravariante, las flechas cambian de sentidos y obtenemos un pullback en $\mathscr{C}$, que es $\mathcal{F}(U)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U_i) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(U_j) \arrow[r] & \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \end{tikzcd}$$

esto prueba que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U_i) \cap \mathcal{F}(U_j)$. Mediante inducción transfininita se generaliza a cardinales arbitarios. $\square$

4.1.1. La categoría de haces

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces sobre un espacio topológico X y con valores en una categoría $\mathscr{C}$. Un morfismo φ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, es una correspondencia que asigna a cada abierto U de X un morfismo
$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

que es compatible con las restricciones

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, dotted, "\mathcal{F}_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, dotted, "\mathcal{G}_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $Presh_X$ la categoría de prehaces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X, cuyos morfismos son precisamente las transformaciones naturales de funtores. Sea Sh_X la subcategoría plena de haces en $Presh_X$, esto es, los morfismos de Sh_X son morfismos de haces tal que es morfismo en el prehaz subyacente.

Definición 4.1.3. Sea $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismos de prehaces.

- Prehaz núcleo.
$$\ker \varphi(U) = \ker \varphi_U.$$

- Prehaz imagen.
$$\mathrm{Im}\varphi(U) = \mathrm{Im}\varphi_U.$$

Se sigue directamente de las definiciones que si $\varphi \in Mor(Sh_X)$ entonces $\ker \varphi$ es un haz sobre X. Sin embargo, la imagen no tiene la misma propiedad. Esta imagen, no es en general un haz, si no un prehaz. Un contraejemplo es considerar $\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$ y los abiertos $U = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_0^+$ y $V = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_0^-$. Dado que U y V son simplemente conexos, la función $Id(z) = z$ tiene logaritmo en cada abierto por separado, es decir, $f|_U$ y $f|_V$ están en la imagen del morfimo $\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$. Sin embargo, en $U \cup V = \mathbb{C}^*$, es conocido que Id no tiene logaritmo, y por tanto no está en la imagen.

Ejemplo 4.1.4. Si tenemos que X es una superficie de Riemann, la derivada exterior $d : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(X)$ y $d : \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^2(X)$, son morfismos de haces.

Definición 4.1.4. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en un espacio topológico X. Definimos el *tallo de* $x \in X$ y lo denotamos por $\mathcal{F}_x$, como el límite directo

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim \mathcal{F}(U),$$

donde el límite directo se toma sobre los entornos U del punto x.

Explícitamente, $\mathcal{F}_x$ es el cociente

$$\dot{\bigcup_{U : x \in U}} \mathcal{F}(U) / \sim_x,$$

donde $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ se relacionan si existe un entorno W del punto x tal que $\sigma|_W = \tau|_W$. La relación $\sim_x$ es de equivalencia y al elemento $[\sigma]_x$ se le llama *germen de* σ *en* x.

Ejemplo 4.1.5. Sea M una variedad diferenciable real. Sabemos que $\mathcal{C}^\infty$ es un haz de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales en M. Dado $p \in M$, el espacio $\mathcal{C}_p^\infty(M, \mathbb{R})$ que definimos, es el tallo en p del haz $\mathcal{C}^\infty$.

Claramente, si tenemos $x \in X$, todo morfismo de haces induce morfismos de tallos. El concepto de tallo nos permite definir "sección a sección" la noción de *sucesión exacta corta de haces de grupos*. Diremos que

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

es *exacta corta* si para cada x, los morfismos de grupos inducidos,

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$$

conforman una sucesión exacta de grupos.

4.2. Cohomología de Čech de orden uno

Vamos a trabajar con superficies de Riemann principalmente aunque el marco teórico principal sea un espacio topológico. El concepto que vamos a introducir es el de *cohomología de Čech*. Introducimos este concepto con un problema clásico estudiado por Mitagg-Leffler. En una superficie de Riemann X, tomemos E un subconjunto discreto de X y cerrado. Para cada punto $a \in E$, tomamos (U_a, z_a) una carta centrada en a tal que $U_a \cap E = \{a\}$. Consideramos la función

$$p_a(z_a) := \alpha_{-m} z_a^{-m} + \cdots + \alpha_{-1} z_a^{-1}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

La función p_a no es más que un polinomio de Laurent centrado en a. El problema de Mittag-Leffler es encontrar una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa cuyos polos sean E.

El problema se puede resumir en: extender a toda la superficie funciones meromorfas locales. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X y $\{f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}\}_{i \in I}$ una familia de funciones meromorfas tal que

1. Cada f_i es holomorfa en U_i o es holomorfa en $U_i \setminus \{a_i\}$, siendo a_i un polo de f_i.
2. En $U_i \cap U_j$ las funciones f_i y f_j tienen la misma parte singular, es decir, $f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j}$ es holomorfa en $U_i \cap U_j$. En términos del operador $\overline{\partial}$

$$\overline{\partial}\big|_{U_i \cap U_j} (f_i - f_j) = 0, \quad \forall i, j \in I,\ i \neq j,\ U_i \cap U_j \neq \varnothing.$$

3. Para cada $i \neq j$ se cumple $a_i \notin U_j$.

El problema Mittag-Leffler es encontrar una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa con polos $\{a_i\}_{i \in I}$ tal que $f|_{U_i} - f_i$ sea holomorfa, es decir, $\overline{\partial}\big|_{U_i} (f - f_i) = 0$. A la familia $\{f_i\}_{i \in I}$ se le conoce como *distribución de Mittag-Leffler*. A la función f se le llama *solución del problema de Mittag-Leffler*.

Observemos que si la familia de funciones $\{f_i\}$ coinciden en $U_i \cap U_j$, podemos definir $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f|_{U_i} = f$, algo mucho más potente que una solución de Mittag-Leffler. Así pues, si queremos una solución estudiamos las diferencias $h_i = f|_{U_i} - f_i$, que son funciones holomorfas en U_i, es decir, queremos buscar $\{h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}\}_{i \in I}$ co $h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ y de forma que

$$(f_i + h_i)|_{U_i \cap U_j} = (f_j + h_j)|_{U_i \cap U_j},$$

reescribiendo

$$f_i - f_j|_{U_i \cap U_j} = h_i - h_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Definimos

$$f_{ij} := f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Entonces, si la anterior condición se satisface $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ y

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0.$$

Con esto vamos a introducir la cohomología de Čech.

4.2.1. Cocadenas, cociclos y cobordes

Definición 4.2.1 (n-cocadenas)**.** Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de X y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos sobre X. Definimos el *grupo de n-cocadenas sobre el recubrimiento $\mathcal{U}$ y el haz $\mathcal{F}$* y se denota por $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ a

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}).$$

Los elementos de este grupo se llaman *n-cocadenas*.

Un elemento $f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$, es decir, es una tupla,

$$f = (f_i)_{i \in I} \equiv (f_i).$$

Para cada $i, j \in I$ tenemos la 1-cocadena

$$g_{ij} := f_j|_{U_i \cap U_j} - f_i|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \delta : & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ & (f_i) & \longmapsto & (g_{ij}). \end{array}$$

La aplicación δ es morfismo de grupos abelianos y lo llamamos *operador coborde* ó *codiferencial.*

De igual modo, definimos

$$\begin{array}{rccc} \delta : & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ & (f_{ij}) & \longmapsto & (g_{ijk}). \end{array}$$

donde

$$(g_{ijk}) := f_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap \cap U_k} - f_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap \cap U_k} + f_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap \cap U_k} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

al que también llamamos operador coborde ó codiferencial.

Definición 4.2.2 (1-Cociclo)**.** Llamaremos *1-cociclo de Čech* o simplemente *1-ciclo* a los elementos del subgrupo

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \delta(f) = 0 \right\} = \ker(\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

Dada una 1-cocadena (f_{ij}) será 1-cociclo si y sólo si

$$\delta(f_{ij}) = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$$

de donde se deduce

$$f_{ik} = f_{jk} + f_{ij}.$$

Haciendo $j = k = i$ inferimos que $f_{ii} = 0$ y que para $k = j$

$$f_{ij} = -f_{ji}.$$

A estas condiciones se les llama condiciones de 1-cociclos,

$$\begin{cases} f_{ii} = 0, & \forall i \in I \\ f_{ij} = -f_{ji}, & \forall i, j \in I. \end{cases}$$

Definición 4.2.3 (1-Cobordes)**.** Un *1-coborde de Čech* o simplemente *1-coborde* es un elemento del subgrupo

$$B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{Im}(\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

Observación 4.2.1. Todo 1-coborde es 1-cociclo y por tanto $\delta^2 = 0$. Esto nos dice que

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

es una sucesión semiexacta corta. Veamos que en efecto, todo 1-coborde es 1-cociclo. Sea $\delta((f_i))$ un 1-coborde. Entonces

$$\begin{aligned} \delta^2((f_i)) &= \delta((f_i - f_j)) = (g_{jk} - g_{ik} + g_{ij}) \\ &= (f_k - f_j - f_k - f_i + f_j - f_i) = 0. \end{aligned}$$

Observación 4.2.2. Sea (f_{ij}) un 1-cociclo, es decir, $\delta((f_{ij})) = 0$, que es equivalente a

$$f_{ik} = f_{jk} + f_{ij}.$$

Supongamos también que es un 1-coborde, es decir, existe $(g_i) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que

$$(f_{ij}) = (\delta(g_i)) = (g_j - g_i).$$

Por tanto si un 1-cociclo es un 1-coborde entonces se descompone como $(g_j - g_i)$. Recíprocamente, si un 1-cociclo se descompone, entonces

$$(f_{ij}) = (g_j - g_i) = \delta(g_i) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Proposición 4.2.1. *Un 1-cociclo es 1-coborde si y sólo si es descomponible como diferencia de 0-cadenas.*

Definición 4.2.4 (Primer grupo de cohomología sobre un recubrimiento)**.** Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de X. Definimos el *primer grupo de cohomología de Čech relativo a $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$* como el grupo cociente

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

sus elementos se llaman *clases de cohomología* y dos 1-cociclos con la misma clase de cohomología se llaman *cohomólogos*.

Buscamos definir el grupo de cohomología desde el haz y el espacio topológico sin que dependa del recubrimiento. Para ello hacemos el recubrimiento más y más fino, esto es, diremos que $\mathcal{B} = \{V_k\}_{k\in K}$ es más fino que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y lo denotamos como $\mathcal{B} < \mathcal{U}$ si para cada V_k existe un U_{i_k} tal que

$$V_k \subset U_{i_k}.$$

Dicho de otra forma, existe una aplicación

$$\tau : K \longrightarrow I$$

tal que

$$V_k \subset U_{\tau(k)}.$$

Dados dos recubrimientos $\mathcal{B} < \mathcal{U}$ definimos la *restricción de bordes relativa a ambos recubrimientos* como

$$\begin{array}{rccc} \tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} : & Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^1(\mathcal{B},\mathcal{F}) \\ & (f_{ij}) & \longmapsto & (g_{kl}) \end{array}$$

donde

$$g_{kl} = f_{\tau(k)\tau(l)}\big|_{V_k\cap V_l}, \quad V_k \cap V_l \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\tau(l)}.$$

Proposición 4.2.2. *La aplicación $\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}$ envía cobordes en cobordes, es decir,*

$$\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}(B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{B},\mathcal{F}).$$

Esto induce una aplicación en los cocientes, es decir, en H^1

$$\begin{array}{rccc} \overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}} : & H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{B},\mathcal{F}) \\ & [(f_{ij})] & \longmapsto & [(g_{kl})] \end{array}$$

Esta aplicación nos permite ver las clases de cohomología de un recubrimiento $\mathcal{U}$ en uno más fino que él. Podemos definir el grupo de cohomología con coeficientes en $\mathcal{F}$ sin que dependa del recubrimiento.

Definición 4.2.5. Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathrm{Cov}(X)$ a la clase de todos los recubrimientos por abiertos de X. Con el orden parcial $<$ sobre $\mathrm{Cov}(X)$ dado por los refinamientos, $(\mathrm{Cov}(X), <)$ es una categoría poset.

Dado que $\mathrm{Cov}(X)$ tiene estructura de categoría, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.2.6. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Definimos el *primer grupo de homología de Čech sobre X con coeficientes en $\mathcal{F}$* y lo denotamos por $H^1(X,\mathcal{F})$ como

$$H^1(X,\mathcal{F}) := \varinjlim H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Podemos dar una construcción más explícita. El siguiente resultado puede verse en [7, Lema 12.3] y [7, Lema 12.4].

Lema 4.2.1. *La aplicación $\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}$ no depende de $\tau : K \longrightarrow I$ y es inyectiva. Además posee un carácter composicional, es decir,*

$$\overline{\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}} = \overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}} \circ \overline{\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{B}}},$$

para toda terna de recubrimientos $\mathcal{W} < \mathcal{B} < \mathcal{U}$.

Consideramos

$$\Lambda := \dot{\bigcup}_{\mathcal{U}\in \mathrm{Cov}(X)} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

Sean $[\eta] \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $[\nu] \in H^1(\mathcal{U}',\mathcal{F})$. Diremos que $[\eta] \sim [\nu]$ si existe un recubrimiento $\mathcal{B}$ más fino que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ tal que

$$\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}([\eta]) = \overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}'}}([\nu]),$$

esto es, al ver las clases de homologías de dos recubrimientos en uno común más fino, sus clases son iguales

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[dr, "\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}"'] & & H^1(\mathcal{U}',\mathcal{F}) \arrow[dl, "\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}'}}"] \\
& H^1(\mathcal{B},\mathcal{F}) &
\end{tikzcd}$$

Es rutinario comprobar que $\sim$ es de equivalencia.

Definición 4.2.7. Definimos el *primer grupo de cohomología de X con coeficientes en $\mathcal{F}$* al grupo cociente

$$H^1(X,\mathcal{F}) := \Lambda/\sim .$$

$H^1(X,\mathcal{F})$ es el conocido límite inductivo visto en la Definición 4.2.6. La operación del grupo que se denota con adicción por el carácter abeliano de los grupos, viene definida por su inducción en clases de equivalencias. Dados $[x],[y] \in H^1(X,\mathcal{F})$ y sean $[\eta] \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $[\nu] \in H^1(\mathcal{U}',\mathcal{F})$ representantes. Definimos

$$[x]+[y] := \left[\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{U}}([\eta]) + \overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}'}}([\nu])\right],$$

donde $\mathcal{B}$ es más fino que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$. La elección de $\mathcal{B}$ no afecta a la operación puesto que estamos en el cociente.

El Lema 4.2.1 nos decía que $\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}$ era una aplicación inyectiva. Definimos

$$\begin{array}{cccc} \overline{\tau^{\mathcal{U}}}: & H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{F}) \\ & [\eta] & \longmapsto & [[\eta]]. \end{array}$$

Esta aplicación de nuevo es inyectiva, puesto que si $[[\eta]] = 0$ entonces existe $\mathcal{B}$ más fino que $\mathcal{U}$ con

$$\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}([\eta]) = 0 \in H^1(\mathcal{B},\mathcal{F}),$$

y por la inyectividad de $\overline{\tau_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}}$, inferimos que $[\eta] = 0$. En particular, si el grupo de cohomología sobre todo recubrimiento es cero entonces $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

Dada una superficie de Riemann X se puede considerar el haz de funciones diferenciables (en el sentido real) $\mathcal{C}^\infty$ con la familia de morfismos dada por la restricción,

$$\mathcal{C}^\infty := \{\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C}) : U \subset X, U \text{ abierto}\}.$$

Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X y tómese $\{\psi_i\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada. Sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{C}^\infty)$ un cociclo. Para cada i,j tenemos que f_{ij} está definida en $U_i \cap U_j$. Sin embargo, las ϕ_j me permiten extender f_{ij} diferenciablemente a U_i considerando $g_{ij} = \psi_j f_{ij}$ que vale cero fuera del soporte de ψ_j que está contenido en U_j.

Por tanto, $\{g_{ij}\}_j$ conforma una familia de funciones diferenciables en U_i y con familia de soportes localmente finita. Puedo definir la función diferenciable en U_i

$$g_i := \sum_{j\in I} g_{ij} = \sum_{j\in I} \psi_j f_{ij}.$$

Observemos que al ser f_{ij} cociclo, tenemos que $f_{ij} = -f_{ji}$ y $f_{ij} = f_{ik} + f_{kj}$, luego

$$\begin{aligned} g_i - g_j &= \sum_{k\in I} \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_{k\in I} \psi_k (f_{ik} + f_{jk}) \\ &= \sum_{k\in I} \psi_k f_{ij} = f_{ij} \cdot \sum_{k\in I} \psi_k = f_{ij}. \end{aligned}$$

Así, f_{ij} es descomponible y por tanto es un 1-coborde. Hemos probado que todo 1-cociclo es 1-coborde, es decir, el grupo de cohomología del recubrimiento $\mathcal{U}$ es cero. Esto es cierto para cualquier recubrimiento, luego

$$H^1(X, \mathcal{C}^\infty) = 0.$$

De igual modo, esto puede hacerse con $\mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}, \mathcal{E}^1$ y $\mathcal{E}^2$ obteniendo el mismo resultado.

Proposición 4.2.3. *En una superficie de Riemann, el grupo de cohomología de orden uno de la superficie con coeficientes en $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{E}^{(1,0)}$, $\mathcal{E}^{(0,1)}$ y $\mathcal{E}^2$ es cero.*

Teorema 4.2.1. *Supongamos que X es una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces,*

1. $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$.
2. $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{U} \in \operatorname{Cov}(X)$. El haz en este caso es la familia de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que son localmente constantes y se pueden identificar sobre cada U_i con un número complejo $c_i \in \mathbb{C}$. Sea (c_{ij}) un 1-cociclo y veamos que es descomponible. Tenemos que

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \hookrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty) = 0$$

luego, todo 1-cociclo c_{ij} se puede ver como un 1-cociclo en $\mathcal{C}^\infty$. Como $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty) = 0$, todo 1-cociclo es descomponible. Como c_{ij} es un 1-cociclo sobre el haz $\mathcal{C}^\infty$, existen $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{C})$ y $f_j \in \mathcal{C}^\infty(U_j, \mathbb{C})$ tales que

$$c_{ij} = f_j - f_i, \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Si probamos que f_i, f_j son constantes habremos terminado, pues c_{ij} sería descomponible en el haz $\mathbb{C}$. Es claro que al tomar derivada exterior

$$df_i = df_j, \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Definimos $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ dada como

$$\omega|_{U_i} = df_i, \quad i \in I,$$

que está bien definida porque en $U_i \cap U_j$ tenemos $df_i = df_j$. En particular, si $x \in X$, existe U_i, $i \in i$ tal que $x \in U_i$. Entonces,

$$d\omega = d^2 f_i(x) = 0.$$

Por tanto, ω es cerrada. Dado que X es simplemente conexa, toda 1-forma cerrada es exacta y por tanto, existe una $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que $\omega = df$. Definimos para cada $i \in I$, $c_i := f_i - f|_{U_i}$. De este modo

$$dc_i = df_i - df|_{U_i} = df_i - df_i = 0.$$

Por tanto c_i es constante en cada U_i, es decir, es una 0-cadena en el haz $\mathbb{C}$. Finalmente

$$c_i - c_j = f_i - f_j = c_{ij}.$$

Hemos probado que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$. Como el recubrimiento es arbitrario, se cumple que

$$H^1(X, \mathbb{C}) = 0.$$

2. Sea $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$. De nuevo, podemos ver $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ y todo 1-cociclo en el haz $\mathbb{Z}$ se descompone en el haz $\mathbb{C}$, es decir, dado $a_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, existen números complejos c_i, c_j tales que

$$a_{ij} = c_i - c_j, \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Como $a_{jkj} \in \mathbb{Z}$, $\exp(2\pi i a_{jk}) = 1$ y por tanto $\exp(2\pi i c_j) = \exp(2\pi i c_k)$ en cada $U_j \cap U_k$. Al ser X conexo se debe dar

$$\exp(2\pi c_j) = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \forall j \in I$$

Sea $c \in \mathrm{Log}(2\pi i \alpha)$, esto es, $\exp(2\pi i c) = \alpha$. Entonces si definimos

$$a_j := c_j - c,$$

se cumple que

$$a_i - a_j = c_i - c_j = a_{ij}.$$

Finalmente, probamos que a_j es entero,

$$\exp(2\pi i a_j) = \exp(2\pi i c_j) \exp(-2\pi i c) = \alpha/\alpha = 1.$$

Por tanto $a_j \in \mathbb{Z}$.

□

Una forma muy práctica de calcular grupos de cohomología es mediante recubrimientos de Leray. El siguiente resultado puede consultarse en [7, Teorema 12.8].

Teorema 4.2.2 (Leray)**.** *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de X tal que*

$$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall i \in I.$$

Entonces

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Al recubrimiento $\mathcal{U}$ se le dice recubrimiento de Leray.

4.3. El grupo de cohomología de orden cero

Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X y sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X. De igual modo, tenemos

$$Z^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \ker(\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})),$$

y definimos $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := 0$. De este modo, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Sea (f_i) una 0-cocadena, entonces

$$\delta((f_i)) = (f_j - f_i) = 0 \Longleftrightarrow f_i = f_j, \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Por la definición de haces, existe $f \in \mathcal{F}(X)$, tal que $f|_{U_k} = f_k$ para todo $k \in I$. Por tanto, tenemos un isomorfismo natural

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

De este modo, definimos de manera más conveniente (porque no depende del $\mathcal{U}$)

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X).$$

4.4. Morfismos de haces y cohomología

Respecto de la cohomología, los morfismos de haces tienen un buen comportamiento, gracias al carácter funtorial de todo lo dicho. Sea α un morfismo entre haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Para el grupo de cohomología de orden cero, podemos hacer lo siguiente

$$\alpha^0 : H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}), \quad \alpha^0 = \alpha(X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X).$$

Para el grupo de cohomología de orden uno, debemos construir

$$\alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G})$$

recubrimiento a recubrimiento. Sea $\mathcal{U} \in \operatorname{Cov}(X)$. Definimos

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}), \quad (f_{ij}) \longmapsto (\alpha(f_{ij})).$$

esta aplicación está bien definida pues estamos trabajando con el mismo recubrimiento en ambos grupos de cocadenas. Además, la aplicación anterior α^1 asigna 1-cociclos a 1-cociclos y 1-cobordes a 1-cobordes. Así se induce (por construcción) una aplicación

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Dado que esta aplicación se puede construir para todo recubrimiento, tomando el límite del diagrama obtenemos una aplicación

$$\alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}).$$

El Teorema más importante respecto a nuestros intereses es el siguiente, cuya demostración puede verse en [7, Teorema 15.12] y [7, Teorema 15.13]

Teorema 4.4.1. *Toda sucesión exacta corta de haces $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ induce una sucesión exacta larga en grupos de cohomología,*

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathcal{H}) & H^1(X,\mathcal{G}) \arrow[l, "\beta^1"] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[l, "\alpha^1"] \\
H^0(X,\mathcal{H}) \arrow[urr] & H^0(X,\mathcal{G}) \arrow[l, "\beta_0"'] & H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[l, "\alpha_0"']
\end{tikzcd}$$

En particular, si $H^1(X,\mathcal{G})=0$*, entonces*

$$H^1(X,\mathcal{F})\cong \mathcal{H}(X)/\beta\left(\mathcal{G}(X)\right).$$

Finalizamos la sección con un teorema de naturalidad.

Teorema 4.4.2. *Los grupos de cohomología se preservan mediante isomorfismos de haces.*

4.5. Cohomología de deRahm

En toda superficie de Riemann (y en cualquier variedad diferenciable) toda 1-forma exacta es cerrada. Como ya vimos, el recíproco no es siempre cierto (aunque sí es cierto de manera local), y bajo ciertas condiciones (como la simple-conexión) sí es cierto (de manera global). De forma natural surge el estudio de los siguiente grupos.

Sea X una superficie de Riemann. Recordemos que el *primer grupo de cohomología de deRham* viene dado como

$$H^1_{Rh}(X):=\frac{\left\{\omega\in\mathcal{E}^1(X): d\omega=0\right\}}{\left\{\omega\in\mathcal{E}^1(X): \exists f\in\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}) \text{ con } \omega=df\right\}}.$$

Esto es, 1-formas diferenciables cerradas módulo 1-formas diferenciables exactas.

Si X es simplemente conexa toda 1-forma cerrada tiene primitiva, luego $H^1_{Rh}(X)$ es cero.

Teorema 4.5.1. *En toda superficie de Riemann* X *se satisface*

$$H^1(X,\mathbb{C})\cong H^1_{Rh}(X).$$

Demostración. Consideramos la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow\mathbb{C}\xrightarrow{i}\mathcal{C}^\infty\xrightarrow{d}\mathcal{Z}\longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{Z}:=\ker(d:\mathcal{E}^1\longrightarrow\mathcal{E}^2)$. Dado que $H^1(X,\mathcal{C}^\infty)=0$ (Proposición 4.2.3), el Teorema 4.4.1 nos dice que

$$H^1(X,\mathbb{C})\cong\mathcal{Z}(X)/d\left(\mathcal{C}^\infty(X)\right)\overset{\text{def.}}{=}H^1_{Rh}(X)$$

□

4.6. Resolución de la ecuación inhomogenea de Cauchy

Esta sección está inspirada en [7] y [16]. Dada una superficie de Riemann X y $\mathcal{O}$ el haz de funciones holomorfas en X con valores en $\mathbb{C}$, se verifica que $H^1(X,\mathcal{O})$ es el grupo trivial. Para ello abordamos el problema de resolver *la ecuación inhomogenea de Cauchy-Riemann*, es decir, dada $f:X\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa encontrar las soluciones de

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=g,\quad g\in\mathcal{C}^\infty(X).$$

Lema 4.6.1. *Dada* $g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ *diferenciable de soporte compacto, la ecuación*

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=g,$$

admite solución diferenciable en todo $\mathbb{C}$*. Una solución de esta ecuación es la dada por*

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\quad f(w):=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{g(z)}{z-w}dxdy.$$

Demostración. Consideramos la función

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(w) := -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z-w} dxdy.$$

Observemos que la función f tiene singularidades cuando $w = z$. Para estudiar la convergencia de la integral vamos a realizar un cambio de variables $z = w + re^{i\theta}$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} f(w) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} \frac{g\left(w + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} g\left(w + re^{i\theta}\right) e^{-i\theta} dr d\theta. \end{aligned}$$

Dado que g tiene soporte compacto, existe $R > 0$ tal que

$$\operatorname{sop}(g) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\} = D(0, R),$$

por tanto basta integrar sobre tal disco

$$f(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} g\left(w + re^{i\theta}\right) e^{-i\theta} dr d\theta.$$

Por el Teorema de Derivación Bajo el signo integral y volviendo a coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} \frac{\partial g\left(w + re^{i\theta}\right)}{\partial \overline{w}} e^{-i\theta} dr d\theta = -\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,R)} \frac{\partial g(w+z)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{z} dxdy.$$

Escribimos

$$D(0, R) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A\left(0; \frac{1}{n}, R\right) \equiv \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

donde $A(0; 1/n, R)$ es el anillo de centro cero y radios $1/n$ y R. Dado que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$, es decir, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es expansiva, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,R)} \frac{\partial g(w+z)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{z} dxdy = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\pi} \iint_{A_n} \frac{\partial g(w+z)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{z} dxdy.$$

En el abierto $\mathbb{C}^*$, la simetría de las variables nos dice que

$$\frac{\partial g(w+z)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{z} = \frac{\partial g(w+z)}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{g(w+z)}{z}\right)$$

y por la fórmula de cambio de variables para 2-formas

$$dz \wedge \overline{z} = -2i dx \wedge dy,$$

lo que nos permite poner

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{g(w+z)}{z}\right) dz \wedge d\overline{z}. \tag{4.1}$$

Vamos a usar el Teorema de Stokes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\omega \in \mathcal{E}^1(A_n)$, donde

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{g(w+z)}{z} dz.$$

Además

$$d\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{g(w+z)}{z}\right) dz \wedge d\overline{z}.$$

Por lo tanto, llevando esto a la fórmula (4.1) y utilizando el Teorema de Stokes

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) = -\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} d\omega = -\lim_{n\to\infty}\int_{\partial A_n}\omega.$$

El Ejemplo 2.4.1 nos daba que la orientación en el borde del anillo A_n

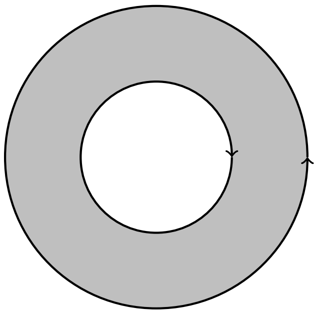


Figura 4.1: Orientación en ∂A_n.

Por lo tanto

$$\int_{\partial A_n}\omega = \int_{C(0,R)}\omega - \int_{C(0,1/n)}\omega \overset{(*)}{=} -\int_{C(0,1/n)}\omega,$$

$(*)$ g tiene soporte compacto contenido en $D(0,R)$, luego $g|_{C(0,R)} \equiv 0$.

Haciendo $z = w + \frac{1}{n}e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) &= \lim_{n\to\infty}\int_{C(0,1/n)}\omega = \lim_{n\to\infty}\int_{C(0,1/n)}\frac{1}{2\pi i}\frac{g(w+z)}{z}dz\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(w+\frac{1}{n}e^{i\theta}\right)d\theta.\end{aligned}$$

Dado que g tiene soporte compacto $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{C})} < \infty$. En particular, para todo $\theta \in [0,2\pi]$ y todo $w \in \mathbb{C}$,

$$g\left(w+\frac{1}{n}e^{i\theta}\right) \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{C})} < \infty.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada, para todo $w \in \mathbb{C}$, podemos permutar límite e integral y utilizar la continuidad de la función g,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(w+\frac{1}{n}e^{i\theta}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty} g\left(w+\frac{1}{n}e^{i\theta}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(w)d\theta = g(w).\end{aligned}$$

□

Observación 4.6.1. Las soluciones no son únicas, basta sumar una función holomorfa en X, dado que si h es holomorfa entonces $\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 0$. Esta idea la vamos a usar en el siguiente resultado a demostrar.

Podemos suprimir la condición de soporte compacto en g cuando la superficie X es un disco $D(0, R)$. La demostración puede consultarse en [7, Teorema 13.2].

Teorema 4.6.1. *Sea $X = D(0, R)$ con $R \in (0, \infty]$ y sea g diferenciable en X, entonces la ecuación inhomogénea de Cauchy-Riemann admite solución diferenciable en X.*

Demostración. Vamos a usar un proceso exhautivo. Consideramos $R \in (0, \infty]$ y $X = D(0, R)$. Sea $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ una sucesión de números positivos que converge a R y tal que $R_n < R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$X_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\} = D(0, R_n).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el Teorema de Urysohn diferenciable nos permite elegir una función $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ tal que

$$\psi_n|_{X_n} = 1, \quad \mathrm{sop}(\psi_n) \subset X_{n+1} \text{ compacto.}$$

Definimos

$$g_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g_n := g \cdot \psi_n.$$

La podemos definir en todo $\mathbb{C}$ precisamente porque la extendemos por cero, en virtud de la compacidad del soporte de ψ_n. Como g_n es una función definida en todo $\mathbb{C}$ y de soporte compacto, el Lema 4.6.1 nos dice que existe una función $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable y tal que

$$\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} = g_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, como $g_n|_{X_n} = \psi_n|_{X_n} \cdot g|_{X_n} = g|_{X_n}$, tenemos

$$\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} = g, \quad \text{en } X_n. \tag{4.2}$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} - f_n$ es holomorfa en X_n. En efecto, como es diferenciable, basta comprobar que está en el número de $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$. Por (4.2)

$$\frac{\partial (f_{n+1} - f_n)}{\partial \overline{z}} = g - g = 0, \quad \text{en } X_n.$$

- Dado que $f_{n+1} - f_n$ es holomorfa en X_n, que es un disco, podemos considerar la sucesión de polinomios de Taylor $\{P_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente por compactos del disco X_n hacia $f_{n+1} - f_n$. Asociado a $\varepsilon_n = 1/2^n$ y al compacto $\overline{X_{n-1}} \subset X_n$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| P_{k_n}^{(n)} - (f_{n+1} - f_n) \right\|_{L^\infty(\overline{X_{n-1}})} < \frac{1}{2^n}.$$

  Denotamos P_n al polinomio $P_{k_n}^{(n)}$ con la propiedad anterior.

Definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$f|_{X_n} := f_n + \sum_{m\geq n} (f_{m+1} - f_m - P_m) - \sum_{m=1}^{n-1} P_m.$$

Veamos que f está bien definida. Sólo tenemos que comprobar que la serie converge uniformemente por compactos de X. En efecto, por el criterio de la mayorante de Weierstrass sobre cada $\overline{X_{m-1}}$ (que recubren a X)

$$|f_{m+1} - f_m - P_m|(x) \leq \|P_m - (f_{m+1} - f_m)\|_{L^\infty(\overline{X_{m-1}})} < \frac{1}{2^m}, \quad \forall x \in \overline{X_{m-1}},$$

y la serie numérica $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{2^m}$ es convergente. La serie

$$\sum_{m\geq n} (f_{m+1} - f_m - P_m)$$

está bien definida y converge a una función holomorfa, puesto que cada término de la serie es una función holomorfa en X. Escribamos

$$h : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h|_{X_n} := \sum_{m\geq n} (f_{m+1} - f_m - P_m), \quad h \in \mathcal{O}(X).$$

Entonces en cada X_n,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial P_m}{\partial \overline{z}} \\ &= g + 0 + 0 = g, \end{aligned}$$

puesto que cada polinomio P_m y h son funciones holomorfas en X_n. En consecuencia, f es la solución buscada.

□

Definición 4.6.1. Dado un abierto D del plano complejo y $g \in \mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{C})$, definimos la *ecuación de Laplace* asociada al dato g como

$$\Delta f = g,$$

donde Δ es el operador laplaciano usual del plano complejo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}.$$

Corolario 4.6.1. *Sea $X = D(0, R)$ con $R \in (0, \infty]$. Dada una función diferenciable $g \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$, la* ecuacion de Laplace

$$\Delta f = g$$

admite solución diferenciable en X.

Demostración.

- Como $\overline{g}$ es diferenciable sobre X, el Teorema 4.6.1 nos asegura la existencia de $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = \overline{g}.$$

- La función $\overline{\varphi}$ es diferenciable en X. Usando a $\overline{\varphi}$ como función dato de la ecuación inhomogénea, el Teorema 4.6.1 nos asegura la existencia de una función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = \overline{\varphi}.$$

Consideramos $f := \frac{1}{4}\psi \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned}\Delta f &= 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}\right) \\ &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}} = g.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.6.2. *Sea $X = D(0,R)$ con $R \in (0,\infty]$. Entonces $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$ y $H^1(\overline{\mathbb{C}},\mathcal{O}) = 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de $D(0,R)$. Sea (f_{ij}) un 1-cociclo asociado al recubrimiento $\mathcal{U}$, $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$. Como toda función holomorfa es diferenciable en el sentido real, tenemos que

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) \hookrightarrow Z^1(\mathcal{U},\mathcal{C}^\infty).$$

La Proposición 4.2.3 nos dice que $H^1(X,\mathcal{C}^\infty) = 0$, luego $H^1(\mathcal{U},\mathcal{C}^\infty) = 0$, esto implica que todo 1-cociclo es 1-coborde y en consecuencia (f_{ij}) es descomponible con coeficientes en $\mathcal{C}^\infty$. Existen $(g_i),(g_j) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{C}^\infty)$ tales que

$$f_{ij} = g_i|_{U_i\cap U_j} - g_j|_{U_i\cap U_j}. \tag{4.3}$$

Para cada $i,j \in I$ tenemos que $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, por lo tanto

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \forall i,j \in I.$$

Aplicando el operador $\left.\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right|_{U_i\cap U_j}$ en la expresión (4.3), obtenemos que para todo $i,j \in I$, se satisface

$$\frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z}}, \quad \text{en } U_i \cap U_j. \tag{4.4}$$

Definimos

$$h : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h|_{U_i} = \frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}}.$$

h está bien definida por (4.4). Además, como $\frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}}$ es diferenciable en cada U_i, h es diferenciable en X. Asociada a la función dato $h \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, el Teorema 4.6.1 nos asegura la existencia de una función diferenciable $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = h.$$

Para cada $i \in I$, definimos

$$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_i := g_i - g|_{U_i}.$$

La función f_i es diferenciable en U_i. Además,

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = h - h = 0, \quad \text{en } U_i.$$

Por tanto, para cada $i \in I$, f_i es holomorfa en U_i. En consecuencia, $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Finalmente, observemos que

$$f_{ij} = g_i - g_j = (f_i - f) - (f_j - f) = f_i - f_j, \quad \text{en } U_i \cap U_j$$

y por tanto, f_{ij} es descomponible dentro de $\mathcal{O}$. Esto prueba que $H^1(\mathcal{U}, X, \mathcal{O}) = 0$, para todo recubrimiento por abiertos de X. Por tanto, $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Pasamos al caso $\overline{\mathbb{C}}$. Sea $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ y $V = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$. Ambos son abiertos de $\overline{\mathbb{C}}$ biholomorfos al disco, por lo que $H^1(U, \mathcal{O}) = H^1(V, \mathcal{O}) = 0$. Por tanto, U y V son un recubrimiento de Leray de $\overline{\mathbb{C}}$. Calculamos $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, donde $\mathcal{U} = \{U, V\}$. El recubrimiento consta de dos abiertos, luego las 1-cocadenas son

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U \cap V) \times \mathcal{O}(U \cap V) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \times \mathcal{O}(\mathbb{C}^*),$$

es decir, pares (f_{12}, f_{21}) tal que $f_{12}, f_{21} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Consideramos el desarrollo de Laurent de f_{ij},

$$f_{ij}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Definimos $f_i = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, que es holomorfa en $V = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ y $f_j = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$, que es holomorfa en $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Finalmente,

$$f_{ij} = f_i - f_j, \quad \text{en } U \cap V = \mathbb{C}^*.$$

Hemos probado que todo 1-cociclo relativo al recubrimiento $\mathcal{U}$, es descomponible, y por tanto $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$. Por el Teorema de Leray se concluye que $H^1(\overline{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$. □

Una versión más general es el siguiente resultado, que probaremos más adelante en el Corolario 7.3.1.

Teorema 4.6.3. *Una superficie de Riemann abierta X cumple $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.*

Usando la sucesión exacta de un haz, podemos hallar grupos de cohomología.

Teorema 4.6.4 (Dolbeault)**.** *Sea X una superficie de Riemann X. Entonces,*

1. $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/\overline{\partial}\,(\mathcal{C}^\infty(X))$.
2. $H^1(X, \Omega^1) \cong \mathcal{E}^2(X)/d\left(\mathcal{E}^{(1,0)}(X)\right)$.

Demostración. La Proposición 4.2.3 nos dice que $H^1(X, \mathcal{C}^\infty) = H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0$. Estamos en las condiciones de aplicar la segunda parte del Teorema 4.4.1.

1. Consideramos
$$\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)}$$
y el primer apartado queda probado.

2. Consideramos
$$\Omega^1 \hookrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^2(X)$$
y el segundo apartado queda probado.

□

Capítulo 5

Exhauciones mediante abiertos Runge

Un gran herramienta en la Teoría de Superficies de Riemann es la aproximación de funciones holomorfas en un dominio a través de funciones que sí están definidas en todo el espacio. La forma de "aproximar" que buscamos es la de la convergencia uniforme por compactos, usualmente trabajada en variable compleja.

5.1. Motivación de los abiertos Runge

Debemos preguntarnos que condiciones tenemos que pedirle a nuestro espacio de partida para que sea posible la aproximación buscada. Cuando trabajamos con una función holomorfa en un disco, es claro que podemos aproximarla uniformemente por compactos por funciones definidas en todo el espacio, de hecho, podemos tomar la sucesión de polinomios de Taylor. esta técnica fue usada, por ejemplo, en la demostración del Teorema 4.6.1.

Consideramos $\mathbb{D}^*$ el disco unidad punteado,

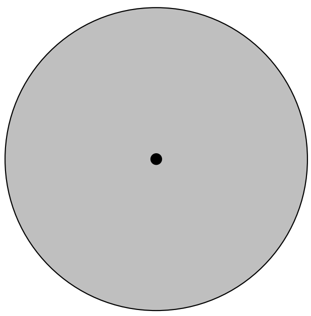


Figura 5.1: Disco unidad punteado $\mathbb{D}^*$.

Sea la función $f(z) = \frac{1}{z}$ definida en $\mathbb{C}^*$. Es claro que f es holomorfa en $\mathbb{D}^*$. ¿Podemos aproximar f mediante una sucesión de funciones enteras? Supongamos que existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones enteras que converge uniformemente por compactos de $\mathbb{D}^*$ hacia f. Sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1/2)} \frac{dz}{z} = 1.$$

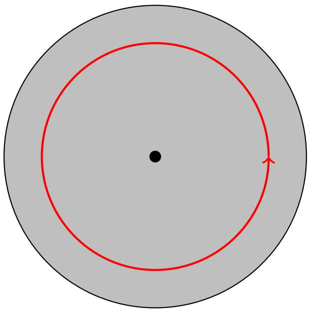


Figura 5.2: Circunferencia $C(0, 1/2)$

Por otra parte, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones enteras, que es simplemente conexo, por consiguiente, cada f_n admite una primitiva F_n en $\mathbb{C}$; lo que equivale a que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1/2)} f_n(z)dz = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $C(0, 1/2)$ es un compacto de $\mathbb{D}^*$, entonces $\{f_n\} \to f$ uniformemente sobre el compacto $C(0, 1/2)$ y podemos permutar límite e integral

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1/2)} f_n(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1/2)} \frac{dz}{z} = 1,$$

que es una contradicción. Por tanto, la función f no puede aproximarse por funciones enteras.

La clave ha sido tomar un punto de una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus D$ acotada, rodearla por un lazo dentro de D e integrar. Cuando trabajamos con dominios Runge, la anterior técnica no la vamos a poder realizar y por tanto, quedará abierta (en un principio) la pregunta de si podemos realmente aproximarlas por funciones holomorfas.

5.2. Envolvente topológica

Vamos a necesitar recubrimientos de una superficie de Riemann un tanto especiales. Las definiciones que vamos a dar están fuertemente emparentadas con ciertas nociones de las Álgebras de Banach.

Definición 5.2.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff y sea $A \subset X$. Denotamos por $\mathfrak{h}_X(A)$ a la unión de A con todas las componentes conexas de $X \setminus A$ que son relativamente compactas en X y la llamaremos *envolvente topológica de A en X*. Un subconjunto A de X se dirá *Runge* si $\mathfrak{h}_X(A) = A$, es decir, $X \setminus A$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en X.

Ejemplo 5.2.1. Un disco $\mathbb{D}$ es Runge, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ es conexo no acotado. Observemos en cambio que $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ no es Runge y

$$\mathfrak{h}_X(\mathbb{D}^*) = \mathbb{D}.$$

Lo que hemos hecho simplemente es *rellenar los agujeros de* $\mathbb{D}^*$.

Podemos pensar en $\mathfrak{h}_X$ como una aplicación

$$\mathfrak{h}_X : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X),$$

donde $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto partes de X. Enunciamos un Lema puramente topológico que nos será de gran ayuda.

Lema 5.2.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sean A, B dos subconjuntos de X conexos tales que $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Entonces $A \cup B$ es conexo.*

Proposición 5.2.1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Se tienen las siguientes aserciones.*

1. *Para todo $A \subset X$ se tiene que $\mathfrak{h}_X(\mathfrak{h}_X(A)) = \mathfrak{h}_X(A)$.*
2. *$\mathfrak{h}_X$ es monótona creciente.*
3. *Si A es conexo entonces $\mathfrak{h}_X(A)$ es conexo.*
4. *Si X es localmente conexo y A es cerrado entonces $\mathfrak{h}_X(A)$ es cerrado.*
5. *Si X es conexo, localmente conexo, localmente compacto y $A \subset X$ es un compacto no vacío de X, entonces $\mathfrak{h}_X(A)$ es compacto.*

Demostración. 1. Sean $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ las componentes conexas de $X \setminus A$ y $\{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ aquellas que sean relativamente compactas en X. Por definición

$$\mathfrak{h}_X(A) = A \cup (\cup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha)\,.$$

Por lo tanto

$$X \setminus \mathfrak{h}_X(A) = \cup_{\alpha\in\Lambda\setminus\Gamma} C_\alpha,$$

es decir, $X \setminus \mathfrak{h}_X(A)$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en X. Por definición

$$\mathfrak{h}_X(\mathfrak{h}_X(A)) = \mathfrak{h}_X(A).$$

2. Sean $B \subset A \subset X$. Veamos que $\mathfrak{h}_X(B) \subset \mathfrak{h}_X(A)$. Sea $x \in \mathfrak{h}_X(B)$.

   a) Si $x \in B \subset A \subset \mathfrak{h}_X(A)$.

   b) Si $x \in C_{\beta_0}$, con C_{β_0} componente conexa de $X \setminus B$ relativamente compacta en X.

      1) Si para toda componente conexa C_α de $X \setminus A$ se cumple $C_\alpha \cap C_{\beta_0} = \varnothing$ entonces $x \notin X \setminus A$ y por tanto, $x \in A \subset \mathfrak{h}_X(A)$.

      2) Si existe C_{α_0} componente conexa de $X \setminus A$ tal que $x \in C_{\alpha_0}$. Por definición de componente conexa, al darse $X \setminus A \subset X \setminus B$ y estar $x \in C_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0}$, necesariamente $C_{\alpha_0} \subset C_{\beta_0}$, y por tanto, C_{α_0} es relativamente compacta en X. Esto prueba que $x \in \mathfrak{h}_X(A)$.

3. Sean $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ las componentes conexas de $X \setminus A$ relativamente compactas en X. Por definición,

$$\mathfrak{h}_X(A) := A \dot\cup (\dot\cup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (C_\alpha \dot\cup A)\,.$$

Por la maximalidad de las componentes conexas y del Lema 5.2.1 inferimos que $\overline{C}_\alpha \cap C_{\alpha'}$ es siempre vacío, para cualesquiera $\alpha, \alpha' \in \Lambda$ distintos. Esto nos conduce,

$$\varnothing \neq \overline{C}_\alpha^{\mathfrak{h}_X(A)} = \overline{C}_\alpha \cap \mathfrak{h}_X(A) = \overline{C}_\alpha \cap (A \dot\cup (\dot\cup_{\beta\in\Lambda} C_\beta)) = \overline{C}_\alpha \cap A.$$

El Lema 5.2.1 afirma que para cada $\alpha \in \Lambda$, el conjunto

$$\Sigma_\alpha := C_\alpha \dot{\cup} A,$$

es conexo. Finalmente, la familia $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de conexos de X tales que

$$\varnothing \neq A \subset \cap_{\alpha\in\Lambda}\Sigma_\alpha.$$

Por tanto, $\mathfrak{h}_X(A) = \cup_{\alpha\in\Lambda}\Sigma_\alpha$ es conexo.

4. Supongamos que A es cerrado de X. Consideramos $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ las componentes conexas de $X \setminus A$ y por $\{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ aquellas que son relativamente compactas en X. Como X es localmente conexo las componentes conexas de $X \setminus A$ son abiertas en $X \setminus A$. Como A es cerrado de X entonces $X \setminus A$ es abierto de X. Ahora bien, cada C_α es abierta en $X \setminus A$ y este último abierto en X. En consecuencia $\{C_\alpha\}$ son abiertas en X. Finalmente,

$$X \setminus \mathfrak{h}_X(A) = \cup_{\alpha\in\Lambda\setminus\Gamma}C_\alpha,$$

que es unión de abiertos de X. Así, $X \setminus \mathfrak{h}_X(A)$ es abierto y por tanto $\mathfrak{h}_X(A)$ cerrado.

5. Supongamos que A es compacto y de nuevo, denotamos por $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ las componentes conexas de $X \setminus A$ y por $\{C_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ aquellas que son relativamente compactas en X. Para cada $a \in A$ consideramos U_a un entorno relativamente compacto de A, que siempre existe por ser X localmente compacto. De este modo, $\{U_a\}_{a\in A}$ es un recubrimiento por abiertos de A. Por la compacidad de A, tomamos un número finito de ellos $\{U_{a_i}\}_{i=1}^r$. Sea $U = \cup_{i=1}^r U_{a_i}$. Observemos que U es relativamente compacto, puesto que al tratarse de una unión finita de conjuntos relativamente compactos.

Las componentes conexas de $X \setminus A$ intersecan a $\overline{U}$. En efecto, si $C_\alpha \cap \overline{U} = \varnothing$ para cierto α entonces $C_\alpha \subset X \setminus \overline{U}$. Como $A \subset U$, entonces

$$\overline{C_\alpha} \subset \overline{X \setminus \overline{U}} = \operatorname{Int}(X \setminus U) \subset X \setminus U \subset X \setminus A.$$

Como C_α es conexo, $\overline{C_\alpha}$ también lo es y además $\overline{C_\alpha} \subset X \setminus A$. En particular es componente conexa de $X \setminus A$. Ahora bien, $C_\alpha \subset \overline{C_\alpha}$. Por definición de componente conexa $C_\alpha = \overline{C_\alpha}$, es decir, C_α es cerrada. Dado que X es localmente conexo, C_α es abierta. Por la conexión de X, llegamos a que C_α es el total y por tanto $A = \varnothing$, que es una contradicción.
Esto prueba que todas las componentes conexas de $X \setminus A$ cortan a $\overline{U}$. Sean $\{C_{\gamma_i}\}_{i=1}^s$ las componentes conexas $X \setminus A$ relativamente compactas en X y que cortan a ∂U (que es compacto). Entonces, las $\{C_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tienen dos opciones, o cortan a ∂U o están contenidas en U. De este modo, al darse $A \subset U$,

$$\mathfrak{h}_X(A) = A \cup (\cup_{\gamma\in\Gamma}C_\gamma) \subset U \cup C_{\gamma_1} \cup \cdots \cup C_{\gamma_s} \subset \overline{U} \cup \left(\cup_{j=1}^s C_{\gamma_j}\right).$$

Por tanto, $\mathfrak{h}_X(A)$ está contenido en un compacto (unión finita de compactos), al que denotaremos por K, es decir, es $\mathfrak{h}_X(A)$ es relativamente compacto. Como X es Hausdorff y A es compacto entonces A es cerrado. Por lo visto antes, $\mathfrak{h}_X(A)$ es cerrado. Además $\mathfrak{h}_X(A)$ es un cerrado que está contenido en un compacto, por lo tanto es compacto.

□

Corolario 5.2.1. *Sea X un espacio topológico ANII, conexo, localmente conexo, no compacto y localmente compacto. Bajo estas condiciones, existe una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

1. *$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recubre a X.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.*
3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathfrak{h}_X(K_n) = K_n$.*

Demostración. Dado que X es localmente compacto, para cada $x \in X$, existe K_x entorno compacto de x, es decir, K_x es compacto de X y existe un abierto U_x que contiene a x tal que $x \in U_x \subset K_x$. Considero $\{\overset{\circ}{K}_x\}_{x\in X}$ que es un recubrimiento de X por abiertos. Por ser X un espacio topológico ANII, puede extraerse un recubrimiento numerable, al que denotamos $\{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ recubre a X. Por inducción hacemos la construcción. Definimos $K_0 := K'_0$. Supuesto que tenemos $K_0, \ldots, K_n$ en las condiciones del enunciado consideramos un compacto K tal que $K_n \cup K_{n'} \subset K^\circ$. Sea $K_{n+1} := \mathfrak{h}_X(K)$. Por construcción cumple las propiedades del enunciado. □

Los resultados previos eran para espacios topológicos con una serie de propiedades puramente topológicas. La estructura de superficie de Riemann la añadimos a continuación, para que las fronteras de los compactos anteriores sean regulares.

Lema 5.2.2. *Sea X una superficie de Riemann y K_1, K_2 compactos de X tales que $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$ y $\mathfrak{h}_X(K_2) = K_2$. Bajo estas condiciones, existe un abierto D de X tal que $K_1 \subset D \subset K_2$.*

Demostración. Dado que K_1 está contenido en el interior de K_2, dado $p \in \partial K_1$, existe un entorno coordenado compacto U_p conforme al disco tal que $U_p \cap K_1 = \varnothing$ y p en el interior de U_p. Por compacidad, tomamos $\{U_k\}_{k=1}^r$ que recubren a ∂K_2. Definimos

$$D := K_2 \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r).$$

Por construcción, D es abierto. Dado que los U_k no cortan a K_1, se cumple $K_1 \subset D \subset K_2$. Veamos que D es Runge. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ todas las componentes conexas de $X \setminus K_2$. Dado D_j, tenemos que $U_j \cap (X \setminus K_2) \neq \varnothing$. En efecto, si la intersección fuera vacía, entonces $U_j \subset K_2$. En particular, $p_j \in U_j$ sería interior a K_2, lo cual es falso, puesto que p_j estaba en la frontera de K_2.

Por otro lado $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de $X \setminus K_2$, luego para cada U_j

$$\varnothing \neq U_j \cap (X \setminus K_2) = \cup_\alpha (C_\alpha \cap U_j),$$

por lo que cada U_j corta al menos a una componente conexa de $X \setminus K_2$. Ahora bien,

$$X \setminus D = (X \setminus K_2) \cup U_1 \cup \cdots \cup U_r,$$

y todos los U_j son conexos, cortando alguna componente conexa de $X \setminus K_2$, por tanto, las componentes conexas de $X \setminus D$ serán a lo sumo las de $X \setminus K_2$, las cuales, son todas no relativamente compactas en X. Por tanto, todas las componentes conexas de $X \setminus D$ son no son relativamente compactas en X, es decir D es Runge. □

Teorema 5.2.1. *Sea X una superficie de Riemann y D un abierto Runge de X. Entonces las componentes conexas de D son Runge. En particular, las componentes conexas son dominios Runge.*

Demostración. Sean $\{C_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ las componentes conexas de D, que son abiertas en X, por ser D abierto de X. Sean $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ las componentes conexas de $X \setminus D$, que son todas cerradas pero no relativamente compactas pues D es Runge. Dado que para cada δ y δ' distintos en Δ se cumple[1] que $\overline{C_\delta} \cap C_{\delta'} = \varnothing$, deducimos que para todo δ se satisface

$$\overline{C_\delta} \cap (X \setminus D) \neq \varnothing. \tag{5.1}$$

Además, para cada $\delta_0 \in \Delta$ y cada componente conexa C de $X \setminus C_{\delta_0}$, se cumple

$$C \cap (X \setminus D) \neq \varnothing.$$

En efecto, si dicha intersección fuese vacía entonces $C \subset D = \dot{\cup}_{\delta\in\Delta} C_\delta$. Como C es conexo, está en una única componente conexa, es decir, $C \subset C_{\delta_1}$ para algún $\delta_1 \neq \delta_0$. C_{δ_1} es abierto de X y C también, por tanto C es abierto de C_{δ_1}. Además, como C es cerrado de X entonces $\overline{C}^{C_{\delta_1}} = \overline{C} \cap C_{\delta_1} = C \cap C_{\delta_1} = C$. Por tanto, C es abierto y cerrado de C_{δ_1}, que es conexo, por tanto $C = C_{\delta_1}$. De este modo, de (5.1) se sigue

$$\varnothing \neq \overline{C_{\delta_1}} \cap (X \setminus D) = \overline{C} \cap (X \setminus D) = C \cap (X \setminus D),$$

que es una contradicción con la hipótesis, por lo que C corta a $X \setminus D$. Finalmente, C necesariamente corta alguna C_α, pues $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es partición de $X \setminus D$. Dado que C es conexo, entonces $C_{\alpha_0} \subset C$ para algún α_0. Dado que C_{α_0} no es relativamente compacta entonces C tampoco lo puede ser. Por tanto, hemos probado que todas las componentes conexas C de $X \setminus C_{\delta_0}$ no son relativamente compactas. Por tanto, C_{δ_0} es Runge, para cada $\delta_0 \in \Delta$.

Finalmente, como X es localmente conexo, las componentes conexas son abiertas y conexas, es decir, dominios. □

Antes de pasar al resultado principal de esta sección, damos un lema puramente topológico.

Lema 5.2.3. *Sea X un espacio Hausdorff, no compacto, localmente compacto y arco conexo. Sea K un compacto de X. Existen K_1, K_2 compactos y conexos de X tales que*

$$K \subset K_1 \subset \mathring{K}_2.$$

Demostración. Construyamos K_1. Dado que X es localmente compacto y arco conexo, para cada $x \in K$ tomamos U_x entorno de X relativamente compacto y conexo. De este modo, $\{U_x\}_{x\in K}$ recubre a K. Por compacidad de K, tómese $U_1, \dots, U_r$ que recubran a K. Dado que la compacidad se preserva por uniones finitas, $\Delta = \cup_{i=1}^r \overline{U_i}$ es compacto. Si Δ es conexo ó $r = 1$, hemos terminado pues por construcción $K \subset \Delta$. Si Δ no es conexo realizamos el siguiente proceso. Tómese $\{x_i\}_{i=1}^r \subset X$ tales que $x_i \in U_i$ para cada $i = 1, \dots, r$. Para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, tómese una curva continua γ_i tal que

$$\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X, \quad \gamma_i(0) = x_i, \quad \gamma_i(1) = x_{i+1}.$$

[1] Usando el Lema 5.2.1 llegaríamos a contradicción con la maximalidad de las componentes conexas

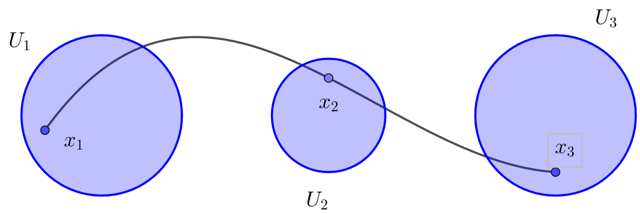


Figura 5.3: Entornos U_i

De este modo, si denotamos $Q_i = \gamma_i([0,1])$, tenemos que Q_i es compacto y por tanto

$$K_1 := \Delta \cup \left(\cup_{i=1}^{r-1} Q_i\right),$$

es compacto. Además es arco conexo. En efecto, sean $p, q \in K_1$.

1. Si p, q están en el mismo $\overline{U_i}$ ó Q_i es trivial, puesto que estos son arco conexos.

2. Si $p \in \overline{U_i}$ y $q \in \overline{U_j}$ con $i < j$. Dado que $\overline{U_i}$ es arco conexo tomamos σ_i que une p y el punto x_i, con traza contenida dentro de $\overline{U_i}$. Sea σ_j la curva que une x_j con q. Sea la curva
$$\delta := \sigma_j * \gamma_{i_1} * \cdots * \gamma_{i_d} * \sigma_i, \quad i-1 = i_1 < \cdots < i_d = j-1$$
Entonces δ une p con q.

3. Los demás casos son completamente análogos.

Construyamos ahora K_2. La idea es similiar, solo que en este caso vamos a necesitar "expandir" la frontera del K_1 previamente construido. Seguimos varios pasos.

1. Denotemos por $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ a la curva
$$\gamma := \gamma_{r-1} * \cdots * \gamma_1,$$
que une x_1 con x_r. Denotemos por $Q := \gamma([0,1])$, que es compacto. Para cada $q \in Q$, tómese un entorno relativamente compacto y arco conexo al que denotamos por V_q. De este modo, por compacidad de Q, podemos encontrar $V_{i_1}, \ldots, V_{i_s}$ que recubren a Q.

2. Para cada $i = 1, \ldots, r$ tenemos que U_i es relativamente compacto, por tanto, no tiene frontera vacía por la conexión y la no compacidad de X. Para cada $i = 1, \ldots, r$, tómese $\{W_{ij}\}_{j=1}^{t_i}$ un recubrimiento finito por abiertos relativamente compactos de ∂U_i, que es compacto.

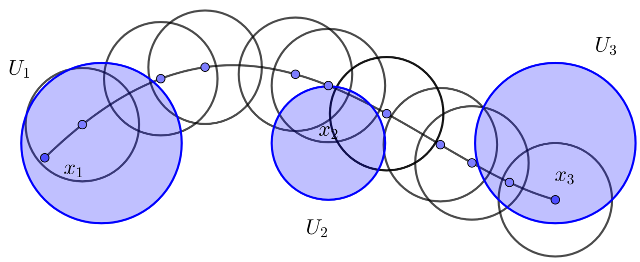


Figura 5.4: Construcción de los entornos

3. Definimos
$$K_2 = \cup_{i=1}^r \left(\cup_{j=1}^{t_i} \overline{W}_{ij}\right) \cup \overline{V}_{i_1} \cup \cdots \cup \overline{V}_{i_s}.$$
El subespacio K_2 es compacto por ser unión finita de compactos. Además K_2 es arco conexo, pues mediante una concatenación de curvas podemos a unir cualesquiera dos puntos. Además, por construcción, dado un punto $x \in K_1$, x está en algún W_{ij} o en algún V_{i_k}. Por tanto,
$$x \in \cup_{i=1}^r \left(\cup_{j=1}^{t_i} W_{ij}\right) \cup V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_s} \subset \overset{\circ}{K}_2,$$
lo que prueba $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$.

□

Es claro que combinando el Lema 5.2.2 y el Corolario 5.2.1 podemos encontrar un recubrimiento expansivo de X por abiertos Runge con frontera diferenciable. Sin embargo, podemos decir más y es que dicho recubrimiento se puede tomar por *dominios Runge*.

Teorema 5.2.2. *Sea X una superficie de Riemann abierta. Existe un recubrimiento expansivo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por dominios Runge relativamente compactos.*

Demostración. Tómese $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos dada por el Corolario 5.2.1. Para construir la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, aplicamos un proceso inductivo.

Caso Base. Fijemos K_1. El Lema 5.2.3 nos dice que podemos tomar R_1 y R_2 compactos y conexos tales que
$$K_1 \subset R_1 \subset \overset{\circ}{R}_2.$$
Dado que R_2 es compacto, entonces $\mathfrak{h}_X(R_2)$ es compacto, y satisface $\mathfrak{h}_X(\mathfrak{h}_X(R_2)) = \mathfrak{h}_X(R_2)$. Asociados al par de compactos R_1 y $\mathfrak{h}_X(R_2)$, el Lema 5.2.2 nos garantiza que podemos encontrar un abierto Runge D_1, con frontera diferenciable.
$$R_1 \subset D_1 \subset \mathfrak{h}_X(R_2).$$

Dado que R_1 es conexo, este estará contenido en una componente conexa X_1 de D_1. Por ser D_1 abierto Runge y X_1 una componente conexa suya, el Teorema 5.2.1 nos dice que X_1 es un dominio Runge. Además, X_1 tiene frontera diferenciable, por ser una componente conexa de D_1. Finalmente, X_1 es relativamente compacto, puesto que

$$\overline{X}_1 \subset \overline{\mathfrak{h}_X(R_2)} = \mathfrak{h}_X(R_2),$$

y $\overline{X}_1$ es un cerrado dentro de $\mathfrak{h}_X(R_2)$, que es compacto. Concluimos que $\overline{X}_1$ es compacto.

Paso inductivo. Supongamos construidos $X_1, \ldots, X_n$ en las condiciones del enunciado. Construyamos X_{n+1}. Consideremos

$$K := K_{n+1} \cup \overline{X}_n,$$

que es compacto, por ser unión finita de compactos. Al ser K un compacto, el Lema 5.2.3 nos dice que existen Q_1 y Q_2 compactos y conexos tales que

$$K \subset Q_1 \subset \mathring{Q}_2 \subset Q_2.$$

Al ser Q_2 un compacto, entonces $\mathfrak{h}_X(Q_2)$ también es compacto. Por el Lema 5.2.2, asociado al par de compactos Q_1 y $\mathfrak{h}_X(Q_2)$, existe un abierto Runge D_{n+1}, con frontera diferenciable

$$Q_1 \subset D_{n+1} \subset \mathfrak{h}_X(Q_2).$$

Dado que Q_1 es conexo, entonces Q_1 estará contenido en una única componente conexa de D_{n+1}. Denotemos por X_{n+1} a la componente conexa que contiene a Q_1. Este X_{n+1} satisface lo siguiente.

1. X_{n+1} es un dominio. Esto se debe a que es una componente conexa, por tanto, abierta y conexa.

2. X_{n+1} es Runge, puesto que es una componente conexa de un abierto Runge (Teorema 5.2.1).

3. X_{n+1} es relativamente compacto. En efecto, al ser $\mathfrak{h}_X(Q_2)$ compacto en un Hausdorff, este es cerrado y por ende,

$$\overline{X}_{n+1} \subset \overline{\mathfrak{h}_X(Q_2)} = \mathfrak{h}_X(Q_2).$$

   Así pues, $\overline{X}_{n+1}$ es un cerrado dentro dentro de un compacto, por tanto, compacto. Esto prueba que X_{n+1} es relativamente compacto.

4. X_{n+1} tiene frontera diferenciable puesto que es la componente conexa de un abierto que tiene frontera diferenciable.

5. $X_n \subset X_{n+1}$. En efecto, se tiene por definición,

$$X_n \subset \overline{X}_n \subset K_{n+1} \cup \overline{X}_n = K \subset Q_1 \subset X_{n+1}.$$

Falta comprobar únicamente que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recubre a X. En efecto, como $K_n \subset X_n$, entonces

$$X = \cup_{n\in N} K_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

□

Capítulo 6

Distribuciones en superficies de Riemann. Lema de Weyl

este capítulo se centra en desarrollar brevemente aspectos básicos de las *distribuciones*. estas nos ayudarán a medir "variaciones" entre funciones diferenciables así como trabajar con los espacios vectoriales $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}), \mathcal{E}^{(1,0)}(X), \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ y $\Omega^1(X)$ mediante operadores. Es por tanto indispensable un manejo del Análisis Funcional. Comenzamos el capítulo definiendo los conocidos espacios L^p.

Definición 6.0.1. Sea D un subconjunto medible del plano complejo. Para cada $0 < p < \infty$, definimos el espacio $L^p(D)$ como

$$L^p(D) := \left\{ f : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \iint_D |f(z)|^p dxdy < \infty \right\} / \sim .$$

donde $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ en casi todo punto de D. Dada $f \in L^p(D)$, definimos

$$\|f\|_{L^p(D)} := \left(\iint_D |f(z)|^p dxdy \right)^{1/p}$$

Si D es abierto, denotamos por $L^p(D, \mathcal{O})$ a

$$L^p(D, \mathcal{O}) := \left\{ f \in \mathcal{O}(D) : \iint_D |f(z)|^p dxdy < \infty \right\}.$$

Notemos que $L^p(D)$ es un espacio vectorial cociente. A las clases de equivalencia $[f] \in L^p(D)$ se las denota simplemente por f. Aún así, se debe tener en cuenta la estructura que tiene. A priori, no podemos decir $L^p(D, \mathcal{O}) \subset L^p(D)$, porque precisamente en $L^p(D)$ hay clases de equivalencias y en $L^p(D, \mathcal{O})$ funciones. Sin embargo, debemos notar que dada $f \in L^p(D, \mathcal{O})$, su clase de equivalencia en $L^p(D)$ es ella misma, es decir

$$[f] = \{f\},$$

esto se debe a que f es holomorfa y el teorema de la identidad nos da que cualquier otra función $g \in \mathcal{O}(D)$ tal que

$$f = g, \quad \text{c.t.p } D$$

necesariamente $f = g$ en todo D. Por lo tanto, podemos ver a $L^p(D, \mathcal{O})$ como un subespacio vectorial de $L^p(D)$, identificando canónicamente a f con su clase de equivalencia, que sólo posee un elemento.

Enunciamos el resultado ampliamente conocido para espacios L^p.

Teorema 6.0.1. *Sea D un medible de $\mathbb{C}$ y sea $0 < p < \infty$.*

1. *$(L^p(D), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$.*
2. *$(L^p(D), d_p)$ es un espacio métrico completo, para $0 < p < 1$, donde*

$$d_p : L^p(D) \times L^p(D) \longrightarrow [0, \infty), \quad d_p(f,g) := \|f - g\|^p_{L^p(D)}.$$

3. *$(L^2(D), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(D)})$ es un espacio de Hilbert complejo, donde*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(D)} = \iint_D f(z)\overline{g(z)}dxdy.$$

4. *$L^p(D, \mathcal{O})$ es un espacio vectorial cerrado de $L^p(D)$. En particular, es espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$, espacio métrico completo para $0 < p < 1$ y espacio de Hilbert complejo para $p = 2$.*

De los espacios $L^p(D)$, el que más nos interesa es $L^2(D)$ junto con $L^\infty(D)$. Introducimos $L^\infty(D)$ a continuación.

Definición 6.0.2. Sea $D \subset \mathbb{C}$ medible y $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Diremos que $M > 0$ es una *cota esencial de f* si

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{para casi todo } z \in D.$$

Al conjunto de cotas esenciales de f lo denotamos por $\operatorname{ess}(f)$. Definimos

$$L^\infty(D) := \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \inf \operatorname{ess}(f) < \infty\} / \sim$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(D)} := \inf \operatorname{ess}(f).$$

Si D es abierto, definimos

$$L^\infty(D, \mathcal{O}) := \{f \in \mathcal{O}(D) : \inf \operatorname{ess}(f) < \infty\}$$

Las mismas consideraciones que las dadas para el caso L^p nos llevan a poder considerar a $L^\infty(D, \mathcal{O})$ como un subespacio vectorial de $L^p(D)$.

Un hecho remarcable es cuando $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua. Al ser f continua, entonces es medible. En este caso, las cotas y cotas esenciales coinciden por ser f continua. En efecto, si M es cota esencial de f entonces el conjunto

$$N := \{z \in D : |f(z)| > M\}$$

es de medida nula. Sea $z_0 \in N$. Dado que f es continua y $|f(z_0)| > M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(z_0, \varepsilon) \subset N$. Ahora bien, la medida de Lebesgue de N es cero y sin embargo la de $D(z_0, \varepsilon)$ es estrictamente positiva, contradicción. Hemos probado que necesariamente $N = \varnothing$ y por tanto M es una cota. Así pues, bajo la continuidad de f, se cumple que

$$\|f\|_{L^\infty(D)} = \inf \operatorname{ess}(f) = \inf \{M > 0 : M \text{ es cota de } f\} = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Si $D = K$ compacto y f es continua en K, entonces

$$\|f\|_{L^\infty(D)} = \max_{z\in K} |f(z)|.$$

En particular, toda función holomorfa en D es continua, por lo tanto, si D es abierto

$$L^\infty(D, \mathcal{O}) = \left\{ f \in \mathcal{O}(D) : \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty \right\}.$$

Teorema 6.0.2. *Dado $D \subset \mathbb{C}$ abierto, se tiene que $(L^\infty(D), \|\cdot\|_{L^\infty(D)})$ es un espacio de Banach. Además, $L^\infty(D, \mathcal{O})$ es un espacio vectorial cerrado de $L^\infty(D)$. En particular, $L^\infty(D, \mathcal{O})$ es un espacio de Banach.*

Como ya advertíamos, $(L^2(D), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(D)})$ es un espacio de Hilbert complejo. Sea $a \in \mathbb{C}$. Veamos que

$$e_n(z) := (z-a)^n, \quad e_n : D(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es un sistema ortogonal de $L^2(D, \mathcal{O})$, con $D = D(a,R)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle_{L^2(D)} &= \iint_{D(a,R)} (z-a)^n \overline{z-a}^m dxdy = \iint_{D(0,R)} z^n \overline{z}^m dxdy \\
&= \iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} \rho^{n+m+1} e^{i\theta(n-m)} d\rho d\theta \\
&= \left(\int_0^R \rho^{n+m+1} d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \right).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta = 2\pi\delta_{nm}.$$

Basta analizar $n = m$

$$\langle e_n, e_n\rangle_{L^2(D)} = 2\pi \int_0^R \rho^{2n+1} d\rho = 2\pi \frac{R^{2n+2}}{2n+2} = \frac{\pi}{n+1} R^{n+1}.$$

esto prueba que $\{e_n\}_{n\geq 0}$ es un sistema ortogonal de $L^2(D, \mathcal{O})$, $D = D(a,R)$ y

$$\|e_n\|_{L^2(D)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} R^{n+1}.$$

Como D es un disco, dada $f \in \mathcal{O}(D)$, podemos considerar su desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^\infty c_n e_n(z), \quad \forall z \in D = D(a,R).$$

En consecuencia, $\{e_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortogonal de $L^2(D, \mathcal{O})$ cuando $D = D(a,R)$. Calculemos $\|f\|_{L^2(D)}$ usando su desarrollo en serie. Entonces, la bilinealidad finita y la continuidad del producto interno, nos permite usar bilinealidad infinita,

$$\|f\|^2_{L^2(D)} = \langle f, f\rangle_{L^2(D)} = \sum_{n,m=0}^\infty c_n \overline{c_m} \langle e_n, e_m\rangle_{L^2(D,\mathcal{O})} = \sum_{n=0}^\infty |c_n|^2 \frac{\pi}{n+1} R^{n+2}.$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \quad \|f\|^2_{L^2(D(a,R))}=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\frac{\pi}{n+1}R^{n+2} \tag{6.1}$$

Una relación importante entre los dos espacios que más nos interesan nos la da el siguiente resultado.

Lema 6.0.1. *Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, $r>0$ y*

$$D_r := \{z\in D : D(z,r)\subset D\}.$$

Entonces, para cada $f\in L^2(D,\mathcal{O})$, se tiene que

$$\|f\|_{L^\infty(D_r)} \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\|f\|_{L^2(D)}.$$

Demostración. Sea $a\in D_r$ y desarrollamos $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$. Entonces,

$$|f(a)|^2=|c_0|^2=\frac{1}{\pi r^2}|c_0|^2\pi r^2 \leq \frac{1}{\pi r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|^2}{n+1}r^{2n+2}=\frac{1}{\pi r^2}\|f\|^2_{L^2(D(a,r))}\leq \frac{1}{\pi r^2}\|f\|^2_{L^2(D)}.$$

Tomando raíces, $|f(a)|\leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(D,\mathcal{O})}$. esta desigualdad es cierta para todo $a\in D_r$, por tanto,

$$\|f\|_{L^\infty(D_r)} := \sup_{a\in D_r}|f(a)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\|f\|_{L^2(D)}.$$

□

Observación 6.0.1. Este lema prueba que la convergencia en $L^2(D,\mathcal{O})$ implica localmente la convergencia uniforme por compactos. En particular, sería una prueba de que $L^2(D,\mathcal{O})$ es un cerrado de $L^2(D)$.

Lema 6.0.2. *Sean D, D' abiertos de $\mathbb{C}$, D' relativamente compacto y tal que $\overline{D'}\subset D$. Dado $\varepsilon>0$ existe un subespacio A_ε cerrado de $L^2(D,\mathcal{O})$ de codimensión finita tal que*

$$\|f\|_{L^2(D')}\leq \varepsilon\|f\|_{L^2(D)}, \quad \forall f\in A_\varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Supongamos que $D\neq\mathbb{C}$, equivalentemente, $\partial D\neq\varnothing$.

Dado que D es abierto y $\overline{D'}\subset D$ entonces $\operatorname{dist}(D',\partial D)>0$. Sean $0<r<\operatorname{dist}(D',\partial D)$ y $\mathcal{U}_r=\left\{D(a,r/2): a\in\overline{D'}\right\}$. Como la familia $\mathcal{U}_r$ recubre a $\overline{D'}$ y este es compacto, existe una subrecubrimiento finito $\mathcal{V}_r=\{D(a_k,r/2): k=1,\dots,m\}$ de $\overline{D'}$. Así pues,

1. Para todo $k=1,\dots,m$, al ser $r<\operatorname{dist}(D,\partial D')$, se tiene $D(a_k,r)\subset D$.

2. Por definición de $\mathcal{V}_r$, tenemos que $D'\subset\cup_{k=1}^m D(a_k,r)$.

Si D es $\mathbb{C}$, la existencia del anterior recubrimiento es inmediata.

Tómese ahora $n\in\mathbb{N}$, tal que $\dfrac{m}{2^{n+1}}<\varepsilon$. Definimos

$$A_\varepsilon := \left\{f\in L^2(D,\mathcal{O}) : f^{j)}(a_k)=0, \forall j\in\{1,\dots,n-1\}, \forall k\in\{1,\dots,m\}\right\}.$$

El conjunto A_ε es no vacío pues

$$\prod_{j=1}^{n-1}(z-a_j)^n \in A_\varepsilon.$$

A_ε es cerrado, puesto que $L^2(D,\mathcal{O})$ es Hausdorff y las derivadas sucesivas de f son funciones continuas.

Por otra parte, dada $f \in A_\varepsilon$ y fijado a_k, tenemos que su desarrollo en serie de Taylor alrededor de a_k viene dado por

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z-a_k)^l, \quad \forall z \in D, \tag{6.2}$$

donde los coeficientes $\{c_l\}_{l\geq 0}$ dependen de a_k. Como $f \in A_\varepsilon$ entonces

$$f'(a_k) = \cdots = f^{n-1)}(a_k) = 0,$$

es decir,

$$c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0.$$

Así, el desarrollo en serie dado por (6.2) queda reducido a

$$f(z) = \sum_{l=n}^{\infty} c_l (z-a_k)^l, \quad \forall z \in D.$$

Para cada $\rho \leq r$, la fórmula de $\|f\|_{L^2(D)}$ en términos del desarrollo en serie de Taylor dada por la expresión (6.1) nos dice que

$$\|f\|^2_{L^2(D(a_k,r))} = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|c_l|^2}{l+1} \pi \rho^{2l+2}.$$

Fijemos $\rho = \dfrac{r}{2}$. Para todo $l \geq n$, tenemos que $\dfrac{1}{2^{2l+2}} \leq \dfrac{1}{2^{2n+2}}$. Llegamos a la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(D(a_k,r))} &= \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|c_l|^2}{l+1} \frac{\pi}{2^{2l+2}} r^{2l+2} \\
&\leq \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|c_l|^2}{l+1} \pi r^{2l+2} = \frac{1}{2^{2n+2}} \|f\|^2_{L^2(D(a_k,r))}.
\end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas

$$\|f\|_{L^2(D(a_k,r))} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(D(a_k,r))}. \tag{6.3}$$

Dado que $D(a_k,r) \subset D$, para todo $k = 1, \ldots, m$ tenemos

$$\|f\|_{L^2(D(a_k,r))} \leq \|f\|_{L^2(D)}, \quad \forall f \in A_\varepsilon. \tag{6.4}$$

De (**??**) y (6.4)

$$\|f\|_{L^2(D(a_k,r))} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(D(a_k,r))} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(D)}, \quad \forall f \in A_\varepsilon.$$

Como $D' \subset \cup_{k=1}^{m} D(a_k, r/2)$ entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(D')} &\leq \sum_{k=1}^{m} \|f\|_{L^2(D(a_k,r/2))} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{m} \|f\|_{L^2(D(a_k,r))} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{m} \|f\|_{L^2(D)} = \frac{m}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(D)} < \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}.\end{aligned}$$

□

6.1. Cocadenas L^2-integrables

Sea X una superficie de Riemann y $\{(V_i, \varphi_i = z_i)\}_{i=1}^{n}$ un colección finita de cartas conformes al disco unidad $\mathbb{D}$. Dada una función f holomorfa en V_i tenemos que $f \circ \varphi_i^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Definimos entonces

$$\|f\|_{L^2(V_i)} := \|f \circ \varphi_i^{-1}\|_{L^2(\mathbb{D})}, \quad \forall f \in \mathcal{O}(V_i).$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, tómese $U_i \subset V_i$ y sea $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i=1}^{n}$. Nuestra intención es introducir una norma L^2 en los grupos $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

1. Las 0-cocadenas están dadas como

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}(U_i),$$

es decir, $f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ es

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad f_i \in \mathcal{O}(U_i).$$

Definimos entonces,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{U},\mathcal{O})} := \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(U_i)}.$$

2. Las 1-cocadenas están definidas como

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \prod_{i,j=1}^{n} \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$$

Por tanto, si $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, entonces

$$f = (f_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$$

Definimos entonces,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{U},\mathcal{O})} := \sum_{i,j=1}^{n} \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i \cap U_j)},$$

donde

$$\|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)} := \|f_{ij} \circ \varphi_i^{-1}\|_{L^2(\varphi_i(U_i \cap U_j))}.$$

Notemos que estas definiciones dependen de la colección de cartas tomadas.

Definición 6.1.1 (Cocadenas L^2-integrables)**.** Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}_{i=1}^n$, una familia de cartas en las condiciones anteriores. Definimos los subespacios $C^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ como

$$C^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \left\{ f \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{O}) : \|f\|^2_{L^2(\mathcal{U},\mathcal{O})} < \infty \right\}.$$

Los subespacios vectoriales $C^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ de $C^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ son espacios de Hilbert y $C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ es un subespacio cerrado de $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Definición 6.1.2. Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}_{i=1}^n$ una familia de cartas en las condiciones anteriores. Sea $\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Definimos el subespacio cerrado $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subset C^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ como

$$Z^k_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := \ker \left(\delta|_{C^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})} \right) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cap C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Al ser $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ un subespacio vectorial cerrado de $C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, hereda la estructura de espacio de Hilbert.

Los resultados precedentes permiten estudiar la relación existente entre las normas L^2 de diferentes colecciones de abiertos. Sean $\mathcal{U} := \{(U_i, z_i) : i = 1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{B} = \{(V_i, z_i) : i = 1, \ldots, n\}$ tal que $\overline{V}_i \subset U_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, lo que denotaremos $\mathcal{B} << \mathcal{U}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando el Lema 6.0.2 a cada componente encontramos subespacios cerrados A_i y A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ de $L^2(U_i, \mathcal{O})$ y $L^2(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$ respectivamente, tal que $\forall f = (f_i)_{i=1}^n, f_i \in A_i, \forall \eta = (\eta_{ij})_{i,j=1}^n, \eta_{ij} \in A_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, se cumple

$$\|f_i\|_{L^2(V_i)} \leq \varepsilon \|f_i\|_{L^2(U_i)}, \quad \|\eta_{ij}\|_{L^2(V_i \cap V_j)} \leq \varepsilon \|\eta_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Sumando en $i, j = 1, \ldots, n$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathcal{U})}, \quad \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{U})}.$$

Cada A_{ij} es cerrado, luego $\cap_{i,j=1}^n A_{ij}$ es cerrado. En consecuencia

$$A^1_\varepsilon := Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cap \left(\cap_{i,j=1}^n A_{ij} \right) \subset C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}),$$

es cerrado. Además para todo 1-cociclo L^2-integrable $\eta \in A^1_\varepsilon$ se satisface

$$\|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{U})}.$$

Con el mismo razonamiento, obtenemos el subespacio cerrado

$$A^0_\varepsilon = \cap_{i=1}^n A_i \subset C^0_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

tal que para cada $f \in A^0_\varepsilon$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathcal{U})}.$$

Observemos el propio Lema 6.0.2 nos da que los subespacios construidos tienen codimensión finita.

Proposición 6.1.1. *Sea X una superficie de Riemann. Sean $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i) : i = 1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{B} = \{(V_i, z_i) : i = 1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{B} << \mathcal{U}$. Dado $\varepsilon > 0$, existen subespacios cerrados de codimensión finita*

$$A^0_\varepsilon \subset C^0_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}), \quad A^1_\varepsilon \subset Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

tal que para cada $f \in A^0_\varepsilon$ y cada $\eta \in A^1_\varepsilon$, se tiene que

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathcal{U})}, \quad \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon^2 \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{U})}.$$

Denotaremos por r a la aplicación

$$r : \mathcal{O}(Y_2) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_1), \quad f \longmapsto f|_{Y_1}.$$

Vamos a usar una de las versiones del Teorema de Hahn-Banach, el *Teorema de la Aplicación abierta*, para espacios de Banach[1]

Teorema 6.1.1 (Aplicación abierta)**.** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Banach entonces es abierta. Además, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que*

$$f(x) = y, \quad \|x\|_X \leq C\|y\|_Y.$$

Teorema 6.1.2. *Sea X una superficie de Riemann y sea $\mathcal{U}^* = \{(V_i, \varphi_i = z_i)\}_{i=1}^n$ una familia finita de cartas conformes al disco. Sean*

$$\mathcal{W} << \mathcal{B} << \mathcal{U} << \mathcal{U}^*.$$

Entonces se tienen las siguientes aserciones,

1. *Existe $C > 0$, tal que para todo $\eta \in Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$ existe $\eta' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\gamma \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ satisfaciendo,*
$$\eta' = \eta + \delta_{\mathcal{W}}\gamma, \quad \text{en } \mathcal{W},$$
$$\text{máx}\left\{\|\eta'\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\gamma\|_{L^2(\mathcal{W})}\right\} \leq C\|\eta\|_{L^2(\mathcal{B})}.$$

2. *Existe un subespacio* ***finito-dimensional*** *$S \subset Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, tal que para todo $\eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, existen $\sigma \in S$ y $\gamma \in C^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tal que*
$$\sigma = \eta + \delta_{\mathcal{W}}\gamma, \quad \text{en } \mathcal{W}.$$
En particular, el morfismo inducido por la restricción r,
$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$$
tiene imagen de dimensión finita.

Demostración. Sea $\eta = (\eta_{ij})_{i,j=1}^n \in Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$. La Proposición 4.2.3 nos dice que

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

En particular, η es descomponible, esto es, existe $g = (g_i)_{i=1} \in C^0(\mathcal{B}, \mathcal{C}^\infty)$ tal que

$$\eta_{ij} = g_j|_{B_i \cap B_j} - g_i|_{B_i \cap B_j}.$$

Dado que $\eta_{ij} \in \mathcal{O}(B_i \cap B_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, entonces

$$\overline{\partial}\eta_{ij} = 0,$$

lo que implica

$$\overline{\partial}\big|_{B_i \cap B_j} g_i = \overline{\partial}\big|_{B_i \cap B_j} g_j, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

[1] Más adelante usaremos una versión para espacios más generales.

Sea $\mathfrak{B} = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Por (6.5) podemos definir $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(\mathfrak{B})$ tal que

$$\omega|_{B_i} = \overline{\partial} g_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Como $\mathcal{W} << \mathcal{B}$ entonces

$$\mathfrak{W} := \cup_{i=1}^{n} W_i \subset\subset \mathfrak{B}.$$

El Lema de Uryshon diferenciable nos permite encontrar una función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ tal que

$$\mathrm{sop}(\psi) \subset \mathfrak{B} \text{ compacto}, \quad \psi|_{\mathfrak{W}} = 1.$$

En particular, si $\mathfrak{U}^* = \cup_{i=1}^{n} V_i$, tenemos que

$$\psi\omega|_{\mathfrak{U}^*} \in \mathcal{E}^{(0,1)}(\mathfrak{U}^*).$$

En cada carta (V_i, z_i) de $\mathcal{U}^*$ tenemos que

$$\psi\omega = \psi\omega_i d\overline{z}_i, \quad \omega|_{V_i} = \omega_i d\overline{z}_i.$$

Dado que V_i es conforme al disco unidad, el Teorema 4.6.1 nos permite encontrar una función $h_i \in \mathcal{C}^\infty(V_i, \mathbb{C})$, $i = 1, \ldots, n$ tal que

$$\frac{\partial h_i}{\partial \overline{z}} = \psi\omega_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

equivalentemente

$$\overline{\partial} h_i = \psi\omega|_{V_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.6}$$

Definimos

$$F_{ij} : V_i \cap V_j \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F_{ij} := h_j|_{V_i \cap V_j} - h_i|_{V_i \cap V_j}.$$

La expresión (6.6) nos dice que $F_{ij} \in \mathcal{O}(V_i \cap V_j)$. En efecto, $F_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(V_i \cap V_j, \mathbb{C})$ y además

$$\overline{\partial} F_{ij} \overset{(6.6)}{=} \overline{\partial}\big|_{V_i \cap V_j} h_j - \overline{\partial}\big|_{V_i \cap V_j} h_i = 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Sea $\eta' = \left(F_{ij}|_{U_i \cap U_j} \right)_{i,j=1}^{n}$. Por definición $\eta' \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. $\eta' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. En efecto,

- Para cada $i, j = 1, \ldots, n$, F_{ij} es holomorfa en $V_i \cap V_j$. En particular, como $U_i \cap U_j$ es relativamente compacto en $V_i \cap V_j$, F_{ij} es continua en $\overline{U_i \cap U_j} \subset V_i \cap V_j$, en particular

  $$F_{ij}|_{U_i \cap U_j} \in L^2(U_i \cap U_j), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

  es decir,

  $$\eta' \in C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

- Finalmente se cumplen las condiciones de 1-cociclos pues en $U_i \cap U_j \cap U_k$

  $$\delta(F_{ij}) = F_{jk} - F_{ik} + F_{ij} = h_k - h_j - (h_k - h_i) + h_j - h_i = 0.$$

En consecuencia, $\eta' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\overline{\partial}\big|_{W_i} h_i = \psi\omega|_{W_i}.$$

Definimos

$$G_i : W_i \longrightarrow \mathbb{C}, \quad G_i = h_i|_{W_i} - g_i|_{W_i}.$$

Se verifica que $G_i \in \mathcal{O}(W_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. En efecto, para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $G_i \in \mathcal{C}^\infty(W_i, \mathbb{C})$ y además como $\psi|_{\mathfrak{W}} = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\big|_{W_i} G_i &= \overline{\partial}\big|_{W_i} h_i - \overline{\partial}\big|_{W_i} g_i \\ &= \psi\omega|_{W_i} - \omega|_{W_i} = \omega|_{W_i} - \omega|_{W_i} = 0.\end{aligned}$$

Así pues, $G_i \in \mathcal{O}(W_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Por otro lado, $\overline{W_i}$ es compacto y $h_i - g_i$ es diferenciable en $V_i \supset\supset W_i$, luego G_i es acotada en W_i. En consecuencia, como W_i tiene medida finita y G_i es acotada se tiene $G_i \in L^2(W_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Hemos probado que

$$\gamma = (G_i)_{i=1}^n \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O}).$$

Ahora bien,

$$F_{ij}|_{W_i \cap W_h} = f_{ij}|_{W_i \cap W_j} + (h_j - g_j)|_{W_i \cap W_j} - (h_i - g_i)|_{W_i \cap W_j},$$

es decir,

$$\eta' = \eta + \delta_{\mathcal{W}}\gamma, \quad \text{en } \mathcal{W}.$$

Pongamos de manifiesto la estimación dada en el enunciado. Consideramos

$$H := C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

H es un espacio de Hilbert con la norma usual inducida en el producto de espacios normados[2]

$$\|(\gamma, \eta, \eta')\|_H^2 := \|\gamma\|^2_{L^2(\mathcal{W})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{B})} + \|\eta'\|^2_{L^2(\mathcal{U})}.$$

Consideramos el subespacio

$$L := \left\{(\gamma, \eta, \eta') \in H : \eta' = \eta + \delta_{\mathcal{W}} f\right\}.$$

Dado que L está definido en términos de aplicaciones continuas, L es un subespacio cerrado de H y por tanto espacio de Hilbert. Por lo visto antes, la proyección

$$\pi : L \longrightarrow Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O}), \quad (\gamma, \eta, \eta') \longmapsto \eta,$$

es sobreyectiva. Dado que L y $Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$ son Hilbert (en particular de Banach) y π es continua y sobreyectiva, el Teorema de la Aplicación abierta nos dice que π es abierta y existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\eta \in Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$ existe (γ, ζ, η') tal que

$$\pi(\gamma, \zeta, \eta') = \eta, \quad \|(\gamma, \zeta, \eta')\|_L \leq C\|\eta\|_{L^2(B)},$$

esto es $\zeta = \eta$ y

$$\|\gamma\|^2_{L^2(\mathcal{W})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathcal{B})} + \|\eta'\|^2_{L^2(\mathcal{U})} \leq C\|\eta\|_{L^2(B)},$$

que en particular

$$\text{máx}\left\{\|\eta'\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\gamma\|_{L^2(\mathcal{W})}\right\} \leq C\|\eta\|_{L^2(\mathcal{B})}.$$

[2] El producto interno se recupera por polarización.

Tomemos $C > 0$ en las condiciones del punto anterior. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2C}$. Asociado a $\varepsilon > 0$ y a las familias $\mathcal{B} << \mathcal{U}$, la Proposición 6.1.1 nos garantiza la existencia de un subespacio cerrado de codimensión finita A_ε de $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$\|\eta\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}, \quad \forall \eta \in A_\varepsilon.$$

Fijamos $\eta = (\eta_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Tenemos que $\overline{W_i}$ es compacto $\forall i = 1, \ldots, n$. Dado que $\eta_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, entonces $\eta_{ij}|_{\in} \mathcal{C}(\overline{W_i \cap W_j})$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. En particular, al ser $\overline{W_i \cap W_j}$ compacto se tiene

$$\| \, \eta_{ij}|_{W_i \cap W_j} \|_{L^2(W_i \cap W_j)} < \infty, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

En consecuencia,

$$\| \, \eta|_{\mathcal{W}} \|_{L^2(\mathcal{W})} < \infty,$$

es decir, $\eta|_{\mathcal{W}} \in Z^1_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$. Por el primer punto, existe $\beta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\gamma_0 \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\beta_0 = \eta + \delta_{\mathcal{W}} \gamma_0, \quad \text{en } \mathcal{W},$$

y tales que

$$\text{máx}\left\{ \|\beta_0\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\gamma_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \right\} \leq C \|\eta\|_{L^2(\mathcal{B})}.$$

Sea S_ε el complemento ortogonal en $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ de A_ε, que es de dimensión finita, esto es

$$Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = A_\varepsilon \ \ominus \ S_\varepsilon.$$

Dado que $\beta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ entonces existe $\alpha_0 \in A$ y $\sigma_0 \in S$ tales que

$$\beta_0 = \alpha_0 + \sigma_0. \tag{6.7}$$

Vamos a construir por inducción $\beta_n \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, $\alpha_n \in A_\varepsilon$, $\gamma_n \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ y $\sigma_n \in S$ tales que

1. $\beta_n = \alpha_{n-1} + \delta_{\mathcal{W}} \gamma_n$ en $\mathcal{W}$.
2. $\beta_n = \alpha_n + \sigma_n$.
3. $$\|\beta_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \frac{C \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^n}, \quad \|\gamma_n\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \frac{C \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^n}.$$

El caso $n = 0$ está dado por la expresión (6.7). Supongamos que se satisfacen las hipótesis para $0 \leq k \leq n$ y construyamos el caso $n + 1$.

Tenemos que

$$\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{U})} = \|\beta_n - \sigma_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \overset{(*)}{=} \|\beta_n\|_{L^2(\mathcal{U})} - \|\sigma_n\|_{L^2(\mathcal{U})},$$

$(*)$ hemos utilizado que $\beta_n = \alpha_n + \sigma_n$ es una descomposición ortogonal.

Esto nos dice que

$$\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \|\beta_n\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

y por el tercer punto de la hipótesis de inducción

$$\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \|\beta_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \frac{C \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^n}. \tag{6.8}$$

Como $\alpha_n \in A_\varepsilon$ y $\varepsilon = \frac{1}{2C}$

$$\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq \varepsilon \|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{U})} \overset{(6.8)}{\leq} \varepsilon \frac{C\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^n} = \frac{\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^{n+1}},$$

es decir

$$\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq \frac{\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^{n+1}} \tag{6.9}$$

Por el primer punto de este teorema, asociado a α_n, existe $\beta_{n+1} \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\gamma_{n+1} \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$\beta_{n+1} = \alpha_n + \delta_{\mathcal{W}}\gamma_{n+1}, \quad \text{en } \mathcal{W}$$

y de forma que (la constante C es válida para todo $Z^1_{L^2}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$)

$$\text{máx}\left\{\|\beta_{n+1}\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\gamma_{n+1}\|_{L^2(\mathcal{W})}\right\} \leq C\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{B})} \overset{(6.9)}{\leq} C\frac{\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^{n+1}},$$

en particular

$$\|\gamma_{n+1}\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq C\frac{\|\eta\|_{L^2(\mathcal{U})}}{2^{n+1}},$$

que prueba la segunda desigualdad del tercer punto de nuestra inducción. Solo resta comprobar el segundo punto. De nuevo, como $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = A_\varepsilon \ominus S_\varepsilon$, existen $\alpha_{n+1} \in A_\varepsilon$ y $\sigma_{n+1} \in S$ tal que $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} + \sigma_{n+1}$.

Tenemos $\alpha_{n-1} + \delta_{\mathcal{W}}\gamma_n = \beta_n = \alpha_n + \sigma_n$ entonces

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_{n-1} + \sum_{n=1}^{k} \delta_{\mathcal{W}}\gamma_n = \sum_{n=1}^{k} \beta_n = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n + \sum_{n=1}^{k} \sigma_n$$

equivalentemente

$$\sum_{n=1}^{k} \delta_{\mathcal{W}}\gamma_n = \alpha_k + \sum_{n=1}^{k} \sigma_n$$

Para $n = 0$ tenemos $\beta_0 = \eta + \delta_{\mathcal{W}}\gamma_0$ en $\mathcal{W}$, por tanto

$$\delta_{\mathcal{W}} \sum_{n=0}^{k} \gamma_n + \eta = \alpha_k + \sum_{n=0}^{k} \sigma_n.$$

Además, de las desigualdades del punto tres, tenemos

$$\text{máx}\left\{\|\alpha_n\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\sigma_n\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\gamma_n\|_{L^2(\mathcal{W})}\right\} \leq \frac{C\|\eta\|_{L^2(\mathcal{B})}}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el criterio de la mayorante de Weierstrass nos dice que las series

$$\sigma := \sum_{k=0}^{\infty} \in S, \quad \gamma := \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \in C^0_{L^2}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$$

son convergentes. Además, hemos usado que el límite pertenece al subespacio, esto se debe a que sendos subespacios son cerrados. También tenemos de la anterior desigualdad

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Tomando límite $k \to \infty$ en la expresión

$$\delta_{\mathcal{W}} \sum_{n=0}^{k} \gamma_n + \eta = \alpha_k + \sum_{n=0}^{k} \sigma_n.$$

llegamos a que

$$\sigma = \eta + \delta\gamma, \quad \text{en } \mathcal{W}.$$

Finalmente comprobamos que $r^\sharp : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tiene imagen de dimensión finita. En efecto, basta observar que la descomposición anterior

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})\big|_{\mathcal{W}} = S + \delta_{\mathcal{W}} C^0(\mathcal{W}, \mathcal{O}).$$

Ahora bien, S es de dimensión finita y $\delta_{\mathcal{W}} C^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ es trivial en cohomología, luego la dimensión de la restricción en cohomología, será a lo sumo la de S, que es finita. □

El último punto nos va a ayudar a entender el comportamiento del primer grupo de cohomología con coeficientes en $\mathcal{O}$ de diferentes colecciones de cartas. Por ahora, las relaciones que hemos ido dando no han sido para recubrimientos de la superficie, si no para familias finitas de entornos coordenados. esto no nos supondrá restricción alguna, pues vamos a aplicarlos a abiertos relativamente compactos de la superficie.

Teorema 6.1.3. *Sea X una superficie de Riemann. Sean Y_1, Y_2 abiertos de X tales que $Y_1 \subset\subset Y_2$, Y_1 relativamente compacto. Entonces la restricción $r : \mathcal{O}(Y_2) \hookrightarrow \mathcal{O}(Y_1)$ induce un morfismo $r^\sharp : H^1(Y_2, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$ con imagen de dimensión finita.*

Demostración. Sea $\{(U_i^*, z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas numerable de X. Por compacidad de $\overline{Y}_1$, tenemos que

$$Y_1 \subset \cup_{i=1}^n U_i^*$$

Podemos tomar ahora entornos de los puntos de Y_1, para obtener,

$$W_i \subset\subset V_i \subset\subset U_i \subset\subset U_i^*.$$

Podemos suponer que $\cup_{i=1}^n U_i \subset Y_2$, pues bastaría tomar $U_i \cap Y_2$, que siguen siendo abiertos de X puesto que Y_2 es abierto y los $W_i \cap Y_2$ siguen recubriendo Y_1, dado que $Y_1 \subset\subset Y_2$. Por el Teorema anterior si denotamos por $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ a las respectivas familias de abiertos tenemos que

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}),$$

tiene imagen de dimensión finita. Al ser U_i y W_i conformes al disco, el Teorema 4.6.2 nos dice que

$$H^1(U_i, \mathcal{O}) = H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Esto nos dice que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son recubrimientos de Leray de

$$Y' := \cup_{i=1}^n W_i, \quad Y'' := \cup_{i=1}^n U_i,$$

y en consecuencia

$$H^1(Y', \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}), \quad H^1(Y'', \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Ahora bien, las inclusiones

$$Y_1 \subset Y' \subset Y'' \subset Y_2,$$

inducen

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y'', \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y', \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O}),$$

que por los isomorfismos anteriores, podemos poner

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O}).$$

Ahora bien, la aplicación $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ tenía imagen de dimensión finita, luego la imagen de

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

tiene dimensión finita.

□

Si suponemos que X es una superficie de Riemann compacta y tomamos $Y_1 = Y_2 = X$ tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.1.1. *Toda superficie de Riemann compacta X cumple que $H^1(X, \mathcal{O})$ es de dimensión finita.*

6.2. Interpolación mediante funciones meromorfas

A continuación probamos la existencia de funciones meromorfas y holomorfas no constantes. De hecho, demostramos que las funciones meromorfas *interpolan* los puntos de una superficie de Riemann compacta.

Proposición 6.2.1. *Sea X una superficie de Riemann y sea D abierto relativamente compacto. Para cada $p \in D$, existe $f \in \mathcal{M}(D)$ tal que p es polo de f y $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{p\})$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Como D es relativamente compacto en X, el Teorema 6.1.3 nos dice que la aplicación

$$r^\sharp : H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}), \quad k := \dim\left(\mathrm{Im}(r^\sharp)\right). \tag{6.10}$$

tiene imagen finito-dimensional. Sea $(U_1, \varphi = z)$ una carta conforme al disco unidad centrada en p y $U_2 = X \setminus \{p\}$. Sea $\mathcal{U}$ el recubrimiento por abiertos conformado por U_1 y U_2. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_j : U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_j(q) := \frac{1}{\varphi^j(q)}.$$

Dado que (U_1, φ) es una carta en particular φ es biyectiva en U_1. Como φ se anula en $p \in U_1$ entonces $\varphi(q) \neq 0$ para todo $q \in U_1 \setminus \{p\}$. En consecuencia, $\varphi_j \in \mathcal{O}(U_1 \setminus \{p\})$. Por otra parte, el recubrimiento de X, $\mathcal{U}$, solo consta de dos abiertos, luego las 1-cocadenas quedan como[3]

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}(U_1 \setminus \{p\}) \ni \varphi_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

De este modo, φ_j es una 1-cocadena. Tómese $\eta_j \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ un representante de $[\varphi_j]_{H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})}$, esto es

$$\varphi_j \in [\eta_j]_{H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})}, \quad j = 1, \ldots, k+1,$$

[3]Podemos pensar en las 1-cocadenas como $\mathcal{O}(U_1 \cap U_2) \times \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$ si admitimos que los índices se puedan repetir.

lo que equivale a que para cada $j = 1, \dots, k+1$, existe $\delta\eta'_j \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$\eta_j = \varphi_j + \delta\eta'_j. \tag{6.11}$$

Tenemos $\eta_1, \dots, \eta_{k+1}$ que representa a cada función $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}$ respectivamente. Si denotamos $\mathcal{U}_D$ al recubrimiento inducido por $\mathcal{U}$ en D, tenemos que la restricción

$$r^\sharp_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}_D, \mathcal{O})$$

actua como

$$r^\sharp_{\mathcal{U}}([\eta_j]) = [\eta_j|_D].$$

Ahora bien, todos los η_j eran 1-cociclos en $\mathcal{U}$, luego $\eta_j|_D$ son 1-cociclos en $\mathcal{U}_D$. Además, $r^\sharp_{\mathcal{U}}$ tiene imagen de dimensión finita por (6.10) menor o igual que k y tenemos $k+1$ cociclos. esto nos dice que necesariamente existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ y un 1-coborde $\delta\eta' \in B^1(\mathcal{U}_D, \mathcal{O})$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \eta_j = \delta\eta' \tag{6.12}$$

donde $\delta : C^0(\mathcal{U}_D, \mathcal{O}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}_D, \mathcal{O})$. La condición (6.11) nos da que

$$\lambda_j \varphi = \lambda_j \eta_j - \lambda_j \delta\eta_j, \quad j = 1, \dots, k+1.$$

Sumando en $j = 1, \dots, k+1$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \varphi_j = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \eta_j - \delta \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \eta'_j \overset{(6.12)}{=} \delta\left(\eta' + \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \eta'_j\right).$$

Por definición de operador coborde existen $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2 \cap D) = \mathcal{O}(U_1 \cap D \setminus \{p\})$ tales que

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \varphi_j = f_2 - f_1, \quad U_1 \cap D \setminus \{p\}.$$

esta condición nos dice que la aplicación f dada como

$$f := \begin{cases} f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \varphi_j & \text{en} \quad U_1 \cap D, \\ f_2 & \text{en} \quad U_2 \cap D = D \setminus \{p\} \end{cases}$$

está bien definida y es holomorfa en $D \setminus \{p\}$, por ser f_2 holomorfa. Además, en p presenta un polo, puesto que las φ_j lo presentan. $\square$

Corolario 6.2.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $p_1, \dots, p_n$ puntos distintos de X. Sean $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$. Existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f(p_i) = \zeta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Para cada $i \neq j$, como $D = X$ es compacta encontramos una función $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ con un polo en p_i y es holomorfa en $X \setminus \{p_i\}$. Observemos que en particular, f_{ij} es holomorfa en un entorno de p_j. Sea $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f_{ij}(a_k) \neq f_{ij}(a_j) - \lambda_{ij}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Definimos la función

$$g_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f_{ij}(a_j) + \lambda_{ij}} \in \mathcal{M}(X).$$

Observemos que por la elección de λ_{ij}, en un entorno de p_k, $k = 1, \ldots, n$ con $k \neq i$, la función es holomorfa. Además para $k = i$ tenemos que denominador y numerador presentan un polo en p_i del mismo orden, luego $g_{ij}(p_i) = 1$. Trivialmente se tiene que $g_{ij}(p_j) = 0$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos

$$h_i := \prod_{j \neq i} g_{ij}.$$

Entonces, $h_i(a_j) = \delta_{ij}$. Finalmente, consideramos

$$f := \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \cdot h_i,$$

que satisface $f \in \mathcal{M}(X)$ y

$$f(p_k) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \cdot h_i(p_k) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \delta_{ik} = \zeta_k.$$

□

Corolario 6.2.2. *Sea X una superficie de Riemann abierta y sea Y abierto relativamente compacto de X. Existe $f \in \mathcal{O}(Y)$ que no es constante en ninguna componente conexa de Y.*

Demostración. Sea Y' relativamente compacto distinto de Y y tal que $Y \subset Y' \subset X$. este Y' existe puesto que X es abierta. Sea $p \in Y' \setminus Y$. Por la Proposición 6.2.1 existe $f \in \mathcal{O}(Y' \setminus \{p\})$, $f \in \mathcal{M}(Y')$, con un polo en p. Entonces $f|_Y$ es holomorfa en todo Y y no es constante por el Teorema de la identidad, ya que f posee un polo en p. □

Corolario 6.2.3. *Sea X una superficie de Riemann y sean Y, Y' abiertos tales que $Y' \subset\subset Y \subset\subset X$, Y',Y relativamente compactos y sea $r : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(Y')$ la restricción. Entonces*

$$r^\sharp : H^1(Y', \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$$

satisface $r^\sharp\left(H^1(Y', \mathcal{O})\right) = 0$.

Demostración. Sabemos que la imagen de $r^\sharp$ es finito-dimensional por el Teorema 6.1.3. Sean $[\eta_1], \ldots, [\eta_n] \in H^1(Y', \mathcal{O})$ tales que

$$\operatorname{span}\{[\eta_i|_Y] : i = 1, \ldots, n\} = H^1(Y, \mathcal{O}).$$

Sea $f \in \mathcal{O}(Y')$ que no es constante en ninguna componente conexa de Y'. Para cada $j = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$[f\,\eta_j|_Y] = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}[\eta_k|_Y]. \tag{6.13}$$

Consideramos la función $F = \det\left(f\delta_{jk} - c_{jk}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$. F es holomorfa en Y' y no es constante por la suposición sobre f. Por (6.13) tenemos que $[F\,\eta_k|_Y] = 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$, puesto que obtendríamos una columna en el determinante que sería linealmente dependiente. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento de X tal que cada cero de F esté en un único U_i y cada U_i sea conforme a un disco. Entonces $H^1(Y', \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, pues sería un recubrimiento de Leray, ya que $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$. De este modo, si $\eta \in H^1(Y', \mathcal{O})$, podemos tomar $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ representando a η. Para $i \neq j$ tenemos que $F|_{U_i \cap U_j}$ es holomorfa y sin ceros, por la elección de los U_i, pues en cada U_i hay como mucho un solo cero. La función $\dfrac{f_{ij}}{F}$ es holomorfa en $U_i \cap U_j$ y por tanto

$$(f_{ij}/F) = (g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Sea $[\eta']$ la clase en $H^1(Y', \mathcal{O})$ de (g_{ij}). Entonces,

$$[\eta'] = [(g_{ij})] = [(f_{ij}/F)] \Longrightarrow [F\eta'] = [\eta].$$

Finalmente, como $[F\eta_k] = 0$, para todo k, entonces

$$[\eta] = [F\eta'|_Y] = [F \sum_j \lambda_j \eta_j] = \sum_j [F\eta_j] = 0.$$

□

El siguiente resultado será fundamental para el Teorema de Aproximación de Runge.

Corolario 6.2.4. *Sea X una superficie de Riemann abierta y sean Y, Y' abiertos de X tales que $\overline{Y} \subset Y'$ con Y relativamente compacto. Dada $\alpha \in \mathcal{E}^{(0,1)}(Y')$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial} f = \alpha|_Y$.*

Demostración. Sea (U, z) una carta conforme al disco $\mathbb{D}$. El Teorema 4.6.1 afirma que la ecuación inhomogenea de Cauchy admite solución en el disco, es decir, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tal que

$$\overline{\partial} f\big|_U = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial \overline{z}} = \alpha \circ z^{-1}\big|_{\mathbb{D}}.$$

Sea $\mathcal{U} := \{(U_k, z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de X por cartas conformes al disco. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $f_k \in \mathcal{C}^\infty(U_k, \mathbb{C})$ a una solución de la ecuación anterior, es decir,

$$\overline{\partial} f_k = \alpha|_{U_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sean k y k' naturales tales que $U_k \cap U_{k'} \neq \varnothing$. Observemos que la función $f_k - f_{k'} \in \mathcal{C}^\infty(U_k \cap U_{k'}, \mathbb{C})$ y además

$$\overline{\partial}\big|_{U_k \cap U_k'} (f_k - f_{k'}) = \overline{\partial} f_k - \overline{\partial} f_{k'} = \alpha|_{U_k \cap U_{k'}} - \alpha|_{U_k \cap U_{k'}} = 0.$$

Inferimos que $f_k - f_{k'} \in \mathcal{O}(U_k \cap U_{k'})$, para todo $k, k' \in \mathbb{N}$ con $U_k \cap U_{k'} \neq \varnothing$. De este modo si definimos $g_{ij} = f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, tenemos que

$$g := (g_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Observemos que además es un 1-cociclo, puesto que en $U_i \cap U_j \cap U_k$

$$\delta g_{ij} = g_{jk} - g_{ik} + g_{ij} = f_j - f_k - (f_i - f_k) + f_i - f_j = 0.$$

Así, $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Al ser Y' relativamente compacto, el Corolario 6.2.3 nos da que la imagen de $r^\sharp : H^1(Y', \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$ es nula, por tanto, $g|_Y = (g_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap Y})$ es un 1-cociclo cohomólogo a cero en $H^1(Y, \mathcal{O})$. Al ser g cohomólogo a cero en Y, es descomponible, es decir, existen $h_i \in \mathcal{O}(U_i \cap Y)$ y $h_j \in \mathcal{O}(U_j \cap Y)$ tales que

$$(f_i - f_j)|_{U_i \cap U_j \cap Y} = g_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap Y} = h_i|_{U_i \cap U_j \cap Y} - h_j|_{U_i \cap U_j \cap Y}.$$

Dado que para cada i,j tenemos que $f_i - h_i = f_j - h_j$ en $U_i \cap U_j \cap Y$, y $\{U_i \cap Y\}_{i\in\mathbb{N}}$ recubre a Y entonces

$$f : Y \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f|_{U_i \cap Y} = f_i - h_i$$

y es diferenciable en Y. Finalmente, al ser h_k holomorfa en U_k se tiene $\overline{\partial} h_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\overline{\partial}\big|_{U_k} f = \overline{\partial} f_k - \overline{\partial} h_k = \overline{\partial} f_k = \alpha|_{U_k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

esto prueba que $\overline{\partial} f = \alpha$. □

6.3. Distribuciones

Recordemos la noción de pseudonorma y seminorma.

Definición 6.3.1. Una *pseudonorma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X es una aplicación $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. Para cualquier $x \in X$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{x}{n}\right) = 0$.
2. $\rho(x + x') \leq \rho(x) + \rho(x')$ para todo $(x, x') \in X \times X$.
3. $\rho(\alpha x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{D}$.

Una *seminorma* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X es una aplicación $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\rho(x + x') \leq \rho(x) + \rho(x')$ para todo $(x, x') \in X \times X$.
2. $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$, para todo $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$.

Si la condición $\rho(x) = 0$ implica $x = 0$, diremos que x es una *norma*.

Definición 6.3.2 (Espacios vectoriales topológicos de Fréchet)**.** Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es un *espacio de Fréchet* si

- X es Hausdorff y su topología procede de una familia numerable de seminormas.
- X es un espacio topológico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy[4] en X es convergente.

Es claro que toda seminorma es un pseudonorma. Sea Ω un abierto del plano complejo y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vamos a introducir en $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$ una estructura de espacio de Fréchet. Para cada $K \subset X$ compacto y cada multiíndice $|\alpha| \leq n$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \rho_K^\alpha : & \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & \|D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \end{array}$$

Las propiedades fundamentales de estas aplicaciones son las siguientes.

- Todas son no negativas.

[4] En un espacio vectorial topológico X, una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si dado un entorno de cero, U, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $x_n - x_m \in U$.

- Son absolutamente homogéneas, esto es, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\rho_K^\alpha(\lambda f) = |\lambda| \rho_K^\alpha(f), \forall f \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}),$$

para cualquier $|\alpha| \leq n$.

- Verifica la desigualdad triangular. Para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\rho_K^\alpha(f+g) \leq \rho_K^\alpha(f) + \rho_K^\alpha(g),$$

para cualquier $|\alpha| \leq n$.

Así pues $\{\rho_K^\alpha\}$ es una familia de seminormas. La notación usual para las seminormas es $\|\cdot\|_{\alpha,K}$. esto nos va a permitir dotar a $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$ de una estructura de espacio vectorial topológico de Fréchet. Para ello, damos el siguiente resultado más general y válido para *pseudonormas.*

Teorema 6.3.1. *Sea $\{\varrho_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia no vacía de pseudonormas en un espacio vectorial X. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y cada $F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$ (las partes finitas no vacias de Λ), sea $U_{\varepsilon,F} = \{x \in X : \varrho_\lambda(x) < \varepsilon, \forall \lambda \in F\}$. Existe una única topología vectorial τ en X tal que la familia*

$$\mathcal{B} = \left\{U_{\varepsilon,F} : \varepsilon \in \mathbb{R}^+, F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)\right\}$$

es una base de entornos de cero. Decimos que τ es la topología canónicamente asociada a la familia de pseudonormas $\{\varrho\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

Las bases de entornos de cero determinan completamente la topología en espacios vectoriales topológicos, pues mediante traslaciones y dilataciones, podemos conseguir una base de entornos de cualquier punto. Este tipo de resultados están intimamente relacionados con espacios localmente convexos y los Teoremas de Krein-Milman.

El teorema anterior nos proporciona de manera explícita una base de entornos de la topología canónica inducida por la familia de seminormas $\{\rho_K^\alpha\}$

$$U_K^\alpha(\varepsilon) := \{f \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}) : \rho_K^\alpha(f) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

A la topología inducida la vamos a denotar $\tau_{\mathcal{C}^n}$. Podemos dar la noción de convergencia de sucesiones una vez que conocemos la topología. Cuando $n = 0$, es decir, es el espacio de funciones continuas, las seminormas son

$$\|\cdot\|_K = \|\cdot\|_{L^\infty(K)}.$$

Si denotamos $\overline{D}(0, R)$ al disco cerrado, podemos considerar la topología en $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$ generada por la seminormas

$$\left\{\rho_{\overline{D}(0,m)\cap\Omega}^\alpha : |\alpha| \leq n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dado que todo compacto de Ω está contenido en uno de estos discos cerrados cortados con Ω y el propio disco cerrado cortado con Ω es un compacto de Ω, tenemos que las dos topologías obtenidas por estos dos procesos son la misma. Así pues, la topología se genera por una familia numerable de seminormas.

Teorema 6.3.2. *El espacio $(\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^n})$ es de Fréchet.*

Definición 6.3.3 (Convergencia en $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$)**.** Sea Ω un abierto del plano complejo y $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$. Diremos que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en $\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$ si para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada multiíndice $|\alpha| \leq n$

$$\lim_{k\to\infty} \rho_K^\alpha(f_k - f) = \lim_{k\to\infty} \|D^\alpha f_k - D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Observación 6.3.1. Una cuestión fundamental es saber que topología se induce en $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. La topología inducida es la convergencia uniforme por compactos, puesto que si tomamos una sucesión de funciones holomorfas que convergen uniformemente por compactos, su límite es holomorfo y todas sus derivadas convergen a las derivadas del límite.

Un resultado interesante que enlaza diversas topologías es el siguiente, que puede consultarse en [20, Proposición 13.2].

Proposición 6.3.1. *Las siguientes inclusiones naturales son continuas*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{n-1}(\Omega, \mathbb{C}) \hookrightarrow L_0^\infty(\Omega)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 6.3.2. *Sea* Ω *un abierto del plano complejo,* $n \in \mathbb{N}$*. Para cada multiíndice* $|\alpha| \leq n$ *tenemos que*

$$D^\alpha : \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{n-|\alpha|}(\Omega, \mathbb{C})$$

es un operador lineal continuo. En particular,

$$D^\alpha : \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$$

para cualquier multiíndice α.

Demostración. En efecto, para todo K compacto de Ω y todo par de multiíndices α y β tales que

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \leq k$$

tenemos que

$$\|D^\alpha f\|_{\beta,K} = \|f\|_{\alpha+\beta,K}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}).$$

esto prueba la continuidad. □

Definición 6.3.4. Sea Ω un abierto del plano complejo y n natural. Diremos que $\{f_k\} \subset \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C})$ es de Cauchy en $\tau_{\mathcal{C}^n}$ si para todo compacto K de Ω y todo $\varepsilon > 0$, existe un k_0 natural, tal que para todo $p, q \geq k_0$ se tiene

$$\|f_p - f_q\|_{K,\alpha} < \varepsilon.$$

Respecto a la completitud del espacio tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.3.3. *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *el espacio* $(\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^n})$ *es completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en* $(\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^n})$ *es convergente.*

Demostración. Hacemos el argumento por inducción sobre n.

- Para $n = 0$ tenemos el espacio de funciones continuas. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por ser $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, $K = \{x\} \subset \Omega$ tenemos que $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, que es completo, por tanto $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $x \in \Omega$. esto pone de manifiesto que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia cierta $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Finalmente veamos que converge uniformemente por compactos. Dado K compacto de Ω y $\varepsilon > 0$ la condición uniforme de Cauchy nos dice que existe $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|f_p - f_q\|_K < \varepsilon/2, \quad q, p \geq k_0.$$

Entonces para todo $q \geq k_0$

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f(x)| &= |f_p(x) - \lim_{q\to\infty} f_q(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \lim_{q\to\infty} \|f_p - f_q\|_K \\ &\leq \lim_{q\to\infty} \varepsilon/2 = \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como el x es arbitrario y estamos con la norma del máximo

$$\lim_{p\to\infty} \|f_p - f\|_K = 0.$$

Dado que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos hacia f, la función f es continua.

- Supongamos que para todas las derivadas parciales hasta el orden r convergen uniformemente por compactos. Entonces, por el caso base, la derivada de orden r del límite es continua, probando así que el límite vive en $\mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C})$.

$\square$

Un resultado muy conocido es el siguiente.

Proposición 6.3.4. *Todo espacio vectorial topológico X de Fréchet es metrizable. Además, si su topología viene dada por la familia de pseudonormas $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, entonces*

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\varrho_n(x - y)}{1 + \varrho_n(x - y)}$$

es una distancia que induce en X la misma topología que la familia de seminormas. En particular, todo subespacio cerrado de un Fréchet es Fréchet.

Proposición 6.3.5. *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios Fréchet, entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un espacio Fréchet con la topología producto.*

Observación 6.3.2. Dado que $(\mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^n})$ es metrizable tenemos que F es cerrado si y sólo si es secuencialmente cerrado. Además, los funcionales lineales continuos son los mismos que los funcionales lineales secuencialmente continuos. Basta notar que un funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, donde X es un espacio vectorial topológico, es continuo si y sólo si $\ker f$ es cerrado [12, Corolario 3.2.4.].

Con esta observación tenemos una definición alternativa de continuidad de un funcional y podemos definir la topología en términos de sucesiones.

Definición 6.3.5. Sea Ω un abierto del plano complejo. Una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n(\Omega,\mathbb{C})$ es convergente a $f \in \mathcal{C}^n(\Omega,\mathbb{C})$ en $(\mathcal{C}^n(\Omega,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^n})$ si para todo compacto K y para todo multiíndice $|\alpha| \leq n$, tenemos que

$$\{D^\alpha f_k\} \overset{L^\infty(K)}{\longrightarrow} D^\alpha f.$$

$F \subset \mathcal{C}^n(\Omega,\mathbb{C})$ es cerrado si para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $\mathcal{C}^n(\Omega,\mathbb{C})$, se tiene que $f \in F$.

El subespacio que más nos interesa es $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{C})$, es decir, las funciones diferenciables de soporte compacto. Podemos reformular lo anterior para tal espacio e introducimos la noción de distribución.

Definición 6.3.6. Sea X un abierto del plano complejo. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ es convergente a $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ si

- Existe $K \subset M$ compacto tal que

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sop}(f_n)) \cup \operatorname{sop}(f) \subset K.$$

- Para todo multiíndice α, tenemos que

$$\{D^\alpha f_n\} \overset{L^\infty(K)}{\longrightarrow} D^\alpha f.$$

En $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ construimos la topología $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$ en la que $F \subset \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ es cerrado si para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$, se tiene que $f \in F$.

Una *distribución* T en X es un funcional lineal continuo

$$T : (\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

Al $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las distribuciones sobre X lo notamos por $\mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$ o simplemente $\mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$.

De la Observación 6.3.2 y de las propiedades de los funcionales lineales tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.3.3. *Sea X un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $T : (\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$ un funcional lineal. Las siguientes aserciones son equivalentes:*

- *T es distribución.*
- *T es continuo.*
- *T es secuencialmente continuo.*
- *T es continuo en cero.*
- *T es secuencialmente continuo en cero.*
- *T transforma entornos acotados de cero en entornos acotados de cero.*
- *T es acotado.*

Observación 6.3.3. $\mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$ es por definición el espacio dual dado por $(\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty})^*$.

Observación 6.3.4. Por la propia definición, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ implica que para todo multiíndice α

$$D^\alpha f_n \to D^\alpha$$

en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$. Además, tenemos que $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}) \subset L^p(X)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, de hecho es un espacio L^p-denso. En relación a las convergencias, tenemos que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $L^p(X)$.

Supongamos que X es un abierto de $\mathbb{C}$. Tenemos así definido todo el espacio $L^2(X)$ (no es necesario tomar cartas como en el caso de una superficie de Riemann) y $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ es un subespacio vectorial topológico de $(L^2(X), \|\cdot\|_{L^2(X)})$ y tendríamos otra topología alternativa en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$. De hecho, es ampliamente conocido que ([17])

$$\overline{\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})}^{L^2(X)} = L^2(X),$$

es decir, $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ es L^2-denso en $L^2(X)$. Para estudiar las distribuciones, conviene estudiar los funcionales de $L^2(X)$, aunque las topologías que se inducen mediante la norma L^2 y mediante la convergencia en $\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ sean distintas. Como ya advertimos al inicio del capítulo, $L^2(X)$ es un espacio de Hilbert, sobre cualquier subconjunto medible de $\mathbb{C}$. Como vamos a trabajar con muchos tipos de funcionales, y en particular, funcionales de L^2, enunciamos un teorema clásico del Análisis Funcional.

Teorema 6.3.4 (Riesz)**.** *Sea $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. Entonces un funcional $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continuo si y sólo si existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $f = (x,\cdot)$. En caso de existir dicho elemento, este es único.*

Corolario 6.3.1. *Sea $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$ y M un subespacio denso en $\mathcal{H}$. Si f es un funcional continuo tal que $f|_M \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.*

estos resultados son muy versátiles. Un ejemplo de ello es lo siguiente. Sea X un abierto de $\mathbb{C}$ y h una aplicación continua de X en $\mathbb{C}$. Definimos

$$T_h^K : L^2(K) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad T_h^K(f) := \iint_K f(x,y)h(x,y)dxdy, \quad K \subset X \text{ compacto.}$$

Observemos que T_h^K está bien definida puesto que h es continua en un compacto y por tanto $h \in L^2(K)$. Además

$$T_h^K = \langle \cdot, \overline{h} \rangle_{L^2(K)},$$

es lineal y continua, por Teorema de Riesz. esta aplicación no tiene por qué extenderse a todo $L^2(X)$ porque no sabemos si $h \in L^2(X)$. Sin embargo, podemos considerar $T_h : \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$. En esta ocasión sí está bien definida puesto que las funciones sobre las que se aplica el operador tienen soporte compacto y son continuas (por su diferenciabilidad). Además T_h es $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$-continua. En efecto, veamos que T_h es secuencialmente continua. Sea $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ convergente hacia f en $(\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty})$. En particular, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos hacia la función f, por tanto podemos permutar límite e integral,

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \iint_X h(z)f(z)dxdy = \iint_X h(z) \lim f_n(z)dxdy \\ &= \lim \iint_X h(z)f_n(z)dxdy = \lim T_h(f_n). \end{aligned}$$

Hemos probado que T_h es una distribución en X. Más aún, si h_1 y h_2 son dos funciones continuas en X, $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$, tales que $T_{h_1} = T_{h_2}$ entonces $h_1 = h_2$, es decir, el operador lineal,

$$T : \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^*(X, \mathbb{C}), \quad h \longmapsto T_h,$$

es inyectivo. En efecto, basta probar que $T_h = 0$ implica que $h = 0$. Supongamos que $T_h = 0$. Entonces para todo $K \subset X$ compacto, $T_h^K\big|_{\mathcal{C}_0^\infty(K,\mathbb{C})} = 0$. Dado que $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(K, \mathbb{C})}^{L^2(K)} = L^2(K)$, el corolario del Teorema de Riesz nos dice que

$$T_h^K = \langle \cdot, \overline{h} \rangle_{L^2(K)} = 0 \Longrightarrow h\big|_K = 0.$$

Como K es un compacto cualquiera, $h = 0$ en todo X. Podemos pensar en $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ como un subespacio vectorial de $\mathcal{D}^*(X, \mathbb{C})$ puesto que $T : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathcal{D}^*(X, \mathbb{C})$ es un monomorfimo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, y por tanto, $\mathcal{C}^0(X)$ es isomorfo al subespacio de $\mathcal{D}^*(X, \mathbb{C})$ definido por $\{T_h\}_{h \in \mathcal{C}^0(X)}$. En definitiva, dada $h \in \mathcal{C}^0(X)$, existe una única distribución T_h que la representa.

Proposición 6.3.6. *Si T_{h_1} y T_{h_2} son distribuciones que representan a las funciones continuas h_1 y h_2, de forma que $T_{h_1} = T_{h_2}$, entonces $h_1 \equiv h_2$.*

6.3.1. Diferenciación de distribuciones

Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\iint_{\mathbb{C}} h(z) D^\alpha f(z) dxdy = (-1)^{|\alpha|} \iint_{\mathbb{C}} f(z) D^\alpha h(z) dxdy.$$

Probemos esta fórmula mediante un proceso inductivo.

1. Calculemos $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dxdy$. Dado que f tiene soporte compacto, la función $h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ es integrable en $\mathbb{R}^2$ y podemos utilizar el Teorema de Fubini,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx \right) dy.$$

La integral interior, tiene por integrando a la función $x \mapsto h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, para cada $y \in \mathbb{R}$ fijo. Para cada $y \in \mathbb{R}$, llamando $u(x) = h(x,y)$ y $v'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y aplicando integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx &= [h(x,y) f(x,y)]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) f(x,y) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) f(x,y) dx, \end{aligned}$$

donde

$$[h(x,y) f(x,y)]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0$$

porque f tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^2$, y para cada $y \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ no está acotado en $\mathbb{R}^2$. Uniendo todo y aplicando Fubini de nuevo,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dxdy = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) f(x,y) dxdy.$$

2. Del mismo modo, se prueba,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)f(x,y)dxdy.$$

3. Paso inductivo. Supongamos que la fórmula es válida para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_1 \leq k_1$ y $\alpha_2 \leq k_2$. Probemos el resultado para (k_1+1, k_2+1). En efecto, utilizamos la hipótesis de inducción para el multiíndice (k_1, k_2),

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)D^{(k_1+1,k_2+1)}f(x,y)dxdy = (-1)^{k_1+k_2}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)D^{(k_1,k_2)}h(x,y)dxdy.$$

Finalmente, aplicando los casos bases a la última integral,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)D^{(k_1+1,k_2+1)}f(x,y)dxdy &= (-1)^{k_1+k_2}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)D^{(k_1,k_2)}h(x,y)dxdy \\ &= (-1)^{k_1+k_2+2}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)D^{(k_1+1,k_2+1)}h(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Si tomamos un abierto X de $\mathbb{C}$, esto se puede extrapolar fácilmente para funciones $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ y $h \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$. En efecto, sea $B(0,R)$ tal que $\text{sop}(f) \subset D(0,R)$. Por el Lema de Urysohn existe $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $\varphi|_{D(0,R)} = 1$ y $\text{sop}(\varphi) \subset D(0,R')$, $R' > R$. Denotemos por $\widehat{f}$ a la extensión por cero de f,

$$\widehat{f} = \begin{cases} f & \text{en} \quad X \\ 0 & \text{en} \quad \mathbb{C}\setminus X. \end{cases}$$

que satisface $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y de soporte compacto, $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Denotemos por $\widehat{h} = \varphi \cdot h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Entonces, por lo probado antes,

$$\iint_{\mathbb{C}} \widehat{h}(x,y)D^\alpha \widehat{f}(z)dxdy = (-1)^{|\alpha|}\iint_{\mathbb{C}} \widehat{f}(x,y)D^\alpha \widehat{h}(x,y)dxdy.$$

Ahora bien, las condiciones sobre los soportes nos dan que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{C}} \widehat{h}(z)D^\alpha \widehat{f}(z)dxdy &= \iint_{\text{sop}(f)} \widehat{h}(z)D^\alpha \widehat{f}(z)dxdy \overset{(*)}{=} \iint_{\text{sop}(f)} h(z)D^\alpha f(z)dxdy \\ &= \iint_X h(z)D^\alpha f(z)dxdy\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\widehat{h} = h$ en $\text{sop}(f) \subset D(0,R)$, donde φ es uno. De igual modo,

$$(-1)^{|\alpha|}\iint_{\mathbb{C}} \widehat{f}(z)D^\alpha \widehat{h}(z)dxdy = (-1)^{|\alpha|}\iint_X f(z)D^\alpha h(z)dxdy.$$

esto prueba que

$$\iint_X h(z)D^\alpha f(z)dxdy = (-1)^{|\alpha|}\iint_X f(x,y)D^\alpha h(x,y)dxdy. \tag{6.14}$$

esto motiva la definición de *diferencial de una distribución*. Al igual que en Geometría Riemanniana se introduce el concepto de diferencial débil de una función de L^2, forzando a que se cumpla el teorema de la divergencia, aquí, forzamos a que se cumpla la fórmula 6.14.

Definición 6.3.7. Sea X un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea $T \in \mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$ una distribución. Definimos

$$D^\alpha T : \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (D^\alpha T)(f) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f).$$

- La aplicación D^α está bien definida porque $D^\alpha f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$.
- Es lineal por la linealidad de las distribuciones.
- Es continua. En virtud del Teorema 6.3.3, basta probar la continuidad secuencial. Sean $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ y $\{f_n\} \to f$ en $(\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty})$. Entonces, como T es una distribución, en particular es $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$-continua, luego

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha T(f_n) = \lim_{n\to\infty} T(D^\alpha f_n) = T(\lim_{n\to\infty} D^\alpha f_n),$$

Como f_n converge a f en $(\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty})$ entonces $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ en $(\mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty})$ por la Proposición 6.3.2. Hemos probado que

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha T(f_n) = T(D^\alpha f) = D^\alpha T(f).$$

Por tanto $D^\alpha \in \mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$. esta definición es consistente. Si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ y consideramos T_f, la única distribución asociada a f, para cada $g \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$, usando la fórmula (6.14) obtenemos que

$$\iint_X D^\alpha f(z) g(z) dxdy = (-1)^{|\alpha|} \iint_X f(z) D^\alpha g(z) dxdy = (-1)^\alpha T_f\left(D^\alpha g\right) = (D^\alpha T_f)(g).$$

El miembro de la izquierda está definido en $L^2(X)$, porque las funciones que intervienen son continuas con soporte compacto en X. Así,

$$(D^\alpha T_f)(g) = \langle D^\alpha f, \overline{g}\rangle_{L^2(X)}.$$

Por tanto, $D^\alpha T_f$ se puede ver como un funcional lineal y continuo de $L^2(X)$, que viene determinado **unívocamente** por el Teorema de Riesz como

$$D^\alpha T_f = \langle D^\alpha f, \bar{\cdot}\rangle_{L^2(X)},$$

en otras palabras, la derivación de una distribución del tipo T_f, viene determinada por la derivación clásica de la función f.

Podemos definir los operadores clásicos en términos de distribuciones.

Definición 6.3.8. Sea X un abierto de $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{D}^*(X,\mathbb{C})$.

- **Laplaciano**.

$$\Delta T(f) := D^{(2,0)}T(f) + D^{(0,2)}T(f) = T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = T\left(\Delta f\right).$$

$$\Delta T = T(\Delta).$$

- **Operadores** $\dfrac{\partial}{\partial z}$ **y** $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

$$\frac{\partial T}{\partial z}(f) := \frac{1}{2}\left(D^{(1,0)}T(f) - iD^{(0,1)}T(f)\right) = T\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}(f) := \frac{1}{2}\left(D^{(1,0)}T(f) + iD^{(0,1)}T(f)\right) = T\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right).$$

Observación 6.3.5. La Proposición 6.3.2 nos dice que todos estos operadores son $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$-continuos, y por tanto, distribuciones.

A continuación generalizamos los teoremas de derivación bajo signo integral para distribuciones.

Teorema 6.3.5. *Sea X un abierto de $\mathbb{C}$ y $K \subset X$ compacto. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado, $g : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable en el sentido real y de soporte compacto contenido en $K \times I$. Sea $T \in \mathcal{D}^*(X, \mathbb{C})$. Para cada $t \in I$, denotamos $g(\cdot, t) \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$. Definimos*[5]*,*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(t) := T(g(\cdot, t)).$$

Entonces, φ es derivable y

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} T(g(\cdot, t)) = T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, t)\right), \quad \forall t \in I.$$

Demostración. Veamos que φ es derivable. Las derivadas que vamos a calcular, no se pueden calcular puntualmente, no podemos fijar $z \in X$. Sea $t \in I$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(g(\cdot, t+h)) - T(g(\cdot, t))}{h} = \lim_{h \to 0} T\left(\frac{g(\cdot, t+h) - g(\cdot, t)}{h}\right).$$

El miembro de la derecha está bien definido. En efecto, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ consideramos

$$\psi_{(t,h)}(z) = \frac{g(z, t+h) - g(z, t)}{h}, \quad z \in X.$$

La función $\psi_{(t,h)}$ tiene soporte compacto contenido en K porque t y h son fijos y g tiene soporte compacto contenido en $K \times I$. Así, $\psi_{(t,h)} \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$ que nos asegura que $T(\psi_{(t,h)})$ está definido. Por otro lado,

$$\lim_{h \to 0} \psi_{(t,h)}(z) = \frac{\partial g(z, t)}{\partial t} \quad \text{en } (\mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty}).$$

En efecto, para cualquier $z \in X$ y todo multiíndice α, el Teorema de Schwartz sobre derivadas cruzadas nos dice

$$\begin{aligned} D^\alpha \frac{\partial g}{\partial t}(z, t) = D^{(\alpha,1)} g(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} D^\alpha g(z, t) &= \lim_{h \to 0} \frac{D^\alpha g(z, t+h) - D^\alpha g(z, t)}{h} \\ = \lim_{h \to 0} D^\alpha \left(\frac{g(z, t+h) - g(z, t)}{h}\right) &= \lim_{h \to 0} D^\alpha \psi_{(t,h)}. \end{aligned}$$

Hemos probado así que

$$\{\psi_{(t,h)}\}_{h \in \mathbb{R}^*} \longrightarrow \frac{\partial g(\cdot, t)}{\partial t} \quad \text{en } (\mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty}).$$

Finalmente, la $\mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$-continuidad de T nos da que

$$\varphi'(t) = \lim_{h \to 0} T(\psi_{(t,h)}) = T\left(\frac{\partial g(\cdot, t)}{\partial t}\right).$$

□

[5] Está bien definida porque fijado $t \in I$ la aplicación $g(\cdot, t)$ es diferenciable y de soporte compacto.

También podemos dar un Teorema de Derivación análogo en varias variables.

Teorema 6.3.6. *Sean X e Y abiertos de $\mathbb{C}$ y $K \subset X$, $L \subset Y$ compactos. Sea $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable y con soporte contenido en $K \times L$, que es compacto de $X \times Y$ con la topología producto. Denotemos $d\mu(w) = dw_1 dw_2$, $w = w_1 + iw_2$, a la medida de Lebesgue de $\mathbb{C}$, y definamos,*

$$\Lambda : X \longrightarrow \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C}), \quad \Lambda : z \longmapsto \iint_Y g(z,w) dw_1 dw_2.$$

Entonces, para toda distribución $T \in \mathcal{D}^*(X, \mathbb{C})$ tenemos que

$$T\left(\iint_Y g(\cdot, w) dw_1 dw_2\right) = \iint_Y T\left(g(\cdot, w)\right) dw_1 dw_2.$$

Demostración. Observemos que $T\left(g(\cdot, w)\right)$ es una función de $w \in Y$. Comprobemos que es una función diferenciable. Sea $w \in Y$ fijo y tómese un cubo $Q = (a,b) + i(c,d) \subset Y$ que contiene a w (Y es abierto de $\mathbb{C}$). Denotamos $w = w_1 + iw_2 \equiv (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. De este modo, $w_1 \in (a,b)$ y $w_2 \in (c,d)$, que son intervalos no degenerados. Definimos

$$\varphi_1 : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_1(t) := T(g(\cdot, t, w_2)),$$

es decir, hemos fijado la coordenada del eje Y, que viene representada por w y hemos dejado oscilar la coordenada X, en el intervalo (a,b). El Teorema 6.3.5 nos da que φ_1 es infinitamente derivable. De igual modo,

$$\varphi_2 : (c,d) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_2(t) := T(g(\cdot, w_1, t)),$$

es infinitamente derivable. Por lo tanto, $w \mapsto T\left(g(\cdot, w)\right)$ (en las dos variables) en diferenciable.

Consideremos $R = [-L_1, L_1] + i[-L_2, L_2]$ un cubo que contenga al compacto L. Para cada $z \in X$ fijo, tenemos la sección de la función g extendida por cero a todo el cubo,

$$g_z : R \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g_z(w) = \begin{cases} g(z,w), & \text{si} \quad w \in L \\ 0, & \text{si} \quad w \notin R \setminus L \end{cases}$$

Dado que el soporte de g está contenido en $K \times L$, entonces $\operatorname{sop}(g_z) \subset L$, para cada $z \in X$. Por tanto la extensión por cero anterior es diferenciable en el cubo R. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dividimos cada lado del cubo en n cubos, dividiendo así todo R en n^2 cubos, es decir,

$$R_{lm} = \left[-L_1 + l\frac{2L_1}{n}, -L_1 + (l+1)\frac{2L_1}{n}\right] + i\left[-L_2 + m\frac{2L_2}{n}, -L_2 + (m+1)\frac{2L_2}{n}\right]$$
$$l, m \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Consideramos $w_{lm} \in R_{lm}$ un punto de cada cuadrado. Definimos $G_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$G_n(z) := \frac{\operatorname{vol}(R)}{n^2} \sum_{l,m=1}^{n} g(z, w_{lm}), \quad \operatorname{vol}(R) = 16 L_1^2 L_2^2.$$

Por la integrabilidad y continuidad de la función $g(z_0, \cdot)$, tenemos que $G_n \to \iint_Y g(\cdot, w) dw_1 dw_2$ en $L^\infty(K)$. Además, se da la convergencia de todas las derivadas, aplicando el mismo argumento sobre las derivadas de G_n. Finalmente, como los soportes de G_n están todos contenido en K, tenemos que la convergencia de $\{G_n\}$ es en distribución hacia $\iint_Y g(\cdot, w) dw_1 dw_2$. Por la continuidad de T, tenemos que

$$T\left(\iint_Y g(\cdot, w) dw_1 dw_2\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} G_n\right) = \iint_Y T\left(g(\cdot, w)\right) dw_1 dw_2.$$

$\square$

Antes de pasar a la demostración del Lema de Weyl, vamos a dar el siguiente resultado concerniente a las aproximaciones de la identidad.

Lema 6.3.1. *Sea $\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, con soporte contenido en el disco unidad, radial y con integral de Lebesgue unitaria, es decir, $\int_{\mathbb{C}} \rho dxdy = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, consideramos la función $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ cuyo soporte está contenido en $D(0,\varepsilon)$. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z \in U$ tal que $\overline{D(z,\varepsilon)} \subset U$. Si $u : D(z,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en el disco $D(z,\varepsilon)$, entonces*

$$(\rho_\varepsilon * u)(z) = u(z).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que u es armónica en $D(z,\varepsilon)$, entonces satisface la propiedad del valor medio, es decir, para cada $r \in (0,\varepsilon)$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta.$$

Por lo tanto, al ser ρ_ε radial,

$$\begin{aligned}
(\rho_\varepsilon * u)(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(w)u(z-w)dw_1dw_2 = \iint_{D(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(w)u(z-w)dw_1dw_2 \\
&= \iint_{(0,\varepsilon)\times(0,2\pi)} \rho_\varepsilon(re^{i\theta})u(z-re^{i\theta})rdrd\theta = \iint_{(0,\varepsilon)\times(0,2\pi)} \rho_\varepsilon(r)u(z-re^{i\theta})rdrd\theta \\
&= \int_0^\varepsilon 2\pi r\rho_\varepsilon(r)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z-re^{i\theta})d\theta\right) \\
&= \int_0^\varepsilon 2\pi r\rho_\varepsilon(r)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\varphi})d\varphi\right) \\
&= (2\pi u(z))\int_0^\varepsilon r\rho_\varepsilon(r)dr = u(z)\int_0^{2\pi}\int_0^\varepsilon r\rho_\varepsilon(r)drd\theta \\
&= u(z)\int_0^{2\pi}\int_0^\varepsilon r\rho_\varepsilon(re^{i\theta})d\theta = u(z)\int_{D(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(w)dw_1dw_2 = u(z).
\end{aligned}$$

□

Corolario 6.3.2. *Sea $\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, con soporte contenido en el disco unidad, radial y con integral de Lebesgue unitaria, es decir, $\int_{\mathbb{C}} \rho dxdy = 1$. Para cada$\varepsilon > 0$, consideramos la función $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ cuyo soporte está contenido en $D(0,\varepsilon)$. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $z \in U$ tal que $\overline{D(z,\varepsilon)} \subset U$. Sea $f : D(z,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que*

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}} = 0.$$

Entonces, si $f = u + iv$,

$$(\rho_\varepsilon * f)(z) = (\rho_\varepsilon * u)(z) + i(\rho_\varepsilon * v)(z) = u(z) + iv(z) = f(z).$$

Demostración. Basta observar que si $\Delta f = 0$, entonces su parte real e imaginaria son funciones $u, v : D(z,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ armónicas,

$$\begin{aligned}
0 = \Delta f &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}} + 4i\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\overline{z}} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad = \Delta u + i\Delta v
\end{aligned}$$

por lo que u y v son armónicas. □

Estamos en las condiciones de demostrar el Lema de Weyl, que en pocas palabras nos dice que las distribuciones armónicas, son distribuciones que representan a cierta función armónica.

Teorema 6.3.7 (Lema de Weyl)**.** *Sea U un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea T una distribución sobre U, esto es,*

$$T : \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \textit{lineal continuo.}$$

Entonces, $\Delta T = 0$ si y sólo si existe una función diferenciable en $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Delta h = 0$ (armónica compleja) y $T = T_h$, es decir, para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$, se cumple que

$$T(f) = \iint_U h(z)f(z)dxdy = T_h(f).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $U_\varepsilon = \left\{z \in U : \overline{D(z, \varepsilon)} \subset U\right\}$. Para cada $z \in U_\varepsilon$, la función

$$\varphi_z : w \longmapsto \rho_\varepsilon(w - z)$$

tiene soporte compacto en U, puesto que el soporte de ρ_ε es compacto contenido en $D(0, \varepsilon)$. Dado que φ_z tiene soporte compacto en U, podemos definir,

$$h : U_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) := T(\varphi_z) = T\left(w \longmapsto \rho_\varepsilon(w - z)\right).$$

El Teorema (6.3.6) nos dice que h es diferenciable en U_ε.

Si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ con soporte compacto contenido en U_ε, entonces $\rho_\varepsilon * f$ tiene soporte compacto en U, por tenerlo ρ_ε. De nuevo, el Teorema (6.3.6) nos dice que

$$\begin{aligned} T(f * \rho_\varepsilon) &= T\left(w \longmapsto \iint_U \rho_\varepsilon(w - z)f(z)dxdy\right) \\ &= \iint_U f(z)T\left(w \longmapsto \rho_\varepsilon(w - z)\right)dxdy \\ &= \iint_U f(z)h(z)dxdy = T_h(f) \end{aligned}$$

Por tanto, se llega a la igualdad,

$$T(f * \rho_\varepsilon) = T_h(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}),\ \operatorname{sop}(f) \subset U_\varepsilon \text{ compacto.} \tag{6.15}$$

Dado que f es una función de soporte compacto en el abierto U_ε, podemos extenderla por cero a todo $\mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, seguiremos denotando a esta extensión por f. El Corolario 4.6.1 nos dice que existe una función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable y tal que

$$\Delta g = 4\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}} = f.$$

En particular, si tomamos $z \in V := \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(f)$, entonces

$$\Delta g(z) = f(z) = 0.$$

Por lo tanto, $g|_{\mathbb{C}\setminus\operatorname{sop}(f)} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{sop}(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene laplaciano nulo. Del Corolario 6.3.2 deducimos que, para todo $z \in V_\varepsilon := \left\{w \in V : \overline{D(w, \varepsilon)} \subset V\right\}$ se verifica

$$g(z) = (g * \rho_\varepsilon)(z), \quad \forall z \in V_\varepsilon := \left\{w \in V : \overline{D(w, \varepsilon)} \subset V\right\}.$$

Definimos

$$\psi := g - g * \rho_\varepsilon, \quad \psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ \operatorname{sop}(\psi) \subset U \text{ compacto.}$$

Dado que el operador D^α conmuta con las convoluciones,

$$\Delta\psi = \Delta g - \Delta(g * \rho_\varepsilon) = \Delta g - (\Delta g) * \rho_\varepsilon = f - f * \rho_\varepsilon.$$

Podemos expresar $f = \Delta\psi + f * \rho_\varepsilon$. De este modo, al darse $\Delta T = 0$,

$$T(f) = T(\Delta\psi + f * \rho_\varepsilon) = T(\Delta\psi) + T(f * \rho_\varepsilon) = \Delta T(\psi) + T(f * \rho_\varepsilon) = T(f * \rho_\varepsilon)$$

Así pues, uniendo esto a (6.15), tenemos

$$T_h(f) = T(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}),\ \operatorname{sop}(f) \subset U_\varepsilon \text{ compacto.}$$

Dado que dicha propiedad es cierta para todo $\varepsilon > 0$ y el conjunto

$$A := \left\{ f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}) : \operatorname{sop}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon \text{ compacto}, \varepsilon > 0 \right\},$$

es denso en $(\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})})$ y los funcionales T y T_h son continuos, entonces T y T_h coinciden en $\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$. □

Corolario 6.3.3. *Si T es una distribución sobre U tal que $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $T_f = T$.*

Demostración. Si $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$ entonces $\Delta T = 0$, por tanto, existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$, $\Delta f = 0$ y $T = T_f$. Dado que $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. En consecuencia, f es holomorfa en U y $T = T_f$. □

Observación 6.3.6. El Lema de Weyl nos da “un análogo” al Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert.

Capítulo 7

Teorema de Aproximación de Runge

Sea X una superficie de Riemann y $A \subset X$. Denotamos por $\mathfrak{h}_X(A)$ a la unión de A con las componentes conexas relativamente compactas de $X \setminus A$. Diremos que A es Runge si $\mathfrak{h}_X(A) = A$.

Diremos que f es holomorfa en $A \subset X$, si existe un abierto de U de X y una función $\widehat{f}$ holomorfa en U tal que $\widehat{f}\Big|_A = f$. En particular, a lo largo de este capítulo vamos a trabajar con funciones holomorfas en compactos. Esta es una diferencial fundamental con el Teorema de Mergelyan-Bishop que expondremos en el Capítulo 9.

Las herramientas desarrolladas en los capítulos previos nos van a permitir demostrar el siguiente resultado central.

Teorema de Aproximación de Runge. *Sea X una superficie de Riemann abierta y $K \subset X$ compacto Runge. Entonces, toda función holomorfa en K puede aproximarse uniformemente en K por funciones holomorfas en X, es decir, para toda $f \in \mathcal{O}(K)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ tal que $\{f_n|_K\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ uniformemente, esto es, $\{f_n|_K\} \longrightarrow f$ en $L^\infty(K)$.*

La prueba es un compendio de resultados de Análisis Funcional y de operadores de formas diferenciales y holomorfas.

7.1. Estructura de espacio vectorial topológico en el espacio de funciones diferenciables en una superficie de Riemann

Sea X una superficie de Riemann y sea Y un abierto de X. El espacio $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita. Sabemos dotar ciertas estructuras especiales a los espacios de funciones diferenciables. La forma más precisa de estudiar este espacio es mediante el Lema de Weyl, pues tal y como comentamos, es una especie de Teorema de Representación de Riesz.

Así pues, intentamos introducir una estructura compatible con las distribuciones en $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$. Para ello, tómese $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento mediante compactos de Y. Supongamos además que cada K_j está contenido en algún entorno coordenado $(U_j, z_j = x_j + iy_j)$,

$\forall j \in \mathbb{N}$. Para un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \rho_j^\alpha : & \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & \|D_j^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \end{array}$$

es decir, al ser K_j compacto y estar trabajando en $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$,

$$\|f\|_{K_j,\alpha} := \rho_j^\alpha(f) = \max_{a \in K_j} \left\{ |D_j^\alpha f(a)| \right\}, \quad D_j^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{\alpha_1} \partial y_j^{\alpha_2}}.$$

Las propiedades fundamentales de estas aplicaciones son las siguientes.

- Todas son no negativas.
- Son absolutamente homogéneas, esto es, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

  $$\rho_j^\alpha(\lambda f) = |\lambda| \rho_j^\alpha(f), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}),$$

  para cualquier α y $j \in \mathbb{N}$.
- Verifica la desigualdad triangular. Para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$,

  $$\rho_j^\alpha(f + g) \leq \rho_j^\alpha(f) + \rho_j^\alpha(g),$$

  para cualquier α y $j \in \mathbb{N}$.

Así pues $\{\rho_j^\alpha\}_{j \in \mathbb{N}}^{\alpha \in \mathbb{N}^2}$ es una familia **numerable** de seminormas y es por tanto un espacio de Fréchet. El Teorema 6.3.1 nos dice que existe una única topología vectorial sobre $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$ donde

$$U_j^\alpha(\varepsilon) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}) : \rho_j^\alpha(f) < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

es una base de entornos de cero. esta topología no depende de los $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tomados ni de los entornos coordenados. Una cuestión fundamental es saber que topología se induce en $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C})$. La topología inducida es la convergencia uniforme por compactos, puesto que si tomamos una sucesión de funciones holomorfas que convergen uniformemente por compactos, su límite es holomorfo y todas sus derivadas convergen a las derivadas del límite.

En los espacios de formas diferenciales se pueden obtener resultados análogos. Por ejemplo, en el espacio de formas $\mathcal{E}^{(0,1)}(Y)$, que será el espacio más importante, tenemos las seminormas

$$\rho_j^\alpha(\omega) := \rho_j^\alpha(f_j), \quad \omega = f_j d\bar{z}_j \text{ en } U_j \cap Y.$$

A las topologías de la seminormas las denotaremos como $\tau_{\mathcal{C}^\infty}$, $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$ y $\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}$ respectivamente.

7.2. Operadores lineales continuos

Para estudiar más a fondo los espacios vectoriales topológicos anteriormente definidos estudiamos sus funcionales lineales continuos. El primer resultado trata sobre una condición necesaria para ser funcional lineal continuo en $\tau_{\mathcal{C}^\infty}$, $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty}$ y $\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}$ respectivamente.

Lema 7.2.1. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X. Entonces todo funcional continuo*

$$T : (\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

tiene soporte compacto, es decir, existe un compacto $K \subset Y$ tal que

$$T(f) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}),\ f|_K \equiv 0.$$

Demostración. Sea $\{(U_k, z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ un atlas de Y y sean $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relativamente compactos dentro de U_k de forma que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ recubren X. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideramos $K_j = \overline{V_j} \subset U_j$. Así, $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por compactos contenidos en entornos coordenados de Y. Por la continuidad de T, $T^{-1}(\mathbb{D})$ es abierto de $(\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})$. Observemos que la función idénticamente nula vive en $T^{-1}(\mathbb{D})$ porque T es lineal. esto nos dice que $T^{-1}(\mathbb{D})$ es un entorno de cero. Dado que los conjuntos

$$U_j^\alpha(\varepsilon) := \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}) : \|f\|_{K_j,\alpha} < \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

son una base de entornos de cero en la topología $\tau_{\mathcal{C}^\infty}$, existe un número finito de entornos[1] tales que

$$U := U_{j_1}^{\alpha^1}(\varepsilon) \cap \cdots \cap U_{j_n}^{\alpha^n}(\varepsilon) \subset T^{-1}(\mathbb{D}).$$

Sea $K := \cup_{r=1}^n K_{j_r}$, que es compacto por ser una unión finita de compactos. Veamos que este compacto sirve. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C})$ con $f|_K = 0$. Así, f se anula en $K_{j_r}, \forall r \in \{1,\ldots,n\}$. Como f es nula en K, entonces es nula en $\{V_{j_r}\}_{r=1}^n$, que son abiertos. Necesariamente todas sus derivadas son nulas y en consecuencia

$$\|f\|_{K_{j_r},\alpha^r} = 0, \quad \forall r \in \{1,\ldots,n\}.$$

De este modo, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, al ser $\rho_{j_r}^{\alpha^r}$ sublineal

$$\|\lambda f\|_{K_{j_r},\alpha^r} = |\lambda|\|f\|_{K_{j_r},\alpha^r} = 0 < \varepsilon, \quad \forall r \in \{1,\ldots,n\}.$$

Por lo tanto, la recta vectorial $\mathbb{C}\cdot f$ está totalmente contenida en el entorno U. Entonces $T(\lambda f) \in U \subset \mathbb{D}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por consiguiente

$$T(\lambda f) < 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow |T(f)| < \frac{1}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tomando $|\lambda| \to 0$, llegamos a que $T(f) = 0$. □

Usando el mismo razonamiento obtenemos un resultado análogo para $\mathcal{E}^{(0,1)}(Y)$.

Lema 7.2.2. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X. Entonces todo funcional continuo*

$$T : (\mathcal{E}^{(0,1)}(Y), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

tiene soporte compacto, es decir, existe un compacto $K \subset Y$ tal que

$$T(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(Y), \omega|_K \equiv 0.$$

El siguiente resultado caracteriza de forma constructiva funcionales que se anulan en ciertos subespacios de formas diferenciales, que estará relacionadas con las soluciones de la ecuación inhomogénea.

Lema 7.2.3. *Sea X una superficie de Riemann y sea Y un abierto de X. Sea*

$$S : (\mathcal{E}^{(0,1)}(X), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

un funcional lineal continuo tal que para toda $g \in \mathcal{C}_0^\infty(X,\mathbb{C})$ cuyo soporte está contenido en Y se satisface

$$S(\overline{\partial} g) = 0.$$

[1] Los entornos podrían tener asociados distintos ε, sin embargo, al haber una cantidad finita de ellos, podemos tomar el mínimo.

Existe una 1-forma ***holomorfa*** *en Y, $\sigma \in \Omega^1(Y)$ tal que para toda $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ de soporte compacto contenido en Y, se satisface*

$$S(\omega) = \iint_Y \sigma \wedge \omega.$$

Demostración. Sea $(U, z : U \longrightarrow V)$ una carta de X, tal que $U \subset Y$. Para cada $f \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$ existe una identificación natural entre $\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$ y $\mathcal{C}_0^\infty(V, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^\infty(V, \mathbb{C}), \quad f \mapsto f \circ z^{-1}.$$

En esta carta, dada $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $\omega|_U = f d\overline{z}$ en U. Recíprocamente, dada $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tenemos que $f d\overline{z}$ es una 1-forma de tipo $(0,1)$. Definimos

$$S_U : \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto S(\widetilde{f} \cdot d\overline{z}),$$

donde

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{en} \quad U \\ 0 & \text{en} \quad X \setminus U \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ es diferenciable sobre X porque el soporte de f es compacto contenido en U. La aplicación

$$\Upsilon : (\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathcal{E}^{(0,1)}(X), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}), \quad f \longmapsto \widetilde{f} d\overline{z},$$

es continua. En efecto, basta ver que es secuenciamente continua por el Teorema 6.3.3. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $(\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})})$, entonces para todo multiíndice α se cumple que

$$\{D^\alpha f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{L^\infty(K)}{\longrightarrow} D^\alpha f,$$

para cualquier compacto K. En particular, dado un recubrimiento por compactos $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, contenidos en entornos coordenados se tiene que

$$\|f_n d\overline{z} - f d\overline{z}\|_{K_j,\alpha} = \rho_j^\alpha(f_n d\overline{z} - f d\overline{z}) \overset{\text{def.}}{=} \rho_j^\alpha(f_n - f) = \|D^\alpha f_n - D^\alpha f\|_{L^\infty(K_j)} \overset{L^\infty(K_j)}{\longrightarrow} 0.$$

esto prueba $\{f_n d\overline{z}\}_{n\in\mathbb{N}} \to f d\overline{z}$ en $(\mathcal{E}^{(0,1)}(U), \tau_\rho)$. Tenemos que:

- S es un funcional $\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}$-$|\cdot|$ continuo.
- Υ es operador $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})}$-$\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}$ continuo.
- Por los dos puntos previos, la composición

  $$S_U = S \circ \Upsilon : (\mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})}) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

  es continua.

Hemos probado que S_U es un funcional lineal $\tau_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})}$-$|\cdot|$ continuo, es decir, S_U es una distribución en U. esta aplicación preserva la relación entre S y $\overline{\partial}$. En efecto, sea $g \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$. En la carta (U, z), tenemos que $\overline{\partial} g = \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$. Como $S \circ \overline{\partial}|_{\mathcal{C}_0^\infty(U,\mathbb{C})} = 0$ por hipótesis, inferimos que

$$S_U\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right) = S\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} d\overline{z}\right) = S(\overline{\partial} g) = 0,$$

porque g tiene soporte compacto en $U \subset Y$. Para toda $g \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$ se tiene que $S_U\left(\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right) = 0$ y S_U es una distribución, por tanto $\dfrac{\partial S_U}{\partial \overline{z}} = 0$. Por el Corolario 6.3.3 existe una función holomorfa $h_U \in \mathcal{O}(U)$ tal que $S_U = T_{h_U}$, es decir, para toda función $f \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C})$,

$$S_U(f) = \iint_U h_U(x,y)f(x,y)dxdy = \iint_U h_U(z)f(z)(-2i)dz \wedge d\overline{z}.$$

Renombrando h_U como $-2ih_U$, que sigue siendo holomorfa en U, podemos expresar,

$$S_U(f) = \iint_U h_U(z)f(z)dz \wedge d\overline{z} = T_{h_U}(f).$$

Definimos $\sigma_U := h_U dz \in \Omega^1(U)$. La 1-forma holomorfa σ_U resuelve nuestro problema localmente, esto es, si $\omega|_U = f d\overline{z}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ entonces

$$S(\omega) = S_U(f) = \iint_U h_U(z)f(z)dz \wedge d\overline{z} = \iint_U \sigma_U \wedge \omega,$$

para toda $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ con soporte compacto contenido en U. Sea (U', z') una carta tal que $U' \subset Y$ y $U \cap U' \neq \varnothing$. Dada $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ de soporte compacto contenido en $U \cap U'$ tenemos que

$$\iint_U \sigma_U \wedge \omega = S(\omega) = \iint_{U'} \sigma_{U'} \wedge \omega$$

por tanto $T_{h_U} = T_{h_{U'}}$. Por la Proposición 6.3.6 $h_U = h_{U'}$ en $U \cap U'$. En consecuencia, $\sigma_U = \sigma_{U'}$ en $U \cap U'$.

Tómese $\{(U_n, z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento por cartas de Y, es decir, $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n = Y$. Si $U_n \cap U_m \neq \varnothing$, entonces $\sigma_{U_n} = \sigma_{U_m}$.

- Si $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ y existe U_{n_0} tal que $\text{sop}(\omega) \subset U_{n_0}$, podemos definir

$$S(\omega) = \iint_{U_{n_0}} \sigma_{U_{n_0}} \wedge \omega = \iint_Y \sigma \wedge \omega.$$

- Extendemos esta definición para formas que no tengan soporte compacto contenido completamente en algún U_n. Sería una situación en la que el soporte de ω corta a varios entornos y no está contenido en ninguno de ellos

  Sea una partición de la unidad $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subordinada a $\{(U_n, z_n)\}$. Dado que $\text{sop}(\omega)$ es compacto contenido en Y, entonces solo corta a un número finito de entornos $U_{n_1}, \ldots, U_{n_r}$. Consideramos

$$\omega_j := \varphi_{n_j} \cdot \omega, \quad j = 1, \ldots, r.$$

  De este modo, ω_j es una 1-forma de tipo $(0,1)$ cuyo soporte está contenido en U_n. Como el soporte de ω solo corta a $\{U_{n_j}\}_{j=1}^r$ y al darse $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n = 1$, tenemos que

$$\omega = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n\right) \omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cdot \omega = \sum_{j=1}^r \varphi_{n_j} \omega = \sum_{j=1}^r \omega_j.$$

  Así pues,

$$S(\omega) = \sum_{j=1}^r S(\omega_j) = \sum_{j=1}^r \iint_Y \sigma \wedge \omega_j = \iint_Y \sigma \wedge \omega.$$

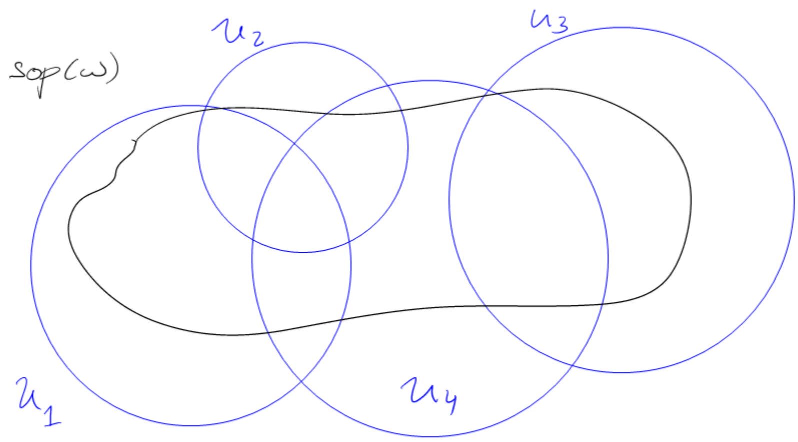


Figura 7.1: Soporte de ω cortando varios entornos

$\square$

Pasamos a una proposición clave en la demostración del Teorema de Aproximación de Runge, pues versa sobre el comportamiento de la imagen de la aplicación restricción. Para demostrar esta proposición usaremos una de las versiones del Teorema de Hahn-Banach para espacios localmente convexos cuya prueba puede encontrarse en [12, Teorema 3.4.11.].

Teorema 7.2.1. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo, M un subespacio de X y $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ continua. Existe $f \in X^*$ tal que $f|_M = g$.*

Corolario 7.2.1. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente conexo y sea $M_1 \subset M_2 \subset X$ subespacios. Supongamos que para todo funcional lineal continuo $f \in X^*$, se cumple que, si $f|_{M_1} \equiv 0$ entonces $f|_{M_2} \equiv 0$. Bajo estas condiciones, el subespacio M_1 es denso en M_2.*

También vamos a necesitar el Teorema de la aplicación abierta de Banach para espacios de Fréchet.

Teorema 7.2.2 (Aplicación abierta)**.** *Toda aplicación continua y sobreyectiva entre espacios de Fréchet es abierta.*

Por último, la Observación 6.3.1 nos decía que la topología de las seminormas inducía la topología de la convergencia uniforme por compactos, sobre las funciones holomorfas, a la que notaremos por τ_∞.

Damos un lema de carácter topológico antes de pasar a un resultado de densidad.

Lema 7.2.4. *Sea X una superficie de Riemann, Y un abierto de X y K un compacto contenido en Y. Existen U y V abiertos relativamente compactos contenidos en Y tales que*

$$K \subset U \subsetneq V \subset Y.$$

Demostración. Para cada $x \in K$ consideramos una carta $(U'_x \subset Y, \varphi_x)$ conforme al disco $D(0, 3/2)$. Para cada $x \in K$ definimos

$$U_x := \varphi_x^{-1}(\mathbb{D}).$$

Dado que φ_x es un homeomorfismo, su inverso también, luego la clausura conmuta con φ_x^{-1} para cada $x \in K$. En consecuencia $\overline{U}_x$ es homeomorfo $\overline{\mathbb{D}}$. En particular, U es relativamente compacto.

Por otra parte, $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in K}$ es un recubrimiento por abiertos de X del compacto K. Extraemos un subrecubrimiento finito $\{U_{x_i}\}_{i=1}^r$. Como $U_{x_i} \subset Y$, entonces

$$U := \cup_{i=1}^r U_{x_i} \subset Y.$$

U es relativamente compacto por ser unión finita de conjuntos relativamente compactos y es abierto por ser unión de abiertos. Así, hemos encontrado U abierto relativamente compacto de X tal que

$$K \subsetneq U \subset Y.$$

K no puede ser igual a U por la conexión de X y ser K un cerrado de X (por ser compacto y X Hausdorff).

Ahora tenemos dos opciones. Si $U \neq Y$ entonces aplicamos el proceso anterior al compacto $\overline{U}$. De este modo, encontramos V (que podría ser todo Y) tal que

$$K \subsetneq U \subsetneq \overline{U} \subset V \subset Y,$$

por lo que

$$K \subsetneq U \subsetneq V \subset Y.$$

SI $U = Y$. Dado que $K \subsetneq Y$, existe $y_0 \in Y \setminus K$. Consideramos

$$K \subsetneq U \setminus \{y_0\} \subsetneq Y.$$

$U \setminus \{y_0\}$ sigue siendo abierto. Además $\overline{U \setminus \{y_0\}} = \overline{U}$, luego $U \setminus \{y_0\}$ es relativamente compacto. En consecuencia, los abiertos $U\setminus\{y_0\}$ y U están en las condiciones del enunciado. □

Proposición 7.2.1. *Sea X una superficie de Riemann abierta. Sean Y, Y' abiertos relativamente compactos de X tales que*

$$Y \subset Y' \subset X,$$

y sea $r : (\mathcal{O}(Y'), \tau_\infty) \longrightarrow (\mathcal{O}(Y), \tau_\infty)$ la correspondiente aplicación restricción. Bajo estas condiciones, si Y es Runge entonces $r(\mathcal{O}(Y'))$ es denso en $(\mathcal{O}(Y), \tau_\infty)$. Con más precisión, dada $f \in \mathcal{O}(Y)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(Y')$ tal que para todo compacto $K \subset Y$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Demostración. Consideramos $r : (\mathcal{C}^\infty(Y', \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty}) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})$ la aplicación restricción entre funciones diferenciables, la cual induce la restricción r entre funciones holomorfas. Para probar que

$$r(\mathcal{O}(Y')) = \left\{ f|_{\mathcal{O}(Y)} : f \in \mathcal{O}(Y') \right\}$$

es denso en $(\mathcal{O}(Y), \tau_\infty)$ vamos a usar el Corolario 7.2.1. Para ello, hay que eligir adecuadamente el espacio total. Tenemos la cadena de inclusiones

$$M_1 := r(\mathcal{O}(Y')) \subset M_2 := \mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}).$$

Dado que la topología de las seminormas induce en el espacio de funciones holomorfas la topología de la convergencia uniforme por compactos, entonces la anterior cadena es de espacios vectoriales topológicos. Sea $T \in (\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})^*$ un funcional lineal continuo tal que $T|_{M_1} = T|_{r(\mathcal{O}(Y'))} \equiv 0$. Tenemos que probar que $T|_{M_2} = T|_{\mathcal{O}(Y)} \equiv 0$. Como X es abierta e Y' es relativamente compacto dentro de X, el Corolario 6.2.4 nos dice que dada $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ existe $f \in \mathcal{C}^\infty(Y',\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial} f = \omega|_{Y'}$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathcal{E}^{(0,1)}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ & \omega & \longmapsto & T\left(f|_Y\right) = T\circ r(f). \end{array}$$

- La aplicación S está bien definida. En efecto, si existen dos funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(Y',\mathbb{C})$ tales que
$$\begin{cases} \overline{\partial} f = \omega|_{Y'} \\ \overline{\partial} g = \omega|_{Y'} \end{cases}$$
entonces $\overline{\partial}(f-g) = 0$. Dado que $f-g$ es diferenciable en Y' y $\overline{\partial}(f-g)=0$, entonces $f-g \in \mathcal{O}(Y')$. Por hipótesis, $T(r(\mathcal{O}(Y'))) = 0$, por lo que $T \circ r(f-g) = 0$ es decir $T\circ r(f) = T\circ r(g)$. En consecuencia, S está bien definida.

- S es un funcional, por ser composición de aplicaciones lineales.

- S es $\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}} - |\cdot|$ continua, es decir, $S \in \left(\mathcal{E}^{(0,1)}(X), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}\right)$. Sea
$$V := \left\{(\omega, f) \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \times \mathcal{C}^\infty(Y',\mathbb{C}) : \overline{\partial} f = \omega|_{Y'}\right\}.$$
Dado que $(\mathcal{E}^{(0,1)}(X), \tau_\rho)$ y $(\mathcal{C}^\infty(Y',\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})$ son espacios de Fréchet entonces su producto es un espacio de Fréchet con la topología producto (Proposición 6.3.5). Comprobemos que V es cerrado en la topología producto. Como el producto es Fréchet, esto equivale a ver que es secuencialmente cerrado. Sea $\{(\omega_n, f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que
$$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}}}{\longrightarrow} \omega,$$
$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\tau_{\mathcal{C}^\infty}}{\longrightarrow} f.$$
Tenemos que comprobar que $(\omega, f) \in V$, esto es, $\overline{\partial} f = \omega|_{Y'}$. Como $\{(\omega_n, f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, entonces
$$\overline{\partial} f_n = \omega|_{Y'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Si probamos que $\{\overline{\partial} f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\partial} f$ en $(\mathcal{E}^{(0,1)}(Y'), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})$, habremos terminado. Sea $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento por compactos de Y' tales que $K_j \subset U_j$, (U_j, z_j) carta de Y', $\forall j \in \mathbb{N}$. Dado que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $(\mathcal{C}^\infty(Y',\mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})$, para todo multiíndice α y todo compacto K_j, $j \in \mathbb{N}$, tenemos que
$$\lim_{n\to\infty} \|D_j^\alpha f_n - D_j^\alpha f\|_{L^\infty(K_j)} = 0.$$
En particular, dado que en $K_j \subset U_j$,
$$\overline{\partial} f_n = \frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j, \quad \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Entonces,
$$\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(f_n) = \frac{1}{2}\left(D_j^{(1,0)} f_n + i D_j^{(0,1)} f_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para todo multiíndice α

$$D_j^{\alpha}\left(\frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}_j}\right) = \frac{1}{2}\left(D_j^{(\alpha_1+1,\alpha_2)} f_n + i D_j^{(\alpha_1,\alpha_2+1)} f_n\right).$$

De esta manera, para cada K_j, $j \in \mathbb{N}$ y todo multiíndice α, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \rho_j^{\alpha}(\overline{\partial} f_n - \overline{\partial} f) = \lim_{n\to\infty} \left\| D_j^{\alpha} \frac{\partial f_n}{\partial \overline{z}_j} - D^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \right\|_{L^\infty(K_j)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}\left(D_j^{(\alpha_1+1,\alpha_2)} f_n + i D_j^{(\alpha_1,\alpha_2+1)} f_n\right) - \left(\frac{1}{2}\left(D_j^{(\alpha_1+1,\alpha_2)} f + i D_j^{(\alpha_1,\alpha_2+1)} f\right)\right) \right\|_{L^\infty(K_j)}.$$

Agrupando adecuadamente, y llamando β y β' a los anteriores multiíndices,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left\| D_j^{\beta} f_n - D_j^{\beta} f \right\|_{L^\infty(K_j)} + \frac{1}{2} \left\| D_j^{\beta'} f_n - D_j^{\beta'} f \right\|_{L^\infty(K_j)} \right\} = 0 + 0 = 0$$

esto prueba que $\{\overline{\partial} f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\partial} f$ en $(\mathcal{E}^{(0,1)}(Y'), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})$. Dado que $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \omega$ en $(\mathcal{E}^{(0,1)}(X), \tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})$ tenemos que

$$\overline{\partial} f_n = \omega_n|_{Y'}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\partial} f = \omega|_{Y'} \Longrightarrow (\omega, f) \in V.$$

Con esto concluimos que V es cerrado en la topología producto. Al ser V cerrado de un espacio de Fréchet, es también Fréchet. Consideramos la proyección

$$\pi_1 : \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \times \mathcal{C}^\infty(Y', \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}(X),$$

que es continua pues estamos trabajando en la topología producto. Consideremos la restricción

$$\pi_1|_V : V \longrightarrow \mathcal{E}^{(0,1)}(X),$$

que sigue siendo continua y además es sobreyectiva, porque toda 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ siempre tiene asociada alguna función diferenciable en Y' tal que $\overline{\partial f} = \omega|_{Y'}$ por el Corolario 6.2.4. Por el Teorema de la Aplicación Abierta en su versión para espacios de Fréchet, $\pi|_V$ es abierta.

Sea $\pi_2|_V : V \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(Y', \mathbb{C})$ que es continua por estar trabajando en la topología producto. Dado que la restricción $r : (\mathcal{C}^\infty(Y'), \tau_{\mathcal{C}^\infty}) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}), \tau_{\mathcal{C}^\infty})$ es continua, entonces la composición $r \circ \pi_2|_V$ es también continua.

Hemos construido el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "r\circ \pi_2|_V"] \arrow[d, two heads, "\pi_1|_V"'] & \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{C}) \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{E}^{(0,1)}(X) \arrow[r, "S"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Podemos probar fácilmente que S es continua con lo visto anteriormente. Dado U un abierto de $\mathbb{C}$, de la continuidad de T y de $\beta \circ \pi_2|_V$, tenemos que

$$(\beta \circ \pi_2|_V)^{-1}\left(T^{-1}(U)\right)$$

es abierto de V. Dado que $\pi_1|_V$ es abierta, entonces,

$$\pi_1|_V\left((\beta\circ\pi_2|_V)^{-1}(T^{-1}(U))\right)$$

es abierto de $(\mathcal{E}^{(0,1)},\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})$. Por la conmutativad del diagrama

$$S^{-1}(U)=\pi_1|_V\left((\beta\circ\pi_2|_V)^{-1}(T^{-1}(U))\right)$$

es abierto de $(\mathcal{E}^{(0,1)},\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})$, probando la continuidad de S.

- Dado que T es un funcional lineal continuo (por hipótesis), $T\in(\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}),\tau_{\mathcal{C}^\infty})^*$, el Lema 7.2.1 nos dice que existe un compacto K de X tal que
$$T(f)=0,\quad \forall f\in\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C}),\quad \operatorname{sop}(f)\subset X\setminus K. \tag{7.1}$$
- Dado que S es un funcional lineal continuo,$S\in(\mathcal{E}^{(0,1)}(X),\tau_{\mathcal{E}^{(0,1)}})^*$,el Lema 7.2.2 nos dice que existe un compacto L de X tal que
$$S(\omega)=0,\quad \forall\omega\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X),\quad \operatorname{sop}(\omega)\subset X\setminus L. \tag{7.2}$$
- Comprobemos que S está en las condiciones del Lema 7.2.3. Para ello, sea $g\in\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ y consideramos el abierto de X, $Y'':=X\setminus K$, con $\operatorname{sop}(g)\subset Y''$ compacto. Entonces,
$$S(\overline{\partial}g)\overset{\text{def.}}{=}T(g|_Y)\overset{(7.1)}{=}0.$$
El Lema 7.2.3 garantiza la existencia de una 1-forma holomorfa $\sigma\in\Omega^1(Y'')$ tal que
$$S(\omega)=\int_{Y''}\sigma\wedge\omega,\quad \forall\omega\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X),$$
para toda $\omega\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ de soporte compacto en Y''.
- La 1-forma $\sigma\in\Omega^1(Y'')$ se anula en $Y''\setminus L=X\setminus(K\cup L)\neq\varnothing$, puesto que X no es compacta. En efecto, sea $\omega\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ con soporte compacto contenido en $Y''\setminus L$. Entonces, al darse $Y''\setminus L\subset X\setminus L$, por la construcción L, tenemos que
$$0=S(\omega)=\iint_{Y''}\sigma\wedge\omega=\iint_{Y''\setminus L}\sigma\wedge\omega.$$
Dado que ω era arbitaria tenemos que $\sigma|_{Y''\setminus L}=0$.
- Como K es compacto, la Proposicion 5.2.1 nos dice que $\mathfrak{h}_X(K)$ es compacto. Al ser X abierta, $X\setminus\mathfrak{h}_X(K)$ es un abierto no vacío. Por definición de $\mathfrak{h}_X(K)$, tenemos que $X\setminus\mathfrak{h}_X(K)$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en X. Sean $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ las componentes conexas de $X\setminus\mathfrak{h}_X(K)$. Observemos que $C_\alpha\cap(X\setminus(K\cup L))\neq\varnothing$, para todo $\alpha\in\Lambda$. En efecto, si existe C_{α_0} tal que $C_{\alpha_0}\cap(X\setminus(K\cup L))=\varnothing$, entonces $C_{\alpha_0}\subset K\cup L$, lo que es una contradicción, pues $K\cup L$ es compacto y C_{α_0} no es relativamente compacta. En consecuencia, todas las componentes conexas $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ cortan a $X\setminus(K\cup L)=Y''\setminus L$.
- Definimos $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}:=\{C_\alpha\cap(X\setminus(K\cup L))\}_{\alpha\in\Lambda}$. Ω_α es abierto de X para todo $\alpha\in\Lambda$. Ahora bien, σ se anula en $X\setminus(K\cup L)$, luego se anula en cada Ω_α. Dado que Ω_α es abierto de $X\setminus\mathfrak{h}_X(K)$ y σ se anula en cada uno de ellos, que son abiertos y tienen puntos de acumulación en $X\setminus\mathfrak{h}_X(K)$, el Teorema de Identidad nos dice que $\sigma|_{X\setminus\mathfrak{h}_X(K)}\equiv 0$.

- Dado que $\sigma|_{X\setminus \mathfrak{h}_X(K)} \equiv 0$ y $X \setminus \mathfrak{h}_X(K) \subset X \setminus K$, entonces para toda $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ con soporte compacto en $X \setminus \mathfrak{h}_X(K)$ tenemos

$$S(\omega) = \iint_{X\setminus \mathfrak{h}_X(K)} \sigma \wedge \omega = \iint_{X\setminus \mathfrak{h}_X(K)} 0 \wedge \omega = 0.$$

  Hemos probado que

$$(**) \quad S(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \text{ con } \operatorname{sop}(\omega) \subset X \setminus \mathfrak{h}_X(K) \text{ compacto.}$$

- Supongamos que $f \in \mathcal{O}(Y)$. Tenemos que $K \subset Y$. Por la monotonía de la envolvente topológica $\mathfrak{h}_X$ (Proposición 5.2.1) tenemos que

$$\mathfrak{h}_X(K) \subset \mathfrak{h}_X(Y)$$

  y por ser Y Runge

$$\mathfrak{h}_X(K) \subset \mathfrak{h}_X(Y) = Y.$$

  Así, $\mathfrak{h}_X(K) \subset Y$. Consideramos un par de abiertos $U \subsetneq V$ relativamente compactos en X y tal que

$$\mathfrak{h}_X(K) \subset U \subset V \subset Y.$$

  esto es posible hacerlo por la compacidad de $\mathfrak{h}_X(K)$. Por el Lema de Uryshon, existe una función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\varphi|_{\overline{U}} = 1$ y $\operatorname{sop}(\varphi) \subset V$ compacto. Definimos $g := \varphi \cdot f$. Observemos que $g \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ y $g|_U = f|_U$. De este modo, al darse $K \subset U$, tenemos que $g|_K = f|_K$. Por tanto, la función $f - g|_Y$ tiene soporte contenido en $Y \setminus K$. Por la elección de K (7.1), tenemos que $T(f - g|_Y) = 0$ y por linealidad, $T(f) = T(g|_Y)$. Por la definición de S,

$$S(\overline{\partial} g) = T \circ r(g) = T(g|_Y) = T(f). \tag{7.3}$$

  Ahora bien, como el soporte de g es compacto contenido en V entonces $\overline{\partial} g = 0$ en $X \setminus V$. Dado que $\mathfrak{h}_X(K) \subset V$, $\overline{\partial} g = 0$ en $\mathfrak{h}_X(K)$, y por ende $\operatorname{sop}(\partial \omega) \subset X \setminus \mathfrak{h}_X(K)$. Ahora bien, el soporte de $\overline{\partial} g$ debe ser compacto, puesto que $g = \varphi \cdot f$ y el soporte de φ era compacto. En particular $\operatorname{sop}(\overline{\partial} g) \subset X \setminus \mathfrak{h}_X(K)$ compacto. Por $(**)$, tenemos que $S(\overline{\partial} g) = 0$. Por (7.3), $T(f) = 0$.

Hemos probado que para todo $f \in \mathcal{O}(Y)$ arbitraria, $T(f) = 0$. En consecuencia $T|_{\mathcal{O}(Y)} \equiv 0$. Por el Corolario 7.2.1, el espacio $r(\mathcal{O}(Y'))$ es denso en $\mathcal{O}(Y)$ con la topología de la convergencia uniforme por compactos.

□

7.3. Teorema de Aproximación de Runge

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar del Teorema de Aproximación de Runge.

Teorema de Aproximación de Runge. *Sea X una superficie de Riemann abierta y sea $Y \subset X$ un abierto Runge. Entonces toda función holomorfa en Y puede ser aproximada uniformemente por compactos por funciones holomorfas en todo X. Con más precisión, dada $f \in \mathcal{O}(Y)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ tal que para todo compacto $K \subset Y$,*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n|_K - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $f \in \mathcal{O}(Y)$ y K compacto de Y. Consideramos un recubrimiento de X expansivo $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de dominios Runge relativamente compactos. Llamemos $Y_0 := Y \cap Y_1$ y $f_0 := f|_{Y_0}$. Así Y_0 es relativamente compacto. Denotemos . Realizamos un proceso inductivo.

- *Caso base* $n = 1$. Consideramos el par $Y_0 \subset Y_1$. Por la Proposición 7.2.1, existe una función $f_1 \in \mathcal{O}(Y_1)$ tal que

$$\| \, f_1|_K - f|_K \, \|_{L^\infty(K)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- *Caso* $n = 2$. Consideramos el par $Y_1 \subset Y_2$ y el compacto $\overline{Y}_0 = \overline{Y}$. Por la Proposición 7.2.1, existe una función $f_2 \in \mathcal{O}(Y_2)$ tal que

$$\| \, f_2|_{\overline{Y}_0} - f_1|_{\overline{Y}_0} \, \|_{L^\infty(\overline{Y_0})} < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

- *Hipótesis de inducción.* Supongamos que existe $f_r \in \mathcal{O}(Y_r)$, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ tales que

$$\| \, f_r|_{\overline{Y}_{r-2}} - f_{r-1}|_{\overline{Y}_{r-2}} \, \|_{L^\infty(\overline{Y}_{r-2})} < \frac{\varepsilon}{2^r}.$$

  Aplicando de nuevo la Proposición 7.2.1, aplicada a $Y_{n-1} \subset\subset Y_n$ y al compacto $\overline{Y}_{n-2}$, existe $f_n \in \mathcal{O}(Y_n)$ tal que

$$\| \, f_n|_{\overline{Y}_{n-2}} - f_{n-1}|_{\overline{Y}_{n-2}} \, \|_{L^\infty(\overline{Y}_{n-2})} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Hemos obtenido una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{O}(Y_n)$, tal que

$$\| \, f_n|_{\overline{Y}_{n-2}} - f_{n-1}|_{\overline{Y}_{n-2}} \, \|_{L^\infty(\overline{Y}_{n-2})} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Fijemos $r \in \mathbb{N}$ y consideramos la sucesión $\{f_n\}_{n>r}$. Consideramos $\overline{Y}_r$ que es compacto. Para todo $n > r$, tenemos que $f_n|_{Y_r}$ es holomorfa. Además, por la construcción de la sucesión es de Cauchy en $L^\infty(\overline{Y}_r)$. Por la completitud del espacio $L^\infty(\overline{Y}_n)$, existe una función g_r tal que $\{f_n\}_{n>r} \to g_r$ en $L^\infty(\overline{Y}_r)$. Al ser cada f_n holomorfa en Y_n entonces $g_r \in \mathcal{O}(Y_r)$, porque g_r es el límite uniforme por compactos de una sucesión de funciones holomorfas. Definimos

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & g_r(x), \quad \text{si } x \in Y_r. \end{array}$$

esta aplicación está bien definida puesto que $Y_k \subset Y_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que la holomorfía es de carácter local (en un entorno de cada punto) al ser cada g_r holomorfa, F también lo es, esto es, $F \in \mathcal{O}(X)$, ya que $\{Y_k\}_{k=0}^\infty$ recubre a X. Finalmente,

$$\|F - f\|_{L^\infty(K)} = \max_{x\in K}\{|g_r(x) - f(x)|\}_{r=0}^\infty < 2\varepsilon.$$

En efecto, para m suficiente grande, al converger $\{f_n\} \to g_r$ en $L^\infty(\overline{Y}_r)$, conseguimos que

$$\|g_r - f_m\|_{L^\infty(\overline{Y}_m)} < \varepsilon$$

Fijado $x \in K$, tenemos la siguiente acotación,

$$\begin{aligned}|g_r(x) - f(x)| &\le |g_r(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \le |g_r(x) - f(x)| \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_1(x) - f(x)| \\ &\le \|g_r - f_m\|_{L^\infty(\overline{Y}_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \|f_{k+1}(x) - f_k(x)|_{L^\infty(\overline{Y}_{k-1})} + \|f_1 - f\|_{L^\infty(K)} \\ &\le \|g_r - f_m\|_{L^\infty(\overline{Y}_m)} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2^k} < 2\varepsilon\end{aligned}$$

Si queremos encontrar una sucesión en las condiciones del enunciado basta tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función F_n tal que

$$\|F_n - f\|_{L^\infty(K)} < 1/n.$$

□

Observemos que el recíproco es cierto si asumimos Y abierto relativamente compacto.

Teorema 7.3.1 (Recíproco del Teorema de Aproximación de Runge)**.** *Sea X una superficie de Riemann abierta y $K \subset X$ compacto. Supongamos que para toda función holomorfa en K, $f \in \mathcal{O}(K)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones holomorfas en todo X de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n|_K - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Entonces K es Runge.

Demostración. Supongamos que Y no fuese Runge y sea U una componente conexa relativamente compacta de $X \setminus Y$. Dado que X es abierta e Y es relativamente compacto, existe $p \in U^\circ$. Sea Ω un abierto relativamente compacto tal que $\overline{Y} \cup \overline{U} \cup \Omega$. Dado que Ω es relativamente compacto y $p \in \Omega^\circ$, la Proposición 6.2.1 nos garantiza la existencia de una función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{p\})$ y con un polo en p. Consideremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en X tal que converge uniformemente por compactos de Y hacia la función f.

Observemos que de la compacidad de ∂U, es posible encontrar un abierto relativamente compacto de X tal que $\overline{U} \cup V$ y de forma que $\partial V \subset Y$. esto puede hacerse mediante entornos coordenados de cada punto del borde.

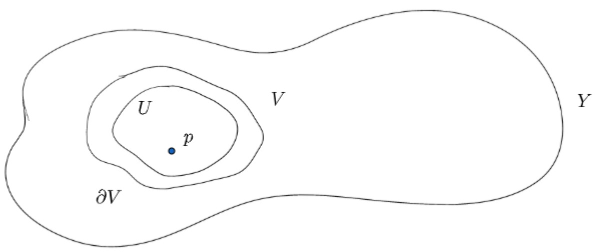


Figura 7.2: $p \in U^\circ$, $\overline{U} \subset \overline{V}$, $\partial V \subset Y$.

Observemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\overline{V}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por el principio del máximo para funciones holomorfas, se tiene que $\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\overline{V})} = \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\partial V)}$.

Dado que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos de Y hacia f, para $\varepsilon/2$ y el compacto ∂V tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ entonces

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(\partial V)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $n, m \geq n_0$, entonces,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\overline{V})} &= \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\partial V)} \\
&\leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\partial V)} + \|f - f_m\|_{L^\infty(\partial V)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

esto prueba que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^\infty(\overline{V})$. Por completitud existe $g \in L^\infty(\overline{V})$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow g$ en $L^\infty(\overline{V})$. Dado que cada f_n es holomorfa en X, la función g es continua en $\overline{V}$ y holomorfa en V.

La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to g \text{ en } L^\infty(\overline{V}), \quad \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f \text{ en } L^\infty(\partial V).$$

Por unicidad del límite[2] $f|_{\partial V} = g|_{\partial V}$. Dado que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ entonces es holomorfa en $V \setminus \{p\}$. La función g es holomorfa en V y por tanto holomorfa en $V \setminus \{p\}$. El conjunto ∂V tiene puntos de acumulación de $V \setminus \{p\}$. El Teorema de la identidad nos dice que $f|_{V\setminus\{p\}} = g|_{V\setminus\{p\}}$. Dado que g es continua en p, el Teorema de Extensión de Riemann nos permite extender de manera holomorfa la función f al punto p, algo que entra en contradicción con que p sea un polo de la función f.

□

El recíproco es cierto en abiertos de X arbitrarios. Sin embargo, para ello necesitamos tomar una función holomorfa en $X \setminus \{p\}$ con un polo en p. Más adelante, cuando probemos que en una superficie abierta todo divisor tiene solución, podremos dar el recíproco en su máxima generalidad.

A continuación damos una descripción de $\mathfrak{h}_X(K)$, para K compacto basada en el artículo [9].

Teorema 7.3.2 (Representación de $\mathfrak{h}_X(K)$)**.** *Sea X una superficie de Riemann abierta y $K \subset X$ compacto. Entonces,*

$$\mathfrak{h}_X(K) = \left\{ p \in X : |f(p)| \leq \max_K |f|, \ \forall f \in \mathcal{O}(X) \right\}.$$

Demostración. Definimos

$$\Delta := \left\{ p \in X : |f(p)| \leq \max_K |f|, \ \forall f \in \mathcal{O}(X) \right\}.$$

Observemos que al ser K compacto, $\mathfrak{h}_X(K)$ también lo es (Proposición 6.3.5). Probemos la doble contención.

[2] La unicidad es realmente en casi todo punto, pero estamos trabajando con funciones continuas.

- Veamos que $\Delta \subset \mathfrak{h}_X(K)$. Para ello probamos que $X \setminus \mathfrak{h}_X(K) \subset X \setminus \Delta$. Sea $p \in X \setminus \mathfrak{h}_X(K)$. El conjunto $K' := \mathfrak{h}_X(K)\dot{\cup}\{p\}$ es compacto, por ser unión finita de compactos. K' es también Runge. En efecto, como $\mathfrak{h}_X(K)$ es Runge, su complementario, $X \setminus \mathfrak{h}_X(K)$ no tiene componentes conexas relativamente compactas y denotemos por $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ a tales componentes conexas. Dado que $p \in X \setminus \mathfrak{h}_X(K) = \dot{\cup}_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$, existe una única C_{α_0} que contiene a p. Ahora, las componentes conexas de $X \setminus K'$ son
$$\begin{aligned} X \setminus K' &= (X \setminus \mathfrak{h}_X(K)) \cap (X \setminus \{p\}) \\ &= \dot{\cup}_{\alpha\in\Lambda}(C_\alpha \cap (X \setminus \{p\}) \\ &= (\dot{\cup}_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_0\}} C_\alpha)\dot{\cup}(C_{\alpha_0} \setminus \{p\}). \end{aligned}$$
Esto nos dice que el complementario de K' tiene las mismas componentes conexas que el complementario de $\mathfrak{h}_X(K)$ salvo C_{α_0}, a la que se le quita el punto p. Ahora bien, la adherencia de $C_{\alpha_0} \setminus \{p\}$ es la misma que la de C_{α_0}, que no es relativamente compacta en X, por ser $\mathfrak{h}_X(K)$ Runge. En consecuencia K' es Runge. Hemos probado que K' es compacto y Runge. Definimos
$$g : K' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q = p \\ 0 & \text{si} \quad q \in \mathfrak{h}_X(K). \end{cases}$$
Al ser $\mathfrak{h}_X(K)$ compacto y $p \notin \mathfrak{h}_X(K)$, el punto p es aislado respecto $\mathfrak{h}_X(K)$. De este modo, podemos encontrar un abierto U que contiene a $\mathfrak{h}_X(K)$, y en donde g es la función constante cero, por tanto holomorfa. Además, p es aislado, luego g es automáticamente holomorfa. Esto prueba que $g \in \mathcal{O}(\mathfrak{h}_X(K)\dot{\cup}\{p\}) = \mathcal{O}(K')$. El Teorema de Aproximación de Runge, me permite encontrar una función holomorfa en X, f, tal que
$$\|g - f\|_{L^\infty(K')} < 1/2.$$
En particular, en el punto p,
$$|1 - f(p)| = |g(p) - f(p)| \leq \|g - f\|_{L^\infty(K')} < 1/2,$$
lo que implica $1 - |f(p)| \leq |1 - f(p)| < 1/2$ y a su vez $|f(p)| \geq 1/2$. Por otra parte, al ser $g|_{\mathfrak{h}_X(K)} = 0$,
$$\begin{aligned} \max_K |f| \leq \max_{\mathfrak{h}_X(K)} |f| &= \max_{\mathfrak{h}_X(K)} |f - g| \\ &\leq \max_{K'} |f - g| = \|f - g\|_{L^\infty(K')} < 1/2 < |f(p)|, \end{aligned}$$
esto nos dice que
$$\max_K |f| < f(p) \Longrightarrow p \notin \Delta \Longrightarrow p \in X \setminus \Delta.$$
esto prueba que $X \setminus \mathfrak{h}_X(K) \subset X \setminus \Delta$, esto es, $\Delta \subset \mathfrak{h}_X(K)$.

- Veamos ahora que $\mathfrak{h}_X(K) \subset \Delta$. Sea $q \in \mathfrak{h}_X(K)$. Veamos que $q \in \Delta$. Sea $f \in \mathcal{O}(X)$. Tenemos que probar
$$|f(q)| \leq \max_K |f|.$$
esto es consecuencia del principio de máximo para funciones holomorfas. Para ello observemos lo siguiente. Por la Definición 5.2.1
$$\mathfrak{h}_X(K) = K \cup (\dot{\cup}_{\beta\in B} C_\beta)\,, \tag{7.4}$$

donde $\{C_\beta\}_{\beta\in B}$ son las componentes conexas relativamente compactas de $X\setminus K$. Como K es compacto entonces $X\setminus K$ es abierto de X. Las componentes C_β son abiertas de $X\setminus K$, abierto de X, luego C_β es abierta de X, para todo $\beta\in B$. Ahora bien, $\mathfrak{h}_X(K)$ es compacto, luego $|f|$ alcanza máximo en $\mathfrak{h}_X(K)$. Observemos que al ser cada C_β abierta de X, la función $|f|$ no puede alcanzar el máximo en ninguna de ellas, al ser f holomorfa. De la descomposición (7.4), inferimos que el máximo de $|f|$ debe alcanzarse en K. Así pues,

$$|f(q)|\leq \max_{\mathfrak{h}_X(K)}|f| = \max_K |f| \Longrightarrow q\in\Delta.$$

esto prueba la doble contención. $\square$

Otra consecuencia importante y que nos servirá para probar que $H^1(X,\mathcal{O})=0$, cuando X es abierta, es el siguiente resultado que surge como generalización del Teorema 4.6.1 y del Corolario 6.2.4

Teorema 7.3.3. *Si X es una superficie de Riemann abierta, dada $\omega\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, existe $f\in\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}f=\omega$.*

Demostración. Por el Corolario 6.2.4, para cada $Y\subset X$ relativamente compacto, existe $g\in\mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}g=\omega$. Consideremos entonces una sucesión $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ por dominios Runge, relativamente compactos, como en el Teorema 5.2.2.

Construimos una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$\overline{\partial}f_n=\omega|_{Y_n},\quad \|f_{n+1}-f_n\|_{L^\infty(Y_{n-1})}<\frac{1}{2^n},\quad n\geq 1. \tag{7.5}$$

La sucesión la construimos inductivamente.

1. Como Y_0 es abierto relativamente compacto en X, el Corolario 6.2.4 nos permite elegir $f_0\in\mathcal{C}^\infty(Y_0,\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}f_0=\omega|_{Y_0}$.

2. Supongamos que $f_0,f_1,\dots,f_n$ están construidas y satisfacen (7.5). Construyamos f_{n+1}. Como Y_{n+1} es relativamente compacto en X, el Corolario 6.2.4 nos permite tomar $g_{n+1}\in\mathcal{C}^\infty(Y_{n+1},\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}g_{n+1}=\omega|_{Y_{n+1}}$. Como $Y_n\subset Y_{n+1}$

$$\overline{\partial}\big|_{Y_n} g_{n+1}=\omega|_{Y_n}=\overline{\partial}f_n \Longrightarrow \overline{\partial}\big|_{Y_n}(g_{n+1}-f_n)=0.$$

   Dado que $g_{n+1}|_{Y_n}-f_n\in\mathcal{C}^\infty(Y_n,\mathbb{C})$ y $\overline{\partial}\big|_{Y_n}(g_{n+1}-f_n)=0$, entonces $g_{n+1}|_{Y_n}-f_n\in\mathcal{O}(Y_n)$.

   Como Y_{n-1} es un abierto Runge y $g_{n+1}|_{Y_n}-f_n\in\mathcal{O}(Y_n)$, el Teorema de Aproximación de Runge nos dice que, asociado a $1/2^n$, existe $h\in\mathcal{O}(X)$ tal que

$$\|(g_{n+1}-f_n)-h\|_{L^\infty(Y_{n-1})}<\frac{1}{2^n}. \tag{7.6}$$

   Definimos $f_{n+1}:=g_{n+1}-h|_{Y_{n+1}}\in\mathcal{C}^\infty(Y_{n+1},\mathbb{C})$. Como h es holomorfa en X, entonces $\overline{\partial}h=0$, por tanto

$$\overline{\partial}f_{n+1}=\overline{\partial}g_{n+1}-\overline{\partial}\big|_{Y_{n+1}}h=\overline{\partial}g_{n+1}=\omega|_{Y_{n+1}}.$$

   Como $f_{n+1}:=g_{n+1}-h|_{Y_{n+1}}$, por (7.6)

$$\|f_{n+1}-f_n\|_{L^\infty(Y_{n-1})}=\|(g_{n+1}-f_n)-h\|_{L^\infty(Y_{n-1})}<\frac{1}{2^n}.$$

Por tanto, tenemos construida una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ buscada. Sea $x \in X$. Dado que $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ recubre a X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Y_{n_0}$. Para todo $n \geq n_0 + 1$ se tiene que

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+1} - f_n\|_{L^\infty(Y_{n-1})} < \frac{1}{2^n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Tomamos n, m suficientemente grande tal que sean mayores que $n_0 + 1$ y tal que $\frac{n-m}{2^m} < \varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n-1}(x)| + \cdots + |f_{m+1}(x) - f_m(x)| \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^m} < \frac{n-m}{2^m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

esto prueba que la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{C}$ es completo, entonces la anterior sucesión tiene límite. Podemos definir, para cada $x \in X$

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $F_n := \sum_{k\geq n+1} (f_{k+1} - f_k)$. Observemos que

$$\overline{\partial}(f_{k+1} - f_k) = \omega|_{Y_n} - \omega|_{Y_n} = 0,$$

luego cada término de la serie es una función holomorfa. Además, por el Criterio de la Mayorante de Weirstrass la serie converge absolutamente en Y_n y uniformemente por compactos de Y_n. En efecto, para todo $x \in Y_n$, como $k \geq n+1$ entonces $Y_n \subset Y_{k-1}$

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \|f_{k+1} - f_k\|_{L^\infty(Y_n)} \leq \|f_{k+1} - f_k\|_{L^\infty(Y_{k-1})} < \frac{1}{2^k}$$

y la serie numérica $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ es convergente. esto nos dice que la función F_n, está definida por una serie de funciones holomorfas que converge uniformemente por compactos de Y_n; en consecuencia $F_n \in \mathcal{O}(Y_n)$.

Por la definición de F_n, tenemos $f|_{Y_n} = f_n + F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $f_n \in \mathcal{C}^\infty(Y_n, \mathbb{C})$, $F_n \in \mathcal{O}(Y_n) \subset \mathcal{C}^\infty(Y_n, \mathbb{C})$ y $\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = X$, tenemos que $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Como $F_n \in \mathcal{O}(Y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\overline{\partial}\big|_{Y_n} f = \overline{\partial} f_n + \overline{\partial} F_n = \overline{\partial} f_n = \omega|_{Y_n}.$$

Dado que $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recubre a X, entonces $\overline{\partial} f = \omega$. □

Corolario 7.3.1. *En toda superficie de Riemann abierta X tenemos que*

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

Demostración. El Teorema 4.6.4 nos dice que $H^1(X, \mathcal{O}) = \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/\overline{\partial}\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Ahora bien, el Teorema 7.3.3 nos dice que si $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ existe $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial} f = \omega$. esto prueba que $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) \subset \overline{\partial}\,(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}))$. Dado que la otra contención se tiene siempre, hemos probado que $\overline{\partial}\,(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})) = \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. En consecuencia, el cociente $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. □

Capítulo 8

Teorema de Weierstrass y Mittag-Leffler en superficies de Riemann abiertas

Tal y como introdujimos los grupos de cohomología de Čech, comentamos el problema de Mittag-Leffler. Vamos a trabajar, de nuevo, con superficies de Riemann abiertas. Sea X una superficie de Riemann abierta y sea $d \in \operatorname{Div}(X)$, $d = \sum_{i=1}^{r} n_i x_i$, $x_i \in X$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, \ldots, r$. Nuestro objetivo, es hallar una solución de este divisor, es decir, encontrar una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $(f) = d$.

Para desarrollar la teoría necesitamos debilitar el concepto de solución de un divisor $\gamma \in \operatorname{Div}(X)$ dado. Definimos

$$X_\gamma = \{x \in X : \gamma(x) \geq 0\}.$$

El X_γ son puntos de X que no son polos para una función meromorfa que sea solución. El carácter discreto de los divisores, hace que X_γ sea un dominio de X.

Definición 8.0.1 (Solución débil de un divisor)**.** Sea X una superficie de Riemann. Diremos que $f \in \mathcal{C}^\infty(X_\gamma, \mathbb{C})$ es una *solución débil de un divisor* γ, si para cada $a \in X$ existe una carta $(U, \varphi = z)$ centrada en a, una función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ con $\psi(a) \neq 0$ y tal que f admita la siguiente representación en coordenadas locales

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \widetilde{\psi}(z) z^k, \quad \forall z \in X_\gamma \cap U, \quad k = \gamma(a),$$

donde $\widetilde{\psi} = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Observación 8.0.1. Por definición, una solución débil será clásica, es decir, $(f) = \gamma$, si f es meromorfa en X y holomorfa en X_γ.

Observación 8.0.2. Sean f_1 y f_2 soluciones débiles de γ_1 y γ_2 respectivamente. Sea $f = f_1 f_2$ y $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. La función f no está definida en aquellos puntos donde $\gamma(a) \geq 0$ pero $\gamma_1(a) < 0$ o $\gamma_2(a) < 0$. Sea $a \in X$ en tales condiciones y supongamos sin pérdida de generalidad que $\gamma_1(a) < 0$. Llamemos k_1 y k_2 a los números enteros $\gamma_1(a)$ y $\gamma_2(a)$ respectivamente. Dado que γ_i es solución débil de f_i, existe una carta centrada en a, $(U_i, \varphi_i = z_i)$ y una función $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{C})$, $\psi_i(a) \neq 0$, $\widetilde{\psi} = \psi \circ \varphi^{-1}$ tal que

$$f_i \circ \varphi_i^{-1}(z) = \widetilde{\psi}_i(z) z^{k_i}, \quad \forall z \in X_{\gamma_i} \cap U_i, \; i = 1, 2.$$

Como $X_{\gamma_i} \cap U_i$ es un entorno del punto a, entonces

$$V := \cap_{i=1}^{2} X_{\gamma_i} \cap U_i$$

es un entorno del punto a. Así,

$$h(z) := f_1 \circ \varphi_1^{-1}(z) \cdot f_2 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \left(\widetilde{\psi}_1 \widetilde{\psi}_2\right)(z) z^{k_1+k_2}, \quad \forall z \in V. \tag{8.1}$$

Como $k_1 + k_2 \geq 0$, el límite $\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{p\to a} f_1(p) f_2(p)$ existe, de modo que $f = f_1 f_2$ está definida en a. Veamos que $f_1 f_2$ representa a $\gamma(a)$. Consideramos la carta $(V, \varphi := \varphi_1)$. Por la fórmula del cambio de cartas

$$f_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = f_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \widetilde{\psi}_2(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)) \cdot (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z))^{k_2} \tag{8.2}$$

para todo $z \in \varphi(V)$. Consideramos la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, que está definida en un entorno de cero. Dicha función presenta un cero en $z = 0$,

$$\varphi_2(\varphi_1^{-1}(0)) = \varphi_2(a) = 0.$$

El cero es simple porque es un cambio de cartas y la función es biholomorfa, en particular tienen derivada no nula en todo punto. Como $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ presenta un cero simple en $z = 0$, existe una función holomorfa $g : D(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(0) \neq 0$ de forma que

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = zg(z), \quad \forall z \in D(0, r) \subset \varphi(V).$$

La expresión en coordenadas de f_2 (8.2) queda dada por

$$f_2 \circ \varphi^{-1}(z) = \widetilde{\psi}_2(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)) \cdot z^{k_2} g(z)^{k_2}, \quad \forall z \in D(0, r).$$

Definimos

$$\widetilde{\psi}(z) := \widetilde{\psi}_1(z) \widetilde{\psi}_2(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)) g(z)^{k_2},$$

que no tiene ceros en $D(0, r)$. En la carta $(\varphi_1^{-1}(D(0, r)), \varphi = \varphi_1)$ tenemos que

$$(f_1 \circ \varphi^{-1})(z) \cdot (f_2 \circ \varphi^{-1})(z) = \widetilde{\psi}(z) z^{k_1+k_2},$$

probando así que $f_1 f_2$ es solución débil de γ.

Observación 8.0.3. No hay unicidad en una solución débil. Dado un divisor γ y dos soluciones débiles de este, f y g, tenemos que $f - g = \varphi$ con $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ y tal que φ no tiene ceros.

Lema 8.0.1. *Sea X una superficie de Riemann, $d \in \mathrm{Div}(X)$ y f una solución débil de d. Entonces se tienen las siguientes aserciones:*

1. *La 1-forma*
$$\omega := \frac{df}{f}$$
está bien definida y es diferenciable en $X \setminus \mathrm{sop}(d)$.

2. *Si $a \in \mathrm{sop}(d)$ y $k = d(a)$, existe una carta (U, z) centrada en a y conforme al disco unidad tal que*
$$\omega|_U = \frac{k}{z} dz + \frac{d\psi}{\psi},$$
donde $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. 1. Por definición $\mathrm{sop}(d) = \{p_1, \dots, p_n\}$, donde $d = \sum_{i=1}^{n} n_i p_i$, $n_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Así, al ser f solución débil de d, f no presenta más ceros que eventualmente en algún p_i, cuando $n_i > 0$. De este modo, la función $1/f$ está definida y es diferenciable en $X \setminus \mathrm{sop}(d)$. En consecuencia, $\omega \in \mathcal{E}^1 (X \setminus \mathrm{sop}(d))$.

2. Sea $a \in \mathrm{sop}(d)$, esto es, $k = d(a) \neq 0$. Como f es solución débil de d, existe una carta $(U, \varphi = z)$ conforme al disco unidad, centrada en a y $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U\,C)$ con $\psi(a) \neq 0$ y tal que
$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \widetilde{\psi}(z) z^k, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$
De este modo, la representación local de df en la carta (U, z) viene dada por
$$df|_U = z^k d\psi + k\psi z^{k-1} dz.$$
Como $\widetilde{\psi}(0) \neq 0$, existe $r \leq 1$ tal que para todo $z \in D(0, r)$, $\widetilde{\psi}(z) \neq 0$. Sea $V := \varphi^{-1}(D(0, r))$. Consideramos la carta $(V, \varphi|_V)$. En esta carta
$$\left.\frac{df}{f}\right|_{V\backslash\{a\}} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}.$$
Realizando una dilatación del disco $D(0, r)$ obtenemos la carta en el disco $\mathbb{D}$.

$\square$

Lema 8.0.2. *Sea X una superficie de Riemann. Sea $d = \sum_{j=1}^{n} k_j p_j$ un divisor de X y f una solución débil de d. Entonces*
$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} k_j g(p_j), \quad \forall g \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C}).$$

Demostración. Sea $g \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$. Como f es solución débil del divisor d, para cada p_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ tomamos una carta $(U_j, \varphi_j = z_j)$ centrada en p_j y conforme al disco unidad, de forma que
$$f \circ \varphi_j^{-1}(z) = \widetilde{\psi}_j(z) z^{k_j}, \quad \widetilde{\psi}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{C})$$
y tal que $\widetilde{\psi}_j$ no presente ceros, satisfaciendo, como en el Lema 8.0.1
$$\left.\frac{df}{f}\right|_{U_j} = \left(\frac{k_j}{z_j} + \frac{d\psi_j}{\psi_j}\right) dz_j. \tag{8.3}$$
Sean $0 < r_1 < r_2 < 1$. Para cada $j = 1, \dots, n$, el Lema de Uryshon nos garantiza la existencia de una función $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ tal que
$$\mathrm{sop}(\phi_j) \subset \varphi_j^{-1}\left(D(0, r_2)\right), \quad \phi_j|_{\varphi_j^{-1}\left(\overline{D}(0, r_1)\right)} = 1.$$
Sea $g_j := \phi_j g$, para $j = 1, \dots, n$ y
$$g_0 : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g_0 := g - (g_1 + \cdots + g_n).$$
Como g y $\{g_j\}_{j=1}^n$ tienen soporte compacto, $g_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$. Por otro lado,
$$\frac{df}{f} \wedge dg_0 = -d\left(\frac{df}{f} \cdot g_0\right).$$

En particular, la 1-forma diferencial $\frac{df}{f} \wedge dg_0$ es de soporte compacto. Por la Proposición 2.4.3

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg_0 = -\iint_X d\left(\frac{df}{f} \cdot g_0\right) = 0.$$

Ahora bien, como $g = g_0 + \cdots + g_n$, entonces

$$\begin{aligned}\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg &= \sum_{j=1}^{n} \iint_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^{n} k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j + \sum_{j=1}^{n} \iint_{U_j} \frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j\end{aligned} \tag{8.4}$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$, si denotamos $\widetilde{g}_j = g_j \circ \varphi_j^{-1}$ y $A_n := A(0; 1/n, 1)$

$$\begin{aligned}\iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j &= -\iint_{U_j \setminus \{p_j\}} d\left(g_j \cdot \frac{dz_j}{z_j}\right) = -\iint_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} d\left(\widetilde{g}_j \frac{1}{z} dz\right) \\ &= -\iint_{\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\left(\widetilde{g}_j \frac{1}{z} dz\right) = -\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} d\left(\widetilde{g}_j \frac{1}{z} dz\right) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_{\partial A_n} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} dz = \lim_{n\to\infty} \int_{C(0,1/n)} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} dz \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{C(0,1/n)} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} \chi_{C(0,1/n)}(z) dz.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Dado que $\widetilde{g}_j$ tiene soporte compacto contenido en el disco $D(0, r_2)$, $|\widetilde{g}_j(z)| \leq M_j$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Así pues

$$\left| \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} \chi_{C(0,1/n)}(z) \right| \leq M_j \frac{1}{|z|}. \tag{8.6}$$

Dado que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|z|} dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dr d\theta = 2\pi.$$

Por tanto, $\frac{1}{|z|}$ es integrable en el disco $\mathbb{D}$. Por (8.6) y ser $\frac{1}{|z|}$ integrable en $\mathbb{D}$, el Teorema de Convergencia Dominada nos dice que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} \chi_{C(0,1/n)}(z) dz = \int_{\mathbb{D}} \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{g}_j(z)}{z} \chi_{C(0,1/n)}(z) = 2\pi i \widetilde{g}_j(0) = 2\pi i g(p_j).$$

De esta forma, la expresión (8.5) queda

$$\iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j = 2\pi i g(p_j)$$

y por tanto de (8.4)

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i k_j g(p_j)$$

□

Lema 8.0.3. *Sea X una superficie de Riemann, $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ una curva continua y U un entorno relativamente compacto de $\gamma([0,1])$. Consideramos $\delta\gamma$ el divisor subordinado a la curva, esto es, $\delta\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$. Entonces existe una solución débil f del divisor $\delta\gamma$ tal que $f|_{X\setminus U} = 1$ y tal que para toda 1-forma diferenciable y cerrada $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, se satisface*

$$\int_\gamma \omega = \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega. \tag{8.7}$$

Demostración. Consideramos $(U, \varphi = z)$ un sistema de coordenadas locales de X conforme al disco unidad. Supongamos que la curva γ tiene su traza completamente contenida en el entorno U. Sea $\widetilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ la representación en coordenadas de γ. Sean $a := \widetilde{\gamma}(0)$ y $b := \widetilde{\gamma}(1)$. Dado que la traza de $\widetilde{\gamma}$ es un compacto contenido en el disco unidad, existe $\varepsilon < 1$ tal que la traza de $\widetilde{\gamma}$ está plenamente contenida en $D(0,\varepsilon)$. Consideramos la función

$$h : A(0;\varepsilon,1) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) := \frac{z-b}{z-a}.$$

La función h es meromorfa en $\mathbb{C}$ con un polo en a. Además

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}.$$

Necesariamente

$$\int_\sigma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0,$$

para todo camino cerrado σ con traza contenida en el anillo $A(0;\varepsilon,1)$. En efecto, sabemos que

$$\pi_1(A(0;1,\varepsilon)) \cong \mathbb{Z}$$

y un generador del grupo fundamental es la circunferencia de centro cero y radio $r' \in (\varepsilon, 1)$. De este modo

$$\int_{C(0,r')} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{C(0,r')} \frac{dz}{z-a} - \int_{C(0,r')} \frac{1}{z-b} = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

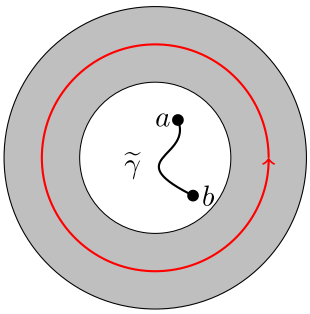


Figura 8.1: Anillo $A(0;\varepsilon,1)$

Por tanto, la función h admite logaritmo en el anillo $A(0;\varepsilon,1)$. Usando el Lema de Urysohn podemos tomar una función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D},\mathbb{R})$ tal que

$$\operatorname{sop}(\psi) \subset D(0,r), \quad \psi|_{\overline{D}(0,r)} = 1.$$

Definimos

$$f_0 : \mathbb{D} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_0(z) := \begin{cases} \exp\left(\psi(z) \log \dfrac{z-b}{z-a}\right), & \text{si} \quad r < |z| < 1 \\ \\ \dfrac{z-b}{z-a}, & \text{si} \quad |z| \leq r. \end{cases}$$

Observemos que los trozos de la función coinciden en $C(0, r)$, por tanto f_0 es diferenciable en $\mathbb{D} \setminus \{a\}$. Dado que ψ se anula para $|z| \geq r'$, entonces la función f_0 vale exactamente uno en $|z| \geq r'$. Así, $f_0 \circ \varphi$ admite una extensión diferenciable a todo $X \setminus \{\varphi^{-1}(a)\}$

$$f : X \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f := \begin{cases} f_0 \circ \varphi & \text{en} \quad U \setminus \{a\} \\ \\ 1, & \text{en} \quad X \setminus U. \end{cases}$$

Por construcción, f es solución débil del divisor $\delta\gamma = \varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)$.

Sea $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ cerrada. Como U es conforme al disco unidad, es simplemente conexo. Por tanto, ω tiene primitiva en U, esto es, existe una función $g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $dg = \omega|_U$. Tomemos V tal que $\overline{U} \subset V$. El Lema de Uryshon nos permite encontrar una extensión $G \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que $G|_{\overline{U}} = g$ y $\mathrm{sop}(G) \subset V$. De este modo, $G \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$ y $dG|_U = \omega|_U$. Por el Lema 8.0.2

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dG = G(b) - G(a) \overset{(*)}{=} \int_\gamma dG = \int_\gamma \omega,$$

en $(*)$ hemos utilizado que la traza de γ está contenida en U, donde $\omega|_U = dG|_U$.

Para el caso general, suponemos que U es abierto relativamente compacto que contiene a la traza de la curva γ y tomamos una partición $\mathscr{P} = \{t_k\}_{k=0}^n$ del intervalo unidad y una familia de cartas $\{(U_j, z_j)\}_{j=1}^n$ tal que

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \subset U, \quad \varphi_j(U_j) = \mathbb{D}.$$

Dentemos γ_j a la restricción $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, podemos utilizar lo probado para el caso de una carta conforme al disco, esto es, existe una solución débil f_j del divisor $\delta\gamma_j = \gamma_j(t_j) - \gamma_j(t_{j-1})$ tal que $f|_{X \setminus U_j} = 1$ y

$$\int_{\gamma_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Consideramos $f = f_1 \cdots f_n$. Es claro que $f|_{X \setminus U} = 1$. Además, como f_j es solución débil de $\delta\gamma_j$ entonces f es solución débil de $\delta\gamma = \sum_{j=1}^n \delta\gamma_j$. Resta comprobar (8.7). Para cada $j = 1, \ldots, n$ en cada entorno conforme al disco U_j, existe $G_j \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{C})$ tal que

$$\omega|_{U_j} = dG_j|_{U_j}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Para cada $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$dG_i|_{U_i \cap U_j} = dG_j|_{U_i \cap U_j}$$

es decir G_i y G_j se diferencian en una constante en $U_i \cap U_j$. Tomando esta constante como cero, las funciones G_j satisfacen las mismas condiciones y podemos definir

$$G : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad G|_{U_j} = G_j$$

y cero fuera de los soportes de cada G_j. Así

$$dG|_{\cup_{j=1}^n U_j} = \omega|_{\cup_{j=1}^n U_j} \tag{8.8}$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_X \frac{df}{f}\wedge\omega \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\iint_{\cup_{j=1}^n U_j} \frac{df}{f}\wedge dG \overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i}\iint_X \frac{df}{f}\wedge dG$$
$$\overset{(***)}{=} G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = \int_\gamma \omega.$$

En $(*)$ y en $(**)$ se ha utilizado que los integrandos son nulos fuera de $\cup_{j=1}^n U_j$.
En $(**)$ hemos usado (8.8). En $(***)$ hemos usado el Lema 8.0.2 y en el último paso que la curva γ está contenida en la unión de los U_j en donde se cumple (8.8). □

Lema 8.0.4. *En una superficie de Riemann abierta, todo divisor admite solución débil.*

Demostración. Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos dada por el Corolario 5.2.1, esto es,

- Cada K_n es Runge, $n \in \mathbb{N}$.
- $K_n \subset K_{n+1}^\circ$.
- $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de X.

Hacemos la prueba en dos pasos.

1. Supongamos que d es un divisor de X tal que $d = 1\cdot x_0$, para cierto $x_0 \in X \setminus K_{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dado que x_0 está en el complementario en X del K_{n_0}, y este es Runge, entonces x_0 pertenece a una componente conexa U de $X\setminus K_{n_0}$ que no es relativamente compacta. Tenemos que $U \setminus K_{n_0+1} \neq \varnothing$. En efecto, si $U \setminus K_{n_0+1} = \varnothing$ entonces

$$K_{n_0} \subset K_{n_0+1} \subset U \subset X \setminus K_{n_0},$$

una contradicción. Dado que $K_{n_0} \subset K_{n_0+1}^\circ$, entonces $U \setminus K_{n_0+1} \subset U \setminus K_{n_0+1}^\circ \subset U$. Sea $x_1 \in U \setminus K_{n_0+1}^\circ$. Dado que x_1 está en U y esta es componente conexa (arcoconexa), existe $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow U$ una curva continua tal que $\gamma_0(0) = x_0$ y $\gamma_0(1) = x_1$. Sea V un entorno relativamente compacto de $\gamma_0([0,1])$ contenido en U. Por el Lema 8.0.3, asociado al divisor $\delta\gamma = x_1 - x_0$, existe f_0 solución débil de $\delta\gamma$ y tal que $f|_{X\setminus V} = 1$. En particular, $V \subset U \subset X\setminus K_{n_0}$ luego $K_{n_0} \subset X\setminus V$ y por ende $f|_{K_{n_0}} = 1$.

   Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos repetir este proceso, lo que nos da lo siguiente:

   - Una sucesión de puntos $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ tales que $x_m \in K_{n_0+m}$, para todo $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
   - Una sucesión de curvas $\{\gamma_m\}_{m=0}^\infty$ tal que

   $$\gamma_m([0,1]) \subset X \setminus K_{n_0+m}, \quad \gamma_m(0) = x_m,\ \gamma_m(1) = x_{m+1}.$$

   - Una sucesión de soluciones débiles $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ de los divisores $\delta\gamma_m$ tal que

   $$f_m|_{K_{n_0+m}} = 1.$$

Por construcción, $\delta\gamma_m = x_{m+1} - x_m$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n := \prod_{m=0}^{n} f_m$. Por lo dicho en la Observación 8.0.2, g_n es solución débil de $\sum_{m=0}^{n} \delta\gamma_m = x_{n+1} - x_0$. Comprobemos que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos (sucesión de productos parciales). Sea Q un compacto de X. Dado que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es expansiva y recubre a X, la compacidad de Q nos dice que existe K_{n_Q} tal que $Q \subset K_{n_Q}$. Tenemos que $f_n|_{K_{n_0+n}} = 1$, por tanto, en el producto $\prod_{m=0}^{\infty} f_m|_Q$ solo una cantidad finita de f_m no valen uno. En consecuencia, el límite existe en cada uno de los compactos de X. Definimos

$$g := \lim_{n\to\infty} g_n \equiv \prod_{n=0}^{\infty} f_n.$$

g es una solución débil de $-d = -x_0$ y por tanto $-g$ es solución débil de d.

2. Sea $d \in \mathrm{Div}(X)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$d_m(x) := \begin{cases} d(x) & \text{si} \quad x \in K_{m+1} \setminus K_m, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin K_{m+1} \setminus K_m, \end{cases}$$

donde $K_0 := \varnothing$. Consideramos la sucesión $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$ y sus sumas parciales $S_n = \sum_{m=0}^{n} d_m$. Sea $x_0 \in X$. Como $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una exhaución de una superficie abierta y $K_0 = \varnothing$, existe un K_{m_0} tal que $x_0 \in K_{m_0+1} \setminus K_{m_0}$. esto nos dice que $d_{m_0}(x_0) = d(x)$ y $d_m(x) = 0$ para todo $m \neq m_0$. En consecuencia, las sumas parciales cumplen $S_n(x_0) = d(x_0)$, para n suficiente grande. esto prueba que, para cada $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = d(x).$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ está definida puntualmente y converge hacia d también punto a punto. Cada divisor d_m está en las condiciones del paso anterior, por lo que existe f_m solución débil de d_m tal que $f_m|_{K_m} = 1$. Definimos

$$P_n := \prod_{m=0}^{n} f_m.$$

Con el mismo razonamiento de antes, dado un compacto Q de X, solo hay una cantidad finita de productos que no son uno. Por tanto $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ presenta convergencia uniforme por compactos hacia una función f que es solución débil del divisor d.

□

Teorema 8.0.1. *[Teorema de Weierstrass] En una superficie de Riemann abierta todo divisor tiene solución.*

Demostración. Sea $d = \sum_{i=1}^{r} n_i x_i \in \mathrm{Div}(X)$. Localmente el problema tiene solución. En efecto, para cada $i = 1, \ldots, r$, sea $(U_i, \varphi_i = z_i)$ una carta alrededor de x_i conforme al disco, U_i abierto relativamente compacto, de modo que $x_j \notin U_i$, para todo $j \neq i$. Sea $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ en las condiciones de la Proposición 6.2.1, es decir, x_i es polo de f_i y f_i es holomorfa en $U_i \setminus \{x_i\}$. Denotemos por m_i al orden de f_i. Denotemos $\widetilde{f_i} = f_i \circ \varphi_i^{-1}$ la representación coordenada de f en la carta (U_i, z_i). Dado que f_i tiene un polo de orden m_i en x_i, por definición, $\widetilde{f_i}$ tiene un polo de orden m_i en el punto cero del disco $\mathbb{D}$. Entonces, la función

$$\widetilde{g_i} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad w \longmapsto w^{m_i+n_i}\widetilde{f_i}(w)$$

tiene multiplicidad n_i en el punto $0 \in \mathbb{D}$. En consecuencia $g_i = \widetilde{g}_i \circ \varphi_i$ es una función con multiplicidad n_i en el punto x_i. esto resuelve el problema en U_i.

Sea $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i = z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que cada carta (U_i, φ_i) está en las condiciones anteriores. Sea f_i la respectiva solución en cada U_i. Observemos que si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces f_j no tiene ceros en $U_j \cap U_i$ (puesto que no está ni x_i ni x_j). Además, f_i tampoco tiene ceros por el mismo razonamiento. En consecuencia, $f_i/f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ y no presenta ceros.

Sea ψ una solución débil de d. Entonces $\psi_i = \psi/f_i$ no puede tener ceros ni singularidades en x_i, al ser ψ solución débil, alrededor del x_i, ψ presenta un cero del mismo orden que f_i, lo que evita que ψ_i tenga singularidades. Además, tampoco puede tener ceros, pues ψ_i solo se anula en U_i en el punto x_i. Existe $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i, \mathbb{C})$ tal que $e^{\varphi_i} = \psi_i$ en U_i. De este modo, en cada U_i, la función ψ se expresa como $\psi = e^{\varphi_i} f_i$. De este modo, el cociente $f_i/f_j = e^{\varphi_i - \varphi_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. Consideramos $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$. Observemos que se de la propiedad de ser 1-cociclo de X subordinado al recubrimiento $\mathcal{U}$. En efecto, en cada intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$, tenemos que

$$\varphi_{ij} + \varphi_{jk} - \varphi_{ik} = (\varphi_i - \varphi_j) + (\varphi_j - \varphi_k) - (\varphi_i - \varphi_k) = 0.$$

De modo que $(\varphi_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ es un 1-cociclo de X subordinado al recubrimiento $\mathcal{U}$, $(\varphi_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Dado que X es abierta entonces $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, luego los 1-cociclos anteriores se descomponen, es decir,

$$\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j = g_i - g_j \quad \text{en } U_i \cap U_j,$$

donde $g_i, g_j \in \mathcal{O}(U_i), \mathcal{O}(U_j)$. De este modo

$$e^{\varphi_i - \varphi_j} = e^{g_i - g_i} = f_i/f_j \Longrightarrow e^{g_j} f_j = e^{g_i} f_i$$

en $U_i \cap U_j$. Definimos entonces

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = f_i e^{g_i}, \text{ si } x \in U_i.$$

Dado que en las intersecciones del dominio de definición $f_i e^{g_i} = f_j e^j$, f está bien definida. Además, dado que en cada U_i, tenemos que e^{g_i} no tiene ni ceros ni polos, en cada x_i, la multiplicidad de $f_i e^{g_i}$ es la misma que la de f_i. Entonces f tiene la misma multiplicidad en cada x_i que f_i. Como f_i era solución de d y f tiene las mismas multiplicidades que f_i, para todo i, inferimos que $(f) = d$. □

Corolario 8.0.1. *En toda superficie de Riemann abierta existe una 1-forma holomorfa sin ceros.*

Demostración. Consideramos $g \in \mathcal{M}(X)$ no constante, que es posible tomando el divisor que queramos. Entonces tenemos que dg es una 1-forma meromorfa sobre X. Consideramos el divisor subordinado $-dg$, es decir $(-dg)$. El Teorema anterior nos permite encontrar una función $f \in \mathcal{M}^*(X)$ tal que $(f) = (-dg)$. Definimos entonces $\omega = f dg$. Así, ω es meromorfa en X y en cada singularidad de dg, la función f presenta un cero de ese mismo orden. Si dg presenta un cero, entonces f presenta un polo de este mismo orden. Así pues, ω no puede tener ni ceros ni polos y el límite existe en cada uno de dichos puntos. El Teorema de Extensión de Riemann nos permite concluir que ω es holomorfa en todo X (se extiende a todo X). □

Podemos demostrar el recíproco del Teorema de Aproximación de Runge simplemente tomando una función meromorfa en todo X. La demostración es idéntica a la dada en el Teorema 7.3.1 y nos permite enunciar el Teorema de Aproximación de Runge en ambas direcciones.

Teorema de Aproximación de Runge. *Sea X una superficie de Riemann abierta y $Y \subset X$ un abierto de X. Entonces toda función holomorfa en Y puede ser aproximada uniformemente por compactos mediante funciones holomorfas en todo X si y sólo si Y es Runge. Con más precisión, dada $f \in \mathcal{O}(Y)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ tal que para todo compacto $K \subset Y$,*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n|_K - f\|_{L^\infty(K)} = 0,$$

si y sólo si Y es Runge.

8.1. Distribución de Mittag-Leffler

Sea X una superficie de Riemann y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Una familia $(f_i)_{i\in I}$ es llamada de *distribución de Mittag-Leffler* si $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ y $f_i - f_j|_{U_i\cap U_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, esto es, f_i y f_j tienen la misma parte singular en $U_i \cap U_j$. Una *solución de* $(f_i)_{i\in I}$ es una función $f \in \mathcal{M}(X)$, tal que $f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$.

De manera natural, si definimos $f_{ij} := f_i - f_j$ en cada $U_i \cap U_j$, tenemos que $(f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Podemos decir más y afirmar que $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. En efecto, comprobemos la condición de ser cociclo

$$f_{ik} = f_i - f_k = (f_i - f_j) + (f_j - f_k) = f_{ij} + f_{jk} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Podemos caracterizar las soluciones de este tipo de distribuciones.

Proposición 8.1.1. *Sea X una superficie de Riemann y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una distribución de Mittag-Leffler tiene solución si y sólo si $\delta(f_i)$ es 1-cohomologo a cero, es decir $[\delta(f_i)] = 0 \in H^1(X, \mathcal{O})$.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{M}(X)$ es solución de $(f_i)_{i\in I}$. Entonces, para cada $i \in I$, $g_i = f_i - f \in \mathcal{O}(U_i)$. En $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$(f_{ij}) = (f_i - f_j) = (g_i - g_j) = \delta((g_i)) \Longrightarrow (f_{ij}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}),$$

puesto que $(g_i)_{i\in I}$ son todas holomorfas en U_i. En consecuencia el 1-cociclo $\delta(f_i) = (f_i - f_j)$ es un 1-coborde y por ende es cohomologo a cero.

Recíprocamente, si $\delta(f_i) = (f_i - f_j)$ es cohomólogo a cero, existe una 0-cocadena (g_i) tal que

$$f_j - f_i = g_j - g_i \quad U_i \cap U_j$$

y tal que $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ para todo $i \in I$. esto implica que $f_i - g_i = f_j - g_j$ en $U_i \cap U_j$. esta propiedad nos permite definir

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f|_{U_i} := f_i - g_i, \quad \forall i \in I.$$

Así $f \in \mathcal{M}(X)$ y además

$$f|_{U_i} - f_i = f_i - g_i - f_i = -g_i \in \mathcal{O}(U_i),$$

es decir, f es solución de $(f_i)_{i\in I}$. □

Lo anterior es completamente general para superficies de Riemann. Ahora bien, para superficies de Riemann abiertas podemos ser más precisos.

Corolario 8.1.1. *En una superficie de Riemann abierta toda distribución de Mittag-Leffler tiene solución.*

Demostración. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una distribución de Mittag-Leffler sobre una superficie de Riemann abierta X y cierto recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. La distribución tendrá solución si y sólo si $[\delta(f_i)] = 0$ en $H^1(X, \mathcal{O})$. Ahora bien, como X es abierta el Corolario 7.3.1 nos dice que $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. En particular, $[\delta(f_i)] = 0$. □

Combinando el Teorema de Weierstrass y las distribuciones de Mittag-Leffler, podemos demostrar un par de resultados muy potentes.

Proposición 8.1.2. *Sea X una superficie de Riemann no compacta y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X sin puntos de acumulación. Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos, existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el divisor $d = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 \cdot x_n$. Dado que X es abierta, existe $h \in \mathcal{M}(X)$ tal que $(h) = d$. Ahora bien, por la definición de d, la función h_n es holomorfa en todo X y posee un cero de orden uno en cada punto $x_n \in X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $U_i := X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{i\}}\{x_n\}$. Cada U_i es abierto y $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ recubre a todo X. Sea $g_i := y_i/h$ que es una función holomorfa en U_i con un polo de orden uno en x_i. Para cada $i \neq j$, la intersección $U_i \cap U_j = X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$, por lo que $1/h$ es holomorfa en cada $U_i \cap U_j$, pues hemos quitado todos sus polos. esto prueba que cada g_i es holomorfa en $U_i \cap U_j$.

Observemos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de funciones meromorfas en cada U_i y tal que $g_i - g_j$ es holomorfa en $U_i \cap U_j$, puesto g_i y g_j son holomorfas en tal intersección cada una por separado. esto no es más que decir que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una distribución de Mittag-Leffler, que tiene solución al ser X abierta, tiene solución, es decir, existe $g \in \mathcal{M}(X)$ tal que $g - g_i$ es holomorfa en U_i, para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos $f := gh \in \mathcal{M}(X)$. Podemos escribir

$$f = gh = y_i + (g - g_i)h \quad \text{en cada } U_i.$$

La función $g - g_i$ es holomorfa en U_i y $h \in \mathcal{O}(X)$. esto prueba que f es holomorfa en cada U_i y por tanto holomorfa en todo X. Finalmente, como $x_i \in U_i$ y $h(x_i) = 0$, tenemos

$$f(x_i) = y_i + (g(x_i) - g_i(x_i))h(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

□

Definición 8.1.1. Sea M una variedad compleja n-dimensional. Diremos que M es una *variedad de Stein* si

- M es holomórficamente separable, es decir, dados $p, q \in M$ distintos, existe $f \in \mathcal{O}(M)$ tal que $f(p) \neq f(q)$.
- M es holomórficamente convexo, es decir, para todo $K \subset X$ compacto la envolvente holomorfa convexa

  $$\widehat{K} := \left\{ p \in M : |f(p)| \leq \max_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(M9 \right\}$$

  es compacta.

esta es la definición clásico de variedad de Stein. Una definición equivalente puede verse en [7, Corollary 26.8]. Observemos que toda superficie de Riemann abierta es una 1-variedad de Stein. Además, se puede demostrar que una superficie de Riemann es Stein si y sólo si es abierta. esto se debe a que el recíproco del Teorema de Aproximación de Runge es cierto.

Capítulo 9

Teorema de Mergelyan-Bishop

Para la siguiente versión del Teorema de Runge, necesitamos trabajar más y se conoce como Teorema de Mergelyan-Bishop. Enunciamos la versión en el plano complejo, cuya demostración puede encontrarse [19, Capítulo 20, pág 390].

Teorema de Mergelyan-Bishop (Versión $\mathbb{C}$). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y Runge. Entonces toda función f que continua en K y holomorfa en K° se puede aproximar uniformemente en K mediante funciones enteras. Con más precisión, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones enteras tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Nosotros vamos a demostrar la correspondiente versión en superficies de Riemann.

Teorema de Mergelyan-Bishop. *Sea X una superficie de Riemann abierta y $K \subset X$ compacto y Runge. Entonces toda función f continua en K y holomorfa en K° se puede aproximar uniformemente en K mediante funciones holomorfas en todo X. Con más precisión, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

En el caso del plano complejo fue demostrado por Mergelyan en 1954 [19]. Más tarde, en 1958, Erret Bishop demostró este teorema para superficies de Riemann [4]. Ambas pruebas se basan en Teoría de la Medida y Análisis Funcional. Nos inspiramos en la prueba [11, págs 86-90]. No obstante, se deben de cambiar unos cuantos pasos. En tal prueba se omite el Corolario 9.0.1, que es necesario para que las constantes que vayamos obteniendo no dependan de ε.

Para ello vamos a necesitar un teorema local, que para demostrarlo damos un lema previo y una definición.

Definición 9.0.1. Sea X una superficie de Riemann, G un abierto de X, $\{(U_i, \varphi_i = z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ atlas holomorfo de X y $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(G)$. Sea $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap G, \mathbb{C})$ tal que

$$\omega|_{U_i\cap G} = f_i d\bar{z}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definimos $\widetilde{f_i} = f_i \circ \varphi_i^{-1}$. Sea $C_\omega > 0$. Diremos que ω cumple la C_ω-propiedad si

$$\|\widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i\cap G))} \leq C_\omega, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Observación 9.0.1. La C_ω-propiedad depende del atlas holomorfo tomado.

Lema 9.0.1. *Sea X una superficie de Riemann abierta, G abierto relativamente compacto y $G_0 \subset\subset G$. Sean $(U_i, \varphi_i = z_i)$, $i = 1, \dots, n$ cartas de X tal que $\{U_i\}_{i=1}^n$ sea un recubrimiento de G. Existe $C_0 > 0$ tal que para toda $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(G)$ satisfaciendo la C_ω-propiedad existe una función $u \in \mathcal{C}^\infty(G_0, \mathbb{C})$ tal que*

$$\overline{\partial} u = \omega|_{G_0}, \quad \|u\|_{L^\infty(G_0)} \leq C_0 C_\omega.$$

Demostración. Sea $a \in \overline{G_0}$. Consideramos el divisor $d = 1 \cdot a$. Entonces, al ser X abierta, todo divisor tiene solución, esto es, existe una función f_a, holomorfa en todo X tal que f_a presenta un cero de orden uno en el punto a. Dado que a es cero de orden uno entonces $f_a'(a) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Inversa, podemos encontrar un entorno $V_a \ni a$ de forma que $f_a : V_a \longrightarrow \mathbb{D}$ sea un biholomorfismo. Dado que $\overline{G} \setminus V_a$ es compacto y $f_a(p) \neq 0$ en todo $p \in \overline{G} \setminus V_a$, por el Teorema de Weierstrass

$$0 < r := |f_a(p_0)| \leq |f_a(p)|, \quad \forall p \in \overline{G} \setminus V_a.$$

Esto se puede reescribir como

$$f_a\left(\overline{G} \setminus V_a\right) \cap D(0, r) = \varnothing. \tag{9.1}$$

Restringiendo V_a tenemos que $f_a : V_a \longrightarrow D(0, r)$ es un biholomorfismo cumpliendo (9.1). Mediante una dilatación, podemos suponer que $f_a : V_a \longrightarrow \mathbb{D}$.

Por la compacidad de $\overline{G}_0$ podemos construir un número finito de entornos $\{V_{a_i}\}_{i=1}^k$ asociados a puntos $\{a_i\}_{i=1}^k \subset G_0$, tales que

- $f_{a_i}(G \setminus V_{a_i}) \cap \mathbb{D} = \varnothing$.
- $G_0 \subset \cup_{i=1}^n V_{a_i} \subset G$.
- $V_{a_i} \subset U_i$, $i = 1, \dots, k$.

De esta forma $(V_{a_i}, f_{a_i} = w_i)$ es una carta centrada en el punto a_i, para todo $i = 1, \dots, k$. Tomemos $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ una partición diferenciable de la unidad respecto del recubrimiento $\{V_{a_i}\}_{i=1}^k$ de G_0. Definimos

$$\widehat{\omega}_i = \varphi_i \omega, \quad i = 1, \dots, k.$$

En las cartas $(V_{a_i}, f_{a_i} = w_i)$, $i = 1, \dots, k$ expresamos $\widehat{\omega}_i$ en coordenadas

$$\widehat{\omega}_i|_{V_{a_i}} = g_i d\overline{w}_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Consideramos $\widetilde{g}_i := g_i \circ f_{a_i}^{-1}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Por la C_ω-propiedad

$$\|\widetilde{g}_i\|_{L^\infty(\varphi_i(V_{a_i}))} \leq C_\omega, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Denotamos, como es usual, $d\mu$ a la medida de Lebesgue de $\mathbb{C}$. Definimos para $i = 1, \dots, k$,

$$h_i(z) := -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\widetilde{g}_i(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Si extendemos de manera diferenciable la función $\widetilde{g}_i$, usando el Lema de Urysohn, podemos decir, aplicando el Lema 4.6.1 que $\dfrac{\partial h_i}{\partial \overline{z}} = \widetilde{g}_i$, $i = 1, \dots, k$. Denotemos $\|\cdot\|$ a la norma infinito en $\mathbb{C}$ para realizar el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\frac{\|h_i\|}{\|\widetilde{g}_i\|} &= \frac{1}{\pi}\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|\iint_{\mathbb{D}}\frac{\widetilde{g}_i(\zeta)}{\|\widetilde{g}_i\|(\zeta - z)}d\mu(\zeta)\right| \leq \frac{1}{\pi}\sup_{z\in\mathbb{C}}\iint_{\mathbb{D}}\left|\frac{\widetilde{g}_i(\zeta)}{\|\widetilde{g}_i\|(\zeta - z)}\right|d\mu(\zeta)\\ &\leq \frac{1}{\pi}\sup_{z\in\mathbb{C}}\iint_{\mathbb{D}}\frac{1}{|\zeta - z|}d\mu(\zeta) \leq \frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|h_i\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq C_0'\|\widetilde{g}_i\|_{L^\infty(\mathbb{C})}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \tag{9.2}$$

donde C_0' una constante positiva independiente de ω. Por construcción mediante particiones de la unidad, tenemos que $\widetilde{g}_i$ se anula en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ y por tanto, $\left.\dfrac{\partial h_i}{\partial \overline{z}}\right|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} = 0$, es decir h_i es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$.

Dado que h_i está acotada, la podemos extender a la esfera de Riemann de manera holomorfa en entornos de infinito. Definimos $\widehat{h}_i := h_i \circ f_{a_i}$. La función $\widehat{h}_i$ es diferenciable en X por composición. Dado que $f_{a_i}(G \setminus V_{a_i}) \cap \mathbb{D} = \varnothing$, h_i es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ y f_{a_i} es holomorfa en X, entonces $\widehat{h}_i$ es holomorfa en $G_0 \setminus V_{a_i}$. En coordenadas locales (V_{a_i}, f_{a_i}) tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\big|_{G_0\cap V_{a_i}}\widehat{h}_i &= \frac{\partial \widehat{h}_i}{\partial \overline{w}_i}d\overline{w}_i = \frac{\partial(\widehat{h}_i \circ f_{a_i}^{-1})}{\partial \overline{w}_i}d\overline{w}_i\\ &= \frac{\partial h_i}{\partial \overline{w}}d\overline{w}_i = \widetilde{g}_i \circ f_{a_i}d\overline{w}_i\\ &= g_i d\overline{w}_i \equiv \widehat{\omega}_i.\end{aligned}$$

Definimos $u := \sum_{i=1}^k \widehat{h}_i \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Por la linealidad del operador $\overline{\partial}$,

$$\overline{\partial}\big|_{G_0} u = \sum_{i=1}^k \overline{\partial}\big|_{G_0}\widehat{h}_i = \sum_{i=1}^k \widehat{\omega}_i = \omega|_{G_0}.$$

De la desigualdad triangular y de la C_ω-propiedad:

$$\|u\|_{L^\infty(G_0)} \leq \sum_{i=1}^k \|\widehat{h}_i\|_{L^\infty(G_0)} \overset{(9.2)}{\leq} \sum_{i=1}^k C_0'\|\tilde{g}_i\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq kC_0'C_\omega = C_0C_\omega.$$

□

Corolario 9.0.1. *Sea X una superficie de Riemann abierta, $K \subset G \subset X$, donde K es compacto y G abierto relativamente compacto de X. Sean $\{(U_i, \varphi_i = z_i)\}_{i=1}^n$ cartas que recubren a G. Existe $C > 0$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(G)$ satisfaciendo la C_ω-propiedad podemos encontrar un abierto G_0 tal que $K \subset G_0 \subset G$ y una función $u \in \mathcal{C}^\infty(G_0, \mathbb{C})$ de modo que*

$$\overline{\partial}u = \omega|_{G_0}, \quad \|u\|_{L^\infty(K)} \leq CC_\omega + C'\varepsilon,$$

para cierta $C' > 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ satisfaciendo la C_ω-propiedad, $C_\omega > 0$. Sean $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap G, \mathbb{C})$ tal que

$$\omega|_{U_i \cap G} = f_i d\bar{z}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

Definimos $\widetilde{f_i} = f_i \circ \varphi_i^{-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\|\widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G))} \leq C_\omega, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Por continuidad, podemos encontrar $K \subset G_0 \subset G$ abierto tal que

$$\|\widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G_0))} \leq 2\|\widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap K))} + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n. \tag{9.3}$$

Sea U un entorno abierto de K relativamente compacto y $U \subset G_0$. Por el Lema de Uryshon, existe $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable tal que $\phi|_U = 1$ y $\mathrm{sop}(\phi) \subset G_0$. Consideramos la 1-forma $\beta := \phi|_G \cdot \omega$. Esta $\beta \in \mathcal{E}^{(0,1)}(G)$ cumple la $(2C_\omega + \varepsilon)$-propiedad. En efecto, como ϕ se anula fuera de G_0, los valores de β fuera de G_0 no afectan a la norma infinito, en coordenadas:

$$\|\phi \cdot \widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G))} = \|\phi \cdot \widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G_0))}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Así

$$\|\phi \cdot \widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G))} = \|\phi \cdot \widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap G_0))} \overset{(9.3)}{\leq} 2\|\widetilde{f_i}\|_{L^\infty(\varphi_i(U_i \cap K))} + \varepsilon.$$

Aplicando el Lema 9.0.1 con la constante $2C_\omega + \varepsilon$, podemos encontrar $u \in \mathcal{C}^\infty(G_0, \mathbb{C})$ con $\bar{\partial} u = \beta|_{G_0}$, $\bar{\partial}|_U\, u = \beta|_U = \omega$ y tal que

$$\|u\|_{L^\infty(K)} \leq C_0(2C_\omega + \varepsilon).$$

Veamos que C_0 no depende del $\varepsilon > 0$ tomado. Sean ε y ε' y supongamos que $\varepsilon < \varepsilon'$. Sean $G_0(\varepsilon) \subset G_0(\varepsilon')$ los respectivos entornos asociados. Aplicando el Lema 9.0.1 a ε' encontramos una función u diferenciable en $G_0(\varepsilon')$ tal que $\bar{\partial} u = \omega|_{G_0(\varepsilon')}$ y $\|u\|_{L^\infty(G_0(\varepsilon'))} \leq C_0(\varepsilon')C'_\omega$. esta función u satisface las mismas propiedades al restringirla a $G_0(\varepsilon)$ y $\|u\|_{L^\infty(G_0(\varepsilon))} \leq C_0(\varepsilon')C'_\omega$. Por tanto, podemos escoger $G_0(\varepsilon) = G_0(\varepsilon')$. En consecuencia la constante no depende de ε. □

Lema 9.0.2. *Sea X una superficie de Riemann abierta, K un compacto de X Runge y sea $f : K \longrightarrow X$ una función continua en K. Supongamos que para todo punto $a \in K$, existe un entorno relativamente compacto U de a en X tal que $f|_{K \cap \overline{U}}$ puede aproximarse uniformemente por funciones holomorfas del compacto $K \cap \overline{U}$. Entonces f se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en todo X.*

Demostración. Por la compacidad de K, podemos tomar un número finito de cartas $\{(U_i, \varphi_i = z_i)\}_{i=1}^n$ que recubran a K y conformes al disco $\mathbb{D}$. Sea $V_i = \varphi_i^{-1}(D(0, 1/2))$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{V_i\}_{i=1}^n$ recubren a K y que f puede ser aproximada uniformemente por funciones holomorfas de $K \cap \overline{V_i}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $f_i \in \mathcal{O}(K \cap \overline{V}_i)$ tal que

$$\|f - f_i\|_{L^\infty(K \cap \overline{V_i})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por definición de $f_i \in \mathcal{O}(K \cap \overline{V}_i)$, existe un abierto Ω_i tal que $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ y

$$K \cap \overline{V}_i \subset \Omega_i \subset\subset U_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por continuidad, asociado a $\varepsilon > 0$, existe W_i abierto tal que

$$\|f - f_i\|_{L^\infty(W_i)} < \varepsilon, \quad K \cap \overline{V}_i \subset W_i \subset \Omega_i.$$

Tómese ahora un abierto G relativamente compacto y Runge, tal que $K \subset G \subset\subset \cup_{i=1}^n V_i$. Consideramos una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ respecto del recubrimiento $\{V_i\}_{i=1}^n$. Definimos

$$W_{ij} := (W_i \cap W_j) \cup (W_j \setminus \overline{W}_i), \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

$$h_{ij} : W_{ij} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h_{ij}(z) = \begin{cases} \phi_i(z)(f_i(z) - f_j(z)), & z \in W_i \cap W_j \\ 0, & z \in W_j \setminus \overline{U}_i. \end{cases}$$

Por construcción $h_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(W_{ij}, \mathbb{C})$. Denotemos $W_i' := \cap_{j=1}^n W_{ij}$. Observemos que $\{W_i'\}_{i=1}^n$ es un recubrimiento de K. En efecto, si $z \in K \cap \overline{V}_i$ entonces $z \in W_i$. Si $z \notin W_j \supset K \cap \overline{V}_j$ entonces $z \notin \overline{V}_j$. Por lo tanto, $z \in W_{ij}$ y $K \cap \overline{V}_i \subset W_i'$.

Sea $h_j := \sum_{i=1}^n h_{ij}$. El dominio de definición de h_j es la intersección de los dominios de h_{ij}, luego h_j está definida en W_j' y $h_j \in \mathcal{C}^\infty(W_j', \mathbb{C})$. Sea $z \in W_j' \cap K$. Entonces,

$$h_j(z) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z)\,(f_i(z) - f_j(z)) \Longrightarrow |h_j(z)| \leq \sum_{i=1}^n |\phi_i(z)|\,|f_i(z) - f_j(z)|$$

Dado que $\|f_i - f\|_{L^\infty(K \cap W_i)} < \varepsilon$, entonces la desigualdad triangular nos dice que

$$\|f_i - f_j\|_{L^\infty(K \cap W_i \cap W_j)} < 2\varepsilon$$

y al ser $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|h_j\|_{L^\infty(W_j' \cap K)} &\leq \sup_{z \in W_j' \cap K} \sum_{i=1}^n |\phi_i(z)|\,|f_i(z) - f_j(z)| \\ &\leq \sup_{z \in W_j' \cap K} \sum_{i=1}^n |\phi_i(z)|\,\|f_i - f_j\|_{L^\infty(K \cap W_i \cap W_j)} < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Dado que $h_j = \sum_{i=1}^n \phi_i(f_i - f_j)$, aplicando la regla del producto para $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ de la carta $(U_j, \varphi_j = z_j)$ y sabiendo que $f_j - f_i$ es holomorfa, obtenemos

$$\frac{\partial\left(h_j \circ \varphi_j^{-1}\right)}{\partial \overline{z}_j}(\varphi_j(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\phi_j \circ \varphi_j^{-1})}{\partial \overline{z}_j}(f_i \circ \varphi_j^{-1} - f_j \circ \varphi_j^{-1}).$$

De la continuidad de la función $\dfrac{\partial(\phi_j \circ \varphi_j^{-1})}{\partial \overline{z}_j}$ en un relativamente compacto, podemos acotarla por una constante C_1,

$$\sup_{x \in K \cap W_j'} \left| \frac{\partial\left(h_j \circ \varphi_j^{-1}\right)}{\partial \overline{z}_j}(\varphi_j(x)) \right| \leq C_1 2\varepsilon.$$

Por continuidad de $\dfrac{\partial(\phi_j \circ \varphi_j^{-1})}{\partial \overline{z}_j}$, asociado a $C_1 3\varepsilon$, podemos encontrar un G_0 tal que

$$K \subset G_0 \subset\subset G \cap \left(\cup_{i=1}^n W_i'\right)$$

tal que

$$\sup_{x\in G_0\cap W_j'}\left|\frac{\partial\left(h_j\circ\varphi_j^{-1}\right)}{\partial\overline{z}_j}(\varphi_j(x))\right|\leq C_1 3\varepsilon.$$

Dado que $h_i - h_j = f_j - f_i$ en todo $G\cap W_i'\cap W_j'$ entonces $h_i - h_j$ es holomorfa en $G\cap W_i'\cap W_j'$. En particular

$$\overline{\partial}\big|_{G\cap W_i'\cap W_j'}(h_i - h_j) = 0.$$

es decir $\overline{\partial}\big|_{G\cap W_i'\cap W_j'} h_i = \overline{\partial}\big|_{G\cap W_i'\cap W_j'} h_j$. Por esta razón

$$\alpha|_{G\cap W_i'} := -\,\overline{\partial}\big|_{G\cap W_i'} h_i,$$

está bien definida y cumple que $\alpha\in\mathcal{E}^{(0,1)}(G)$. Asociado a $\varepsilon>0$, por el Corolario 9.0.1, existen ciertas constantes postivas C_2, C_3 y una función $u\in\mathcal{C}^\infty(K,\mathbb{C})$ tal que $\overline{\partial}u=\alpha$ (en un entorno de K) y $\|u\|_{L^\infty(K)} < C_1C_2 3\varepsilon + C_3\varepsilon$. Consideramos $g_i = u + h_i$, que es holomorfa en $W_i'\cap G$ puesto que es diferenciable y $\overline{\partial}g_i = \overline{\partial}u + \overline{\partial}h_i = \alpha|_{W_i'} - \alpha|_{W_i'} = 0$. Además, por la acotación de la función h_i dada en (9.4)

$$\|g_i\|_{L^\infty(K\cap W_i')} \leq \|h_i\|_{L^\infty(K\cap W_i')} + \|u\|_{L^\infty(K)} < 2\varepsilon + C_1C_2 3\varepsilon + C_3\varepsilon.$$

Por otra parte,

$$g_i + f_i = g_j + f_j \text{ en } G_0\cap W_i'\cap W_j'.$$

Por tanto, podemos definir $F\in\mathcal{O}(G)$ tal que $F|_{G\cap W_i'} = f_i + g_i$. Finalmente, la desigualdad triangular nos da que

$$\begin{aligned}|f(x)-F(x)| &\leq |f(x)-f_i(x)-g_i(x)| \leq |f(x)-f_i(x)| + |g_i(x)|\\ &< \varepsilon + 2\varepsilon + C_1C_2 3\varepsilon + C_3\varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos probado que f se puede aproximar uniformemente en K por una función holomorfa en un entorno G de K. En cualquier caso, el teorema de Runge nos permite aproximar F uniformemente en K por funciones holomorfas de X, y en consecuencia, f se aproxima uniformemente en K por funciones holomorfas en X. □

Ya podemos demostrar el Teorema principal.

Teorema de Mergelyan-Bishop. *Sea X una superficie de Riemann abierta y $K\subset X$ compacto y Runge. Entonces toda función f continua en K y holomorfa en K° se puede aproximar uniformemente en K mediante funciones holomorfas en todo X. Con más precisión, existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{O}(X)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Demostración. Vamos a usar el Lema 9.0.2 para probar el enunciado. Sea $p\in K$. Vamos a demostrar que existe un entorno V relativamente compacto de a tal que f se aproxima uniformemente en $\overline{V}\cap K$ por funciones holomorfas en $\overline{V}\cap K$, es decir, funciones holomorfas en cierto entorno de $\overline{V}\cap K$.

Sea (U,φ) una carta centrada en p y conforme al disco unidad $\mathbb{D}$. Sea $V := \varphi^{-1}(D(0,1/2))$. El conjunto $W := \overline{U}\setminus(\overline{V}\cap K) = (U\setminus\overline{V})\cup(U\setminus K)$ es conexo. En efecto, si no fuera conexo, consideramos la componente conexa C de $U\setminus K$ tal que $C\cap(U\setminus\overline{V})=\varnothing$. En particular,

C está contenida en $\overline{V}$, en particular C es relativamente compacta. Sin embargo, C es también una componente conexa de $X \setminus K$ relativamente compacto, una contradicción con que K fuese Runge.

Como W es conexo, entonces $\varphi(W) = \mathbb{D} \setminus \varphi(\overline{V} \cap K)$ es conexo y $\mathbb{C} \setminus \varphi(\overline{V} \cap K)$ es también conexo, es decir, al ser $\varphi(\overline{V} \cap K)$ acotado, entonces $\mathbb{C} \setminus \varphi(\overline{V} \cap K)$ no es acotado. esto nos dice que $\varphi(\overline{V} \cap K)$ es Runge en $\mathbb{C}$. Aplicando el Teorema de Mergelyan en el plano complejo a la función $f \circ \varphi^{-1}$, encontramos una función holomorfa $\tilde{f}$ en $\varphi(\overline{V} \cap K)$ que se aproxima uniformemente en $\varphi(\overline{V} \cap K)$ a la función $f \circ \varphi^{-1}$. Por tanto, $\varphi^{-1} \circ \tilde{f}$ es la función buscada.

$\square$

Capítulo 10

Clasificación de superficies topológicas compactas orientables

Necesitamos un teorema de clasificación que puede encontrarse en [8, Capítulo 6]. En el artículo [3] y en [6] puede encontrarse una descomposición más precisa. Nuestros intereses son las superficies de Riemann, que como sabemos son todas orientables por la Proposición 2.4.1.

Teorema 10.0.1 (Clasificación de superficies compactas con borde orientables)**.** *Sea S una superficie compacta con borde orientable. Existen $g \geq 0$ y $k \geq 1$ tales que S es homeomorfa a una esfera de g-asas con k componentes conexas en el borde. El grupo fundamental tiene la siguiente representación*

$$\pi_1(X) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, d_1, \ldots, d_k : [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] d_1 \ldots d_k = 1 \rangle$$

y su grupo de homología singular

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, d_1, \ldots, d_k : d_1 + \cdots + d_k = 0 \rangle.$$

Además, su característica de Euler viene dada por $\chi(X) = 2 - 2g - k$.

Teorema 10.0.2. *Dos superficies topológicas compactas con borde orientables son homeomorfas si y sólo si tienen las misma característica de Euler y el mismo número de componentes conexas en el borde o el mismo género.*

Observación 10.0.1. Sea X es una superficie de Riemann compacta (sin borde), su grupo fundamental tiene la siguiente representación,

$$\pi_1(X) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g : [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

El abelianizado de $\pi_1(X)$ es $H_1(X, \mathbb{Z})$. Por tanto, el grupo de homología es isomorfo $\mathbb{Z}^{2g}$. Los generadores son $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ y son una base de homología de X, siendo una suma de g toros.

Observación 10.0.2. Sea X una superficie de Riemann compacta con borde. Entonces X es homeomorfa a una esfera con g asas y k componentes conexas en el borde, $g \geq 0$ y $k \geq 1$. En este caso, su grupo fundamental tiene la siguiente representación

$$\pi_1(X) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, d_1, \ldots, d_k : [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] d_1 \cdots d_k = 1 \rangle.$$

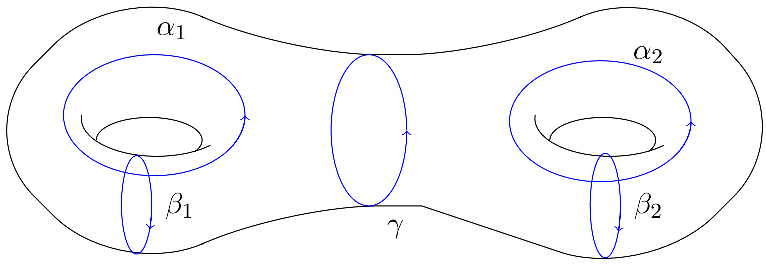


Figura 10.1: Base de homología canónica para $g = 2$.

Abelianizando dicho grupo, obtenemos que $H_1(X, \mathbb{Z})$ tiene la siguiente representación,

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, d_1, \ldots, d_k : d_1 + \cdots + d_k = 0\},$$

es decir, al poner $d_k = -\sum_{i=1}^{k-1} d_i$, tenemos que $H_1(X, \mathbb{Z})$ tiene $2g+k-1$ generadores. Los a_i y b_i son los generadores canónicos de las asas. Los $d_1, \ldots, d_k$ rodean cada disco, luego separan a X en dos partes, y por ser generadores, todo ciclo se escribe como combinación lineal de ellos. En consecuencia $\{a_i, b_i, d_i\}$ es una base de homología canónica de X.

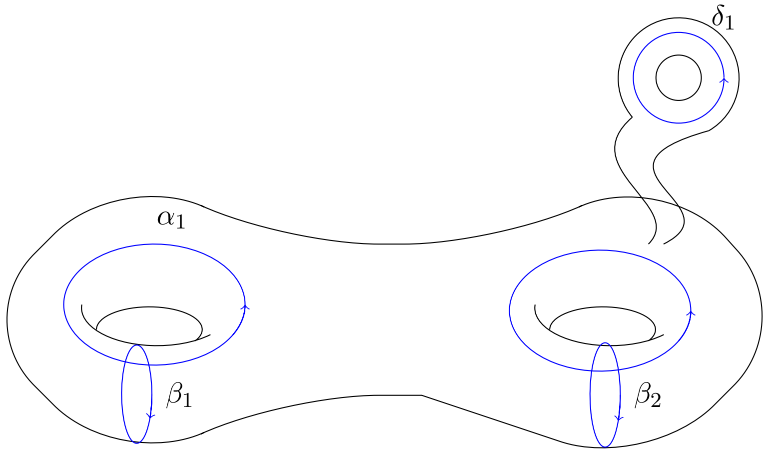


Figura 10.2: Curvas α_i, β_i y δ_i que representan a a_i, b_i y d_i respectivamente.

Capítulo 11

Teorema de Gunning-Narasinham

Con los Teoremas de Aproximación de Runge y de Bishop-Mergelyan podemos dar una demostración del siguiente resultado, debido a R.C Gunning y a R. Narasinham en su artículo conjunto de 1967 [9]. Lo enunciamos a continuación.

Teorema de Gunning-Narasinham. *Toda superficie de Riemann abierta admite una inmersión holomorfa sobre el plano complejo.*

Dicho enunciado es el que se prueba en el mencionado artículo [9] y tiene diferentes formulaciones equivalentes.

Proposición 11.0.1. *En una superficie de Riemann abierta X las siguientes aserciones son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión holomorfa $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$.*
2. *Existe $\omega \in \Omega^1(X)$ exacta y sin ceros.*
3. *Existe una función holomorfa $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que es un homeomorfismo local.*
4. *Existe una función holomorfa $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ sin puntos críticos.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Definimos $\omega := dF$. Por construcción ω es holomorfa y exacta. Al ser F una inmersión, para cada punto $p \in X$, $(dF)_p$ es inyectiva, esto es, $(dF)_p \neq 0$. Por tanto $\omega(p) \neq 0$.

1. $\Leftarrow$ 2. Si suponemos que ω es exacta, existe una función diferenciable sobre todo X tal que $\omega = dF$. Ahora bien, ω es holomorfa, luego su primitiva es necesariamente una función holomorfa (Proposición 1.7.5), esto es, $F \in \mathcal{O}(X)$. Finalmente, F es una inmersión. En efecto, dado $p \in X$, $\omega(p) = (dF)_p$ y como $\omega(p) \neq 0$, entonces $(dF)_p \neq 0$.

2. $\Rightarrow$ 3. Si suponemos que ω es exacta, existe una función diferenciable sobre todo X tal que $\omega = dF$. Ahora bien, ω es holomorfa, luego su primitiva es necesariamente una función holomorfa (Proposición 1.7.5). Por lo visto antes $(dF)_p \neq 0$. El Teorema de la Función Inversa nos garantiza que F es un biholomorfismo local y por tanto, homeomorfismo local.

2. $\Leftarrow$ 3. Dado que F es un homeomorfismo local, en particular es localmente inyectiva. Dado que F es localmente inyectiva, necesariamente $(dF)_p \neq 0$ en todo punto $p \in X$. Definiendo $\omega = dF$ tenemos que ω es holomorfa (por serlo F) y sin ceros.

3. $\Rightarrow$ 4. Dado que F es un homeomorfismo local, en particular es localmente inyectiva. Dado que F es localmente inyectiva, necesariamente $(dF)_p \neq 0$ en todo punto $p \in X$, es decir, no tiene puntos críticos.

3. $\Leftarrow$ 4. Si F no tiene puntos críticos entonces $(dF)_p \neq 0$ para todo $p \in X$. El Teorema de la Función Inversa nos garantiza que F es un biholomorfismo local y por tanto, homeomorfismo local. $\square$

Con este resultado, podemos demostrar el Teorema de Gunning-Narasinham probando cualquiera de las aserciones anteriores.

Recordemos que en una superficie de Riemann X un 1-ciclo, o simplemente ciclo es una suma de curvas continuas $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ tales que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Denotamos usualmente por $[\gamma]$ a la clase de homología con coeficientes enteros del ciclo γ. Además, dada ω una 1-forma diferencial cerrada, sabemos que la integración sobre una curva no depende del tipo de homología, por la Proposición 2.5.6. Introducimos la notación

$$\int_{[\gamma]} \omega = \int_\gamma \omega.$$

Insistimos, que esto es cierto para 1-forma diferenciales **cerradas**. Nuestro objetivo, en el Teorema de Gunning-Narasinham es trabajar con 1-formas holomorfas, que todas ellas son cerradas por la Proposición 1.7.4.

Para demostrar el Teorema de Gunning-Narasinham vamos a necesitar varios lemas previos.

Lema 11.0.1. *Sea X una superficie de Riemann abierta X y $K \subset X$ compacto Runge. Sea $\{x_1, \dots, x_r\} \subset X \setminus K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función holomorfa $h_\varepsilon : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que h_ε tiene un cero en cada x_i, $i = 1, \dots, r$ y $\|h_\varepsilon - 1\|_{L^\infty(K)} < \varepsilon$.*

Demostración. Consideramos el divisor $d = \sum_{i=1}^r x_i$. Como X es abierta, por el Teorema de Weierstrass (Teorema 8.0.1) existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $(f) = d$, es decir, f tiene un cero (simple) en cada x_i, $i = 1, \dots, r$ y no se anula en ningún otro punto de X. Como K es compacto, entonces es cerrado, por lo tanto, $\{x_1, \dots, x_r\} \subset X \setminus K$ es aislado respecto de K, esto es, existe U abierto tal que $K \subset U$ y de forma que $\{x_1, \dots, x_r\} \cap U = \varnothing$. Así pues, $g := 1/f$ es holomorfa en U, porque f no se anula en U. Por definición $g \in \mathcal{O}(K)$.

Por otra parte, como K es compacto y f es holomorfa en U, f es continua en K y no tiene ceros, luego $0 < \|f\|_{L^\infty(K)} < \infty$.

Por definición, g es holomorfa en K. Asociado a $\varepsilon\|f\|_{L^\infty(K)}$ y a la función $g \in \mathcal{O}(K)$, por ser K compacto Runge y X abierta, el Teorema de Aproximación de Runge nos garantiza la existencia de una función $h \in \mathcal{O}(X)$ tal que

$$\|h - g\|_{L^\infty(K)} = \left\| h - \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(K)} < \varepsilon \|f\|_{L^\infty(K)}. \tag{11.1}$$

Definimos la función $h_\varepsilon := fh \in \mathcal{O}(X)$. Veamos que esta función h_ε sirve. Es claro que h_ε tiene un cero en cada x_i, $i = 1, \dots, r$, por la elección de f. También satisface la cota del enunciado. En efecto,

$$\|h_\varepsilon - 1\|_{L^\infty(K)} = \|fh - 1\|_{L^\infty(K)} = \frac{1}{\|f\|_{L^\infty(K)}} \left\| h - \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(K)} \overset{(11.1)}{<} \varepsilon.$$

$\square$

Recordemos también que en un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, un par de subespacios (A, B) de X es un *par escisivo* si $\overline{B} \subset A^\circ$, es decir, $B \subset\subset A$.

Lema 11.0.2. *Sea X una superficie de Riemann abierta y (D', D) un par escisivo de regiones relativamente compactas Runge. Existe un cierto número de curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ con traza contenida en $D' \setminus D$ tal que sus respectivas clases de homología conforman una base de $H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z})$. Además, el compacto K obtenido mediante $K := \overline{D} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p$ es Runge.*

Demostración. Observemos que $\overline{D}' \setminus D$ es una región compacta con borde. Por el Teorema de Clasificación de Superficies compactas con borde $\overline{D}' \setminus D$ es homeomorfa a una esfera con g asas y k componentes conexas del borde, $g \geq 1$, $k \geq 0$.

El Teorema de Clasificación de Superficies nos también una descripción del grupo de homología singular

$$H_1(\overline{D}' \setminus D, \mathbb{Z}) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_1, \dots, d_k : d_1 + \dots + d_k = 0 \rangle.$$

El d_k, se puede expresar en términos del resto de generadores, luego $H_1(\overline{D}' \setminus D, \mathbb{Z})$ tiene exactamente $2g + k - 1$ generadores. Los a_i y b_i son los generadores canónicos de las asas. Consideramos representantes $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, $p = 2g + k - 1$. Estos ciclos $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ no llegan a cortar a $\partial D'$. En consecuencia, son ciclos de D' y los podemos considerar como un sistema de generadores de $H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z})$. Sea $K = \overline{D} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p$. Veamos que K es Runge en X. En efecto, como D' es Runge en X y $K \subset D'$, basta probar que K es Runge en D'. Supongamos que $D' \setminus K$ tuviese una componente conexa relativamente compacta U. Sea γ una componente conexa del borde de ∂U, que es una curva cerrada simple. Como K es compacto y $K \subset D'$, entonces K es cerrado en D'. Así, U es abierta y cerrada en $D' \setminus K$, que es abierto de D'. En particular U es abierto de D'. esto nos dice que $\gamma \subset \partial U \subset K$. Por tanto, γ es un ciclo de K y un borde de U (por tanto un borde de D').

Dado que $D' \setminus D$ y D son subespacios disjuntos que recubren D', se verifica que

$$H_1(D', \mathbb{Z}) = H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z}) \oplus H_1(D, \mathbb{Z}). \tag{11.2}$$

Como $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ es un sistema de generadores de $H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z})$, por la descomposición (11.2), existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{Z}$ y σ ciclo en D tal que γ es homólogo en D' al ciclo $\sum_{i=1}^p \lambda_i \gamma_i + \sigma$.

Por el axioma de escisión sobre el par escisivo[1] (D', D) obtenemos que la inclusión de pares induce un isomorfismo

$$H_1(D' \setminus D, \varnothing) \cong H_1(D', D),$$

es decir $H_1(D' \setminus D) \cong H_1(D', D)$. Así pues, a los ciclos anteriores los podemos ver con sus clases en $H_1(D', D)$. Tomando clases

$$[\gamma - \sigma] = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i [\gamma_i], \quad \text{en } H_1(D', D). \tag{11.3}$$

[1] Un par de subespacios (A, B) son *escisivo* si $\overline{B} \subset A$.

Por definición,

$$H_1(D', D) = Z_1(D', D)/B_1(D', D),$$

donde $Z_1(D', D)$ son curvas cerradas en D' con sus extremos en D y $B_1(D', D)$ es la suma de una curva de D con un borde de X. En particular $\gamma \in B_1(D')$ (borde en D') y $\sigma \in C_1(D)$ (curva en D), luego $[\gamma - \sigma] = 0$ en $H_1(D', D)$. Por lo tanto, γ y σ tienen la misma clase de homología en $H_1(D', D) \cong H_1(D' \setminus D)$. Así pues $\gamma \subset D$. Como γ es una curva cerrada simple dentro de D, U es una componente conexa acotada de $X \setminus D$, que es una contradicción con que D sea Runge. $\square$

Estos arcos que hemos construidos servirán para construir funciones adecuadas sobre ellos.

Lema 11.0.3. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y $c \in \mathbb{C}$. Existe $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, con* $\operatorname{sop}(g) \subset (a, b)$ *y tal que*

$$\int_a^b e^{f(x)+g(x)} dx = c, \qquad \int_a^b g(x) e^{f(x)+g(x)} dx \neq 0.$$

Demostración. La demostración la hacemos en dos etapas. Primero probemos la tesis para funciones paso y luego las aproximamos por funciones continuas adecuadamente.

- Si $c = 0$. Tomemos una partición del intervalo (a, b)

  $$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 = b.$$

  Tómese $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ constantes positivas tales que

  $$x_0 < x_1 - \varepsilon_1 < x_1 + \varepsilon_1 < x_2 - \varepsilon_2 < x_2 + \varepsilon_2 < x_3 = b$$

  Sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Consideramos la función

  $$u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u(x) := \lambda \chi_{(x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)}(x).$$

  Entonces,

  $$\int_a^b e^{f(x)+u(x)} dx = \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1+\varepsilon_1} e^{f(x)} dx + e^{\lambda} \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2+\varepsilon_2} e^{f(x)} dx,$$

  $$\int_a^b u(x) e^{f(x)+g(x)} dx = \lambda e^{\lambda} \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2+\varepsilon_2} e^{f(x)} dx.$$

  Denotemos

  $$C_1 := \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1+\varepsilon_1} e^{f(x)} dx, \quad C_2 := \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2+\varepsilon_2} e^{f(x)} dx.$$

  Buscamos λ que satisfaga

  $$\begin{cases} C_1 + e^{\lambda} C_2 = 0 \\ \lambda e^{\lambda} C_2 \neq 0. \end{cases}$$

  Al no poseer ceros e^f y ser continua, podemos tomar ε_2 suficientemente pequeño de forma que $C_2 \neq 0$. Para esta elección la segunda ecuación se satisface. De la primera ecuación podemos despejar λ

  $$e^{\lambda} = -\frac{C_1}{C_2}$$

Tomando $C_1 \neq 0$ (con el mismo razonamiento), tendremos definido nuestro λ, pues tomaremos un logaritmo del número complejo no nulo

$$\lambda \in \operatorname{Log}\left(-\frac{C_1}{C_2}\right).$$

Así pues, hemos construido nuestra función paso para el caso $c = 0$.

- Si $c \neq 0$. Fijamos $x_0 \in (a, b)$ y consideramos un entorno $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ contenido en (a, b). Consideramos la función

$$u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u(x) := \lambda \chi_{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}(x).$$

Entonces,

$$\int_a^b e^{f(x)+u(x)} dx = \int_a^{x_0-\varepsilon} e^{f(x)} dx + e^{\lambda} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{f(x)} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} e^{f(x)} dx.$$

$$\int_a^b u(x) e^{f(x)+u(x)} dx = \lambda e^{\lambda} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{f(x)} dx.$$

Consideramos

$$C_1 := \int_a^{x_0-\varepsilon} e^{f(x)} dx, \quad C_2 := \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{f(x)} dx, \quad C_3 := \int_{x_0+\varepsilon}^{b} e^{f(x)} dx.$$

Por continuidad, podemos tomarlas no nulas. Resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} C_1 + e^{\lambda} C_2 + C_3 = c \\ \lambda e^{\lambda} C_2 \neq 0. \end{cases}$$

Al ser $C_2 \neq 0$ la segunda ecuación se satisface. Despejando en la primera ecuación

$$e^{\lambda} = \frac{c - C_1 - C_3}{C_2}$$

Por continuidad de e^f y sabiendo que no tiene ceros, podemos elegir ε tal que $C_1 + C_3 - c \neq 0$. Por tanto, podemos tomar logaritmo

$$\lambda = \operatorname{Log}\left(\frac{c - C_1 - C_3}{C_2}\right).$$

Dado que u es una función simple, podemos definir $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continuas en $[a, b]$ y de soporte compacto en (a, b) que converge uniformemente hacia u salvo un número finito de puntos (los puntos donde se quiebra la función simple) y de modo que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esté *uniformemente acotada*.

Consideramos

$$\varphi_n(s) = \int_a^b e^{f(x)+s g_n(x)} dx, \quad \varphi(s) = \int_a^b e^{f(x)+s u(x)} dx, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Es claro que para cada $s \in \mathbb{C}$, la sucesión $\{\varphi_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \varphi(s)$. En efecto, consideramos $\overline{D}(s, r)$. Como $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada, existe $M > 0$ tal que

$$|g_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como f es continua en $[a,b]$, la función $|f|$ es acotada en $[a,b]$. Así

$$|\varphi_n(s)| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b], s\in\overline{D}(s,r)} |e^{f(x)+sg_n(x)}| \leq (b-a)e^{\|f\|_{L^\infty([a,b])}}e^{rM},$$

siendo esta cota independiente de $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{f(x)+sg_n(x)}dx \\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} e^{f(x)+sg_n(x)}dx \\ &= \int_a^b e^{f(x)+su(x)}dx = \varphi(s).\end{aligned}$$

Esto prueba que φ es el límite puntual de la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Veamos que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada por compactos de $\mathbb{C}$. En efecto, usamos el mismo proceso que antes. Dado un compacto K, se tiene $\operatorname{diam}(K) < \infty$, luego para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_n(s)| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b], s\in K} |e^{f(x)+sg_n(x)}| \leq (b-a)e^{\|f\|_{L^\infty([a,b])}}e^{M\operatorname{diam}(K)},$$

y la constante no depende de $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones enteras acotada uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$, por el Teorema de Montel, existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos de $\mathbb{C}$ hacia φ (porque es la candidata a límite, por ser límite puntual). Por simplicidad en la notación denotaremos a tal subsucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por otra parte, por el Teorema de Derivación bajo el signo integral

$$\varphi_n'(s) = \int_a^b g_n(x)e^{f(x)+sg_n(x)}dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Una vez más, el Teorema de Convergencia Dominada nos dice que para todo $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(s) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)e^{f(x)+sg_n(x)}dx \\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} (g_n(x)e^{f(x)+sg_n(x)})dx \\ &= \int_a^b u(x)e^{f(x)+su(x)}dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a φ'. De nuevo, al ser u acotada (es una función simple) tenemos que $\{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en compactos $K \subset \mathbb{C}$

$$|\varphi_n(s)| \leq (b-a)\|u\|_{L^\infty(K)})e^{\|f\|_{L^\infty([a,b])}}e^{M\operatorname{diam}(K)}, \quad \forall s \in K, \forall n \in \mathbb{N},$$

siendo esta cota independiente de $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Montel $\{\varphi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia φ' uniformemente por compactos (pasando a una subsucesión). Por construcción de la función u

$$\varphi(1) = c, \quad \varphi'(1) \neq 0.$$

Dado que los límites $s \to 1$, se preservan por convergencia **uniforme**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se satisface

$$\varphi_n(1) = \varphi(1) = c, \quad \varphi_n'(1) = \varphi'(1) \neq 0.$$

Definimos $g := g_{n_0}$. Por construcción, g satisface las condiciones del enunciado

$$\int_a^b e^{f(x)+g_{n_0}(x)}dx = c, \quad \int_a^b g_{n_0}(x)e^{f(x)+g_{n_0}(x)}dx \neq 0.$$

□

Lema 11.0.4. *Sea X una superficie de Riemann abierta y (D', D) un par escisivo de abiertos relativamente compactos Runge. Sea $\omega \in \Omega^1(X)$ exacta en D. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $f \equiv f_\varepsilon \in \mathcal{O}(X)$ tal que $\|f\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon$ y de forma que ωe^f es exacta en D'.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el par escisivo (D', D), los cuales son abiertos relativamente compactos y Runge. El Lema 11.0.2 nos dice que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ ciclos que conforman un sistema de generadores de $H_1(D', D) \cong H_1(D' \setminus D)$ y tal que $K = \overline{D} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p$ es compacto Runge.

Aplicando el Lema 11.0.2 a $(D, \varnothing)$ encontramos $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q$ curvas de Jordan que son base de $H_1(D, \varnothing) \cong H_1(D)$.

Observamos que si para cada $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{O}(X)$ con $\|f\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon$ y tal que

$$\int_{\gamma_i} \omega e^f = 0, \quad i = 1, \dots, q \tag{11.4}$$

habremos terminado. En efecto, supongamos que se tiene lo anterior y sea γ un ciclo en D'. Dado que

$$H_1(D', \mathbb{Z}) = H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z}) \oplus H_1(D, \mathbb{Z})$$

tenemos que γ será homólogo a un cierto ciclo $\sum_{i=1}^q \lambda_i \gamma_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Dado que ωe^f es una 1-forma diferencial holomorfa entonces es cerrada. Como la integración de 1-formas cerradas solo depende del tipo de homología, por (11.4) tenemos que

$$\int_\gamma \omega e^f = \sum_{i=1}^q \lambda_i \int_{\gamma_i} \omega e^f = 0.$$

Por tanto, únicamente tenemos que probar la tesis para (11.4). Observemos lo siguiente,

1. $\gamma_1, \dots, \gamma_p \subset D' \setminus D$ y además sus intersecciones con $\overline{D}$ es su respectivo punto base.
2. $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q \subset D$.
3. Tenemos que $K = \overline{D} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p$ y $L = \gamma_{p+1} \cup \dots \cup \gamma_q$ son compactos Runge.
4. El Lema 11.0.3 nos permite encontrar u_i con soporte contenido en γ_i y tales que
   a) $\operatorname{sop}(u_i) \cap \operatorname{sop}(u_j) = \varnothing$ para $i \neq j$.
   b) Para cada $u_i : \gamma_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, q$ tenemos que se pueden extender continuamente a todo $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_q$, puesto que las curvas γ_i, γ_j se intersecan en a lo sumo un punto (punto base) en donde ambas funciones valen cero. Por tanto, en la intersección de los cerrados γ_i, γ_j tenemos que coinciden, luego podemos extender u_i como cero a la unión de las trazas de todas las curvas.

c) Para las curvas γ_i con $i = 1, \ldots, p$ cuyas trazas están en $D' \setminus D$, tenemos que $\gamma_i \cap \overline{D}$ se intersecan en el punto base. En dicho punto, la función u_i vale cero, puesto que su soporte está contenido en (a_i, b_i) con $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow X$. De este modo, en la intersección de γ_i y $\overline{D}$ podemos definirla continuamente como cero. Así pues, para $i = 1, \ldots, p$ tenemos que las u_i están definidas en $\overline{D} \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_p$, que es precisamente el compacto K; por tanto $u_i : K \longrightarrow \mathbb{C}$.

d) Para cada $i = 1, \ldots, p$ se cumple que

$$\int_{\gamma_i} \omega e^{u_i} = 0, \quad \int_{\gamma_i} u_i \omega e^{u_i} \neq 0.$$

e) Para $i = p + 1, \ldots, q$ se verifica

$$\int_{\gamma_i} u_i \omega \neq 0.$$

Para cada $i = 1, \ldots, p, p + 1, \ldots, q$ definimos la aplicación $\varphi_i : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}$ dada como

$$\varphi_i(s) = \int_{\gamma_i} \omega \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{q} s_j u_j\right).$$

Cada φ_i es entera e inducen $\varphi : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^q$ dada por $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$. Fijemos el punto $a = (1_{\mathbb{C}^p}, 0_{\mathbb{C}^{q-p}})$. Es claro que $\varphi_i(a) = 0$, en efecto

1. Si $i = 1, \ldots, p$ entonces $\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega e^{u_i} = 0$.

2. Para $i = p + 1, \ldots, q$ tenemos que γ_i está contenida en D, por tanto, $\int_{\gamma_i} \omega = 0$. Finalmente,
$$\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega = 0.$$

Utilizando las reglas de derivación, tenemos

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}(a) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma_i} u_i \omega e^{u_i} \neq 0 & \text{para } 1 \leq i \leq p \\ \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} u_i \omega \neq 0 & \text{para } p + 1 \leq i \leq q \end{cases}$$

y para $i \neq j$ tenemos $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) = 0$ debido a que $u_j = 0$ en γ_i.

Podemos calcular la matriz jacobiana de φ en a

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_s}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial z_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial z_s}(a) \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz diagonal cuyo determinante jacobiano es no nulo por ser producto de números no nulos.

Para cada $i = 1, \ldots, p$ tenemos que u_i vale cero en el interior de K y por tanto es holomorfa. Dado que K es Runge, u_i es continua en K y holomorfa en K°, por el Teorema de Mergelyan-Bishop existe una sucesión $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathcal{O}(X)$ que converge uniformemente en el compacto K hacia la función $u_i : K \longrightarrow \mathbb{C}$. En particular $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ uniformemente en el compacto $\overline{D}$, porque $i = 1, \ldots, p$ y $u_i|_{\overline{D}} = 0$.

Para cada $i = p+1, \ldots, q$, con el mismo razonamiento, las funciones $u_i : L \longrightarrow \mathbb{C}$ tienen asociadas alguna sucesión $\{v_i^{(n)}\} \to u_i$ en L. Ahora bien, el conjunto L es compacto Runge y

$$\partial D \cap (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_p) = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset X \setminus L,$$

donde $\{x_1, \ldots, x_r\}$ son los puntos base de los ciclos, $r \leq p$. Como X es abierta, asociado a $\varepsilon > 0$, al compacto Runge L y al conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_r\}$ el Lema 11.0.1 nos permite tomar $h \in \mathcal{O}(X)$ tal que[2]

$$h(x_i) = 0, \quad \|h - 1\|_{L^\infty(L)} < \min_{i=p+1,\ldots,q} \frac{\varepsilon}{2\|u_i\|_{L^\infty(L)}} \tag{11.5}$$

donde $0 < \|u_i\|_{L^\infty(L)} < \infty$ porque u_i es continua en el compacto L no idénticamente cero, $i = p+1, \ldots, q$. Por la convergencia uniforme por compactos, asociado a L, existe n

$$\|v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} < \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^\infty(L)}}, \quad \forall i \in \{p+1, \ldots, q\}.$$

Consideramos $\widehat{v}_i^{(n)} := h \cdot v_i^{(n)}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{v}_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} &= \|h \cdot v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} = \|h \cdot v_i^{(n)} - hu_i + hu_i - u_i\|_{L^\infty(L)} \\ &\leq \|h\|\|v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} + \|u_i\|_{L^\infty(L)}\|h - 1\|_{L^\infty(L)} \\ &< \|h\|_{L^\infty(L)} \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^\infty(L)}} + \|u_i\|_{L^\infty(L)} \frac{\varepsilon}{2\|u_i\|_{L^\infty(L)}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión $\{\widehat{v}_i^{(n)}\} \to u_i$ uniformemente en L, para todo $i = p+1, \ldots, q$, siendo todas las $\widehat{v}_i^{(n)}$ holomorfas en todo X y verificando

$$\widehat{v}_i^{(n)}(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Cada $\widehat{v}_i^{(n)}$ está definida en todo X y por ello podemos considerar para cada $i = p+1, \ldots, q$ y cada n natural, la sucesión definida como sigue:

$$w_i^{(n)} : K \longrightarrow \mathbb{C}, \quad w_i^{(n)}(x) := \begin{cases} \widehat{v}_i^{(n)}(x), & \text{si} \quad x \in \overline{D}, \\ 0, & \text{si} \quad x \in K \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Cada $w_i^{(n)}$ es continua. En efecto, en cada rama de definición es continua y en la intersección tenemos que

$$\overline{D} \cap (K \setminus \overline{D}) = \partial D \cap (\gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q) = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

y $\widehat{v}_i^{(n)}(x_i) = h(x_i)v_i^{(n)}(x_i) = 0$, por (11.5). De este modo, para $i = p+1, \ldots, q$ las funciones $w_i^{(n)}$ está definidas continuamente en $K = \overline{D} \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_p$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además son holomorfas

[2]Tomamos h de esta manera, con la condición del mínimo para que no dependa del índice i.

en el interior de K, puesto que coinciden con las $v_i^{(n)}$, para cada $i = p+1, \ldots, q$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo, por el Teorema de Mergelyan-Bishop, para cada $i = p+1, \ldots, q$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de funciones holomorfas en todo X que converge uniformemente en L hacia las $w_i^{(n)}$ y por tanto a las u_i. Para no complicar la notación, a tal sucesión la seguiremos denotando como $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente en K hacia u_i, para cada $i = p+1, \ldots, q$. En particular, $\left\{w_i^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia u_i en $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_q \subset K$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\psi_i^{(n)}(s) := \int_{\gamma_i} \omega \exp\left(s_1 w_1^{(n)} + \cdots + s_q w_q^{(n)}\right), \quad s \in \mathbb{C}^q.$$

La aplicación $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ cumple que $\varphi(a) = 0$ y que $\det(\operatorname{Jac}\varphi)_a \neq 0$, por tanto, φ es una inmersión regular local de a, es decir, existe U abierto de $\mathbb{C}^q$ tal que $a \in U$ y verificando

$$\varphi|_U : U \longrightarrow \varphi(U), \quad \text{difeomorfismo.}$$

En particular, $\varphi(U)$ es un entorno de $\varphi(a) = 0$ en $\mathbb{C}^q$. Dado que $\{\psi_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos de $\mathbb{C}^q$ hacia la función φ_i, tenemos que $\{\psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(\psi_1^{(n)}, \ldots, \psi_q^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente por compactos hacia la función φ. Por la convergencia uniforme por compactos, tómese $V = B(a,\delta)$ entorno de a con $\overline{V} \subset U$. Entonces por la convergencia uniforme sobre V se tiene que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ y $s \in V$ se cumple

$$|\psi^{(n)}(s) - \varphi(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} d(\psi^{(n)}(V), \varphi(V)) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} d(\psi^{(n)}(V), \varphi(V)) &= \inf_{r,s\in V} |\psi^{(n)}(r) - \varphi(s)| \leq \inf_{r\in V} |\psi^{(n)}(r) - \varphi(r)| + \inf_{s\in V} |\psi^{(n)}(s) - \varphi(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\psi^{(n_0)}(V)$ es un entorno abierto de $\varphi(a) = 0$ para n_0 suficientemente grande, luego, al ser $\psi^{(n_0)}\big|_V$ difeomorfismo, existe $s^0 \in V$ tal que $\psi^{(n_0)}(s^0) = 0$. En particular, tenemos que $|s^0 - a| < \delta$ y $\psi^{(n_0)}(s^0) = 0$. Como $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ uniformemente en $\overline{D}$, asociado a $\dfrac{\varepsilon}{q|s_i^0|}$, existen $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}$

$$\|w_i^{(m)}\|_{L^\infty(D)} < \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|}, \quad \forall m \geq n_i.$$

Consideramos

$$f := s_1^0 w_1^{(n)} + \cdots + s_q^0 w_q^{(n)}, \quad n := \max\{n_0, n_1, \ldots, n_q\}.$$

Esta función f es holomorfa y cumple que $\int_{\gamma_i} \omega e^f = \psi^{(n)}(a) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, q$, por ser $n \geq n_0$. Veamos que para el $\varepsilon > 0$ tomado al inicio de la prueba, se satisface

$$\|f\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon.$$

Como $n \geq n_1, \ldots, n_q$
$$\|w_i^{(n)}\|_{L^\infty(D)} < \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|}.$$
Entonces
$$\|f\|_{L^\infty(D)} \leq \sum_{i=1}^{q} |s_i^0| \|w_i^{(n)}\|_{L^\infty(D)} < \sum_{i=1}^{q} |s_i^0| \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|} = \varepsilon.$$
□

Estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Gunning y Narasinham. Demostramos uno de los enunciados equivalentes.

Teorema de Gunning-Narasinham. *En toda superficie de Riemann abierta X, existe una 1-forma holomorfa exacta y sin ceros. En otras palabras, la clase del cero en $H^1_{Rh}(X)$ admite un representante holomorfo y sin ceros.*

Demostración. Dado que X es abierta el Corolario 8.0.1 nos dice que existe $\omega_0 \in \Omega^1(X)$ sin ceros. Consideremos una recubrimiento expansivo de dominios relativamente compactos Runge $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el Teorema 5.2.2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer D_1 conforme al disco[3]. Como ω_0 es una 1-forma holomorfa, en particular es cerrada. Dado que D_1 es simplemente conexo, ω_0 admite primitiva en D_1 (Teorema 2.3.1), es decir, existe $F_0 \in \mathcal{O}(D_1)$ tal que
$$\omega_0|_{D_1} = dF_0.$$
Así, dado un ciclo γ en D_1, por el Teorema 2.2.1 tenemos que (por ser γ cerrada):
$$\int_\gamma \omega_0 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(\gamma(0)) - F(\gamma(0)) = 0.$$
Entonces $\int_\gamma \omega = 0$, para todo ciclo γ en D_1.

A continuación aplicamos un proceso inductivo.

1. Caso base $n = 1$. Consideramos el par escisivo de abiertos relativamente compactos Runge (D_2, D_1). Estamos en las condiciones del Lema 11.0.4. Asociado a $\varepsilon = 1/2$ existe una función holomorfa $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\|f_1\|_{L^\infty(D_1)} < 1/2$ y tal que $\omega_1 := \omega_0 e^{f_1} \in \Omega^1(X)$ sin ceros en X y exacta en D_2. Equivalentemente, al ser ω_1 cerrada (por ser holomorfa)
$$\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \omega_0 e^{f_1} = 0, \tag{11.6}$$
para todo ciclo γ en D_2. Para aclarar la construcción hacemos también el paso $n = 2$.

2. Caso $n = 2$. Consideramos el par (D_3, D_2) y $\omega_1 = \omega_0 e^{f_1} \in \Omega^1(X)$ sin ceros en X y exacta en D_2, que está en las condiciones del Lema 11.0.4. Asociado a $\varepsilon = 1/2^2$ existe una función holomorfa $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\|f_2\|_{L^\infty(D_2)} < 1/2^2$ y tal que $\omega_2 := \omega_1 e^{f_2} = \omega_0 e^{f_1+f_2} \in \Omega^1(X)$ sin ceros en X y exacta en D_3. Equivalentemente, al ser ω_2 cerrada (por ser holomorfa)
$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \omega_1 e^{f_2} = \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+f_2} = 0,$$
para todo ciclo γ en D_3.

[3] Bastaría tomar $p \in D_1$ y considerar una carta (D_0, φ) confome a $\mathbb{D}$.

3. Hipótesis de inducción. Supongamos que tenemos construida

$$\omega_k = \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_k} \in \Omega^1(X),$$

sin ceros en X y exacta en D_{k+1}, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Equivalentemente

$$\int_{\gamma_k} \omega_k = \int_{\gamma_k} \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_k} = 0$$

para todo ciclo γ_k en D_{k+1}, $k = 1, \ldots, n-1$. Consideramos el par (D_{n+1}, D_n) y la 1-forma holomorfa ω_{n-1}, que están en las condiciones del Lema 11.0.4. Asociado a $\varepsilon = 1/2^{n+1}$ existe una función holomorfa $f_{n+1} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\|f_{n+1}\|_{L^\infty(D_n)} < 1/2^n$ y tal que $\omega_n := \omega_{n-1} e^{f_{n+1}} \in \Omega^1(X)$, sin ceros en X y exacta en D_{n+1}. Equivalentemente, al ser ω_n cerrada (por ser holomorfa)

$$\int_\gamma \omega_{n-1} e^{f_{n+1}} = \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n} = 0,$$

para todo ciclo γ en D_{n+1}

Consideramos la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$. Veamos que converge uniformemente por compactos. En efecto, basta usar el Criterio de la Mayorante de Weierstrass. Sea K un compacto de X. Como la sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento expansivo y K es compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D_{n_0}$. De este modo

$$\|f_n\|_{L^\infty(K)} \leq \|f_n\|_{L^\infty(D_{n_0})} \leq \|f_n\|_{L^\infty(D_n)} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Dado que la serie numérica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en X y uniformemente por compactos de X. En particular, podemos definir su función suma

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Dado que la serie converge uniformemente por compactos y cada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$, la suma de la serie, f, es una función holomorfa en X. Definimos

$$\omega := \omega_0 e^f \in \Omega^1(X).$$

Como ω_0 y e^f no tienen ceros, ω no tiene ceros en todo X. Veamos que ω es exacta en todo X. Sea γ un ciclo en X. La función $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ es una curva continua. En particular,

$$t \in [0,1] \longmapsto (\omega_0)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) e^{f_1(\gamma(t)+\cdots+f_n(\gamma(t))}$$

es continua y por tanto acotada (en módulo) en $[0,1]$, que es de medida finita, por lo que las constantes son integrables y el integrando está acotado (en módulo) por una función integrable. Podemos permutar límite e integral por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_0 e^f = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n} = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n}.$$

Dado que la sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento expansivo de X y γ es compacto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \subset D_n$, $\forall n \geq n_1$. De esta forma, γ es un ciclo en D_n, para todo $n \geq n_1$. Por construcción

$$\int_\gamma \omega_n = \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n} = 0, \quad \forall n \geq n_1.$$

En consecuencia,

$$\int_\gamma \omega = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Finalmente, Corolario 2.5.4 nos dice que ω es exacta.

Como ya sabíamos, ω tampoco tenía ceros, por tanto ω resuelve el teorema. □

Observación 11.0.1. Fijado $x_0 \in X$, la Observación 2.3.1 nos dice que $\omega = dF$ con $F(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$ es la primitiva, pues la integración no depende del camino elegido. Más aún, según la demostración de la Proposición 11.0.1

$$F : X \longrightarrow \mathbb{C},$$

es una inmersión de X en el plano complejo.

Capítulo 12

Teorema de Kusunoki-Sainouchi

El resultado principal de este capítulo es debido a Yukio Kusunoki y Yoshikazu Sainouchi [13] y nos dice que podemos preescribir el divisor y los periodos por una 1-forma meromorfa cuando la superficie es abierta. este resultado generaliza el Teorema de Behnke-Stein ([7, Teorema 28.6]), que nos permitía prescribir los periodos por 1-formas holomorfas, y sobretodo al de Gunning-Narasinham, visto en el capítulo anterior.

El Teorema 8.0.1 tiene un análogo en para formas diferenciales. Recordemos que en una superficie de Riemann X una *diferencial abeliana* ω es una diferencial meromorfa definida sobre todo X.

Proposición 12.0.1. *En una superficie de Riemann abierta X, todo divisor admite una diferencial abeliana como divisor, esto es, dado $d \in \mathrm{Div}(X)$ existe $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ tal que $(\omega) = d$.*

Demostración. Como X es abierta, por el Corolario 8.0.1 existe una 1-forma holomorfa sin ceros ω_0 definida en todo X. Esto implica $(\omega_0) = 0$. El Teorema 8.0.1 nos dice que existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $(f) = d$. Consideramos $\omega = f\omega_0$. Entonces,

$$(\omega) = (f) + (\omega_0) = d + 0 = d.$$

□

Con estos preparativos podemos enunciar y demostrar el Teorema de Kusunoki-Sainouchi.

Teorema de Kusunoki-Sainouchi. *Sea X una superficie de Riemann abierta, $d \in \mathrm{Div}(X)$ y $\phi : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un morfismo de grupos. Existe una abeliana ω en X, asociada al divisor d y al morfismo ϕ tal que*

1. *La diferencial abeliana ω es solución del divisor d.*
2. *Para todo ciclo $\sigma \in X$ se tiene*

   $$\int_\sigma \omega = \phi([\sigma]),$$

   para todo ciclo σ en X.

Para demostrarlo, vamos a probar un lema más general que Lema 11.0.4, aunque su demostración es análoga.

Lema 12.0.1. *Sea X una superficie de Riemann abierta y (D', D) un par escisivo por abiertos relativamente compactos Runge. Sea ω una diferencial abeliana. Dado $\varepsilon > 0$ y un morfismo de grupos $\phi : H_1(D', \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$, existe una función $f \in \mathcal{O}(X)$ con $\|f\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon$ y tal que*

$$\int_\gamma \omega e^f = \begin{cases} \int_\gamma \omega, & si \quad \gamma \in H_1(D, \mathbb{Z}) \\ \\ \phi(\gamma), & si \quad \gamma \in H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a realizar una prueba similar a la dada en Lema 11.0.4. La clave es darse cuenta de que el Lema 11.0.3 nos permite prescribir la integral con el valor que queramos. Abusando de notación, denotaremos por γ_i indistintamente a un representante de γ_i en homología. Definimos

$$\zeta_i := \phi(\gamma_i) \in \mathbb{C}, \quad \forall i \in \{p+1, \ldots, q\}.$$

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \subset D$ y además sus intersecciones con $\overline{D}$ es su respectivo punto base.

2. $\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_q \subset D' \setminus D$.

3. Tenemos que $K = \overline{D} \cup \gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q$ y $L = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_p$ son compactos Runge (Lema 11.0.2).

4. El Lema 11.0.3 nos permite encontrar u_i con soporte contenido en γ_i y tales que

   a) $\mathrm{sop}(u_i) \cap \mathrm{sop}(u_j) = \varnothing$ para $i \neq j$.

   b) Cada $u_i : \gamma_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, q$ se puede extender continuamente a todo $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_q$, puesto que las curvas γ_i, γ_j se intersecan en a lo sumo un punto (punto base) en donde ambas funciones valen cero, porque el soporte de u_i está contenido en $\gamma_i(0,1)$. Por tanto, en la intersección de los cerrados γ_i, γ_j tenemos u_i y u_j coinciden. Podemos extender continuamente u_i como cero a la unión de las trazas de todas las curvas.

   c) Las curvas γ_i con $i = p+1, \ldots, q$ cuyas trazas están en $D' \setminus D$, tenemos que $\gamma_i \cap \overline{D}$ se intersecan en a lo sumo el punto base. En dicho punto, la función u_i vale cero, puesto que su soporte está contenido en $\gamma_i(0,1)$ con $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X$. De este modo, en la intersección de γ_i y $\overline{D}$ podemos definirla continuamente como cero. Así pues, para $i = p+1, \ldots, q$ tenemos que las funciones u_i están definidas en $\overline{D} \cup \gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q$, que es precisamente el compacto K; por tanto $u_i : K \longrightarrow \mathbb{C}$.

   d) Para $i = 1, \ldots, p$ se verifica

   $$\int_{\gamma_i} u_i \omega \neq 0.$$

   e) Para cada $i = p+1, \ldots, q$ se cumple que

   $$\int_{\gamma_i} \omega e^{u_i} = \zeta_i, \quad \int_{\gamma_i} u_i \omega e^{u_i} \neq 0. \tag{12.1}$$

Para cada $i = 1, \ldots, p, p+1, \ldots, q$ definimos la aplicación

$$\varphi_i : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_i(s) := \int_{\gamma_i} \omega \exp\left(\sum_{j=1}^{q} s_j u_j\right).$$

Para cada $i = 1, \ldots, q$, la función φ_i es entera. Así,

$$\varphi : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^q, \quad \varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_q),$$

es entera. Fijamos $a := (0_{\mathbb{C}^p}, 1_{\mathbb{C}^{q-p}})$.

- Fijamos $i \in \{1, \ldots, p\}$. Entonces

$$\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega \exp\left(\sum_{j=p+1}^{q} s_j u_j\right).$$

  Ahora bien, para cada $j \neq i$, tenemos que $u_j|_{\gamma_i} = 0$, luego

$$\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega.$$

- Fijamos $i \in \{p+1, \ldots, q\}$. Entonces, con el mismo razonamiento sobre los soportes de las funciones u_j,

$$\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega e^{u_i}.$$

  En esta ocasión, la traza de γ_i está contenida en $D' \setminus D$ y se cumple (12.1)

$$\varphi_i(a) = \int_{\gamma_i} \omega e^{u_i} = \zeta_i.$$

Hemos llegado a

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega, & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \\ \zeta_i, & \text{si} \quad p+1 \leq i \leq q. \end{cases}$$

Vamos a hallar $\mathrm{Jac}(\varphi)_a$, dada como

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_s}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial z_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial z_s}(a) \end{pmatrix}$$

Para completar la matriz, hallamos las derivadas respecto de las correspondientes variables,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}(a) = \begin{cases} \int_{\gamma_i} u_i \omega, & 1 \leq i \leq p \\ \int_{\gamma_i} u_i \omega e^{u_i}, & p+1 \leq i \leq q. \end{cases}$$

que en ambos casos es un número no nulo. El resto de parciales $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) = \int_{\gamma_i} u_j \omega e^{u_i} = 0$ para $i \neq j$, puesto que u_j vale cero en γ_i. Con esta notación,

$$\varphi(a) = \left(\int_{\gamma_1} \omega, \ldots, \int_{\gamma_p} \omega, \zeta_{p+1}, \ldots, \zeta_q\right)$$

y φ tiene matriz jacobiana regular en el punto a, por ser una matriz diagonal conformada por números no nulos. Esto nos va a servir para aplicar el Teorema de la Función Inversa.

Consideramos $K := \overline{D} \cup \gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q$. Por lo dicho anteriormente, este conjunto es el asociado al par (D', D) y es por este motivo que es compacto Runge, por el Lema 11.0.2. Las funciones u_i tiene su soporte contenido en γ_i, $p+1 \leq i \leq q$. Tenemos las funciones continuas $u_i : K \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = p+1, \ldots, q$, que cumple

$$u_i|_{K^\circ} = u_i|_D = 0.$$

De esta forma, u_i es continua en K y holomorfa en K° (porque es constante cero). Por el Teorema de Mergelyan-Bishop, para cada $i = p+1, \ldots, q$, existe $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ que converge uniformemente en K hacia la función u_i. En particular $\overline{D}$ es un compacto de K, y $u_i|_{\overline{D}} = 0$, es decir, $\{w_i^{(n)}\}$ converge uniformemente hacia la función nula en $\overline{D}$.

Consideramos $L := \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_p$, que viene asociado al par $(D', \varnothing)$ en el Lema 11.0.2, por tanto, L es un compacto Runge. Para cada $i = 1, \ldots, p$, la función u_i es continua (la habíamos extendido por cero) en L. Observamos que $L^\circ = \varnothing$, por tanto, u_i es automáticamente holomorfa L°. Así pues, u_i es continua en L, holomorfa en L° y L es compacto Runge. Por el Teorema de Mergelyan-Bishop, para cada $i = 1, \ldots, p$ existe una sucesión $\{v_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ que converge uniformemente en L hacia la función u_i.

Tenemos que

$$\partial D \cap (\gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q) = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset X \setminus L.$$

Por el Lema 11.0.1, existe $h \in \mathcal{O}(X)$ asociada a $\dfrac{\varphi}{2\|u_i\|_{L^\infty(L)}}$ tal que

$$h(x_i) = 0, \quad \|h(x) - 1\|_{L^\infty(L)} < \min_{i=p+1,\ldots,q} \frac{\varepsilon}{2\|u_i\|_{L^\infty(L)}},$$

donde $0 < \|u_i\|_{L^\infty(L)} < \infty$ porque u_i es continua en el compacto L no idénticamente nula, $i = p+1, \ldots, q$. Por la convergencia uniforme por compactos, para cada $i = p+1, \ldots, q$, existe n_i tal que

$$\|v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} < \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^\infty(L)}}, \quad \forall n \geq n_i,$$

donde $0 < \|h\|_{L^\infty(L)} < \infty$ porque es continua en el compacto L no idénticamente nula[1]. Tomamos $n_0 := \max\{n_{p+1}, \ldots, n_q\}$. Entonces

$$\|v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} < \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^\infty(L)}}, \forall n \geq n_0$$

Consideramos $\widehat{v}_i^{(n)} := h \cdot v_i^{(n)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\widehat{v}_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} &= \|h \cdot v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} = \|h \cdot v_i^{(n)} - hu_i + hu_i - u_i\|_{L^\infty(L)} \\
&\leq \|h\| \|v_i^{(n)} - u_i\|_{L^\infty(L)} + \|u_i\|_{L^\infty(L)} \|h - 1\|_{L^\infty(L)} \\
&< \|h\|_{L^\infty(L)} \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{L^\infty(L)}} + \|u_i\|_{L^\infty(L)} \frac{\varepsilon}{2\|u_i\|_{L^\infty(L)}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

[1] Tomamos h de esta manera, con la condición del mínimo, para que no dependa del índice i.

Por tanto, la sucesión $\{\widehat{v}_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \to u_i$ uniformemente en L, para todo $i = p+1, \ldots, q$, $\{\widehat{v}_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(X)$ y verificando

$$\widehat{v}_i^{(n)}(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Cada $\widehat{v}_i^{(n)}$ está definida en todo X y por ello podemos considerar para cada $i = p+1, \ldots, q$ y cada n natural, la sucesión definida como sigue:

$$w_i^{(n)} : K \longrightarrow \mathbb{C}, \quad w_i^{(n)}(x) := \begin{cases} \widehat{v}_i^{(n)}(x), & \text{si} \quad x \in \overline{D}, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \in K \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Cada $w_i^{(n)}$ es continua. En efecto, en cada rama de definición es continua y en la intersección tenemos que

$$\overline{D} \cap (K \setminus \overline{D}) = \partial D \cap (\gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q) = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

y $\widehat{v}_i^{(n)}(x_i) = h(x_i) v_i^{(n)}(x_i) = 0$. De este modo, para $i = p+1, \ldots, q$ las funciones $w_i^{(n)}$ está definidas continuamente en $K = \overline{D} \cup \gamma_{p+1} \cup \cdots \cup \gamma_q$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además son holomorfas en el interior de K, puesto que coinciden con las $v_i^{(n)}$, para cada $i = p+1, \ldots, q$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo, por el Teorema de Mergelyan-Bishop, para cada $i = p+1, \ldots, q$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de funciones holomorfas en todo X que converge uniformemente en L hacia las $w_i^{(n)}$ y por tanto a las u_i. Para no complicar la notación, a tal sucesión la seguiremos denotando como $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente en K hacia u_i, para cada $i = p+1, \ldots, q$. En particular, $\left\{w_i^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia u_i en $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_q \subset K$.

Para cada n natural definimos

$$\psi_i^{(n)}(s) := \int_{\gamma_i} \omega \exp\left(s_1 w_1^{(n)} + \cdots + s_q w_q^{(n)}\right), \quad s \in \mathbb{C}^q.$$

La aplicación $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ cumple $\det(\operatorname{Jac}\varphi)_a \neq 0$, por tanto, φ es una inmersión regular local de a, es decir, existe U abierto de $\mathbb{C}^q$ tal que $a \in U$ y verificando

$$\varphi|_U : U \longrightarrow \varphi(U), \qquad \text{difeomorfismo.}$$

En particular, $\varphi(U)$ es un entorno de $\varphi(a)$ en $\mathbb{C}^q$. Dado que $\psi_i^{(n)}$ convergen uniformemente por compactos de $\mathbb{C}^q$ hacia la función φ_i tenemos que $\psi^{(n)} = (\psi_1^{(n)}, \ldots, \psi_q^{(n)})$ converge uniformemente por compactos hacia la función φ. Por la convergencia uniforme por compactos, tómese $V = B(a, \delta)$ entorno de a con $\overline{V} \subset U$. Entonces por la convergencia uniforme sobre V, se tiene que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ y $s \in V$ se cumple

$$|\psi^{(n)}(s) - \varphi(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} d(\psi^{(n)}(V), \varphi(V)) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} d(\psi^{(n)}(V), \varphi(V)) &= \inf_{r,s\in V} |\psi^{(n)}(r) - \varphi(s)| \\ &\leq \inf_{r\in V} |\psi^{(n)}(r) - \varphi(r)| + \inf_{s\in V} |\psi^{(n)}(s) - \varphi(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\psi^{(n_0)}(V)$ es un entorno abierto de $\varphi(a)$ para n_0 suficientemente grande, luego, al ser $\psi^{(n_0)}\big|_V$ difeomorfismo, existe $s^0 \in V$ tal que $\psi^{(n_0)}(s^0) = \varphi(a)$. En particular, tenemos que $|s^0 - a| < \delta$ y $\psi^{(n_0)}(s^0) = \varphi(a)$. Como $\{w_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ uniformemente en $\overline{D}$, asociado a $\dfrac{\varepsilon}{q|s_i^0|}$, existen $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}$

$$\|w_i^{(m)}\|_{L^\infty(D)} < \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|}, \quad \forall m \geq n_i.$$

Consideramos

$$f := s_1^0 w_1^{(n)} + \cdots + s_q^0 w_q^{(n)}, \quad n := \text{máx}\{n_0, n_1, \ldots, n_q\}.$$

Esta función f es holomorfa y cumple que $\int_{\gamma_i} \omega e^f = \psi_i^{(n_0)}(s_0) = \varphi_i(a)$, para todo $i = 1, \ldots, q$, por ser $n \geq n_0$. Veamos que para el $\varepsilon > 0$ tomado al inicio de la prueba, se satisface

$$\|f\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon.$$

Como $n \geq n_1, \ldots, n_q$

$$\|w_i^{(n)}\|_{L^\infty(D)} < \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|}.$$

Entonces

$$\|f\|_{L^\infty(D)} \leq \sum_{i=1}^{q} |s_i^0| \|w_i^{(n)}\|_{L^\infty(D)} < \sum_{i=1}^{q} |s_i^0| \frac{\varepsilon}{q|s_i^0|} = \varepsilon.$$

$$\int_{\gamma_i} \omega e^f = \begin{cases} \int_{\gamma_i} \omega, & \text{si} \quad i = 1, \ldots, p \\ \\ \zeta_i = \phi(\gamma_i), & \text{si} \quad i = p+1, \ldots, q. \end{cases}$$

Al ser $D' \setminus D$ y D disjuntos que recubren a D' tenemos que

$$H_1(D', \mathbb{Z}) = H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z}) \oplus H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Así pues, como $\{\gamma_i\}_{i=1}^q$ son bases de ambos grupos, dado $\gamma \in H^1(D', \mathbb{Z})$ existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \gamma_i.$$

Dado que la integral tiene un comportamiento $\mathbb{Z}$-lineal con respecto al grupo de homología

$$\int_\gamma \omega e^f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \int_{\gamma_i} \omega e^f.$$

Si $\gamma \in H_1(D, \mathbb{Z})$ entonces $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_q = 0$. Entonces $\gamma = \sum_{i=1}^p \lambda_i \gamma_i$ y en consecuencia

$$\int_\gamma \omega e^f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \int_{\gamma_i} \omega = \int_\gamma \omega.$$

Si $\gamma \in H_1(D' \setminus D, \mathbb{Z})$ entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Entonces, $\gamma = \sum_{i=p+1}^q \lambda_i \gamma_i$ y al ser ϕ un morfismo de grupos abelianos, podemos verlo como una aplicación $\mathbb{Z}$-lineal entre $\mathbb{Z}$-módulos

$$\int_\gamma \omega e^f = \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i \phi(\gamma_i) = \phi\left(\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i \gamma_i\right) = \phi(\gamma).$$

$\square$

Ya estamos en las condiciones de demostrar el resultado principal.

Teorema de Kusunoki-Sainouchi. *Sea X una superficie de Riemann abierta, $d \in \mathrm{Div}(X)$ y $\phi : H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un morfismo de grupos. Existe una diferencial abeliana ω, asociada al divisor d y al homomorfismo ϕ, tal que*

1. *La diferencial abeliana ω es solución del divisor d.*
2. *Se tiene que*
$$\int_\sigma \omega = \phi([\sigma]),$$
para todo ciclo σ en X.

Demostración. Sea $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una exhaución por dominios relativamente compactos Runge como en el Teorema 5.2.2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que D_1 es conforme a un disco, el cual siempre es Runge. Sea $\omega_0 \in \mathcal{M}^1(X)$ tal que $(\omega_0) = d$ cuya existencia está garantizada por la Proposición 12.0.1. Para construir ω realizamos un proceso inductivo.

- Caso base $n = 1$. Consideramos el par escisivo (D_2, D_1) y $\varepsilon = 1/2$. Por el Lema 12.0.1 existe $f_1 \in \mathcal{O}(X)$ con $\|f_1\|_{L^\infty(D_1)} < 1/2$ y tal que
$$\int_\gamma \omega_0 e^{f_1} = \begin{cases} \int_\gamma \omega_0, & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_1,\mathbb{Z}) \\ \phi(\gamma), & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_2 \setminus D_1,\mathbb{Z}) \end{cases}$$
Definimos la diferencial abeliana $\omega_1 := \omega_0 = \omega_0 e^{f_1}$.
- Caso $n = 2$. Aplicando el Lema 12.0.1 al par escisivo (D_3, D_2), $\varepsilon = 1/2^2$, $\omega_1 \in \mathcal{M}^1(X)$, encontramos $f_2 \in \mathcal{O}(X)$ con $\|f_2\|_{L^\infty(D_2)} < 1/2^2$ y tal que
$$\int_\gamma \omega_1 e^{f_2} = \begin{cases} \int_\gamma \omega_1, & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_2,\mathbb{Z}) \\ \phi(\gamma), & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_3 \setminus D_2,\mathbb{Z}). \end{cases}$$
Definimos la diferencial abeliana $\omega_2 := \omega_1 e^{f_2} = \omega_0 e^{f_1+f_2}$.
- Hipótesis de inducción. Supongamos $f_1,\ldots,f_{n-1}$ construidas, esto es,
    - Para cada $k = 1,\ldots,n-1$
    $$f_k \in \mathcal{O}(X), \quad \|f_k\|_{L^\infty(D_k)} < \frac{1}{2^k}$$
    y las diferenciales abelianas
    $$\omega_k = \omega_{k-1} e^{f_k} = \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_k}.$$
    - Para cada $k = 1,\ldots,n-1$
    $$\int_\gamma \omega_k = \int_\gamma \omega_0 e^{f_1+\cdots f_k} = \begin{cases} \int_\gamma \omega_{k-1}, & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_k,\mathbb{Z}) \\ \phi(\gamma), & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_{k+1} \setminus D_{k-1},\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Aplicando el Lema 12.0.1 al par escisivo (D_{n+1}, D_n), $\varepsilon = 1/2^n$, $\omega_{n-1} \in \mathcal{M}^1(X)$, encontramos una función $f_n \in \mathcal{O}(X)$ con $\|f_n\|_{L^\infty(D_n)} < 1/2^n$ y tal que

$$\int_\gamma \omega_{n-1} e^{f_n} = \begin{cases} \int_\gamma \omega_{n-1}, & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_n, \mathbb{Z}) \\ \\ \phi(\gamma), & \text{si} \quad \gamma \in H_1(D_{n+1} \setminus D_n, \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Definimos $\omega_n := \omega_{n-1} e^{f_n} = \omega_0 e^{f_1 + \cdots + f_n}$.

Consideramos $f := \sum_{n\geq 1} f_n$. La función f está bien definida y es holomorfa en toda la superficie X. En efecto, veamos que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ presenta convergencia uniforme por compactos de X. Sea $K \subset X$ compacto. Como $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recubre a X y es expansiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D_{n_0}$. Así, para todo $n \geq n_0$, $D_{n_0} \subset D_n$ y por tanto se cumple que

$$\|f_n\|_{L^\infty(D_{n_0})} \leq \|f_n\|_{L^\infty(D_n)} < \frac{1}{2^n}.$$

El Criterio de la Mayorante de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en D_{n_0} y por tanto en K. Hemos probado que f está bien definida y la serie que la define presenta convergencia uniforme por compactos. Como cada f_n, $n \in \mathbb{N}$, es holomorfa en X, la función suma de la serie, es decir $f = \sum_{n\geq 1} f_n$, es holomorfa en X.

Definimos $\omega := \omega_0 e^f$ que es una diferencial abeliana. Veamos que ω prescribe al divisor d. En efecto, como e^f no tiene ceros ni polos, su divisor es trivial, luego por la elección de ω_0

$$(\omega) = (\omega_0 e^f) = (\omega_0) + (e^f) = (\omega_0) = d.$$

Veamos que ω tiene los periodos prescritos por ϕ. Sea σ un ciclo en X. Por la compacidad de la traza de σ y ser $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento expansivo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que la traza de σ está completamente contenida en D_{n_1}. Así pues, σ es un ciclo en D_{n_1} y podemos considerar $[\sigma] \in H^1(D_{n_1}, \mathbb{Z})$. Como $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es expansivo, D_{n_1} es la unión disjunta de

$$D_{k+1} \setminus D_k, \quad k = 1, \ldots, n_1 - 1$$

entonces

$$H_1(D_{n_1}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{n_1-1} H_1(D_{k+1} \setminus D_k, \mathbb{Z}).$$

Por lo tanto

$$[\sigma] = \sum_{k=1}^{n_1-1} [\sigma_k], \quad [\sigma_k] \in H_1(D_{k+1} \setminus D_k, \mathbb{Z}).$$

Dado que la integración es invariante por el tipo de homología, integramos los representantes

$$\int_\sigma \omega = \sum_{k=1}^{n_1-1} \int_{\sigma_k} \omega.$$

Como la traza de los ciclos son compactos, la convergencia uniforme sobre compactos nos permite permutar límite e integral

$$\int_\sigma \omega = \sum_{k=1}^{n_1-1} \int_{\sigma_k} \omega = \sum_{k=1}^{n_1-1} \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_k} \omega_0 e^{f_1+\cdots+f_n}. \tag{12.2}$$

Ahora bien, σ_k es un ciclo en $D_{k+1} \setminus D_k$, $1 \leq k \leq n_1 - 1$. Por definición para $n \geq k$ tenemos que

$$\int_{\sigma_k} \omega_0 e^{f_1 + \cdots + f_n} \overset{\text{def.}}{=} \int_{\sigma_k} \omega_k = \phi([\sigma_k]).$$

Intuitivamente, si el ciclo tiene su traza contenida en el nivel anterior, la integral de ω_n vale la integral de ω_{n-1} y así sucesivamente, hasta que llegamos a la ω_k. En consecuencia, la sucesión estaciona, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_k} \omega_0 e^{f_1 + \cdots + f_n} = \int_{\sigma_k} \omega_0 e^{f_1 + \cdots + f_k} = \phi([\sigma_k]).$$

Llevando esto a (12.2) obtenemos

$$\int_{\sigma} \omega = \sum_{k=1}^{n_1 - 1} \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_k} \omega_0 e^{f_1 + \cdots + f_n} = \sum_{k=1}^{n_1 - 1} \phi([\sigma_k]) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n_1 - 1} [\sigma_k] \right) = \phi([\sigma]).$$

□

Un corolario es el Teorema de Gunning-Narasimhan, prescribiendo el periodo y divisor nulo.

Índice de figuras

Bibliografía

[1] Nieves Álamo Antunez. *Apuntes de la asignatura Geometría Diferencial*. Universidad de Málaga, 2008.

[2] Nieves Álamo Antunez. *Apuntes de la asignatura TopologÃa Algebraica*. Universidad de Málaga, 2019.

[3] Antonio Alarcón and Francisco J. López. Proper holomorphic embeddings of Riemann surfaces with arbitrary topology into $\mathbb{C}^2$. *J. Geom. Anal.*, 23(4):1794–1805, 2013.

[4] Errett Bishop. Subalgebras of functions on a Riemann surface. *Pacific J. Math.*, 8:29–50, 1958.

[5] Carlos Ivorra Castillo. *TopologÃa Algebraica*. 2018.

[6] Ildefonso Castro-Infantes. A geometric application of Runge's Theorem. *Reports@ SCM*, 2(1):21–32.

[7] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.

[8] Jean Gallier and Dianna Xu. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*, volume 9 of *Geometry and Computing*. Springer, Heidelberg, 2013.

[9] R. C. Gunning and Raghavan Narasimhan. Immersion of open Riemann surfaces. *Math. Ann.*, 174:103–108, 1967.

[10] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-theory*. Independent, 2003.

[11] Marek Jarnicki and Peter Pflug. *Extension of holomorphic functions*, volume 34 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[12] Juan Carlos Navarro Pascual. *Espacios localmente convexos. Teorema de Krein-Milman*. Master Interuniversitario 2019-2020. Universidad de AlmerÃa, 2020.

[13] Y. Kusunoki and Y. Sainouchi. Holomorphic differentials on open Riemann surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:181–194, 1971.

[14] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[15] Terrence Napier and Mohan Ramachandran. *An introduction to Riemann surfaces*. Cornerstones. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

[16] Raghavan Narasimhan and Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2001.

[17] Joaquín Pérez. *Notas sobre Geometría Riemanniana Global.* Universidad de Granada, 2000.

[18] Joaquín Pérez. *Geometría y Topología.* Universidad de Granada, 2007.

[19] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[20] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Dover books on mathematics. Dover Publications, 2006.