Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Junio de 2019

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 12 de junio de 2019

Opción A

Ejercicio 1 **Considera la función f definida por**

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \textbf{para} \quad x \neq -1.$$

(a) **[1'5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.**

(b) **[1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Como se trata de una función racional, lo más sencillo es hacer la división:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +3x & +4 & 2x+2 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & \frac{x}{2}+1 \\ \cline{1-2} & 2x & +4 & \\ & -2x & -2 & \\ \cline{2-3} & & +2 & \end{array}$$

Esto significa que la función f puede expresarse, para $x \neq -1$ como:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \left(\frac{x}{2}+1\right) + \frac{2}{2x+2} = \left(\frac{x}{2}+1\right) + \frac{1}{x+1}.$$

Observando esta expresión deducimos que f posee una asíntota oblicua a ambos lados, que es la recta $y = \dfrac{x}{2}+1$ (por lo que no posee asíntotas horizontales a ningún lado) y una asíntota vertical en $x = -1$, siendo:

* Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = +\infty.$$

$$\boxed{\text{La función } f \text{ posee AV en } x=-1 \text{ y AO en } y=\frac{x}{2}+1.}$$

Apartado (b). Para estudiar su monotonía, determinamos su función primera derivada para $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2) - \left(x^2+3x+4\right)\, 2}{(2(x+1))^2} = \frac{\left(4x^2+10x+6\right) - \left(2x^2+6x+8\right)}{4(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+4x-2}{4(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}.$$

Calculamos los puntos críticos de f estudiando dónde se anula su primera derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right\}.$$

Estudiamos el signo de la primera derivada de f empleando una tabla como la siguiente, donde incluimos los puntos críticos de f y los puntos aislados que no están en el dominio de f (en concreto, el punto $x=-1$):

f'	$+$	máx	$-$	AV	$-$	mín	$+$
f	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-1+\sqrt{2}$	$\nearrow$

$$f'(-100) > 0, \quad f'(-2) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f'(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f'(100) > 0.$$

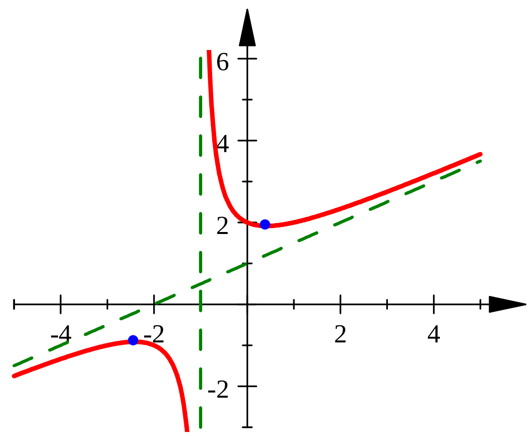
De esta forma, f es estrictamente creciente en $\left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right[\cup \left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ y estrictamente decreciente en $\left]-1-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]-1, -1+\sqrt{2}\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La función } f \text{ es estrictamente creciente en } \left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right[\cup \left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right[\\ \text{y estrictamente decreciente en } \left]-1-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]-1, -1+\sqrt{2}\right[.\end{array}}$$

■

Aunque no se nos pide, con la información anterior y las coordenadas de sus extremos relativos, podemos representar gráficamente la función f.

x	$f(x)$
$-1-\sqrt{2} \approx -2.414$	$\frac{1}{2}-\sqrt{2} \approx -0.914$
$-1+\sqrt{2} \approx 0.414$	$\frac{1}{2}+\sqrt{2} \approx 1.914$



Ejercicio 2 [2'5 puntos] Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=\mathrm{e}^x$).

Solución: Dado que $\mathrm{e}^x>1$ cuando $x>0$, deducimos que $1+\mathrm{e}^x>0$ y $1-\mathrm{e}^x<0$ para cada $x\in(0,+\infty)$, por lo que la función f toma únicamente valores estrictamente negativos en su dominio. Haciendo el cambio de variable propuesto, $t=\mathrm{e}^x$, deducimos que $x=\ln t$, por lo que $dx=\frac{dt}{t}$. De esta forma:

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}dx=\int\frac{1+t}{1-t}\,\frac{1}{t}dt=\int\frac{1+t}{t\,(1-t)}dt.$$

Descomponemos

$$\frac{1+t}{t\,(1-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}=\frac{A\,(1-t)+Bt}{t\,(1-t)}=\frac{A+(B-A)\,t}{t\,(1-t)}.$$

Por consiguiente, $A=1$ y $B-A=1$, de donde $A=1$ y $B=2$. Así:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx&=\int\frac{1+t}{t\,(1-t)}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{1-t}\right)dt=\ln|\,t\,|-2\ln|\,1-t\,|+C\\&=\ln|\,\mathrm{e}^x\,|-2\ln|\,1-\mathrm{e}^x\,|+C=\ln\mathrm{e}^x-2\ln(\mathrm{e}^x-1)+C\\&=x-2\ln(\mathrm{e}^x-1)+C.\end{aligned}$$

De esta manera, todas las primitivas de f son de la forma:

$$F(x)=x-2\ln(\mathrm{e}^x-1)+C.$$

Determinamos la constante C para que $F(1)=1$, obteniendo la ecuación:

$$1=F(1)=1-2\ln(\mathrm{e}-1)+C,$$

de donde $C = 2\ln(\mathrm{e}-1)$. Así, la primitiva solicitada es

$$\boxed{F(x) = x - 2\ln(\mathrm{e}^x - 1) + 2\ln(\mathrm{e}-1)\,.}$$

■

Ejercicio 3 [2'5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **tales que** $a + d = 1$**, tienen determinante** 1 **y cumplen** $AX = XA$**, siendo** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

Solución : La condición $\det X = 1$ es equivalente a la ecuación $ad - bc = 1$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} AX = XA \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = d, \\ b = -c. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + d = 1, \\ ad - bc = 1, \\ a = d, \\ b = -c. \end{array} \right.$$

Como $a = d$ y $a + d = 1$, deducimos que $a = d = \frac{1}{2}$. Por tanto, $ad = \frac{1}{4}$. Por otro lado, como $b = -c$, de la segunda ecuación deducimos que

$$1 = ad - bc = \frac{1}{4} - (-c)c = \frac{1}{4} + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad c \in \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Si $c = \sqrt{3}/2$, entonces $b = -\sqrt{3}/2$, y si $c = -\sqrt{3}/2$, entonces $b = \sqrt{3}/2$. Por consiguiente, hay dos posibilidades para la matriz X, que son las siguientes:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 4 Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ **y los planos** $\pi_1 \equiv x = 0$ **y** $\pi_2 \equiv y = 0$**.**

(a) **[1'25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.**

(b) **[1'25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.**

Solución: **Apartado (a).** Un punto de la recta r es $A_r = (2,2,1)$ y un posible vector director de r es $\vec{u}_r = (-1,3,1)$. así, cualquier punto de la recta r es de la forma $P_r = (2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando la fórmula

$$d\,(P,\pi) = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

para determinar la distancia entre un punto $P\,(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi \equiv ax+by+cz+d = 0$, podemos decir que la distancia del punto P_r al plano $\pi_1 \equiv x = 0$ es:

$$d\,(P_r, \pi_1) = \frac{|\,2-\lambda\,|}{\sqrt{1}} = |\,2-\lambda\,|\,,$$

y la distancia del punto P_r al plano $\pi_2 \equiv y = 0$ es:

$$d\,(P_r, \pi_2) = \frac{|\,2+3\lambda\,|}{\sqrt{1}} = |\,2+3\lambda\,|\,.$$

Para que estas cantidades coincidan:

$$d\,(P_r,\pi_1) = d\,(P_r,\pi_2) \quad \Leftrightarrow \quad |\,2-\lambda\,| = |\,2+3\lambda\,| \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2-\lambda = 2+3\lambda \\ \qquad \text{ó} \\ 2-\lambda = -\,(2+3\lambda) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad [\ \lambda = 0 \ \text{ ó } \ \lambda = -2\ ]\,.$$

Estos valores para λ llevan a los puntos

$$(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)|_{\lambda=0} = (2,2,1);$$
$$(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)|_{\lambda=-2} = (4,-4,-1).$$

$$\boxed{\text{Los puntos de } r \text{ que equidistan de } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ son } (2,2,1) \text{ y } (4,-4,-1).}$$

Apartado (b). La recta s intersección de los planos π_1 y π_2 posee ecuación $s \equiv x = y = 0$ por lo que, obviamente, se trata del eje OZ, cuyos puntos son de la forma $Q\,(0,0,\mu)$, siendo $\mu \in \mathbb{R}$, y cuyo vector director es $\vec{u}_s = (0,0,1)$. Los vectores directores $\vec{u}_r = (-1,3,1)$ y $\vec{u}_s = (0,0,1)$ no son ni paralelos (no poseen coordenadas proporcionales) ni perpendiculares (su producto escalar no es cero). Por consiguientes, las rectas r y s no son ni paralelas ni perpendiculares. Si las rectas r y s se cortasen en algún punto, existiría un punto genérico $P_r = (2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$ de la recta r que verificase, a la vez, las ecuaciones $2-\lambda = 0$ y $2+3\lambda = 0$. Sin embargo, no existe un valor de λ que cumpla, a la vez, estas dos igualdades, por lo que r y s no poseen ningún punto en común y, por ello, se cruzan en el espacio.

$$\boxed{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)\,\mathrm{e}^x$.

(a) [1'25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

(b) [1'25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución: **Apartado (a).** La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser producto de una función polinómica y una función exponencial. Su función primera derivada, para cada $x \in \mathbb{R}$, es:

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + (x-a)\,\mathrm{e}^x = (x-a+1)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Para que f posea un punto crítico en $x = 0$, su función primera derivada debe anularse en dicho punto, y así:

$$f'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-a+1)\,\mathrm{e}^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a = 1.}$$

Apartado (b). Para $a = 1$, resulta que $f'(x) = x\,\mathrm{e}^x$. Por consiguiente, la segunda derivada de f es, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial nunca se anula (porque siempre es estrictamente positiva), esta segunda derivada se anula en:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,\mathrm{e}^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$$

La siguiente tabla nos indica la curvatura de la función f sin necesidad de calcular la tercera derivada de f, y cuando hay un cambio, ahí hay un punto de inflexión:

f''	$-$	PI	$+$
f	$\cap$	-1	$\cup$

$$f''(-2) = -\,\mathrm{e}^{-2} < 0, \qquad f''(0) = 1 > 0.$$

De esta forma, como $f(-1) = -2/\,\mathrm{e}$,

$$\boxed{\text{la función } f \text{ posee un único punto de inflexión, el cual está situado en } \left(-1, \frac{-2}{\mathrm{e}}\right).}$$

■

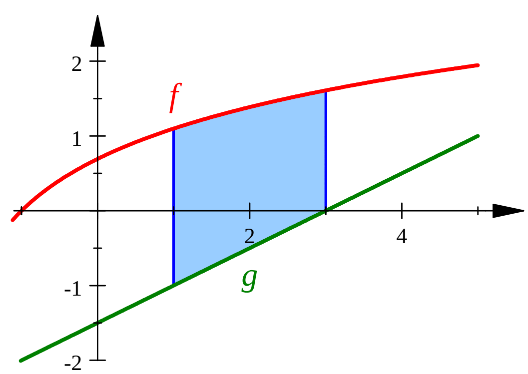
Ejercicio 2 Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

(a) **[1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).**

(b) **[1'5 puntos] Determina el área del recinto anterior.**

Solución: **Apartado (a).** Las funciones f y g son estrictamente crecientes ya que sus primeras derivadas son estrictamente positivas. Así, podemos hacer un esbozo del recinto propuesto con sólo determinar sendas tablas de valores para f y g alrededor de $x = 1$ y $x = 3$:

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	$\ln 1 = 0$	-2
0	$\ln 2 \approx 0.693$	-1.5
1	$\ln 3 \approx 1.099$	-1
2	$\ln 4 \approx 1.386$	-0.5
3	$\ln 5 \approx 1.609$	0
4	$\ln 6 \approx 1.792$	0.5
5	$\ln 7 \approx 1.946$	1



Apartado (b). El área del recinto anterior puede calcularse como:

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx.$$

Por comodidad, determinamos en primer lugar una primitiva de la función f mediante integración por partes:

$$\int f(x)\,dx = \int \ln(x+2)dx = \left\| \begin{array}{lll} u = \ln(x+2) & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x+2} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{array} \right\| = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx$$

$$= x\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = x\ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) + C = (x+2)\ln(x+2) - x + C.$$

De esta forma, aplicando la *regla de Barrow*,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^3 \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{x-3}{2}\right) dx \\
&= \left((x+2)\ln\left(x+2\right) - x - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right)\right]_{x=1}^{x=3} = \left((x+2)\ln\left(x+2\right) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \left(5\ln 5 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(3\ln 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 1 \approx 3.7514.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{El área del recinto es } \; 5\ln 5 - 3\ln 3 - 1 \approx 3.7514 \text{ u.c.s.}}$$

■

Ejercicio 3 [2'5 puntos] Dadas las matrices

$$
A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix},
$$

considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Solución: Trasponiendo cada término de la ecuación $X^t A = B^t$ deducimos que $A^t X = B$. El determinante de la matriz A^t coincide con el de A, y vale:

$$
\begin{aligned}
\det\left(A^t\right) = \det\left(A\right) = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \left[\,(2-m)\,m + m + (2m-1)\,\right] - \left[\,m^2\,(2m-1) + 1 + (2-m)\,\right] \\
&= \left[\,2m - m^2 + m + 2m - 1\,\right] - \left[\,2m^3 - m^2 + 1 + 2 - m\,\right] \\
&= \left(-m^2 + 5m - 1\right) - \left(2m^3 - m^2 - m + 3\right) = -2m^3 + 6m - 4 \\
&= -2\left(m^3 - 3m + 2\right).
\end{aligned}
$$

Calculamos los valores de m que anulan a este determinante aplicando la *regla de Ruffini*:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
\qquad \det\left(A^t\right) = -2\left(m^3 - 3m + 2\right) = -2\left(x-1\right)^2\left(x+2\right).
$$

Esto quiere decir que si $m \in \mathbb{R}\diagdown\{1,-2\}$, la matriz A^t posee determinante no nulo, es decir, posee inversa, y el sistema $A^tX = B$ es compatible determinado ya que su única solución sería $X = \left(A^t\right)^{-1} B$. Discutimos aparte los casos $m = 1$ y $m = -2$.

Si $m = 1$, aplicamos el proceso de reducción de Gauss a la matriz ampliada $(\ A^t \,|\, B\ )$:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Se observa que la matriz de coeficientes del sistema A^t y la matriz ampliada $(\ A^t \mid B\ )$ tienen rango 1, y como hay tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (biparamétrico).

Aplicamos de nuevo el proceso de reducción de Gauss a la matriz ampliada $(\ A^t \,|\, B\ )$ cuando $m = -2$:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 15 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right\|$$

Como el rango de la matriz del sistema es 2 y el rango de la matriz ampliada también es 3, el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que el sistema es incompatible. Hemos llegado, pues, a la siguiente clasificación.

- Si $m \in \mathbb{R}\diagdown\{1,-2\}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
- Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

$\blacksquare$

Ejercicio 4 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

(a) [1'25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1'25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución : **Apartado (a).** El área del triángulo de vértices A, B y C es:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

Los vectores son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,2) - (1,1,0) = (0,-1,2)\,,$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,2,1) - (1,1,0) = (-1,1,1)\,.$$

Por consiguiente:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y el área solicitada es:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2}\,\|(-3,-2,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+4+1} = \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.8708.$$

$$\boxed{\text{El área del triángulo es } \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.8708 \text{ u.c.s.}}$$

Apartado (b). Aplicando la fórmula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right)$, resulta que

$$\cos\widehat{A} = \cos\left(\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(0,-1,2)\cdot(-1,1,1)}{\|(0,-1,2)\| \cdot \|(-1,1,1)\|}$$
$$= \frac{-1+2}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \approx 0.2582.$$

$$\boxed{\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{15}.}$$

■