UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Juan Luis Piñeiro Garrido

Granada, 2019

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Juan Luis Piñeiro Garrido
ISBN: 978-84-1306-336-2
URI: http://hdl.handle.net/10481/57450

Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada; el apoyo del proyecto de investigación “Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares” (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I y gracias al Gobierno de Chile a través de CONICYT y a una Beca de Doctorado en el Extranjero, folio 72170314.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis doctoral no sería lo que es sin el invaluable acompañamiento que han realizado mis directores. Enrique, gracias por el cuidado, consideración interés, entusiasmo, sabiduría y exigencia en la dirección de esta tesis. Elena, gracias por el constante aliento, compromiso, cercanía, inspiración, acompañamiento, interés y organización que trajiste a este trabajo. Han sido el complemento perfecto para guiarme en este largo camino.

A la Dra. Olive Chapman (University of Calgary) por acogerme y recibirme como solo la hospitalidad canadiense puede hacerlo. Olive, muchas gracias por esas preguntas que tanto bien le han hecho al análisis de los datos. Gracias también por hacerte el tiempo (cuando parecía que no había) para discutir este trabajo.

A la Dra. Claudia Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Chile) y al Dr. Miguel Picado (Universidad Nacional de Costa Rica) por aceptar leer este trabajo y entregarnos sus valiosos aportes.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, especialmente a los miembros del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, por apoyarme en el desarrollo de este trabajo. También a los estudiantes para profesor que participaron en esta investigación, gracias por su colaboración.

También deseo agradecer a mi familia y amigos por su amor y cuidado. Por último, pero no menos importante, gracias a ti por estar siempre ahí para mí.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas no solo es fundamental para aprender y hacer matemáticas, sino que también se considera una de las competencias necesarias para enfrentarse a los desafíos de las sociedades actuales. Ayudar a los escolares a convertirse en resolutores competentes de problemas en matemáticas [1] les proporciona una forma de pensar para interactuar con problemas de la vida diaria. Para lograr esto, los profesores deben tener conocimientos específicos para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos (Chapman, 2015; Foster, Wake y Swan, 2014). Por lo tanto, este conocimiento es una parte esencial del conocimiento que los futuros docentes[2] necesitan adquirir en sus programas de formación inicial universitaria. Una investigación que explore hasta qué punto los futuros maestros desarrollan este conocimiento es importante para mejorar los programas de formación y proporcionarles oportunidades de aprendizaje adecuadas. Dicha investigación requiere técnicas enfocadas específicamente en la perspectiva de la resolución de problemas como proceso (Foster et al., 2014). Esto permitiría abordar las limitaciones en los modelos destinados a determinar el conocimiento profesional de los docentes que autores como Weber y Leikin (2016) han señalado.

La investigación que describimos en esta memoria se centra en este conocimiento especializado sobre la resolución de problemas que debe poseer un profesor de educación primaria que enseñe matemáticas. Concretamente, en el conocimiento profesional que un grupo de estudiantes universitarios del Grado de educación primaria de la Universidad de Granada manifestaron acerca de la resolución de problemas en matemáticas.

---

[1] Este trabajo trata sobre la resolución de problemas de matemáticas. Enfatizamos este hecho debido a que la resolución de problemas puede tomar diferentes perspectivas en educación primaria. No obstante, de aquí en adelante utilizaremos la expresión resolución de problemas para referirnos a la resolución de problemas matemáticos. Solo utilizaremos el adjetivo matemático cuando lo consideremos primordial.

[2] En este trabajo se utilizan de manera inclusiva términos como "los estudiantes", "los investigadores", "los futuros profesores" para aludir a hombres y mujeres. Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo nombrar conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando "o/a", "los/las" y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Si bien la resolución de problemas se ha investigado exhaustivamente a lo largo de los años (Lesh y Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992; Weber y Leikin, 2016), se ha prestado más atención a los estudiantes como resolutores y menos atención a lo que debe conocer el profesor. En particular, la resolución de problemas desde la perspectiva del conocimiento de los profesores es una línea de investigación poco explorada (Lester, 2013).

En este trabajo, la resolución de problemas matemáticos se ha definido como un proceso y una forma de pensar (Chapman, 2015; Lester, 2013; Mason, Burton y Stacey, 2010; Schoenfeld, 1992). Por tanto, diferenciamos proceso y conceptos en el sentido del NCTM (2000). Esta perspectiva entiende que la resolución de problemas tiene como objetivo encontrar soluciones a "algo o alguna situación ... cuando alguien experimenta un estado que provoca una situación problemática, asume la tarea de dar sentido a la situación y se involucra en alguna actividad de creación de sentido" (Mason, 2016, p. 263). Por tanto, entendemos la resolución de problemas como una acción realizada por un individuo o un grupo, que identifica una tarea sin un procedimiento directo para resolverla, procede a su resolución mediante el despliegue de una estrategia que implica una serie de pasos no necesariamente lineales y enfrenta el desafío con una disposición favorable (Chapman, 2015; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001).

La estructura de esta tesis responde a su naturaleza que hace converger diferentes perspectivas metodológicas. El trabajo se organiza en 8 capítulos precedidos de un resumen extenso en inglés[3], el listado de referencias bibliográficas y los anexos. Comenzamos delineando nuestro problema de investigación en el capítulo 1. En él, enmarcamos este estudio a la formación inicial de maestros, particularmente de la Universidad de Granada, y proporcionamos una justificación para su realización. Finalizamos el capítulo con el enunciado de preguntas y objetivos. En el capítulo 2 reseñamos las perspectivas teóricas y la literatura relacionada que nos han permitido interpretar nuestros resultados. Las bases teóricas que enmarcan este trabajo tienen en consideración primordialmente el conocimiento para la enseñanza de problemas matemáticos

[3] El resumen en inglés responde al cumplimiento de las normativas para optar al Doctorado con mención internacional.

(Chapman, 2015). Además de este marco y un recorrido hasta su conceptualización, en este capítulo explicitamos nuestro posicionamiento respecto los problemas, la resolución de problemas y su enseñanza.

La investigación que presentamos en esta memoria es un estudio que tuvo cuatro momentos de recogida de datos, cada uno de naturaleza distinta. Estos momentos se organizan en tres fases. Por ello, siguiendo las recomendaciones de Creswell y Plano (2018), hemos dispuesto diferentes capítulos para los resultados, respondiendo cada uno de ellos a los momentos de recogida de los datos. En la primera fase utilizamos el marco propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015) para analizar las pautas curriculares, con el objetivo de identificar los conocimientos necesarios para enseñar la resolución de problemas (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Piñeiro, Castro y Castro-Rodríguez, 2016). Este análisis dio lugar a modificaciones en dicho marco (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2019), particularmente reacomodaciones y explicitaciones. Para realizar estas modificaciones en el conocimiento del contenido, utilizamos teorías de competencia matemática (e.g. Kilpatrick et al., 2001; Rico, 2007) y teorías sobre competencia para resolver problemas (e.g. Chapman, 2015). Para realizar las modificaciones en conocimiento didáctico, nos valemos del triángulo didáctico (Schoenfeld, 2012), concretamente, la relación entre profesor, estudiante y contenido. El sistema de categorías refinado que provee el primer análisis ha permitido que en una segunda y tercera fase, exploremos el conocimiento profesional de futuros profesores de educación primaria sobre resolución de problemas de matemáticas.

El diseño de este trabajo de investigación se corresponde con un Diseño Mixto Exploratorio Secuencial (Creswell, 2013). En él, realizamos primero un análisis de documentos curriculares, seguido de la recogida de datos mediante cuestionarios escritos, para finalmente a partir de estos resultados, seleccionar sujetos y profundizar mediante entrevistas. Entendemos que los resultados de cada uno de los procesos de recogida de datos producen un todo a través de la integración que es mayor que la suma de las partes cualitativas y cuantitativas individuales (Buchholtz, 2019).

Las cuatro recogidas de datos, realizadas en tres fases y que conforman este trabajo están descritos y desarrollados en los capítulos 3, 4, 5, 6 y 7. El diseño metodológico de esta investigación corresponde al contenido del capítulo 3, que está organizado en tres apartados, correspondientes a cada una de las fases de la investigación Posteriormente, mostramos los resultados en un bloque de cuatro capítulos. Cada uno de estos capítulos contienen los hallazgos de cada uno de los momentos de recogida de datos. Concretamente, el capítulo 4 reporta los hallazgos del análisis de los documentos curriculares; los capítulos 5 y 6, tratan el estudio del conocimiento sobre resolución de problemas y didáctico de la resolución de problemas de los futuros profesores; y el capítulo 7, los datos obtenidos en las entrevistas individuales; cada uno de ellos con su discusión correspondiente.

Finalmente, en el capítulo 8 presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación, atendiendo a la consecución de los objetivos. En paralelo describimos las principales aportaciones. Finalmente, presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación.

Extended Summary

PROSPECTIVE PRIMARY TEACHERS' PROFESSIONAL KNOWLEDGE ABOUT MATHEMATICAL PROBLEM-SOLVING

Teachers' knowledge has been identified as one of the factors that most influences their teaching practices. Schoenfeld and Kilpatrick (2008) argue that teachers need profound and comprehensive knowledge of school mathematics. Only so can they understand the fundamental issues and connections that enable them to articulate the best teaching strategies for their students' circumstances, and needs. One of the critical issues about which Prospective Primary School Teachers (PPTs) must learn is Problem Solving (PS) because of its relevance in school mathematics.

Because it is a central part of school curricula (Stacey, 2005), PS is an important primary form of knowledge required for teachers. Proficiency in solving complex problems is not enough to guarantee competent teaching of PS (Chapman, 2012; Lester, 2013). Also important, for example, are the problems that teachers select for teaching and how these problems are implemented in the classroom. Such issues are influenced by teachers' understanding of the mathematics involved, pedagogical goals, beliefs about mathematics and teaching, as well as their students' abilities (Weber & Leikin, 2016). It is thus necessary to elucidate what aspects other than proficiency as a problem solver should be part of a teacher's professional knowledge (Lester, 2013).

Characterization of teachers' knowledge in the literature has been complex, resulting in a variety of perspectives (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005). For example, models like that developed by Ball and collaborators, termed Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (2008), do not explicitly include knowledge of PS in their domains or subdomains. Other frameworks, such as Specialized Knowledge of the

Mathematics Teacher (MTSK) developed by Carrillo et al. (2018), grant a place to one subdomain of PS, Mathematical Practice. These studies have not, however, detailed the knowledge to be considered.

More specifically, on teachers' knowledge of teaching PS, Chapman (2008) points out that:

> *studies focusing explicitly on prospective teachers' knowledge of problem solving are a scarcity in the research literature, regardless of whether routine or non-routine problems are considered. What are available, deals mainly with the prospective teachers' ability or strategies in solving word problems. (p. 2)*

This context has led various authors to raise concerns that teachers' knowledge models do not consider the particularities of processes such as PS (Chapman, 2015; Foster et al., 2014). Based on these considerations, we pose the following research questions: What professional knowledge of PS is required of primary school teachers for effective teaching? What professional knowledge of PS do primary school teachers demonstrate when they finish their initial training? To answer these questions, this study analyses and describes the theoretical knowledge about mathematical PS for teaching demonstrated by PPTs at the end of their training.

Theoretical Perspective and Related Literature

Research on PS teaching has generated a need both to expand on certain particulars and to reinterpret teachers' knowledge models, which are overly general and tend to omit some issues related to PS (Lin & Rowland, 2016). Our study builds on the research work by Foster et al. (2014) and Chapman (2015).

Foster et al. (2014) voice a conservative caveat about Ball's research (Lin & Rowland 2016). Their re-write of Ball et al.'s (2008) model intensifies the difficulty, highlighted by Carrillo et al. (2013), of differentiating between common and specialised knowledge of concepts and processes. This reinterpretation also entails distinguishing aspects of PS classifiable as common from those classifiable as specialised knowledge. One might also reasonably ask where to position teachers' role in selecting a good problem (Lester & Cai, 2016).

Chapman (2015) advanced along these lines by developing a specific approach, termed mathematics PS knowledge for teaching (MPSKT). As she describes in her papers, PS is not organized around the categories proposed by the

Ball's group. Chapman's model regards PS proficiency as a teacher knowledge asset and views it from that perspective. She contends that teaching for PS proficiency draws on a complex network of interdependent knowledge. The model proposed consists of teacher PS proficiency; knowledge of problem content, solving and posing; pedagogical knowledge of students as problem solvers and of teaching practice; and a dimension comprising affective factors and beliefs that impact teaching and learning of PS.

According to Chapman (2012), teachers' proficiency to teach PS involves both key theoretical knowledge and knowing what to do with it. Our study seeks to identify the theoretical knowledge.

Teacher's PS Knowledge

Identifying professional knowledge about PS teaching requires, firstly, addressing teachers' knowledge of processes rather than their mathematical concept knowledge, the perspective adopted in traditional teacher knowledge models. In our approach, the first element needed to identify ability to teach PS entails understanding dimension of mathematical knowledge from a different perspective than that traditionally adopted in teachers' knowledge models.

Based on mathematical and PS proficiency theories, we understand PS here to mean the action taken by a subject who identifies a task, proceeds to solve it by deploying a strategy involving a series of steps (not necessarily linear) and is favourably disposed to the challenge. So conceived, teaching PS proficiency draws on a complex network of interdependent knowledge. We focus on the theoretical or static aspect of this knowledge (Blanco, 2004), distinguishing three components of teacher PS knowledge: problem characterization, PS process and disposition. Problem characterization involves how a math task can be labelled as a problem. PS refers to the process of solving and disposition corresponds to the engagement generated when performing a truly problematic task. We identify four components of PS pedagogical knowledge: a) the student as problem solver, or students' characteristics when they solve problems; b) problems and PS process as a school worthwhile task, or the pedagogical perspective on problems and process; c) non-cognitive factors' influence, or meta-knowledge of the conceptions, beliefs and their mutual implications for PS teaching and learning; and d) teaching approaches to PS, and how they correspond to efforts to encourage classroom actions that promote students' PS development (Piñeiro, Castro-Rodríguez, & Castro, 2019).

Overall Research Method

We used an integrated mixed-method approach comprised of “different small sub-studies in order to answer specific questions which can be combined in order to answer the project’s general research question” (Kelle & Buchholtz, 2015, p. 330). More specifically, this method is Mixed Exploratory Sequential Design (Creswell, 2013).

We use three types of methodological tools: content analysis, questionnaires and interviews. The different data obtained complement each other to provide a broad spectrum (Buchholtz, 2019) of knowledge of future teachers. The methodological tools were used at different times during data collection to enable us to answer our research question. The first phase arises from the need to establish a system of categories to describe teachers’ knowledge of PS. From this category system, we developed the two subsequent data collections used to investigate the preservice teachers’ knowledge.

First Phase: Methodological Characteristics and Results

Curricular Guidelines Analysis

Since school curricula have been shown to define teachers’ knowledge (Ball, Hill, & Bass, 2005), this first phase analyses six primary curricula. Our aim was to identify the PS knowledge required of educators in education systems. Three tasks were performed to achieve this aim: a) curricular guidelines were analysed to ascertain the presence or absence of mathematical PS; b) the professional knowledge implicit in the guidelines was identified; and c) the findings were organized according to Chapman’s model (2015) to test their utility using content analysis techniques.

Sample: Curricular Guidelines

The sample (with one exception) was comprised of official public guidelines published by government organizations. In order to describe PS as broadly as possible, sampling was performed from two perspectives: a) we used a sampling of type cases to obtain wealth, depth and quality of information (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014); b) at the same time, we sought a sample with maximum variation to show different perspectives and represent the complexity of the phenomenon studied (Creswell, 2012). To preserve these two perspectives, we did not try to analyse the curricula comparatively.

The sample consisted of the curricular guidelines published by six countries, two from each tercile identified in the 2012 PISA survey (OECD, 2014). The two countries in the highest tercile were Singapore and Finland (Curriculum Planning and Development Division, 2007; National Core Curriculum for Basic Education, 2004); in the middle tercile, Spain and the United States (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014; NCTM, 2000); and in the lowest tercile, Argentina and Chile (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b; Ministerio de Educación, 2012).

The exception was the NCTM's Principles and Standards for School Mathematics, which is not an official curriculum per se. We chose it over the Common Core State Standards for Mathematics (National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010) because, while both take a common view of mathematics teaching and learning, the NTCM's curriculum is broader in scope, containing examples and guidelines for implementation (NCTM, 2010). The descriptive specificity and international visibility of the NCTM's 2000 document led us to use it in this analysis.

Units of Analysis

The procedure followed to establish units of analysis entailed identifying components of professional PS knowledge. Two types of units were used jointly to enhance reliability: syntactic and thematic. Krippendorff (2004) describes syntactic units as natural syntactic elements that are highly reliable in light of their small size and thematic units as a particular structural definition of content. The units of analysis explored here—the phrases and sentences explicitly referring to the terms PS, problem situation and problem—also included elements on what is to be achieved with problems, how they should be taught and learnt, and whether other goals are pursued through them.

Since a numbering rule must be established to guide such analyses, we applied the rule of presence. As our aim was to describe a specific type of knowledge in its entirety, presence or absence is significant.

Analytical Procedure and Categories

Data analysis mix a concept- and data-driven development, and was performed sequentially (Kuckartz, 2019). First, we established the procedure for the analytical categories based on Chapman's model (2015), adopting three major categories. Teachers' PS proficiency was excluded because it had to be identified by solving problems, an item outside our study objectives. We thus classified the units of analysis into three major categories: content knowledge, pedagogical content knowledge, and affective factors and beliefs (column dimensions in Table 1). Each category was divided into the subcategories proposed by Chapman (2015)—the Categories column of Table 1. This process provided the preliminary organization of the analysis units and is deductive in character.

Table 1. *Categories of analysis*

Dimension	Category	Subcategory
Content knowledge	C1. Mathematics problems	C1a. Problem characterization
		C1b. Problem classification under different criteria
	C2. Mathematics PS	C2a. General heuristics
		C2b. Specific heuristics
		C2c. Other content area strategies
		C2d. Personal strategies
	C3. Problem posing	C3a. Contexts
		C3b. Benefits
		C3c. Strategies
Pedagogical content knowledge	C4. Knowledge of students as problem solvers	C4a. Student thinking
		C4b. Students' difficulties
		C4c. Successful problem solver behaviour
	C5. Knowledge of the role of PS in mathematics teaching-learning	C5a. Approaches or delivery
		C5b. Metacognition
		C5c. Assessment

Table 1. *Categories of analysis*

Dimension	Category	Subcategory
		C5d. Teaching strategies
Affective factors and beliefs	C6. Affective factors and beliefs	C6a. Role and implications of different emotions
		C6b. Teacher's role

The initial analysis was followed by inductive analysis, i.e., analysis within each category, which led to the establishment of more specific subcategories. For example, the following unit of analysis was found in the Finnish curriculum (National Core Curriculum for Basic Education, 2004): "Justify their actions and conclusions and present their solutions to others" (p. 161). This unit requires the student to perform actions once the problem has been solved. The unit involves content knowledge of PS because it relates to a specific phase of the resolution process, review (C2 in table 1). We then searched for patterns in this unit of analysis as well as others units classified in this category and found that they referred to phases of the process or characterizations of them. From this process, the General Heuristics subcategory emerged (C2a in Table 1).

Reliability of coding was tested by the researchers in collaboration with an external scholar. An independent coder was invited to re-code two randomly selected curriculum guidelines (Argentina and Finland) according to the conceptual framework described in Table 1—a total of 52 units of analysis in the first document and 16 in the second. The coding produced by the independent coder was then compared to that of the researchers. According to the Kappa Coefficient, the reliability of the different coders was found to be 0.85 on the Argentina curriculum, and 0.70 on the Finland curriculum.

Curricular Guidelines and Teachers' Knowledge

The findings were arranged by type of knowledge involved: PS content knowledge, pedagogical PS knowledge and affective factors. We discuss some results illustrating the knowledge required of teachers below.

Content knowledge

The initial analysis addressed content knowledge and its three sub-categories: knowledge of, solving and posing problems.

We identified two types of reference to knowledge of problems. One (present in the Spanish, US and Chilean documents) defines what a problem is understood to be. Another, found in all the guidelines, indicates types of problems classified according to a variety of criteria. For instance, some references involve content or familiarity with the type of problem.

Four groups of PS knowledge were identified: general heuristics, or solving stages; specific strategies, such as seeking a pattern or using a table; other content area strategies; and furtherance of personal strategies. All curricular guidelines analysed contained references to general heuristics. Only the Spanish, US and Chilean documents mentioned specific heuristics. Further, the US and Argentinian documents postulate strategies in other content areas associated with the scientific method. Neither Spain's nor Finland's curricula mentioned personal solving strategies, but Argentina's did.

Allusions were also found to the contexts in which problems should be posed and the benefits of and specific strategies for classroom implementation. All sub-categories were represented in the US document; the Chilean and Argentinian curricula mentioned two sub-categories each.

The US document addressed the most issues around problem content knowledge, followed by the Chilean, Spanish, Argentinian, Singaporean and Finnish curricula, in that order.

Pedagogical content knowledge

A second analysis focused on pedagogical knowledge and its categories: knowledge of students as problem solvers and knowledge of the role of PS in teaching-learning processes.

The category "knowledge of students as problem solvers" can be further subdivided into references to students' thinking, their difficulties and the characteristics of successful problem solvers. The Singaporean, US and Chilean documents mentioned student thinking, but the others did not. When documents referred to students' thinking while solving problems, primary reference was to the role of representations and modelling. In addition to references to their thinking, we found mention of students' difficulties, although only in the US document. The Finnish and US documents mentioned the characteristics of successful problem solvers.

We identified four core items for the role that problems should play in the classroom: teaching approaches, metacognition, assessment and specific strategies for teaching how to solve problems. The US document addressed all four, and the Singaporean and Chilean curricula contained references to nearly all sub-categories. The Spanish and Finnish curricula mentioned only the priority approach to teaching PS. No references were found in the Argentinian curriculum, although an approach to mathematics teaching through PS can be inferred, based on the assertion in the objectives that mathematical concepts should be learned in, not for or about, PS.

The largest number of allusions to the dimension of pedagogical knowledge was found in the US document, followed by the Chilean, Singaporean, Spanish and Finnish curricula. No references to this item were identified in the Argentinian guidelines.

Affective factors and beliefs

All sets of guidelines analysed referred to affective factors and beliefs, although only the US guidelines mentioned the teacher's role. The largest number of references was found in the US guidelines, followed by those of Chile and Spain. The Singaporean, Finnish and Argentinian curricula contained only one mention each.

These results show that some issues are debatable, such as problem posing. Whereas Chapman (2015) classified problem posing as content knowledge, it could form part of pedagogical knowledge, given its potential for understanding students' thinking and use of methodology or assessment (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005; Silver, 1994; Stoyanova, 1998). The study findings show that the problem-posing knowledge envisaged in Chapman's (2015) model suggests the importance and potential of this activity for developing students' PS proficiency. In addition to knowledge of problem-posing benefits, the curricular guidelines required more specific knowledge of usage contexts or specific strategies. One could thus reorganize PS knowledge to identify three theoretical elements of the problems and their resolution that should be part of the teacher's knowledge: problem characterization, PS process and disposition. Secondly, for pedagogical knowledge, we identify: a) the student as a problem-solver, b) PS as worthwhile school task, c) non-cognitive factors that affect PS and d) PS teaching. The first three components are related to PS learning and the fourth to PS teaching (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2019).

Second Phase: Methodological Characteristics and Results

PPTs' Knowledge

Framed by the analysis of curricular documents performed in the first phase, this phase applies ours initial findings to study PPTs' PS knowledge. We used the proposed categories to design a questionnaire to administer to PPTs. The questionnaire was designed to enable us to answer our second research question.

Participants and Context

The participants were 397 PPTs enrolled in the Primary Education degree program at the University of Granada, Spain. Data on PPTs' knowledge were collected at two different points in time. The first involved PS knowledge, with 248 PPTs participating at different stages in the program. One group (109 PPTs) was in the first year of study (G1); the other (139 PPTs) was in its fourth and final year. Of the final group (G4) 68 were enrolled in the elective "Mathematical Competencies in Primary Education" (G4A). We chose groups in the first and last years of study in order to characterize preservice teachers' knowledge upon completion of their training. Differentiating these groups will provide better, more detailed characterization. In the second period of data collection (on PS pedagogical knowledge), 149 PPTs participated. Of these, 56 were enrolled in the "Practicum II" and 93 in the elective "Mathematical Competencies in Primary Education". We chose not to have students in the first years of the program participate because the specialized nature of their pedagogical knowledge of the process would lead to research into beliefs rather than professional knowledge.

PPTs in the initial group had taken one mathematics course per year during their 4-year compulsory secondary education. They had also completed two years of non-compulsory high school in which nearly all opted for the Humanities and Social Sciences track, which did not include mathematics courses. These PPTs thus had no advanced school mathematics and only limited experience with genuine PS on entering the teacher education program.

The final group had the same mathematics background as the initial group. During their education program, these students took three mathematics education courses: (1) study of school mathematics as a discipline; (2) teaching and learning of the different topics of school mathematics, with focus on cognitive and pedagogical issues; and (3) study of the primary school mathematics curriculum, and design and implementation of a teaching plan. In these courses, PS was a transversal goal that wove through the topics, especially those discussing meanings and modes for the use of mathematical concepts. For example, PPTs had the opportunity to solve mathematical tasks that could exemplify or introduce the content of a lesson and develop skills such as semantic analysis of problems, but they did not study PS explicitly in these courses. Of these PPTs, 68 in the PS professional knowledge group and 93 in the PS pedagogical knowledge group completed the elective "Mathematical Competencies in Elementary Education", which focused explicitly on PS, with activities such as: (a) characterization and exemplification of the role of PS in the learning of mathematics and its link to mathematical competence, (b) development and application of strategies and heuristics for PS, (c) application of criteria for inventing mathematics problems, and (d) analysis of appropriate strategies for teaching PS in the mathematics classroom. The final group was thus treated as two groups in the data analysis.

Data Collection

We developed the questionnaires using closed binary design because we sought answers that would indicate the presence or absence of certain types of knowledge (Fink, 2003) of PS at the participants' stage in their teacher education programs. Based on the categories generated in analysing the curriculum guidelines, we used the following process to develop the questionnaires (Vásquez & Alsina, 2015): (a) theoretical analysis of the notion of competency to solve problems, (b) study of curricular requirements of elementary education related to PS, (c) review of research literature on PS with elementary school teachers, (d) construction of a pilot version of the instrument, (e) review by experts and testing of the pilot instrument, and (f) construction of the final version of the questionnaire. This process resulted in a two parts that include PS knowledge and PS pedagogical knowledge. The first part related to three theoretical components and involved conceptualization of a problem and the PS process. The second had two parts: PS learning and PS teaching (for more details on the instrument development, see Piñeiro, Chapman, Castro-Rodríguez, & Castro, 2019).

Problem characterization. This component addressed participants' knowledge of what constitutes a mathematics problem. The questionnaire items, organized according to the following three themes, were related to whether a task is a:

- Problem based on procedure, i.e., a task for which the student/problem solver does not have a previously known solution method. Participants had to indicate whether the PS procedure should be known for the task to be considered a problem from the students' (problem-solvers') perspective by responding to statements such as: "Problems must be solved only with previously learned procedures". The PPTs also had to indicate whether the students' mathematical knowledge that the students needed in the PS procedure determined whether the task was a problem.
- Problem based on problem-solver, i.e., consideration of the relationship between the student/problem solver and a problem. Participants had to indicate whether a problem was dependent on the students' stage of development (i.e., what students were able to do relative to their age or grade level) and experience by responding to statements such as: "Whether a task is a problem depends on the experience of the solver". They also had to indicate whether a problem was dependent on the student's ability to imagine a possible pathway and estimate the answer.
- Problem based on the task's types/structure, i.e., general structures or features of a task that make it a problem. Based on a review of the most widely accepted problem classifications, we identified a problem for each category, ranging from exercises (routine and non-applied problems) to mathematical investigations (non-routine, applied and open problems). Participants had to indicate whether or not each example was a problem and

to identify whether the features of a task (e.g., how the data were presented, multiple solutions, etc.) determined whether it was a problem.

The problem-solving process. This questionnaire addressed PS process and was organized into two sections. Section 1 consisted of three themes (stages, metacognition and non-cognitive factors). The other theme, strategies in PS, were treated in a different section.

- Stages in PS. Participants had to reflect and indicate which phase was present in a hypothetical student answer. They also had to indicate if a list of characteristics corresponded to a certain phase. The focus was on stages of understanding and looking back (section 1), as well as carrying out the plan (section 2).
- Strategies in PS. In the second section, participants had to recognise specific strategies in hypothetical student solutions. Eight items were formulated as multiple-choice questions to determine the degree of the respondent's command of strategies primarily contained in mathematics curricula. The options were: a) building a table, b) work backwards, c) draw a diagram, d) guess and check, e) look for a pattern and f) operating.
- Metacognition in PS. Participants had to indicate the role metacognition played in PS process. This section included statements such as: "While a problem is being solved, mental activity takes place that enables problem solvers to identify the errors committed". Respondents also had to identify a monitoring error in one hypothetical student response (we asked where the error was and what might have caused it).
- Non-cognitive factors in PS. Participants had to indicate the role played by motivation in the resolution process. We used statements such as: "It is not important that a student has an interest in solving a problem. The important thing is that the student knows the mathematical contents".

Both parts of the questionnaire included questions on disposition toward PS. We explored this knowledge with participants by asking them to indicate the role of willingness in PS. Statements included: "A problem is a task that the solver accepts as a challenge". Both main parts of the questionnaire included questions.

PS learning. This part addressed participants' knowledge of what constitutes a mathematics problem relative to the problem solver. The questionnaire items were organized into the following three themes:

- Student as problem solver. The focus here was to identify teachers' knowledge of the characteristics the literature has identified in successful solvers (e.g., well-connected and organized knowledge) and unsuccessful or novice solvers.
- PS as worthwhile task. These questions explored three ideas: features of a good problem as reported by literature; knowledge of strategies and their possible use by the teachers in classrooms; PS process representation, i.e., teachers conceptualize PS process as a cyclical or linear; and the benefits and characteristics of problem posing.
- Non-cognitive factors that affect PS. Here we explored some of the most common beliefs about PS and how they affect both teacher and student when PS is taught. The goal was to identify whether the teachers were aware of the possible impact these factors could have.

PS teaching. This questionnaire addressed teaching strategies related to teaching PS. The questionnaire items were organized according to the following five themes:

- Teaching approaches to PS. Here we investigated two issues, the goals and characteristics of each of the three approaches to teaching PS. We explored goals by asking more about the best form of class organization for teaching PS. For characteristics, we asked for examples of classroom situations related to some of the approaches.
- Discourse in PS teaching. Explores teachers' actions to encourage students' PS proficiency. These actions were related to discussion management and ways to conduct PS process.
- Blockage in PS teaching. Questions about this knowledge explored actions teachers could take when students had difficulty solving a problem. We focused on difficulties in understanding and carrying out the plan.
- Assessment in PS teaching. Questions on this knowledge had two focuses: criteria and instruments. For criteria, we provided a list of possible criteria

to assess the PS process. For instruments, we supplied a list of assessment instruments and asked which were the most suitable for assessing PS proficiency.

- Resources in PS teaching. We focused on two elements: representations (concrete, pictorial and symbolic) and their role in solving problems, with special attention to concrete representations, also known as manipulative materials. The questions seek to investigate the importance of both elements and the possible use to be made of them in the classroom in teaching PS.

Data analysis

Data analysis had two approaches, which were performed sequentially. The first was a quantitative, collective analysis of the questionnaire responses to organize the characteristics of the group according to knowledge about PS. This analysis enabled us to see how training in the degree program treated PS knowledge, as well as the knowledge possessed by each group of PPTs. This phase was carried out in accordance with our goal, to characterize the PS knowledge demonstrated by PPTs. For the same reason, we used multidimensional scaling to identify the groupings that emerged from respondents' answers, describe the answers' common features and label the attributes in them (Bisquerra, 1989). Respondents' replies were processed first with dimensional scaling multivariate analysis using ALSCAL (SPSS) software. The dimensions defined were agreement, doubt and contradiction (from here on, these terms will be used only to refer to the dimensions identified). These dimensions indicate, respectively, whether the whole group holds the knowledge, whether there is polarization of different ideas in the group, or whether one person's knowledge contradicts that of others. It is important that, although this analysis was limited to the dimension for which the answers had the greatest presence, some answers showed important presence in more than one dimension.

We subsequently conducted complementary analyses of the questionnaires to identify qualitative knowledge about PS. These analyses enabled us to understand how knowledge about PS is organized in the answers once the students have completed their training (statistical analysis), specifically what respondents know and what difficulties they encounter (analysis of the responses). We first describe the reasons that led us to interpret each dimension in each group and then report on analysis of the groups.

Findings Related to PS Knowledge

<u>Findings from Grouping Analysis of Survey Responses</u>

The multivariate analysis enabled us to identify the knowledge common to all groups, as well as the knowledge indicating disagreement or contradiction. To establish these dimensions, we used stress criteria and ease of data interpretation (Bisquerra, 1989). Table 1 shows the stress for each questionnaire and each group.

Table 2. *Questionnaire stress*

	Problem Characterization Questionnaire		PS Process Questionnaire	
	Dimensions	Stress	Dimensions	Stress
G1	3	0.11	2	0.06
G4	3	0.08	2	0.08
G4A	3	0.09	2	0.03

The first questionnaire registered responses that were grouped into 3 dimensions for the three groups (see Table 1). G1's stress is higher than the recommended 0.10, probably due to this group's level of training. We decided to maintain the three dimensions, however, following Bisquerra (1989), since presentation and understanding of the data must take precedence. Since three dimensions emerge in the two fourth-year groups that show good adjustment, we maintain three-dimensionality for G1 in order to make comparisons.

We interpreted the items that determine the first dimension as expressing agreement, since they show a high percentage of either positive or and negative response. With the exception of one answer in G1, the percentages range from approximately 70%-100%. This response is unique in having similar presence in agreement and doubt. Fourteen items determined the first dimension in G1, 16 in G4 and 13 in G4A.

The second dimension was determined by the answers to 4 questions in G1, 5 in G4 and 9 in G4A. All of these answers showed discrepancies in the number of affirmative and negative responses. The percentages varied by approximately 60% and 40% for each option. We have interpreted this dimension as expressing doubt.

The third dimension corresponded to 6 answers in G1, 2 in G4 and 3 in G4A. For each option in these responses, some percentages of agreement fluctuated and others did not. When analysed together with other answers, however, the responses showed contradictions. For example, in G1, the responses to Item 6 (importance of considering the problem solver in labelling a problem) showed that 60.6% of PPTs answered yes and 39.4% no. Of the 66 subjects who responded positively to Item 6, almost 60% answered positively to Item 8 (whether the calculations proposed by the school texts at the end of the arithmetic operations lessons were problems, i.e., the respondents did *not* consider the solver).

Two dimensions emerged from the answers to the second questionnaire. Table 1 displays the responses. The first dimensions, which include the largest number of responses together, were interpreted as indicating agreement, for the same reasons as for the first questionnaire. G1 and G4 had 33 responses in this dimension, while G4A had 35. The second dimension was composed of answers distributed evenly across both options, which we interpreted as doubt. Only 5 items were registered in this dimension in G1 and G4, and 3 in G4A.

This analysis enabled us to evaluate the following sections not only from the perspective of the meaning of the responses but also to determine whether we could identify aspects common to the group to show how many answers are positioned within a dimension.

Findings for PPTs' Knowledge of Problems and PS

The findings are presented in terms of the PPTs' perspectives on knowledge for each theme proposed in the questionnaires and theoretical discussion, level of training and dimensions found in the quantitative analysis.

Problem Characterization

Initial Group (G1). As noted above, this group's answers were found in all three dimensions (agreement, disagreement and contradiction), but mainly in agreement. This suggests that the PPTs hold similar knowledge of problems but that some key answers prevent them from adopting a contemporary approach to what being a real problem means.

- ♦ Problems based on procedure. G1 participants held inconsistent knowledge of whether or not a student has a way of solving a problem. Many experienced a disconnect between their knowledge of problems in which the task depends on the solver and problems that depend on the solver's prior knowledge.
- ♦ Problems based on problem-solver. G1 held conflicting knowledge of students' (problem solvers') role in the problems. For example, when asked directly, almost two-thirds of the participants agreed that a problem depended on the solver or the solvability of the problem. When presented with examples of tasks, however (when asked to decide whether specific examples of tasks were problems), their knowledge of the solver's role decreased considerably.
- ♦ Problems based on types/structure. G1 also demonstrated inconsistencies as to whether problems with different types of tasks were applied, had a context or had one or more solutions. G1 tended to use context as a criterion to determine whether a task was a problem when the task was closed but not when it was open. G1 also showed inconsistency in its knowledge of which other features of a task determine whether it is a problem.

Final Group (G4). This group's answers can be classified under the dimensions of agreement and doubt. The knowledge discussed in the following was common to all PPTs in the group except on key issues related to whether a task was a problem based on the problem-solver.

- ♦ Problems based on procedures. G4 experienced more contradictions in its knowledge than G1. For example, participants responded that problems should be solved with previously learned procedures but simultaneously answered that a problem is a task without a known procedure. This group also lacked clarity about the role of mathematical concepts in articulating a procedure.
- ♦ Problems based on problem-solver. G4's recognition of the solver's role in sample tasks was considerably greater than that of G1. These data suggest

that G4 skills in labelling a task as a problem from the solver's perspective improved due to training. Considering the resolver continued to be a complicated task, however, and G4 lacked full understanding of what "considering the solver" means.

- ♦ Problem based on types/structure. Data show that G4 had different criteria than G1 for labelling tasks as problems. G4's answers showed acceptance of a wider range of tasks. G4 labelled most non-routine tasks as problems except open and applied tasks. The same occurred with answers on whether problems' have different features. For example, G4 identified the presence of context or the fact that problems could have more than one response as characteristics but demonstrated the view that the problems could have ambiguous information or inaccurate data. This result explains the low level of approval for open and applied tasks.

Final Group Advanced (G4A). This group's answers were distributed fairly evenly across all three dimensions. Knowledge of problems is thus an issue in this group; training did not give all participants the same conceptualization of a problem.

- ♦ Problems based on procedures. Unlike the previous groups, G4A participants did not give contradictory answers. However, their answers suggest a traditional conceptualization of problems.
- ♦ Problems based on problem-solver. G4A participants' answers were divided when they were asked directly both whether the problem-solver played a role in labelling a problem and about solvability. This division was reflected in responses on examples in which they were asked to indicate whether the solver played a role. The responses suggest that this group is not clear about what role the student should play when the problems are labelled.
- ♦ Problems based on types/structure. Data suggest that G4A uses existence of a clear answer, and to a lesser extent presence of a real context, as criteria to label problems. In addition to this traditional view, the group showed mixed ideas about the possible strategies that could be used to solve the problem.

In general, the findings on problem conceptualization showed only slight differences between G1 and G4. Despite receiving explicit teaching on PS, G4A expressed a limited and even more traditional concept of the problem. The groups show differences in their knowledge about which tasks could be considered problems, and G4A even showed contradictions.

PS Process

Initial Group (G1). Participants' answers on this knowledge were grouped mainly in the dimension agreement. Only three questions were categorized under doubts, all three related to how problem posing was connected to the PS process.

- ♦ Stages in PS. Despite recognizing that the process was non-linear, participants held linear knowledge of it.
- ♦ Strategies in PS. Participants recognized a variety of strategies, but strategies associated with a genuine resolution process (guess and check) were more problematic for G1.
- ♦ Metacognition in PS. Despite recognizing the importance of metacognition, at least half of the participants in this group failed to identify the cause of an error in a hypothetical student response.
- ♦ Non-cognitive factors in PS. Participants recognized the importance of motivation, even valuing it more than knowledge, but they were doubtful about whether motivation was decisive in finding the solution.

Final Group (G4). Participants' answers fell mostly into the dimension agreement, with only two questions in doubt.

- ♦ Stages in PS. Participants' knowledge demonstrated a non-linear vision of the PS process. Results seem to indicate that training had a positive effect on integrating posing problems into the PS process. Second, two-thirds (much lower percentage than the 100% positive response recorded for other PS moments) of the participants accepted the notion of posing problems. This information is important because it confirms the group's nonlinear vision of this process.
- ♦ Strategies in PS. Participants' knowledge suggests identification of only superficial characteristics in a hypothetical student response. They did not

seem to grasp the underlying essence of the guess-and-check strategy, that of testing different responses to see if they fit the problem conditions. For example, students confused building a table or looking for a pattern whit guess and check because also required systematic listings. .

- Metacognition in PS. Data suggest that, despite recognizing the importance of metacognition, a large number of the group’s participants held knowledge that prevented them from being precise in identifying errors.
- Non-cognitive factors in PS. Participants' knowledge suggests that they recognize the importance of motivation. In addition, more than half were convinced that finding a solution depended on motivation.

Final Group, Advanced (G4A). This group positioned its answers mainly in the dimension of agreement, with only one answer reflecting doubt.

- Stages in PS. Participants' knowledge as manifested in the responses reaffirmed the idea that more training has a positive effect on integration of problem posing into the PS process. Problem posing was still low here, but higher than in the other two groups.
- Strategies in PS. As in G4, participants' knowledge suggests identification of surface characteristics in a hypothetical student response.
- Metacognition in PS. Participants' knowledge reaffirmed the idea that, despite recognizing the importance of metacognition, a large part of this group held knowledge that prevented it from precise identification of errors.
- Non-cognitive factors in PS. As in the other groups, participants' knowledge suggests that they recognized the importance of motivation but were not sure that motivation was decisive in finding a solution.

Disposition in PS

In the area of knowledge about accepting the challenge of solving a problem, all answers reflect agreement. Generally, all groups are clear about the importance of accepting the challenge.

Findings Related to Pedagogical Knowledge of PS

Findings of Grouping Analysis of the Survey Responses

The multivariate analysis enabled us to identify the knowledge common to both groups, as well as the knowledge on which there was disagreement or that showed contradictions. To establish these dimensions, we used stress criteria as well as ease of interpretation of the data (Bisquerra, 1989). Table 2 shows the stress for each questionnaire and each group.

Table 3. *Questionnaire stress*

	PS Learning		PS Teaching	
	Dimensions	Stress	Dimensions	Stress
G4	3	0.11	2	0.09
G4A	3	0.08	2	0.09

The PS Learning questionnaire registered responses grouped into three dimensions for both groups (see Table 2). G4's stress was higher than the recommended 0.10, probably due to this group's level of training. We decided to maintain the three dimensions, however, following Bisquerra (1989), who argues that presentation and understanding of the data must take precedence. Since three dimensions emerged in the two fourth-year groups (with appropriate adjustment), we preserved this three-dimensionality for G4 to enable comparisons. In G4A, stress was 0.8 and thus sufficient (Bisquerra, 1989).

We interpreted the first dimension as indicating agreement in knowledge. This dimension corresponds to responses to 54 questions in G4 and 63 questions in G4A. Here, responses show a high percentage of agreement, whether positive or negative. The second dimension was determined by answers to 13 questions in G4 and 10 questions in G4A. In both groups, responses showed polarization in the number of affirmative and negative responses. We labelled these groups of answers as doubt. The third dimension corresponds to answers to 13 questions in G4 and 7 questions in G4A. Here, the percentages of agreement fluctuated depending on the option but showed contradictions when analysed with other answers. It is important to note that this analysis took into account the dimension for which the responses showed the greatest presence, but some answers showed significant presence in more than one dimension.

The PS teaching questionnaire registered responses grouped into two dimensions in both groups (see Table 2). The first dimension, agreement, corresponds to answers to 57 questions in G4 and 56 questions in G4A. In these responses, the majority of participants agreed, whether affirmatively or negatively. We interpreted the questions on which they did not agree or fluctuated for each option (interpreted as doubt)—9 questions in G4 and 10 questions in G4A. Analysis of this questionnaire yields a stress of .09 for both groups, a sufficient value (Bisquerra, 1989).

In summary, this analysis not only enabled us to evaluate the following sections based on the meaning of the participants' answers. It also allowed us to determine issues common to the groups, specifically, how many answers were positioned within a dimension.

Findings of PPTs' Knowledge of Teaching and Learning PS

The findings are presented in terms of the PPTs' perspectives on pedagogical knowledge for each theme proposed in the questionnaires and theoretical discussion, the level of training, and the dimensions found in the quantitative analysis.

PS Learning. This theme addresses the participants' knowledge of factors that can affect learning of PS. It consists of three categories of knowledge that PPTs should hold to support students' learning of PS: student as a problem-solver (i.e., characteristics of successful and novice problem-solvers), PS as worthwhile task (i.e., problem selection, strategies, PS models, problem posing) and non-cognitive factors that affect PS. The findings for each group are presented for each of these categories.

Final Group (G4). As noted above, this group's answers fall into all three dimensions, but mainly into the first. This result suggests that this group shares common PS pedagogical knowledge on learning but that some key answers may prevent this knowledge from being deployed in the classroom. G4 has difficulty with some ideas related to every theme—specifically, with concentrating on knowledge about strategies and non-cognitive factors.

- Student as a problem-solver. Participants recognized successful-solvers' characteristics, such as connected and organized knowledge and metacognitive abilities. Three quarters of the group believed, however, that these students would persist in their solution plan.
- PS as a worthwhile task. On this topic, which is related to the first theme (problem selection), participants demonstrated knowledge of characteristics of good problems identified in literature. Almost half believed, however, that it was suitable for a problem to have a short direct response. Respondents also showed high recognition and potential use of strategies but lower recognition and/or possible use of strategies such as acting it out, drawing a diagram, estimating, looking for a pattern, using a model or looking for a simpler problem. As to models of PS, G4 considered the process as cyclical and unstructured in the sense that it allowed solvers to skip steps or experience setbacks. G4 PPTs still responded positively, however, when asked if the process was linear and permitted skipping steps. Finally, the participants identified the lowest percentage of characteristics for the item problem posing, stating that invention of the problem did not encourage use of the wrong strategy (two-thirds of participants). G4 was no clearer about what problem posing involved.
- Non-Cognitive factors that influence PS. Participants showed mixed knowledge about the beliefs that promoted adequate development of PS. Only two-thirds responded that students must solve problems on their own or that improving PS proficiency required daily problem-solving experiences. One-third of participants also stated that teaching keywords in the context of word problems could be counterproductive or that problems should be solved only once the concepts have been learned.

Final Group Advanced (G4A). Like G4, this group's answers were classified in all three dimensions, but mainly in the first. This suggests that G4A holds common PS pedagogical knowledge on learning but that some key answers may not allow this knowledge to be deployed in the classroom. Some ideas around every theme gave G4A difficulty, but less difficulty than they give G4. The data thus suggest that specific training impacts knowledge about strategies and possible use.

- ♦ Student as a problem-solver. Participants recognize successful-solvers' characteristics such as knowing self-strengths and weaknesses or showing concern about form and content. Two-thirds of the participants expressed, however, that these students would persist in their solution plans, a lower percentage than in G4. Some of G4A's answers about novice problem-solvers were similar to those given by G4.
- ♦ PS as a worthwhile task. Responses for problem selection, G4A's answers were similar to those of G4. Responses for strategies showed higher recognition and potential than in G4. Only three strategies had lower percentages: acting-it-out, operating and working backwards. As to a possible model of the PS process, G4A showed the same contradictions as G4. Finally, 80%-90% of participants identified characteristics of problem posing, with the lowest percentage obtained by the item stating that problem posing does not promote incorrect strategies. Like G4, G4A was not clear about what problem posing is.
- ♦ Non-cognitive factors that influence PS. G4A participants, like those in G4, gave contradictory answers. For example, G4A accepted items stating that students should not believe there is only one correct answer or that they should know all possible answers. At the same time, G4A affirmed that solving problems with different strategies confused students.

PS Teaching. This theme addresses participants' knowledge of teaching PS. It consists of five categories of knowledge that PPTs should hold to support teaching of PS: PS teaching approaches, discourse in PS, blockage in PS, PS assessment and PS resources. The findings for each group are presented for each category. Appendices 2 provide a summary of the questionnaire results.

Final Group (G4). As noted above, G4's answers can be classified under two dimensions, but mainly under agreement. This result suggests that the group shares common pedagogical knowledge of PS teaching but that replies nonetheless coexisted with ideas that might prevent translation of such knowledge into teaching practice. Ideas around every theme gave G4 difficulty, but primarily ideas that focused on knowledge of PS teaching approaches and assessment of PS.

- ♦ PS teaching approaches. Participants showed doubtful and contradictory knowledge. For example, only half stated that phases and strategies of PS should not be taught, while 90% agreed when asked about the approach to teaching PS.
- ♦ Discourse in PS teaching. Participants' responses recognized actions that would enable discourse to encourage PS. For example, all participants agreed to encourage use of different strategies, discuss strategies used by students, or argue and reflect on the students' PS process.
- ♦ Blockage in PS teaching. Almost all participants indicated that the teacher must identify the error before suggesting any help. In addition, more than 90% acknowledged the need to suggest alternative representations to overcome blockage in understanding and alternative strategies to overcome blockage in implementing the plan. While demonstrating that they could locate the error, the PPTs' answers to concrete examples showed that they were not clear about the actions they should take to help students overcome blockage.
- ♦ Assessment in PS teaching. Participants seem to have difficulty identifying evaluation criteria. G4 manifested knowledge of a wide range of criteria, but this knowledge coexisted with criteria that would undermine their students' development of PS proficiency (for example, assessing whether students can identify keywords in word problems). Over three-quarters of the responses indicated a preference for open instruments in which the students could show their PS process.
- ♦ Resources in PS teaching. Participants showed contradictory ideas about the use and importance of resources for teaching PS. For example, on representations (specifically, pictorial), the data show knowledge of resources to promote the entire PS process. At the same time, almost three quarters of the PPTs in this group indicated that focus should be on the understanding phase.

Final Group Advanced (G4A). As for G4, this group's answers were classified into both dimensions, but mainly into agreement. Thus, although the group seems to share common pedagogical knowledge on PS teaching, its replies co-existed with ideas that could prevent the translation of such knowledge into teaching practice. Ideas around every theme gave G4A difficulty, especially ideas on knowledge about PS teaching approaches and resources for PS.

- PS teaching approaches. As for G4, participants in this group showed contradictory ideas about PS approaches. Specifically, all participants stated that an approach about PS was adequate, but only 40% stated that the strategies and phases of PS should be taught. The group lacked clarity on the implications of all of the approaches.
- Discourse in PS teaching. As in G4, participants' responses acknowledged actions that would promote good discourse to encourage PS. For example, all participants agreed to encourage use of different strategies, lead discussion of the PS process, or argue and reflect on the students' PS process. However, three quarters indicated that teachers must always teach strategies that solve given problems.
- Blockage in PS teaching. All participants indicated that the teacher must identify the error before suggesting any help. In addition, more than 90% acknowledged the need to suggest alternative representations to overcome blockage in understanding and alternative strategies to overcome blockage in implementing the plan. Responses to a concrete example suggest, however, that, despite knowing the error, participants were not clear about what actions to take to help the student overcome the blockage.
- Assessment in PS teaching. Participants seemed to have difficulty identifying evaluation criteria. Like G4, G4A showed knowledge of a wide range of criteria but simultaneously embraced criteria that would undermine development of PS proficiency in their students. These criteria included assessing students' ability to identify keywords in word problems. Some instruments (such as observation, self-reports and invention of problems) obtained more than 80% approval. Like G4, this group expressed less preference for items with closed responses, such as multiple-choice or fill-in-the-blank tests.
- Resources in PS teaching. G4A, like G4, showed contradictory ideas regarding resources. For example, participants stated that manipulatives

were necessary and helped students to visualize and handle mathematical relations, but they also responded that manipulatives helped to write the calculations in an orderly manner.

Third Phase: Methodological Characteristics and Results

Deeper Knowledge of PS through Interviews

In this third and final phase, we sought more in-depth knowledge of the PPTs' understanding of PS. We pursued this knowledge for two reasons. First, the third dimension of knowledge was the most difficult for the PPTs. Second, the sequential nature of our research and the timeframe established to complete this doctoral research did not permit collection of data on both dimensions.

In this phase of the research, we do not seek quantity or standardization of data. While not using a strict case study method, we adopt a case study perspective in order to extract more in-depth information (Stake, 1999) on knowledge of PS based on the questionnaires.

Participants

Participants were selected on the basis of a cluster analysis of the results of the fourth-year questionnaires. As the objective was to obtain a spectrum of all possible response profiles for conducting the interviews, we identified groups who responded in a similar way.

Groups were identified through two sequential actions. The first was cluster analysis of each questionnaire individually, based on the PS knowledge separately: (1) problem characterization, (2) resolution process and (3) disposition. This analysis showed two large groups for each type of knowledge, problem characterization and the PS process, and four groups for disposition.

We subsequently determined the group to which each participant belonged in each area of knowledge explored. This process identified 10 PPT profiles based on the knowledge demonstrated in the questionnaires. The groups were composed of 56 participants in Group 1, 12 participants in Group 2, 1 participant in Group 3, 9 participants in Group 4, 3 participants in Group 5, 2 participants in Group 6, 42 participants in Group 7, 8 participants in Group 8, 2 participants in Group 9, and 3 in Group 10.

Finally, based on availability and willingness to collaborate in the study, we selected one participant from each group with whom to conduct the interviews.

Data Collection and Instrument

We collected data through semi-structured individual personal interviews with each participant. The interview protocols were designed using the same questions as the questionnaires. This decision was based on the goal of obtaining deeper knowledge of the process, as well as on the assumption that asking about any task can be useful in an interview, since it is the prompt for the question that will spark the conversation (Hunting, 1997). Following the recommendation by Hunting (1997), we asked a question and told the PPT that another classmate had responded in a certain way. This approach was preferable to asking directly why the PPT had answered as he/she did and then asking the reasons about the answer. In addition, following recommendations by Cohen, Manion and Morrison (2018) on this type of interview, we left the interviewer free to ask more questions to clarify ideas or delve into the reasons given by the participant.

Questions were selected based on the answers obtained for the open items in the questionnaires (Cohen et al., 2018); we had a frame of reference for the participants' responses and used the profiles to select the questions. This method avoided having to repeat the full questionnaire for all interviewees. For each profile that emerged from the cluster analysis, we asked questions on areas in which the participant's profile identified difficulties. The interviewer had a structured protocol with the questions that showed contradictions, doubts or no changes between the first- and fourth-year subjects' knowledge of the process. To the questions, we added a prompt based on the results obtained in the questionnaires. For example, if a subject's profile showed low scores on questions that the literature considered important, we asked, "A colleague answered "no" to this question. Why do you think this is the case? Did you respond like this?" We did the same with questions that showed doubts, contradictions or no change, stating instead that the classmate was uncertain about the response.

The interviews were conducted during academic year 2018-2019. Before starting to record, we informed each participant of the reason for the interview, the fact that the interview would be audio-recorded, and the guarantee of anonymity.

The interviewer was seated in front of the subject, separated by a work table, and had the protocols with the questions to be addressed throughout the interview. Although the order of the questions was established by the protocols, the interviewer was free to decide how to ask the questions. That is, the interviewer raised the conversation topics in the terms that he/she considered convenient, gave clarifications, asked the PPT to explain when an answer was not clear and requested further depth on issues when it seemed necessary. In the event that the subject did not fulfil what was expected in this phase, the interviewer was free to ask for elaboration on the question or to ask the PPT to rephrase his/her response.

Data analysis

The interviews were audio-recorded and then transcribed for analysis. We subsequently performed qualitative analysis of the answers to each question posed. The qualitative analysis used the categories that emerged from analysis of the previous curricular guidelines. These categories were also used to structure the topics in the questionnaires designed for the second phase of data collection. We analysed the interviews to understand the "why" answers in the questionnaires by coding transcribed interviews according to the themes in the questionnaires. The coding involved, for example, identifying meaningful statements about the underlying reasons why the resolver should be considered in order to label a problem.

Deeper Investigation of PS Knowledge: Interview Findings

The findings from the interviews provided further evidence of the PPTs' knowledge of problems and of PS based on the thinking underlying the PPTs' responses to the questionnaires. We focused on aspects of their knowledge that showed conflicting ideas in problem characterization and the PS process based on the questionnaire findings.

<u>Problem characterization</u>

As previously indicated, the findings on problem characterization showed differences among all three groups of PPTs. Specifically, the initial group expressed deeper contradictions, while the final groups were more uncertain of how to characterize a problem. The results for the final group that completed the

PS course showed anomalies. While the course seemed to help to reduce contradictions in this group, it did not seem to change the PPTs' traditional view of problems. These findings were further supported by the interviews, as in the following cases.

Confusion in identifying problems based on procedures and consideration of the problem-solver. Both final groups showed confusion regarding the procedure and consideration of the problem solver in identifying a task as a problem. For example, they pointed out that a task is a problem independently of the solver but also thought that level of difficulty depended on the solver. The confusion was about connecting the role of solver to the procedure and the ability to arrive at a solution in determining whether a problem existed. PPTs seem not to have considered prior knowledge of the solver to label a problem but did recognize that level of difficulty depends on the solver, including acknowledging that prior knowledge played a role. PPTs' answers indicated that they had ideas about considering the solver but failed to connect these ideas. In labelling a problem, the criterion thus seems to move away from the solver and toward preference for characteristics of the task, toward viewing problems as objects in themselves. These results suggest that PPTs both see problems as independent entities or objects and recognize the importance of prior knowledge but do not manage to link these ideas.

Confusion in identifying problems based on context. The context of the problem statements had substantial importance for participants and decreased in G4A. The answers showed that presence of a context automatically rendered a task problematic, suggesting the substantive importance of translation ability. A second element to which the PPTs attached substantive importance was arithmetic operations. Attributing such importance to operations as a criterion for labelling a problem limited their selection of the tasks labelled as problems. These PPTs' answers suggest that their conceptualization of problems is complex and that their ideas create tensions in their decisions about how to label a problem.

<u>PS Process</u>

In general, the results on conceptualization of the PS process show little difference between G1 and the two final-year groups, all of which show a linear view of PS process. The same occurs with acceptance of problem posing as part of the PS process. Error identification in students' hypothetical responses and guess-and-check strategy recognition were problematic for all PPTs. These results indicate PPTs' linear view of the PS process and the persistence of this view despite the training received. The items that presented the greatest difficulty were those that varied most between G1 and the final groups (around 20% and 30%). The rest of the items varied less than 10%.

Problem posing as part of the PS process. Based on the deeper knowledge of the reasons for these difficulties among the fourth-year students, we find that they understood the PS process and problem posing as separate entities because they considered problem posing as a different activity.

Control errors in PS process. One reason for the difficulties the PPTs encountered in identifying an error and the reasons for it seems to be the importance they attributed to operations. The answers indicate that PS activity revolves around algorithms, such that making mistakes in the activity is the same as not understanding the problem.

Guess-and-check strategy recognition. Finally, PPTs who showed little recognition of a solution intended to be a guess-and-check strategy tended to view solving as looking for pattern or building a table based on the surface feature of representation of the solution. This response is probably related to their scant conceptual practice with the guess-and-check approach. Since their confusion emerged when they saw several answers, it seems that seeing response attempts or several answers led them to associate such responses with the strategy even though a different strategy was being used.

Disposition in PS

Disposition includes a variety of productive actions toward PS. We focus here on disposition as acceptance of the challenge of solving a problem. The PPTs' responses on disposition suggest that they understand the importance of motivation in triggering disposition. For example, the interview answers showed that PPTs were clear about the role of motivation but did not consider motivation as a category within disposition. The data show that PPTs give substantive importance to motivation as responsible for producing other aspects of the disposition. Data suggest recognition that the student must want to solve the problem but no sense that this desire might differ from accepting the challenge.

Concluding Remarks

The curricular analysis supports Chapman's (2015) ideas on the existence of discrepancies in teachers' knowledge as viewed from the perspective of PS rather than of mathematical content. To date, the dimensions of the models developed to describe teachers' knowledge build on the meaning of mathematical concepts in terms of structure, representations and phenomenology. This perspective tends to locate PS where these concepts can be applied or constructed, but not to view it as an entity that needs to be taught. The components established here identify elements characteristic of PS related to problem meanings, solving and posing, and their pedagogical implications. These elements afford explicit insight into teachers' conceptions of problems that have hindered their promotion of genuine PS (Xenofontos & Andrews, 2012). The elements also prove ideal for identifying the PS knowledge involved in education and the relationship among the actors: students as problem solvers, tasks understood as school tasks and teaching strategies for PS proficiency. All of these elements are present to a greater or lesser extent in the curricula analysed and are thus in keeping with the knowledge required by education systems. The analysis of curricular documents performed here thus reorganizes and refines some categories of Chapman's model (2015), advancing knowledge in the field.

The curricular documents analysis enabled us to identify key components in professional pedagogical knowledge of PS in: a) problem characterization, b) PS process, and c) disposition in PS knowledge, PS learning and PS teaching. Each of these components is associated with specific knowledge.

The analysis of PS knowledge seems to indicate that training has a greater impact on conceptualization of the problem. The findings show both greater variety of dimensions and more differences in percentages of response among groups. Specifically, PPTs recognize the role of the solver in problem labelling but not in concrete examples. They also recognize a variety of types of problems, both routine and non-routine. Although this recognition seems to be the effect of the training received, some ideas underlying this knowledge cannot be used to their full potential.

Likewise, labelling a task as a problem is a complex undertaking for PPTs. Findings reported here indicate that PPTs begin their training with doubts and contradictory ideas about the role of the procedure, consideration of the problem solver and the types of task considered as problems. Not only is this knowledge not enhanced in their training, but having more training seems to increase PPTs' tendency to label as problems tasks in which the procedure is already known. Specifically, PPTs bring to their training contradictory beliefs about whether the procedure must be known to label a task as a problem, an idea accentuated in G4 and traditionalized in G4A. Further, teachers begin training by recognizing the importance of the problem-solver in labelling but not in examples. Training does seem to have varying impact on this recognition, since G4 improves in identification of examples while G4A remains unclear. Training seems to affect labelling based on type of task in different ways. PPTs come to training using context and clear structure as criteria of labelling. After training, G4 extends knowledge to acceptance of most tasks, while G4A seems to use whether tasks are open or closed as a criterion, showing higher percentages of approval for closed tasks.

The participants encounter difficulty with problem characterization but express knowledge about the PS process and its phases. Their knowledge of the PS process seems not to have changed except in their ideas about posing problems, which improved from G1 group to G4A. More specifically, PPTs show knowledge of the PS process, identifying its phases and characterizing them appropriately. They also recognize and use a variety of strategies to solve problems. Although this knowledge seems to improve with the training received, it does not succeed in broadening PPTs' view of the PS process as linear.

Results on PS learning show that G4A obtained answers slightly more in line with the recommendations in the literature (e.g., Lester & Cai, 2016). Specifically, PPTs demonstrated knowledge about areas such as successful-solvers' characteristics, problem selection criteria and the importance of problem posing, among others. PPTs show the most conflicts in knowledge concerning PS as a worthwhile task and non-cognitive factors. On the one hand, the strategies they claim to know least or would not use are related to authentic PS processes (Mason et al., 2010). Their understanding of whether the PS process is linear or cyclical is also contradictory. These findings suggest a fairly traditional understanding of PS, which could become a heuristic/Pólya-based approach (Chapman, 2017) in which PS is a linear and unproblematic process.

The major differences are found in PS learning, where G4 gave more answers classified in the dimensions of doubt and contradiction than G4A—specifically in knowledge of strategies. This result may stem from the difficulties Spanish PPTs encounter in their own PS proficiency (Nortes & Nortes, 2016). This finding seems to indicate that knowledge of the process (Piñeiro et al., 2018) has primary influence in pedagogical understanding of the PS process and beliefs and less influence in characteristics of solvers, problems and problem posing.

The extra training received by G4A also seems to have been insufficient, since differences in the percentages tend to be approximately 20%. The answers that present the greatest difficulty are strategies and non-cognitive factors in the learning section, indicating that this knowledge is the most complex for PPTs.

Knowledge about PS teaching approaches, findings show that PPTs have knowledge related to the three approaches (for, about and through). According to Schroeder and Lester (1989), it is unproductive to argue in favour of one approach or the other because they overlap in classroom reality. However, the PPTs in the group without additional training show more doubt, specifically on questions that allude to characteristics of the PS approaches for and about. Both groups are inclined to point to a teaching approach through PS as the "most" appropriate, as suggested by some authors (Lester & Cai, 2016). Yet central actions in this approach, such as discussion of mathematical concepts imbricated in problems, manifest low levels of acceptance, while others, such as resolving each problem before the students face it, receive higher scores. That is, PPTs respond positively to ideas put forward in a general way that could be answered from common sense, but their responses to specific ideas or to questions that ask them to indicate a concrete action are contradictory. This fact is reflected in at least one case in all components identified in our theoretical perspective, but it is especially acute in the cases related to teaching approaches.

This last finding suggests that PPTs' knowledge does not seem to have an organizing structure. Each PS approach could be associated with specific management of discourse, blocking, evaluation and resources, but without this knowledge the other themes lack the common thread needed to understand the consequences of one's actions.

Likewise, G4A's extra training seems not to have had sufficient effect, since the variation of most percentages is approximately 15% for the answers on teaching. These answers involve the theme that registered the greatest difficulty, PS teaching approaches, confirming that this knowledge is the most complex for future teachers.

Our results raise issues that are useful for teacher training programs. For example, the findings suggest that preservice teachers possess unorganized knowledge that fails to benefit from reflexive learning because the PPTs are not aware of the repercussions of certain actions when they respond negatively to general questions about these actions. Thus, specific training in the PS teaching process may not necessarily align their knowledge with what teachers are expected to know about PS and how to apply it.

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El planteamiento del problema lo hemos realizado desglosándolo en cinco apartados. En el primer y segundo apartado, se presentan los dos pilares básicos en los que se sustenta esta investigación. En ellos, ponemos especial atención, en un sub-apartado, a la pertinencia del estudio desde una perspectiva curricular. En el tercer apartado, argumentamos la relevancia de la investigación sobre el conocimiento de la resolución de problemas debido a las particularidades que este proceso presenta respecto a los conceptos matemáticos. Un cuarto apartado se corresponde con el modelo de formación de los sujetos de esta investigación y su relación con el conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas. Para cerrar el capítulo, en el quinto apartado, desglosamos las preguntas de investigación que queremos abordar y, por último, partiendo de ellas, enunciamos los objetivos de esta investigación.

El conocimiento del profesor de matemáticas

La investigación sobre el desarrollo profesional y el conocimiento del profesor es una de las preocupaciones de la didáctica de la matemática y se ha transformado en uno de los focos de atención en la investigación en educación matemática (Kilpatrick, 2016a). La relevancia de esta temática, ha dado lugar a encuentros de investigadores, numerosas publicaciones, e investigaciones internacionales (e.g. Blömeke, Hsieh, Kaiser y Schmidt, 2014; Even y Ball, 2009; Kunter et al., 2013; Stylianides y Hino, 2018; Wood, 2008). Destaca el estudio TEDS-M (Tatto et al., 2008) como primera iniciativa internacional que se centra en indagar comparativamente el conocimiento profesional que demuestran futuros profesores de primaria al terminar su formación inicial.

Las iniciativas mencionadas en el párrafo anterior, se han realizado bajo el supuesto de que una mejor calidad de la enseñanza, mejorará el aprendizaje de sus estudiantes (Ponte y Chapman, 2006). Uno de los elementos indicativos de esta calidad es el conocimiento que posee el profesor, pues las actividades que realice en el aula dependen en gran medida de este conocimiento profesional (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). Es decir, el conocimiento del profesor tiene una influencia importante en lo que hace en clase y en último término, lo que aprende el estudiante (Fennema y Franke, 1992).

Numerosos y diversos son los esfuerzos para caracterizar la competencia profesional del profesor de matemáticas. Niss (2006) plantea que la competencia profesional de un profesor de matemáticas se configura en torno a ocho competencias matemáticas y seis competencias didácticas y pedagógicas. Un manejo eficaz y eficiente de ellas, ofrece a los estudiantes experiencias que les permiten construir y desarrollar sus competencias matemáticas. Schoenfeld y Kilpatrick (2008) plantean una serie de dimensiones que permitirían caracterizar este constructo. Entre ellos se señalan el conocimiento de las matemáticas escolares de manera profunda y amplia, de los estudiantes como pensadores y como aprendices, sobre la elaboración y gestión de ambientes de aprendizaje, sobre el desarrollo de normas y apoyos al discurso de una enseñanza para la comprensión, sobre la construcción de relaciones que apoyen el aprendizaje y sobre la reflexión sobre la propia práctica. Baumert y Kunter (2013), en el marco del proyecto COACTIV y desde una perspectiva profesionalizante, señalan que la competencia profesional es el resultado de la conjunción de varios factores, entre los que se destacan: el conocimiento específico declarativo y procedimental; valores profesionales, creencias y metas; orientaciones motivacionales; y habilidades de autoregulación profesional. En estos tres ejemplos, un elemento común y en el que estamos interesados en este trabajo es el conocimiento del profesor.

El conocimiento del profesor no es monolítico o unidimensional, sino que es un gran sistema interrelacionado y funcional, difícil de aislar (Fennema y Franke, 1992). El conocimiento profesional del profesor es una noción compleja de caracterizar (Llinares, 1996). En este trabajo asumimos que es "la conjunción de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante su carrera profesional" (Climent, 2002, p. 52-53). En esta conjunción, se debe tener en cuenta que "las diferentes componentes de conocimiento pueden estar formadas por tipos de conocimiento distinto" (Llinares, 1996, p. 51). En esta línea, destacamos que solo el conocimiento de la disciplina no es suficiente para una enseñanza adecuada de las matemáticas escolares. Según Carrillo (2014):

> *Poseer un buen nivel en el dominio del conocimiento matemático no garantiza un buen desempeño docente, en particular no garantiza un buen nivel en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, pero parece evidente que la carencia de conocimiento matemático supone carencia de conocimiento didáctico del contenido.* (p. 121)

En este trabajo nos interesamos por las componentes relativas al conocimiento sobre el proceso de resolución de problemas (o un conocimiento del contenido) y a su paralelo, el conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas. Además, en este componente y al tratarse de un estudio con profesores en formación nos hemos focalizado en el conocimiento de tipo estático (Blanco, 2004) o estable (Davis y Simmt, 2006).

El conocimiento profesional se ha analizado desde una perspectiva del profesor en general (e.g. Shulman, 1986), y desde la perspectiva específica del profesor de matemáticas (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008; Bromme, 1994;

Carrillo et al., 2018; Fennema y Franke, 1992; Ponte, 2012; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Estos trabajos consideran que el conocimiento profesional del profesor tiene diversas componentes o tipos, pero la mayoría de ellos distinguen entre un conocimiento del contenido (que se refiere a los contenidos de la matemática como disciplina escolar) y un conocimiento pedagógico o didáctico del contenido (entendido como aquel conocimiento que el profesor pone en juego para la enseñanza de las matemáticas).

Las dimensiones relativas al conocimiento del contenido y al conocimiento didáctico han influido en la forma en que las escuelas de educación han diseñado sus programas de formación de profesores (e.g. Aguayo-Arriagada, 2018). Liljedahl et al. (2009) señalan que la formación inicial se ocupa principalmente de la adquisición de los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas. Ponte y Chapman (2016) reafirman esta idea señalando que el conocimiento del contenido y didáctico del contenido se han mostrado idóneos para discutir el conocimiento de los futuros profesores. Sin embargo, la revisión de estos autores deja entrever la poca relevancia que ha tenido en la investigación el conocimiento del profesor sobre procesos tales como la resolución de problemas.

La Enseñanza de la resolución de problemas

Los estudios sobre la resolución de problemas tuvieron su apogeo durante la década de los 80 (e.g. Silver, 1985), basándose en la premisa de que la resolución de problemas tiene un lugar privilegiado en las matemáticas. Esto debido a que tanto educadores matemáticos (e.g. Pólya, 1981; Schoenfeld, 1985), como matemáticos (e.g. Halmos, 1980) le otorgan una relevancia sustantiva.

La literatura suele coincidir en que un problema es una tarea para la cual un individuo no sabe (de inmediato y en forma directa) qué hacer para obtener una respuesta (Lester, 2013). En este trabajo, entendemos por problema la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como un reto, procede a su resolución a través de una serie de fases no necesariamente lineales usando una estrategia, y se involucra, con una disposición positiva, en el desafío de resolverla (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2019).

No obstante, a pesar de ser una caracterización comúnmente aceptada, su enseñanza resulta algo más compleja. Otten (2010) señala tres razones filosóficas que justifican la importancia de enseñar a resolver problemas. La primera de ellas se basa en una concepción de la matemática como disciplina dinámica, impulsada por el problema, en la que los patrones se generan y luego se destilan en el conocimiento. Según este autor, desde esta perspectiva, la matemática es un proceso de plantear, refinar y resolver problemas, más que una colección de productos terminados. Una segunda razón tiene relación con la noción de pensamiento reflexivo y su relación con la resolución de problemas. En este sentido, se considera que la resolución de problemas o la capacidad de pensar reflexivamente es lo que convierte a un sujeto en un ser humano. Por tanto, las actitudes de apertura mental, de entereza y responsabilidad son más importantes que las habilidades procesuales o el conocimiento de hechos particulares. Finalmente, la tercera tiene relación con que la resolución de problemas proporciona la creatividad, la flexibilidad y el control metacognitivo del pensamiento que se alinean con las demandas profesionales. En otras palabras, al estudiar la resolución de problemas en matemáticas, los estudiantes pueden estar mejor preparados para muchos aspectos de sus vidas después de la escuela.

Estas ideas, en los últimos años han permeado los currículos escolares y han convertido a la resolución de problemas en una preocupación de las políticas educativas de muchos países. Como consecuencia de ello, diversas evaluaciones internacionales se centran en este tópico. Un ejemplo emblemático es proporcionado por el Programme for International Student Assessment (PISA), establecido en el año 1997 por la Organization for Economic Cooperation and Development (OCDE), un estudio de evaluación internacional de la competencia matemática de los estudiantes a la edad de 15 años. En el marco de este estudio, la resolución de problemas presenta un papel destacado: "su innovador concepto de alfabetización concierne a la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicar efectivamente cuando inventan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de materias" (OECD, 2005, p.3), y con más énfasis dentro de la matemática, donde se considera esta área como un conjunto de herramientas que sirve para resolver problemas mediante la puesta en funcionamiento de determinadas competencias (Rico, 2006). Además, en el marco teórico de la prueba del 2015 (OECD, 2013), incluye dentro de la competencia matemática la formulación, empleo e interpretación de las matemáticas en una variedad de contextos a través de la resolución de problemas.

En el desarrollo que ha manifestado la noción de competencia matemática en el marco de PISA, se observa una clara evolución en la importancia que se le otorga a la resolución de problemas, presentada como un activo transversal en la alfabetización matemática, hasta el punto de definir a la resolución de problemas como una de las competencias matemáticas (OECD, 2014).

Este contexto establece que resolver problemas es un indicativo primordial cuando se trata de demostrar competencia matemática y evaluar la calidad de los sistemas educativos. Como consecuencia, convierte a la resolución de problemas en un aspecto primordial de la enseñanza, y por tanto, en parte esencial del conocimiento del profesor. No obstante, son necesarios estudios que indaguen en su enseñanza (Lester, 2013). Esto, debido a que las diversas revisiones a la investigación sobre resolución de problemas realizadas en los últimos 30 años (e.g. Cai, 2003, 2010; Lesh y Zawojewski, 2007; Lester, 1983, 1994, 2013; Lester y Cai, 2016; Lester y Kehle, 2003; Schoenfeld, 1992; Weber y Leikin, 2016; Wilson, Fernandez y Hadaway, 1993) dan cuenta del marcado énfasis que ha tenido la perspectiva de individuo/resolutor en la investigación, opacando aspectos relativos a la sala de clases.

Inicialmente, los estudios realizados fueron principalmente de naturaleza cuantitativa y diseñados para identificar las características de los problemas difíciles, las características de los resolutores de problemas exitosos, e investigar los métodos de entrenamiento de los estudiantes para usar la heurística de resolución de problemas (Lester 1994). Esta perspectiva se trasladó a la investigación de la sala de clases. Lester (2013) señala que los informes de investigación en los años 80 se podrían describir de manera general como la búsqueda de un método de enseñanza por sobre otro. En ellos, el profesor ni siquiera era una variable. Además de este papel relegado del profesor, se ha dado muy poca atención a lo que sucede en las aulas reales; al trabajo realizado en las aulas, ya sea en grupos pequeños o clases enteras. Esto en gran parte por la naturaleza teórica de la investigación de resolución de problemas. Estas cuatro razones han sido señaladas como las causantes de que la enseñanza de la resolución de problema haya resultado tan elusiva a la investigación (Lester, 2013).

No obstante, durante estos 30 años de investigación revisados en Lester (2013) se han comprendido diversos aspectos que Lester y Cai (2016) recogen en su revisión y que revisaremos en profundidad en el capítulo 3. Estos autores señalan que la investigación ha logrado mostrar que:

- la enseñanza de este proceso debe hacerse de manera imbricada con los conceptos matemáticos y no como usualmente se realiza, enseñando el concepto y luego aplicándolo a la resolución de un problema;
- la enseñanza de la resolución de problemas es un proceso que toma tiempo, necesita de una sistematicidad por parte de los profesores en su aplicación y los estudiantes necesitan ser expuestos a diversidad de problemas y formas de resolverlos;
- los estudiantes deben ser expuesto a tareas que sean realmente problemáticas y que promuevan la comprensión y el sentido matemático;
- la importancia del profesor es sustantiva pues él es el que *orquesta* todas las dimensiones que incluye la enseñanza de la resolución de problemas, por lo que debe ser un buen seleccionador de problemas, conductor de la clase, saber escuchar a sus estudiantes, saber hacer las preguntas adecuadas en los momentos adecuados y saber callar para que sus estudiantes piensen;
- las creencias, tanto de estudiantes como de profesores, sobre la resolución de problemas, cómo se enseña y aprende y de ellos mismos como resolutores influyen el proceso de enseñanza/aprendizaje, por lo que deben priorizarse creencias que sean productivas (como la creencia de que los problemas tienen más de una solución o directamente, no tener);
- el grueso de investigaciones ha mostrado que invertir tiempo en la enseñanza de la resolución de problemas no va en desmedro del aprendizaje de habilidades procedimentales, y que a pesar que existen estudios que

muestran que si puede suceder, las demandas actuales hacen que esta pérdida sea aceptable.

En este sentido, las condiciones que permiten que una sala realmente haga resolución de problemas son complejas. Liljedahl (2016), en su proyecto *Thinking Classrooms*, ha logrado identificar nueve características que permitirían realizar una verdadera resolución de problemas en las salas de clases. Si bien profundizamos en ellas en el capítulo 3, brevemente, entre ellas encontramos:

- el tipo de tareas utilizadas, es decir que sean realmente problemáticas, y cuándo y cómo se utilizan;
- la forma en que se asignan las tareas a los alumnos debe ser oral;
- la formación de grupos de trabajo en forma aleatoria;
- el trabajo de los estudiantes debe ser hecho de forma vertical (pizarras o paredes) para que sea visible a todos;
- el profesor debe moverse dentro de la sala y no tener un lugar fijo frente a la clase;
- solo se deben responder preguntas que permitan a los estudiantes seguir pensando y no las interrogantes para dejar de pensar, como las que buscan saber si la respuesta es correcta;
- la orquestación para trabajar los problemas, logrando un equilibrio entre el desafío de la tarea y las habilidades de los estudiantes para trabajar en ello;
- las intervenciones para sintetizar o sistematizar ideas debe realizarse cuando todos los estudiantes hayan podido iniciar el proceso de resolución y debe ser una discusión de ideas;
- la evaluación debe ser principalmente sobre la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje a través de los esfuerzos para comunicarse, dónde están y hacia dónde se dirigen en su aprendizaje.

Estos resultados y las sucesivas revisiones realizadas por Lester (1994, 2013; Lester y Cai, 2016) sugieren que el papel del profesor es fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas. Concretamente, el conocimiento que exige al profesor es altamente demandante y complejo. Sin embargo, como señala Chapman (2008):

los estudios que se centran explícitamente en el conocimiento de los futuros profesores sobre la resolución de problemas son una escasez en la literatura, independientemente de si se consideran problemas rutinarios o no rutinarios. Lo que está disponible trata principalmente con la capacidad o las estrategias de los futuros profesores para resolver problemas verbales (p. 160).

La resolución de problemas en las normativas escolares

Existe acuerdo en la comunidad científica internacional sobre la potencialidad de la resolución de problemas en los aprendizajes de las matemáticas (NCTM, 2000; Schoenfeld, 2007). Muestra de ello son las publicaciones como "An Agenda for Action" (NCTM, 1980), el Informe Cockcroft (1982), o los "Principles and Standards for School Mathematics" (NCTM, 2000). Esta importancia se ha visto reflejada directamente en los documentos curriculares en los que este proceso tiene un lugar privilegiado (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2016; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang y Wiley, 1997; Stacey, 2005).

Como ya se señaló, los diversos estudios internacionales que evalúan el conocimiento de los escolares en materias específicas han adquirido relevancia en los sistemas educativos de los países participantes, ya que son considerados indicadores de calidad (Rico, 2007). Como consecuencia, la conceptualización de la resolución de problemas ha cambiado a raíz de estas demandas. Los currículos escolares de matemáticas han de formar ciudadanos que apliquen las matemáticas en problemas de la vida diaria en situaciones sociales, laborales e interdisciplinarias (English y Gainsburg, 2016). Como consecuencia, dentro del currículo escolar de matemáticas, la resolución de problemas se presenta desde diversas perspectivas.

Analizando el papel de la resolución de problemas en el currículo escolar, Stanic y Kilpatrick (1989) señalan tres enfoques que han caracterizado el papel de la resolución de problemas en el currículo escolar de matemáticas. El primero de ellos se refiere a que los problemas son el contexto para aprender matemáticas, es decir son un medio para lograr otros fines. Un segundo enfoque es la de la resolución de problemas como habilidad, convirtiéndola en un fin y no solo un contexto. El tercer enfoque se refiere al proceso de hacer matemáticas resolviendo problemas, dando significados a las ideas matemáticas de forma similar a como lo realizan los matemáticos. Stacey (2005) en su análisis de currículos escolares anglosajones, destaca que la resolución de problemas ha tomado dos perspectivas: a) como un medio o camino para lograr objetivos más amplios, y b) como una habilidad o fin por sí misma. En estos análisis es posible percibir enfoques o vías de acceso que puede tomar la enseñanza de la resolución de problemas en las aulas (Schroeder y Lester, 1989). Comúnmente se conocen con el nombre de enseñanza *sobre*, *para* y *a través* de la resolución de problemas.

Si bien, Castro y Ruiz-Hidalgo (2015) plantean que "estos tres acercamientos a la resolución de problemas pueden utilizarse de manera aislada, pero en la práctica se solapan y se utilizan en secuencias que incorporan más de una de estas aproximaciones" (p. 95). La literatura reporta que el enfoque de enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas es el que presenta mayores beneficios en los aprendizajes de los estudiantes (Cai, 2010; Lester y Cai, 2016; Stein, Boaler y Silver, 2003), e incluso ha sido considerado como una enseñanza efectiva de la resolución de problemas (Son y Lee, 2016). No obstante, a pesar de no ser la concepción de enseñanza más aceptada y extendida, es la que más se ajusta al entendimiento que se tiene de una enseñanza que promueva aprendizajes en el contexto de la resolución de problemas, que desarrolle habilidades de pensamiento superior y que cree una atmósfera de enseñanza basada en la experimentación.

Sin embargo, a pesar que se otorga un lugar central a la resolución de problemas, estos documentos curriculares ofrecen directrices poco precisas y reduccionistas de las componentes de los procesos involucrados en la resolución de problemas, y a pesar de considerarse en muchos lugares, no está presente en uno propio y específico, lo que podría provocar su ausencia en el aula (Puig, 2008).

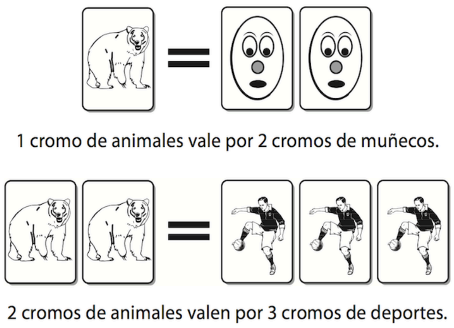
EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas es un aspecto fundamental en el currículo escolar de matemáticas (NCTM, 2014). Los docentes, como parte responsable del desarrollo de dicho currículum, han de ser resolutores competentes de los problemas de matemáticas que emplean en el aula. Esta premisa suele ser un punto de partida en la formación inicial del profesorado, sin embargo, la competencia del profesor para resolver problemas complejos y de gran demanda cognitiva no es suficiente para garantizar una enseñanza adecuada de la resolución de problemas (Lester, 2013). Los problemas que los docentes seleccionan para la enseñanza de la matemática y cómo los implementan en clase están influenciados por su propia comprensión de los contenidos matemáticos involucrados, los objetivos pedagógicos que persiguen, sus creencias sobre las matemáticas y su enseñanza, así como por las capacidades de sus alumnos (Weber y Leikin, 2016). Así pues, se hace necesario dilucidar qué otros aspectos, que no sean la competencia del profesor como resolutor de problemas, deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas (Lester, 2013).

La investigación que imbrica el conocimiento del profesor de matemáticas y la resolución de problemas ha mostrado un avance lento, presentándose como un área necesitada de atención (Weber y Leikin, 2016). Los trabajos realizados, se centran principalmente en el profesor como resolutor, existiendo una escasez de estudios que aborden la resolución de problemas desde la perspectiva del conocimiento del profesor (Chapman, 2008; Lester, 2013). Investigaciones previas en esta línea muestran que los docentes de educación primaria, tanto en formación como en activo, manifiestan deficiencias en su competencia para resolver problemas (e.g. Andrews y Xenofontos, 2015; Nortes y Nortes, 2016; Socas, Hernández y Palarea, 2014). Además, el conocimiento de algunos elementos relativos a la enseñanza de la resolución de problemas también se muestra limitado (e.g. Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; Castro y Castro, 1996), influyendo en sus estudiantes como resolutores de problemas (e.g. Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010; Saadati, Chandia y Ruíz, 2018)

Los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas empleados en las investigaciones como marco de referencia (e.g. Ball et al., 2008; Rowland et al., 2005) giran en torno a conceptos omitiendo el papel que juegan los procesos como la resolución de problemas (Foster et al., 2014). Conocer qué es la resolución de problemas desde la perspectiva de un proceso a enseñar, implica conocimientos específicos para el profesor que no están directamente supeditados al conocimiento de un tema de la materia sobre un contenido específico, sino con su naturaleza como proceso (en el sentido del NCTM, 2000). Esto sugiere que la investigación sobre el conocimiento del profesor y el uso de estos modelos para interpretar los resultados relegue a la resolución de problemas a un segundo plano.

Para analizar la resolución de problemas como tema del conocimiento del profesor hay que asumir que esta lleva asociada una serie de nociones que han surgido de la investigación empírica en este campo y de las reflexiones teóricas al respecto. Esto hace que en este trabajo entendemos que existe una diferencia entre los conceptos (saber) y los procesos (hacer) (NCTM, 2000). Por tanto, las nociones relativas a los procesos no son necesariamente conocimientos matemáticos sobre algún concepto en específico. Ilustrémoslo con un ejemplo, la figura 1 muestra un problema empleado en la última evaluación Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). La utilización en todo su potencial, por parte de un profesor, hace necesario un conocimiento que no se limita a la matemática implícita, es decir, sobre qué algoritmos usar o cómo hacerlo de manera eficiente (estrategias de cálculo mental o representaciones posibles), sino con su condición de problema y su resolución.



Algunos niños fueron a cambiar cromos. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible, ¿cuántos cromos de muñecos obtendría?, ¿cuántos cromos de deportes obtendría?, ¿debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?

Figura 1. Ejemplo de tarea planteada en la evaluación TIMSS.

Fuente: Educalab. (2011). Preguntas liberadas TIMSS y PIRLS: Matemáticas. Disponible en http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/

Específicamente, utilizar este problema en una situación de enseñanza requiere conocimientos sobre:

- El problema, es decir, a qué tipo corresponde, sus características de formato, en qué medida puede ser un problema para sus estudiantes, etc.
- La resolución del problema. Es bastante obvio pensar en las fases por las que se llega a su solución: comprender qué significa cada dato, cómo se

relacionan, etc. Pero además, existen conocimientos sobre las posibles estrategias que se pueden emplear: tanteando con diferentes cantidades para cromos de muñecos o de deporte, usando tablas que organicen los tipos y las cantidades de cromos, o incluso es posible la utilización de diagramas que representen los tipos de cromos con sus cantidades, etc.

- La disposición que pueda generar en los estudiantes, es decir, el involucramiento que permite al estudiante abordar de forma productiva la resolución del problema.
- Los errores que puedan cometer los estudiantes, al no considerar la condición de mayor cantidad de cromos.
- Las posibilidades para el desarrollo de aspectos cognitivos como la posibilidad que brinda de un desarrollo del pensamiento relacional, específicamente de un significado de igualdad del signo (=), y no cognitivos, como las creencias de que los problemas pueden ser resueltos de formas diferentes o que la discusión de un problema es parte del aprendizaje.
- Los cambios que puedan realizarse en sus variables para hacerlo más difícil o más fácil, ya sea en las cantidades involucradas, etc.

El listado anterior comprende los aspectos relativos a la condición de problema y no ahonda en los conocimientos de la matemática imbricada. En este contexto, vemos como emergen elementos sobre los problemas tales como: noción y proceso, su aprendizaje y su enseñanza. Particularmente, destacamos tres elementos:

- Cada tipo de problema enfatiza algún aspecto del conocimiento del profesor. No obstante, los elementos que resaltan no tienen una relación directa con las dimensiones que los modelos de conocimiento del profesor han desarrollado hasta el momento.
- La resolución de problemas y una perspectiva de los estudiantes como resolutores demandan al profesor conocimientos relativos a las posibles actuaciones de los estudiantes al enfrentarse a una situación problemática y que tienen no solo relación con las dificultades y errores del contenido matemático específico.

- ♦ Cada uno de los enfoques de enseñanza de la resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989), requiere del profesor un conocimiento específico.

En síntesis, los conocimientos que atañen directamente a la resolución de problemas, y que deberían formar parte del conocimiento del profesor, tienen que ver con la noción de problema y los aspectos ligados a su resolución (formas de representación, heurísticos, estrategias específicas, ejecución, etc.), así como con aspectos ligados al resolutor potencial y los que intervienen en el proceso de su enseñanza.

Por otra parte, la organización de estos conocimientos es también compleja. Se ha señalado que los modelos de conocimiento del profesor que mayor visibilidad internacional han tenido (Ball et al., 2008; Rowland et al., 2005), presentan solapamientos (Flores-Medrano, Escudero y Carrillo, 2013; Montes, Contreras y Carrillo, 2013), omisiones (Foster et al., 2014) o la necesidad de incluir otros elementos teóricos para complementar los análisis (Dreher y Kuntze, 2015; Rojas, Flores y Carrillo, 2013).

El modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008; Hill y Ball, 2009; Thames y Ball, 2010) es capaz de identificar elementos de conocimiento sobre conceptos. Sin embargo, su lógica surgida de un concepto matemático, hace que se omitan elementos cuando la perspectiva es un proceso como la resolución de problemas. La organización que se hace en las dimensiones de conocimiento del contenido y didáctico del contenido provoca dificultades para categorizar pues no responden a aspectos fundamentales de este proceso como la consideración del resolutor. Además, existen elementos que son centrales en la enseñanza de la resolución de problemas y no emergen al discutir desde este modelo. Autores como Lester y Cai (2016) señalan que la "orquestación" de la clase es un rol imperativo de los profesores, que bajo esta categorización queda relegado.

En este sentido el modelo MKT no toma en consideración la naturaleza del proceso y a la gran tradición de investigación en el campo de la resolución de problemas. La resolución de problemas es un proceso de naturaleza personal, en el que se define un problema en función del resolutor. Bajo esta perspectiva emerge una tensión en la descripción de un conocimiento especializado desconectado de los estudiantes. En esta línea, los trabajos de Carpenter et al. (1988) o Depaepe et al. (2010) muestran que las deficiencias de los profesores se sitúan mayoritariamente en discrepancias sobre lo que es un problema. Este hecho es relevante pues la selección del problema es uno de los roles centrales en la enseñanza de la resolución de problemas (Lester y Cai, 2016) y los profesores, especialmente de primaria, se ven limitados en su conocimiento sobre los problemas con mayor uso en esta etapa de la escolaridad (Castro y Castro, 1996) . Así, un análisis del conocimiento de los profesores sobre lo que es un problema, utilizando este modelo, sería complejo de realizar.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO Y LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA

La formación inicial del profesorado de primaria en la universidades se suele regir por principios o teorías más o menos elaboradas que deberían dar como resultado mínimo dotar a los futuros maestros de los distintos tipos de conocimientos básicos y útiles para su futuro desempeño profesional. Uno de estos enfoque teóricos es el Análisis Didáctico, desarrollado en los trabajos del grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Esta perspectiva, el análisis didáctico, ha ampliado sus funciones más allá de la planificación y diseño de unidades didácticas (Rico y Fernández-Cano, 2013). Concretamente, se observan otros tres ámbitos de actuación (Castro-Rodríguez, 2015). Primero, en el ámbito curricular, como nivel de reflexión sobre la estructura del currículo de matemáticas, necesario para su estudio y el trabajo sobre el mismo. Segundo, en el ámbito profesional, como estrategia de formación de profesorado. Tercero, en el ámbito investigativo, el análisis didáctico puede usarse como metodología de investigación de orientación cuantitativa o cualitativa en una primera instancia, y como meta-evaluación en una segunda instancia.

Dentro de cada una de estas funciones, el análisis didáctico es entendido como un procedimiento cíclico compuesto por cinco etapas, a cada una de las cuales corresponde un tipo de análisis particular: análisis conceptual, análisis del contenido matemático escolar, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo. Cada una de ellas consiste en un proceso de análisis y síntesis, que identifica datos relevantes, a partir de los cuales cierra un ciclo y da paso a la siguiente fase como puede observarse en la figura 2.

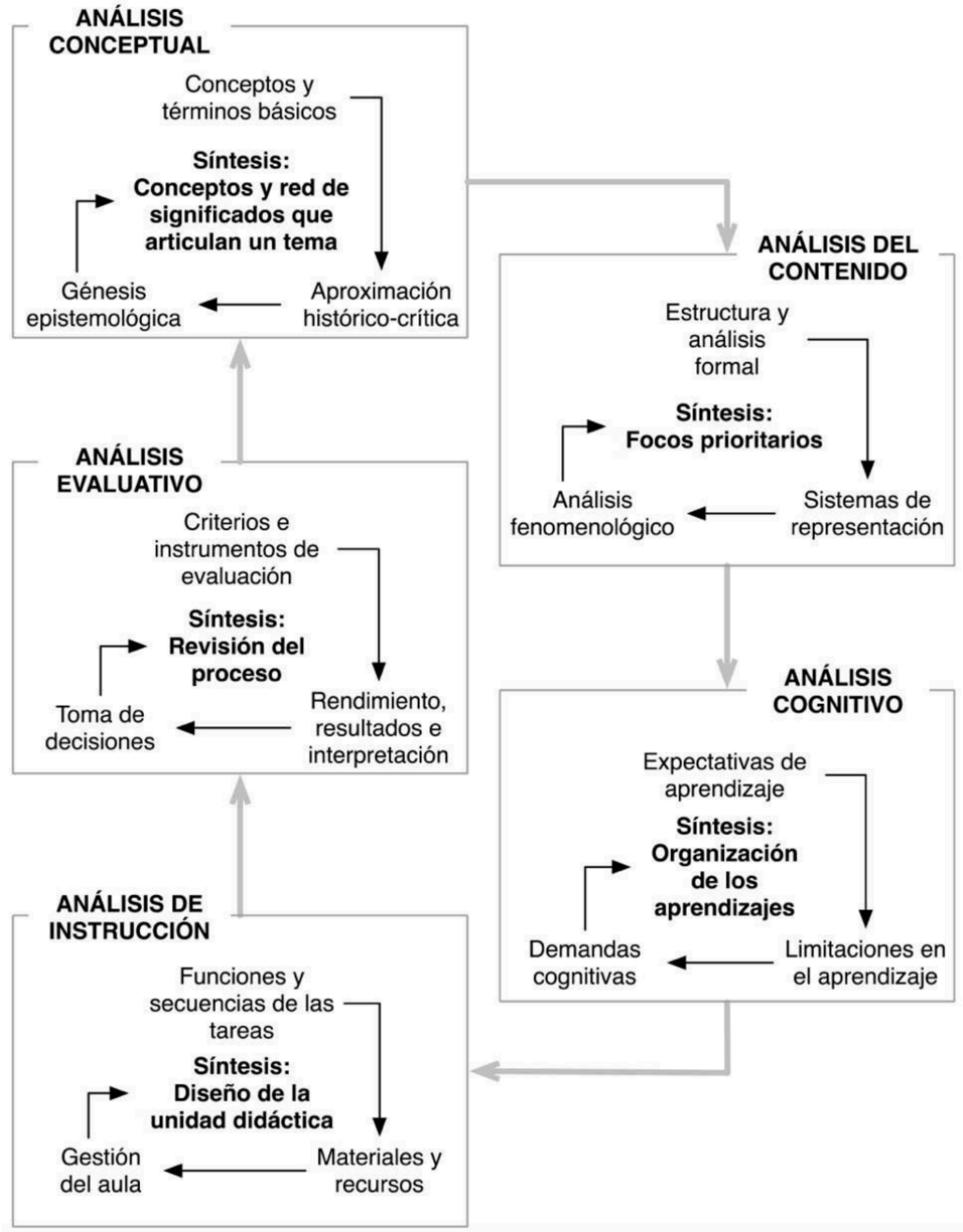


Figura 2. Análisis didáctico (Rico, 2013, p. 22)

La formación inicial en el ámbito de la didáctica de la matemática de profesores de Primaria, en la Universidad de Granada se fundamenta en el Análisis Didáctico (Lupiáñez, Molina, Flores y Segovia, 2007; Ruíz, Molina, Lupiáñez, Segovia y Flores, 2009) y se cubre de manera obligatoria, por tres asignaturas: Bases Matemáticas, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo. La formación se complementa con una optativa, Competencias Matemáticas en la Educación Primaria. Como puede observase en la figura 3, cada una de ellas se relaciona con uno de los análisis específicos del análisis didáctico.

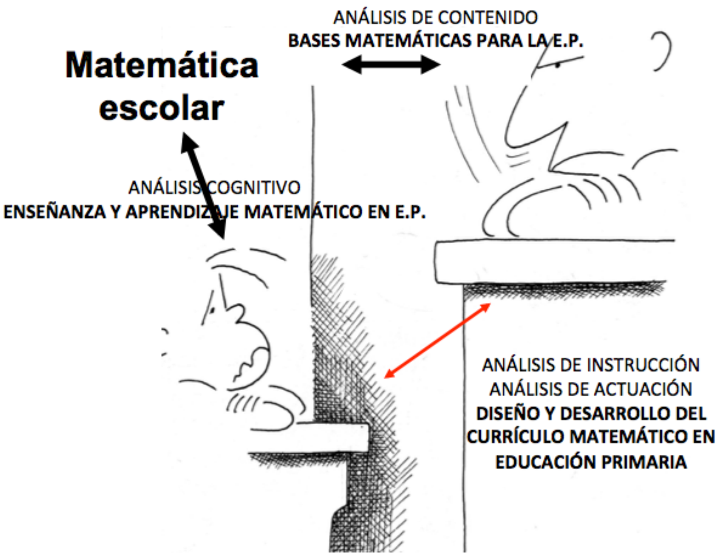


Figura 3. Análisis didáctico en el plan de formación de maestros (Flores, Moreno y del Río, 2016, p. 145)

En el primer curso, en la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, se tratan los contenidos que son impartidos en dicho ciclo educativo. Concretamente, se trata que los futuros profesores den sentido a los conceptos matemáticos. En esta asignatura:

> *El estudio del sentido arranca de considerar el papel instrumental de las matemáticas. El análisis de contenido nos aclara estos términos, tanto en un conocimiento común, como examinando sentidos, formas de representar y estructuras conceptuales (conocimiento especializado). La asignatura Bases Matemáticas trata el conocimiento matemático especializado para que el futuro maestro comprenda y de significado a los conocimientos matemáticos que va a enseñar.* (Flores et al., 2016, p. 146).

En el segundo curso, en la asignatura Enseñanza y Aprendizaje Matemático en Educación Primaria, se trata el conocimiento profesional del profesor sobre las matemáticas y sus alumnos (Flores et al., 2016). Concretamente, los futuros profesores deben "examinar qué objetivos de enseñanza pueden pretender en el curso o ciclo adecuado, qué limitaciones (dificultades y errores), son más frecuentes para los alumnos" (Flores et al., 2016, p. 147).

En el tercer curso, en la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria, se trata de "apreciar las cualidades educativas que tienen los recursos didácticos, así como la forma de llevar a cabo una enseñanza constructivista" (Flores et al., 2016, p. 148).

De forma electiva, en el cuarto curso, en Competencias Matemáticas en la Educación Primaria, se trata de un análisis crítico del enfoque por competencias. Particularmente, se pone énfasis en la resolución de problemas como una forma de desarrollar competencia. Concretamente se persiguen los siguientes objetivos:

- Caracterizar y ejemplificar el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas y su vínculo con la competencia matemática.
- Desarrollar y aplicar estrategias y heurísticos para la resolución de problemas de matemáticas.
- Dominar y aplicar criterios para inventar problemas de matemáticas dirigidos a Educación primaria.
- Conocer y analizar estrategias docentes apropiadas para la enseñanza de la resolución y la invención de problemas en el aula de matemáticas.

No obstante, como señalan Flores et al. (2016) el programa de formación está centrado en los contenidos. Esto puede interpretarse como una posible omisión al significado y los conocimientos que exige enseñar a resolver problemas. Por otra parte, solo un pequeño grupo está teniendo una formación explícita sobre resolución de problemas que necesita ser investigada.

PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La revisión de las investigaciones realizadas sobre el tema (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2018) ha hecho ver que, si bien se ha reflexionado bastante sobre la resolución de problemas, especialmente desde la perspectiva del resolutor, no se ha resaltado tanto su enseñanza, y menos aún se ha profundizado en esta noción desde el punto de vista del conocimiento del profesor. Así mismo, los modelos teóricos en los que se fundamenta la formación inicial del profesor, como el surgido del análisis didáctico, organizan la formación inicial en torno a unidades temáticas. Esta constatación nos llevó a plantearnos si era necesario realizar una reflexión sobre la situación en la que están la resolución de problemas tanto en las propuestas curriculares como en los modelos del conocimiento del profesor. Nuestra intención es dar un toque de atención a la escasa presencia explícita en los modelos de conocimiento del profesor, estando en ellos relegados a un segundo plano o al completo olvido. Al mismo tiempo, surge la pregunta de si con las propuestas teóricas de formación, como es el caso del Análisis Didáctico, estaremos formando futuros profesores con conocimientos y destrezas profesionales acerca de la resolución de problemas. Específicamente, abordamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué conocimientos profesionales sobre resolución de problemas de matemáticas se exige en los currículos a los profesores de educación primaria para su enseñanza?
- ¿Qué conocimientos profesionales sobre resolución de problemas de matemáticas manifiestan los profesores de primaria al terminar su formación inicial?

Para dar respuesta a estas preguntas de investigación, nos hemos planteado los siguientes objetivos generales:

- OG1. Identificar categorías de conocimiento profesional de profesores de primaria sobre resolución de problemas de matemáticas.

Posteriormente a esta identificación, se procederá a

- OG2. Identificar y caracterizar el conocimiento profesional de profesores de primaria al terminar su formación inicial sobre resolución de problemas en matemáticas.

Estos objetivos se concretizan en cinco objetivos específicos. Para el primer objetivo general, nos hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

- OE 1. Determinar el conocimiento profesional sobre la resolución de problemas de matemáticas en normativas curriculares de educación primaria.
- OE 2. Organizar el conocimiento profesional sobre resolución de problemas de matemáticas utilizando el marco de Chapman (2015).

Entendiendo que estos objetivos originan un sistema de categorías, para el segundo objetivo general, nos hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

- OE 3. Caracterizar el conocimiento sobre el procesos de resolución de problemas de matemáticas en profesores de primaria al terminar su formación inicial.
- OE 4. Caracterizar el conocimiento didáctico sobre resolución de problemas en matemáticas en profesores de primaria al terminar su formación inicial.
- OE 5. Profundizar en el conocimiento profesional sobre el proceso de resolución de problemas de matemáticas manifestados por un grupo de profesores de educación primaria al terminar su formación inicial.

La consecución de estos objetivos se ha realizado a través de un Diseño Exploratorio Secuencial, en el que se han definido tres fases. La figura 4 muestra la relación entre los objetivos y los procesos de recogida de datos, identificando la fase de realización.

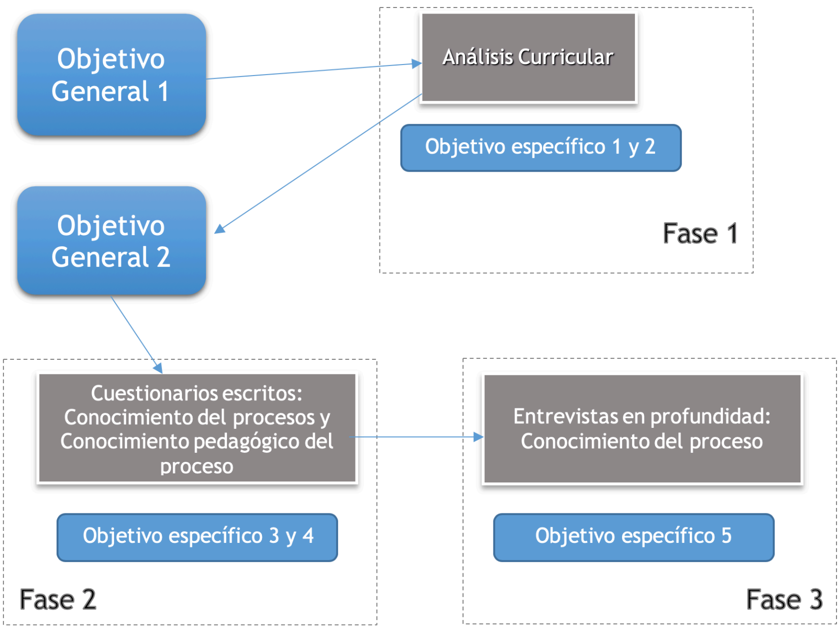


Figura 4. Relación entre objetivos y recogida de los datos

CAPÍTULO 2
MARCO REFERENCIAL

En este capítulo, describimos distintas interpretaciones del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y de la resolución de problemas con el fin de presentar nuestro marco de referencia. En primer lugar, nos centramos en la noción de la resolución de problemas, diferenciando entre problema y resolución de problemas, para terminar con algunas ideas sobre su enseñanza. Además presentamos una revisión sobre investigaciones que indagan en el conocimiento del profesor sobre estos tópicos. Posteriormente, presentamos las perspectivas teóricas sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, reflexionando cómo los modelos teóricos incorporan el conocimiento de la resolución de problemas.

Resolución de problemas

Organizar el conocimiento sobre resolución de problemas generado por la investigación es un tema complejo (Castro, 2002, 2008). Los conocimientos relativos a la resolución de problemas en educación primaria son vastos y de distinta índole (ver Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015). No es objeto de este capítulo detallar en profundidad el significado de cada uno de los componentes de esta línea de investigación, sino hacer explícito cómo entendemos la resolución de problemas en las matemáticas escolares. No obstante, es necesario establecer que la resolución de problemas tiene presencia en diferentes áreas y en cada una de ellas toma un significado diferente, con sus matices propios (Castro, 2008). Estas diferentes perspectivas o focos han provocado que su sistematización sea compleja. Schoenfeld (1992) y más tarde Lesh y Zawojewski (2007) critican que la diversidad de perspectivas hace difícil establecer marcos teóricos sólidos que puedan facilitar la interpretación de la vasta investigación que utiliza la resolución de problemas. Es común encontrarse con estudios que utilizan la resolución de problemas como un medio para investigar y otros, dónde el foco es la propia resolución de problemas (English y Gainsburg, 2016; Weber y Leikin, 2016). Este panorama hace necesario posicionarse y explicitar qué se entiende por problema y por resolución de problemas.

Puig (1996) señala que:

> *Los problemas de matemáticas aparecen en los sistemas educativos al menos en tres escenarios: global —la organización general del currículo de matemáticas—, local —las clases de problemas que se estudian— y puntual —la situación de enseñanza concreta en que el problema se plantea.* (p. 17)

Además, Castro (2008) hace notar que al mismo tiempo:

> *Desde el punto de vista escolar en el que estamos interesados hay que tener en cuenta que en toda situación de resolución de los problemas de matemáticas se distinguen o intervienen tres componentes (Kilpatrick, 1978): el problema, interrogante o cuestión que se plantea, el alumno (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la situación en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el profesor.* (p. 115)

Ubicamos este trabajo entonces en un nivel global y local, donde el componente central es el profesor. No obstante, el problema y a quién se le plantea tales problemas son elementos fundantes y no pueden ser separados (Puig, 1996). Esto se traduce en que en este trabajo nos centremos en los problemas matemáticos escolares, es decir, problemas que puedan encontrarse en las matemáticas de educación primaria.

La resolución de problemas suele relacionarse con lo que se puede hacer con los conceptos que se conocen. Para lograr un entendimiento sobre qué es la resolución de problemas, en este trabajo, recurrimos a la competencia matemática. Esta noción es entendida como un constructo que permite encapsular lo que se espera que aprendan los estudiantes para desenvolverse como ciudadanos en la sociedad actual (Abrantes, 2001; Rico, 2007), y en este sentido se acerca a ese *hacer* que se señalaba anteriormente. Abrantes (2001) hace notar que la competencia matemática se relaciona con el proceso de activar recursos (conocimientos, habilidades y estrategias) en una variedad de contextos (problemas). De un modo bastante similar, Rico (2007) plantea que, si bien este constructo puede tomar diferentes significados, cuándo nos referimos a un dominio se configura en torno a tres componentes: unas tareas contextualizadas (problemas en contextos personales, escolares, profesionales y sociales), unas herramientas conceptuales y un sujeto. Es este último, el que al realizar dichas tareas, moviliza herramientas conceptuales manifestando competencia matemática.

Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) por su parte, señalan que esta noción está compuesta por cinco dimensiones entrelazadas e interconectadas (comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y una disposición productiva). Cada una de las dimensiones potencia a otra(s) y en su conjunto promueven un desarrollo de la competencia matemática. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es un constructo complejo de describir pues forma parte integral de cada una de las caracterizaciones. Además, las diversas descripciones de esta noción han evolucionado, desde un proceso hasta configurarse como una competencia por sí misma.

Recientemente, y debido a que los actuales currículos escolares han sido desarrollados bajo un enfoque funcional de las matemáticas, ha emergido la necesidad de caracterizar la resolución de problemas como una competencia. La OECD (2013) la define como:

> *... la capacidad de un individuo para involucrarse en el procesamiento cognitivo para comprender y resolver situaciones problemáticas donde un método de solución no es inmediatamente obvio. Incluye la voluntad de involucrarse en tales situaciones para alcanzar el potencial de la persona como ciudadano constructivo y reflexivo.* (p. 30)

Chapman (2015), partiendo de las caracterizaciones realizadas, referidas a resolver problemas (e.g. Mayer y Wittrock, 2006; Schoenfeld, 1985, 1992) y sobre competencia matemática (Kilpatrick et al., 2001), define competencia para resolver problemas como lo necesario para aprender y hacer genuinamente resolución de problemas. Además, señala que no es una noción unidimensional, sino que es una relación entre componentes. Según Chapman (2015):

> *En esta relación, la comprensión conceptual y la fluidez de los procedimientos representan el tipo de conocimiento y habilidades que son recursos necesarios para una RP (resolución de problemas) efectiva; la competencia estratégica implica la capacidad de formular, representar y resolver problemas matemáticos; la disposición productiva incluye creencias; y el razonamiento adaptativo incluye la capacidad de pensamiento lógico y reflexión.* (p. 21)

En las caracterizaciones revisadas, es importante destacar dos aspectos. Primero, la competencia presenta una naturaleza dual, que une en la acción lo que se entiende sobre un tema y lo que se puede hacer con ese conocimiento. Además, esta acción se realiza en un contexto determinado, por lo que este también forma parte de la caracterización de esta competencia (Niss, 2003). Por tanto, entenderemos la resolución de problemas como la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como problemática, procede a su resolución a través de una serie de fases no necesariamente lineales usando una estrategia, y se involucra, con una disposición positiva, en el desafío de resolverla.

Problema

Desde el florecimiento de la investigación sobre resolución de problemas, el término *problema* ha mostrado ser conflictivo por los distintos significados que toma según la perspectiva en que estudie (Hitt, Saboya y Cortés, 2017; Kilpatrick, 1980), incluso dentro de un mismo campo (Borasi, 1986; Contreras, 1998).

Schoenfeld (1985) describe el proceso de resolución de la siguiente manera:

> *Supongamos que un individuo o un pequeño grupo de personas trabajan en voz alta sobre un problema matemático de dificultad moderada. El resolutor de problemas no tiene fácil acceso a un procedimiento para resolver el problema (un estado de cosas que haría de la tarea un ejercicio más que un problema), pero tiene la experiencia adecuada para avanzar en ella; por lo tanto, podría ser factible llegar a una solución y trabajar activamente en ello.* (p. 11)

En esta descripción emerge una posible caracterización de problema que se realiza en base a la relación que existe entre problema y resolutor. En esta relación se pone como condición que el resolutor no tiene un procedimiento inmediato, pero posee un conocimiento matemático para articular un procedimiento de solución. Santos-Trigo (2007) lo explica señalando que:

> *La dificultad de definir el término problema está ligada con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando éste intenta resolver "un problema". Es decir, mientras que para algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo intentar resolver un problema, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario. Así, el hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea.* (p. 48)

En este sentido, Carrillo (1998) hace notar que en esta relación entre resolutor y problema, se debe tener en cuenta otros aspectos. Entre ellos encontramos los relativos a la identificación de la tarea como problemática y la dificultad que debe presentar la tarea al resolutor. Este autor señala que:

> *El concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento* (p .87)

Fernández-Bravo (2010) concuerda en esta descripción de problema, explicitando que:

> *Lo importante es la relación alumno-problema y no el problema en sí. Un problema es problema para el alumno cuando es así aceptado por éste. Un problema es intransferible y la situación problemática como tal la da el sujeto. Lo que para un niño de seis años es problema no lo es para un niño de doce … El problema surge a partir de la situación problemática*

y, a diferencia de ésta, se caracteriza porque el sujeto tiene consciencia de los buscado. (pp. 31-32)

Kilpatrick (1987), mantiene el acuerdo con las caracterizaciones anteriores y agrega que el contexto escolar tiene la especial característica de pre-etiquetar una tarea como problema. Idea sobre la cuál Puig (1996) reflexiona al señalar que:

> *El problema se presenta en una situación escolar y que, por tanto, es el profesor quién se lo plantea al alumno, que no es un mero resolutor, y éste ha de darle al profesor la solución o resultado. Consideraremos que un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido.* (pp. 30-31)

En retrospectiva, para que exista un problema debería haber una consciencia de que se está frente a una tarea que es problemática, una indeseabilidad o incomodidad que nos hace querer superar el problema, la dificultad de no tener un procedimiento inmediato y directo a la solución, pero sí la conciencia de que existe un camino posible (Agre, 1982). Además, no se debe olvidar que el profesor debe realizar una prelectura de la tarea en función de sus estudiantes como resolutores.

Por otra parte, Borasi (1986) realiza una descripción en términos de sus elementos estructurales, es decir, su formulación, su contexto, el conjunto de soluciones aceptables que presenta y los métodos por los que puede ser abordado. No obstante, todos estos elementos son dependientes del resolutor (Mason, 2016).

Junto a esta conceptualización de problema, es importante destacar la diferenciación/caracterización que plantea Borasi (1986). Desde su perspectiva, se puede inferir la existencia de diferentes tareas que pueden ser llamadas problemas. Existen numerosas clasificaciones en las que no existe un acuerdo completo (ver Abrantes, 1989; Borasi, 1986; Butts, 1980; Carrillo, 1998; Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; Charles y Lester, 1982; Díaz y Poblete, 2001; Foong, 2013; Frederiksen, 1984; Pehkonen, 1997). Sin embargo, podemos encontrar dicotomías en las que los investigadores sí concuerdan: ejercicios y problemas, rutinarios y no rutinarios o abiertos y cerrados. En este trabajo asumimos la perspectiva de clasificación propuesta por Holmes (1985), pero que Zhu y Fan (2006) también han identificado como dicotomías de tipos de problemas en un estudio más reciente. Esta clasificación presenta cuatro categorías que dan origen a seis tipos de problemas diferentes (aplicados/no aplicados y rutinarios/no rutinarios), esto es debido a que los problemas no rutinarios presentan la característica de poder ser cerrados o abiertos, no así los rutinarios que siempre se presentan como cerrados. La tabla 1 ejemplifica estos problemas.

Tabla 4. *Clasificación de problemas*

	Rutinario	No rutinario
Aplicado	Las pelotas de ping-pong vienen en paquetes de 3 unidades. Una caja trae 24 paquetes. El sr. López, dueño de una tienda deportiva, ordenó 1.800 pelotas de ping-pong ¿Cuántas cajas ordenó el sr. López?	*Cerrado:* Un granjero estaba contando sus patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total ¿Cuántos patos y ovejas tiene? *Abierto:* ¿Cuántas chuches comen tus compañeros de clase en una semana?
No aplicado	(34 * 3) + 45	*Cerrado:* Usando 6 fósforos, forme cuatro triángulos equiláteros geométricamente iguales. *Abierto:* Los tetrominoes son formas geométricas construidas con cuatro cuadrados unidos por alguno de sus lados. Construye el mayor número de formas distintas posibles utilizando 5 tetrominoes.

El proceso de resolver problemas

El proceso de resolución de problemas puede ser descrito bajo el marco propuesto por Schoenfeld (1985, 2013). En él se puede distinguir cuatro aspectos, aunque en este trabajo nos centramos en los tres últimos: heurísticos y estrategias, metacognición y aspectos no cognitivos. Concretamente, estos son

- ♦ El conocimiento del individuo;
- ♦ El uso de estrategias de resolución de problemas por parte del individuo, conocidas como estrategias heurísticas;
- ♦ El monitoreo y la autorregulación del individuo (un aspecto de la metacognición); y
- ♦ Los sistemas de creencias del individuo (sobre sí mismo, sobre las matemáticas, sobre la resolución de problemas) y sus orígenes en las experiencias matemáticas de los estudiantes.

El segundo aspecto señalado por Schoenfeld (1985, 2013) es el referido a los heurísticos y estrategias. Respecto a las heurísticos, podrían describirse como estrategias usadas para avanzar a la solución de un problema (Foong, 2013). Pólya (1981) es uno de los pioneros en establecer esta idea, que Castro (1991) denomina dirección. Esta noción se enmarca en los aportes de la Teoría de Gestalt e intenta determinar unas fases que seguiría un sujeto para encontrar la solución a un problema. Dichas fases se usaron y se usan para enseñar a resolver problemas.

Polya (1981) planteó una serie de fases desde el punto de vista del comportamiento del resolutor ideal, las fases propuestas por este autor son: (1) la comprensión del problema a través del análisis del enunciado, (2) descubrir las relaciones entre dato e incognita que permite obtener un diseño del plan para alcanzar la solución, (3) llevar a cabo el plan o ejecución de este, y (4) visión retrospectiva del proceso. Otra perspectiva para mirar las fases, mucho más instruccional, sería las de Mason, Burton y Stacey (2010). Estos autores describen el proceso de resolución de problemas haciendo hincapié en los afectos. Esta descripción hace referencia a procesos (particularizar/generalizar, conjeturar, demostrar), fases (abordaje, ataque, revisión) y estados (¡Ajá!, atascado). Otra descripción de fases fue la realizada por Brandford y Stein (1986). Estos autores plantean el llamado método I.D.E.A.L., siguen el modelo desarrollado por Pólya, pero subdividen algunos pasos en otros. Cada una de las letras de su nombre (es una sigla) corresponde a una fase de resolución. En este modelo encontramos:

I: Identificación del problema

D: Definición y representación del problema

E: Escoger una estrategía de solución y elaborar un plan

A: Actuar según el plan

L: Logros. Evaluar lo realizado.

Si bien estos son solo tres ejemplos, que podrían denominarse como clásicos, existen investigaciones que han sugerido variantes que con mayor o menor grado de descripción y desde perspectivas diversas, plantean ideas similares (e.g. Codina, Cañadas y Castro, 2015). No obstante, en las diferencias entre las fases que proponen diferentes autores, un factor común que podemos observar es su configuración como proceso cognitivo, personal y no observable directamente, sino que a través de manifestaciones de sus fases (Mayer y Wittrock, 2006). En esta misma línea cabe destacar la no linealidad de este proceso, pues como exponen Wilson, Fernández y Hadaway (1993), esta actividad es flexible y permite avances y retrocesos.

Respecto a las estrategias que frecuentemente se enseñan en la escuela primaria (Fülöp, 2015; Pólya, 1981; Posamentier y Krulik, 2009; Stacey y Groves, 1999); en ellas Schoenfeld (1985, 2013) distingue dos tipos diferentes de toma de decisiones, el qué hacer y el cómo hacer. El primero de estos tipos, incluyen la selección de objetivos y la decisión de seguir cursos de acción según el contexto dónde estos surjan. El segundo, referido a las decisiones sobre cómo implementar las decisiones del primer tipo. En su conjunto, forman lo que se entiende por estrategia. Uno de los aspectos críticos de estas estrategias es su carácter general, su independencia de cualquier concepto o tema en particular (Fülöp, 2015).

Un tercer elemento en este proceso tiene relación con la metacognición. Schoenfeld (1992) expande la perspectiva de investigación y en su modelo mostró la importancia que tienen la metacognición y los afectos. La metacognición es descrita como la forma en que el resolutor se auto-regula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos matemáticos para resolver un problema, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace. En este sentido, el uso consiente que se haga de una estrategia y el conocimiento determinará en parte el éxito que se pueda obtener con ella. Además, la posibilidad de mirar a tras potenciará este proceso y permitirá decidir si la toma de decisión inicial fue fructífera.

Finalmente, los factores no cognitivos juegan un papel esencial, pues determinarán la forma en que el resolutor afronte los problemas. Schoenfeld (2013) ilustra claramente esto al señalar que "los estudiantes cuya experiencia matemática total consistió en ejercicios prácticos que podrían resolverse en unos pocos minutos llegaron a creer que *todos los problemas se pueden resolver en cinco minutos o menos*, y dejaron de trabajar en problemas que podrían haber podido resolver sí hubiesen perseverado" (p. 12). Así, existe acuerdo en la literatura al establecer que, según la adecuación del desafío propuesto a los estudiantes, estos pondrán en movimiento sus emociones, que luego movilizarán su intelecto (Mason, 2016). Es decir, todo este proceso está mediado por las emociones que puedan emerger, las actitudes que provoquen y las creencias que se sostengan durante la resolución de un problema. En este punto, es importante recalcar que esta separación que hacemos es únicamente con motivos teóricos. Según Agre (1992), es importante distinguir esto, pues el desconocimiento de un procedimiento para llegar a la solución, es lo que generalmente involucra a los estudiantes en el proceso.

Enseñanza de la resolución de problemas

Como ya hemos establecido en el primer capítulo, la investigación sobre la enseñanza de la resolución de problema ha dado un giro desde la investigación cuantitativa que intentaba buscar las mejores técnicas para enseñar a resolver problemas y en donde el profesor no era considerado como un foco, a una investigación de corte cualitativo que intenta comprender los fenómenos que ocurren cuándo se enseña a resolver problemas. Un ejemplo de esto es el proyecto desarrollado en Canadá por Liljedahl (2016) llamado *Thinking classrooms*. Este esfuerzo ha hecho posible identificar ciertas condiciones para que ocurra la resolución de problemas genuina en una sala de clases. Este autor señala que de la investigación, independientemente o en conjunto con otros, surgió un conjunto de prácticas de enseñanza que son propicias para la construcción o el mantenimiento de un aula en la que la resolución de problemas es el centro. En lo que sigue brevemente, estas son:

- ♦ *El tipo de tareas utilizadas y cuándo y cómo se utilizan*. Las lecciones deben comenzar con buenas tareas de resolución de problemas. En las primeras etapas de la construcción de un *aula para pensar*, estas tareas deben ser muy atractivas y colaborativas, lo que lleva a los estudiantes a querer hablar entre ellos cuando intentan resolverlas. Una vez que esto está asentado, los problemas deben impregnar la totalidad de la lección y hacer surgir matemáticas ricas que puedan vincularse con el contenido del currículo escolar.
- ♦ *La forma en que se asignan las tareas a los alumnos*. Las tareas deben darse oralmente. Si se necesitan datos o diagramas, estos pueden proporcionarse en papel, pero las instrucciones relativas a la actividad de la tarea deben

darse oralmente. Esto conduce rápidamente a los grupos a discutir lo que se está preguntando en lugar de intentar descifrar instrucciones en un folio.

- *¿Cómo se forman los grupos, tanto en general como cuando los alumnos trabajan en tareas?* Las agrupaciones deben ser frecuentes y visiblemente aleatorias. Idealmente, al comienzo de cada clase, se utiliza un método visiblemente aleatorio para asignar a los estudiantes a un grupo de 2 a 4 durante la duración de esa clase. Estos grupos trabajarán juntos en cualquier tarea de resolución de problemas asignada, se sentarán juntos o se pararán juntos durante cualquier discusión grupal o de toda la clase.
- *Espacio de trabajo del alumno mientras trabajan en las tareas*. Los grupos de estudiantes deben trabajar en superficies verticales no permanentes, como pizarras o ventanas. Esto hará visible todo el trabajo que se está realizando, no solo para el profesor sino también para los otros grupos. Esto facilita la discusión. Además, es preferible que solo halla un rotulador o trozo de tiza por grupo.
- *Organización de la sala, tanto en general como cuando los alumnos trabajan en tareas*. El aula debe ser reorganizada. El profesor debe dejar de dar la espalda, provocando que la pizarra deje de ser el espacio de enseñanza designado hacia uno que este orientado a todos los escritorios. El maestro debe dirigirse a la clase desde una variedad de ubicaciones dentro de la sala y, en la medida de lo posible, usar las cuatro paredes del aula. Es mejor si los escritorios se colocan en una configuración aleatoria alrededor de la sala.
- *¿Cómo se responden las preguntas cuando los estudiantes están trabajando en tareas?* Los estudiantes solo hacen tres tipos de preguntas: (1) preguntas de proximidad: cuando el maestro está cerca; (2) preguntas para dejar de pensar, la mayoría de las veces de la forma "¿es esto correcto?"; y (3) preguntas para seguir pensando, preguntas que hacen los alumnos para continuar con su trabajo. Solo el tercer tipo debe ser respondido. Los primeros dos tipos deben ser reconocidos pero no contestados.
- *Las formas en que se utilizan las sugerencias y las extensiones mientras los alumnos trabajan en las tareas*. Una vez que se establece una sala donde se

realice resolución de problemas, necesita ser alimentada. Esto se hace principalmente a través de cómo se dan sugerencias y extensiones a los grupos a medida que trabajan en las tareas. Se deben dar sugerencias y extensiones para mantener a los estudiantes en un equilibrio perfecto entre el desafío de la tarea actual y sus habilidades para trabajar en ello. Si su competencia es demasiado alta, el riesgo es que se aburran. Si el desafío es demasiado grande, el riesgo es que se frustren.

- *¿Cuándo y cómo un maestro nivela su clase durante o después de las tareas?* Las necesidades de nivelación deben hacerse en la parte inferior. Cuando cada grupo ha superado un umbral mínimo, el maestro debe participar en una discusión sobre la experiencia y la comprensión que comparte toda la clase. Esto debe implicar una *reificación* y formalización del trabajo realizado por los grupos y, a menudo, constituye el mensaje central para esa clase en particular.
- *Evaluación, tanto en general como cuando los alumnos trabajan en tareas*. La evaluación debe ser principalmente sobre la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Esto es a través de los esfuerzos para comunicarse con ellos, dónde están y hacia dónde se dirigen en su aprendizaje. Debe hacerse a través de un enfoque en los procesos de aprendizaje, más que en los productos y debe incluir tanto el trabajo en grupo como el trabajo individual.

Este ejemplo muestra cómo la investigación ha entregado implicaciones prácticas para la sala de clases. No obstante, estás ideas no están directamente relacionadas con las matemáticas escolares. Con esta misma idea en mente, pero enfocados en un aspecto de las matemáticas escolares, Lester y Cai (2016) identifican seis elementos que la investigación ha mostrado con respecto a la enseñanza de la resolución de problemas.

Lester y Cai (2016) señalan que un primer elemento tiene relación con que la evidencia existente de que la enseñanza de conceptos antes de la resolución de problemas no ha mostrado tener efectos positivos en los aprendizajes. La evidencia, por el contrario, sugiere que la resolución de problemas debe entenderse como una red de dimensiones interconectadas. Esta idea promueve que la resolución de problemas se utilice integradamente dentro de la sala. Es decir un enfoque o vía de acceso *a través* de la resolución de problemas (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; Schroeder y Lester, 1989). Este enfoque ha mostrado beneficios no porque los estudiantes aprendan sobre estrategias o heurísticos, sino por que fomenta una comprensión profunda de las matemáticas al tener que usar sus conocimientos para enfrentar un desafío, en donde las respuestas son divergentes y se comparten en una clase que valora el trabajo de todos. Es decir, la enseñanza de la resolución de problemas debe realizarse de forma imbricada con los contenidos escolares de matemáticas.

Otro aspecto que la investigación ha mostrado tiene relación con el tiempo de dedicación (Lester y Cai, 2016). Enseñar a través de la resolución de problemas requiere tiempo. Esto implica que los profesores deben ser sistemáticos en su enfoque y que los alumnos deben entender que el desafío es parte de aprender matemáticas. La meta de convertir a los estudiantes en resolutores exitosos debe ser una meta de cada nivel, cada contenido matemático escolar y cada clase. En ellas, se requiere exposición a diferentes problemas y diferentes formas de resolver.

Así mismo, es necesario que los estudiantes sean expuestos a tareas realmente problemáticas (Lester y Cai, 2016). En este sentido, la investigación ha mostrado diferentes características que poseerían las tareas más apropiadas (Stein y Smith, 1998) y específicamente los problemas (Foong, 2013; Lappan y Phillips, 1998; Lesh, English, Riggs y Sevis, 2013; Nelson y Kirkpatrick, 1975; Ramírez-Uclés, Castro-Rodríguez, Piñeiro y Ruiz-Hidalgo, 2018; Van de Walle, 2003). En todas ellas, el rol del profesor es clave, pues de él dependerá, tanto la elección como su aprovechamiento.

Lester y Cai (2016) señalan como cuarto elemento que ha mostrado la investigación a la orquestación que se realice en la clase. La investigación ha mostrado que buenas tareas matemáticas no son bien implementadas en el aula. Esto debido a que además de una buena tarea, se necesita un discurso de clase que permita que exista desafío, que se representen ideas, se discuta y se llegue a acuerdos. Esto implica una buena selección de problemas, una buena conducción de la clase, la habilidad de escuchar, de hacer preguntas y dar tiempo para que los estudiantes piensen.

Un quinto aspecto señalado por Lester y Cai (2016) es relativo a la existencia de una creencia de que la matemática es una serie de reglas que se aplican, por lo que es importante la memorización y responder de la forma adecuada. Esto provoca que el pensamiento existente sobre la resolución de problemas y la actuación que debe realizarse en ella sean limitados. Esto se traduce en la creencia que todos los problemas tienen una solución o que se resuelven de una forma. Además, señalan que estas creencias son mutuamente influidas entre los estudiantes y el profesor.

Finalmente, estos autores señalan que en la enseñanza de la resolución de problemas el foco está en la comprensión y no en conocimiento procedimental, sin embargo se aprenderán estos últimos al resolver problemas. Lester y Cai (2016) señalan que los estudios desarrollados para responder a esta pregunta muestran que los alumnos que aprenden matemáticas a través de la resolución de problemas muestran mayor comprensión conceptual y las mismas habilidades procedimentales. Si bien existen algunos estudios que muestran que los estudiantes expuestos a una enseñanza a través de la resolución de problemas pierden comprensión procedimental (Ni, Li, Cai y Hau, 2015), por el contexto de lo que exige la sociedad actual, es aceptable esta pérdida de conocimiento procedimental versus comprensión. Lester y Cai (2016) señalan que hoy no es necesario saber mucho, sino tener un pensamiento de buena calidad.

Enfoques de enseñanza de la resolución de problema

En la revisión realizada por Lester y Cai (2016) y en la investigación de Liljedahl (2016) es posible identificar a la orquestación de las aulas como un elemento esencial. En este sentido, la enseñanza de la resolución de problemas implica cómo planificar y gestionar una clase. Tal como señala Carrillo (2003), el para qué es un elemento central que permite conocer las finalidades de la resolución de problemas y qué se puede propiciar con ella. Un elemento que tiene relación con esto, son los enfoques o vías de acceso (Schroeder y Lester, 1989). Entendemos que estos enfoques de enseñanza de la resolución de problemas se corresponden con modelos que fomentan y propician actuaciones en el aula que promueven el desarrollo de la resolución de problemas. Cada uno de ellos implica conocimientos de sus objetivos y cómo ellos favorecen ciertos aspectos de la resolución de problemas, que en su conjunto proporcionan habilidades involucradas en este proceso.

Stanic y Kilpatrick (1989) muestran tres enfoques que han caracterizado el papel de la resolución de problemas en el currículo escolar de matemáticas. El primero de ellos se refiere a que los problemas son el contexto para aprender matemáticas, pues los problemas: a) justifican de la inclusión de la matemática en el currículo escolar, b) motivan y generan nuevos escenarios para aprender matemáticas, c) dan espacio para divertirse con las matemáticas, d) son un vehículo para aprender y descubrir nuevos conceptos y habilidades matemáticas, y e) son una aplicación de conceptos e ideas matemáticas. El segundo enfoque corresponde a un entendimiento de la resolución de problemas como habilidad, transformándola en un fin y no solo un contexto. Finalmente, el tercer enfoque es relativo al proceso de hacer matemáticas resolviendo problemas, dando significados a las ideas matemáticas de forma similar a la que la realizan los matemáticos.

En estos enfoques se perciben las vías de acceso que puede tomar la enseñanza de la resolución de problemas en las aulas (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015; Schroeder y Lester, 1989). Comúnmente se conocen con el nombre de enseñanza sobre, para y a través de la resolución de problemas. Castro y Ruiz-Hidalgo (2015) plantean que “los dos primeros enfoques [para y sobre] consideran la resolución de problemas como un objetivo de aprendizaje y, en el tercer caso [a través], como vehículo para enseñar o desarrollar otros contenidos” (p. 95).

El enfoque o vía de acceso de la enseñanza de la matemática para la resolución de problemas tiene como meta que los estudiantes sean capaces de aplicar el conocimiento matemático en la resolución de problemas. Schroeder y Lester (1989) señalan que en este enfoque, la principal preocupación del profesor se concentra en enseñar las matemáticas para que puedan ser aplicadas en la solución de problemas rutinarios y no rutinarios. Es decir, su preocupación principal es que sus estudiantes sean capaces de transferir lo que aprenden de un problema a otro. Esto implicaría que el profesor debe secuenciar una serie de tareas que comiencen centrándose en los contenidos y posteriormente tareas en que se transfieran los conocimientos a diferentes contextos (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015). Esto provoca que el objeto sea enseñar un conocimiento matemático para ser utilizado (Masingila y Lester, 1998). Por tanto, los estudiantes son enfrentados a una variedad de instancias donde primero se aprendan conceptos matemáticos que posteriormente serán aplicados en la resolución de problemas. Castro y Ruíz-Hidalgo (2015) agregan que en este enfoque "al escolar se le proporcionan gran diversidad de tareas matemáticas, vinculadas con los contenidos que se estudian, que incluyen diferentes demandas cognitivas y que requieren de su aplicación" (p. 96). No obstante, English, Lesh y Fennewald (2008) hacen notar que este enfoque no involucra a los estudiantes pues su perspectiva está basada en el contenido.

El enfoque o vía de acceso sobre la resolución de problemas tiene como meta instruir sobre el proceso de resolución. Este enfoque se caracteriza por dos aspectos. El primero tiene relación con los modelos de resolución en el sentido de Pólya (1981), pues la preocupación principal del profesor en enseñar este modelo para resolver problemas (comprender, planificar, actuar y revisar) o alguna de sus variantes (Schroeder y Lester, 1989). Los estudiantes son expuestos a una enseñanza explícita de las fases de resolución, promoviendo que sean conscientes del progreso de su proceso de resolución (Masingila y Lester, 1998). Un segundo aspecto tiene relación con estrategias para ser utilizadas en las fases, como la búsqueda de patrones, hacer una tabla, etc. (English et al., 2008). La enseñanza directa, explícita y retroalimentada son parte importante de este enfoque (Schroeder y Lester, 1989). Específicamente, en este enfoque se enfatiza la discusión del proceso de resolución, enseñando sobre cómo resolver el problema (Masingila y Lester, 1998).

Finalmente, el enfoque o vía de acceso de enseñanza a través de la resolución de problemas es usado como método de enseñanza y es una forma de aprender las matemáticas escolares (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015). Específicamente, se pretende que los estudiantes construyan las matemáticas escolares a través de la problematización. Este enfoque ha sido señalado como el más poderoso para aprender matemáticas (English et al., 2008; Lambdin, 2003) e incluso se le ha relacionado con la enseñanza efectiva de las matemáticas y específicamente de la resolución de problemas (Son y Lee, 2016). Schroeder y Lester (1989) indican que en este enfoque los problemas se valoran no solo como un propósito para aprender matemáticas, sino también como un medio principal para hacerlo. La enseñanza de un concepto matemático comienza con un problema que imbrica los aspectos claves del tema y las técnicas matemáticas se desarrollan como respuestas razonables a problemas razonables, transformando así problemas no rutinarios en rutinarios (Masingila y Lester, 1998). Durante el proceso de resolución se reorganizan los conocimientos y surgen nuevos aprendizajes, tanto de conceptos como de procesos; en él, tanto profesores como estudiantes pueden proponer los problemas (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015). En este sentido, Mansingila y Lester (1989) señalan que en este enfoque es necesaria la participación tanto del profesor como del estudiante. El profesor debe guiar y facilitar, hacer preguntas desafiantes y ayudar a los estudiantes a compartir su conocimiento. El estudiante por su parte debe trabajar en grupo, estar dispuesto a aprender activamente y construir aprendizaje significativo. Lambdin (2003) concretiza estas ideas en lo que llama un principio de este enfoque: los estudiantes se enfrentan a problemas que los fuerzan a conectar lo que saben con lo necesario para resolver un problema. Así mismo, es importante que el profesor prevea las representaciones que puedan emerger cuando los estudiantes resuelven y de qué manera se les guiará en el caso de aparecer dificultades (Curcio y Artzt, 2003). Este enfoque es complejo pues en su aplicación interfieren un gran número de factores, algunos referidos a las matemáticas, otros a los procesos, pero principalmente a las creencias que sostengan los profesores sobre cómo se debe aprender matemáticas. Los factores no cognitivos son fundamentales para articular este enfoque y dar espacio a que los conocimientos adquiridos se manifiesten en actividades que permitan a los estudiantes explorar, discutir y argumentar su trabajo.

Schroeder y Lester (1989) hacen hincapié en que resulta contraproducente señalar uno mejor que otro. No obstante, es importante tener en cuenta las limitaciones de la enseñanza para y sobre la resolución de problemas, pues un entendimiento ingenuo hace que este proceso sea tratado de forma independiente de los conceptos matemáticos (English et al., 2008; Schroeder y Lester, 1989).

En cada uno de ellos, tanto profesor como estudiante realizan acciones en las que se pueden identificar características de cada uno de los enfoques. La tabla 1 muestra una serie de descriptores que surgen de la revisión previa (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; English et al., 2008; Masingila y Lester, 1998; Schroeder y Lester, 1989; Stanic y Kilpatrick, 1989), contrastada con los descriptores de Alwarsh (2015) para los tres enfoques de enseñanza y la profundización de Bostic (2011) y Donaldson (2011) en lo referido al enfoque para la enseñanza a través de la resolución de problemas.

Tabla 5. *Caracterización de los enfoques de enseñanza de la resolución de problemas*

Enfoque	Características
Enseñanza sobre la resolución de problemas	a. Foco en los heurísticos: Enseñanza de las cuatro fases de Pólya en forma separada de los contenidos matemáticos.
	b. Enseñanza fomenta el uso de estrategias como hacer un dibujo o buscar un patrón.
Enseñanza para la resolución de problemas	a. Enseñanza guiada durante el proceso de resolver problemas
	b. Ejemplificación de cómo resolver los problemas
	c. Feedback inmediato al cometer errores
	d. Enseñanza de conceptos matemáticos previo a resolver problemas
Enseñanza a través la resolución de problemas	a. Su punto de partida es un problema
	b. Se promueven estrategias propias
	c. Se promueve la exploración de los problemas
	d. Se construye el conocimiento matemático mediante la resolución del problema
	e. Foco en el discurso y el razonamiento matemático

Planificación de la enseñanza de la resolución de problema

En términos generales, los enfoques aportan luz sobre cómo se realizaría una clase de resolución de problemas. Sin embargo, la confluencia de los enfoques en una planificación permite una concretización de estos.

La naturaleza compleja de la enseñanza de la resolución de problemas hace que no existan guías directivas inequívocas (Lester y Cai, 2016). En este sentido, Camacho y Santos-Trigo (2004) resaltan la importancia de una preparación, pues de la selección que se haga de los problemas, dependerán las acciones que lleven a cabo los estudiantes.

Lester (2013) rememora un esquema que presentan las clases que resultaban más exitosas para formar buenos resolutores. Estas presentarían un inicio, un desarrollo y un final muy ligado al proceso de resolución. Reafirmando esta idea, Curcio y Artzt (2003), paralelizan la estructura propuesta por Charles y Lester (1982) con el proceso mismo de resolver un problema, mostrando la potencialidad de utilizar un inicio de clase relacionado con el proceso de comprensión y planeación, un desarrollo de la clase como la ejecución del plan y finalmente un cierre, en el sentido de la evaluación del proceso. Estos autores señalan que en una clase de resolución de problemas se distinguen tres momentos: antes, durante y después. Foong (2013) resumen estos momentos diciendo que en:

> *El primer periodo, el ANTES, se refiere al momento en que todos los alumnos en la clase como un grupo único discuten sobre el problema que deben resolver. Esto sería la fase de presentación del problema. El periodo DURANTE corresponde a la fase en la cual se busca una solución y se refiere al momento en que los alumnos trabajan en grupos o de manera individual por encontrar una solución. El periodo DESPUÉS es la fase de debate cuando los alumnos se vuelven a conformar un grupo único para conversar acerca de las soluciones que se dieron al problema. Cuando ya comienza a terminar el periodo en que los alumnos trabajan para solucionar un problema, al menos dos alumnos deberían presentar su solución en la pizarra y explicar las diferentes estrategias que utilizaron para encontrar una solución.* (p. 88)

Cada uno de estos momentos presenta algunas acciones y propósitos específicos que el profesor debiese tener en cuenta (Charles y Lester, 1982).

No obstante, existen otras aproximaciones a la enseñanza de la resolución de problemas. Askew (2016) señala que una aproximación que puede resultar beneficiosa para los estudiantes consiste en comenzar la resolución de un problema y continuarla al día siguiente. En este enfoque, la incubación del problema (que permite mayor dialogo entre el estudiante y el profesor, y el estudiante y su familia) y el tiempo de reflexión son elementos fundamentales.

En la misma línea, Edwars-Leis y Robinson (2018) diferencian dos enfoques de enseñanza que conceptualizan como complementarios: *bolt-on* y *built-in*. El primero se caracteriza por: (1) la planificación de actividades extensas en el tiempo, que pueden durar más allá de una sola clase, (2) énfasis en la aplicación de contenidos matemáticos para desarrollar procesos matemáticos, y (3) las oportunidades de aprendizajes están dadas por la evaluación y refinamiento de los procesos de resolución e investigación de los problemas a través de la selección y aplicación de los conceptos y el entendimiento que se tenga de ellos. El segundo enfoque, built-in, se caracteriza por: (1) actividades cortas que pueden ser usadas como extensión de actividades finales de la planificación, (2) énfasis en la participación de un proceso matemático para aplicar contenidos matemáticos, y (3) las oportunidades aprendizaje están dadas por el desarrollo conceptual y las relaciones descubiertas a través de proceso de resolución e investigación de problemas.

Estas autoras concretizan estos enfoques en tres procesos que guiarían la resolución. Estos procesos están pensados desde la perspectiva del profesor que debe proveer situaciones de aprendizaje. El primero de ellos trata de *habilitar* a los estudiantes para "aclarar y comunicar los criterios, límites y restricciones particulares que deben entenderse y ajustarse dentro del problema" (Edwars-Leis y Robinson, 2015, p. 51). Una vez logrado, los profesores deben *comprometer* a los estudiantes y "ayudarles a tomar decisiones cada vez más informadas sobre sus elecciones de una variedad de estrategias y usarlas con mayor eficiencia" (Edwars-Leis y Robinson, 2015, p. 52). Finalmente, el profesor debería fomentar la *evaluación* y "desafiar a los alumnos a argumentar lo apropiado de su enfoque y la calidad de este" (Edwars-Leis y Robinson, 2015, p. 52).

Como puede verse en esta sucinta reflexión, emergen un gran cúmulo de elementos respecto a la enseñanza de la resolución de problemas. Nuestra intensión no es agotar la discusión, sino delimitar un marco para su realización. No obstante, nos parece que esta sistematización pone de manifiesto la complejidad de describir el conocimiento del profesor desde esta perspectiva, evidenciando que los modelos de conocimiento han omitido algunos aspectos que pueden resultar dificultosos de analizar.

La investigación sobre el profesor de primaria y la resolución de problemas

En este apartado reportamos investigaciones que se han preocupado de aspectos específicos de la enseñanza de la resolución de problemas en la que intervengan profesores de educación primaria. Hemos detectado cuatro patrones en las investigaciones revisadas sobre enseñanza y el profesor de primaria en formación o en activo. El primero de ellos relativo a las concepciones sobre la enseñanza de la resolución de problemas. El segundo se corresponde con la exploración sobre qué hacen los docentes para enseñar a resolver problemas, es decir, sus prácticas pedagógicas. Dentro de este tema, aparecen cuatro grupos de estudios, el primero relativo a prácticas generales, otro relativo a cómo es la relación que tienen los docentes con los problemas; el segundo, con la invención de problemas; y el tercero relativo al uso de materiales. El tercer patrón se corresponde con trabajos relativos al efecto que tienen las acciones relativas a la resolución de problemas de los profesores en los estudiantes. Y por último, aquellos que exploran cómo son los procesos de aprendizaje de los profesores cuando aprenden a enseñar a resolver problemas. Estos temas organizan este apartado.

Concepciones sobre la enseñanza de la resolución de problemas

Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson (1996) analizan el cambio de creencias sobre la enseñanza de la resolución de problemas en un grupo de profesores que participó en un curso de desarrollo profesional durante cuatro años. Reportan que el programa de formación permitió a los profesores acercarse a la forma de enseñanza que promueven los estándares (NCTM, 2000). Los estudiantes pasaban más tiempo resolviendo problemas en sus clases. Los profesores comprendían y apreciaban el poder que tiene la posibilidad de que los estudiantes comuniquen su pensamiento. Específicamente, los profesores ampliaron su creencia sobre cómo enseñar a que no es necesario mostrar cómo resolver los problemas y que es más productiva la selección de problemas que permitan a los estudiantes pensar. Concluyen que esta creencia cambio su percepción sobre su rol como profesores, pues ya no eran el centro de sus clases.

Chapman (1997) indaga cómo profesores en servicio entienden la enseñanza de la resolución de problemas. La autora señala que la forma en que los profesores dan sentido a la enseñanza de este proceso está moldeada por sus experiencias personales y su forma de entender la realidad. Este marco, así como los ayuda, también los restringe. Asimismo, se reporta que cuando se les pregunta a los participantes de forma explícita sobre sus concepciones, tratan de teorizar y caen en contradicciones. No obstante, su estudio distingue tres formas de entender la enseñanza de la resolución de problemas. La primera relacionada con una perspectiva social en la que la conexión, el intercambio y el cuidado entre un grupo de personas dan sentido a los problemas. En la segunda, una aventura que involucraba lucha, perseverancia y toma de riesgos da sentido a los problemas. Por último, un juego que involucra diversión, gratificación y habilidades personales en la detonante del sentido de los problemas. Esta última, reportada en un profesor de secundaria.

O'Shea y Leavy (2013) indagan sobre la filosofía subyacente a la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva constructivista, concretado en qué entienden sobre la resolución de problemas como objeto de enseñanza. Sus resultados muestran que los profesores se muestran sorprendidos de lo que implica una teoría constructivista en la enseñanza de las matemáticas escolares. A su vez, se muestran dispuestos, pero tienen problemas al incorporar esto a sus procesos de enseñanza, a pesar de ver las matemáticas y la resolución de problemas en particular como importantes. Según las autoras, esto es indicativo de que los principios de las normativas curriculares aún no llegan a las salas de clases, y por tanto, tampoco sus implicaciones. Como factores gatillantes se reportan el número de alumnos, la amplitud del currículo escolar, amplitud de conocimiento profesional y manejo profesional. Esto último, a pesar de la inmersión, las metodologías centradas en los procedimientos están arraigadas, debido a la creencia de que este conocimiento es importante. Los participantes reportaron poco uso de la comunicación en procesos de resolución de problemas, dando poco espacio a los estudiantes para justificar sus respuestas. Así mismo, usan la enseñanza de heurísticos desde un enfoque tradicional e interpretan los cuatro pasos de Pólya (1945) como un proceso lineal.

Andrews y Xenofontos (2015) exploran la relación entre creencias, competencia y prácticas de profesores en servicio. Entre sus hallazgos encontramos que las creencias son independientes de los marcos curriculares a pesar que los contextos culturales influyen. Los autores lo explican de la siguiente manera: el currículo escolar tiene una predilección por problemas bien estructurados y con respuestas únicas. Los profesores siguen estas pautas curriculares, pero cuando deben discutir los procesos de solución tienen un enfoque más abierto y heurístico. Por otro lado, la competencia para resolver problemas de los profesores y la forma en que usaban su conocimiento matemático dependió de la confianza que tenía en él. En algunos casos, la competencia reportada no se relaciona con las creencias. Así, expresaban ciertas creencias en entrevistas pero luego en la clase no se observaban.

Gvozdic y Sander (2018) indagan en las concepciones de profesores en servicio. Su estudio compara este colectivo con un grupo de adultos no dedicados a la docencia. Entre sus hallazgos encontramos que la concepción intuitiva de las operaciones aritméticas eclipsó la comprensión de los maestros sobre las estrategias informales de modelado de los niños al resolver problemas. Los maestros consideraron que los problemas dentro del alcance de la concepción intuitiva eran más fáciles para los niños, al igual que los no docentes, y no tuvieron más éxito que los adultos no docentes para identificar las estrategias implementadas por los niños. Concluyen que los modelos intuitivos y el conocimiento matemático opacan el conocimiento didáctico de los profesores cuando se trata de evaluar el comportamiento de sus estudiantes como resolutores.

Giaconni, Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati (2019) muestran el diseño y validación de un cuestionario para profesores sobre la percepción de sus propias prácticas y sobre sus creencias motivacionales relacionadas con la enseñanza de la resolución de problemas. Entre los hallazgos encontrados en el desarrollo de este instrumento, los autores señalan que autoeficacia en resolver problemas y autoeficacia en enseñar la resolución de problemas se asocian positiva y significativamente con las dimensiones de prácticas centradas en el estudiante. Sin embargo, ninguna dimensión de autoeficacia se correlaciona con el uso de prácticas centradas en el profesor. Concluyen que la resolución de problemas se puede implementar de manera que el protagonista sea el profesor; sin embargo, estos hallazgos muestran que los profesores que se sienten más capaces reportan usar más frecuentemente prácticas centradas en el estudiante.

En otro trabajo, este grupo de investigación reporta los resultados de la aplicación del instrumento (Saadati, Cerda, Giaconi, Reyes y Felmer, 2019). Sus resultados muestran que las creencias y prácticas docentes se pueden dividir en dos categorías de acuerdo al rol que juega el docente en la sala de clases: uno tradicional y otro centrado en el estudiante. Así mismo, en sus resultados destaca que lo que los docentes creen que *se debe hacer* no corresponde con lo que consideran *se hace* en sus clases. Los autores lo adjudican al contexto cultural, debido a que la estructura del sistema educativo chileno, ha estado décadas orientado al mercado y con una fuerte presencia de mecanismos de rendición de cuentas, caracterizándose por la falta de autonomía profesional. Por otro lado, el estudio también encontró que la autoeficacia en hacer y en enseñar la resolución de problemas juega un rol muy importante en lo que hacen los docentes en el aula. Según sus resultados, los docentes con alta autoeficacia en resolución de problemas, incluso después de un intento fallido de enseñanza, harían un esfuerzo por volver a implemetar actividades en que se enseñe a resolver. Esto debido a que creen su capacidad de lograr un rendimiento docente exitoso. Asimismo, los docentes con fuertes creencias de autoeficacia están más preparados para experimentar e implementar nuevas prácticas educativas.

Perdomo-Díaz, Rojas y Felmer (2018) reportan qué tensiones emergen en los profesores cuando implementan un programa que tiene a la resolución de problemas como foco. Entre sus resultados, señalan que entre los participantes afloraron tanto tensiones matemáticas como pedagógicas. Las tensiones matemáticas estaban relacionadas con los conocimientos y habilidades para la resolución de problemas que los docentes comprobaron que tenían. Las tensiones pedagógicas manifestadas por los docentes, tuvieron que ver con la respuesta al error o a las dudas de los estudiantes, relacionadas con la dicotomía entre indicar a los alumnos cómo se hacen las cosas o no, ofreciéndoles oportunidades para que aprendan por sí mismos, el trabajo en grupo y la gestión del tiempo y el monitoreo a los alumnos. Así mismo, los profesores también hicieron referencia a su preocupación por cómo algunos miembros del sistema educativo percibirían el modelo de trabajo propuesto, lo que muestra tensiones en la relación con el sistema y las barreras que los docentes sienten que les pone su contexto. Los autores concluyen que los procesos de cambio son difíciles y se debe acompañar a los docentes, a través de cursos de desarrollo profesional u otro mecanismo.

Prácticas de los docentes para enseñar a resolver problemas

El trabajo de Lester (1982) es uno de los pocos documentos teóricos que localizamos. En su reflexión sobre cómo debería enseñarse la resolución de problemas discute por qué es importante que los niños sean buenos resolutores (cambios constantes en la sociedad), si se les puede enseñar (aunque es tremendamente difícil por la cantidad de factores asociados) y qué pautas hay que puedan ayudar (entrega una serie de recomendaciones para los profesores). Respeto a este último punto, este autor identifica una serie de aspectos que benefician la enseñanza de la resolución de problemas en el aula de primaria: (1) los estudiantes pueden tener dificultad con un problema aritmético verbal porque no pueden leerlo o entenderlo. Si esto sucede, leer con ellos y luego hacer que parafraseen el problema; (2) los estudiantes a menudo interpretan el significado de los problemas de manera diferente del significado pretendido; (3) las imágenes y diagramas que acompañan a un problema a menudo son útiles, pero a veces son una fuente de confusión; (4) el profesor debe tratar de que los estudiantes estimen cuál podría ser la respuesta antes de intentar encontrar una solución exacta; (5) una forma de mejorar la comprensión es hacer que los estudiantes actúen sobre la situación planteada por un problema; (6) a veces, los estudiantes parecen entender un problema pero tienen dificultades para comenzar una solución. Cuando esto sucede a menudo es útil simplificar el problema utilizando números más pequeños o, si el problema tiene más de una parte, hacer el problema de una parte a la vez; (7) se debe animar a los estudiantes a organizar su trabajo haciendo tablas, manteniendo un registro de su trabajo, buscando patrones y técnicas similares; (8) los estudiantes deben ser alentados a realizar conjeturas y estrategias de ensayo y error; (9) se debe promover un problema de la semana (o día, quizá); y (10) los estudiantes no pueden desarrollar ninguna habilidad para resolver problemas a menos que se involucren activamente en la resolución de problemas. Una buena manera de conseguir que participen activamente es plantear problemas que tienen relevancia para sus vidas.

Montoro, Ferrero y Ferraris (2003) exploran cómo los docentes utilizan problemas en clases de aritmética. Sus resultados señalan que usan las tareas como medio para lograr otros objetivos, como son: motivación para tópicos de la disciplina, medio de desarrollar nuevas destrezas, práctica o recreación. Además, señalan que los problemas utilizados no difieren, pero sí el uso que se hace de ellos, unos profesores explican los procedimientos y otros no. Concluyen que el modelo normativo en términos de Charnay (1994) es predominante, es decir, el docente hace lecciones donde provee ejercicios para transmitir un conocimiento.

Ho y Hedberg (2005) plantean que los docentes no enseñan *a través* de la resolución de problemas, sino *para* ella. Es decir, su foco es la aplicación de algoritmos, perdiendo la riqueza que presenta un enfoque dónde la resolución de problemas sea fuente, lugar y criterio del aprendizaje de las matemáticas (Charnay, 1994).

Chapman (2006) indaga en las prácticas de los profesores respecto a los problemas contextuales. Sus hallazgos muestran que los maestros de primaria son menos abstractos en su forma de tratar los problemas contextuales y cuando lo hacen es de forma superficial. Por otro lado, cuando se le otorga al contexto un papel fundamental para darle sentido al problema los profesores de primaria tampoco lo hacen en profundidad. La forma en que los profesores tratan el contexto depende de como lo ven matemáticamente y por ende de su conocimiento matemático y como ven a los estudiantes como aprendices, es decir su conocimiento de los estudiantes como resolutores.

Chiu (2009) explora los enfoques que utilizan profesores en servicio cuando utilizan problemas que denomina creativos y no creativos. Sus resultados identifican tres tipos de enfoques de enseñanza para la enseñanza de las matemáticas: enfoques liberales (centrados en problemas abiertos), de razonamiento (centrado en razonamientos abiertos, pero respuestas cerradas) y de habilidades (centrados en problemas con respuesta única, resolubles con un solo procedimiento).

Rosales, Vicente, Chamoso, Muñez y Orrantia (2012) analizan la interacción de un profesor y sus estudiantes cuando resuelven problemas no rutinarios. Estos investigadores reportan que la interacción se centra en conceptos matemáticos, dejando de lado la información contextual del problema. No obstante, no se centra en la comprensión del concepto matemático, sino en el procedimiento asociado a él. Es decir, aun siendo un problema no rutinario, existe una tendencia por parte de los profesores de guiar la resolución tomando en consideración únicamente el contenido matemático. Concluyen que los profesores inhiben el uso situacional de la resolución de problema, es decir, excluyen el conocimiento del contexto.

Temur (2012) reporta el uso que da a la resolución de problemas un grupo de futuros maestros en sus prácticas universitarias. La autora señala que los participantes plantean mayoritariamente problemas no rutinarios. Además, no tienen el lenguaje necesario para explicar o discutir ideas pues sus estudiantes no les entendían. Concluye que el uso de modelización, dado en el curso que se reportaba, les permitió mejorar la mirada profesional sobre el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas.

Bruun (2013) explora las prácticas de un grupo de profesores en servicio. Los datos de su estudio revelan que sobre las estrategias de resolución de problemas recomendados por el NCTM (2000), ninguno de los 70 maestros entrevistados informó haber enseñado todas las estrategias de resolución de problemas que se espera que se enseñen en su grado respectivo, siendo la estrategia hacer un dibujo la más común. Respecto a otras estrategias, la mayor reportada fue identificar información clave en el texto, encerrando en un círculo, subrayando o resaltando esta información. Además, el uso de palabras clave en problemas aritméticos como una estrategia de resolución de problemas, fue la segunda estrategia más popular. La autora manifiesta su preocupación ya que la *búsqueda de palabras clave* es común en las aulas donde los estudiantes tenían poco éxito en resolución de problemas. Además, los maestros la continuaban enseñando año tras año, a pesar de su poca efectividad. La autora concluye que sus datos sugieren que la mayoría de los maestros de primaria no están utilizando prácticas que hayan sido investigadas y se haya encontrado que tienen efectos positivos, como que los estudiantes inventen sus propios problemas.

Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014) exploran las interpretaciones de futuros profesores de primaria a las respuestas de estudiantes cuando resuelven problemas. Sus hallazgos muestran que aunque la mayoría de los participantes intentaron interpretar la solución de los estudiantes, solo logran realizarlo en un nivel descriptivo y evaluativo. Tales interpretaciones aún involucran solo aspectos comunes del contenido (en términos del MKT) y, por lo tanto, en un nivel completamente diferente al requerido para interpretar, dar sentido y elaborar una retroalimentación constructiva para los estudiantes; que concierne a un elemento central del conocimiento interpretativo de los maestros. Los autores concluyen que los futuros maestros manifiestan un conocimiento matemático que está al mismo nivel de los estudiantes que podrían estar enseñando.

Reséndiz, Block y Carrillo (2017) se focalizan en las prácticas de un profesor en un aula multigrado. Entre otros hallazgos, los autores señalan que el trabajar con varios grados ayuda a que el profesor deba usar muchos problemas en el sentido que permitan que todos los estudiantes puedan participar. En la implementación de las tareas, se pudo identificar tipos de ayudas: apuntada a la comprensión, al procedimiento o exhaustiva durante todo el proceso. Cada una determinada por el conocimiento que se tenía de los estudiantes. Sin embargo, se detectó que estos tipos de ayuda limitaban el desempeño independiente de los estudiantes. Acción que ponía en tensión el objetivo de que los estudiantes resolvieran problemas por si solos.

Pansell y Andrews (2017) exploran cómo se observan los enfoques de enseñanza en clases de quinto grado y la relación existente con los materiales curriculares. A través de un estudio de caso y utilizando los enfoques de enseñanza (Schroeder y Lester, 1989) reportan las acciones docentes y cuándo emerge cada uno de ellos. Particularmente, respecto al enfoque *para* la resolución de problemas, aparece cuando la profesora considera que hay conocimientos matemáticos básicos que se deben manejar para resolver. Sin embargo el énfasis esta en que lo conozcan y no que lo integren. Un problema con esto es que el conocimiento explicitado antes de la resolución no siempre ayuda a los estudiantes a resolver el problema. Respecto al enfoque de enseñanza *sobre* la resolución de problemas reportan que es el enfoque predominante. Aparece cuando la estrategia usada por algún estudiante en su solución es eficiente o se puede usar con otros problemas, eclipsando el proceso y la solución del problema en particular. La profesora parecía considerar estos aspectos de la resolución de problemas como separados de las matemáticas. Es así que cuando los estudiantes presentan sus soluciones, la discusión se focaliza en la estrategia, más que en cómo esa estrategia permitió llegar al resultado. Esto puede verse cuando se les alienta a usar una estrategia (considerada eficiente) aún cuando la propia estrategia desarrollada tenga más sentido. Finalmente respecto al enfoque de enseñanza *a través* de la resolución de problemas, señalan que este enfoque emerge sin que se planifique. Surge espontáneamente de acuerdo a la gestión que hace la profesora. Además, incluso cuando el objetivo es que aprendan un concepto a través de la resolución, la profesora no mantenía ese objetivo. Una explicación dada, tiene que ver con como los libros de texto presentan pocas oportunidades para aprender matemáticas a través de la resolución de problemas. Finalmente, concluyen que las formas en que se enseñó respondieron a toma de decisiones relacionadas con su comprensión de las matemáticas, del currículo escolar y de los materiales disponibles.

Vale, Widjaja, Doig y Groves (2019) indagan las acciones de profesores en servicio cuando planifican y usan problemas. Sus resultados muestran tres hallazgos claves que se deben tener en cuenta en situaciones similares: (1) la importancia de la declaración del objetivo de aprendizaje para diseñar la representación del problema y su lanzamiento o presentación; (2) la documentación de soluciones anticipadas que ayuden a monitorear, llevar a cabo escaneos de propósito para la selección y secuencia de las respuestas de los estudiantes para la presentación y discusión; y (3) la documentación de las sugerencias y preguntas en el plan de la lección.

Además de estas investigaciones centradas en prácticas en general, hemos podido identificar tres focos específicos: uno relativo a las prácticas de selección de problemas, otro relativo al uso de materiales cuando se enseña a resolver problemas y uno relativo a la invención de problemas para la enseñanza.

<u>Prácticas relativas a la selección de problemas</u>

Bruno y García (2004) investigan el proceso de clasificación de problemas aditivos con números negativos de un grupo de profesores de primaria y secundaria. Sus resultados, respecto a los profesores de primaria, muestran que cuando resuelven problemas aditivos de números enteros tienen dificultades pues interpretan los problemas de combinación como de cambio. Para realizar dicha clasificación, usan como criterio la identificación de dos cantidades y la cantidad final. Los problemas de cambio son confundidos con problemas comparación y combinación, y usan como criterio la búsqueda de estado inicial, cambio y final. Además, tienen dificultades con el uso de este tipo de problemas en contextos continuos, es decir, para ellos el cambio de posición no implica cambio. Respecto a los de comparación, también son confundidos con problemas de cambio y combinación y para su identificación utilizan palabras claves como más que o menos que. Finalmente, concluyen que los profesores tienen dificultades para interpretar palabras claves de los problemas aritméticos, en el sentido que tienden a cometer los mismos errores que los niños.

Papini (2015) explora el uso que dan a los problemas aritméticos un grupo de profesores en servicio. La autora señala que los problemas que tienen dificultad para los profesores les permiten pensar de formas diferentes de resolver y los hacen más susceptibles de pensar en diferentes respuestas de estudiantes. Concretamente, señala que cuando encuentran una dificultad, intentan explicarla, se preguntan, entre los participantes del grupo cómo la explicarían a sus alumnos y luego cómo se lo explicarían ellos, particularmente a sus alumnos. Es en este proceso, en el que se justifica la necesidad de discutir un objeto matemático y construir una explicación satisfactoria para los alumnos.

Leung (2016) reporta cómo es el proceso de creación de problemas para ser implementados por un grupo de profesores en servicio. Entre sus resultados, señala que expresan elegir la tarea según el contenido matemático, enfocándose en los resultados con alumnos. Concluye que dando tiempo y acompañamiento se pueden incorporar nuevas prácticas, pero el proceso es lento.

Prácticas relativas al uso de materiales

Kelly (2006), en una reflexión teórica sobre el uso de materiales en la escuela primaria cuando se resuelven problemas, señala que modelar interactivamente los procesos de resolución brinda a los estudiantes múltiples oportunidades para construir conocimiento matemático al tiempo que establecen conexiones razonables con las tareas cotidianas. Esta acción es compleja para los profesores por varias razones. En primer lugar, los docentes deben saber cuándo, por qué y cómo usar los materiales manuales de manera efectiva en el aula, así como también las oportunidades de observar, de primera mano, el impacto de permitir el aprendizaje a través de la exploración con objetos concretos. Esta autora establece tres aspectos claves en la relación entre profesores y materiales cuando enseñan a resolver problemas: (1) más que enseñar una serie de pasos lineales, el profesor debe proveer una gama completa de oportunidades continuas y respaldadas para desarrollar y perfeccionar indirectamente las técnicas de resolución de problemas de sus estudiantes, (2) uno de los principales criterios para mejorar las habilidades de resolución de problemas en los niños se relaciona con que los maestros puedan facilitar el aprendizaje en lugar de dirigirlo, y (3) parte de lo que sucede cuando los docentes son reacios a usar enfoques percibidos como innovadores, usando materiales y basados en problemas, se relaciona con la percepción de cómo era la resolución de problemas matemáticos y el aprendizaje en sus propios procesos escolares.

Son y Kim (2015) investigan la selección e implementación de problemas de los libros de texto por maestros y su influencia en la demanda cognitiva que proveen a los estudiantes. Estas autoras encuentran que, aunque diferentes maestros evaluaron la competencia matemática general de sus estudiantes en un mismo nivel, la selección y la implementación de los problemas y preguntas de los libros de texto variaron, junto con la demanda cognitiva de los problemas que presentaron. En este sentido, los maestros informaron que utilizaron los libros de texto asignados como sus principales recursos de enseñanza. Sin embargo, revelaron una satisfacción variada y un uso diferente de los libros, diferentes percepciones sobre la presencia de problemas de alto nivel cognitivo en los libros de texto y diferentes patrones de uso. Estas autoras plantean que los niveles de satisfacción y percepción de que los textos contenían los elementos que ellos consideraban importantes e influyen en el uso que realizan. Las autoras identifican cuatro aspectos particulares que están relacionados con las decisiones de los maestros al seleccionar y aplicar los problemas de los libros de texto: (1) coincidencia entre las creencias y objetivos de los maestros y los de los libros de texto, (2) las opiniones de los maestros sobre sus libros de texto, (3) la interpretación de marco curricular y su correspondiente evaluación, y (4) el conocimiento u orientación del maestro hacia el pensamiento del estudiante.

En otro estudio sobre el uso que profesores realizan de los libros de texto (Son y Kim, 2016), estas autoras exploran los factores asociados con diferentes patrones de uso que se identificaron sobre el cómo los docentes trataban los problemas y las preguntas asociadas. Entre sus resultados, resalta que los maestros que entienden las desventajas de los libros de texto tradicionales tienden a tener más capacidad para dar clases de manera productiva. Concluyen que el conocimiento del maestro en el uso de materiales curriculares es importante al menos para mejorar la calidad de las lecciones de los libros de texto que reportan bajo nivel de demanda cognitiva. Por este motivo, las autoras señalan que es importante la existencia de una coincidencia entre las opiniones de los maestros sobre la enseñanza (es decir, qué y cómo esperan que los estudiantes aprendan matemáticas) y las de los libros de texto. Esto ayudaría a los maestros a mantener una alta demanda cognitiva en los problemas que utilizan en su enseñanza.

Koh (2019) explora cómo profesores en servicio integran la tecnología (Geogebra) para trabajar problemas auténticos. El estudio mostró que la creación y transformación de lecciones tradicionales a unas que incluyan tecnología son difíciles para los profesores. El factor contextual es el que más pesa (currículo escolar y escuela). Particularmente, la escuela y las creencias que de ella emanan, también se reporta como una barrera. Así mismo, el conocimiento del estudiante focaliza la atención de los profesores cuando seleccionan tareas, especialmente la anticipación del nivel de dificultad de la tarea. En este sentido, se señala que los modelos intuitivos y el conocimiento matemático opacan el conocimiento didáctico de los profesores cuando se trata de evaluar el comportamiento de sus estudiantes como resolutores.

Prácticas relativas a la invención de problemas

Leung (2013) indaga como implementan problemas inventados un grupo de profesores. Esta autora señala que los participantes se preocupan del nivel de dificultad, del contexto familiar para el estudiante, y de que se relacione con el currículo escolar. Además, señala que están deseoso de discutir sobre las posibles preguntas que pueden hacer los estudiantes cuando inventan problemas.

Land (2017) explora como profesores en servicio seleccionan números (el uso estratégico de números y combinaciones de números en el contexto de las tareas de resolución de problemas) en la invención de problemas. Sus resultados muestran que el conocimiento matemático y las metas claras y específicas permiten a los profesores plantear problemas de mejorar calidad y que desarrollen el pensamiento de los estudiantes.

Osana, Lacroix, Tucker y Desrosiers (2006) indagan cómo clasifican problemas usando los niveles cognitivos (Stein y Smith, 1998), y si afecta el conocimiento matemático y la habilidad para resolver problemas. Sus resultados muestran que los participantes tuvieron más dificultades para identificar la complejidad de los problemas de procedimientos con conexiones y hacer matemáticas. Posiblemente debido a que evaluar las tareas matemáticas de acuerdo con la complejidad cognitiva es una tarea particularmente difícil para los futuros profesores. Esto último por la falta de familiaridad con el pensamiento de los estudiantes. Así mismo, los futuros docentes con mayor conocimiento matemático tendieron a clasificar los problemas según la complejidad cognitiva con mayor precisión. Además, estas autoras señalan que un número significativo de futuros maestros le dio importancia a al menos una característica superficial como es la longitud del enunciado, para clasificar los problemas. Específicamente, consideraron que los problemas más cortos eran menos complejos cognitivamente.

Aprendizaje de la enseñanza de la resolución de problemas

Chapman (1999) indaga como un curso de desarrollo profesional cambia las prácticas, su significado personal sobre la resolución de problemas y sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sus resultados señalan que inicialmente las ideas de los profesores se caracterizan por pensamiento no matemático, tenerle miedo a los problemas y poca confianza en su competencia para resolver problemas. Definen problema como problema aritmético verbal y piensan que es difícil identificar qué hacer, enseñando estrategias como el uso de palabras claves. Respecto al proceso, lo ven de una sola forma (lineal) y basándose en esa forma, basan la enseñanza. El curso basado en el enfoque *Inquiry Based Learning* hace que cambien sus prácticas de selección de problemas, gestión de clases, específicamente tienden a escuchar más a sus estudiantes. La autora concluye que el curso cambia su significado de enseñanza aprendizaje y que un rol primordial en ello fue el uso de narrativas personales de estos haciéndolos conscientes de su pensamiento.

García y Santarelli (2004) presentan una experiencia con futuros maestros. Sus resultados señalan que fomentar la percepción de que la resolución de los problemas debe entenderse desde la perspectiva de los estudiantes, favorece la diversidad y aprendizaje de los futuros maestros. Además, este hecho ayuda a reconocer la importancia de no conocer el procedimiento para que exista una resolución de problemas genuina.

Alsina (2007) estudia el cambio de concepciones en un grupo de profesores en servicio. Su investigación reporta que la reflexión ayuda a los profesores a pensar e identificar las limitaciones en sus propias concepciones. Finalmente, concluye que estas están influidas por el entorno, colegio y los padres.

Pratt y Woods (2008) reportan el cambio en la comprensión hacia una comunidad de indagación en resolución de problemas. Sus resultados señalan que los cambios en la comprensión de los futuros profesores estaban ligados a las percepciones de la enseñanza. Los autores muestran que los futuros maestros entendieron lo que podría ser la resolución de problemas y sus implicaciones. Un cambio comúnmente observado fue un alejamiento de una perspectiva como objeto delineado del currículo escolar para verlo como algo fundamental para el aprendizaje matemático. En conclusión señalan que los cambios resultaron en (al menos) tres dimensiones: la capacidad para negociar el significado juntos, su voluntad de participar en la investigación y su mayor sensibilidad a las cuestiones clave a través de su compromiso.

Ryve (2007) indaga en los patrones existentes en las discusiones de futuros maestros cuando están en un curso aprendiendo a enseñar a resolver problemas. Sus resultados señalan que existen tres focos de discusión en dichos cursos: (1) discurso orientado al tema y se centra en contenidos y procedimientos por sobre la resolución de problemas, (2) cuando se habla de didáctica se centra en el aprendizaje de los estudiantes, y (3) cuando se habla de resolución de problemas, se centra en el proceso de resolución (fases).

Kramarski y Revach (2009) presentan un curso de desarrollo profesional en el que se enseñan dos marcos para desarrollar la competencia para resolver problemas a profesores en servicio. Sus resultados reportan que la oportunidad explícita de elaborar diferentes perspectivas de resolución de problemas, tanto para los estudiantes como para los maestros, pareció llevar a los maestros a enfocarse más en la comprensión de las demandas de tareas y en un enfoque de enseñanza centrado en el alumno en la planificación de sus lecciones.

Prieto y Valls (2010) reportan como aprenden problemas aritméticos verbales un grupo de futuros profesores. Sus resultados muestran que hubo dificultad cuando se analizan los problemas que informen a la planificación de la enseñanza. Estas dificultades fueron: el establecimiento de relaciones entre los tipos de problemas, los niveles de dificultad y las estrategias usadas por los niños. Los autores señalan que fueron capaces de identificar distintos tipos de problemas, sus niveles de dificultad y las posibles estrategias de resolución desde una perspectiva semántica. Sin embargo, en general, estos conocimientos no fueron organizados en una red de ideas que sirviera para explicar las relaciones entre los distintos tipos de problemas de estructura aditiva, los niveles de dificultad y las posibles estrategias de resolución, como una manera de analizar los problemas.

Sakshaug y Wohlhuter (2010) exponen el recorrido de un grupo de futuros maestros al aprender a enseñar a través de la resolución de problemas. A través de un ciclo de investigación-acción, se observó un impacto positivo debido a las siguientes acciones: (1) los maestros presentaron problemas a los estudiantes, (2) los estudiantes resolvían los problemas, (3) la predicción de posibles comportamientos de estudiantes, (4) la constatación del impacto de resolver problemas en sus estudiantes y (5) cuando describieron las actitudes de sus estudiantes, el uso de los procesos, el aprendizaje de las matemáticas y los éxitos inesperados. Cuando los futuros maestros describieron lo que los estudiantes aprendieron al participar en la enseñanza a través de la resolución de problemas, todos hicieron referencias en al menos una descripción de los procesos que usaron los estudiantes. Además, los autores señalan que el cambio de creencias se produce en diferentes momentos y que dependen del maestro en particular.

Cheng y Yee (2012) muestran el proceso de aprendizaje de un grupo de profesores en servicio cuando utilizan el Estudio de Clases para enseñar a resolver problemas. Los profesores participantes manifiestan haber aprendido sobre: (1) la diversidad de lenguaje para referirse a un objeto matemático, (2) aumentaron su conciencia sobre la importancia de escuchar con más atención a los estudiantes, esperando múltiples forma de entendimiento de un concepto, y (3) valoraron el aprendizaje de pares en términos de comunidad de aprendizaje. Valoraron que se pueda discutir con sus pares las diferentes respuestas, pues eso amplía la gama de respuestas y pueden entender mejor el pensamiento de los estudiantes. No obstante, los profesores reportaron preocupación por el tiempo necesario para realizar un proceso de estudio de clases.

De Proença (2015) muestra un curso diseñado para enseñar fracciones a través de la resolución de problemas a un grupo de futuros profesores. Este autor reporta que el enfoque no logró desarrollar el conocimiento durante el curso. Los futuros profesores no consideran todas las acciones necesarias para conducir procesos de enseñanza de la resolución de problemas cuándo se les pide hacerlo. Por tanto concluye, entre otras cuestiones, que los cambios que se le piden a los futuros maestros son procesos que toman tiempo.

Livy y Downton (2018) muestran como la observación ayuda un grupo de futuros maestros a desarrollar su capacidad para acompañar a los estudiantes. Sus resultados muestran que resolver problemas que fueron utilizados posteriormente en sus prácticas, permitió reflexionar sobre las limitaciones de su conocimiento matemático. Además, las observaciones que realizaron a un estudiante hizo que los futuros docentes desarrollaran su: conciencia sobre cómo aprenden los niños, el pensamiento desafiante del estudiante, la elección del profesor cuestionando, el conocimiento de la estructura de la lección, aprender a enseñar, la naturaleza de la tarea, el andamiaje dado a los estudiantes, la selección de estudiantes, las estrategias que usan los estudiantes, como los estudiantes aprenden de otros, el razonamiento de los estudiantes y la sincronización o tiempos necesarios.

Efecto de las acciones del profesor cuando enseña a resolver problemas

Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988) hacen notar lo poco preparados que están los docentes para identificar el pensamiento de sus estudiantes cuando resuelven problemas aritmético verbales. Son capaces de distinguir diferentes tipos de problemas, pero no logran asociar niveles de dificultad. Del mismo modo, presentan deficiencias a la hora de predecir o identificar las estrategias de resolución utilizadas por sus estudiantes. Los autores concluyen que si bien los profesores tienen conocimientos, estos están desorganizados y poco conectados entre ellos.

Lowrie (2002) estudia la influencia de la interacción que se produce entre un futuro profesor y sus estudiantes cuando, estos últimos, inventan problemas. Sus resultados muestran que hubo diferencias entre el tipo de problemas que los niños plantearon en la primera sesión y los problemas que plantearon en las sesiones subsiguientes. Fue evidente que las experiencias de enseñanza-aprendizaje que tuvieron lugar en estas sesiones tuvieron un impacto inmediato en el tipo de problemas que plantearon los niños, particularmente en su capacidad para formular problemas aritméticos no rutinarios o abiertos.

Van Dooren, Verschaffel y Onghena (2002) indagan en el impacto del conocimiento de los futuros profesores en su evaluación del pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales tanto aritméticos como algebraicos. Estos autores señalan que la forma en que los profesores resuelven problemas condiciona la forma en que evalúan las respuestas de los estudiantes. Así mismo, los profesores de primaria valoran más las soluciones aritméticas que las algebraicas. Sin embargo, estos mismo sujetos tienen conciencia sobre que las soluciones algebraicas son útiles en algunos problemas que no tienen una solución aritmética directa.

Depaepe, De Corte y Verschaffel (2010) exploran cómo las concepciones y uso dado a la resolución de problemas en las salas de clases, afectan a los estudiantes. Particularmente, indagan en las acciones de los maestros al enseñar utilizando una heurísticos y estrategias. Entre sus hallazgos, se destaca que los docentes utilizan escasamente la fase de planeación. Respecto a las estrategias, las más utilizadas son hacer una lista o tabla y hacer un dibujo o esquema. Ambas eran utilizadas para identificar información relevante. Asimismo, señalan que los profesores se ocupaban de discutir sobre el qué estaban realizando los estudiantes, pero rara vez sobre el cómo y por qué. Respecto a cómo afectó estos enfoques a los estudiantes, los autores señalan que a pesar de existir diferencias entre los enfoques (una clase con mayor énfasis en la metacognición que otra) los estudiantes se encontraban a gusto en sus respectivas clases. Sin embargo en la clase con mayor énfasis metacognitivo en las resoluciones, se produjo mayor uso espontaneo de estrategias y heurísticos por parte de los estudiantes.

Fernández, Llinares y Valls (2013) exploran la *mirada profesional* de futuros profesores cuando los estudiantes resuelven problemas de proporcionalidad. Sus resultados muestran que los profesores tienen debilidades relativas al conocimiento matemático de las relaciones proporcionales. Esto hace que sea difícil interpretar correctamente el pensamiento de los estudiantes. Los futuros profesores que reconocen las diferencias entre situaciones aditivas y multiplicativas, siguen teniendo problemas en la justificación del porqué de las respuestas de los estudiantes, ya sean correctas o no. Estos autores establecen un marco para caracterizar el desarrollo de la mirada profesional de problemas de proporcionalidad que consta de cuatro niveles: La transición del nivel 1 al 2 se determina cuando los maestros son capaces de analizar las características de las situaciones para discriminar ambos tipos de problemas. En el nivel 2, los maestros se centran en la corrección de las respuestas de los estudiantes y tienden a aceptar las respuestas correctas de los estudiantes como evidencia de comprensión, sin hacer inferencias específicas sobre qué o cómo entendieron o no los estudiantes. La transición del nivel 2 al 3 se determina cuando los docentes son capaces de relacionar las estrategias de los estudiantes con las características de los problemas que justifican. Finalmente, la transición del nivel 3 al 4 se determina cuando los maestros pueden ver el rendimiento general del estudiante ante un determinado tipo de problema. Es decir, pueden relacionar las estrategias dentro y entre los problemas para ver cómo esas estrategias están relacionadas con otros grupos de problemas.

Por su parte, Tyminski, Land, Drake, Zambak y Simpson (2014) especifican que los futuros profesores son capaces de identificar e interpretar el pensamiento de sus estudiantes cuando resuelven problemas, pero son poco hábiles utilizando esa información en la planificación de secuencias didácticas.

Johar, Patahuddin y Widjaja (2017) exploran comparativamente cómo las preguntas de dos futuros maestros (uno de los Países Bajos y otro de Indonesia) influyen en el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas contextuales con fracciones. Sus resultados muestran que un profesor hizo menos preguntas que otro. Sin embargo, los estudiantes que estuvieron expuestos a menos preguntas mostraron un repertorio de estrategias más amplio que los estudiantes que sí estuvieron expuestos a muchas preguntas. Esto sugiere que las preguntas de los maestros no son el único factor que influye en las estrategias de los estudiantes, sino que otros aspectos como el contexto local del currículo escolar, los libros de texto y la cultura de la sala de clases desempeñan un papel influyente. Los autores señalan que particularmente, el currículum y los libros de texto son factores influyentes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esto debido a que los estudiantes que estuvieron expuestos a más preguntas solo han tenido experiencia de resolver problemas de una sola manera que es como se presentan en los textos escolares de su país. A diferencia de los otros estudiantes, que han estado expuestos a textos que conectan diferentes ejes y estrategias, pero recibieron menor cantidad de preguntas por parte del futuro profesor.

Hallman-Thrasher (2017) investiga cómo responden los maestros a respuestas inesperadas cuando sus estudiantes resuelven problemas. Sus resultados muestran que cuando reaccionan a respuestas anticipadas, bajan los niveles de demanda cognitiva (posiblemente porque piensan que ya han llegado a la respuesta). Los participantes del estudio tendían a guiar las respuestas erróneas al uso de estrategias que ellos conocen, en vez de promover estrategias propias. Esto limitaría la autonomía del estudiante. Es decir, los participantes no exploran con sus estudiantes por qué no sirvió, sino que hacen preguntas que guíen a otra estrategia. En otras palabras, los futuros profesores tienden a guiar el actuar de los estudiantes basándose su conocimiento sobre como resolver problemas o en lo que ellos harían. Esto se traducía en que si el docente tiene una hipótesis de un posible error, realiza preguntas que confirmen esa hipótesis, en vez de hacer preguntas que indaguen en el error. Esta autora señala que los futuros profesores manifestaban dificultades para hacer preguntas que les permitan indagar en el pensamiento y tendían a pensar que anticipar una respuesta de los estudiantes era lo correcto y se mantenía en ese camino, es decir, no anticipar una respuesta era algo malo y había que redireccionar a lo esperado.

Laine, Näveri, Pehkonen, Ahtee y Hannula (2018) exploran cuál es la conexión entre las acciones de los profesores en servicio y las actuaciones de los estudiantes cando resuelven problemas abiertos. Sus resultados señalan que los niveles de solución de los alumnos difirieron bastante entre las clases. Según los autores, esto depende de las diferentes acciones de los maestros durante la lección. Las formas en que un maestro introdujo la tarea y gestionó la interacción explican en gran medida esta diferencia en los niveles de solución. Así mismo, los resultados indican que la activación de los conocimientos previos (al inicio) produce buenos resultados. Es importante que el profesor sea capaz de identificar los puntos críticos en las soluciones de los estudiantes y basar su orientación en ellos. Por otro lado, el conocimiento de la matemática imbricada en el problema es vital para que los profesores puedan ofrecer una guía adecuada, es decir, ayudar a los estudiantes con preguntas pertinentes. Los resultados sugieren que no es necesario saber todas las respuestas, pero sí conocer muy bien el proceso de resolución para ser capaz de brindar apoyo a los estudiantes.

En resumen, las investigaciones sobre enseñanza presentan un vasto campo de investigación. Un aspecto que llama la atención, y que Weber y Leikin (2016) señalan, es el uso que se realiza de la resolución de problemas en estos estudios. Esto es, trabajos donde la resolución de problemas es el objeto de estudio y trabajos que utilizan la resolución de problemas como una herramienta de investigación para explorar otros aspectos. Este hecho hace que podamos identificar claramente dos tipos de estudios: unos que buscan una explicación y entendimiento de un fenómeno, y otros, el desarrollo de este. Este último tipo es fácilmente identificable pues involucra una intervención de algún tipo. Sin embargo, hace compleja la sistematización de la investigación, además de omitir aspectos que serían útiles de explorar.

Por otro lado, esta revisión muestra que la enseñanza de la resolución de problemas requiere conocimientos sobre:

- ♦ El problema, es decir, a qué tipo corresponde, sus características de formato, en qué medida puede ser un problema para sus estudiantes, etc. Además de estas características relativas a la naturaleza del problema, se encuentran otras correspondientes con los cambios que puedan realizarse en sus variables para hacerlo más difícil o más fácil, o que induzcan formas de resolución determinadas (e.g Andrews y Xenofontos, 2015; Carpenter et al., 1988; Chapman, 2006; Chiu, 2009; Leung, 2013; Montoro et al., 2003; Papini, 2015; Reséndiz et al., 2017; Rosales et al., 2012; Son y Kim, 2016; Vale et al., 2019).

- La resolución del problema. Es bastante obvio pensar en las fases por las que se llega a su solución: comprender qué significa cada dato, cómo se relacionan, etc. Pero además, existen conocimientos sobre las posibles estrategias que se pueden emplear (e.g. Bruun, 2013; Depaepe et al., 2010; Hallman-Thrasher, 2017; Lester, 1982; Montoro et al., 2003).
- Los errores que puedan cometer los estudiantes, es decir, el conocimiento de los estudiantes como resolutores (e.g. Gvozdic y Sander, 2018; Lester, 1982; Reséndiz et al., 2017; Temur, 2012; Vale et al., 2019).
- Las posibilidades que otorga un problema para conectar con otros ámbitos de las matemáticas; y también con aspectos no cognitivos, como las creencias de que los problemas pueden ser resueltos de formas diferentes o que la discusión de un problema es parte del aprendizaje (e.g. Chapman, 1997; Fennema et al., 1996; Kelly, 2006; Koh, 2019; O'Shea y Leavy, 2013; Pansell y Andrews, 2017; Rosales et al., 2012; Saadati et al., 2019; Temur, 2012; Vale et al., 2019).

En el listado anterior hacemos hincapié en los aspectos relativos a la condición de problema y no en los conocimientos de la matemática imbricados. Es así como vemos emerger elementos sobre los problemas tales como: su caracterización y proceso de resolución, su aprendizaje y su enseñanza. Con el objeto de hacer explicito, en el apartado siguiente realizamos una reflexión sobre como cada uno de estos tres aspectos implican un conocimiento particular del profesor.

Conocimientos del profesor para enseñar a resolver problemas

En el recorrido que hemos realizado hasta ahora, vemos como emergen elementos sobre los problemas tales como: noción y proceso, su aprendizaje y su enseñanza. Estas ideas se corresponden con conocimientos del profesor necesarios para enseñar a resolver problemas.

Los problemas de matemáticas, su resolución y el conocimiento del profesor

Cuando se aborda la resolución de problemas es necesario hacer referencia al problema mismo y sus tipos. Existen numerosas clasificaciones de problemas en las que no hay acuerdo unánime, sin embargo podemos encontrar dicotomías en las que los investigadores concuerdan: aplicados y no aplicados, rutinarios y no rutinarios o abiertos y cerrados, etc. Consideramos importante que el docente las conozca, pues su conocimiento no puede limitarse a clasificaciones que sólo se refieran al concepto que se puede utilizar para resolverlo.

Los problemas rutinarios no aplicados, también llamados ejercicios, al igual que el resto de problemas, implican en el profesor mayoritariamente un conocimiento matemático o del concepto y un conocimiento del estudiante. Entendemos que un problema requiere que el estudiante no disponga de un camino de solución conocido. Por tanto, la condición para que una tarea como por ejemplo: *(27x5)–18=*___ se considere un problema, es que el estudiante no conozca alguno de los pasos de los algoritmos involucrados o el uso del paréntesis. De lo contrario, esta tarea dejaría de tener el estatus de problema. En consecuencia, en este tipo de tareas se demanda la conceptualización de problema como un conocimiento crítico del profesor en conjunción con el conocimiento de sus estudiantes.

Un problema rutinario aplicado, como por ejemplo: *Juana quiere poner 12 manzanas en algunos platos. Cada plato debe tener 3 manzanas, ¿cuántos platos necesita?*, requiere que profesor conozca las diferentes estructuras aritméticas multiplicativas y las estrategias que los estudiantes podrían utilizar para resolver el problema. Al mismo tiempo, es necesario saber cómo las diferentes variables de tarea del problema pueden interferir, provocando dificultades que se traducirán en errores de los estudiantes. En este sentido, los errores relativos a la complejidad de las operaciones multiplicativas, como los papeles que pueden tomar el dividendo y el divisor en problemas asimétricos, o relativas al lenguaje, como la posición de la incógnita en la redacción o la secuenciación de los datos, o también a los errores de inversión.

Los problemas no rutinarios y no aplicados necesitan un conocimiento matemático profundo por parte de los profesores. Su uso ha estado delegado al entretenimiento o a los desafíos. Sin embargo, estos pueden convertirse en vehículos para el desarrollo de un pensamiento matemático autónomo. Por tanto, es necesario que exista un conocimiento sobre el proceso de resolver un problema que permita al docente plantear discusiones sobre predicciones o conjeturas y su comprobación.

Los problema no rutinarios aplicados, ya sean cerrados, como *¿cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?*, o abiertos del tipo *¿cuánto papel se utiliza en tu colegio en una semana?*, suelen señalarse como los problemas con mayor potencial para el desarrollo de la competencia matemática (Lester y Cai, 2016). Estos problemas requieren un abanico de conocimientos mucho más complejo, menos centrados en los conceptos matemáticos y más en la gestión del proceso de resolución. El docente debe proveer oportunidades para generar y discutir estrategias, acompañar a los estudiantes gestionando el conocimiento matemático, permitiendo una discusión tanto de los conocimientos matemáticos como aspectos relacionados con la evaluación de las estrategias utilizadas. Además, estos problemas necesitan que los profesores manifiesten creencias y concepciones que permitan al problema ser utilizado en todo su potencial, es decir, que el docente crea que pueden existir distintos caminos de solución válidos, varias respuestas aceptables, o incluso no existir. Por otra parte, estos problemas exigen conocimientos que permitan al profesor gestionar una clase en la que se puedan discutir estrategias, en la que se pueda argumentar el uso de unas por sobre otras, pudiendo relacionarse con problemas anteriores y así generalizar elementos que sean de ayuda las próximas veces que se enfrente a situaciones similares. Así, vemos como cada tipo de problema enfatiza algún aspecto del conocimiento del profesor.

El aprendizaje de la resolución de problemas y el conocimiento del profesor

Enseñar a resolver problemas implica necesariamente al estudiante como resolutor. Utilizar un problema en una situación de enseñanza conlleva dos tipos de conocimientos del profesor: los conocimientos contenidos matemáticos necesarios para resolver el problema y los conocimientos inherentes a la noción de problema y a su proceso de solución. La selección de problemas que realiza un docente para llevarlos al aula debería estar influenciada por su conocimiento de los estudiantes y en qué medida será un problema para cada uno de ellos.

Particularmente, encontramos conocimientos teóricos sobre el proceso de resolución en función de las etapas que seguirán los estudiantes para resolverlo o los diferentes caminos que pueden seguir para llegar a la solución. Este conocimiento permite al profesor mediar en el proceso de resolución a través de preguntas focalizadas, proporcionando andamiajes adecuados que ayuden a los estudiantes en la construcción de su pensamiento matemático.

Contextualizando esta idea, pensemos en un profesor que se ha planteado como objetivo enseñar a resolver problemas aritméticos de dos etapas. Para ello ha seleccionado el siguiente problema: *Rosa compró algunos dulces. Se comió la mitad y luego dio 5 dulces a su mejor amiga. Al final se quedó con 7 dulces, ¿cuántos dulces compró Rosa?* Retomando la meta del profesor, dejamos fuera del análisis las posibles dificultades de cálculo u otra relación con los conceptos matemáticos implicados. En este contexto, es necesario que el docente conozca las posibles estrategias que sus estudiantes podrán seguir para llegar a la solución (diagramas, dividir el problema, etc.). Del mismo modo, es necesario tener en cuenta las dificultades, que en este caso pueden ser debidas al cambio de estructura o inversión de la operación, es decir con las variables estructurales del problema. Tener este conocimiento permite al profesor estar preparado para sugerir estrategias alternativas o representaciones que permitan a sus estudiantes superar dichas dificultades.

Un conocimiento de las diversas actuaciones de los estudiantes frente a determinados problemas y las posibles dificultades es necesario para los profesores, pues brindará un marco en el que sepa qué puede exigir a sus estudiantes (Chapman, 2015). La investigación sobre resolución de problemas ha originado evidencias sobre las características de los resolutores exitosos, lo que ayuda a los docentes a establecer las expectativas de aprendizaje que podría esperar un profesor (Chapman, 2015).

Así, la resolución de problemas y los estudiantes como resolutores demandan al profesor conocimientos relativos a las posibles actuaciones de los estudiantes al enfrentarse a una situación problemática.

La enseñanza de la resolución de problemas y el conocimiento del profesor

Además de los conocimientos indicados anteriormente sobre las tareas matemáticas como problemas y su aprendizaje, la enseñanza de la resolución de problemas implica un conocimiento sobre cómo planificar y gestionar una clase. Tal como señala Carrillo (2003), el para qué es un elemento central que permite conocer las finalidades de la resolución de problemas y qué se puede propiciar con ella. Un elemento que tiene relación con esto, son los enfoques o vías de acceso. Cada uno de ellos implica conocimientos de sus objetivos y cómo ellos favorecen ciertos aspectos de la resolución de problemas, que en su conjunto proporcionan habilidades involucradas en este proceso.

El enfoque de la enseñanza de la matemática para la resolución de problemas tiene como meta que los estudiantes sean capaces de aplicar el conocimiento matemático en la resolución de problemas. Esto implicaría un conocimiento del profesor que permita secuenciar una serie de tareas que comiencen centrándose en los conceptos y posteriormente tareas en que se transfieran los conocimientos a diferentes contextos (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015). Por consiguiente, este enfoque requiere a los profesores un conocimiento sobre una tipología de problemas que le permitan brindar diferentes contextos a los estudiantes donde aplicar sus conocimientos matemáticos. Esto es importante pues como señalan Camacho y Santos-Trigo (2004), el tipo de problema está vinculado con la actividad que generará en los estudiantes.

El enfoque sobre la resolución de problemas tiene como meta instruir sobre el proceso de resolución. Este enfoque se caracteriza por dos aspectos. El primero tiene relación con los modelos de resolución en el sentido de Pólya (1981). Esto se traduce en un conocimiento sobre las fases del proceso y sus implicaciones para las acciones que deben realizar los estudiantes en cada una de ellas. En este contexto toman relevancia otros procesos como la comunicación de estrategias de resolución o la representación de las ideas matemáticas. Así mismo, es necesario que los docentes sean capaces de acompañar a que el paso entre cada una de las fases se produzca de manera natural. También, es importante que se tenga un entendimiento de la resolución de problemas como un proceso dinámico y no lineal, en donde el resolutor puede volver a una fase anterior en caso de ser necesario. Un segundo aspecto tiene relación con estrategias específicas (buscar un patrón o hacer una tabla). Enseñar sobre ellas implica al profesor un conocimiento sobre tipos de problemas que promuevan la estrategia que desea que sus estudiantes aprendan, pero que no obliguen o coarten la libertad de elegir o inventar otra. En este sentido, se requiere del profesor un conocimiento de cómo los factores afectivos pueden influir en el uso de la estrategia que desea enseñar. El efecto que tendrá un uso obligado de cierta estrategia por orden del docente difiere al de un profesor que promueve su uso, discute sobre ella y evalúa su pertinencia o eficacia.

Finalmente, el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas es usado como método de enseñanza y es una forma de aprender las matemáticas escolares (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015). Específicamente, se pretende que los estudiantes construyan las matemáticas escolares a través de la problematización. En este contexto, el profesor debe poseer los conocimientos anteriormente señalados y principalmente, ser un buen seleccionador o inventor de problemas, pues de ello dependerá en gran medida las matemáticas que puedan construir sus estudiantes. Es importante que prevea las representaciones que puedan emerger cuando los estudiantes resuelven y de qué manera se les guiará en el caso de aparecer dificultades (Curcio y Artzt, 2003). Este enfoque es complejo pues en su aplicación interfieren un gran número de factores, algunos referidos a las matemáticas, otros a los procesos, pero principalmente a las creencias que sostengan los profesores sobre cómo se debe aprender matemáticas. Los factores no cognitivos son fundamentales para articular este enfoque y dar espacio a que los conocimientos adquiridos se manifiesten en actividades que permitan a los estudiantes explorar, discutir y argumentar su trabajo. Así, cada uno de los enfoques requiere del profesor un conocimiento específico. No obstante, los modelos omiten este aspecto. En el siguiente apartado, realizamos una breve revisión a los modelos para reflexionar sobre su idoneidad para indagar en el conocimiento sobre la resolución de problemas.

El conocimiento del profesor

El profesor de matemáticas es un profesional cuyo trabajo presenta algunos rasgos característicos: (1) su fin primordial y central es servir a otros; (2) para ese fin necesita de una comprensión teórica o lo que es lo mismo un desempeño calificado; (3) debe realizar juicios y tomar decisiones en condiciones inciertas; (4) esto hace que también deba aprender de la práctica; y (5) necesitan de una formación organizada y sistemática y forman parte de una comunidad profesional que monitorea su progreso (Kunter et al., 2013; Neubrand, 2018). Si bien ser un profesional competente en la enseñanza de las matemáticas es un entramado complejo, en este trabajo estamos interesados en una de esas características: el conocimiento o comprensión teórica que en conjunción a las demás características formará a un profesional de la enseñanza de las matemáticas.

Las diversas conceptualizaciones sobre competencia[4] profesional destacan como un elemento primordial al conocimiento del profesor (e.g. Baumert y Kunter, 2013; Niss, 2006; Oser, Achtenhagen y Renold, 2006; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En la tabla 2 puede observarse que, entre los elementos comunes, el conocimiento es transversal. Manifestar una comprensión profunda de estos, generalmente se asocia con un mejor desempeño del docente en la tarea de enseñar.

[4] La literatura angloparlante reporta dos términos para referirse a esta noción: competence/competency o proficiency. Sin entrar en un conceptualización detallada de cada una, ya que es una de las nociones más elusivas en Educación Matemática (Kilpatrick, 2014), exponemos lo que entendemos por cada una. Al hablar de competencia como un aprendizaje exitoso en matemáticas, los investigadores europeos suelen referirse con el término competence o competency, mientras que los investigadores americanos utilizan la palabra proficiency. Si bien esta adopción puede tener su origen en razones ajenas al significado de la palabra (Kilpatrick, 2001), entendemos que no se refieren a lo mismo. La competencia según expone el Oxford Dictionary, es la habilidad de hacer algo exitosa o eficientemente. Además, Puig (2008) señala que pareciera tener un componente de caracterización sobre un dominio o lo que se espera idealmente que un sujeto. Mientras que proficiency, el mismo diccionario lo relaciona con un alto grado de habilidad o pericia en un ámbito, es decir, se relaciona como una demostración del dominio (Puig, 2008). Por su parte, Rico (2007) expone que ambos significados son considerados en el marco de PISA y son utilizados para referirse a ideas diferentes, coincidentes con lo anteriormente expuesto.

Tabla 6. *Componentes de la competencia profesional del profesor*

Oser et al. (2006)	Niss (2006)	Schoenfeld y Kilpatrick (2008)	Baumer y Kunter (2013)
Competencia cognitiva y de conocimiento del contenido Competencia funcional y didáctica Competencia social y comunicativa Competencia personal o autocompetencia	Currículo Aprendizaje Enseñanza Evaluación Colaboración Desarrollo profesional Competencias matemáticas	Conocimiento amplio y profundo de las matemáticas escolares Estudiantes como pensadores Estudiantes como aprendices Elaboración y gestión de ambientes de aprendizaje Desarrollar normas que apoyan discurso apropiado Relaciones interpersonales Reflexión sobre propia práctica	Conocimiento profesional Valores, creencias y metas profesionales Orientaciones motivacionales Habilidades profesionales de autorregulación

Según Ponte (2012), este conocimiento profesional:

> *Se trata de un conocimiento particular de un grupo social específico –el profesorado de matemáticas– que, a pesar de estar sujeto a múltiples influencias, asume su especificidad en función de su actividad práctica y de las condiciones en las cuales ésta se ejerce. Así, el conocimiento profesional del profesorado está, por encima de todo, orientado a una actividad práctica (enseñar matemáticas a grupos de alumnado), aunque se apoye en conocimientos de naturaleza teórica (sobre matemáticas, educación en general, o bien sobre enseñanza de las matemáticas, entre otros), y en conocimientos de naturaleza social y experiencial (sobre alumnado, dinámica de aula, valores y cultura de la comunidad correspondiente, o bien sobre comunidad escolar y profesional, entre otros).* (p. 87)

En este trabajo nos interesa reflexionar en torno a los conocimientos profesionales relacionados con la enseñanza de la resolución de problemas y específicamente del conocimiento del profesor en formación. Con objeto de focalizar nuestro trabajo, enmarcamos el conocimiento de los futuros docentes bajo las ideas de Liljedahl et al. (2009); Ponte y Chapman (2016) y Blanco (2004).

Si bien no existe un acuerdo unánime sobre cómo describir el conocimiento del profesor, se reconoce que es un conocimiento que consta de varias dimensiones. Entre ellas, el conocimiento del contenido y didáctico del contenido se muestran idóneas para reflexionar sobre el conocimiento de los futuros profesores (Ponte y Chapman, 2016). En esta misma línea, reflexionando sobre los componentes de la formación inicial, Liljedahl et al. (2009) señalan que el conocimiento del futuro profesor de matemáticas puede ser organizado en tres grandes dimensiones: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento pedagógico. Estos autores plantean que estos conocimientos se presentan de forma discreta durante la formación y que durante el transcurso de esta, se integran y unifican en un conocimiento para la enseñanza. De manera similar, Blanco (2004) señala que en el conocimiento de los futuros profesores es posible identificar dos componentes o dimensiones. Una de ellas estática, relativa al conocimiento teórico independiente del profesor, y otra dinámica que se genera y evoluciona a partir de conocimientos, creencias y actitudes personales. Esta última se desarrolla por medio de un proceso dialéctico entre la teoría asimilada y la experiencia real o práctica. Bajo esta perspectiva, focalizaremos la discusión en los aspectos que atañen únicamente a la educación matemática, por tanto, nuestro foco estará puesto en el conocimiento del contenido y didáctico del contenido, específicamente sobre resolución de problemas, y desde una perspectiva estática.

Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

Como señalan Montes, Ribeiro y Carrillo (2017) en las últimas tres décadas han surgido una multiplicidad de marcos que intentan representar el conocimiento del profesor. Entre ellos encontramos la Topología del Conocimiento Profesional de Bromme (1994); el Conocimiento del Profesor en Contexto de Fennema y Franke (1992); el Cuarteto del Conocimiento de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005); el Conocimiento-para-la-Enseñanza de Davis y Simmt (2006); el Conocimiento Matemático para la Enseñanza del Grupo de Michigan (Ball et al., 2008; Hill y Ball, 2009); el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas de Carrillo et al. (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Carrillo et al., 2018); el Sistema del Átomo del Conocimiento de Scheiner (2015); y el Conocimiento profesional del profesorado (Ponte, 1999, 2012), entre otros. Estos modelos se han basado en gran medida en el trabajo de Shulman (1986) y se han centrado principalmente en dos de los dominios del conocimiento de los docentes en los que su trabajo centró la atención: el conocimiento del contendido y el conocimiento del contenido pedagógico.

Si bien existe una preocupación inicial sobre el conocimiento del profesor (e.g. Begle, 1968; Eisenberg, 1977), se suele señalar a los trabajos de Shulman (1986, 1987) como seminales. Uno de los aportes que mayor efecto han tenido en la investigación es la propuesta de un conocimiento propio de los profesores. Un tipo especial de conocimiento que permite a los docentes realizar su labor: el conocimiento didáctico del contenido. El marco de Shulman (1987) considera siete dimensiones en el conocimiento del profesor:

> *Conocimiento del contenido;*
>
> *Conocimiento didáctico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;*
>
> *Conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;*
>
> *Conocimiento didáctico del contenido: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;*
>
> *Conocimiento de los alumnos y de sus características;*
>
> *Conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y*
>
> *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.* (p. 8)

Sin embargo, algunas limitaciones de este modelo han sido reseñadas en la literatura (e.g. Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013). Una de ellas tiene relación con que "no se enfatizan las relaciones entre los diferentes tipos de conocimiento, que aparecen en su exposición teórica como componentes aisladas" (Castro-Rodríguez, 2015, p. 52). En este sentido, Fennema y Franke (1992) plantean que el conocimiento del profesor es "un gran sistema, integrado y funcional, con cada parte difícil de aislar" (p. 148). Más aún, Bromme (1994) plantea que "la fusión de conocimientos que vienen de diferentes orígenes es el rasgo particular del conocimiento profesional de los profesores, comparado con el conocimiento codificado de las disciplinas en que ellos han sido formados" (p. 75). Es así como el entendimiento del conocimiento del profesor debe realizarse desde esta perspectiva, aunque en términos prácticos, se investigue de manera aislada.

Esta y otras críticas han hecho que los investigadores realicen reinterpretaciones del modelo. En lo que sigue reseñamos aquellos ejemplos característicos e influyentes que pueden crear un espectro lo suficientemente amplio para mostrar cuán diverso es este campo.

Topología del Conocimiento Profesional

A partir del trabajo de Shulman (1986, 1987), Bromme (1994) realiza un diferenciación de las categorías con el objeto de describir rasgos cualitativos del conocimiento profesional. Con esta premisa, este autor distingue cinco categorías en el conocimiento profesional:

- Conocimiento del contenido sobre las matemáticas como disciplina. "Esto es lo que el profesor aprende durante sus estudios y contiene entre otras cosas, proposiciones matemáticas, reglas, modos de pensamiento matemático y métodos" (Bromme, 1994, p. 74).
- Conocimiento matemático escolar. Es el conocimiento del profesor de las matemáticas desde una perspectiva escolar. Para este autor, las matemáticas como disciplina y las matemáticas como objeto de enseñanza tienen matices distintos. Las matemáticas que se enseñan en la escuela no son una simplificación de las matemáticas disciplinares. Las matemáticas escolares tiene su propia lógica.
- Filosofía de las matemáticas escolares. Este es el conocimiento de "las ideas sobre los fundamentos epistemológicos de la matemática y del aprendizaje de la matemática y sobre la relación entre la matemática y otros campos de la vida humana y el conocimiento. La filosofía de la materia escolar es un contenido implícito de enseñanza e incluye elementos normativos" (Bromme, 1994, p.74).
- Conocimiento pedagógico. Se refiere al conocimiento "que tiene una validez relativamente independiente separada de la materia escolar. Incluye

cómo introducir los modelos de conducta necesarios para ocuparse de una clase" (Bromme, 1994, p. 75).

- ♦ Conocimiento didáctico del contenido específico. Trata del conocimiento que permite tomar decisiones para la enseñanza. Es decir, permite "encontrar formas convenientes de presentar la materia, determinar el orden temporal de tratar los temas y evaluar qué temas deben ser tratados más profundamente" (Bromme, 1994, p. 75).

Conocimiento del Profesor en Contexto

A la luz de una revisión a las investigaciones sobre el conocimiento del profesor, Fennema y Franke (1992) proponen un modelo que se centra en el conocimiento de los docentes tal como ocurre en el contexto del aula. "El modelo, que muestra la naturaleza interactiva y dinámica del conocimiento del profesor, incluye los componentes del conocimiento del profesor sobre el contenido de las matemáticas, el conocimiento de la pedagogía, el conocimiento de las cogniciones de los estudiantes y las creencias de los profesores" (p. 162).

- ♦ El conocimiento de las matemáticas. Referido al conocimiento de los conceptos, procedimientos y procesos de resolución relativos al dominio en el que enseñan, así como en los dominios de contenido relacionados. Incluye en este componente el conocimiento de los conceptos subyacentes a los procedimientos, la interrelación de estos conceptos y cómo estos conceptos y procedimientos se utilizan en varios tipos de resolución de problemas. Así mismo, incluiría las formas en que estos conocimientos están organizados e interrelacionados.
- ♦ Conocimiento pedagógico. Trata sobre el conocimiento sobre los procedimientos de enseñanza, tales como estrategias efectivas para la planificación, rutinas en el aula, técnicas de manejo conductual, procedimientos de organización en el aula y técnicas de motivación.
- ♦ Conocimiento de la cognición de los estudiantes. Relativo al conocimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden y, en particular, cómo ocurre esto dentro del contenido específico de las matemáticas. Es decir, se refiere al conocimiento de cómo los estudiantes adquieren el conocimiento del

contenido matemático que se quiere enseñar, así como la comprensión de los procesos que los estudiantes utilizarán, las dificultades y los éxitos que podrían enfrentar.

La figura 5 muestra estos componentes y sus posibles relaciones. Para estas autoras, el triangulo central indica que el conocimiento de los profesores está en un contexto específico o cómo este estaría situado. Esto quiere decir que el conocimiento de las matemáticas, pedagógico y de las cogniciones de los estudiantes, según un contexto dado, se combina con las creencias para "crear un conjunto único de conocimiento que impulsa el comportamiento en el aula" (p. 165).

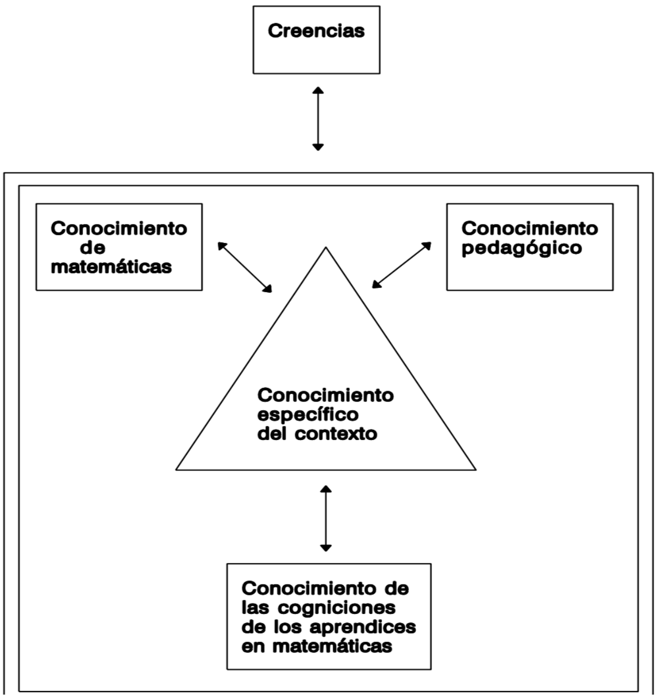


Figura 5. Conocimiento del profesor: Desarrollo en contexto (Fennema y Franke, 1992, p. 162)

Conocimiento profesional del profesorado

Ponte (1999, 2012) plantea un modelo que tiene como eje central lo que el llama el conocimiento profesional. Para este autor se trata de un conocimiento "particular de un grupo social específico –el profesorado de matemáticas– que, a pesar de estar sujeto a múltiples influencias, asume su especificidad en función de su actividad práctica y de las condiciones en las cuales ésta se ejerce" (2012, p. 85). En este conocimiento profesional se distinguen diversos aspectos como la práctica no educativa o el conocimiento didáctico. Este último es clave pues es dónde "la especificidad de la disciplina matemática se hace sentir de modo más intenso" (2012, p. 86). En este conocimiento didáctico se diferencian cuatro dimensiones: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento del currículo, el conocimiento del alumnado y de sus procesos de aprendizaje y el conocimiento de los procesos de trabajo en el aula.

- Conocimiento de la matemática para su enseñanza. Referido a la interpretación que el profesor realiza de las matemáticas como contenido escolar. Esto incluye tanto conceptos y procedimientos como formas de representación, conexiones y relaciones. Se incluyen además las creencias y concepciones del profesorado sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Conocimiento del alumnado y de su aprendizaje. Trata sobre el conocimiento de los estudiantes como aprendices, pero también como personas. Esto implica conocer sus "sus intereses, gustos, formas habituales de comportarse y reaccionar, valores, referencias culturales, modos de aprender" (2012, p. 86)
- Conocimiento de la práctica educativa. Se corresponde con el conocimiento que permite planificar, seleccionar tareas, conducción de las clases, gestión de las clases y los estudiantes, etc.
- Conocimiento del currículo. Relativo al conocimiento de las finalidades y objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas y el modo de gestionarlas.

El conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

Uno de los modelos de conocimiento que mayor relevancia ha tenido es el realizado por Ball et al. (Ball et al., 2008; Ball y Bass, 2009; Hill y Ball, 2009; Thames y Ball, 2010). El llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT por sus siglas en inglés) contiene dos dimensiones: el conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. Cada una con sus respectivas subdominios como puede observarse en la figura 6.

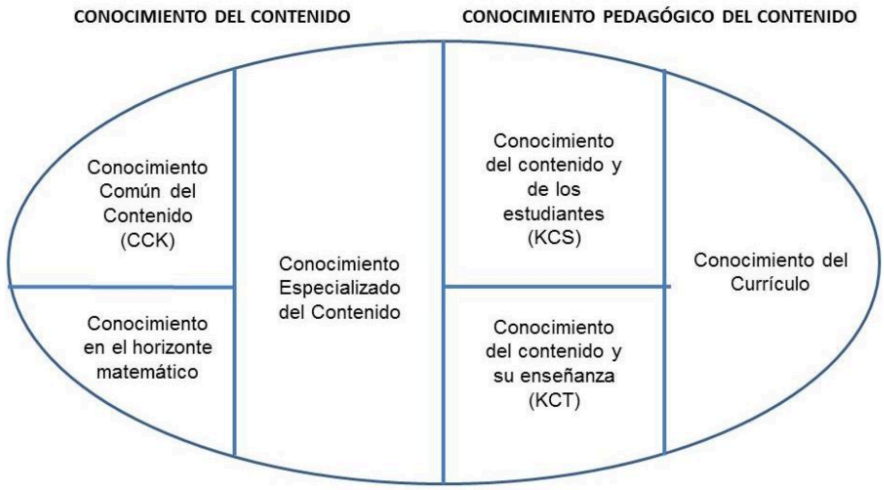


Figura 6. Dominios de conocimiento matemático para la enseñanza - MKT (Ball et al. 2008, p. 403)

La primera de ellas, se refiere a la matemática implicada en la enseñanza necesaria para resolver las tareas propuestas a los estudiantes (Ball et al., 2008). Según sus autores, un primer dominio dentro de esta dimensión es el conocimiento común del contenido. Este conocimiento es definido como "el conocimiento y habilidades matemáticas utilizados en entornos distintos de la enseñanza" (Ball et al., 2008, p. 399), refiriéndose a que "algunos de los recursos matemáticos que requiere la enseñanza son similares a los conocimientos matemáticos utilizados en entornos distintos al aula" (Thames y Ball, 2010, p. 223). Estos permitirían "saber si la respuesta de un estudiante es correcta" (Hill y Ball, 2009, p. 70). Un ejemplo que se utiliza para caracterizarlo es saber discriminar la veracidad de frases como el 0 es un número par o el 0 no es realmente un número, sino un marcador de posición para escribir grandes números (Ball et al., 2008). Según los autores este conocimiento no es solo propio de los profesores, sino de todos aquellos que hayan adquirido conocimientos matemáticos.

Junto a este conocimiento común del contenido, Ball et al. (2008) distinguen un conocimiento que es propio del profesor, el conocimiento especializado del contenido. Este dominio es reconocido como uno de los grandes aportes de este modelo y se corresponde con un conocimiento matemático que no es necesario en otras áreas de conocimiento diferentes a la enseñanza. Además, se señala que no depende de los estudiantes, de la enseñanza o el currículo escolar (Thames y Ball, 2010). Un ejemplo de este tipo de conocimiento es ser capaz de modelar la aritmética con números enteros usando diferentes representaciones (Hill y Ball, 2009). Es decir, un conocimiento que supone una perspectiva distinta del concepto involucrado, que es útil y necesario para su comprensión.

El último subdominio es el conocimiento del horizonte matemático, descrito como la "visión matemática periférica" (Thames y Ball, 2010, p. 224). Este permite una perspectiva amplia de las implicaciones y conexiones existentes entre los diferentes conceptos que se enseñan (Hill y Ball, 2009).

Un segundo dominio es el conocimiento didáctico, descrito como una amalgama entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general (Thames y Ball, 2010). Además, sus autores señalan que en este dominio es posible identificar unos "subdominios que combinan el conocimiento del contenido con el conocimiento de los estudiantes, la enseñanza y el currículo" (p. 223).

El primer subdominio es el conocimiento del contenido y los estudiantes y tiene como noción central las concepciones, los errores y dificultades más comunes de los estudiantes sobre un contenido matemático particular. Este se hace evidente cuando un profesor sabe que cuando los estudiantes se enfrentan a una sustracción como *307–168=____,* es posible que inviertan los roles del minuendo y el sustraendo debido a la ausencia de decenas sin agrupar y la menor cantidad de unidades sin agrupar en 307. Por tanto, ya no solo identifica el error y su naturaleza, sino que lo reconoce como una dificultad común y planifica tareas acordes a ello (Ball et al., 2008).

Un segundo subdominio se corresponde con el conocimiento del contenido y la enseñanza, definido como la combinación entre el saber sobre la enseñanza y saber sobre matemáticas (Ball et al., 2008). Los autores lo describen como un conocimiento que permite tomar las decisiones adecuadas sobre ejemplos, tareas o evaluaciones que permiten el aprendizaje de un concepto. Un ejemplo es conocer los diferentes modelos viables para el valor posicional, sus características, sus ventajas y desventajas. Este conocimiento ayudaría al profesor a conocer que las diferencias entre ellos importan para el desarrollo del tema.

El último subdominio es llamado conocimiento del currículo y es entendido como el conocimiento sobre las propuestas curriculares oficiales orientadas al aprendizaje de los estudiantes. Ball y Bass (2009) señalan que es una visión detallada del currículo escolar, menos amplia que la visión periférica que describe el conocimiento del horizonte matemático, pues está centrada en los estándares y sus conexiones, y materiales generados que los complementan.

Si bien, la base empírica de este modelo ha hecho que tome gran notoriedad, se han realizado algunas críticas a este modelo (Carrillo et al., 2013; Depaepe et al., 2013), entre las que destaca la imposibilidad de definir claramente entre subdominios.

El cuarteto del conocimiento

Paralelo al MKT, en Reino Unido emerge el *Quartet Knowledge*, que también fue desarrollado a partir de las ideas de Shulman (1986). Su carácter evaluativo, surgido en un contexto de prácticas en el aula de un programa de formación inicial de profesores, dio lugar a que las dimensiones que emplea sean distintas a la tradicional distinción entre conocimiento del contenido y didáctico del contenido. Conceptualiza el conocimiento del profesor como conocimiento en la acción, lo que produce que sus dimensiones sean apropiadas para la identificación del conocimiento en la práctica (Rowland et al., 2005; Turner y Rowland, 2011).

Una primera dimensión de este modelo, la fundamentación, tiene relación con los conocimientos previos y creencias de los profesores. Turner y Rowland (2011) señalan que se refiere al conocimiento, comprensión y los recursos disponibles que se han aprendido durante las distintas etapas de formación, difiriendo de las otras tres dimensiones en el sentido de que se trata de conocimiento poseído (intencionalmente o no). Los autores señalan que en esta dimensión se distinguen aspectos claves como conocimiento y comprensión de: (1) las matemáticas per se, (2) aspectos significativos resultantes de la investigación, y (3) creencias sobre las matemáticas, incluyendo por qué y cómo se aprende (Rowland et al., 2005).

Las tres restantes dimensiones, son relativas a conocimiento en la acción. La segunda dimensión del modelo, la transformación, describe una acción orientada al estudiante que deriva de un juicio informado basado en la primera dimensión, la fundamentación (Rowland et al, 2005). Esto se traduciría en la elección de ejemplos, representaciones y demostraciones (Turner y Rowland, 2011). La tercera dimensión de este modelo, o conexiones se corresponde con las relaciones que se establecen entre elementos matemáticos, que son coherentes con su lógica interna (Rowland y Turner, 2011). En ella distinguen la anticipación a la complejidad, decisiones sobre la secuenciación, las posibles conexiones o el reconocimiento de si es conceptualmente apropiado. Por último, la dimensión final o contingencia "se refiere a la respuesta del maestro a eventos de la clase que no fueron anticipados en la planificación" (Turner y Rowland, 2011, p. 202), es decir, se relaciona con la desviación de la planificación, las posibles respuestas a las ideas de los estudiantes y el uso de estas como oportunidades de aprendizaje.

No obstante, este modelo, al igual que el modelo MKT presenta algunas dificultades que hemos detectado. Desde la perspectiva de la resolución de problema, el conocimiento que establece la descripción de la fundamentación estaría dado por su propia competencia para resolver problemas, aspectos teóricos surgidos de la investigación referidos a la resolución de problemas y las creencias que tengan sobre este proceso. Además, incluiría elementos relativos a enfoques o vías de acceso, evaluación, selección de las tareas, etc. Por tanto, esta dimensión mezclaría en una sola, elementos sobre los problemas y su enseñanza, y sobre creencias de todos ellos. Esta y otras preocupaciones, especialmente la dificultad para diferenciar entre categorías, ha hecho que Carrillo et al. (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018) propongan un marco en que además, los procesos tienen un lugar explícito.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El grupo de investigación liderado por Carrillo, considera que el conocimiento especializado no se encuentra solo en el dominio matemático, si no que también se relaciona con aspectos del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que esta especialización debe referirse al conocimiento profesional en su conjunto. Esto provocó una redefinición de los subdominios de conocimiento, y el desarrollo del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés). Carrillo et al. (2018) señalan que "este modelo presenta una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento del contenido pedagógico y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización" (p. 240), considerando dos áreas de conocimiento: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido. Cada uno con sus subdominios como puede observarse en la figura 7.

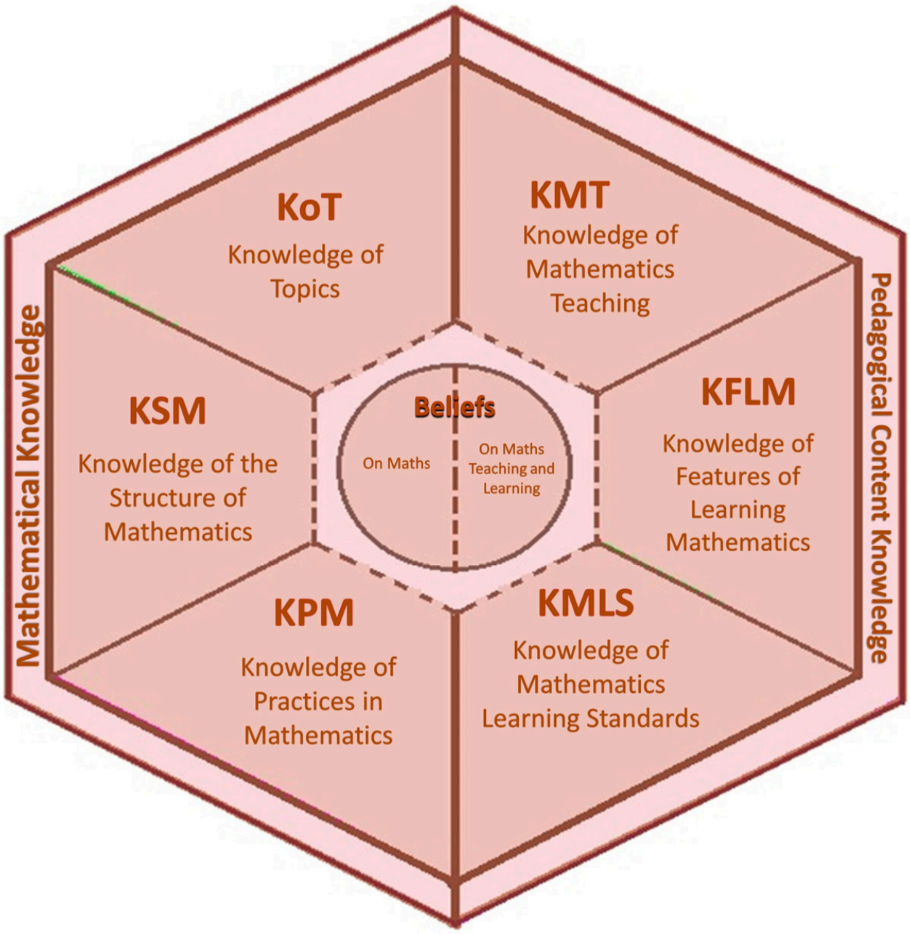


Figura 7. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas – MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 241)

El conocimiento matemático es entendido:

> *como una red de conocimiento sistémico estructurada de acuerdo con sus propias reglas. Al comprender bien esta red (los nodos y las conexiones entre ellos), las reglas y características relacionadas con el proceso de creación de conocimiento matemático le permiten al profesor enseñar el contenido de manera conectada y validar sus propias conjeturas y las de los alumnos.* (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Esto hace que se divida en tres subdominios: el contenido matemático en sí (Conocimiento de los temas); los sistemas de interconexión que unen los conceptos (Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas); y cómo se avanza en matemáticas (Conocimiento de Prácticas en Matemáticas). Respecto al conocimiento didáctico del contenido, Carrillo et al. (2018) señalan que:

> *más que tratarse de la intersección entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, es un tipo específico de conocimiento de la pedagogía que se deriva principalmente de las matemáticas. Por lo tanto, no incluimos en este subdominio el conocimiento pedagógico general aplicado a contextos matemáticos, sino solo ese conocimiento en el que el contenido matemático determina la enseñanza y el aprendizaje que tienen lugar.* (p. 246)

Esto ha llevado a que identifiquen tres subdominios que se han denominado Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, y Conocimientos sobre estándares de aprendizaje matemático.

La activación cognitiva en el aula de matemáticas y competencia profesional de los docentes (COACTIV)

A raíz de la prueba PISA 2003 y una ampliación de esta aplicación en Alemania, un grupo de investigadores (Kunter et al., 2013) plantea un modelo de competencia profesional que integra la teorización del profesionalismo con la literatura sobre competencia. En este modelo se distinguen cuatro aspectos de la competencia: conocimiento, creencias, motivación y autorregulación. Cada uno de los cuales comprende dominios más específicos derivados de la literatura. Estos dominios se diferencian aún más en facetas, que se operan mediante indicadores concretos. Nos centramos en los referidos al conocimiento que es señalado, por los autores, como el corazón de la competencia profesional. La figura 8 muestra los diferentes tipos de conocimiento que se distinguen en este marco. Los autores proponen una clasificación jerárquica del conocimiento matemático: (a) el conocimiento de investigación académica generado en los institutos de educación superior, (b) un profundo conocimiento matemático de las matemáticas que se enseñan en la escuela, (c) un dominio de las matemáticas de la escuela cubierto en el nivel enseñado, y (d) el conocimiento matemático cotidiano que los adultos retienen después de abandonar la escuela.

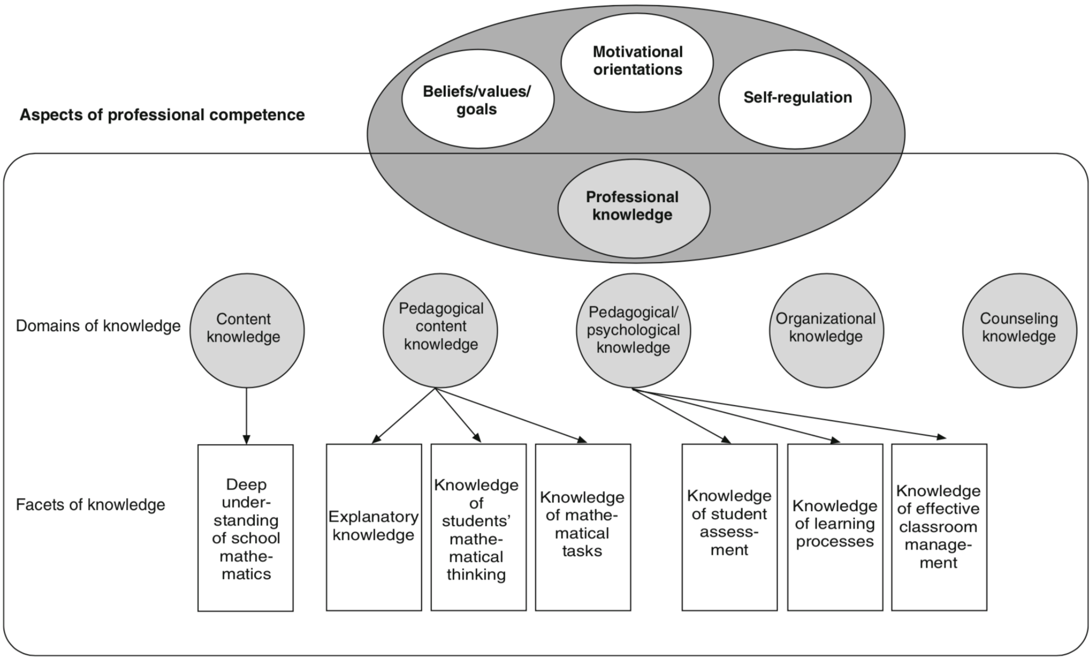


Figura 8. El modelo COACTIV de competencia profesional, con el aspecto del conocimiento profesional especificado para el contexto de la enseñanza (Baumert y Kunter, 2013, p. 29)

De la clasificación realizada, emerge el primer componente: conocimiento del contenido.

- Conocimiento del contenido. Entendido como una comprensión matemática profunda del contenido curricular que debe enseñarse. Este conocimiento tiene sus fundamentos en la disciplina académica de referencia, pero es un dominio del conocimiento en sí mismo que se define en el currículo escolar y se desarrolla continuamente sobre la base de la retroalimentación de la práctica docente.
- Conocimiento didáctico del contenido. Se distingue del conocimiento del contenido pues trata los conocimientos y habilidades matemáticas relacionadas con el estudiante, el conocimiento que hace que las matemáticas sean accesibles a los estudiantes. En él, se distinguen tres dimensiones: el conocimiento de las tareas matemáticas como herramientas de enseñanza (e.g. conocimiento del potencial de las tareas para facilitar el aprendizaje), el conocimiento del pensamiento de los alumnos y la evaluación de la comprensión (e.g. creencias y errores típicos de los estudiantes), y el conocimiento de múltiples representaciones y

explicaciones de problemas matemáticos (e.g. formas de mediar el aprendizaje mediante representaciones).

- Conocimiento pedagógico/psicológico general. Relativo a un conocimiento de dominio general sobre la mejor forma de configurar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En él se distinguen un conocimiento conceptual de los fundamentos de la educación (e.g. psicología del desarrollo), conocimiento pedagógico general de la planificación de la enseñanza (e.g. modelos de planificación), conocimiento de la gestión y orquestación de las oportunidades del aprendizaje (e.g. creación de ambientes constructivos para el aprendizaje), conocimiento de dominio general de principios de diagnóstico y evaluación (e.g. procesos de evaluación), y conocimiento básico de los métodos de investigación social empírica.
- Conocimiento organizacional. Relativo al conocimiento del sistema educativo y su marco institucional; a la gestión, gobierno y transparencia; a la organización y ecología de la escuela, y los derechos y responsabilidades de los agentes educativos, y el papel de la gestión escolar; a la calidad y efectividad escolar; y a las teorías de la escolarización.
- Conocimiento comunicativo. Los autores señalan que los profesores necesitan un conocimiento específico para comunicarse de manera efectiva con los demás agentes intervinientes en la escuela (especialmente estudiantes y padres). En él distinguen uno relativo al conocimiento pedagógico general y otro relativo al conocimiento del contenido y pedagógico del contenido. Este conocimiento permitiría a los profesores tomar decisiones sobre situaciones relativas a los estudiantes y con quién tomarlas.

El marco de TEDS-M

El estudio internacional TEDS-M (Tatto et al., 2008) plantea dos dimensiones: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico matemático.

- Conocimiento del contenido matemático. Se conceptualiza de acuerdo a tres dominios: contenido, nivel cognitivo y curricular. Concretamente, el dominio de contenido se subdivide en los subdominios de número y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, datos y posibilidad; el dominio cognitivo se subdivide en subdominios sobre conocer, aplicar, razonar; y el dominio de nivel curricular se subdivide en subdominios de principiante, intermedio, avanzado.

- Conocimiento didáctico matemático. Al igual que la dimensión anterior, distingue tres dimensiones. Particularmente, en el dominio de contenido se observan los subdominios de números y operaciones, geometría y medidas, álgebra y funciones, y datos y posibilidades; en el dominio específico de conocimiento didáctico matemático se distinguen los subdominios del conocimiento curricular, planificación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, promulgación de las matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje); y en el nivel curricular se observan los subdominios de nivel principiante, intermedio y avanzado.

Matemática-para-la-Enseñanza

Davis y Summitt (2006) proponen un modelo de conocimiento que parte de dos premisas: primero, que las matemáticas que deben saber los profesores son distintas a las matemáticas formales y que la solución no es saber más matemática, sino saber las matemáticas para la enseñanza. El segundo supuesto es que los profesores se forman con materias que dan las facultades de ciencias y algunas pedagógicas que dan las facultades de educación. A través de la utilización de las Ciencia de la Complejidad (que explica como funcionan sistemas complejos como el cerebro o los hormigueros) plantean un modelo desde una perspectiva de sistema complejo que puede observarse en la figura 9.

Los autores de este modelo realizan una categorización y caracterización del conocimiento necesario para enseñar. En el modelo se distinguen dos categorías: conocimiento (estable) y conocer (dinámico). Cada uno de ellos es descrito de la forma en que puede observase en los docentes.

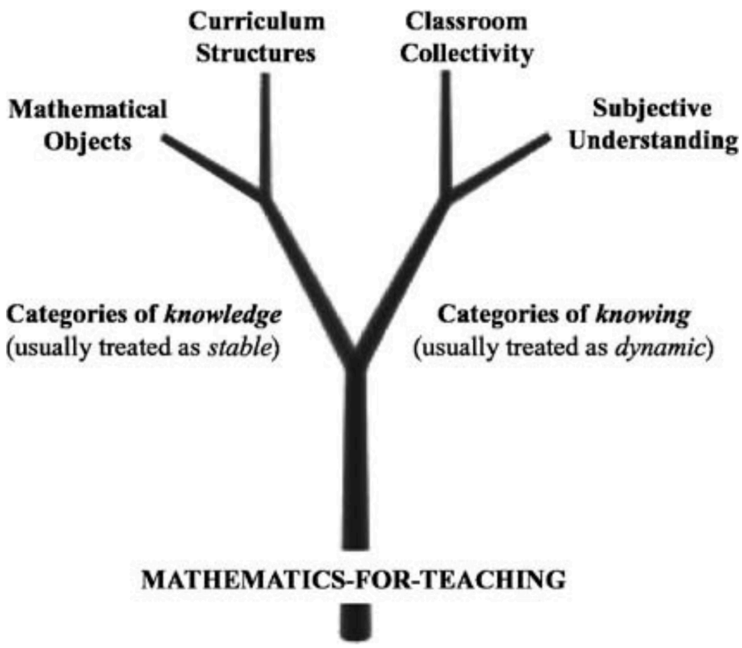


Figura 9. Modelo Mathematics-for-Teaching (Davis y Summitt, 2006, p. 298)

- Objetos matemáticos. Los autores señalan que los conceptos matemáticos (objetos) son complejos y tienen variadas interpretaciones. Estas interpretaciones configuran el objeto, pero no son una suma de ellas, sino una especie de mezcla conceptual compleja. Estos objetos no se *apilan* sobre lo que ya se ha establecido, sino que se incorporan a las ideas existentes. Estas mezclas conceptuales son elaboraciones recursivas, que contribuyen a nociones mucho más flexibles y poderosas.
- Estructura curricular. Es un conocimiento de los conceptos no lineal o espiral como suele describirse. Estos autores plantean que este es un conocimiento recursivo, un tipo de repetición que no solo se suma, sino que transforma fundamentalmente la forma original, una que, en consonancia con el comportamiento de otros sistemas complejos anidados, se remonta a abarcar y afectar a todas las elaboraciones anteriores.
- Dinámica colectiva. Trata sobre que el conocimiento para la enseñanza no es un conocimiento particular de un individuo. Esta colectividad emerge desde la diversidad de los agentes que intervienen, la igualdad de propósitos, la relación profesor/estudiante, reglas y posibilidades, y interacciones con otros.

- ♦ Comprensión subjetiva. Relativo a la complejidad del aprendizaje de los estudiantes. Los autores plantean que todo aprendizaje humano es simultáneamente biológico y cultural. En este sentido y en términos de complejidad, un conjunto de conocimientos como la matemática no reside en los conocedores individuales, al igual que no reside en un plano metafísico trascendente. Más bien, surge en las acciones contextualizadas y co-específicas de los conocedores que pueden dar lugar a nuevos órdenes de organización.

El sistema del átomo del conocimiento

Scheiner (2015) plantea que el conocimiento para enseñar matemáticas es complejo y multidimensional. En este sentido, su propuesta no tiene tanto énfasis en qué deben saber sino en la forma en que se organiza, las fuentes de ese conocimiento y su naturaleza. El modelo propuesto utiliza las nociones de conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento del contexto para mostrar que la forma del conocimiento es una superposición de conocimientos. Así mismo, se plantea que el conocimiento de los profesores tiene una naturaleza específica del contenido. Además, sus bases están en el conocimiento de la comprensión matemática de los estudiantes, el conocimiento del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, junto con el conocimiento del contenido matemático per se y el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza.

En definitiva, este modelo plantea que el conocimiento profesional especializado en la enseñanza de las matemáticas es el repertorio de átomos de conocimiento que se han transformado a lo largo de el conocimiento de la comprensión matemática de los estudiantes; conocimiento del aprendizaje de las matemáticas; y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, tomando el conocimiento del contenido matemático per se y el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza como piedras angulares. En este sentido, el conocimiento se combina en una nueva forma de conocimiento más compleja que sus partes. Asimismo, la noción de átomo hace referencia a lo sensible al contexto que es este conocimiento.

Tras esta revisión, podemos notar que, a excepción del modelo de MTSK, los procesos no tienen un lugar explícito. El modelo de Carrillo et al. (2018) avanza a este respecto, sin embargo, no existen unas categorías para el conocimiento de las prácticas matemáticas, ya que el grupo de descriptores en categorías está bajo estudio. No obstante, un primero elemento que llama la atención es relativo a la naturaleza de la resolución de problemas. Si este subdominio se encuentra en la dimensión del conocimiento matemático, qué cabida tiene que el estudiante/resolutor sea el que etiqueta una tarea como problema. En este contexto, la resolución de problemas presenta particularidades que los modelos surgidos desde la lógica de los conceptos escolares suelen no considerar.

El conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas

En los últimos años, diversos investigadores han evidenciado que los modelos de conocimiento del profesor son demasiado generales, omitiendo algunos aspectos en la configuración del conocimiento (Lin y Rowland, 2016). En este contexto, estudios como el de Carpenter et al. (1988), el de Verschaffel et al. (1997) o los de Chapman (2012) muestran la existencia de un conocimiento particular sobre la resolución de problemas en los docentes y la influencia que tiene esto en el desarrollo de sus estudiantes. Esto ha generado la necesidad de ampliar algunos aspectos o reinterpretar los marcos ya establecidos (Lin y Rowland, 2016).

Entre los marcos que han emergido para solventar esta problemática, destacamos el trabajo pionero de Burns y Lash (1988), y los esfuerzos posteriores de Foster et al. (2014), y de Chapman (2012, 2014, 2015).

Burns y Lash (1988) examinan cómo las concepciones sobre la enseñanza de la matemática influencian la forma en que se planifica la instrucción de la resolución de problemas. Las limitaciones en cuanto al conocimiento manifestadas por los profesores en sus resultados los hacen proponer una reestructuración a la categorización realizada por Shulman (1986). Según estos autores es necesario modificar ligeramente la organización puesto que existe un conocimiento pedagógico general que es conocimiento didáctico del contenido. Argumentan que sus resultados se deben a que en el conocimiento pedagógico general solo se ubicaría el conocimiento relativo a las formas en que se desarrolla la clase y a cómo agrupar a los estudiantes. No así las estrategias de enseñanza, o cómo se enseña, que formaría parte del conocimiento didáctico del contenido, pues lo consideran específico de la resolución de problemas. Enfatizan esta diferencia entre lo que denominan *delivery system* (más relacionado con la estructura del contenido) y *teaching tecniques* (más relacionado con la presentación del contenido).

Foster et al. (2014) hacen notar que el conocimiento del profesor se ha interpretado generalmente en términos de contenido, omitiendo las particularidades de los procesos como la resolución de problemas. Para estos autores, el modelo de Ball et al. (2008) debe explicitar que la noción de contenido es una amalgama entre conceptos y procesos. La figura 10 muestra la relectura realizada.

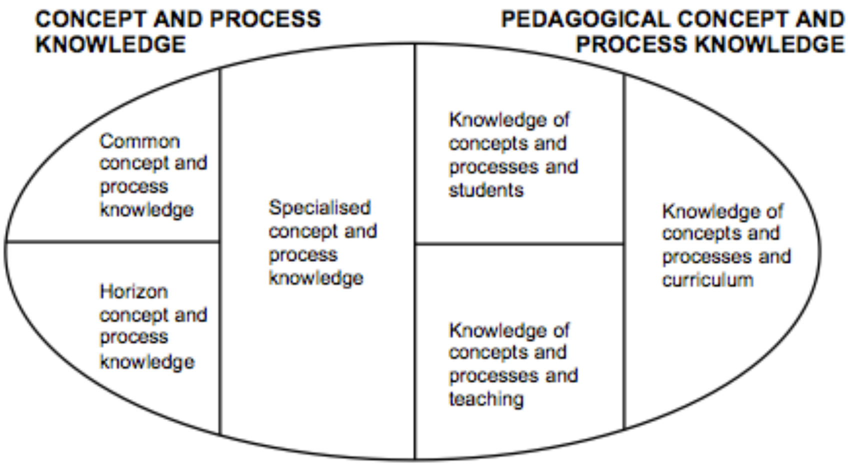


Figura 10. Mapa de los dominios del MKT reescrito con "conceptos y procesos" en lugar de "contenido" (Foster et al. 2014, p. 98)

Desde esta perspectiva, el modelo debe considerar un conocimiento de conceptos y procesos (común, especializado y en el horizonte) y un conocimiento didáctico de conceptos y procesos. Este último dominio se desglosa en: (1) conocimientos de procesos y estudiantes, entendido como la imbricación del conocimiento de los procesos y formas comunes en las que los estudiantes piensan acerca de los procesos, qué contextos los motivan a aprender los procesos y qué dificultades pueden tener, (2) el conocimiento sobre los procesos y la enseñanza, relacionado con el conocimiento y la capacidad de utilizar estrategias efectivas para enseñar procesos de resolución de problemas, y (3) el conocimiento sobre los procesos y el currículo escolar, que permite seleccionar y secuenciar tareas adecuadas para facilitar un desarrollo coherente en las habilidades de proceso de los estudiantes.

Esta llamada de atención de Foster et al. (2014), sin embargo es demasiado conservadora. La reescritura que realizan del modelo de Ball et al. (2008) refuerza la idea que Carrillo et al. (2013) realizan sobre la dificultad existente para diferenciar entre conocimiento común y especializado de los conceptos y procesos. Concretamente, en esta reinterpretación cabe la pregunta sobre, ¿qué aspectos de resolver un problema corresponde a un conocimiento común y cuáles a un conocimiento especializado? Además, también es factible cuestionar dónde se ubicaría el rol del profesor para seleccionar un buen problema (Cai y Lester, 2016), ¿es un conocimiento sobre procesos y enseñanza? o ¿es un conocimiento especializado del proceso?

Chapman (2012, 2014, 2015) desarrolla un marco denominado Conocimiento para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos (MPSKT por sus siglas en inglés). En él, se aborda el conocimiento profesional de un profesor para enseñar la resolución de problemas matemáticos, y se pone de manifiesto como su configuración no es similar a la de un concepto matemático. En este modelo se considera la competencia sobre resolución de problemas como un activo del conocimiento del profesor y se desarrolla sus dimensiones en torno a esta (ver figura 11). De acuerdo a Chapman (2015) la enseñanza de la resolución de problemas incluye una red de elementos que se relacionan estrechamente.

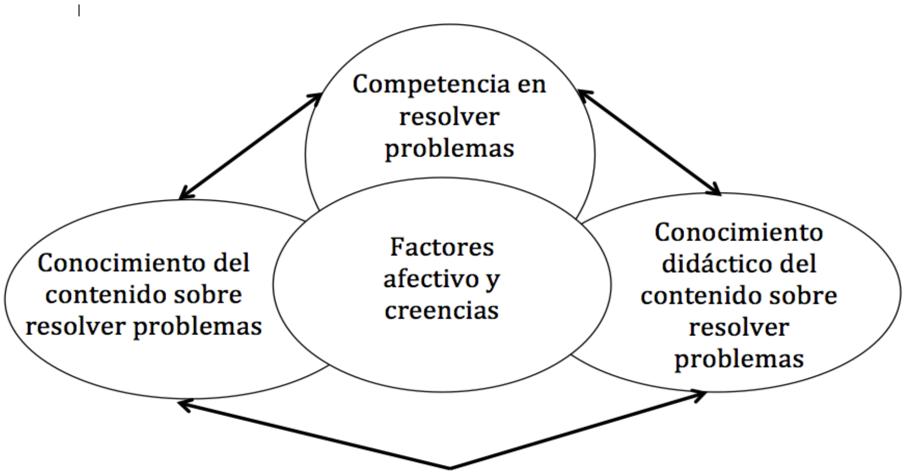


Figura 11. Modelo sobre el conocimiento para la enseñanza de resolución de problemas matemáticos (Chapman, 2015, p. 32)

El modelo planteado por esta autora se compone de la competencia del profesor para resolver problemas, un conocimiento del contenido sobre problemas y la resolución e invención de estos; un conocimiento didáctico sobre los estudiantes como resolutores y prácticas de enseñanza, y de los factores afectivos y creencias que afectan la enseñanza de este proceso.

Chapman (2015), describe la competencia en resolución de problemas como "lo que es necesario para que uno aprenda y resuelva problemas genuinamente con éxito" (p. 20). Esta competencia se caracteriza por: (1) una comprensión conceptual de los contenidos matemáticos, operaciones y relaciones; (2) una comprensión de heurísticos generales y estrategias específicas; y cuándo y cómo usarlas; (3) una capacidad para pensar y comprender procesos de monitoreo cognitivos y metacognitivos durante la resolución de un problema; y (4) tener creencias sobre las matemáticas, la resolución de problemas y la capacidad de resolver problemas, que apoyen la motivación y la confianza.

El conocimiento referido a los problemas, responde a la necesidad del profesor de tener una comprensión de la naturaleza de los problemas para ser competente en la selección y diseño de estos, permitiendo apoyar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en sus estudiantes. Esta comprensión debe abarcar la estructura y propósito de cada problema. También debe considerarse como conocimiento, el posible impacto que tiene en los estudiantes cada uno de los tipos existentes. Ejemplos de este tipo de conocimiento, serían definiciones de problemas que apoyen la toma de decisiones al seleccionarlos; clasificaciones de problemas según número de operaciones, el número de variables, el proceso heurístico específico necesario para su resolución, estructura semántica; problemas de final abierto, etc.

El conocimiento sobre resolver problemas es definido como la resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor. Este tipo de conocimiento incluye comprensión sobre estrategias de resolución según el contenido matemático implicado, selección de estrategias, interpretación de la información contenida en el problema, diversidad de soluciones a un mismo problema, interpretación de respuestas inusuales de los estudiantes dados en cada momento de la resolución, heurísticos generales y específicos, fases de resolución, etc.

El conocimiento sobre la invención de problemas se relaciona con la resolución de problemas pues permite generar nuevos problemas o reformular los dados. Su importancia radica en la potencialidad que tiene este tipo de tarea en el pensamiento matemático de los estudiantes. Chapman (2015) destaca el impacto que tiene en promover un pensamiento divergente y flexible, mejorando las actitudes y la confianza del que realiza tareas de resolución. Algunos elementos contenidos en esta categoría son: los diferentes propósitos y beneficios de acuerdo al momento en que se utilizan, tipos de invención, etc.

Un cuarto aspecto tiene que ver con el conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas. En este, se hace referencia a la ayuda que pueden brindar los profesores conociendo cómo resuelven problemas sus estudiantes. La comprensión de la naturaleza conceptual de las dificultades y su interpretación desde la perspectiva de quien resuelve, características de los resolutores exitosos y las heurísticas que utilizan, la disposición a resolver problemas y las formas de pensar la resolución de problema, entre otras, son ejemplos de conocimientos de esta categoría.

El conocimiento sobre enseñanza de la resolución de problemas se refiere a que las prácticas instruccionales deben ser planificadas en función de lo que se quiere lograr, para ayudar a los estudiantes a convertirse en buenos resolutores. Para ello, se señalan como tipos de conocimiento referidos a esta categoría, el conocimiento de las estrategias usadas para dirigir experiencias de aprendizaje exitosas, saber cómo y cuándo intervenir, formas de trabajo (individual o grupal), uso de tecnologías, papel de la metacognición, enfoques o vías de acceso, y formas de evaluar la resolución de problemas.

Finalmente, Chapman (2015) establece el conocimiento de factores afectivos y creencias y su posible impacto en los estudiantes. También se incluyen las referidas al profesor y cómo afectan los procesos de aprendizaje sobre resolución de problemas. Se destaca la importancia de este conocimiento para ayudar a comprender y desarrollar creencias apropiadas para el logro de la resolución de problemas.

Tras esta revisión, enmarcamos este estudio en dos tipos de conocimiento de los estudiantes universitarios del Grado de Educación Primaria dentro del dominio de la resolución de problemas: el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico del contenido. Entendemos el conocimiento del contenido matemático escolar como “el dominio de los significados matemáticos básicos de un contenido, necesarios para su trabajo profesional" (Rico, 2015, p. 31); y el conocimiento didáctico del contenido como "aquellos conocimientos teóricos, técnicos y prácticos, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, que son propios para la formación de un maestro" (Rico, 2015, p. 32).

El campo que abarcan estos dos tipos de conocimiento es muy amplio y la investigación ha notado las particularidades que presentan los procesos recientemente. Este contexto hace necesario establecer categorías precisas que ayuden en esta tarea. Para ello, Shulman (1986) señala que para pensar correctamente sobre este conocimiento es necesaria una comprensión de los conceptos o hechos de un dominio particular, añadiendo que debe hacerse de la manera definida por eruditos. En este sentido, para desentrañar los componentes de este conocimiento desde la perspectiva de un proceso, es necesario tener un entendimiento sobre los problemas y la resolución de problemas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

El diseño metodológico del trabajo de investigación que constituye la tesis es el objeto de este capítulo. Se estructura en tres fases sucesivas, donde cada una condiciona la siguiente: la primera fase es un análisis de documentos curriculares, en la segunda fase realizamos una evaluación del conocimiento profesional sobre resolución de problemas y, en la tercera fase, un estudio de profundización de dicha evaluación a través de entrevistas. Por tanto en este capítulo, en un primer apartado, describimos de forma pormenorizada el diseño general de la investigación. En los siguientes apartados, se describen las características metodológicas de cada una de las fases.

DISEÑO METODOLÓGICO

Este estudio se sitúa en el campo de los diseños mixtos, es decir, en esta investigación "se utilizan estrategias de investigación que normalmente no se describen como parte de un diseño [particular]" (Morse, 2003, p. 192). Concretamente, los tres tipos o técnicas de recogida de datos que se emplean en esta investigación, generalmente se tratan por sí solos. En palabras de Johnson, Onwuegbuzie y Turner (2007):

> *La investigación de métodos mixtos es el tipo de investigación en la que un investigador o equipo de investigadores combina elementos de enfoques de investigación cualitativos y cuantitativos (por ejemplo, el uso de puntos de vista cualitativos y cuantitativos, recopilación de datos, análisis, técnicas de inferencia) para los propósitos generales de amplitud y profundidad de la comprensión y la corroboración.* (p. 123)

Utilizamos tres tipos de herramientas metodológicas: análisis de contenido, cuestionarios y entrevistas. La consideración de los distintos datos, que se complementan entre sí, provee un espectro más amplio del conocimiento de los futuros profesores (Buchholtz, 2019). Las herramientas metodológicas utilizadas se organizan en una serie de estudios que nos permitieron dar respuesta a nuestras preguntas de investigación. El primero de ellos surge de la necesidad de establecer un sistema de categorías que permita describir el conocimiento de los futuros maestros sobre resolución de problemas. Este estudio nos permitió desarrollar los dos estudios posteriores, los cuales indagaron en los conocimientos de los futuros profesores.

Para el primer estudio de carácter empírico se diseñaron y aplicaron cuestionarios cerrados que nos permiten por una parte, organizar las respuestas como grupo a través de un escalamiento mutidimensional y por otra, obtener estadísticos descriptivos. Finalmente, realizamos un segundo estudio en el que se entrevistó a los sujetos para profundizar en su conocimiento sobre el proceso de resolver problemas. El diseño de este estudio tomó una perspectiva de estudio de casos. Entendemos que los resultados de cada uno de los estudios producen un todo a través de la integración que es mayor que la suma de las partes cualitativas y cuantitativas individuales (Buchholtz, 2019).

Este proceso nos ha llevado a posicionarnos desde una perspectiva cualitativa dominante debido a que nuestro estudio:

> *se basa en una visión cualitativa, constructivista-postestructuralista-crítica del proceso de investigación, mientras que al mismo tiempo reconoce que la adición de datos cuantitativos y enfoques probablemente beneficiará a todo el proyecto de investigación.* (Johnson, Onwuegbuzie y Turner, 2007, p. 124)

Es decir, nuestro impulso es inductivo pues nuestro propósito es describir y explorar (Morse, 2003) el conocimiento profesional relativo a la resolución de problemas por futuros profesores.

Si bien aún no existe una nomenclatura consensuada (Kelle y Buchholtz, 2015), basándonos en la breve descripción del párrafo anterior, ubicamos esta investigación dentro de un Diseño Mixto Exploratorio Secuencial (Creswell, 2013). Inspirados en las notaciones propuestas por Morse (2003), la figura 12 muestra el diseño de esta investigación. En ella, *QUAL* hace referencia al primer estudio de documentos curriculares, ambos *QUAN* hacen referencia a la evaluación de los conocimientos del proceso y pedagógico del proceso, y finalmente, *qual* hace referencia a la profundización mediante entrevistas individuales en el conocimiento del proceso. Las flechas aluden al carácter secuencial del diseño.

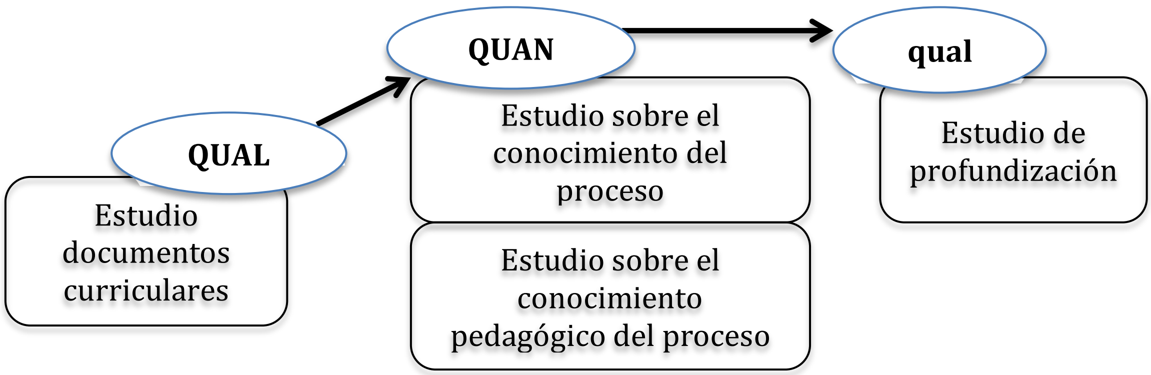


Figura 12. Diseño de la investigación

La selección de este diseño se ha basado en dos razones fundamentales: la necesidad de (a) explorar primero antes de administrar instrumentos, y (b) explicar los resultados iniciales de los instrumentos (Creswell y Plano, 2018), es decir, complementariedad y expansión (Buchholtz, 2019). La primera necesidad surge debido a la incipiente investigación referida al conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva de los procesos que ya se ha discutido en el capítulos anteriores. Para ello se decidió realizar un estudio que permitiera identificar un sistema de categorías que describa el conocimiento de profesores sobre resolución de problemas. Una vez establecido el sistema de categorías que guiaría este estudio, se optó por recoger datos en dos momentos distintos que permitieran indagar en el conocimiento de la mayor cantidad posible de estudiantes de la Universidad de Granada. El primer momento fue a través de cuestionarios escritos. Posteriormente, algunos de los resultados necesitaron de explicaciones que solo un estudio a través de entrevistas podría proveer. Este nos lleva a la segunda necesidad.

La tabla 3 resume cada uno de las recogidas de datos, en las que hemos cuidado de respetar los supuestos metodológicos de cada una de ellos, uno de los principios a tener en cuenta al realizar estudios mixtos (Morse, 2003). Las características relativas a la recogida de datos sobre el conocimiento del proceso y del conocimiento didáctico del proceso se presentan en un mismo apartado por compartir la gran mayoría de las características metodológicas.

Tabla 7. *Esquema general de la metodología*

	Documentos curriculares	Conocimiento del proceso	Conocimiento didáctico del proceso	Profundización conocimiento del proceso
Participantes	Documentos curriculares de 6 países	248 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria	149 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria	10 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria

Tabla 7. *Esquema general de la metodología*

	Documentos curriculares	Conocimiento del proceso	Conocimiento didáctico del proceso	Profundización conocimiento del proceso
Contexto	A partir de los puntajes de PISA: 2 de los países del tercio superior (Finlandia y Singapur), 2 del tercio medio (España y Estados Unidos) y 2 del tercio inferior (Chile y Argentina)	109 cursaban "Bases matemáticas para la Educación Primaria" (1er curso) 71 cursaban "Prácticum II" (4to curso) 68 cursaban la asignatura optativa "Competencias matemáticas en Educación Primaria" (4to curso)	56 cursaban la asignatura "Prácticum II" (4to curso) 93 cursaban la asignatura optativa "Competencias matemáticas en Educación Primaria" (4to curso)	Estudiantes de las asignaturas "Prácticum II" (4to curso) y "Competencias matemáticas en Educación Primaria" (4to curso)
Herramienta	Análisis de contenido	Cuestionario conocimiento del proceso	Cuestionario conocimiento didáctico del proceso	Entrevistas semi-estructuradas

CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DEL ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

Como inicio de nuestro trabajo de tesis, hemos desarrollado un sistema de categorías que utilizamos posteriormente para indagar en el conocimiento de la resolución de problemas y didáctico de la resolución de problemas de los maestros en formación inicial. Para ello, realizamos un análisis del contenido de seis documentos curriculares de matemáticas de educación primaria de países que han presentado un desempeño mediano y extremo en los resultados obtenidos en la prueba PISA 2012. Dicho análisis se realiza desde la perspectiva del conocimiento del profesor, tomando como punto de partida el modelo planteado por Chapman (2012, 2014, 2015). Adoptamos dicha perspectiva pues se ha señalado que los documentos curriculares enmarcan el conocimiento del profesor (Ball, Hill y Bass, 2005). Por otro lado, esta perspectiva permite entender el conocimiento de los maestros de acuerdo con el currículo institucional para la enseñanza (Deng, 2018).

Aceptando estas premisas, con este estudio inicial pretendemos determinar el conocimiento del profesor de primaria relativo a la resolución de problemas de matemáticas que se induce de estos documentos curriculares. Para su consecución, hemos realizado tres acciones: a) analizar documentos curriculares, determinando la presencia de aspectos relativos a la resolución de problemas matemáticos, b) inferir el conocimiento profesional presente en tales documentos y c) organizar los hallazgos en el modelo propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015) con el fin de testear su utilidad.

Muestra: documentos curriculares

La muestra está constituida por documentos editados por organizaciones profesionales o gubernamentales y que tienen un carácter público y oficial, es decir documentos grupales (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Se escogieron con el objetivo de describir los conocimientos sobre la resolución de problemas lo más ampliamente posible, por tanto, se tuvieron en cuenta dos perspectivas: a) la riqueza, profundidad y calidad de la información, por lo que utilizamos una muestra de casos tipo (Hernández et al., 2014), b) y al mismo tiempo una muestra de máxima variación que muestra diferentes perspectivas que representan la complejidad del fenómeno estudiado (Creswell, 2012). Por lo tanto, no intentamos analizar los planes de estudio comparativamente.

Específicamente, la muestra consta de seis documentos curriculares de países cuyos desempeños en la evaluación PISA 2012 (OECD, 2014), tomados de dos en dos, representan los tres diferentes terciles del rango de puntajes de la prueba. De este modo, hemos seleccionado dos documentos de países situados en el tercio superior: Singapur y Finlandia (Curriculum Planning and Development División, 2007; National Core Curriculum for Basic Education, 2004), dos del tercio medio: España y EE.UU (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014; NCTM, 2000) y dos del tercio inferior: Argentina y Chile (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b; Ministerio de Educación, 2012).

Destacar que uno de los documentos analizados no corresponde específicamente a un currículo oficial: los *Principios y estándares para la* *educación matemática* del NCTM (2000). Sin embargo, hemos decidido utilizar este texto, en sustitución de los *Common Core State Standards for Mathematics* (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers, 2010) pues ambos documentos plantean una visión común del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, diferenciándose en su amplitud (NCTM, 2010). El escogido para este estudio proporciona ejemplos e indicaciones para su implementación. Esta especificidad en su descripción y la visibilidad internacional que ha logrado el documento del NCTM del año 2000 nos llevó a utilizarlo para este análisis.

Procedimiento

El procedimiento de selección de las unidades de análisis surge como una manera de identificar componentes del conocimiento profesional sobre resolución de problemas. Para cumplir con este cometido, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente proporcionan una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas. Krippendorff (2004) señala las primeras como elementos sintácticos naturales, cargados de fiabilidad debido a su pequeño tamaño. En la segunda, destaca su correspondencia con una definición estructural particular del contenido. Por tanto, las unidades de análisis que hemos considerado son las frases u oraciones que hacen referencia explícita a los términos *resolución de problemas*, *situación problema* y *problema*, pero que además incluyan elementos sobre qué debería lograrse con ellas, cómo deberían trabajarse o que a través de ellas se logre otro cometido.

Como aspecto importante, resaltar la necesidad de establecer una regla de numeración para guiar el análisis. En nuestro caso, se ha utilizado la regla de presencia (Bardin, 1996), pues nuestro objetivo es describir un tipo de conocimiento específico en su totalidad, por tanto, esta presencia o ausencia es significativa.

Análisis y categorías

El análisis de datos combina un desarrollo *concept-driven* y *data-driven* y se ha llevado a cabo secuencialmente (Kuckartz, 2019). Primero, para establecer las categorías de análisis, se partió del modelo proporcionado por Chapman (2012, 2014, 2015), permitiendo clasificar las unidades de análisis en tres grandes categorías: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y factores afectivos. En ellas se excluyó la dimensión competencia del profesor para resolver problemas pues esta identificación escapa a los objetivos del trabajo. Este proceso se utilizó para una primera organización de las unidades de análisis y presenta un carácter deductivo.

Este análisis inicial se completó con un análisis inductivo, específicamente, un análisis dentro de cada categoría, lo que llevó al establecimiento de subcategorías más específicas (ver tabla 4).

Tabla 8. *Categorías de análisis*

Dimensiones	Categorías	Subcategorías
Conocimiento del contenido	C1. Problemas matemáticos	C1a. Caracterización de problema
		C1b. Clasificación de problemas según criterios diversos
	C2. Resolución de problemas matemáticos	C2a. Heurísticos generales
		C2b. Heurísticos específicos
		C2c. Estrategias de otras áreas de contenido
		C2d. Estrategias personales
	C3. Invención de problemas	C3a. Contextos
		C3b. Beneficios
		C3c. Estrategias
Conocimiento didáctico del contenido	C4. Conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas	C4a. Pensamiento de los estudiantes
		C4b. Dificultades de los estudiantes
		C4c. Conductas de resolutores exitosos
	C5. Conocimiento del papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática	C5a. Enfoques o vías de acceso
		C5b. Metacognición
		C5c. Evaluación
		C5d. Estrategias metodológicas
Factores afectivos y creencias	C6. Factores afectivos y creencias	C6a. Papel e implicaciones de diferentes emociones
		C6b. Rol del profesor

Para ejemplificar el proceso de análisis, en el plan de estudios finlandés (National Core Curriculum for Basic Education, 2004) se encontró la siguiente unidad de análisis: “Justificar sus acciones y conclusiones y presentar sus soluciones a otros” (p. 161). La frase se refiere a que el estudiante debe realizar acciones una vez que se haya completado la resolución de un problema. Este hecho se relaciona con un conocimiento del contenido de la resolución de problemas, debido a que hace referencia a una fase específica del proceso de resolución que es la revisión. Esta especificación ha hecho que lo clasifiquemos como resolución de problemas matemáticos (C2 en la tabla 1). Posteriormente, se buscaron los patrones presentes en esta unidad de análisis, junto con las otras que también fueron clasificadas en esta categoría, encontrando que hacían referencia a las fases del proceso o las caracterizaciones de los mismos, lo que hizo surgir la subcategoría de heurística general (C2a en la Tabla 1).

La confiabilidad de la codificación fue verificada entre los investigadores y con otro investigador externo. En particular, se invitó a un codificador independiente a que volviera a codificar dos pautas curriculares seleccionadas al azar (Argentina y Finlandia), de acuerdo con el marco conceptual descrito en la tabla 1. Un total de 52 unidades de análisis en el primer documento y 16 en el segundo. El resultado de la codificación del codificador independiente se comparó con el obtenido por los investigadores. Según el coeficiente de Kappa, se encontró que la confiabilidad entre los diferentes codificadores era de 0,85 en el currículo escolar de Argentina, y de 0,70 en el currículo escolar de Finlandia, considerado adecuado.

CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DEL ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL PARA ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS

La segunda fase de nuestro trabajo de tesis se centró en indagar en el conocimiento profesional que poseen maestros en formación inicial sobre resolución de problemas, desglosado en dos aspectos: conocimiento de la resolución de problemas y conocimiento didáctico de la resolución de problemas. Para ello, diseñamos y aplicamos un cuestionario a los estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Específicamente, indagamos qué dominio teórico o estático (Blanco, 2004) sobre la resolución de problemas tienen los maestros en formación. Para ello, se utilizó la categorización emergida del análisis de las normativas curriculares que previamente hemos realizado.

Concretamente, en el caso del conocimiento de la resolución de problemas indagamos en la caracterización de problemas, el proceso de resolución y la disposición. Mientras que para el conocimiento didáctico de la resolución de problemas exploramos el conocimiento sobre el estudiante como resolutor, los problemas como tareas escolares, los efectos de creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza de la resolución de problemas y estrategias de enseñanza de la resolución de problemas.

En esta fase, utilizamos dos cuestionarios con ítems de respuesta dicotómica como instrumento para la recogida de datos, uno para cada dimensión de conocimiento. Por tanto, hemos desarrollado un cuestionario para el conocimiento de la resolución de problemas y otro para el conocimiento didáctico de la resolución de problemas. Se trata de un estudio de carácter descriptivo, realizado durante los cursos académicos 2017-2018 y 2018-2019.

Participantes

Los participantes de este estudio fueron 397 estudiantes del grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada (ver tabla 4).

Los participantes en el subestudio del conocimiento sobre la resolución de problemas fueron 248 estudiantes: 109 matriculados en el primer año (grupo 1º año) y 139 en el cuarto y último año. De este último grupo, 68 cursaron la asignatura optativa “Competencias matemáticas en Educación Primaria” y los hemos etiquetado como Grupo de 4º año con formación adicional. El resto de participantes que no ha cursado la asignatura optativa se ha etiquetado como Grupo de 4º año. La motivación detrás de la selección de un grupo de 1º año y un grupo de 4º año está relacionada con nuestra meta de caracterizar el conocimiento de los futuros maestros al terminar su formación. Entendemos que al diferenciar estos grupos, la caracterización se realizará de mejor manera y con mayor detalle.

En el subestudio referido al conocimiento didáctico de la resolución de problemas, los participantes fueron 149 estudiantes que cursaban cuarto y último año de su formación universitaria. De ellos, 56 cursaban la asignatura “Prácticum II” y 93 cursaban la asignatura optativa “Competencias matemáticas en Educación Primaria”. En este estudio se optó por la no participación de estudiantes de los primeros cursos pues el carácter especializado del conocimiento didáctico del proceso provocaría que se indagará más bien en creencias, que en conocimiento profesional.

Contexto

La formación matemática de los participantes del grupo de 1º año se remonta a la educación primaria y secundaria obligatoria, durante la cual estudiaron un curso de matemáticas cada año. Además, completaron dos años de bachillerato en donde casi todos optaron por el curso de Humanidades y Ciencias Sociales. Esto significa que no se enfrentaron a un nivel superior de matemáticas en la escuela y tienen experiencia limitada con la resolución genuina de problemas al ingresar al programa de formación docente.

Los participantes que se encontraban en 4º curso tenían los mismos antecedentes escolares que el grupo de 1º año. Además, durante su formación universitaria, completaron tres cursos de educación matemática. Como ya hemos expuesto, estos cursos están formulados tomando como base el análisis didáctico, desde la perspectiva del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La primera de ellas centrada en el estudio del contenido de la matemática escolar. La segunda apuntada a la enseñanza y el aprendizaje de los distintos núcleos temáticos de las matemáticas escolares concretadas en aspectos cognitivos y didácticos. La tercera orientada al estudio del currículo de matemáticas de educación primaria y al diseño e implementación de unidades didácticas para esta etapa. En estas tres asignaturas la resolución de problemas es tratada como un contenido transversal. Específicamente, cuando se discuten los significados y modos de uso de los conceptos matemáticos. Es decir, los futuros profesores tuvieron la oportunidad de resolver tareas matemáticas que podrían ejemplificar o introducir el contenido de una lección, desarrollando habilidades relacionadas con el análisis semántico de problemas.

Sin embargo, 71 y 93 de ellos (en cada estudio respectivamente) completaron el curso opcional "Competencias matemáticas en educación primaria", que incluía una enseñanza explícita sobre resolución de problemas. Específicamente, los futuros profesores se enfrentaron a actividades como: (a) caracterización y ejemplificación del papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas y su vínculo con la competencia matemática, (b) desarrollo y aplicación de estrategias y heurísticas para la resolución de problemas, (c) aplicación de criterios para inventar problemas de matemáticas, y (d) análisis de estrategias de enseñanza apropiadas para enseñar resolución de problemas en el aula de matemáticas.

Por tanto, el grupo final fue tratado como dos grupos en el análisis de datos. Esto significa que los participantes consistieron en tres grupos de futuros profesores: un grupo de 1º año; un grupo de 4º año y un grupo de 4º año con formación adicional. En el estudio relativo al conocimiento de la resolución de problemas participaron los tres grupos, mientras que en el estudio sobre el conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas, solo participaron sujetos de los grupos de 4º año .

Instrumento

Hemos optado por un formato de cuestionario como instrumento para el estudio del conocimiento de los futuros profesores. Dichos instrumentos tienen el poder de recopilar información, entre otras cosas, para describir el conocimiento de un número relativamente alto o una muestra de personas (Fink, 2003). Hemos construido dos cuestionarios cerrados de carácter dicotómico, debido a que esperamos ciertas respuestas que nos muestren presencia o ausencia de un determinado conocimiento (Fink, 2003) sobre resolución de problemas. Los cuestionarios completos y finales pueden verse en el Anexo 1.

Los cuestionarios fueron desarrollados a partir de los resultados del análisis en los documentos curriculares sobre las categorías de conocimiento docente para enseñar resolución de problemas. La estructura de los cuestionarios se recoge en la tabla 5.

Tabla 9. *Categorías para la construcción del cuestionario*

Conocimiento sobre la resolución de problemas	Conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas
Caracterización de problema	Estudiante como resolutor
Resolución de problema	Resolución de problemas como tarea escolar
Disposición	Factores no cognitivos
	Estrategias de Enseñanza

Posteriormente, seguimos el siguiente proceso para diseñar y construir los dos cuestionarios (Vásquez y Alsina, 2015): (a) análisis teórico de la noción de competencia para resolver problemas; (b) estudio de los requisitos curriculares de la educación primaria relacionados con la resolución de problemas (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2016; Piñeiro, Castro, et al., 2016); (c) revisión de la literatura de investigaciones sobre resolución de problemas con profesores de primaria (Piñeiro et al., 2018); (d) construcción de una versión piloto del instrumento; (e) revisión por expertos y pruebas piloto del instrumento; y (f) construcción de la versión final del cuestionario (Piñeiro, Chapman, Castro-Rodríguez y Castro, 2019).

Diseño y construcción del cuestionario piloto

El diseño del cuestionario se concretó utilizando una dimensión relativa al conocimiento de la resolución de problemas y otra al conocimiento didáctico de la resolución de problemas, dando origen a un cuestionario para explorar cada uno de ellos.

Cuestionario piloto para el conocimiento de la resolución de problemas

El instrumento consta de dos partes; la primera referida a la caracterización de problema y la segunda, a aspectos del proceso de resolución.

La primera parte de este cuestionario se titula: “Problemas matemáticos escolares” y consta de cuatro secciones que exploran si una tarea es un problema basándose en: a) el procedimiento de resolución; b) la consideración de resolutor en cuanto a: la etiquetación del problema y la existencia de una solución razonable previa; y c) la diferenciación de tareas presentadas como problemas.

La segunda parte del cuestionario referida al proceso de resolución, denominada “Resolución de problemas y Estrategias” se organizó en torno a cuatro secciones: a) fases de la resolución de problemas; b) estrategias; c) metacognición; y c) caracterización de cada fase.

En ambas partes del cuestionario se contemplan preguntas para identificar coherencia en las respuestas. En la sección A del cuestionario sobre la caracterización de problemas se plantea: “Los problemas matemáticos escolares se deben resolver solo con procedimientos previamente aprendidos”, y posteriormente aparece: “En un problema el resolutor no debe disponer previamente de un camino para encontrar la solución, pero sí de los conocimientos matemáticos para resolverlo”.

El cuestionario sobre el proceso de resolución, además consta de preguntas que no se responden dicotómicamente. Concretamente, en esta sección se indaga en el reconocimiento de estrategias específicas mediante su identificación en una respuesta hipotética. Este hecho nos ha llevado a utilizar ítems de respuesta única para indagar el nivel de conocimiento de las estrategias mayormente utilizadas en los currículos escolares.

Cuestionario piloto para el conocimiento didáctico de la resolución de problemas

Al igual que el cuestionario anterior, este se divide en dos partes: una referida al aprendizaje y otra a la enseñanza de la resolución de problemas.

La primera parte de este cuestionario se diseña a partir de los conocimientos del estudiante como resolutor, problemas y resolución de problemas como tarea escolar, y factores no cognitivos. Así, el primero se titula: “Aprendizaje de la resolución de problemas” y consta de tres secciones que se corresponden con los competentes relativos al aprendizaje. Cabe señalar que las secciones A y B se han subdivido de acuerdo a los conocimiento asociados al componente al que pertenecen. Así, el cuestionario presenta las secciones de: a1) características de resolutores exitosos; a2) características de resolutores principiantes; b1) criterios para seleccionar problemas; b2) estrategias y modelos de resolución; b3) invención de problemas; y c) influencia de creencias y concepciones.

La segunda parte del cuestionario referida a la enseñanza se organizó en torno a cinco secciones: a) enfoques de enseñanza de la resolución de problemas; b) gestión del discurso; c) gestión de los atascos; c) gestión de la evaluación; y e) gestión de los recursos.

<u>Revisión del cuestionario mediante juicio de expertos y aplicación piloto</u>

Para el proceso de validación, contemplamos dos aspectos utilizados en la construcción de otros instrumentos que evalúan el conocimiento del profesor (Vásquez y Alsina, 2015). El primero de ellos tiene relación con la validez del contenido, que se asegura a partir de la selección de los conocimientos relacionados con la resolución de problemas en educación primaria en los currículos escolares. Análisis que hemos realizado en un trabajo previo (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2016). El segundo aspecto en este proceso de validación se corresponde con una contrastación de la validez y fiabilidad de los ítems, por lo que fue sometido a un juicio de expertos, y a un análisis de los ítems a partir de una aplicación piloto del instrumento.

Juicio de expertos. El juicio de expertos hace posible una evaluación cualitativa de los enunciados, contrastando su validez en relación al grado de adecuación con cada una de las categorías de conocimiento sobre resolución de problemas. El juicio lo realizaron cinco expertos en didáctica de la matemática españoles. Para su selección utilizamos los criterios propuestos por Skjong y Wenworht (2000): a) experiencia investigativa, publicaciones y proyectos; b) reconocimiento en la comunidad científica; c) disponibilidad y motivación para participar en el proceso; y d) imparcialidad en el proceso de investigación. El instrumento fue enviado a través de correo electrónico, junto a su tabla de especificaciones y los aspectos a evaluar. Además se les dio la opción de utilizar su procesador de texto, mediante la función de revisor para evaluar el grado de adecuación de cada enunciado.

Los expertos analizaron tres aspectos: a) valoración de cada uno de los enunciados propuestos, en cuanto a su pertinencia para evaluar el conocimiento del profesor sobre resolución de problemas; b) correspondencia del enunciado a su dimensión, componente y conocimiento; y c) sugerencias de mejoras para la redacción.

A partir de las respuestas y comentarios obtenidos, en el cuestionario sobre el conocimiento de la resolución de problemas, se desechó la pregunta abierta del cuestionario 2 por su baja valoración, se reorganizaron las secciones del cuestionario dos, y se modificó la redacción de varias preguntas. En general, destacamos observaciones en relación a poner introducciones a los cuestionarios y secciones, no utilizar oraciones compuestas o con más de una idea, homologación de términos (e. g. problemas/problema o actividad escolar/tarea), redacción (e. g. Cambiar producto por resultado) y algunas referidas a formato (e. g. cuestionario 2, se solicitó agregar numeraciones a las acciones).

En tanto que en el cuestionario sobre el conocimiento didáctico, se adecuó la redacción de la sección sobre características de buenos resolutores que repetía tanto en la consigna como en cada ítem la idea de buen resolutor. Además, en la sección que evalúa la resolución de problemas como tarea escolar; específicamente los ítems relativos a estrategias de resolución, se agregó la opción de responder si utilizaría la estrategia mencionada en sus futuras clases. Junto a esto, se eliminó una pregunta de la sección relativa a invención de problemas y se quitaron ejemplificaciones de algunos términos que podrían hacer incurrir a errores por parte de los futuros profesores. Del mismo que en el primer cuestionario, se hicieron cambios en la redacción (e.g. ítems relativos a modelos de resolución), se agregó introducciones a los cuestionarios en general y a las secciones en particular. Esta valoración de los expertos permitió que emergiera un cuestionario depurado que se aplicó a un grupo de futuros profesores de primaria.

Aplicación piloto. El principal objetivo de una aplicación piloto es aumentar la fiabilidad, validez y factibilidad (Cohen, Manion y Morrison, 2018). Nuestro pilotaje se centró en valorar aspectos como la adecuación del tiempo total, la claridad y comprensión de los enunciados, y el índice de dificultad. Teniendo esto en mente, los cuestionarios fueron aplicados a un grupo de 23 futuros profesores de primaria de 4º año, en el curso 2017/2018. La aplicación se realizó en dos momentos, correspondientes a cada dimensión estudiada.

Inmediatamente antes de comenzar la aplicación se leyeron y discutieron las instrucciones; además se explicitó el objetivo de la aplicación. También se solicitó a los futuros profesores que indicaran posibles dificultades en relación a la comprensión y redacción de los enunciados. Por ello, durante la aplicación, algunos profesores solicitaron aclaraciones en cuanto a la redacción de los enunciados y preguntas. Tales dudas se registraron en una tabla de notas.

Junto con esto se procedió a registrar los tiempos mínimos y máximos de resolución de los cuestionarios. Respecto al cuestionario sobre la dimensión matemática, los tiempos variaron para la primera parte entre 5 y 10 minutos y para la segunda, entre 10 y 20 minutos. El cuestionario sobre el conocimiento didáctico tuvo una variación de sus tiempos de entre 10 y 15 minutos para cada parte. Este dato nos permite predecir un tiempo de aplicación de una hora (60 minutos) para el cuestionario completo.

Una vez aplicados los cuestionarios se realizó un análisis cualitativo. Respecto al cuestionario sobre el conocimiento de la resolución de problemas, la aplicación piloto permitió observar aspectos importantes para su mejora. Concretamente, el caso de la pregunta 5, en la sección B del cuestionario 1; en ella la pregunta planteaba: "para que una tarea sea un problema depende de: A. Solo del resolutor" y "B. Solo de la experiencia del resolutor", y "C. Ambas". En los tres casos, A, B y C, se debía valorar con si o no. Esta situación provocó dificultades con la comprensión, pues la opción A no reflejaba el desarrollo del estudiante y además, la opción C, llevó a confusión, provocando que no contestaran las dos previas. Así mismo, la aplicación piloto evidenció que las preguntas referidas a identificar problemas debían llevar contexto de quién sería su resolutor para su determinación. Algo similar ocurrió con el segundo cuestionario, pues en estas preguntas se mostraban posibles formas de resolver un problema sobre las que se pide identificar la estrategia usada; la aplicación permitió evidenciar que algunas formas de resolver evocaban estrategias que sin ser la que permite su resolución, si apoyan y son importantes en el proceso.

El proceso descrito anteriormente dio como resultado dos instrumentos que constan de dos partes cada uno y que comprimen los componentes teóricos relativos al proceso de la resolución de problemas (la conceptualización de un problema, el proceso de resolución de problemas y la disposición), y a los aspectos pedagógicos de la resolución de problemas (estudiante como resolutor, problema como tarea escolar, influencia de aspectos no cognitivos y estrategias de enseñanza de la resolución de problemas), identificados en el análisis de los documentos curriculares previo.

Cuestionario sobre el conocimiento de la resolución de problemas

El instrumento que consta de dos partes y comprime los tres componentes teóricos relativos al conocimiento sobre resolución de problemas.

Caracterización del problema

Esta parte del instrumento abordó el conocimiento de los participantes sobre lo que constituye un problema matemático en relación con el resolutor de problemas. Los ítems del cuestionario se organizaron en los siguientes tres temas, e indagan si una tarea es un:

a) Problema basándose en el procedimiento, es decir, una tarea para la cual el estudiante / resolutor de problemas no tiene una forma conocida para resolverlo. Los participantes tenían que decidir e indicar si el procedimiento de resolver un problema debería conocerse para que la tarea fuera un problema desde la perspectiva de los estudiantes (resolutores de problemas). La figura 13 muestra las preguntas relativas a este tema.

1.	**Los problemas deben resolverse solo con procedimientos previamente aprendidos.**	**SÍ**	**NO**
2.	**Un problema es una tarea sin un procedimiento conocido para resolverlo.**	**SÍ**	**NO**
4.	**En un problema el resolutor debe disponer de conceptos matemáticos que le permitan articular un procedimiento de resolución.**	**SÍ**	**NO**

Figura 13. Preguntas relativas al procedimiento

b) Problema basándose en el resolutor, es decir, consideración de la relación entre el estudiante / resolutor de problemas y un problema. Los participantes tenían que indicar si un problema depende de la etapa de desarrollo de los estudiantes (es decir, lo que pueden hacer en relación con su edad o grado escolar) y su experiencia. La figura 14 muestra las preguntas relativas a este tema.

5.	La siguiente tarea: *Un granjero tiene una huerta de verduras de forma rectangular de 60 m^2 de superficie y quiere cercarla para evitar que entren animales. Si sus lados se miden solo en números naturales, ¿cuáles son los diferentes perímetros de cerca que puede utilizar?* ¿Es un problema para cualquier estudiante? (sin importar su curso, edad, etc.)	SÍ	NO
6.	Para que una tarea sea un problema depende de la experiencia del resolutor.	SÍ	NO
7.	Para que una tarea sea un problema, el estudiante debe ser capaz de detectar en los primeros momentos de su abordaje una posible forma de resolverlo.	SÍ	NO
8.	Los cálculos que presentan los textos escolares para practicar las operaciones aritméticas son problemas.	SÍ	NO
9.	Para practicar las operaciones aritméticas en segundo de primaria, los textos escolares al finalizar las lecciones proponen tareas como la siguiente: *El día que cumplí 8 años me trajeron 6 regalos por la mañana y 5 regalos por la tarde. ¿Cuántos regalos recibí ese día?* Este tipo de tareas, ¿son problemas?	SÍ	NO

Figura 14. Preguntas relativas a la consideración del resolutor

c) Problema basándose en los tipos / estructura de la tarea, es decir, estructuras generales o características de una tarea que lo convierten en un problema. Sobre la base de una revisión de las clasificaciones de problemas más aceptadas, identificamos un problema para cada categoría que abarca desde ejercicios (problemas rutinarios y no aplicados) hasta investigaciones matemáticas (problemas no rutinarios, aplicados y abiertos). Los participantes tenían que indicar si cada ejemplo era un problema o no (pregunta 10 en figura 15).

También tenían que identificar si las características de una tarea (cómo se presentan los datos, múltiples soluciones, etc.) determinaban si se trataba de un problema (preguntas 11 a 19 en figura 15).

10.	A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como las siguientes. En algún momento de esta escolaridad ¿pueden ser considerados problemas?		
	a. (745.580 + 898.834) : (15.3745 x 8.203)	SÍ	NO
	b. Las pelotas de ping-pong vienen en paquetes de 3 unidades. Una caja trae 24 paquetes. El sr. López, dueño de una tienda deportiva, compró 1.800 pelotas de ping-pong. ¿Cuántas cajas compró el sr. López?	SÍ	NO
	c. Un granjero tiene patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total. ¿Cuántos patos y ovejas tiene?	SÍ	NO
	d. Empleando únicamente 6 cerillas, forma cuatro triángulos equiláteros.	SÍ	NO
	e. ¿Cuántas chuches comen tus compañeros de clase en una semana?	SÍ	NO
	f. Los tetrominós son formas geométricas construidas con cuatro cuadrados unidos por alguno de sus lados. Las siguientes imágenes representan distintos tetrominós.  Construye el mayor número de formas distintas posibles utilizando los 5 tetrominós.	SÍ	NO
11.	Un problema tiene solo una respuesta correcta.	SÍ	NO
12.	Un problema puede tener ambigüedades en su enunciado.	SÍ	NO
13.	Un problema puede tener datos poco precisos en su enunciado.	SÍ	NO
14.	Un problema debe considerar siempre un contexto que refleje una situación.	SÍ	NO
15.	Hay problemas que se pueden resolver de más de una manera.	SÍ	NO
16.	Un problema puede tener más de una solución.	SÍ	NO
17.	Un problema debe tener toda la información necesaria en el enunciado.	SÍ	NO
18.	Para llegar a la solución de un problema debe existir un solo camino correcto.	SÍ	NO
19.	Un problema puede contener información innecesaria en el enunciado.	SÍ	NO

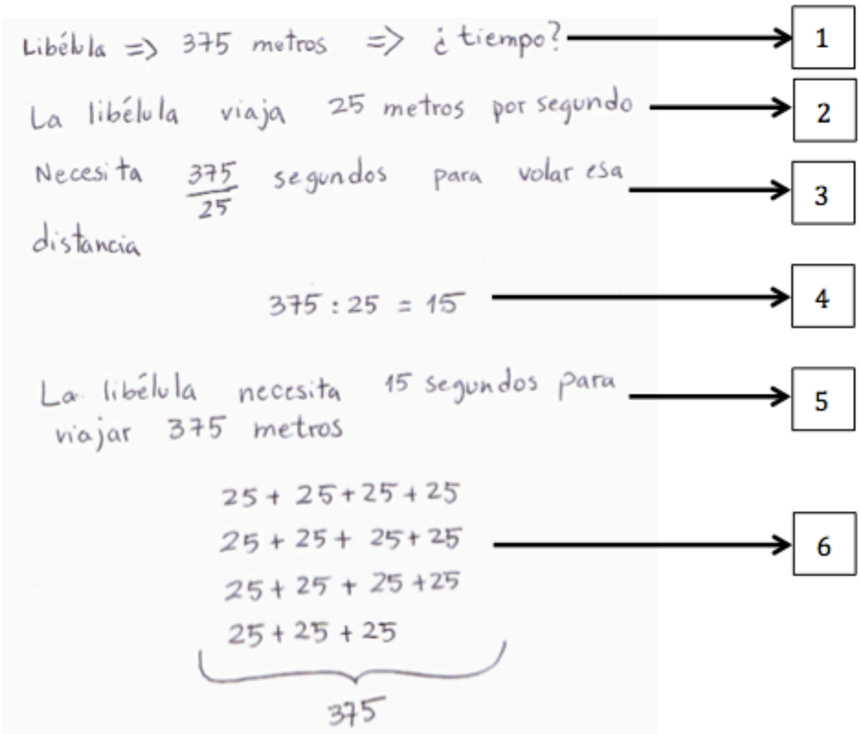
Figura 15. Preguntas relativas al tipo de tarea

El proceso de resolución de problemas

Este cuestionario abordó el proceso de solución y está organizado en dos secciones. La primera sección consta de cuatro temas, pues las estrategias han sido tratadas en una sección aparte:

a) Etapas en la resolución de problemas. Los participantes tuvieron que reflexionar e indicar qué fase está presente en la respuesta hipotética de un estudiante (ver figura 16 y 17).

1.	Observa cómo un estudiante ha resuelto el siguiente problema: ***Una libélula, el insecto más rápido, puede volar una distancia de 50 metros en 2 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará la libélula en volar 375 metros?***		



Responde, observando el procedimiento anterior:

	a. Se *identifica* el problema cuándo describe lo que hace la libélula, los metros que debe recorrer y se pregunta por el tiempo. *(Paso 1)*	SÍ	NO
	b. Se *expone el plan de resolución* al reducir mentalmente a la unidad (1 segundo) y luego plantea la operación 375/25 *(Pasos 2 y 3)*	SÍ	NO
	c. Se *actúa según el plan* cuando se realizan la división (375:25=15). *(Paso 4)*	SÍ	NO
	d. Se *evalúa la respuesta* cuando se realiza un conteo o suma de los metros por cada segundo. *(Paso 6)*	SÍ	NO
2.	Al resolver un problema matemático escolar, un estudiante avanza hacia la solución sin retroceder (por ejemplo, no vuelve a leer o no busca un procedimiento alternativo al escogido).	SÍ	NO
3.	La resolución de problemas es un proceso dinámico en que el resolutor, para encontrar una respuesta, vuelve atrás si es necesario.	SÍ	NO
4.	Al resolver un problema, el resolutor avanza a través de una serie de pasos.	SÍ	NO

Figura 16. Preguntas relativas a fases de resolución (1º parte)

5.	¿Cuál de los siguientes momentos crees que puede estar presente al resolver un problema?		
	a. Hacer una representación del problema	SÍ	NO
	b. Leer el problema	SÍ	NO
	c. Hacer un cálculo	SÍ	NO
	d. Comprender el problema	SÍ	NO
	e. Explorar distintas formas de solución	SÍ	NO
	f. Resolver problemas similares	SÍ	NO
	g. Comprobar la solución	SÍ	NO
	h. Escribir la respuesta	SÍ	NO

Figura 17. Preguntas relativas a fases de resolución (2º parte)

Además, tenían que indicar si una lista de características correspondía a una determinada fase. El foco estuvo en las etapas de comprensión, mirar atrás y llevar a cabo el plan (las dos primeras en la primera sección; la última en la segunda sección relativa a estrategias). La figura 18 muestra las preguntas relativas a la comprensión y mirar hacia atrás).

6.	Para resolver un problema matemático escolar es necesario comprenderlo.	SÍ	NO
7.	Es adecuado ejecutar un plan de solución sin comprender un problema.	SÍ	NO
8.	Para comprender un problema puede ser útil emplear diferentes representaciones.	SÍ	NO
9.	Comprender un problema conlleva determinar qué información disponemos y la estructura de esa información.	SÍ	NO
10.	Hacer un diagrama o un gráfico es una herramienta útil para comprender un problema.	SÍ	NO

16.	Una vez resuelto el problema, es aconsejable que el resolutor conozca qué pasaría si se cambian algunos de los datos.	SÍ	NO
17.	Si un estudiante encuentra la respuesta a un problema, ya no debe realizar más acciones.	SÍ	NO
18.	Leer nuevamente la pregunta una vez encontrada la solución ayuda a identificar la adecuación de lo realizado y su resultado.	SÍ	NO
19.	Una vez encontrada la respuesta a un problema, es recomendable buscar otras formas alternativas de solución una vez encontrada la respuesta.	SÍ	NO
20.	Identificar las características de un problema permite formar familias de ellos, que pueden resolverse de una forma similar.	SÍ	NO

Figura 18. Preguntas relativas a la fase de comprensión (6 a 10) y la fase mirar hacia atrás (16 a 20)

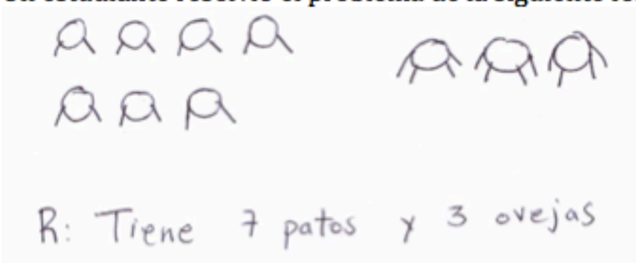
b) Estrategias en la resolución de problemas. Los participantes debían reconocer estrategias específicas en las soluciones hipotéticas de los estudiantes. Se formularon ocho ítems como preguntas de opción múltiple para determinar el grado de dominio de los estudiantes del grado de magisterio de las estrategias contenidas principalmente en los currículos escolares de matemáticas. Las opciones fueron: a) construir una tabla; b) trabajar hacia atrás; c) dibujar un diagrama; d) adivinar y comprobar; e) buscar un patrón; y f) operar. La figura 19 muestra 2 de las preguntas relativas a este tema.

2. Contesta las preguntas A a D a partir del siguiente problema:

Un granjero estaba contando sus patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total. ¿Cuántos patos y ovejas tiene?

Marca SOLO UNA opción.

a. Un estudiante resolvió el problema de la siguiente forma:



¿Qué estrategia utilizó?

i. Buscar un patrón
ii. Ensayo y error
iii. Hacer una tabla
iv. Hacer un dibujo

b. Un segundo estudiante resolvió el problema de la siguiente forma:

Patos	Ovejas	Cabezas	Total pies	Verificación
4x2	6x4	10	32	Mucho
5x2	5x4	10	30	Muy poco
6x2	4x4	10	28	Muy poco
7x2	3x4	10	26	Justo

R: Tiene 7 patos y 3 ovejas.

¿Qué estrategia utilizó?

i. Buscar un patrón
ii. Ensayo y error
iii. Hacer una tabla
iv. Hacer un dibujo

Figura 19. Ejemplos de preguntas relativas a las estrategias

c) Metacognición en la resolución de problemas. Los participantes tenían que indicar el papel desempeñado por la metacognición en el proceso de resolver un problema. La figura 20 muestra las preguntas relativas a este tema.

11. **Un estudiante ha resuelto este problema:**

Una libélula, el insecto más rápido, puede volar una distancia de 50 metros en unos 2 segundos aproximadamente. ¿Cuánto tardará la libélula en volar 375 metros?

De la siguiente forma:

- La libébla puede volar 50 metros en 2 segundos
- 4 segundos serían 100 metros
- Entonces 6 segundos serían 200 metros
- 8 segundos serían 300 metros
- 9 segundos serían 350 metros.
- Como faltan 25 metros, ponemos la mitad.
- Entonces la libelula tarda 9 segundos y medio en volar 375 metros.

Respecto a su resolución, marca SÍ o NO según sea el caso.

a. No hay fallo, es correcta.	SÍ	NO
b. Comprendió el problema.	SÍ	NO
c. Hay errores en los cálculos.	SÍ	NO
d. Verificó la adecuación de la respuesta.	SÍ	NO

Figura 20. Preguntas relativas a la metacognición (1º parte)

Además, tuvieron que identificar un error en el monitoreo en una posible respuesta de un estudiante, es decir, se preguntó dónde estaba el error y qué podría haberlo causado (ver figura 21).

12.	Mientras se resuelve un problema se realizan acciones mentales que permiten darse cuenta de los errores cometidos.	SÍ	NO
13.	Ser consiente de los conocimientos que uno posee ayuda a escoger la forma más adecuada para resolver un problema.	SÍ	NO
14.	Para resolver un problema es útil conocer diferentes formas de hacerlo.	SÍ	NO
15.	Una estrategia es un procedimiento que guía la elección del conocimiento que debe emplearse en cada etapa de un problema.	SÍ	NO

Figura 21. Preguntas relativas a la metacognición (2º parte)

c) Factores no cognitivos en la resolución de problemas. Los participantes tenían que indicar el papel desempeñado por la motivación en el proceso de resolución. La figura 22 muestra las preguntas relativas a este tema.

22.	Se puede resolver un problema con éxito sin estar motivado.	SÍ	NO
23.	Cuándo un estudiante se enfrenta a la resolución de un problema, es importante que esté motivado.	SÍ	NO
24.	No es necesario que los estudiantes quieran resolver un problema, lo importante es que escuchen y obedezcan al profesor.	SÍ	NO
25.	No es importante que un alumno tenga interés por resolver un problema. Lo importante es que conozca los contenidos matemáticos.	SÍ	NO

Figura 22. Preguntas relativas a los factores no cognitivos

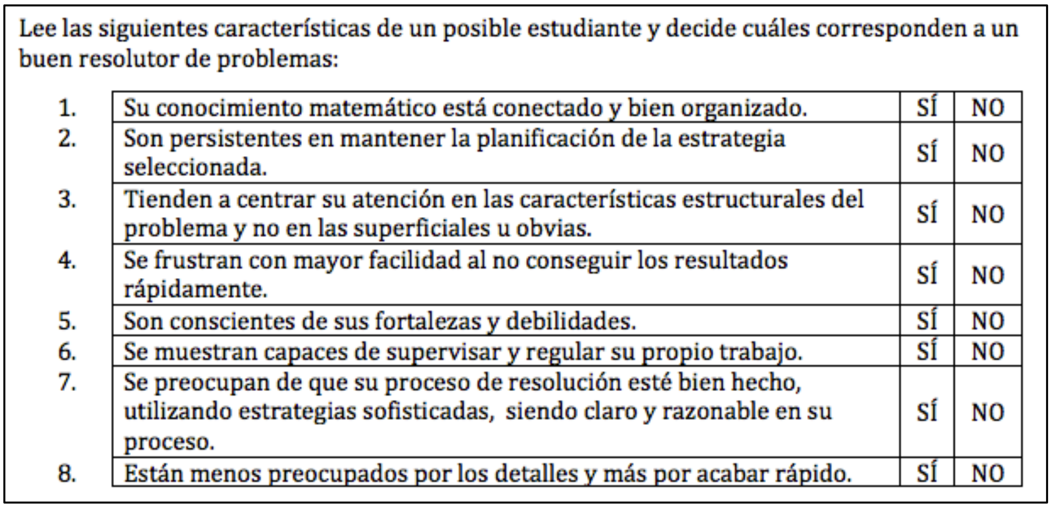
Cuestionario sobre el conocimiento didáctico del proceso de resolución de problemas

El proceso de construcción resultó en un instrumento que consta de dos partes: a) aprendizaje de la resolución de problemas y b) enseñanza de la resolución de problemas.

<u>Aprendizaje de la resolución de problemas</u>

Este parte del cuestionario abordó el conocimiento de los participantes sobre lo que constituye un problema matemático en relación con el resolutor de problemas. Los ítems del cuestionario fueron organizados en tres temas.

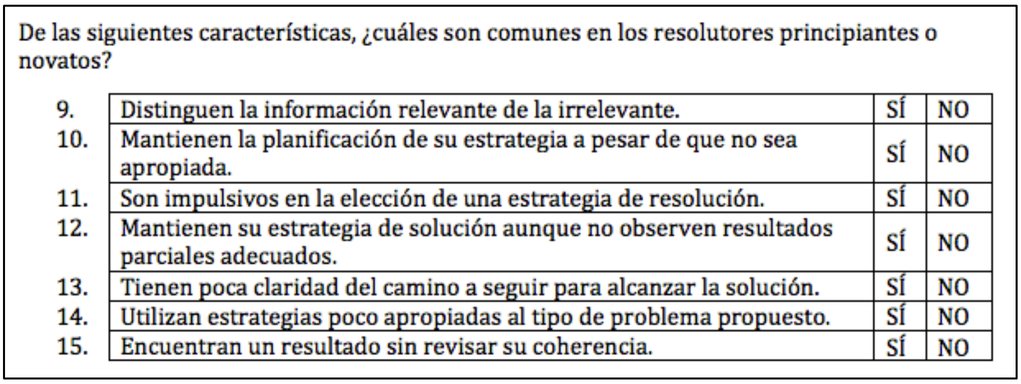
a) El estudiante como resolutor de problemas. El foco aquí fue identificar el conocimiento que los maestros tienen sobre las características que la literatura ha indicado como resolutores exitosos, y resolutores no exitosos o novatos. La figura 23 y 24 muestra las preguntas relativas a este tema.



Lee las siguientes características de un posible estudiante y decide cuáles corresponden a un buen resolutor de problemas:

1.	Su conocimiento matemático está conectado y bien organizado.	SÍ	NO
2.	Son persistentes en mantener la planificación de la estrategia seleccionada.	SÍ	NO
3.	Tienden a centrar su atención en las características estructurales del problema y no en las superficiales u obvias.	SÍ	NO
4.	Se frustran con mayor facilidad al no conseguir los resultados rápidamente.	SÍ	NO
5.	Son conscientes de sus fortalezas y debilidades.	SÍ	NO
6.	Se muestran capaces de supervisar y regular su propio trabajo.	SÍ	NO
7.	Se preocupan de que su proceso de resolución esté bien hecho, utilizando estrategias sofisticadas, siendo claro y razonable en su proceso.	SÍ	NO
8.	Están menos preocupados por los detalles y más por acabar rápido.	SÍ	NO

Figura 23. Preguntas relativas a los estudiantes como resolutores (1ª parte)



De las siguientes características, ¿cuáles son comunes en los resolutores principiantes o novatos?

9.	Distinguen la información relevante de la irrelevante.	SÍ	NO
10.	Mantienen la planificación de su estrategia a pesar de que no sea apropiada.	SÍ	NO
11.	Son impulsivos en la elección de una estrategia de resolución.	SÍ	NO
12.	Mantienen su estrategia de solución aunque no observen resultados parciales adecuados.	SÍ	NO
13.	Tienen poca claridad del camino a seguir para alcanzar la solución.	SÍ	NO
14.	Utilizan estrategias poco apropiadas al tipo de problema propuesto.	SÍ	NO
15.	Encuentran un resultado sin revisar su coherencia.	SÍ	NO

Figura 24. Preguntas relativas a los estudiantes como resolutores (2ª parte)

b) La resolución de problemas como tarea escolar. Estas preguntas tienen el propósito de explorar tres ideas: características de un buen problema reportadas por la literatura (figura 25); conocimiento de las estrategias y su posible uso por parte de los profesores en las aulas (figura 26); representación del proceso de resolución de problemas, es decir, los participantes conceptualizan el proceso de resolución como cíclico o lineal (figura 27), y los beneficios y características de la invención de problemas (figura 28).

21.	Es necesario saber resolver problemas, pero es más importante querer hacerlo.	SÍ	NO
22.	Se puede resolver un problema con éxito sin estar motivado.	SÍ	NO
23.	Cuándo un estudiante se enfrenta a la resolución de un problema, es importante que esté motivado.	SÍ	NO
24.	No es necesario que los estudiantes quieran resolver un problema, lo importante es que escuchen y obedezcan al profesor.	SÍ	NO
25.	No es importante que un alumno tenga interés por resolver un problema. Lo importante es que conozca los contenidos matemáticos.	SÍ	NO

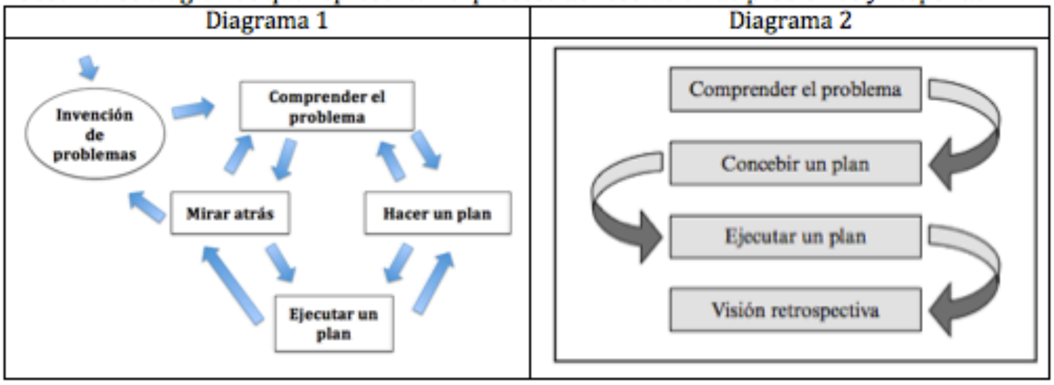
Figura 25. Preguntas relativas a criterios de selección de problemas

23. ¿Qué estrategias para resolver problemas conoces y cuál utilizarías en una clase en que enseñes a resolver problemas a tus futuros estudiantes?

	La conozco		La utilizaría	
a. Dramatizar o teatralizar el problema	SÍ	NO	SÍ	NO
b. Revisar la razonabilidad del resultado	SÍ	NO	SÍ	NO
c. Escoger una operación	SÍ	NO	SÍ	NO
d. Dibujar un diagrama, por ejemplo rectangular o Venn	SÍ	NO	SÍ	NO
e. Hacer un dibujo	SÍ	NO	SÍ	NO
f. Estimar	SÍ	NO	SÍ	NO
g. Buscar un patrón	SÍ	NO	SÍ	NO
h. Hacer un gráfico	SÍ	NO	SÍ	NO
i. Usar material manipulativo	SÍ	NO	SÍ	NO
j. Hacer una tabla	SÍ	NO	SÍ	NO
k. Buscar un problema más simple	SÍ	NO	SÍ	NO
l. Resolver un problema equivalente	SÍ	NO	SÍ	NO
m. Ensayo y error	SÍ	NO	SÍ	NO
n. Eliminar posibilidades	SÍ	NO	SÍ	NO
ñ. Usar un modelo matemático	SÍ	NO	SÍ	NO
o. Dividir el problema en partes más simples	SÍ	NO	SÍ	NO
p. Resolver hacia atrás	SÍ	NO	SÍ	NO

Figura 26. Preguntas relativas a las estrategias y posible uso

Observa los diagramas que representan el proceso de resolución de problemas y responde.



24.	El diagrama 1 representa el proceso de resolver problemas de forma real pues muestra que se puede volver sobre lo realizado o saltarse fases.	SÍ	NO
25.	El diagrama 2 representa el proceso de resolver problemas de forma genuina pues muestra el inicio y el final del proceso, paso a paso.	SÍ	NO
26.	El diagrama 1 es incorrecto pues sus flecha indican que se puede retroceder sobre el trabajo realizado.	SÍ	NO
27.	El diagrama 2 es la mejor forma de representar el proceso de resolver un problema pues avanza hacia la solución.	SÍ	NO

Figura 27. Preguntas relativas a modelos de resolución

Respecto la invención de problema, ¿qué afirmaciones son ciertas?

28.	Los estudiantes deben resolver problemas en el aula que ellos mismos inventen.	SÍ	NO
29.	Solo el profesor debe plantear los problemas que tienen que resolver los estudiantes.	SÍ	NO
30.	Inventar problemas puede obstaculizar el avance en el conocimiento matemático de los estudiantes.	SÍ	NO
31.	Inventar problemas puede ayudar a los estudiantes a adquirir conocimiento matemático.	SÍ	NO
32.	La invención de problemas fomenta la creatividad matemática.	SÍ	NO
33.	La invención se puede realizar antes de resolver un problema, durante su resolución o después de haberlo resuelto.	SÍ	NO
34.	Inventar problemas puede fomentar el uso de estrategias erróneas.	SÍ	NO
35.	Inventar problemas es reformular un problema dado.	SÍ	NO
36.	Inventar problemas es plantear un problema nuevo sin una condición previa.	SÍ	NO

Figura 28. Preguntas relativas a la invención de problemas

c) Factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas. Aquí exploramos algunas de las creencias más comunes sobre la resolución de problemas y cómo afectan mutuamente al profesor y al estudiante cuando se enseña a resolver problemas. El objetivo era identificar si los maestros estaban conscientes del posible impacto que podrían tener. La figura 29 muestra las preguntas relativas a este tema.

¿Qué afirmaciones benefician la habilidad del estudiante para resolver problemas?

37.	Es mejor que los estudiantes descubran cómo resolver un problema por su propia cuenta sin ayuda del profesor.	SÍ	NO
38.	Los estudiantes deben saber que lo más importante es obtener la respuesta correcta a un problema.	SÍ	NO
39.	Los estudiantes tienen que asumir que los problemas tienen una sola respuesta correcta.	SÍ	NO
40.	Una vez que los estudiantes han resuelto el problema, deben conocer todas las respuestas correctas a los problemas.	SÍ	NO
41.	Los estudiantes que resuelven problemas de diferentes maneras terminan confundiéndose.	SÍ	NO
42.	Los estudiantes deben utilizar *palabras claves* (agregar, regalar, veces, etc.) para resolver problemas aritméticos.	SÍ	NO
43.	Es más importante que los estudiantes practiquen los cálculos sin contexto, a que los utilicen para resolver problemas aritméticos.	SÍ	NO
44.	Los estudiantes solo deben resolver problemas una vez que se haya enseñando el concepto matemático.	SÍ	NO
45.	Los estudiantes deben resolver los problemas lo más rápidamente posible.	SÍ	NO
46.	Es conveniente que el profesor solo utilice problemas después de enseñar los conceptos matemáticos.	SÍ	NO
47.	Para aprender a resolver problemas se debe practicar sistemáticamente.	SÍ	NO

Figura 29. Preguntas relativas a los factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas

Enseñanza de la resolución de problemas

Este cuestionario abordó las estrategias de enseñanza relativas a la enseñanza de la resolución de problemas. Los ítems del cuestionario fueron organizados en los siguientes cinco temas:

a) Enfoques de enseñanza de la resolución de problemas. Aquí hemos explorado dos aspectos: los objetivos de cada uno de los tres enfoques de enseñanza de la resolución de problemas y algunas de sus características. El primero se hizo preguntando sobre la organización de clase más apropiada donde se enseña a resolver problemas (preguntas 10 a 12 en figura 30). El segundo, dando ejemplos de situaciones en el aula que están relacionadas con algunos de los enfoques (preguntas 1 a 9 en figura 30).

¿Qué características corresponden a una clase en que se enseña la resolución de problemas?

1.	El foco de discusión de la clase debe estar solo en la respuesta al problema, no en el proceso para alcanzar la respuesta.	SÍ	NO
2.	Debe existir un ambiente en el aula donde sea posible explorar problemas tanto individualmente como en grupo, comunicando entre todos las múltiples formas de resolverlos.	SÍ	NO
3.	Primero se debe aprender un concepto matemático y luego aplicarlo al resolver problemas.	SÍ	NO
4.	El foco de discusión y atención debe estar en el proceso de resolución, es decir, las estrategias utilizadas y los momentos o fases de resolución.	SÍ	NO
5.	El profesor debe mostrar y ejemplificar cómo se resuelven los problemas.	SÍ	NO
6.	Se debe enseñar directamente y explícitamente las fases y estrategias de resolución de problemas.	SÍ	NO
7.	La discusión en clase debe primordialmente tratar de detectar los conceptos matemáticos implicados en la resolución de un problema.	SÍ	NO
8.	Se debe iniciar la clase con un problema, dejar que los estudiantes exploren el problema y descubran las matemáticas presentes en él; mientras el profesor guía el proceso.	SÍ	NO
9	El profesor debe explicar detalladamente qué hacer con los problemas y los estudiantes deben escuchar para luego resolver.	SÍ	NO

Las siguientes frases exponen formas de organizar una clase de resolución de problemas ¿Te parecen adecuadas?

10.	Enseñar primero los conceptos matemáticos, para después aplicarlos al resolver problemas.	SÍ	NO
11.	Enseñar aspectos generales de la resolución de problemas (por ejemplo estrategias o fases) que potencien la habilidad de los estudiantes para resolver problemas.	SÍ	NO
12.	Enseñar un concepto matemático a partir de la resolución de un problema.	SÍ	NO

Figura 30. Preguntas relativas a los enfoques de enseñanza

b) Discurso en la enseñanza de la resolución de problemas. Aquí, se exploraron las posibles acciones de los maestros que podrían favorecer la competencia de los alumnos para resolver problemas. Estas acciones están relacionadas con la gestión de la discusión y las formas de llevar a cabo el proceso de resolución en el aula. La figura 31 muestra las preguntas relativas a este tema.

¿Qué acciones del profesor ayudan a crear un ambiente adecuado para la enseñanza de la resolución de problemas?

13.	Fomentar el uso de diferentes estrategias de solución.	SÍ	NO
14.	Poner a disposición de los estudiantes un solucionario con las respuestas.	SÍ	NO
15.	Discusión de las estrategias usadas por los estudiantes.	SÍ	NO
16.	Pedir a los estudiantes que argumenten y reflexionen sobre sus respuestas y las matemáticas implicadas en el problema.	SÍ	NO
17.	Dar por terminado el problema una vez que se encuentra la respuesta.	SÍ	NO
18.	Conducir la discusión hacia cómo se resolvió el problema, qué procedimiento se usó, etc.	SÍ	NO
19.	Pedir que los problemas se resuelvan rápidamente.	SÍ	NO
20.	Proponer problemas de fácil resolución.	SÍ	NO
21.	Mostrar a los estudiantes las estrategias que resuelven los problemas.	SÍ	NO
22.	Fomentar que los estudiantes en grupo indiquen su acuerdo o desacuerdo con las soluciones de sus compañeros, dando razones justificadas.	SÍ	NO

Figura 31. Preguntas relativas al discurso en la enseñanza de la resolución de problemas

c) Bloqueo en la enseñanza de la resolución de problemas. Las preguntas sobre este conocimiento han explorado las posibles acciones de los maestros cuando los estudiantes tienen dificultades para resolver un problema. Nos hemos centrado en las dificultades para entender y llevar a cabo el plan. La figura 32 muestra las preguntas relativas a este tema.

¿Qué acciones debe realizar un profesor si un estudiante tiene un atasco al resolver un problema?

23.	Si se equivocó en un cálculo, pedirle que vuelva a leer el problema hasta comprenderlo.	SÍ	NO
24.	Identificar si el error está en la comprensión de las condiciones del problema o en la ejecución de la estrategia.	SÍ	NO
25.	Para la comprensión de las condiciones del problema es recomendable sugerir representaciones alternativas.	SÍ	NO
26.	Para los atascos en la ejecución del plan es recomendable sugerir estrategias alternativas.	SÍ	NO
27.	Es recomendable dar la respuesta al estudiante para que no tenga sentimientos de frustración.	SÍ	NO

Un estudiante que ha comprendido el problema, ha realizado una selección adecuada de la estrategia para resolverlo, pero ha cometido un error en un cálculo y se ha atascado… ¿qué acción debería realizar un profesor para ayudarlo?

28.	Pedirle que represente el problema de una manera diferente.	SÍ	NO
29.	Sugerirle que cambie su estrategia de solución.	SÍ	NO
30.	Hacerle preguntas sobre cómo realizó los cálculos.	SÍ	NO

Figura 32. Preguntas relativas al bloqueo en la enseñanza de la resolución de problemas

d) Evaluación en la enseñanza de la resolución de problemas. Las preguntas sobre este conocimiento tienen dos focos: criterios e instrumentos. Para el primero, se le da una lista de posibles criterios para evaluar el proceso de resolución (pregunta 47 en figura 33). En el segundo, se proporciona una lista de instrumentos de evaluación, solicitando señalar su adecuación para evaluar la competencia de resolución de problemas (preguntas 31 a 46 en figura 33).

¿Qué se debe evaluar en/sobre la resolución de problemas?

31.	La comprensión del problema, por ejemplo, pidiendo que lo expliquen con sus palabras propias.	SÍ	NO
32.	La organización y representación de la información del problema.	SÍ	NO
33.	La planificación de un posible camino a la solución.	SÍ	NO
34.	El control del proceso, es decir, si el estudiante es capaz de notar que si el plan no permite encontrar la respuesta, se debe volver y buscar uno nuevo.	SÍ	NO
35.	La habilidad para seleccionar y usar estrategias de resolución.	SÍ	NO
36.	La existencia de actitudes y creencias adecuadas para la resolución de problemas.	SÍ	NO
37.	La comunicación del avance, respuesta y justificaciones sobre lo realizado.	SÍ	NO
38.	La habilidad para usar conocimiento matemático relacionado.	SÍ	NO
39.	Ser capaz de encontrar una respuesta correcta.	SÍ	NO
40.	Ser capaz de encontrar la respuesta rápidamente.	SÍ	NO
41.	El orden y limpieza en el trabajo realizado.	SÍ	NO
42.	La habilidad para identificar palabras claves (regalar, perdí, etc.).	SÍ	NO
43.	La capacidad para dar sentido a la respuesta de acuerdo a las condiciones del problema.	SÍ	NO
44.	La capacidad para representar únicamente con símbolos y números las ideas y respuestas.	SÍ	NO
45.	La perseverancia para continuar trabajando a pesar de no encontrar la respuesta correcta.	SÍ	NO
46.	La confianza y seguridad al enfrentarse a un problema.	SÍ	NO

47. ¿Qué técnicas se debe usar para evaluar el desarrollo de la competencia para resolver problemas de los estudiantes?

a. Observar a los estudiantes mientras resuelven problemas	SÍ	NO
b. Entrevistas personales	SÍ	NO
c. Autoinformes de los estudiantes	SÍ	NO
d. Inventar problemas	SÍ	NO
e. Respuestas escritas de pruebas de resolución de problema	SÍ	NO
f. Pruebas de selección múltiple	SÍ	NO
g. Resultados escritos de pruebas de completar "huecos en blanco"	SÍ	NO

Figura 33. Preguntas relativas a la evaluación en la enseñanza de la resolución de problemas

f) Recursos en la enseñanza de la resolución de problemas. Nos hemos centrado en dos elementos: representaciones (concretas, pictóricas y simbólicas) y su papel en la resolución de problemas, pero con atención especial a las representaciones concretas, también conocidas como materiales manipulativos, por la importancia en la escolaridad primaria. Las preguntas exploran el rol de ambos elementos y el posible uso que se haría de ellos en el aula cuando la resolución de problemas se está enseñando. La figura 34 muestra las preguntas relativas a este tema.

48. ¿Por qué es adecuado que los estudiantes usen materiales cuando resuelven problemas?

a.	Ayudará a los estudiantes a escribir sistemáticamente sus cálculos mientras resuelven el problema, respondiendo de forma ordenada.	SÍ	NO
b.	Permitirá a los estudiantes visualizar y manipular relaciones e ideas para luego poder generalizar algunos aspectos relacionados a la estructura del problema.	SÍ	NO
c.	No es necesario que los estudiantes utilicen materiales, sería mejor enseñarles los símbolos matemáticos.	SÍ	NO

De las siguientes afirmaciones relativas al uso de representaciones para resolver problemas, es recomendable:

49.	Promover el uso de un solo tipo de representación para evitar confusiones.	SÍ	NO
50.	Utilizar solo representaciones formales o simbólicas.	SÍ	NO
51.	Utilizar las representaciones para comunicar los resultados de los problemas.	SÍ	NO
52.	Promover su uso pues son una muestra de las ideas que el estudiante tiene sobre el problema.	SÍ	NO
53.	Utilizar múltiples representaciones solo en estudiantes pequeños o que no comprenden un problema.	SÍ	NO
54.	Focalizar su uso en la etapa de comprensión del problema.	SÍ	NO
55.	Fomentar su uso durante todo el proceso de resolución.	SÍ	NO
56.	Fomentar su uso pues favorecen el tránsito entre las propias representaciones espontáneas de los estudiantes y las representaciones matemáticas o formales.	SÍ	NO
57.	Fomentar el uso de representaciones propias de los estudiantes.	SÍ	NO
58.	Fomentar el uso de más de una representación en la resolución de los problemas.	SÍ	NO

Figura 34. Preguntas relativas a los materiales en la enseñanza de la resolución de problemas

Ambas partes del cuestionario incluían preguntas sobre la disposición en la resolución de problemas (pregunta 3 en cuestionario "Problemas matemáticos escolares" y pregunta 21 en cuestionario "Resolución de problemas"). Exploramos este conocimiento preguntando a los participantes que indicaran el papel de la disposición en la resolución. La figura 35 muestra las preguntas relativas a este tema.

3.	Un problema es una tarea que el resolutor acepta como reto.	SÍ	NO
21.	Es necesario saber resolver problemas, pero es más importante querer hacerlo.	SÍ	NO

Figura 35. Preguntas relativas a la disposición en la resolución de problemas

Procedimiento

El cuestionario fue aplicado al finalizar los cursos académicos 2016/2017, 2017/2018 y 2018/2019 a ambos grupos de cuarto año y 2017/2018 al grupo de primer año. Fue respondido individualmente durante dos momentos diferentes, uno para cada parte del cuestionario. La duración para el cuestionario sobre el conocimiento de la resolución de problemas fue de 30 minutos en total (10 minutos para el cuestionarios sobre la caracterización de problemas y 20 para la parte sobre el proceso de resolución) y de 40 minutos en total para el cuestionario sobre conocimiento didáctico de la resolución de problemas (20 min para cada uno).

Análisis de los datos

El análisis de las respuestas fue realizado desde dos perspectivas y se ha llevado a cabo secuencialmente. Primero, realizamos un análisis de las respuestas de los participantes de manera colectiva, con el fin de organizar las características de cada grupo en relación con el conocimiento manifestado sobre la resolución de problemas. Este análisis nos ha permitido ver cómo la formación trata este conocimiento, en términos de cómo se desarrolla el conocimiento de cada grupo. Posteriormente, llevamos a cabo un análisis para describir el conocimiento sobre resolución de problemas. Estos análisis nos han permitido comprender las respuestas en términos de cómo se organiza el conocimiento sobre resolución de problemas una vez que se completa la formación y, específicamente, qué saben y cuáles son las dificultades.

El primer análisis fue una perspectiva cuantitativa de las respuestas de los cuestionarios. Esto se llevó a cabo de acuerdo con nuestro objetivo: caracterizar el conocimiento sobre resolución de problemas exhibido por los futuros profesores. Hemos utilizado una de las formas de interpretación del escalamiento multidimensional, que permite identificar las agrupaciones que emergen de sus respuestas, describir la característica común de estas y etiquetar el atributo presente en ellas (Bisquerra, 1989). Por lo tanto, las respuestas se procesaron primero con un análisis multivariante a través de un escalamiento multidimensional ALSCAL (SPSS), en el que las dimensiones definidas fueron acuerdo, desacuerdo y contradicción, es decir, si todo el grupo manifiesta ese conocimiento, si hay una polarización en las ideas del grupo, o si el conocimiento de alguien contradice el propio o el de otros. Además este posicionamiento permitiría observar las diferencias entre los dos tipos de formación recibida. Es importante tener en cuenta que para este análisis hemos atendido a la dimensión en la que las respuestas tienen una mayor presencia. Sin embargo, hay algunas respuestas que mantienen una presencia importante en más de una dimensión.

Posteriormente se realizó un segundo análisis descriptivo, en el que las respuestas se revisaron en términos de diferencias intergrupales y las dimensiones encontradas. Además, se analizan las respuestas de acuerdo a lo que se responde y no de acuerdo a una norma. Esto no significa que en algunos aspectos en los que existe acuerdo en la comunidad científica, se discuta en términos de una debilidad o fortaleza.

Características metodológicas de la profundización en el conocimiento sobre resolución de problemas

En esta tercera y última fase de la investigación, hemos indagado y profundizado en el conocimiento del proceso que manifestaron los futuros profesores. Esta decisión se basa en dos motivos: primero, es la dimensión de conocimiento que mayores dificultades presentó a los futuros maestros y segundo, al ser un estudio de carácter secuencial, la temporalidad para su realización dentro de los rangos establecidos para completar esta investigación doctoral, no permitían un estudio a ambas dimensiones.

Abordamos esta fase de la investigación desde una perspectiva de estudio de casos, en el sentido que no buscamos la cantidad ni la estandarización de los datos, sino profundizar en la información (Stake, 1999) obtenida en los cuestionarios relativa al conocimiento de los maestros en formación sobre la resolución de problemas. Sin embargo, este estudio debe entenderse como complementario de la fase anterior, en el sentido que se buscan las razones que subyacen en las respuestas reportadas en los cuestionarios.

Participantes

Los participantes de esta fase fueron seleccionados sobre la base de un análisis clúster de los resultados de los cuestionarios del grupo de cuarto año. El objetivo es obtener un espectro de todos los perfiles de respuesta posibles para la realización de las entrevistas. Así, en este análisis identificamos grupos de futuros profesores que responden de manera similar.

La identificación de grupos fue realizada a través de dos acciones secuenciales. La primera fue un análisis clúster del cuestionario sobre el conocimiento del proceso por separado, de acuerdo a los conocimientos presentes en él: (1) caracterización de problema, (2) proceso de resolución, y (3) disposición. Este análisis reportó dos grandes grupos para la caracterización de problemas y el proceso de resolución; y cuatro grupos para disposición. Respecto a este último, y debido a que los cuestionarios solo contaban con dos preguntas para este tema, hemos decido sintetizar en solo tres grupos (uno para los que responden si a ambos, otro para los que responden no a ambas y fusionamos los dos grupos que responden positiva y negativamente a cada una).

Posteriormente, identificamos a cada participante con el grupo correspondiente en cada uno de los conocimientos explorados. La figura 36 muestra un extracto de dicha clasificación. Este proceso identificó diez perfiles de futuros docentes según el conocimiento manifestado en los cuestionarios. La caracterización detallada se muestra en el capítulo de resultados, pero de forma general cada grupo contaba con: 56 participantes en el grupo 1; 12 participantes en el grupo 2; 1 participante en el grupo 3; 9 participantes en el grupo 4; 3 participantes en el grupo 5; 2 participantes en el grupo 6; 42 participantes en el grupo 7; 8 participantes en el grupo 8; 2 participantes en el grupo 9; y 3 en el grupo 10. Cabe destacar que un participante quedó fuera de esta caracterización por no encontrarse en ningún grupo en sus respuestas a las preguntas relativas a la caracterización de problemas.

	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO							
		CARACTERIZACION DE PROBLEMA		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		DISPOSICIÓN		
	SUJETO	A1	A2	B1	B2	C1	C2	C3
48		X		X		X		
49		X		X		X		
50		X		X		X		
52		X		X		X		
54		X		X		X		

Figura 36. Clasificación de sujetos según análisis clúster

Finalmente, según disponibilidad y disposición de colaborar con la investigación, se seleccionó un participante de cada grupo para realizar las entrevistas. La tabla 6 muestra la composición del perfil de cada participante de la fase de entrevistas.

Tabla 10. *Participantes seleccionados para entrevistas*

Participantes	Conocimiento del procesos						
	Caracterización de problema		Proceso de resolución		Disposición		
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	C3
1	X		X		X		
2	X		X			X	
3	X		X				X
4	X			X	X		

Tabla 10. *Participantes seleccionados para entrevistas*

Participantes	Conocimiento del procesos						
	Caracterización de problema		Proceso de resolución		Disposición		
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	C3
5	X			X		X	
6	X			X			X
7		X	X		X		
8		X	X			X	
9		X	X				X
10		X		X	X		

Contexto

Los participantes fueron seleccionados de ambos grupos finales. Como ya establecimos en la caracterización del estudio previo, ambos grupos cursaron tres asignaturas de matemáticas durante su formación universitaria. La primera de ellas centrada en el estudio del contenido de las matemáticas escolares. La segunda centrada en la enseñanza y aprendizaje de los distintos núcleos temáticos de la matemática escolar concretada en aspectos cognitivos y didácticos. La tercera orientada al estudio del currículo de matemáticas de educación primaria y al diseño e implementación de unidades didácticas para esta etapa. En estas tres asignaturas la resolución de problemas es tratada como un contenido transversal. Además, un grupo cursó la asignatura optativa "Competencias Matemáticas en Educación Primaria", de la cual uno de sus contenidos es la resolución de problemas. Específicamente, los futuros profesores trabajan estrategias y heurísticos, invención de problemas y estrategias docentes para enseñanza de la resolución de problemas.

Técnica de recogida de datos e instrumento

Realizamos la recogida de datos mediante entrevistas personales individuales semi-estructuradas con cada uno de los participantes. Los protocolos de las entrevista fueron diseñados utilizando las mismas preguntas que los cuestionarios. Esta decisión se basa en el objetivo de profundizar en el conocimiento del proceso y en que cualquier tarea puede ser útil para plantear en una entrevista, siendo más bien el estímulo que se plantee junto a esa pregunta el que permitirá que se inicie la conversación (Hunting, 1997). Siguiendo las recomendaciones de Hunting (1997), se planteó la pregunta y se le dijo al futuro profesor que otro de sus compañeros había respondido de cierta manera, en lugar de preguntar directamente por qué había respondido así, para luego preguntar las razones que su respuesta. Además, como señalan Cohen, Manion y Morrison (2018), en este tipo de entrevistas, el entrevistador tenía la libertad de hacer más preguntas para aclarar ideas o profundizar en las razones dadas por el participante.

La selección de las preguntas de las preguntas fue realizada teniendo en consideración las respuestas obtenidas en los cuestionarios y corresponden a ítem abiertos (Cohen et al., 2018). Es decir, teníamos un marco de referencia para las respuestas de los participantes. Así mismo, utilizamos los perfiles para la selección de las preguntas, pues además nos permitiría no repetir el cuestionario completo a todos los entrevistados. Esto se traduce en que para cada uno de los perfiles surgidos del análisis clúster se le realizaron las preguntas que su perfil denotaba dificultades. Es decir, el entrevistador dispuso de un protocolo estructurado con las preguntas que presentaron contradicciones, dudas o en las que no se registraron cambios entre los sujetos de primer y cuarto año en el cuestionario sobre el conocimiento del proceso. Junto a las preguntas, se agregó un estímulo redactado en función de los resultados obtenidos en los cuestionarios. Es decir, si en el perfil de un sujeto hay preguntas que obtienen baja puntuación, pero la literatura lo reporta como un aspecto importante, se preguntó de la siguiente forma: "Un compañero ha respondido que no a esta pregunta, ¿por qué crees que respondió así?" Lo mismo se realizó con preguntas que reportaran dudas, contradicciones o que no reportaron cambios y se intercambió la palabra *no* por la palabra *dudoso*.

Para la selección de preguntas sobre la caracterización de problemas, y basándonos en los dos grupos de participantes que respondieron de forma similar en el análisis clúster relativo a este tema, seleccionamos preguntas que fueron realizadas a todos los entrevistados y preguntas que fueron realizadas específicamente a cada perfil. La tabla 7 muestra las preguntas relativas a este tema.

Tabla 11. *Preguntas entrevista relativas a la caracterización de problemas*

	Pregunta y estímulo
Todos	Los problemas deben resolverse solo con procedimientos previamente aprendidos. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Un problema es una tarea sin un procedimiento conocido para resolverlo. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Para que una tarea sea un problema depende de la experiencia del resolutor. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Para que una tarea sea un problema, el estudiante debe ser capaz de detectar en los primeros momentos de su abordaje una posible forma de resolverlo. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Para practicar las operaciones aritméticas en segundo de primaria, los textos escolares al finalizar las lecciones proponen tareas como la siguiente: *El día que cumplí 8 años me trajeron 6 regalos por la mañana y 5 regalos por la tarde. ¿Cuántos regalos recibí ese día?* Este tipo de tareas, ¿son problemas? Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
Perfil A1	A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como la siguiente: *(745.580 + 898.834) : (15.3745 x 8.203)*. En algún momento de la escolaridad ¿pueden ser considerados problemas? Un compañero ha respondido que no, ¿por qué crees que respondió así?
	A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como la siguiente: *¿Cuántas chuches comen tus compañeros de clase en una semana?* En algún momento de la escolaridad ¿pueden ser considerados problemas? Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Un problema puede tener datos poco precisos. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
	Un problema debe tener toda la información necesaria en el enunciado. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?
Perfil A2	5. La siguiente tarea: *Un granjero tiene una huerta de verduras de forma rectangular de 60 m2 de superficie y quiere cercarla para evitar que entren animales. Si sus lados se miden solo en números naturales, ¿cuáles son los diferentes perímetros de cerca que puede utilizar?*

¿Es un problema para cualquier estudiante? (sin importar su curso, edad, etc.). Un compañero ha respondido que sí, ¿por qué crees que respondió así?

Los cálculos que presentan los textos escolares para practicar las operaciones aritméticas son problemas. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?

A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como las siguientes: a. *(745.580 + 898.834) : (15.3745 x 8.203)* y b. *Las pelotas de ping-pong vienen en paquetes de 3 unidades. Una caja trae 24 paquetes. El sr. López, dueño de una tienda deportiva, compró 1.800 pelotas de ping-pong. ¿Cuántas cajas compró el sr. López?* En algún momento de está escolaridad ¿pueden ser considerados problemas? Un compañero ha respondido que no, ¿por qué crees que respondió así?

A lo largo de la enseñanza obligatoria aparecen tareas como las siguientes: c) *Un granjero tiene patos y ovejas. Contó 10 cabezas y 26 pies en total. ¿Cuántos patos y ovejas tiene?*; d) *Empleando únicamente 6 cerillas, forma cuatro triángulos equiláteros*; e) *¿Cuántas chuches comen tus compañeros de clase en una semana?*; y f) *Los tetrominós son formas geométricas construidas con cuatro cuadrados unidos por alguno de sus lados. Las siguientes imágenes representan distintos tetrominós. Construye el mayor número de formas distintas posibles utilizando los 5 tetrominós*. En algún momento de esta escolaridad ¿pueden ser considerados problemas? Un compañero ha respondido que sí, ¿por qué crees que respondió así?

Un problema tiene solo una respuesta correcta. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?

Hay problemas que se pueden resolver de más de una manera. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?

Un problema puede tener ambigüedades en su enunciado. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?

Un problema puede contener información innecesaria en el enunciado. Un compañero no está seguro de que esto sea así, ¿por qué crees que está dudoso?

Un problema debe considerar siempre un contexto que refleje una situación. Un compañero ha respondido que sí, ¿por qué crees que respondió así?

Al igual que con las preguntas seleccionadas para la caracterización de problemas, las preguntas relativas al proceso de resolución fueron agrupadas en las que se hicieron a todos los entrevistados, y las que se hicieron a cada uno de los dos perfiles que arrojó el análisis clúster. La tabla 8 muestra las preguntas y el estímulo utilizado.

Tabla 12. *Preguntas entrevista relativas al proceso de resolución*

	Pregunta y estímulo
Todos	C2_5A a H. Un compañero no está seguro que F forme parte del proceso de resolución, ¿por qué crees que respondió así?
	Se puede resolver un problema con éxito sin estar motivado. Un compañero ha respondido que sí, ¿por qué crees que respondió así?
	Un compañero no reconoció esta estrategia, ¿por qué crees que no la conoce? ¿la conoces tú? (USAR UNA TABLA)
	Un compañero no reconoció esta estrategia, ¿por qué crees que no la conoce? ¿la conoces tú? (ENSAYO Y ERROR)
Perfil B1	C2_ 11A a 11D. Un compañero reconoce que hay error en la respuesta del estudiante, pero no tiene claro si es que no comprendió o calculó mal o no verificó la respuesta. ¿por qué crees que pasa? ¿qué crees tú?
Perfil B2	C2_ 11A a 11D. Un compañero no está seguros sobre si hay error. Culpa a la comprensión, al cálculo y a la adecuación de la respuesta. ¿por qué crees que pasa? ¿qué crees tú?
	Una vez resuelto el problema, es aconsejable que el resolutor conozca qué pasaría si se cambian los datos. Un compañero no está seguro. ¿por qué crees que pasa? ¿qué crees tú?
	Si un estudiante encuentra la respuesta correcta ya no debe realizar más acciones. Un compañero no está seguro. ¿Por qué crees que pasa? ¿qué crees tú?
	Una vez encontrada la respuesta, es recomendable buscar otras formas alternativas de solución una vez encontrada la respuesta. Un compañero no está seguro. ¿Por qué crees que pasa? ¿qué crees tú?
	Un compañero no reconoció esta estrategia, ¿por qué crees que no la conoce? ¿la conoces tú? (BUSCAR UN PATRÓN)
	Un compañero no reconoció esta estrategia, ¿por qué crees que no la conoce? ¿la conoces tú? (OPERAR)

Finalmente, al ser solo dos ítems, las preguntas relativas a la disposición se realizaron a los que habían contestado negativamente a ambas o negativamente a alguna de las dos (ver preguntas en figura 35).

Procedimiento

Las entrevistas se realizaron durante el año académico 2018-2019. Antes de comenzar la grabación, cada participante fue informado del motivo de la entrevista y se le advirtió de la grabación en audio, explicitando la garantía de su anonimato.

El entrevistador se situó frente al sujeto, separados por una mesa de trabajo. El entrevistador dispuso de los protocolos con las preguntas a tratar a lo largo de la entrevista. Aunque el orden de las preguntas estaba establecido por los protocolos, el modo de formular las preguntas se dejó a libre decisión del entrevistador. Es decir, el entrevistador planteó la conversación en los términos que estimó convenientes, dio aclaraciones, pidió al futuro profesor explicaciones cuando alguna respuesta no era clara y profundizó en aquellos temas que le pareció necesario. En el caso de que el sujeto no cumpliera con lo esperado por el objetivo de esta fase, el entrevistador tenía libertad para insistir en la pregunta o en su reelaboración.

Análisis de los datos

Las entrevistas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas para su análisis. Posteriormente se realizó un análisis cualitativo de las respuestas a cada una de las preguntas planteadas. Para ello, utilizamos las categorías emergidas en el análisis de las normativas curriculares previo y que estaban plasmadas en los temas que organizan los cuestionarios del segundo estudio. Esto se traduce en que analizamos las entrevistas para comprender el porqué de las respuestas a los cuestionarios. Para ello, las entrevistas transcritas se codificaron de acuerdo con el conocimiento aludido. La codificación involucró, por ejemplo, la identificación de declaraciones significativas sobre las razones subyacentes de por qué el resolutor debe considerarse para etiquetar un problema.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

Este capítulo se centra en el estudio de los componentes de conocimiento del profesor de educación primaria sobre la resolución de problemas de matemáticas a partir de propuestas curriculares. Para tal fin, realizamos un análisis de seis documentos curriculares de educación primaria, representativos de tres niveles distintos, categorizados según los resultados de la prueba PISA 2012, tratando de identificar en ellos conocimientos sobre resolución de problemas que se exige en esos sistemas escolares. Los resultados evidencian que los documentos curriculares incluyen elementos teóricos de la resolución de problemas que los modelos de conocimiento del profesor no contemplan. A partir de estos resultados hemos elaborado una propuesta de componentes de conocimiento acerca de la resolución de problemas que deberían formar parte de los conocimientos del profesor.

El análisis de normativas curriculares desde el punto de vista de los contenidos que en ellas se incluyen sobre resolución de problemas muestra el grado de concreción y la ponderación acerca del conocimiento sobre la resolución de problemas necesario para su enseñanza. Para indagar en ello, hemos realizado un análisis de seis documentos curriculares de matemáticas de Educación primaria de países que han presentado un desempeño mediano y extremo en los resultados obtenidos en la prueba PISA 2012. Dicho análisis se realiza desde la perspectiva teórica del conocimiento del profesor, en el que nos valemos del marco propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015). Adoptamos dicha perspectiva pues se ha señalado que los documentos curriculares enmarcan el conocimiento del profesor (Ball et al., 2005). Posteriormente, a partir de los resultados obtenidos del conocimiento que sobre resolución de problemas exigen los documentos curriculares, se presenta una especificación del marco propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015) del conocimiento relativo a la resolución de problemas.

Los hallazgos los hemos organizado en función del tipo de conocimiento involucrado: conocimiento del contenido sobre resolución de problemas, conocimiento didáctico del contenido sobre resolución de problemas y factores afectivos. En lo que sigue mostramos los resultados que ilustran el conocimiento demandado a los profesores.

Conocimiento del contenido

El primer apartado de resultados surge del análisis del conocimiento del contenido realizado en función de sus tres subcategorías: conocimiento sobre problemas, su resolución e invención. Sobre el conocimiento referido a los problemas es posible identificar dos tipos de menciones, un grupo (presente en los documentos de España, NCTM y Chile) que hace mención a lo que se entenderá como problema, explicitando que:

> *Se habla de resolver problemas, en lugar de simples ejercicios, cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir.* (Ministerio de Educación, 2012, p.89).

O también que:

> *La resolución de problemas significa participar en una tarea para la cual el método de solución no se conoce de antemano.* (NCTM, 2000, p. 52).

El segundo grupo de menciones, es posible encontrarlas en todos los currículos escolares y hace alusión a clasificaciones o tipos de problemas bajo diversos criterios. Algunas de ellas aluden al contenido o a la familiaridad del tipo de problema, señalando que los estudiantes deben:

> *Demostrar que comprenden la multiplicación de números de tres dígitos por números de un dígito, resolviendo problemas rutinarios.* (Ministerio de Educación, 2012, p. 113).

También es posible observar alusiones a los contextos o si son abiertos o cerrados. La normativa curricular finlandesa estipula:

> *una amplia gama de situaciones, incluidos problemas no rutinarios, abiertos y del mundo real.* (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 6)

En lo que respecta al conocimiento sobre resolver problemas es posible agrupar sus menciones en cuatro tipos: unas referidas a heurísticos generales o etapas de resolución, otra sobre estrategias específicas como buscar un patrón o usar una tabla, y otra relativa a estrategias de otras áreas de contenido y el fomento de estrategias personales. Encontramos que todos los documentos analizados presentan contenidos referidos a heurísticos generales. Esto se expresa al plantear que:

> *Proporcionar a los estudiantes problemas que requieran planificación (antes de resolver) y evaluación (después de resolver).* (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 9)

No obstante, solo los documentos de España, del NCTM y Chile manifiestan heurísticos específicos, al mencionar que el estudiante:

> *Resuelve problemas… utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.* (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19390)

En esta misma línea, los documentos del NCTM y Argentina van aún más allá al plantear estrategias de otras áreas de contenido, ligadas al método científico:

> *En los grados 3 a 5, los estudiantes deben desarrollar importantes procesos necesarios para la investigación científica y para la resolución de problemas matemáticos —inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.* (NCTM, 2000, p. 201)

Por último, los documentos curriculares de Finlandia y España no hacen mención a las estrategias personales de resolución, como si lo hacen los documentos de Argentina, al plantear:

> *La elaboración de procedimientos para resolver problemas atendiendo a la situación planteada.* (Consejo Federal de Educación, 2011b, p. 14)

En la categoría de invención de problemas es posible identificar alusiones a los contextos dónde realizarla, sus beneficios y estrategias específicas para su implementación en el aula. El documento del NCTM muestra presencia en todas las subcategorías, seguido del documento chileno y el argentino, que cumplen con dos subcategorías. Concretamente, en la subcategoría de contextos dónde formular problemas, se plantea que los estudiantes deben:

> *Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos, creando problemas matemáticos y resolviéndolos.* (Ministerio de Educación, 2012, p. 99)

Además en lo referido a las posibles estrategias para su introducción al aula, se señala que se pueden:

> *…elaborar preguntas o enunciados de problemas y registrar y organizar datos en listas y tablas a partir de distintas informaciones.* (Consejo Federal de Educación, 2011a, p .18a)

Sobre los beneficios de la invención de problemas, el documento del NCTM es el único que lo retrata, señalando que:

> *Al extender los problemas y plantear diferentes preguntas, los estudiantes se convierten en inventores de problemas así como en solucionadores de problemas.* (NCTM, 2000, p. 185)

Respecto a las estrategias específicas, se encuentran indicaciones generales como:

> *guiar al alumno en la búsqueda y formulación de problemas y en la búsqueda de una solución.* (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 158)

O más detalladas, como lo realiza el documento español, señalando que:

> *Se debe trabajar en la profundización en los problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc.* (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387)

A la luz de esto, podemos afirmar que el documento del NCTM es el documento que más aspectos considera sobre conocimiento del contenido sobre problemas, seguido del de Chile, España y Argentina, y finalmente el de Singapur y Finlandia.

Conocimiento didáctico del contenido

Un segundo apartado de resultados ha surgido del análisis del conocimiento didáctico en función de sus categorías: conocimiento sobre los estudiantes como resolutores y conocimiento sobre el papel de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Situándonos en la categoría referida al conocimiento sobre los estudiantes como resolutores, es posible diferenciar tres subcategorías: el pensamiento de los estudiantes, sus dificultades y las características de resolutores exitosos. En la primera de ellas, emergen dos grupos, uno que hace mención al pensamiento de los estudiantes (Documentos curriculares de Singapur, Chile y el documento del NCTM) y otro grupo que no (Documentos curriculares de Finlandia, España y Argentina). En los documentos que hacen mención, es posible encontrar frases como:

> *La resolución de problemas permite, asimismo, que el profesor perciba el tipo de pensamiento matemático de sus alumnos cuando ellos seleccionan diversas estrategias cognitivas y las comunican.* (Ministerio de Educación, 2012, p. 87)

Específicamente, cuando hablan del pensamiento de los estudiantes como resolutores hacen principalmente alusiones al papel de las representaciones y la modelización, estableciendo que:

> *En los grados 3 a 5, los estudiantes necesitan desarrollar y usar una variedad de representaciones de ideas matemáticas para modelar situaciones de problemáticas.* (NCTM, 2000, p. 206)

Junto a esto, surgen también menciones sobre las dificultades que pueden presentar los estudiantes. Solo el documento del NCTM hace mención a ello en frases como:

> *Los fracasos en la resolución de problemas de los estudiantes a menudo se deben no a la falta de conocimientos matemáticos, sino al uso ineficaz de lo que saben.* (NCTM, 2000, p. 54)

En la subcategoría de características de resolutores exitosos, encontramos dos documentos que hacen mención a ello, el documento curricular de Finlandia y el documento del NCTM, en frases como:

> *Los buenos resolutores de problemas se dan cuenta de lo que están haciendo y, con frecuencia, monitorean, o autoevalúan, su progreso o ajustan sus estrategias a medida que encuentran y resuelven problemas.* (NCTM, 2000, p. 54)

Referente al papel que la resolución de problemas debe jugar en el aula es posible identificar cuatro focos de atención: los enfoques de enseñanza o vías de acceso, la metacognición, la evaluación y estrategias de enseñanza específicas para enseñar a resolver problemas. El documento del NCTM hace mención a la totalidad de ellos, mientras que las normativas curriculares de Singapur y Chile cubren casi la totalidad de las subcategorías. En los documentos de España y Finlandia solo se encuentran menciones al enfoque de enseñanza prioritario de la resolución de problemas. En el documento argentino, no se encontraron menciones pero es posible inferir un enfoque de enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas pues sus objetivos señalan que los conceptos matemáticos deben aprenderse *en* la resolución de problemas y no para o sobre ella, señalando que:

> *la comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad en situaciones problemáticas.* (Consejo Federal de Educación, 2011b, p. 18)

Sobre los enfoques o vías de acceso es posible encontrar alusiones a los tres enfoques o vías de acceso de la resolución de problemas. En ellos se encuentran alusiones directas al enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas estableciendo que:

> *Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática.* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014, p. 19386)

Sin embargo, en la mayoría de los objetivos se infiere una utilización del enfoque de enseñanza de las matemáticas para la resolución de problemas, pues establecen que los estudiantes deben:

> *Demostrar una comprensión de los conceptos asociados con las matemáticas usándolos para resolver problemas.* (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 159)

Si bien aparece un menor número de veces, el enfoque de la enseñanza sobre la resolución de problemas es posible identificarla a través de frases como:

> *Exponer a los estudiantes a habilidades generales de resolución de problemas, habilidades de pensamiento y heurísticos, y cómo estas habilidades se pueden aplicar para resolver problemas.* (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 9)

La subcategoría referida a la metacognición, es posible encontrarla en frases que señalan:

> *La metacognición, o "pensar sobre el pensamiento", se refiere a la conciencia y la capacidad de controlar los propios procesos de pensamiento, en particular la selección y el uso de estrategias de resolución de problemas.* (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p.9)

Sobre la evaluación, es posible encontrarla en menciones que plantean:

> *Es responsabilidad del maestro saber cuándo los estudiantes necesitan ayuda y cuándo pueden continuar trabajando productivamente sin ella.* (NCTM, 2000, pp. 185-186)

Un aspecto interesante sobre los documentos curriculares es la presencia de estrategias de enseñanza específica para la enseñanza de la resolución de problemas, por ejemplo:

> *Alentar a los alumnos a pensar en voz alta las estrategias y los métodos que utilizan para resolver problemas particulares.* (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 9)

Así, la dimensión sobre el conocimiento didáctico, el documento que mayores alusiones realiza es el del NCTM. Lo siguen el documento curricular de Chile, Singapur, España y Finlandia. En las directrices argentinas no se identifica ninguna mención a este respecto.

Factores afectivos y creencias

Finalmente, en la dimensión referida a factores afectivos y creencias, todos los documentos hacen referencia a ellas, pero solo el documento del NCTM además, señala el papel del profesor. Encontramos menciones sobre su importancia al señalar que:

> *La confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes.* (Consejo Federal de Educación, 2011a, p. 14)

También es posible encontrar alusiones más específicas sobre cómo la resolución de problemas ayuda a formar emociones consideradas adecuadas para el aprendizaje, señalando que:

> *puede brindar momentos de entusiasmo al estudiante cuando se enfrenta a un desafío, de alegría y sorpresa cuando descubre una solución a simple vista, o de triunfo cuando logra resolver una situación difícil.* (Ministerio de Educación, 2012, p. 86)

El rol del profesor es posible identificar en la propuesta del NCTM cuando se hace mención a que:

> *Los maestros desempeñan un papel importante en el desarrollo de las disposiciones de resolución de problemas de los estudiantes al crear y mantener entornos de aula, desde preescolar, en los que se alienta a los alumnos a explorar, asumir riesgos, compartir fracasos y éxitos, y cuestionarse entre sí.* (NCTM, 2000, p. 53)

Por último, señalar que el documento norteamericano es el que presenta mayor cantidad de menciones, seguido de las normativas curriculares de Chile y España. Las directrices de Singapur, Finlandia y Argentina solo presentan una mención.

La tabla 9 muestra que las menciones se agrupan mayoritariamente en aspectos teóricos de los problemas y su resolución.

Tabla 13. *Conocimiento del profesor de primaria sobre resolución de problemas en directrices curriculares*

		Documentos Curriculares					
		Tercio superior		Tercio medio		Tercio inferior	
Categorías	Subcategorías	Singapur	Finlandia	España	EEUU	Chile	Argentina
C1	C1a	0	0	0	2	1	0
	C1b	37	1	22	23	34	17
C2	C2a	4	4	16	21	12	4
	C2b	0	0	1	27	3	0
	C2c	0	0	0	2	0	0
	C2d	1	1	0	5	2	1
C3	C3a	0	0	0	2	5	2
	C3b	0	0	0	1	0	0
	C3c	1	2	2	6	2	2
C4	C4a	1	0	0	21	4	0

Tabla 13. *Conocimiento del profesor de primaria sobre resolución de problemas en directrices curriculares*

		Documentos Curriculares					
		Tercio superior		Tercio medio		Tercio inferior	
Categorías	Subcategorías	Singapur	Finlandia	España	EEUU	Chile	Argentina
	C4b	0	0	0	4	0	0
	C4c	0	1	0	5	0	0
C5	C5a	3	4	1	23	5	0
	C5b	3	0	0	6	0	0
	C5c	0	0	0	6	1	0
	C5d	4	0	4	27	2	0
C6	C6a	1	1	2	7	3	1
	C6b	0	0	0	5	0	0

Discusión

La presencia de aspectos de la resolución de problemas en las normativas curriculares aporta información respecto de conocimientos específicos que debería tener el profesor para enseñar la resolución de problemas. Nuestro análisis, además de profundizar en aspectos ya tratados en los trabajos de Stacey (2005) y Schmidt et al. (1997), destaca el énfasis dado a la clasificación de problemas y a los procesos de resolución. Una de las posibles razones de este énfasis en la utilización del conocimiento en contexto tiene relación con el enfoque funcional presente en los actuales lineamientos curriculares (Rico, 2007). Además, este hecho nos lleva a pensar que existe una promoción del enfoque de enseñanza de la matemática *para* la resolución de problemas, pese que en la mayoría de ellos se promulga una enseñanza *a través* de la resolución de problemas. Este enfoque podría provocar dificultades en la enseñanza de la matemática escolar pues algunos investigadores señalan que es el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas el que caracteriza una enseñanza efectiva de esta (Cai, 2010; Lester y Cai, 2016; Son y Lee, 2016; Stein et al., 2003). Si bien las directrices curriculares analizadas señalan que la resolución de problemas es un medio y un fin; al igual que las de otros países anglosajones (Stacey, 2005), este énfasis que hemos notado podría provocar que los profesores centren sus esfuerzos en procedimentalizar un proceso que por propia naturaleza no lo es.

Sobre la organización de este conocimiento, el modelo propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015) es significativo y permite una sistematización de los hallazgos. Sin embargo, nuestros resultados, por una parte especifican algunas categorías como el conocimiento sobre los buenos resolutores y, por otro, sugieren algunos aspectos que deberían reacomodarse. Se podría pensar en una posible inclusión de los factores afectivos dentro del conocimiento didáctico del contenido. En el modelo, los factores afectivos son considerados como una dimensión que se relaciona con el conocimiento del profesor en general, pero no forma parte del conocimiento del contenido ni del didáctico del contenido. No obstante, las directrices hacen alusión explícita al papel que juegan y las implicaciones que tienen en el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, sin desconocer que esta dimensión será la que moldee el resto, consideramos que al definir el conocimiento del profesor como un entendimiento de los tópicos necesarios para la enseñanza y siguiendo lo establecido por Schoenfeld (1992), respecto a la incidencia del dominio afectivo en la resolución de problemas, este formaría parte del conocimiento didáctico. Esto debido a que es una dimensión que influye en el proceso de enseñar a resolver problemas. Por tanto, es necesario que los profesores sean capaces de reconocer los diferentes factores afectivos y su incidencia, tanto en ellos mismos, como en sus estudiantes. Lo que implica poseer un meta-conocimiento, es decir, conocer aspectos teóricos de los factores afectivos.

La perspectiva tomada en este trabajo nos obliga tener en cuenta un segundo aspecto que consideramos debe incluir este modelo. Los problemas aritméticos de enunciado verbal han generado interés en los investigadores en didáctica de la matemática y juegan un papel preponderante en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética en los primeros niveles educativos (NCTM, 2000). Nuestros resultados resaltan este aspecto al mostrar que el conocimiento de sus clasificaciones son demandadas al profesor. Las directrices solicitan conocimiento de clasificaciones según cantidad de operaciones o pasos para su resolución. Estos objetivos implican que el profesor conozca su estructura semántica y cómo las combinaciones posibles inciden en la dificultad del problema. También hace necesario un conocimiento de las posibles estrategias de resolución que utilizarán los estudiantes. Todo ello nos parece razón suficiente para que pueda ser considerado, explícitamente, en el dominio del conocimiento didáctico del contenido.

Otro aspecto que es pertinente discutir es la invención de problemas. Chapman (2012, 2014, 2015) sitúa este conocimiento como un conocimiento del contenido. Sin embargo, la invención de problemas podría formar parte del conocimiento didáctico por las potencialidades que ofrece para conocer el pensamiento de los estudiantes, su uso metodológico o evaluativo (Castro, 2011; Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman, 2005; Silver, 1994; Stoyanova, 1998). Además, como puede observarse en los resultados que hemos obtenido, los conocimientos sobre invención que se plantean en el modelo de Chapman (2012, 2014, 2015) hacen alusión a la importancia y potencialidad de esta actividad para el desarrollo de la competencia para resolver problemas de los estudiantes. Junto a ello, los documentos curriculares solicitan conocimientos más específicos como los contextos de utilización o estrategias específicas.

Considerando la pregunta, ¿es diferente el conocimiento del profesor sobre resolución de problemas al conocimiento sobre un concepto matemático escolar?, creemos necesaria una respuesta positiva por al menos dos razones: (1) primero, el análisis de las pautas curriculares oficiales muestra un gran cúmulo de conocimientos referidos a la resolución de problemas, que desde una perspectiva del contenido tienen el peligro de ser omitidos en los programas de formación (Puig, 2008), y (2) este conocimiento particular y específico del proceso de resolver un problema se organiza de manera distinta que el conocimiento de un contenido matemático escolar pues su naturaleza es diferente (Chapman, 2015).

En este contexto, es adecuado discutir qué aspectos comprendería y cuál sería la organización del conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas. Para pensar correctamente sobre el conocimiento del contenido, Shulman (1986) señala que es necesaria una comprensión de los conceptos o hechos de un dominio particular, añadiendo que debe hacerse de la manera definida por eruditos. Por tanto, pensar en la resolución de problemas no es lo mismo que situarse desde un contenido matemático. Esto debido a que como se ha señalado, los procesos tienen una naturaleza distinta (García y Llinares, 2001). Por tanto, recurrimos a la conceptualización de resolución de problemas como proceso y como competencia. Por otra parte, el conocimiento didáctico del contenido es la comprensión pedagógica del contenido (Shulman, 1986) y para su discusión utilizamos el triángulo didáctico por su potencialidad para desentrañar aspectos del acto de enseñar (Schoenfeld, 2012). Al mismo tiempo, utilizamos nuestros hallazgos sobre elementos de conocimiento presente en las directrices curriculares para enmarcar la discusión.

Propuesta de un sistema de categorías para estudiar el conocimiento del profesor sobre resolución de problemas

A partir de los resultados obtenidos, relativos al conocimiento que sobre resolución de problemas se exigen en los documentos curriculares, presentamos una ampliación del marco propuesto por Chapman (2015). En primer lugar describimos el conocimiento de la resolución de problemas y luego el conocimiento didáctico de la resolución de problemas.

Conocimiento de la resolución de problemas

El conocimiento del contenido se suele definir como un entramado interconectado de ideas matemáticas, sus representaciones y formas de proceder (Ponte y Chapman, 2016) y en el que se ha distinguido un conocimiento común, uno especializado y uno del horizonte del contenido (Ball et al., 2008). Otros autores han discriminado un conocimiento de los temas matemáticos, de la estructura matemática y de la práctica matemática (Carrillo et al., 2013, 2018). No obstante, en todos ellos es posible observar una categorización en términos de un contenido. Creemos que para ser fieles a la naturaleza de la resolución de problemas debemos recurrir a su conceptualización como una competencia clave para las sociedades actuales. Partiendo de algunas teorizaciones sobre resolución de problemas (Mayer y Wittrock, 2006; Schoenfeld, 1992), competencia matemática (Abrantes, 2001; Kilpatrick et al., 2001; Niss, 2003; Rico, 2007) y sobre competencia para resolver problemas (Chapman, 2015; OECD, 2013), entendemos por este constructo la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como un reto, procede a su abordaje a través de una serie de fases no necesariamente lineales empleando una estrategia, y se involucra, con una disposición positiva, en el desafío de resolverla. Por consiguiente, en el conocimiento matemático del profesor sobre resolución de problemas distinguimos tres aspectos o componentes: caracterización de problema, la resolución de un problema y la disposición. Todos ellos presentes en el análisis de los documentos curriculares que hemos presentado anteriormente.

Bajo esta descripción, el conocimiento sobre resolución de problemas de matemáticas lo configuramos en torno a la propia competencia del profesor y a los componentes teóricos (caracterización de problema, proceso de resolución y disposición). Para reflexionar sobre los conocimientos que implicarían los componentes teóricos pensemos en un problema aritmético de enunciado verbal cualquiera. Utilizar este tipo de problema en una situación de enseñanza, requiere conocimientos matemáticos que tienen relación con el procedimiento del algoritmo, como la ubicación de las cifras según valor posicional o saber que sí importa o no el orden en que se realice. Sin embargo, existen otros que son inherentes a los problemas y su proceso de resolución como las estrategias que acepta el problema, el proceso que se seguiría al resolverlo, las variables de tarea que interfieren con la dificultad, etc. Además, seleccionar este problema para un grupo de estudiantes implica un conocimiento relativo al problema y su clasificación y al tipo de estructura aditiva o multiplicativa implícita en él. También subyace el conocimiento de los estudiantes y en qué medida será un problema para cada uno de ellos. Según Agre (1982) el desconocimiento de un procedimiento para llegar a la solución, es lo que generalmente involucra a los estudiantes en el proceso. Como puede verse, este conocimiento es un complejo sistema en el que se imbrican las dimensiones matemáticas y didácticas de la resolución de problemas, aquí discutiremos las referidas a los componentes del conocimiento sobre la resolución de problemas, es decir, la caracterización de problema, el proceso de resolución y la disposición.

Caracterización de problema

Los maestros deben saber qué implican las decisiones de los alumnos cuando están resolviendo problemas y hasta qué punto es un problema para ellos o la mera aplicación de un procedimiento conocido. Por lo tanto, la afirmación que generalmente se presenta en la dimensión del conocimiento del contenido en el sentido de que ni los estudiantes ni la enseñanza están involucradas en el conocimiento del contenido, no es aplicable en una perspectiva de la resolución de problemas. En este sentido, en este primer componente identificamos tres conocimientos sobre lo que constituye un problema: basados en el procedimiento, en el resolutor y en el tipo de tarea/características.

Problemas basados en el resolutor. Los maestros deben tener en cuenta al estudiante antes de etiquetar una tarea como un problema. Como señaló Agree (1982), la identificación es esencial para determinar si existe un problema. Sin embargo, los problemas matemáticos escolares no se abordan necesariamente de esa manera. Los maestros que conocen a sus alumnos pueden asignarles tareas que, si bien no se consideran problemas per se, pueden convertirse en problemas en el contexto del aprendizaje en el aula y el desarrollo de su pensamiento matemático. Si bien es en función del resolutor el que se etiqueten los problemas como tales (Mason, 2016), los problemas matemáticos escolares se pueden leer en dos niveles, los de los alumnos y los maestros.

Problemas basados en el procedimiento. Los maestros son los primeros en darse cuenta cuando una situación constituye un problema para algunos de sus estudiantes. En la segunda etapa, la tarea problemática se asigna a los estudiantes, quienes deben formularla para resolverla. Los estudiantes realizan formulaciones y reformulaciones sucesivas para alcanzar ese objetivo (Kilpatrick, 2016b), movilizando una serie de procesos cognitivos (conocimiento y metacognición) y no cognitivos (afectos y creencias) que no están predeterminados por un conocimiento previo del proceso en cuestión (Mayer y Wittrock, 2006). Además, las situaciones planteadas deben implicar un grado de dificultad capaz de involucrar a los estudiantes, para provocar la reacción deseada (Agre, 1982). Dicho compromiso generalmente se debe a la ausencia de un procedimiento conocido para resolver el problema. Por lo tanto, se entiende que un problema significa tareas que los resolutores se sienten comprometidos a resolver pero para las cuales no tienen un procedimiento predeterminado ni directo. Por lo tanto, identificar una tarea como problema podría realizarse basándose en el procedimiento y en su potencial resolutor.

Problemas basados en tipos/características. La identificación de una tarea como un problema basado en los procedimientos y en el resolutor puede tomar en cuenta los elementos estructurales involucrados, es decir, la formulación, el contexto, el conjunto de soluciones aceptables o los métodos para abordarlos (Borasi, 1986). Tal acción en sí misma caracteriza / diferencia las tareas consideradas como problemas de aquellas que no lo son. Por lo tanto, una tarea sería un problema basado en los tipos / estructura de la tarea. Si bien no se ha alcanzado un consenso completo sobre ninguna de las varias clasificaciones existentes, los investigadores coinciden en la aceptabilidad de ciertas dicotomías, como: ejercicios / problemas, rutina / no rutina, y abierto / cerrado. La clasificación de Holmes (1985) (rutina / no rutina; aplicada / no aplicada), identificada más recientemente como tipos de problemas por Zhu y Fan (2006), es la que adoptamos en este trabajo. Esta clasificación establece cuatro categorías (rutinarias, no rutinarias, aplicadas y no aplicadas). Estas dan lugar a seis tipos de problemas, debido a que los problemas no rutinarios pueden ser abiertos o cerrados. Aquí es necesaria una aclaración; cuando nos referimos a problemas aplicados, nos referimos a "aquellos con un *mundo real* o contexto social, real o imaginario" (Chapman, 2006, p. 211), es decir, los problemas aplicados como problemas contextuales.

Proceso de resolución

El proceso resolución de problemas se considera generalmente como un proceso personal y direccionado que se realiza en etapas no necesariamente lineales. Comprender ese proceso y darse cuenta de que puede variar de un estudiante a otro, forma parte del conocimiento de los profesores para enseñar resolución de problemas. Este puede considerarse como un conocimiento metacognitivo del proceso, ya que incluye métodos o fases heurísticas y estrategias específicas que se pueden utilizar para resolver un problema. Los procesos de resolución también están influenciados por factores no cognitivos que informan las acciones de los resolutores. Desde este punto de vista, el conocimiento sobre cómo resolver problemas puede dividirse en cuatro áreas (Schoenfeld, 1985, 2013): etapas o fases de resolución y su caracterización, estrategias, metacognición y factores afectivos.

Fases de resolución y su caracterización. En las etapas de resolución, se adapta naturalmente a los postulados de Pólya (1981) sobre cómo proceden los resolutores: comprensión, planificación, acción y evaluación. El conocimiento de esas etapas ayuda a los maestros a adaptar la mediación necesaria a las circunstancias. Un factor común es su configuración como procesos cognitivos personales, no observables directamente, sino solo a través de lo que el resolutor dice o hace en cada etapa (Mayer y Wittrock, 2006). El proceso no es lineal, ya que, como explicaron Wilson, Fernández y Hadaway (1993), es flexible y permite movimientos tanto hacia adelante como hacia atrás. Los maestros conscientes de estos elementos pueden apoyar a sus alumnos y mediar en su desarrollo de la competencia para resolver problemas.

Estrategias. En relación con la segunda, las estrategias, Schoenfeld (1985) distinguió dos tipos de toma de decisiones. Las decisiones estratégicas incluyen la definición de objetivos y la decisión de adoptar un curso de acción. Las decisiones tácticas están orientadas a implementar decisiones estratégicas. Si bien estos dos tipos de decisiones constituyen lo que se entiende como estrategia, individualmente no son de utilidad para una serie de razones, entre las que se encuentra el papel de la metacognición (Schoenfeld, 1985). Las estrategias deben enseñarse con cuidado, para que el esfuerzo cubra todos los componentes superpuestos abordados en esta sección. Más específicamente, la toma de decisiones sobre qué hacer y cómo hacerlo depende de una comprensión y representación mental del problema. También se ve afectada por la metacognición, ya que el éxito de la estrategia está en parte determinado por su uso consciente. Retroceder refuerza aún más este proceso y ayuda a determinar la idoneidad de la decisión inicial. Todo el proceso está mediado por las emociones que pueden surgir, las actitudes incitadas y las creencias mantenidas durante el proceso de resolución.

Metacognición. La tercera es la metacognición. Schoenfeld (1985) amplió las perspectivas de investigación al mostrar la importancia de la metacognición y su efecto. La metacognición se describe como la manera en que los resolutores se autorregulan, monitorean y controlan; sus heurísticas y conocimientos matemáticos para resolver un problema, lo que les permite aplicar las decisiones adecuadas a la tarea en cuestión.

Factores no cognitivos. La cuarta y última se corresponde con los factores no cognitivos y cómo estos juegan un papel esencial, pues determinarán la forma en que el resolutor afronte los problemas. Schoenfeld (2013) ilustra claramente esto al señalar que “los estudiantes cuya experiencia matemática total consistió en ejercicios prácticos que podrían resolverse en unos pocos minutos llegaron a creer que "todos los problemas se pueden resolver en cinco minutos o menos", y dejaron de trabajar en problemas que podrían haber podido resolver sí hubiesen perseverado” (p. 12). Así, existe acuerdo en la literatura al establecer que según la adecuación del desafío propuesto a los estudiantes, estos pondrán en movimiento sus emociones, que luego movilizarán su intelecto (Mason, 2016).

Disposición

La disposición es vital, según Kilpatrick (1980) saber cómo resolver problemas es importante, pero querer hacerlo es esencial. La importancia de los factores no cognitivos en la resolución de problemas ha sido ampliamente estudiada (e.g. McLeod y McLeod, 2002; Schoenfeld, 1992) y generalmente se acepta que si se plantea un desafío adecuado, los estudiantes se involucran emocionalmente (factores afectivos) y movilizan su intelecto (Mason, 2016). Dicha participación es imperativa en el desarrollo de la competencia para resolver problemas, ya que impulsa todo el proceso. En esta perspectiva, nos centramos en la disposición como aceptación del desafío realizado por el resolutor.

Así, los componentes para la enseñanza de la resolución de problemas pueden ser descritos bajo las características que presentamos en la tabla 10.

Tabla 14. *Componentes del conocimiento de la resolución de problemas*

Componente	Conocimientos
Caracterización de problema	Basado en el procedimiento Basado en el resolutor Basado en los tipos/características
Proceso de resolución	Fases de resolución y su caracterización Estrategias

Tabla 14. *Componentes del conocimiento de la resolución de problemas*

Componente	Conocimientos
	Metacognición
	Factores no cognitivos
Disposición	Aceptación del desafío de resolver el problema

Conocimiento didáctico de la resolución de problemas

En el contexto escolar, el triángulo didáctico ha permitido reflexionar sobre la educación y específicamente el proceso de enseñar en cuantiosas ocasiones (Schoenfeld, 2012). Nipper y Sztajn (2008) señalan que este modelo permite entender la enseñanza como las interacciones contextualizadas entre el profesor, los estudiantes y las matemáticas. Esta perspectiva permite una visión global, focalizando en las interacciones entre los elementos del triángulo didáctico y en los contextos donde se producen. Esta idea ya fue planteada por Kilpatrick (1978) cuando señala que en la resolución de problemas se distingue un resolutor que resuelve un problema bajo ciertas condiciones. En este sentido, el triángulo hace posible comprender el proceso de enseñanza de la resolución de problemas de una manera holística, manteniendo una fidelidad a la naturaleza del proceso. Las interacciones que se producen entre cada vértice del triángulo, permiten desentrañar elementos de conocimiento didáctico del profesor que han sido omitidos por la literatura al caracterizar dicha noción. La figura 37 muestra la triada didáctica, sus relaciones, y nuestra interpretación de los elementos de conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas que se desprenden.

Las interacciones dobles (profesor/estudiante, estudiante/resolución de problemas y profesor/resolución de problemas) han atraído la atención de la mayoría de la investigación en este campo, especialmente la de estudiante y resolución de problemas (Lester, 2013). No obstante, la interacción triple ha sido señalada como central, si el propósito es mejorar el desempeño de los estudiantes al resolver problemas (Cai, 2010; Lester y Cai, 2016; Liljedahl, 2016).

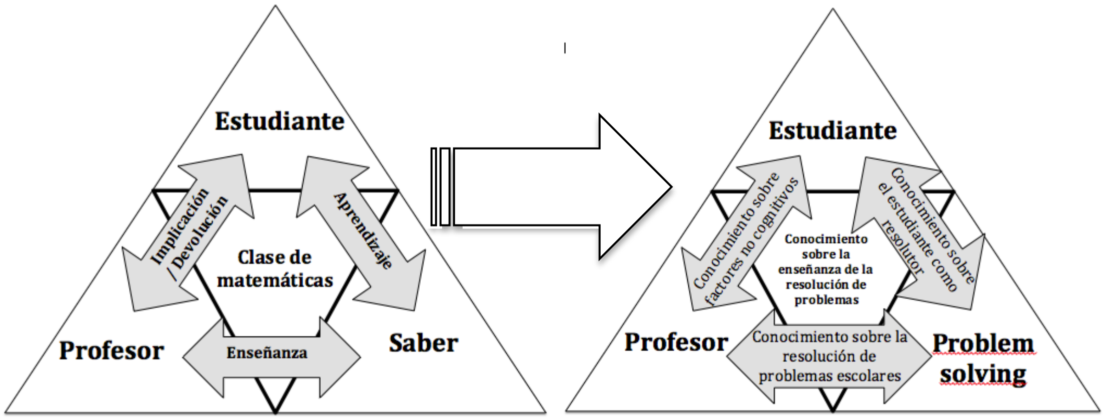


Figura 37. Triángulo didáctico y conocimiento didáctico de la competencia para resolver problemas

La discusión que realizamos en este apartado tiene como eje articulador el triángulo didáctico, específicamente sus interacciones. Desde nuestra perspectiva estas relaciones permiten identificar y organizar elementos del conocimiento didáctico del profesor sobre la resolución de problemas presentes en las directrices curriculares.

Conocimiento del estudiante como resolutor de problemas

Las características de los resolutores exitosos y los posibles errores y dificultades permiten una delimitación y organización sobre lo que el maestro espera que sus estudiantes aprendan.

Características de resolutores exitosos. Una perspectiva que permite abordar las expectativas son las características de los resolutores experimentados en el sentido que permiten una panorámica a lo que se debería lograr con los estudiantes (e.g. Kaur, 1997; Schoenfeld, 1985). Junto con esto, las posibles formas de proceder asociadas con las fases y estrategias que se espera que desarrollen los estudiantes (e.g. Garofalo y Lester, 1985; Posamentier y Krulik, 1998).

Dificultades y errores. Las limitaciones se refieren a las posibles dificultades que los estudiantes pueden presentar y en los errores que pueden causar en los estudiantes. Estas últimas serán las evidencias visibles de la dificultad presentada por los alumnos. Chapman (2015) señala que los errores permitirían una vía de entrada a la comprensión conceptual de los estudiantes. Las dificultades ampliamente estudiadas se refieren principalmente a problemas aritmético verbales (e.g. Verschaffel, Greer y De Corte, 2007), que en el contexto de la educación primaria cobran gran relevancia (NCTM, 2000).

Conocimiento sobre la resolución de problemas como tarea escolar

Este conocimiento implica la selección de problemas, posibles modelos de resolución y planteamiento de problemas.

Selección de problemas. El uso y selección de problemas es un papel clave para el maestro (Cai, 2010; Kilpatrick, 1987; Van de Walle, 2003). Lester y Cai (2016) señalan que la selección de un buen problema es fundamental, ya que entre otras cuestiones, se ha demostrado que los profesores tienden a evitar el uso de tareas que supongan un reto y que desafíen a los estudiantes.

Modelos de resolución y estrategias. Los modelos de resolución como las fases Pólya (1981) o los propuestos por Schoenfeld (1985) tienen implicaciones para la enseñanza. Asimismo, las estrategias de enseñanza presentan particularidades cuando la perspectiva es su enseñanza (Fülöp, 2015; Posamentier y Krulik, 2009; Stacey y Groves, 1999).

Invención de problemas. En lo que respecta a plantear problemas, es necesario diferenciar entre escenarios o dónde y cuándo plantearlos (Silver, 1994) y los métodos o cómo utilizarlo en el aula (Brown y Walter, 2005). Estos elementos permitirían a los maestros repensar las tareas cuando los estudiantes se atascan o proporcionar extensiones o nuevas situaciones a los estudiantes más favorecidos.

Conocimiento de los factores no cognitivos que afectan a la resolución de problemas.

La posición de poder en la que se encuentra el profesor y que caracteriza su relación con los estudiantes enfatiza la importancia y la responsabilidad de generar un entorno adecuado que fomente el desarrollo de la competencia para resolver problemas en sus estudiantes. Aunque el alcance de los factores no cognitivos es amplio, en este trabajo, y de acuerdo a nuestros resultados del análisis de documentos curriculares, nos centramos en un metaconocimiento sobre las concepciones y creencias y las implicaciones mutuas que estos tienen en el aprendizaje y la enseñanza de la resolución de problemas. Específicamente, nos referimos a las expectativas relacionadas con aspectos no cognitivos como las disposiciones o creencias (e.g., Schoenfeld, 1992) que están asociadas con el desempeño exitoso. Fomentar situaciones que favorezcan creencias relacionadas con el tiempo necesario para resolver un problema, las opciones de resolución múltiple o la posibilidad de varias respuestas. Del mismo modo, hacer presentes las emociones de ansiedad y frustración, como elementos naturales del proceso de resolución de un problema, deben ser elementos del conocimiento del profesor.

Conocimiento sobre la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas

Los planteamientos de Schroeder y Lester (1989) sobre la enseñanza de la resolución de problemas identifican unos enfoques en los que esta se abordaría. Estos enfoques han sido reconocidos en acciones docentes (Chapman, 2017). Desde nuestra perspectiva, adoptar estos enfoques o vías de acceso en la enseñanza puede generar cuatro tipos de práctica u orquestación: discurso, bloqueo, evaluación y recursos. Estas cuatro prácticas, sumadas al conocimiento de los enfoques constituyen los cinco elementos del conocimiento profesional que se abordan aquí.

Enfoques de enseñanza. Los enfoques de enseñanza de la resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989) se corresponden con modelos que fomentan y propician actuaciones en el aula que promueven el desarrollo de la resolución de problemas. Cada enfoque (para, sobre, y a través) da lugar a ciertas acciones. En este sentido, Chapman (2017) ha identificado cuatro enfoques que los maestros utilizan para enseñar la resolución de problemas (basado en la traducción, basado en la estrategia, basado en la heurística y basado en la exploración). En ellos es posible observar diferentes acciones llevadas a cabo por los profesores en su enseñanza y que se corresponden con los enfoques planteados por Schroeder y Lester (1989).

Discurso. El discurso, es entendido como todas las acciones (verbales o de otro tipo) que convergen en lecciones impartidas de una manera que se aliente a los estudiantes a participar, cooperar y participar genuinamente en procesos de resolución. Lester y Cai (2016) lo describieron como la manera en que “los profesores organizan la resolución de problemas activa y pedagógicamente en el aula” (p. 124). Incluye acciones como promover el uso de representaciones múltiples o explicar que los problemas pueden tener más de una solución. Lester

(2013) rememora un esquema que presentan las clases que resultan exitosas para formar buenos resolutores y que se corresponde con un discurso apropiado para las clases de resolución de problemas. No obstante, el foco debe estar en desarrollar una comprensión de las matemáticas a través de la resolución de problemas, foco que implica acciones específicas (e.g. Barmby, Bolden y Thompson, 2014; Charles y Lester, 1982; Edwards-Leis y Robinson, 2018; Hiebert y Wearne, 2003).

Bloqueo. Lidiar con los obstáculos que dificultan procesos de resolución exitosos requiere una comprensión de estrategias de enseñanza específicas con las que mediar un posible bloqueo de los estudiantes. Tales herramientas para enfrentar las posibles dificultades de los estudiantes forman parte del conocimiento de los profesores (Chapman, 2015). Esta gestión se relaciona con la redirección de un atasco a través de sugerencias de estrategias alternativas.

Evaluación. La evaluación de la resolución de problemas es otro factor a considerar. Chapman (2015) indica que es importante conocer métodos evaluativos que sean coherentes con una genuina resolución de problemas. En un enfoque evaluativo auténtico para la resolución de problemas, los planteamientos de Charles et al. (1987) entre los que se encuentran criterios que abordan todos los aspectos y momentos del proceso, son aspectos fundamentales. Este conocimiento permitiría a los docentes establecer metas que promuevan aprendizajes y que estas se traduzcan en unos instrumentos adecuados y variados.

Recursos. La cuarta gestión se relaciona con los recursos manipulables e intangibles utilizados en la enseñanza de la resolución de problemas. El profesor debe tener un conocimiento tanto de la utilización y desarrollo materiales manipulativos en la resolución de problemas (Cañadas et al., 2002; Kelly, 2006; Kuzle, 2017), como de las representaciones (Barmby et al., 2014; Smith, 2003). Especial atención tienen estas últimas, pues cada estudiante necesitará de una variedad de ellas en cada una de las fases de resolución.

Estas cuatro prácticas de orquestación o gestiones y los enfoques de enseñanza constituyen cinco elementos de conocimiento didáctico sobre la enseñanza de la resolución de problemas considerados en este estudio. Resumimos estos componentes y conocimientos en la tabla 11.

Tabla 15. *Componentes de conocimiento didáctico de la resolución de problemas*

Componente	Conocimientos
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos Dificultades y errores
Resolución de problemas como tarea escolar	Selección de problemas Modelos de resolución y estrategias Invención de problemas
Factores no cognitivos	Influencia mutua de creencias y concepciones
Gestión de la enseñanza de la resolución de problemas	Enfoques o vías de acceso Gestión del discurso Gestión de los atascos Gestión de la evaluación Gestión de los recursos

Esta discusión reafirma las ideas de Chapman (2012, 2014, 2015) sobre la existencia de particularidades al describir el conocimiento del profesor desde la perspectiva de un proceso en vez de un tema o concepto matemático. En este sentido las dimensiones de los modelos que hasta el momento describen el conocimiento del profesor, se construyen desde el significado de un concepto matemático, considerando su estructura, sus representaciones y fenomenología. Desde esta perspectiva, suele asignarse a la resolución de problemas un lugar donde puedan ser aplicadas o construidas, pero no consideran a la resolución de problema como una entidad que deba enseñarse. En este contexto los componentes que presentamos permiten identificar elementos propios de la resolución de problemas, tanto del significado de problema, su proceso de resolución e invención, como de sus aspectos didácticos. Estos elementos permitirían hacer explícitas las concepciones sobre problemas que manifiesten los profesores y que se han mostrado contrarias en la promoción de una genuina resolución de problemas (e.g. Xenofontos y Andrews, 2012). Por otro lado, los componentes expuestos se muestran idóneos para identificar conocimiento sobre resolución de problemas que surgen en el acto educativo y la relación entre sus actores. Es decir, el conocimiento del estudiante como resolutor, de las tareas entendidas como tareas escolares y de estrategias de enseñanza de la resolución de problemas. Todos estos elementos se encuentran presentes en los documentos curriculares analizados en mayor o menor medida, por tanto se corresponde con las demandas de conocimiento de los sistemas educativos.

Los componentes del conocimiento de la resolución de problemas y pedagógico de la resolución de problemas que presentamos aquí son un avance que permite profundizar en aspectos relacionados con la enseñanza de la resolución de problemas y que utilizamos en las fases siguientes de nuestro estudio.

CAPÍTULO 5

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo mostramos los resultados relativos a la caracterización de problema, su proceso de resolución y la disposición. Para ello, hemos construido y aplicado un cuestionario escrito a estudiantes del Grado de Magisterio que se encontraban al inicio y al final de su formación. Hemos organizado los hallazgos en dos grandes apartados: uno referido al análisis de los agrupamientos de las respuestas y otro descriptivo sobre las respuestas de los estudiantes. Finalizamos el capítulo con una discusión de los hallazgos.

En este capítulo presentamos los resultados del cuestionario para caracterizar el conocimiento sobre resolución de problemas que manifiestan futuros profesores de educación primaria. Para ello, hemos realizado dos análisis a las respuestas dadas por los futuros profesores a los cuestionarios aplicados para la recogida de datos. Primero, y siguiendo las recomendaciones de Bisquerra (1989), se han realizado agrupamientos de las respuestas mediante un análisis multivariante a través de un escalamiento multidimensional ALSCAL (SPSS). En él, para cada cuestionario hemos interpretado las dimensiones que emergen de las respuestas. Posteriormente, los hallazgos se presentan en términos de las perspectivas de conocimiento mantenidas por los futuros profesores para cada uno de los temas propuestos en los cuestionarios, las mismas que surgen del análisis de los documentos curriculares previo. Además, consideramos la formación recibida y las dimensiones encontradas en el análisis multivariante.

Agrupamientos de las respuestas

El análisis del agrupamiento permite valorar el significado de las respuestas y explorarlas desde la perspectiva del grupo, ya que este análisis muestra las respuestas posicionadas en determinadas dimensiones. El análisis multivariante ha permitido identificar el conocimiento que es común en cada uno de los grupos, así como el conocimiento en el que hay desacuerdo o que presenta contradicciones. Para establecer estas dimensiones, hemos utilizado como criterios el *stress*, así como la facilidad de interpretación de los datos (Bisquerra, 1989). La tabla 12 muestra las dimensionalidad y el *stress* para cada cuestionario y cada grupo (los valores específicos de cada ítem pueden verse en el Anexo 2).

Tabla 16. *Dimensionalidad y stress de cada cuestionario y grupo*

	Cuestionario problema		Cuestionario resolución	
	Dimensiones	Stress	Dimensiones	Stress
GI	3	0,11	2	0,06
G4º	3	0,08	2	0,03
G4ºA	3	0,09	2	0,03

Nota: GI = grupo 1º año; G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo de 4º año con formación adicional

Las respuestas al primer cuestionario se agruparon en tres dimensiones en todos los grupos (ver la tabla 12). El *stress* del grupo de 1º año es mayor que el recomendado de 0,10, probablemente debido al nivel de entrenamiento del que forma parte este grupo. Sin embargo, hemos decidido mantener las tres dimensiones, pues como señala Bisquerra (1989), la presentación y la comprensión de los datos deben prevalecer. En la medida que surgen tres dimensiones en los dos grupos de cuarto año con un ajuste apropiado, mantenemos esta tridimensionalidad con el fin de hacer comparaciones.

Las respuestas que determinan la primera dimensión, lo hemos interpretado como *acuerdo*, ya que corresponden a ítems con un alto porcentaje en su respuesta positiva o negativa (ver tablas 13 y 15). Los porcentajes fluctúan entre el 70% y el 100%, excepto por una respuesta en el grupo de 1º año. Esta última respuesta presenta la particularidad de tener una presencia similar en dos dimensiones. Este hecho hace que su porcentaje se vea anómalo en comparación con las demás respuestas de su dimensión. Catorce respuestas determinan la primera dimensión en el grupo de 1º año, diecisiete ítems en el grupo de 4º año y catorce ítems en grupo de 4º año con formación adicional.

La segunda dimensión está determinada por las respuestas dadas a cuatro preguntas en el grupo de 1º año, cinco en el grupo de 4º año y ocho en el grupo de 4º año con formación adicional. Todas ellas presentan una polarización en el número de respuestas afirmativas y negativas (ver tablas 13 y 15). Sus porcentajes varían en aproximadamente el 60% y el 40% para cada opción, razón por la cual la hemos etiquetado como *duda*.

La tercera dimensión está constituida por respuestas a seis ítems en el grupo de 1º año, y dos para ambos grupos finales. En las respuestas a estos ítems, los porcentajes de acuerdo fluctúan o no para cada opción, pero cuando se analizan junto con otras respuestas del cuestionario, presentan contradicciones. Para ejemplificar esta interpretación, usemos como ejemplo las respuestas del grupo de 4º año al ítem seis. En este se pregunta sobre la importancia de la consideración del resolutor para etiquetar un problema. En esta pregunta, 66 (60,6%) de los futuros profesores responden afirmativamente, mientras que los restantes responden de forma negativa. Los 66 sujetos que responden positivamente en esta afirmación (ítem seis), en otra pregunta (ítem ocho), que trata sobre si los cálculos propuestos por los textos escolares al final de las lecciones de operaciones aritméticas son problemas, casi el 60% de los 66 respondió positivamente, es decir, no han considerado al resolutor.

Un resumen de los resultados respecto a las dimensiones obtenidas pueden verse en la tabla 13.

Tabla 17. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

	Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda	Dimensión 3 Contradicción
Grupo 1º año			
Procedimiento	2, 3, 4	1	
Resolutor	5, 9	7	6, 8
Tipos y características	10a, 10b, 10c, 10d, 10e, 12, 15, 18, 19	11, 16	10f, 13, 14, 17
Grupo 4º año			
Procedimiento	1, 2, 3	4	
Resolutor	5, 8, 9	6, 7	
Tipos y características	10a, 10b, 10c, 10d, 10f, 11, 14, 15, 16, 18, 19	10e, 17	12, 13
Grupo 4º año con formación adicional			
Procedimiento	2, 3, 4	1	
Resolutor	5	8, 9	6, 7
Tipos y características	10a, 10b, 10c, 10d, 12, 13, 14, 15, 17, 19	10e, 10f, 11, 16, 18	

Nota: Dimensión 1: ítems con 70% a 100% de respuestas para sí o no; Dimensión 2: ítems con respuestas polarizadas para cada opción; Dimensión 3: ítems que presentan aprobación y polarización

De las respuestas al segundo cuestionario, emergen dos dimensiones con un *stress* del 0.6 para el grupo de 1º año y 0,3 para ambos grupos finales, como puede verse en la tabla 12. La primera, que agrupa el mayor número de respuestas, se interpretó como un acuerdo, debido a las mismas razones que se discutieron para el primer cuestionario. Concretamente, nos referimos que ítems cuyas respuestas presentan porcentajes sobre el 70%, ya sea para la SÍ o NO (ver tabla 14 y 16). El grupo de 1º año presenta 32 de sus respuestas en esta dimensión, mientras que el grupo de 4º año posiciona 35, y el grupo de 4º año con formación adicional, 34. La segunda dimensión, que se corresponde con las respuestas que se distribuyeron entre ambas opciones y que hemos interpretado como duda. Esto se traduce en que las respuestas a estos ítems presentan porcentajes de alrededor del 50% (ver tabla 14 y 16). Solo cinco elementos se registraron en esta dimensión en el grupo de 1º año, dos en el grupo de 4º año y tres en el grupo de 4º año con formación adicional. La tabla 14 presente un resumen de estos resultados.

Tabla 18. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

	Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda
Grupo 1º año		
Fases y sus características	1a, 1b, 1c, 1d, 2, 3, 4, 5a, 5b, 5c, 5d, 5e, 5g, 5h, 6, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 20	5f, 16, 19
Metacognición	11a, 11d, 12, 13, 14, 15	11b, 11c
Factores no afectivos	21, 22, 23, 24, 25	
Grupo 4º año		
Fases y sus características	1a, 1b, 1c, 1d, 2, 3, 4, 5a, 5b, 5c, 5d, 5e, 5g, 5h, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20	5f
Metacognición	11a, 11b, 11c, 11d, 12, 13, 14, 15	
Factores no afectivos	21, 23, 24, 25	22
Grupo 4º año con formación adicional		
Fases y sus características	1a, 1b, 1c, 1d, 2, 3, 4, 5a, 5b, 5c, 5d, 5e, 5g, 5h, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19, 20	5f
Metacognición	11a, 11d, 12, 13, 14, 15	11b, 11c
Factores no afectivos	21, 22, 23, 24, 25	

Nota: Dimensión 1: ítems con 70% a 100% de respuestas para sí o no; Dimensión 2: ítems con respuestas polarizadas para cada opción

Los resultados relativos a los agrupamientos muestran por una parte, mayor diversidad en los conocimientos relativos a la caracterización de los problemas. Asimismo, se observa que en general los conocimientos son similares en los grupos. En el apartado siguiente, se analizan las respuestas de manera descriptiva para identificar el conocimiento que se exponen en las dimensiones.

Caracterización de problema

La tabla 15 proporciona los resultados del cuestionario del conocimiento de los participantes en la caracterización de un problema. Estos se organizan en función de las categorías surgidas del análisis de los documentos curriculares oficiales. Es decir, si una tarea es: un problema basándose en el procedimiento, un problema basándose en el resolutor y un problema basándose en el tipo/característica del problema. Estos también se utilizan para describir los hallazgos de cada grupo de participantes y para compararlos.

Tabla 19. *Porcentajes de respuesta sobre problemas matemáticos escolares*

		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Problema basado en el procedimiento							
1	Resolución con procedimiento conocido	41,3	58,7	16,9	83,1	64,7	35,3
2	Resolución sin procedimiento conocido	23,9	76,1	15,5	84,5	22,1	77,9
4	Procedimiento es articulado por conceptos matemáticos	86,2	13,8	64,8	35,2	97,1	2,9
Problema basado en el resolutor							
5	Ejemplo (tarea medida del área) es un problema para cualquier estudiante	8,3	91,7	16,9	83,1	64,7	35,3
6	Etiquetar una tarea como problema depende de la experiencia del resolutor	60,6	39,4	64,8	35,2	48,5	51,5
7	Resolubilidad	64,2	35,8	54,9	45,1	47,1	52,9
8	Ejemplos (tareas al final de las lecciones en libros de texto) son problemas	62,4	37,6	26,8	73,2	58,8	41,2
9	Ejemplo (tarea 1ro de primaria) es un problema para estudiantes de segundo	93,6	6,4	85,9	14,1	41,2	58,8
Problema basado en su tipología / características							
10a	Tarea rutinaria no aplicada	29,4	70,6	32,4	67,6	27,9	72,1
10b	Tarea rutinaria aplicada	99,1	0,9	91,5	8,5	95,6	4,4
10c	Tarea no rutinaria, aplicada y cerrada	91,7	8,3	88,7	11,3	100	0
10d	Tarea no rutinaria, no aplicada y cerrada	43,1	56,9	83,1	16,9	85,3	14,7

Tabla 19. *Porcentajes de respuesta sobre problemas matemáticos escolares*

Ítem		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
10e	Tarea no rutinaria, aplicada y abierta	33,9	66,1	53,5	46,5	63,2	36,8
10f	Tarea no rutinaria, no aplicada y abierta	62,4	37,6	81,7	18,3	76,5	23,5
11	Una respuesta correcta	42,2	57,8	41,8	58,2	50	50
12	Presencia de ambigüedades	86,2	13,8	70,4	29,6	86,8	13,2
13	Presencia de datos poco precisos	62,4	37,6	64,8	35,2	85,3	14,7
14	Presencia de contexto	52,3	47,7	78,9	21,1	33,8	66,2
15	Más de una estrategia de solución	99,1	0,9	98,6	1,4	100	0
16	Más de una respuesta correcta	62,4	37,6	80,3	19,7	82,3	17,7
17	Presencia de toda la información necesaria	68,8	31,2	52,1	47,9	44,1	55,9
18	Una sola estrategia de solución	4,6	95,4	4,2	95,8	49	51
19	Presencia de información innecesaria	89,9	10,1	94,4	5,6	98,5	1,5

Nota: G1º = grupo 1º año; G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Grupo de 1º año

Como se señaló anteriormente, las respuestas de este grupo se ubican en las tres dimensiones (acuerdo, desacuerdo y contradicción), pero principalmente en la dimensión de acuerdo. Esto sugiere que los futuros profesores al comenzar su formación tienen un conocimiento similar de los problemas. Sin embargo, algunas respuestas indican que pueden no permitirles tener un enfoque contemporáneo de lo que significa un problema real.

Problemas basados en el procedimiento

Relativo al papel del procedimiento, los participantes del grupo de 1º año manifiestan conocimiento inconsistente sobre qué es un problema con respecto a si el resolutor tiene o no un procedimiento de resolución. Para muchos de ellos hubo una desconexión en su conocimiento de los problemas donde, por un lado, una tarea no depende del resolutor, pero por otro, depende de su conocimiento previo. Concretamente, el 41,3% de ellos pensó que una tarea es un problema si se puede resolver con procedimientos aprendidos previamente, mientras que el 23,9% dijo que un problema es una tarea sin un procedimiento conocido. Sin embargo, el 86,2% aceptó que el conocimiento matemático previo de los estudiantes determinó las estrategias de solución y, por lo tanto, si una tarea es un problema.

Problemas basados en el resolutor

Respecto al rol de resolutor, el grupo de 1º año mantuvo un conocimiento contradictorio de los problemas en relación con el papel de los estudiantes (resolutores). Cuando se les pregunta directamente, casi dos tercios de los participantes están de acuerdo en que un problema depende del resolutor o la posible resolubilidad que mantenga un resolutor de los problemas. Sin embargo, cuando se les presentaron ejemplos de tareas, su conocimiento del rol del resolutor disminuyó considerablemente. Un ejemplo de esto es que a pesar de que los estudiantes ya saben cómo resolverlos, más del 93,6% declaró que un problema aritmético aditivo (6 + 5) es un problema para un estudiante de segundo curso de primaria.

Problema basado en sus tipos / características

Para este tema, el grupo de 1º año también demostró inconsistencias en su conocimiento. El 70,6% de ellos consideraron que una tarea rutinaria no aplicada no era un problema, mientras que el 99,1% respondió afirmativamente si es aplicada. Con respecto a las tareas no rutinarias, el 91,7% contestó que eran problemas si la tarea es aplicada y cerrada, y el 43,1% si no es aplicada y cerrada. Por otra parte, dos tercios pensaban que no eran problemas si la tarea no es aplicada y abierta y un tercio si la tarea es aplicada y abierta. Esto sería un indicativo que el grupo de 1º año tendió a usar el contexto como un criterio para determinar si una tarea es un problema cuando la tarea es cerrada, pero cuando es abierta, ocurre lo contrario. Este uso del contexto en los problemas es conflictivo debido a que cuando se pregunta si es un determinante directo de que una tarea sea un problema, el 52,3% respondió que no. Además, el grupo de 1º año manifiesta una inconsistencia en su conocimiento de otras características de una tarea como un problema. Esto debido a que el 99,1% estuvo de acuerdo en que un problema tiene más de una estrategia de solución, mientras que el 42,2% cree que los problemas solo tienen una respuesta correcta y el 86,2% piensa que los problemas pueden tener ambigüedades, mientras que un tercio de ellos piensa que no puede haber información poco precisa.

Grupo 4º año

Las respuestas de este grupo se encuentran en la dimensión de acuerdo y duda. Esto significa que los conocimientos que se analizan a continuación son mayoritariamente comunes para todos los futuros profesores en el grupo, con la excepción de respuestas relacionadas con si una tarea es un problema en función del resolutor.

Problemas basados en procedimientos

Relativo al papel del procedimiento, el grupo de 4º año experimenta más contradicciones en su conocimiento que el grupo de 1º año. Concretamente, el 16,9% de los participantes respondió que los problemas se deben resolver con procedimientos aprendidos previamente. Y al mismo tiempo, el 15,5% de los participantes dijo que un problema es una tarea sin un procedimiento conocido. Además, este grupo no tiene claridad sobre la función de los conceptos matemáticos para articular un procedimiento, pues sus respuestas se distribuyen tanto para sí como para no.

Problemas basados en el resolutor

Respecto al rol del resolutor, cuando se presentan ejemplos de tareas, el reconocimiento del grupo del rol del resolutor aumenta considerablemente en comparación con el grupo de 1º año. Particularmente, solo el 26,8% declara que los problemas verbales presentados para practicar operaciones aritméticas son problemas o el 16,9% que una tarea de medición puede ser un problema para cualquier estudiante. Esto sugiere que las habilidades del grupo de 4º año para etiquetar una tarea como un problema, teniendo en consideración al resolutor, se ha visto mejorada con la formación recibida. Sin embargo, la consideración del resolutor sigue siendo un tópico complejo, donde no se comprende completamente lo que significa e implica. Cuando se le preguntó directamente al grupo de 4º año, poco más de dos tercios de los participantes están de acuerdo en que el etiquetado de los problemas depende del resolutor. Sin embargo, solo la mitad de ellos respondió que la resolubilidad juega un papel importante en el etiquetado de los problemas.

Problema basado en sus tipos / características

Para este tema, los datos muestran que el grupo de 4º año tiene diferentes criterios que el grupo de 1º año para etiquetar tareas como problemas. Esto debido a que las respuestas de este grupo muestran la aceptación de una gama más amplia de tareas. Concretamente, el grupo de 4º año etiqueta la mayoría de las tareas no rutinarias como un problema, con la excepción de las tareas abiertas y aplicadas que obtienen el 66,1%. Asimismo, las respuestas relativas a las características de los problemas presentan diferencias. El grupo de 4º año manifiesta como características la presencia de contexto con 78,9% o que los problemas pueden tener más de una respuesta con 80,3%. Sin embargo, alrededor de la mitad de los participantes considera que los problemas deben presentar toda la información necesaria para resolverse. Un hecho que explica el bajo nivel de aprobación de tareas abiertas y aplicadas.

Grupo 4º año con formación adicional

Las respuestas de este grupo se encuentran en las tres dimensiones, distribuidas de manera bastante equitativa en cada una. Esto significa que el conocimiento de los problemas presenta limitaciones en este grupo el sentido de que la formación no les permitió tener una conceptualización del problema contemporánea. Asimismo, gran parte de los participantes de este grupo manifiestan estas limitaciones.

Problemas basados en procedimientos

Relativo al papel del procedimiento, a diferencia de los grupos anteriores, los participantes en este grupo no presentan contradicciones en sus respuestas. Sin embargo, sus respuestas sugieren una conceptualización tradicional sobre los problemas. Esto debido a que un 64,7% de los participantes de este grupo consideran que los problemas deben tener un procedimiento conocido para su resolución. Asimismo, el 77,9% respondió que una tarea sin un procedimiento directo para su resolución no es un problema. Por otro lado, el 97,1% acepta que los conceptos matemáticos articulan el proceso de resolución.

Problemas basados en el resolutor

Respecto al rol del resolutor, los participantes en este grupo distribuyeron sus respuestas para cada opción cuando se les preguntó directamente si la consideración del resolutor tenía un rol en el etiquetado de un problema y sobre la resolubilidad. Esto se reflejó en las respuestas sobre los ejemplos en los que deberían indicar si el resolutor desempeña un papel. En estos ítems, el porcentaje de acuerdo más alto fue 64,7% para una tarea de mediciones de área. El resto de respuestas muestran una polarización entre las dos opciones. Estas respuestas sugieren que este grupo no tiene claridad sobre qué papel debe jugar el estudiante cuando se etiquetan los problemas.

Problema basado en tipos / características

Para este tema, los datos sugieren que este grupo utiliza como criterio para etiquetar problemas la existencia de una respuesta clara y, en menor medida, la presencia de un contexto real. En el grupo de 4º año con formación adicional, el 72,1% no considera las tareas rutinarias no aplicadas como problemas, pero el 95,6% está de acuerdo si la tarea rutinaria es aplicada. Con respecto a las tareas no rutinarias, este grupo muestra una mayor aceptación cuando la tarea es cerrada, ya sea aplicada (100%) o no (85,3%). Del mismo modo, en sus respuestas sobre las características de los problemas, hay una polarización para cada opción cuando se le preguntó si un problema tiene una única respuesta correcta o que la declaración del problema debería tener toda la información necesaria para resolverlo. Además de esta visión tradicional, el grupo de 4º año con formación adicional manifiesta contradicciones sobre las posibles estrategias de solución que un problema puede aceptar. Esto se observa cuando se preguntó si los problemas tienen más de una estrategia de solución, en la que el 100% está de acuerdo. Sin embargo, cuando se le preguntó si los problemas tienen solo una estrategia de solución, el 69,1% también está de acuerdo. Esto sugiere que al menos dos tercios de este grupo no presenta claridad sobre esta característica.

En general, los hallazgos sobre la conceptualización del problema muestran diferencias bastante leves entre el grupo de 1º año y grupo de 4º año, pero mayores con el grupo de 4º año con formación adicional. Este último grupo, a pesar que estuvo expuesto a una enseñanza explícita sobre resolución de problemas, presenta un concepto de problema limitado, e incluso, más tradicional. Respecto al conocimiento sobre las tareas que podrían considerarse problemas, cada grupo presenta diferencias y el grupo de 4º año con formación adicional, incluso contradicciones.

Proceso de resolución

La tabla 16 proporciona los resultados del cuestionario relativo al conocimiento sobre el proceso de resolución de problemas. Se organiza en base a las cuatro categorías emergidas en el análisis de los documentos curriculares, es decir, etapas, estrategias, metacognición y factores no cognitivos en la resolución de problemas. Estos temas también se utilizan para describir los hallazgos de cada grupo de participantes y para compararlos.

Tabla 20. *Porcentaje de respuestas sobre el proceso de resolución de problemas*

		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Fases en la resolución de problemas							
1a	Fase comprensión	96,3	3,7	90,1	9,9	97,1	2,9
1b	Fase planificación	89	11	88,7	11,3	95,6	4,4
1c	Fase actuación	91,7	8,3	84,5	15,5	97,1	2,9
1d	Fase revisión	81,7	18,3	84,5	15,5	94,1	5,9
2	Es un proceso lineal	21,1	78,9	25,4	74,6	16,2	83,8
3	No es un proceso lineal	100	0	97,2	2,8	98,5	1,5
4	La resolución tiene fases	98,2	1,8	95,8	4,2	100	0
5a	En el proceso de resolución, se puede representar	94,5	5,5	94,4	5,6	98,5	1,5
5b	En el proceso de resolución, se lee	97,2	2,8	100	0	98,5	1,5

Tabla 20. *Porcentaje de respuestas sobre el proceso de resolución de problemas*

		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
5c	En el proceso de resolución, se pueden hacer cálculos	92,7	7,3	95,8	4,2	98,5	1,5
5d	En el proceso de resolución, se debería entender	99,1	0,9	97,2	2,8	100	0
5e	En el proceso de resolución, se pueden explorar diferentes soluciones	83,5	16,5	94,4	5,6	95,6	4,4
5f	En el proceso de resolución, se pueden resolver problemas similares	58,7	41,3	71,8	28,2	77,9	22,1
5g	En el proceso de resolución, se puede verificar la respuesta	97,2	2,8	93	7	97,1	2,9
5h	En el proceso de resolución, se escribe la respuesta	93,6	6,4	97,2	2,8	98,5	1,5
6	Es necesario comprender para resolver	96,3	3,7	91,5	8,5	97,1	2,9
7	Es aconsejable resolver sin comprender	6,4	93,6	11,3	88,7	1,5	98,5
8	Usar diferentes representaciones ayudan a la comprensión	99,1	0,9	94,4	5,6	100	0
9	Comprender incluye identificar la información y estructura subyacente	100	0	98,6	1,4	100	0
10	Los diagramas son herramientas que ayudan a comprender	89,9	10,1	95,8	4,2	98,5	1,5
16	Una vez hallada la respuesta, es recomendable inventar otros problemas	65,1	34,9	80,3	19,7	86,8	13,2
17	Una vez hallada la respuesta, no es necesario realizar otras acciones	21,1	78,9	12,7	87,3	5,9	94,1
18	Una vez hallada la respuesta, volver a la pregunta ayuda a calibrar la respuesta	99,1	0,9	100	0	100	0

Tabla 20. *Porcentaje de respuestas sobre el proceso de resolución de problemas*

Ítem		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
19	Una vez hallada la respuesta, se deberían buscar formas alternativas de solución	73,4	26,6	77,5	22,5	86,8	13,2
20	Una vez hallada la respuesta, se debería generalizar la estructura del problema	91,7	8,3	97,2	2,8	98,5	1,5
Metacognición en la resolución de problemas							
11a	No hay error en la respuesta	23,9	76,1	28,2	71,8	14,7	85,3
11b	Atribución a la comprensión	54,1	45,9	83,1	16,9	61,8	38,2
11c	Atribución a la aplicación del plan	76,1	23,9	76,1	23,9	82,4	17,6
11d	Atribución a la adecuación de la respuesta	25,7	74,3	22,5	77,5	14,7	85,3
12	La metacognición permite identificar los errores cometidos	95,4	4,6	85,9	14,1	94,1	5,9
13	La metacognición permite usar el conocimiento efectivamente	92,7	7,3	98,6	1,4	98,5	1,5
14	La metacognición permite usar las estrategias efectivamente	96,3	3,7	98,6	1,4	97,1	2,9
15	Las estrategias median la selección del conocimiento a utilizar	91,7	8,3	94,4	5,6	100	0
Factores no cognitivos en la resolución de problemas							
22	Encontrar la respuesta no depende de la motivación	40,4	59,6	67,6	32,4	42,7	57,3
23	La motivación es importante	91,7	8,3	93	7	94,1	5,9
24	Obedecer al profesor es más importante que estar motivado	12,8	87,2	8,5	91,5	1,5	98,5
25	Conocer los conceptos matemáticos es más importante que estar motivado	14,7	85,3	8,5	91,5	4,4	95,6

Nota: G1º = grupo 1º año; G4º = grupo 4º año; G4ºA = Grupo 4º año con formación adicional

Los resultados sobre el conocimiento referido a las estrategias lo hemos incluido en una tabla aparte y con un formato diferente debido a que fueron explorados en una sección distinta del cuestionario y con un tipo de pregunta diferente. Estos hallazgos se muestran en la tabla 17, donde se pueden ver las respuestas a cada estrategia. En ella, también además de observar qué porcentaje de futuros profesores reconoce la estrategia, se muestra con qué estrategia se confunde en caso de no reconocerla.

Tabla 21. *Porcentajes de respuestas relativos a las estrategias en la resolución de problemas*

	Opciones de respuesta [G1º (N=109); G4º (N=71); G4ºA (N=68)]											
	G1º	G4º	G4ºA	G1º	G4º	G4ºA	IG	G4º	G4ºA	G1º	G4º	G4ºA
1a	Usar una tabla*			Buscar un patrón			Hacer un dibujo			Ensayo y error		
	87,2	63,4	75	12,8	28,2	11,8	0	0	0	0	4,2	13,2
1b	Usar una tabla			Trabajar hacia atrás*			Ensayo y error			Operar		
	1,8	4,2	0	68,8	46,5	76.5	0	7	4,4	29,4	43,7	19,1
2a	Buscar un patrón			Ensayo y error			Usar una tabla			Hacer un dibujo*		
	1,8	4,2	1,5	4,6	7	1,5	0	0	0	93,6	90,1	97,1
2b	Buscar un patrón			Ensayo y error*			Usar una tabla			Hacer un dibujo		
	15,6	26,8	33.8	40,4	46,5	47,1	44	28,2	19,1	0	0	0
2c	Ensayo y error			Operar			Buscar un patrón *			Usar una tabla		
	11	7	5,9	2,8	5,6	1,5	80	83,1	92,6	6,4	5,6	0
2d	Ensayo y error			Operar*			Buscar un patrón			Hacer un dibujo		
	1,8	4,2	4,4	95,4	83,1	89,7	1,8	4,2	1,5	0,9	0	4,4

Nota: * Respuesta esperada

Nota: G1º = grupo 1º año; G4º = grupo 4º año; G4ºA = Grupo 4º año con formación adicional

Grupo 1º año

Las respuestas de los participantes sobre este conocimiento se agrupan principalmente en la dimensión acuerdo. Solo tres de las preguntas se ubicaron en la dimensión duda, todas ellas relacionadas con la forma en que la invención de problemas se vincula al proceso de resolución.

Etapas en la resolución de problemas

Para este tema, los participantes, a pesar de expresar que el proceso no es lineal, tienen un conocimiento lineal del mismo. Esto se interpreta debido a que más del

80% reconocen las cuatro fases en la respuesta hipotética de un estudiante. Del mismo modo, el 78,9% rechaza que la resolución de problemas es un proceso lineal y también responden afirmativamente, en más del 90%, a la existencia de diferentes momentos que pueden surgir cuando se resuelve un problema, como representar, leer o calcular. Sin embargo, las respuestas a los ítems que podrían confirmar su conocimiento, como buscar diferentes soluciones o explorar problemas similares, registran porcentajes más bajos (83,5% y 58,7% respectivamente). Estos patrones en sus respuestas también se observaron en sus respuestas referidas a cada fase específica. En ellas, aproximadamente el 90% reconoce acciones y ejemplos que pueden ocurrir en la fase de comprensión. Sin embargo, en los elementos relacionados con la fase de *mirar hacia atrás*, un tercio de ellos no identifica la invención de problemas como parte de ella.

Estrategias en la resolución de problemas

Relativo a las estrategias, los participantes reconocen una variedad de estrategias, pero la que se asocia con un proceso genuino de resolución (ensayo y error) presenta menor reconocimiento. Lo anterior se refleja en los porcentajes de respuestas en los que aproximadamente el 90% de los participantes identifican estrategias como operar, hacer un dibujo y construir una tabla. Asimismo, el 80% y el 68,8% reconocen las estrategias como buscar un patrón y trabajar hacia atrás, respectivamente. Sin embargo, solo el 40,4% reconoce la estrategia de ensayo y error, en la que el 15,6% la confunde con la búsqueda de un patrón y el 44% con la construcción de una tabla.

Metacognición en la resolución de problemas

Para este tema los participantes, a pesar de reconocer la importancia de la metacognición, al menos la mitad no identifica la causa de un error en una posible respuesta de un estudiante. Esto se refleja en que más del 90% de los participantes reconocen su importancia y función al preguntarles directamente por ello. No obstante, en la identificación de errores y sus posibles causas en las respuestas hipotéticas de los estudiantes, su conocimiento disminuye. Específicamente, el 76,1% reconoce un error de cálculo en una posible respuesta de un estudiante que mostró haber entendido el problema. Sin embargo, más de la mitad atribuye este error a la comprensión y el 76,1% a un cálculo incorrecto. Además, solo un 25,7% respondió que no se revisó la coherencia de la respuesta.

Factores no cognitivos en la resolución de problemas

Respecto a los factores no cognitivos, los participantes identifican la relevancia de la motivación, incluso la valoran más que el conocimiento, pero tienen dudas sobre si es decisivo para encontrar la solución. En este grupo, el 91,7% de los participantes reconoce la importancia de la motivación, pero solo el 40,4% está convencido de que encontrar una solución depende de ello.

Grupo 4º año

Las respuestas de los participantes se encuentran principalmente en la dimensión del acuerdo, con solo dos preguntas en la dimensión de la duda. La primera relativa a la invención de problemas y la segunda a aspectos no cognitivos.

Etapas en la resolución de problemas

Relativo a las fases de resolución, los resultados indican que la formación tiene un efecto positivo en la integración de la invención de problemas en el proceso de resolución. En el grupo de 4º año, hay un alto reconocimiento de las fases de resolución, donde más del 85% de los participantes reconocen las cuatro etapas en la respuesta hipotética de un estudiante. Asimismo, el 97,2% acepta la resolución de problemas como un proceso no lineal. Además, más del 90% acepta los diferentes momentos (excepto la invención de problemas) que pueden surgir cuando se resuelve el problema, como representar o explorar diferentes soluciones. En cuanto a inventar problemas, hay una aceptación de poco más de dos tercios de los participantes. Esta información es importante porque indicaría una visión no lineal del proceso de este grupo. Esto se confirma por sus respuestas en los ítems referidos a las fases específicas (comprender, actuar y revisar), en las cuales se obtiene una aprobación superior al 80% aproximadamente.

Estrategias en la resolución de problemas

En ejemplos de respuestas de estudiantes, los participantes identificaron solo características superficiales de las estrategias. Particularmente, la esencia de la estrategia de ensayo y error es probar diferentes respuestas para ver si se ajustan a las condiciones del problema. Sin embargo, construir una tabla y buscar un patrón, también requiere realizar listas sistemáticas. Los resultados sugieren que los futuros profesores ignoraron estas condiciones por lo que exponemos a continuación. Aproximadamente el 85% de los participantes identifican las estrategias para hacer un dibujo, buscar un patrón y operar. El reconocimiento disminuye a aproximadamente poco más de un 40% de los participantes para las estrategias trabajar hacía atrás y ensayo y error, mientras que construir una tabla logra una identificación del 63,4%. En particular, casi la mitad del grupo confunde trabajar hacia atrás con el operar; esto sugiere que son capaces de identificar la operación en la respuesta, pero no el proceso inverso subyacente en que el estudiante potencial sigue mientras opera. Lo mismo ocurre con la estrategia de ensayo y error, donde el 28,2% y el 26,8% lo confunden con construir una tabla y la búsqueda de un patrón, respectivamente.

Metacognición en la resolución de problemas

En este tema, los datos sugieren que a pesar de reconocer la importancia de la metacognición, gran parte del grupo de 4º año posee un conocimiento que no permite ser preciso al identificar errores. En este grupo, más del 85% de los participantes en este grupo identifican las características de la metacognición al preguntar directamente. Por otra parte, dos tercios reconocen un error de cálculo en una respuesta hipotética de un estudiante. No obstante, el 83,3% de los participantes culpan a la comprensión, y solo dos tercios del cálculo. Además de esto, menos de un cuarto respondió que no se revisó la coherencia de la respuesta. Esto en el sentido que el error estaría en que no se realiza una mirado sobre lo realizado.

Factores no cognitivos en la resolución de problemas

Respecto a los factores no cognitivos, las respuestas de los participantes sugieren el reconocimiento de la importancia de la motivación. En el grupo de 4º año, el 93% considera la motivación como un elemento importante cuando los estudiantes resuelven problemas y el 91,5% piensa que es más importante estar motivado que obedecer al maestro. Además, más de dos tercios están convencidos de que encontrar una solución depende de la motivación.

Grupo 4º año con formación adicional

Este grupo ha posicionado sus respuestas principalmente en la dimensión del acuerdo y solo tres se sitúan en la dimensión de la duda. La primera relativa a la invención de problemas, y las dos restantes sobre las causales de un error en la posible respuesta de un estudiante.

<u>Etapas en la resolución de problemas</u>

Para este tema, el conocimiento de los participantes manifestado en las respuestas reafirma la idea de que existe un efecto positivo, en la integración de la invención de problemas al el proceso de resolución, a una mayor formación. Al igual que los otros grupos, los participantes reportan un alto grado (más del 94%) de reconocimiento de las acciones relacionadas con cada fase de resolver problemas. Como el grupo de 4º año, este grupo acepta que la resolución de problemas no es un proceso lineal en 98,5%. También acepta en más del 95% los diferentes momentos que pueden surgir cuando se resuelve un problema, como representar o explorar diferentes soluciones. Sin embargo, la invención de problemas logra una aceptación menor, pero en mayor medida que los resultados de los otros dos grupos (77,9%). Además, en los ítems referidos a las fases específicas, se obtiene una aprobación de más del 98% para la fase de comprensión; mientras que las preguntas sobre acciones y características de la fase de retroalimentación obtienen una aprobación superior al 80%. Estas últimas, confirman una aceptación mayor de la invención de problemas como parte del proceso.

<u>Estrategias en la resolución de problemas</u>

Al igual que el grupo de 4º año, el conocimiento de los participantes sugiere una identificación de las características superficiales en una respuesta de un estudiante. Esto debido a que confunden estrategias que comparten características de formato. Esto puede observarse en que más del 90% de los participantes son capaces de identificar las estrategias hacer un dibujo, buscar un patrón y operar. Del mismo modo, las estrategias trabajar hacia atrás y construir una tabla fueron reconocidas por alrededor de tres cuartos del grupo. Como los dos anteriores grupos, la estrategia que tiene un menor porcentaje de reconocimiento es ensayo y error, donde solo alrededor de la mitad del grupo logra hacerlo. Además, esta última estrategia se confunde con construir una tabla en un 19,1% y un 33,8% con la búsqueda de un patrón.

Metacognición en la resolución de problemas

El conocimiento de los participantes reafirma la idea de que a pesar de reconocer la importancia de la metacognición no son capaces de aplicarla en situaciones hipotéticas. Esto debido a que una gran parte de este grupo no identifica errores en posibles respuestas de estudiantes. En este grupo, más del 94% de los participantes identifican las características de la metacognición preguntándola directamente. Sin embargo, a pesar de mostrar dificultades para reconocer un error, este grupo tiene un mayor porcentaje de identificación que los otros. Concretamente, el 85,3% de este grupo reconoce el error y el 82,4% culpa a un cálculo mal realizado. Por otra parte, al mismo tiempo dos tercios culpan a la comprensión y solo el 14,7% a la revisión de la idoneidad de la respuesta.

Factores no cognitivos en la resolución de problemas

Al igual que otros grupos, los resultados sugieren que los participantes del grupo de 4º año con formación adicional reconocen la importancia de la motivación, pero no están seguros de que sea decisivo para encontrar una solución. Por ejemplo, el 94,1% de los participantes aceptan su importancia, pero solo el 42,7% está convencido de que encontrar una solución dependa de ello.

En general, los hallazgos sobre el proceso de resolución de problemas muestran menos diferencias entre los grupos que la caracterización del problema. Además, a pesar de su enseñanza explícita sobre resolución de problemas, los futuros profesores del grupo de 4º año con formación adicional presentan una visión lineal del proceso. Sin embargo, nuestros resultados sugieren que la formación ha ayudado a los participantes de los grupos finales a incorporar la invención de problemas como parte del proceso de resolución.

Disposición

En el conocimiento sobre la aceptación del desafío de resolver un problema, las respuestas solo se ubican en la dimensión de acuerdo. En general, un alto porcentaje de los futuros profesores tienen claridad sobre la importancia de aceptar el desafío. Concretamente, sobre un 85% de los participantes en todos los grupos declaran que los estudiantes deben aceptar el desafío de resolver un problema para etiquetar una tarea como un problema. Asimismo, sobre un 80 % de participantes de todos los grupos responde que es más importante querer resolver un problema que saber exactamente cómo hacerlo.

Si comparamos los porcentajes de aceptación del desafío y de importancia de la disposición vemos que no varían entre los grupos. También es posible observar que en el grupo de 4º con formación adicional son ligeramente mejores que el grupo de 4º año. La tabla 18 muestra un resumen de los porcentajes.

Tabla 22. *Porcentajes de respuesta respecto la disposición*

		G1º (N=109)		G4º (N=71)		G4ºA (N=68)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
3	Aceptación del desafío	94,5	5,5	85,9	14,1	94,1	5,9
21	Importancia de la disposición	87,2	12,8	81,7	18,3	86,8	13,2

Nota: GI = grupo 1º año; G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Discusión

En general, los resultados sugieren que la formación tiene un mayor impacto en la conceptualización del problema debido a que, por un lado, hay una mayor variedad de dimensiones, y por otro, se observan más diferencias en los porcentajes de respuesta entre los grupos. Específicamente, a pesar de no hacerlo en ejemplos concretos, los futuros profesores al finalizar su formación reconocen que el resolutor tiene una función en el etiquetado de las tareas como problemas. Además, los participantes reconocen una variedad de tipos de problemas, tanto rutinarios como no rutinarios. Estos resultados podrían ser efecto de la formación recibida. Sin embargo, hay algunas ideas que hacen que este conocimiento pueda no ser utilizado en todo su potencial.

Etiquetar una tarea como un problema es una empresa compleja para los futuros profesores. Los hallazgos que reportamos indican que los participantes comienzan su formación teniendo dudas y contradicciones sobre el papel del procedimiento, sobre la consideración del resolutor y los tipos de tareas consideradas como problemas. No obstante, este conocimiento se reconduce durante el transcurso de su formación. Además, pensamos que con más capacitación, los futuros maestros tienden a etiquetar como un problema a tareas en las que ya se conoce su procedimiento de solución. Específicamente, los futuros docentes comienzan su formación con contradicciones respecto a si se debe conocer un camino directo del procedimiento de una tarea para etiquetarla como un problema. Una idea que aumenta en el grupo de 4º año y que se torna tradicional en el grupo de 4º año con formación adicional.

Con respecto a la consideración del resolutor, los maestros comienzan su formación reconociendo su importancia de forma teórica pero no siendo capaces de hacerlo en ejemplos. A este respecto, la formación podría tener un impacto variado, esto debido a que el grupo de 4º año avanza en su conocimiento en la identificación de ejemplos, pero el grupo de 4º año con formación adicional no presenta claridad al respecto. En cuanto a si distintos tipos de tareas son etiquetadas como problemas, los futuros profesores llegan a su formación utilizando como criterio de etiquetado el que la tarea tenga un contexto y posea una estructura aritmética clara. En los grupos finales, la formación ha tenido efectos diferentes. El grupo de 4º año extiende su conocimiento aceptando la mayoría de las tareas. Por su parte, el grupo de 4º año con formación adicional utiliza como criterio si las tareas son abiertas o cerradas, ya que estas últimas tienen porcentajes de aprobación más altos.

Aunque estos resultados pueden deberse a numerosos factores, creemos que un elemento clave es el etiquetado de una tarea matemática como problema considerando a su posible resolutor. Esto debido a que los contextos escolares tienen la complejidad de llevar a cabo el etiquetado de problemas en dos niveles: el del estudiante y el del profesor. Los maestros son los primeros en darse cuenta cuando sus estudiantes se enfrentan a lo que podría ser considerado un problema. La tarea problemática se asigna posteriormente a los estudiantes, quienes deben formularla y reformularla para resolverla. Con esto, no planteamos que los futuros maestros deban necesariamente experimentar con estudiantes de escolaridad primaria, aunque estudios previos hayan señalado su potencialidad (ver Crespo, 2003; Livy y Downton, 2018).

Los estudiantes para maestro manifiestan dificultades para considerar al posible estudiante en el etiquetado de tareas como problemas. Esta situación, sin duda, influirá en su conocimiento didáctico para enseñar, ya que no considerar al resolutor en la enseñanza de la resolución de problemas resultará que la selección de problemas se realice desde una perspectiva utilitaria y no desde su significado más profundo. Incluso cuando los tipos de tareas que los sujetos en este estudio identifican como problemas son amplios y concordantes con los señalado en la literatura como buenos problemas, en el sentido de que permiten más de una solución o hay más de un solo procedimiento para lograr una respuesta (Lester y Cai, 2016). Existe un mayor acuerdo en el etiquetado, como problemas, en los tipos de tareas más comunes en los libros de texto (Zhu y Fan, 2006). Desafortunadamente, estos problemas suelen ser rutinarios. Además, el conocimiento que tienen sobre las características no coincide con la selección de ejemplos de problemas que realizan. Concretamente, los futuros profesores declaran que hay más de una forma de alcanzar la solución, no obstante no tienen los conocimientos necesarios para reconocer los problemas que permitan esta acción en sus futuros estudiantes.

Si bien los participantes de este estudio han mostrado dificultades con la caracterización del problema, han manifestado conocimiento sobre el proceso de resolución y sus fases. No obstante, los datos sugieren que el conocimiento sobre el proceso de resolución no se modifica con la formación, con la excepción de las ideas sobre la invención de problema. Esta noción se expande desde las respuestas del grupo de 1º año hasta el grupo de 4º año con formación adicional. Específicamente, los futuros profesores muestran conocimiento del proceso de resolución identificando sus fases y caracterizándolas adecuadamente. Asimismo, reconocen una variada gama de estrategias para resolver problemas. A pesar de ello, este conocimiento podría no mejorar con la formación recibida, pues no logran ampliar la visión lineal que tienen sobre el proceso.

Particularmente, el conocimiento relacionado con el proceso de resolución ha mostrado poca variación entre los grupos. La única excepción es la consideración de la invención de problema como parte del proceso. Las respuestas de ambos grupos finales se observan concordantes con una interpretación dinámica, cíclica y genuina de las fases de Pólya (Wilson et al., 1993) cuando se preguntó de forma directa. No obstante, esta caracterización puede no tener implicaciones prácticas, ya que, cuando se pide señalar los posibles momentos en el proceso resolución, la exploración de diferentes soluciones y la invención de problemas, se obtiene un menor grado de aprobación. Sumado a esto, la estrategia que menos reconocen es ensayo y error, indicada como característica crítica en un proceso de resolución de problemas auténtico (Mason et al., 2010). Además, incluso cuando los participantes identifican errores en las posibles respuestas de estudiantes, tienen dificultades para encontrar el motivo de este error. Esto puede deberse en gran parte al aprendizaje memorístico y mecánico que presenta este colectivo (e.g. Boote y Boote, 2018; Nortes y Nortes, 2016). Esto puede provocar la ausencia del hábito de monitorear el proceso de resolución. Asimismo, la formación recibida podría haber estado demasiado centrada en el conocimiento teórico, a expensas de las actividades de indagación. Todo esto, nos lleva a pensar que poseen conocimientos teóricos y que podrían no transferirse a la práctica.

Capítulo 6
Evaluación del conocimiento didáctico sobre resolución de problemas

En este capítulo mostramos los análisis y resultados referidos al conocimiento didáctico sobre resolución de problemas. Concretamente, construimos y aplicamos un cuestionario a estudiante del Grado de Magisterio que se encontraban al final de su formación. Hemos realizado dos tipos de análisis a las respuestas, uno sobre el agrupamiento de las respuestas, y otro referido a los porcentajes obtenidos en cada una de las respuestas. Finalizamos el capítulo con una discusión de los hallazgos.

Al igual que el capítulo anterior, para caracterizar el conocimiento didáctico sobre resolución de problemas, hemos realizado dos análisis a las respuestas dadas por los futuros profesores a los cuestionarios aplicados para la recogida de datos. Primero, se han realizado agrupamientos de las respuestas mediante un análisis multivariante a través de un escalamiento multidimensional ALSCAL (SPSS). Posteriormente, los hallazgos se presentan en términos de las perspectivas de conocimiento mantenidas por los futuros profesores para cada uno de los temas propuestos en los cuestionarios y las categorías del análisis de las normativas curriculares previo, la formación recibida y las dimensiones encontradas en el análisis multivariante.

Agrupamientos de las respuestas

El análisis multivariariante ha permitido identificar el conocimiento que es común a ambos grupos, así como el conocimiento en el que hay desacuerdo o que presenta contradicciones. Al igual que en el conocimiento sobre la resolución de problemas, para interpretar estas dimensiones, hemos utilizado como criterios el stress, así como la facilidad de interpretación de los datos (Bisquerra, 1989). La tabla 19 muestra el stress para cada cuestionario y para cada grupo (los valores específicos de cada ítem pueden verse en el Anexo 3).

Tabla 23. *Stress de cada cuestionario y grupo*

	Aprendizaje		Enseñanza	
	Dimensiones	Stress	Dimensiones	Stress
G4º	3	0.11	2	0.09
G4ºA	3	0.08	2	0.09

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

El cuestionario sobre aprendizaje de la resolución de problemas registró respuestas agrupadas en 3 dimensiones en ambos grupos (ver tabla 19). El *stress* del grupo de 4º año es mayor que el recomendado de 0,10, probablemente debido al nivel de formación del que forma parte este grupo. Sin embargo, al igual que en el cuestionario sobre el proceso, hemos decidido mantener las tres dimensiones, pues como señala Bisquerra (1989), la presentación y la comprensión de los datos deben prevalecer. En la medida que surgen tres dimensiones en el otro grupo de cuarto año con un ajuste apropiado, mantenemos esta tridimensionalidad con el fin de hacer comparaciones.

La primera dimensión se ha interpretado como acuerdo en el conocimiento y corresponde a las respuestas a 55 ítems en el grupo de 4º año y 62 respuestas en el grupo de 4º año con formación adicional de las 63 que presenta el cuestionario. Las respuestas agrupadas en esta dimensión tienen un alto porcentaje de acuerdo en su respuesta, positiva o negativa. La segunda dimensión está determinada por las respuestas a 13 ítems en el grupo de 4º año y las respuestas a 10 ítems en el grupo de 4º año con formación adicional de las 63 que posee el cuestionario. En estos grupos de respuestas se observa una polarización en el número de opciones afirmativas y negativas. Hemos etiquetado estos grupos de respuestas como duda. La tercera dimensión corresponde con 12 respuestas a el grupo de 4º año y a ocho respuestas en el grupo de 4º año con formación adicional de las 63 que posee el cuestionario. En ellos, sus porcentajes de acuerdo fluctúan o no para cada opción, pero cuando se analizan junto con otras respuestas, presentan contradicciones. Al igual que en el análisis de los cuestionarios sobre el conocimiento de la resolución de problemas, para este análisis hemos tenido en cuenta la dimensión en la que las respuestas tienen una mayor presencia. Sin embargo, hay algunas respuestas que mantienen una presencia importante en más de una dimensión.

Concretamente, la tabla 20 muestra la distribución de las respuestas a los 63 ítems del cuestionario según su dimensionalidad versus el componente y sus conocimientos asociados que se desprenden del cuestionario relativo al aprendizaje de la resolución de problemas.

Tabla 24. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

		Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda	Dimensión 3 Contradicción
Grupo 4º año				
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos	1, 4, 5, 6, 7, 8	2, 3	
	Dificultades y errores	9, 11	10, 12, 13, 14, 15	

Tabla 24. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

		Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda	Dimensión 3 Contradicción
Resolución de problemas como tarea escolar	Selección de problemas	16, 17, 18, 19, 21, 22		
	Estrategias	23B, 23B2, 23C, 23E, 23E2, 23F, 23H, 23H2, 23I, 23I2, 23J, 23J2, 23K, 23L, 23L2, 23M, 23N, 23N2, 23O, 23O2, 23P, 23P2	23C2, 23D2, 23F2, 23Ñ, 23Ñ2	23A, 23A2, 23D, 23G, 23G2, 23K2, 23M2
	Modelos de resolución	26		24, 25, 27
	Invención de problemas	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36		
Factores no cognitivos	Factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas	38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46	47	37, 42
Grupo 4º año con formación adicional				
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos	1, 4, 5, 6, 7, 8	2	3
	Dificultades y errores	9, 11, 13	10, 12, 14, 15	
Resolución de problemas como tarea escolar	Selección de problemas	16, 17, 18, 19, 21, 22	20	20
	Estrategias	23B, 23B2, 23C, 23D, 23D2, 23E, 23E2, 23F, 23F2, 23G, 23G2, 23H, 23H2, 23I, 23I2, 23J, 23J2, 23K, 23K2, 23L, 23L2, 23M, 23M2, 23N, 23N2, 23Ñ, 23Ñ2, 23O, 23O2, 23P2	23P	23A, 23A2, 23C2
	Modelos de resolución	25, 26		24, 27
	Invención de problemas	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35	36	

Tabla 24. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

		Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda	Dimensión 3 Contradicción
Factores no cognitivos	Factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas	38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46	37, 42	47

Nota: Dimensión 1: ítems con 70% a 100% de respuestas para sí o no; Dimensión 2: ítems con respuestas polarizadas para cada opción; Dimensión 3: ítems que presentan aprobación y polarización.

En ambos grupos, las respuestas al cuestionario sobre enseñanza de la resolución de problemas se agruparon en dos dimensiones (ver tabla 19). La primera dimensión, corresponde a las respuestas a 57 ítems en el grupo de 4º año y a 56 respuestas en el grupo de 4º año con formación adicional. En estas respuestas, la mayoría de los participantes coinciden afirmativa o negativamente. Por otro lado, las preguntas en las que no coinciden o fluctúan para cada opción y que hemos interpretado como duda corresponden a 9 respuestas en el grupo de 4º año y a 10 respuestas en el grupo de 4º año con formación adicional. El análisis de este cuestionario presenta un stress de 0,09 para ambos grupos, considerado adecuado (Bisquerra, 1989). La tabla 21 muestra la distribución de las respuestas a las preguntas según su dimensionalidad versus el componente y sus conocimientos asociados.

Tabla 25. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

	Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda
Grupo 4º año		
Enfoques	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12	7, 10
Discurso	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	
Bloqueo	24, 25, 26, 27, 28, 30	23, 29
Evaluación	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47A, 47C, 47D, 47E, 47G	39, 46, 47B
Recursos	48B, 48C, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58	48A, 54
Grupo 4º año con formación adicional		
Enfoques	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12	7, 10
Discurso	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22	21

Tabla 25. *Distribución de ítems según dimensión y conocimiento*

	Dimensión 1 Acuerdo	Dimensión 2 Duda
Bloqueo	24, 25, 26, 27, 28, 29, 30	23
Evaluación	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47A, 47C, 47D, 47F, 47G	42, 47B, 47E
Recursos	48B, 48C, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 58	48A, 54, 57

Nota: Dimensión 1: ítems con 70% a 100% de respuestas para sí o no; Dimensión 2: ítems con respuestas polarizadas para cada opción.

En resumen, este análisis permite que las siguientes secciones se puedan valorar no solo desde la perspectiva del significado de lo que contestan, sino también para poner de manifiesto las características comunes y diferentes para ambos grupo.

Los resultados relativos a los agrupamientos muestran mayor diversidad en los conocimientos relativos al aprendizaje de la resolución. Asimismo, se observa que en general los conocimientos son similares en los grupos. En el apartado siguiente, se analizan las respuestas de manera descriptiva para identificar el conocimiento que se exponen en las dimensiones.

El estudiante como resolutor

En este apartado se aborda el conocimiento de los participantes sobre los factores que pueden afectar al aprendizaje de la resolución de problemas. Específicamente, el conocimiento sobre el estudiante como resolutor de problemas, es decir, las características de los resolutores de problemas exitosos y las de los principiantes.
Como se señaló anteriormente, las respuestas están ubicadas en las tres dimensiones, pero principalmente en la primera. Esto sugiere que los conocimientos sobre los estudiantes como resolutores son comunes para ambos grupos, pero al mismo tiempo existen algunas respuestas conflictivas. Entre ellas, las ideas en torno a los resolutores novatos presentan mayor dificultad para los participantes. Los resultados de cada grupo se presentan en la tabla 22.

Tabla 26. *Porcentajes de respuestas relativas a los estudiantes como resolutores*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
Características de resolutores exitosos					
1	Conocimiento conectado y organizado	95,6	5,4	97,8	2,2
2	Persistentes en seguir el plan trazado	71,4	28,6	60,2	39,8
3	Capaces de identificar características estructurales	75	25	62,4	37,6
4	Se frustran fácilmente	21,4	78,6	22,6	77,4
5	Consientes de fortalezas y debilidades propias	85,7	14,3	93,5	6,5
6	Son metacognitivos, e.g. se automonitorean	96,4	3,6	92,5	7,5
7	Preocupados de la forma y el fondo	96,4	3,6	92,5	7,5
8	Preocupados por terminar rápido	8,9	91,1	10,8	89,2
Características de resolutores novatos					
9	Capaces de distinguir información relevante	30,4	69,6	36,6	63,4
10	Son persistentes en seguir el plan trazado	69,6	30,4	64,5	35,5
11	Son impulsivos en sus decisiones	89,3	10,7	82,8	17,2
12	Mantienen la estrategia a pesar de no encontrar resultados parciales	75	25	72	28
13	Poca claridad del camino que podría llevar a la solución	76,8	23,2	80,6	19,4
14	Usan estrategias no adecuadas	66,1	33,9	73,1	26,9
15	No verifican la adecuación de sus respuestas	76,8	23,2	78,5	21,5

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Grupo 4º año

Para este tema, más del 90% de los participantes reconocen las características de los resolutores exitosos, tales como su conocimiento relacionado y organizado o sus habilidades metacognitivas. Sin embargo, tres cuartos manifiestan que estos estudiantes persistirán en mantener su plan de solución. Por otro lado, aunque este grupo es capaz de reconocer las características de los resolutores novatos, obtienen un porcentaje de aceptaciones más bajo que las características de los resolutores exitosos. Respecto a estas últimas, no más de tres cuartos las identifica como tales.

Esto indica un mejor reconocimiento de las características de los resolutores exitosos.

Grupo 4º año con formación adicional

Para este tema, más del 90% de los participantes del grupo de 4º año con formación adicional reconocen las características de los resolutores exitosos. Concretamente, reconocen que son conscientes de sus fortalezas y debilidades o su preocupación por forma y fondo. Sin embargo, dos tercios manifiestan que estos estudiantes persistirían en mantener su plan de solución. No obstante, esto es un porcentaje más bajo que el grupo de 4º año.

Respecto a los resolutores noveles, este grupo presenta algunas respuestas similares al grupo de 4º año. El 80% de este grupo afirma que estos resolutores son impulsivos, tienen poca claridad en el camino hacia la solución o que no verifican la coherencia del resultado. Del mismo modo, el 70% indica que usan estrategias inapropiadas o que mantienen la estrategia a pesar de no ver resultados parciales. Sin embargo, a diferencia del grupo de 4º año, solo dos tercios manifiestan que son persistentes en el seguimiento de su planificación o que no pueden distinguir información relevante.

La resolución de problemas como tarea escolar

En este tema se aborda el conocimiento de los participantes sobre los factores relativos a la resolución de problemas como tarea escolar. Concretamente, criterios de selección de problemas, estrategias, modelos de resolución, e invención de problemas. Las respuestas del grupo de 4º año con formación adicional se ubican en las tres dimensiones, pero principalmente en la primera. No obstante, el grupo de 4º año presenta mayor cantidad de respuestas en la dimensión de contradicción, específicamente en las referidas a las estrategias. La tabla 23 proporciona un resumen de los resultados del cuestionario relativos a este componente.

Tabla 27. *Porcentajes de respuestas relativas a la resolución de problemas como tarea escolar*

Ítem		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
		SÍ	NO	SÍ	NO
Selección de problemas					
16	Exploran y desarrollan ideas matemáticas	96,4	3,6	97,8	2,2
17	Son contextualizados	98,2	1,8	98,9	1,1
18	Provocan interés	98,2	1,8	98,9	1,1
19	Ofrecen diferentes niveles de solución	92,9	7,1	91,4	8,6
20	No tienen una respuesta directa ni corta	53,6	46,4	49,5	50,5
21	Tienen una estructura generalizable	91,1	8,9	92,5	7,5
22	Pueden ser resueltos por los estudiantes	100	0	94,6	5,4
Estrategias					
23A	Conozco “dramatizar el problema”	60,7	39,3	57	43
23A2	Usaría “dramatizar el problema”	78,6	21,4	80,6	19,4
23B	Conozco “revisar la razonabilidad de la respuesta”	92,9	7,1	97,8	2,2
23B2	Usaría “revisar la razonabilidad de la respuesta”	92,9	7,1	98,9	1,1
23C	Conozco “elegir una operación”	85,7	14,3	91,4	8,6
23C2	Usaría “elegir una operación”	62,5	37,5	76,3	23,7
23D	Conozco “usar un diagrama”	64,3	35,7	80,6	19,4
23D2	Usaría “usar un diagrama”	69,6	30,4	83,9	16,1
23E	Conozco “hacer un dibujo”	98,2	1,8	100	0
23E2	Usaría “hacer un dibujo”	94,6	5,4	98,9	1,1
23F	Conozco “estimar”	91,1	8,9	97,8	2,2
23F2	Usaría “estimar”	64,3	35,7	82,8	17,2
23G	Conozco “buscar un patrón”	76,8	23,2	92,5	7,5
23G2	Usaría “buscar un patrón”	62,5	37,5	82,8	17,2
23H	Conozco “hacer un gráfico”	96,4	3,6	98,9	1,1
23H2	Usaría “hacer un gráfico”	87,5	12,5	93,5	6,5
23I	Conozco “usar material concreto”	98,2	1,8	100	0

Tabla 27. *Porcentajes de respuestas relativas a la resolución de problemas como tarea escolar*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
23I2	Usaría “usar material concreto”	100	0	100	0
23J	Conozco “construir una tabla”	98,2	1,8	98,9	1,1
23J2	Usaría “construir una tabla”	96,4	3,6	98,9	1,1
23K	Conozco “buscar un problema más simple”	87,5	12,5	92,5	7,5
23K2	Usaría “buscar un problema más simple”	66,1	33,9	84,9	15,1
23L	Conozco “resolver un problema equivalente”	91,1	8,9	97,8	2,2
23L2	Usaría “resolver un problema equivalente”	89,3	10,7	87,1	12,9
23M	Conozco “ensayo y error”	85,7	14,3	92,5	7,5
23M2	Usaría “ensayo y error”	66,1	33,9	83,9	16,1
23N	Conozco “eliminar posibilidades”	89,3	10,7	96,8	3,2
23N2	Usaría “eliminar posibilidades”	82,1	17,9	87,1	12,9
23Ñ	Conozco “usar un modelo”	75	25	88,2	11,8
23Ñ2	Usaría “usar un modelo”	58,9	41,1	83,9	16,1
23O	Conozco “dividir el problema en partes más simples”	94,6	5,4	100	0
23O2	Usaría “dividir el problema en partes más simples”	91,1	8,9	96,8	3,2
23P	Conozco “trabajar hacía atrás”	26,8	73,2	58,1	41,9
23P2	Usaría “trabajar hacía atrás”	30,4	69,6	44,1	55,9
Modelos de resolución					
24	El proceso de resolución es cíclico y flexible	78,6	21,4	63,4	36,6
25	El proceso de resolución es lineal y no se debe saltar fases	78,6	21,4	88,2	11,8
26	El proceso de resolución es cíclico y permite retrocesos	14,3	85,7	19,4	80,6
27	El proceso de resolución es lineal debido a que se avanza a la solución	51,8	48,2	48,4	51,6
Invención de problemas					

Tabla 27. *Porcentajes de respuestas relativas a la resolución de problemas como tarea escolar*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
28	Los estudiantes deben inventar problemas	80,4	19,6	84,9	15,1
29	Solo el profesor debe inventar problemas	5,4	94,6	6,5	93,5
30	Inventar problemas confunde a los estudiantes	10,7	89,3	4,3	95,7
31	Inventar problemas ayuda al aprendizaje	98,2	1,8	100	0
32	Inventar problemas fomenta la creatividad	100	0	98,9	1,1
33	La invención de problemas puede ocurrir en distintos momentos del proceso de resolución	82,1	17,9	80,6	19,4
34	Inventar problemas fomenta estrategias erróneas	33,9	66,1	24,7	75,3
35	Inventar problemas es reformular problemas dados	32,1	67,9	35,5	64,5
36	Inventar problemas es plantear uno nuevo sin condiciones	39,3	60,7	57	43

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Grupo 4º año

En relación con el primer tema, es decir, la selección de problemas, más del 90% de los participantes de este grupo responden de acuerdo a las características que la literatura ha indicado como buenos problemas. Por ejemplo, que un problema ha de explorar y el desarrollar ideas matemáticas u ofrecer diferentes niveles de soluciones. Sin embargo, casi la mitad de ellos considera que un criterio adecuado es que los problemas tengan una respuesta corta y directa.

Respecto a las estrategias, existe un alto reconocimiento y potencial de uso. Más del 90% de los participantes identifican y usarían estrategias como revisar la razonabilidad del resultado o construir una tabla. Sin embargo, estrategias tales como hacer un diagrama, estimar, buscar un patrón, usar un modelo o buscar un problema más simple presentan aproximadamente 60% de reconocimiento y/o posible uso.

En las respuestas sobre los modelos de resolución, un 78,6% de este grupo considera que el proceso es cíclico y no estructurado en el sentido de que permite omitir pasos o admite retrocesos. No obstante, el mismo porcentaje de los participantes responde positivamente al preguntarles si el proceso es lineal y no permite omitir pasos.

Finalmente, con respecto la invención de problemas, entre el 80% y el 90% de los participantes identifican sus características. En estas respuestas, el porcentaje más bajo es obtenido por el ítem que indica que la invención del problemas no promueve las estrategias de error. Por otro lado, este grupo tiene dificultades para caracterizar la invención de problemas, ya que solo un tercio de ellos responde que la invención de problemas puede ser una reformulación de un problema dado o un problema nuevo sin condiciones.

Grupo 4º año con formación adicional

En relación con el primer tema, es decir, la selección de problemas, los participantes en este grupo han respondido de manera similar al grupo de 4º año. El 91,1% de los participantes responde que un aspecto importante es la consideración de una estructura generalizable y un 98,2% que debe poseer contexto. Sin embargo, casi la mitad de ellos considera que un criterio adecuado es que los problemas tengan una respuesta corta y directa.

Respecto a las estrategias, existe mayor reconocimiento y uso potencial que el grupo de 4º año. Específicamente sobre identificación, solo tres estrategias obtuvieron porcentajes bajo el 80%. Estas fueron: dramatizar, usar una operación y trabajar hacia atrás, presentando entre el 60 y el 75% de reconocimiento. Sobre el posible uso que darían en sus futuras clases, dramatizar obtiene un 78,6% de respuestas positivas, mientras que trabajar hacia atrás y usar una operación, obtienen menos del 40% cada una.

Sobre los posibles modelos del proceso de resolución, este grupo presenta las mismas contradicciones que el grupo anterior. El 84,9% afirma que el proceso es cíclico y que permite volver a lo que se ha hecho, pero al mismo tiempo el 88,2% responde que el proceso es lineal y que los pasos no se pueden omitir. Finalmente, con respecto a la invención de problemas, entre el 80% y el 90% de los participantes identifican sus características, donde el porcentaje más bajo obtenido indica que la invención de problemas promueve estrategias incorrectas. Al igual que el grupo de 4º año, los participantes en este grupo no tienen claridad sobre en qué consiste inventar problemas. Así, solo un tercio de ellos responde que plantear problemas puede ser una reformulación de un problema dado, y dos tercios responden que inventar problemas puede ser plantear un problema nuevo sin ninguna condición previa.

Factores no cognitivos

Este tema aborda el conocimiento de los participantes sobre los factores no cognitivos que influencian las acciones en el aprendizaje de la resolución de problemas, tanto de docente como de estudiantes. El análisis del agrupamiento señala que el conocimiento es bastante homogéneo en ambos grupos. Solo tres respuestas de cada grupo están ubicadas en dimensiones diferentes al acuerdo. La tabla 24 proporciona un resumen de los resultados del cuestionario relativos a este componente.

Tabla 28. *Porcentajes de respuesta relativas a los factores no cognitivos*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
37	Es mejor que los estudiantes descubran cómo resolver un problema por su propia cuenta sin ayuda del profesor.	60.7	39.3	66.7	33.3
38	Los estudiantes deben saber que lo más importante es obtener la respuesta correcta a un problema.	5.4	94.6	4.3	95.7
39	Los estudiantes tienen que asumir que los problemas tienen una sola respuesta correcta.	10,7	89,3	10,8	89,2
40	Una vez que los estudiantes han resuelto el problema, deben conocer todas las respuestas correctas a los problemas.	89,3	10,7	90,3	9,7
41	Los estudiantes que resuelven problemas de diferentes maneras terminan confundiéndose.	14,3	85,7	96,8	3,2
42	Los estudiantes deben utilizar *palabras claves* (agregar, regalar, veces, etc.) para resolver problemas aritméticos.	66,1	33,9	73,1	26,9
43	Es más importante que los estudiantes practiquen los cálculos sin contexto, a que los utilicen para resolver problemas aritméticos.	8,9	91,1	14	86
44	Los estudiantes solo deben resolver problemas una vez que se haya enseñado el concepto matemático.	33,9	66,1	14	86
45	Los estudiantes deben resolver los problemas lo más rápidamente posible.	3,6	96,4	1,1	98,9

Tabla 28. *Porcentajes de respuesta relativas a los factores no cognitivos*

Ítem		G4º (N=56) SÍ	G4º (N=56) NO	G4ºA (N=93) SÍ	G4ºA (N=93) NO
46	Es conveniente que el profesor solo utilice problemas después de enseñar los conceptos matemáticos.	35,7	64,3	11,8	88,.2
47	Para aprender a resolver problemas se debe practicar sistemáticamente.	58,9	41,1	67,7	32,3

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Grupo 4º año

Para este tema, los participantes muestran un conocimiento confuso sobre las creencias que promueven un aprendizaje adecuado de la resolución de problemas de los estudiantes. Por un lado encontramos que alrededor de un 90% afirma que encontrar la respuesta no es el objetivo prioritario de resolver un problema, o que los estudiantes deben conocer todas las formas para llegar a su solución. Por otro, solo dos tercios responden que los estudiantes deben resolver los problemas por sí solos. Además, solo hay un tercio de los participantes que afirma que la enseñanza de palabras clave en el contexto de los problemas aritmético verbales puede ser contraproducente o que los problemas deben resolverse solo una vez que se han aprendido los conceptos.

Grupo 4º año con formación adicional

Al igual que el grupo de 4º año, los participantes muestran respuestas contradictorias en relación a los factores no cognitivos. Particularmente, más del 90% acepta ideas tales como que los estudiantes no deben creer que solo hay una respuesta correcta o que es recomendable conocer todas las respuestas posibles a un problema. Pero al mismo tiempo, un 98,6% considera que resolver problemas con diferentes estrategias confunde a los estudiantes o el 73,1% de los participantes indica que los estudiantes deben aprender palabras clave para resolver problemas de aritméticos.

Enseñanza de la resolución de problemas

La tabla 25 proporciona un resumen de los resultados en relación al conocimiento de los participantes sobre la enseñanza de la resolución de problemas. Este apartado se organiza en función de los cinco conocimientos relativos a este componente: enfoques de enseñanza, discurso, bloqueo, evaluación y recursos. Estos conocimientos también se utilizan para describir los hallazgos de cada grupo de participantes y para compararlos.

Tabla 29. *Porcentajes de respuestas relativas a la enseñanza de la resolución de problemas*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
Enfoques de enseñanza					
1	El foco de discusión debe estar en la respuesta del problema	96,4	3,6	0	100
2	Estudiantes deben explorar los problemas	100	0	100	0
3	Estudiantes deben aprender los conceptos y luego resolver problemas	48,2	51,8	40,9	59,1
4	El foco de discusión debe estar en el proceso de resolución	87,5	12,5	92,5	7,5
5	Profesor debe mostrar cómo resolver cada problema	82,1	17,9	77,4	22,6
6	Profesor debe enseñar fases y estrategias	50	50	38,7	61,3
7	El foco de discusión debe estar en las matemáticas implicadas en los problemas	58,9	41,1	64,5	35,5
8	La clase debe comenzar con un problema, el estudiante debe explorarlo, y el profesor ofrecer mediación	85,7	14,3	97,8	2,2
9	El profesor debe explicar qué hacer con los problemas y el estudiante escuchar para luego resolver	32,1	67,9	30,1	69,9
10	Enseñar primero los conceptos matemáticos, para después aplicarlos al resolver problemas	62,5	37,5	50,5	49,5
11	Enseñar estrategias o fases que potencien la habilidad de los estudiantes para resolver problemas	92,9	7,1	100	0
12	Enseñar un concepto matemático a partir de la resolución de un problema.	82,1	17,9	89,2	10,8
Discurso					

Tabla 29. *Porcentajes de respuestas relativas a la enseñanza de la resolución de problemas*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
13	Fomentar el uso de diferentes estrategias de solución	100	0	100	0
14	Poner a disposición de los estudiantes un solucionario con las respuestas	30,4	69,6	22,6	77,4
15	Discusión de las estrategias usadas por los estudiantes	100	0	98,9	1,1
16	Pedir a los estudiantes que argumenten y reflexionen sobre sus respuestas y las matemáticas implicadas en el problema	100	0	100	0
17	Dar por terminado el problema una vez que se encuentra la respuesta	5,4	94,6	10,8	89,3
18	Conducir la discusión hacia cómo se resolvió el problema o qué procedimiento se usó	98,2	1,8	100	0
19	Pedir que los problemas se resuelvan rápidamente	0	100	1,1	98,9
20	Proponer problemas de fácil resolución	21,4	78,6	28	72
21	Mostrar a los estudiantes las estrategias que resuelven los problemas	80,4	19,6	75,3	24,7
22	Fomentar que la clase indique su acuerdo o desacuerdo con las soluciones de sus compañeros, justificando	98,2	1,8	98,9	1,1
Bloqueo					
23	Si hay error en un cálculo, pedir se relea el problema hasta comprenderlo	75	25	72	28
24	Identificar si el error está en la comprensión o en el cálculo	98,2	1,8	100	0
25	Sugerir representaciones alternativas para comprender	96,4	3,6	96,8	3,2
26	Sugerir estrategias alternativas para errores en la actuación del plan	92,9	7,1	94,6	5,4
27	Dar la respuesta para que no fomentar frustración	14,3	85,7	16,1	83,9
28	Pedir que represente el problema de una manera diferente	78,6	21,4	66,7	33,3
29	Sugerir que cambie su estrategia de solución	53,6	46,4	38,7	61,3

Tabla 29. *Porcentajes de respuestas relativas a la enseñanza de la resolución de problemas*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
30	Hacer preguntas sobre cómo realizó los cálculos	91,1	8,9	97,8	2,2
Evaluación					
31	Evaluar comprensión de condiciones y variables en el problema	94,6	5,4	95,7	4,3
32	Evaluar organización y representación de la información del problema	92,9	7,1	95,7	4,3
33	Evaluar el plan de acción	91,1	8,9	93,5	6,5
34	Evaluar la habilidad de monitorear y evaluar el propio pensamiento	94,6	5,4	93,5	6,5
35	Evaluar la selección y uso de estrategias	100	0	97,8	2,2
36	Evaluar actitudes y creencias beneficiosas	89,3	10,7	86	14
37	Evaluar la comunicación y justificación del resultado	94,6	5,4	96,8	3,2
38	Evaluar el conocimiento matemático relacionado	98,2	1,8	92,5	7,5
39	Evaluar la habilidad de encontrar la respuesta	80,4	19,6	78,5	21,5
40	Evaluar la resolución rápida del problema	14,3	85,7	14	86
41	Evaluar la limpieza y orden	82,1	17,9	81,7	18,3
42	Evaluar el uso de palabras clave	87,5	12,5	79,6	20,4
43	Evaluar el revisión de la respuesta	94,6	5,4	95,7	4,3
44	Evaluar el uso de solo representaciones simbólicas	25	75	17,2	82,8
45	Evaluar la perseverancia	98,2	1,8	95,7	4,3
46	Evaluar la confianza y seguridad	78,6	21,4	94,6	5,4
47A	Observación	98,2	1,8	82,8	17,2
47B	Entrevistas personales	75	25	63,4	36,6
47C	Autoinformes	83,9	16,1	79,6	20,4
47D	Invención de problemas	82,1	17,9	91,4	8,6
47E	Respuestas escritas de resolución de problemas	92,9	7,1	75,3	24,7

Tabla 29. *Porcentajes de respuestas relativas a la enseñanza de la resolución de problemas*

		G4º (N=56)		G4ºA (N=93)	
Ítem		SÍ	NO	SÍ	NO
47F	Pruebas de selección múltiple	51,8	48,2	52,7	47,3
47G	Pruebas de completar	30,4	69,6	37,6	62,4
Recursos					
48A	Usar material concreto ayuda a escribir operaciones que aparezcan en el problema	69,6	30,4	73,1	26,9
48B	Usar material concreto ayuda a visualizar y manipular relaciones implicados en el problema	98,2	1,8	98,9	1,1
48C	Usar material concreto no es necesario	10,7	89,3	1,1	98,9
49	Usar solo un tipo de representación	10,7	89,3	4,3	95,7
50	Usar solo representaciones simbólicas	10,7	89,3	16,1	83,9
51	Usar representaciones para comunicar resultados	87,5	12,5	95,7	4,3
52	Representaciones muestran el pensamiento de los estudiantes	98,2	1,8	96,8	3,2
53	Promover representaciones solo con estudiantes pequeños	41,1	58,9	31,2	68,8
54	Usar representaciones para la fase de comprensión	67,9	32,1	61,3	38,7
55	Usar representaciones durante todo el proceso	91,1	8,9	95,7	4,3
56	Fomentar el uso de representaciones para tránsito entre sus tipos	100	0	97,8	2,2
57	Promover representaciones propias de estudiantes	92,9	7,1	92,5	7,5
58	Fomentar el uso de más de un tipo de presentación al resolver	98,2	1,8	97,8	2,2

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

Grupo 4º año

Como se señaló anteriormente, las respuestas de este grupo están ubicadas en dos dimensiones, pero principalmente en la dimensión de acuerdo. Esto sugiere que el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza es común para este grupo. No obstante, en este conocimiento coexisten ideas que pueden impedir que se traslade a la práctica, principalmente en el conocimiento de los enfoques de enseñanza y la evaluación de la resolución de problemas.

Enfoques

Sobre los enfoques de enseñanza de la resolución de problemas, los participantes muestran conocimientos dudosos y contradictorios. Entre ellas, solo la mitad del grupo señala que las fases y estrategias deben enseñarse. Al mismo tiempo, cuando se le preguntó sobre el enfoque de la enseñanza sobre la resolución de problemas, más del 90% está de acuerdo en que es adecuado en la enseñanza. Además, aunque más del 80% acepta un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, sus respuestas a ideas como que los maestros deben explicar cómo resolver todos los problemas obtienen más del 80% de las respuestas positivas. Del mismo modo, más del 40% no considera apropiado discutir los conceptos matemáticos involucrados en los problemas.

Discurso

Para este tema, más del 80% de los participantes reconocen las acciones que permitirían un discurso adecuado para alentar la enseñanza de la resolución de problemas. Todos los participantes aceptan que fomentar el uso de diferentes estrategias, discutir estrategias utilizadas por los estudiantes o discutir y reflexionar sobre el proceso de resolución son acciones adecuadas. Sin embargo, más del 80% indica la necesidad de que los maestros siempre deben enseñar estrategias que resuelvan los problemas antes que los estudiantes se enfrenten a ellos.

Bloqueo

Sobre el bloqueo de los estudiantes, casi todos los participantes (98,2%) indican que el maestro debe identificar el error antes de sugerir ayuda. Además, más del 90% reconoce la necesidad de proponer representaciones alternativas para superar el bloqueo en la comprensión o estrategias alternativas para superar el bloqueo en la implementación del plan. Sin embargo, sus respuestas a un ejemplo concreto (ítems 28 a 30 en la tabla 25) sugieren que, a pesar de saber dónde se encuentra el error, no tienen claras las acciones que deben tomar para ayudar al estudiante a superar el bloqueo. Así, cuando se les pide que elijan una acción adecuada para un estudiante que entendió el problema, pero cometió un error en un cálculo, casi el 80% indica que se les debe pedir que vuelvan a leer el problema nuevamente hasta que lo entiendan y solo un poco más de la mitad indica que sería mejor sugerir un cambio de estrategia para superar el error.

Evaluación

Para este tema, los participantes manifiestan dificultades identificando criterios de evaluación. Si bien, este grupo manifiesta conocimiento sobre una amplia gama de criterios, como que el 90% está de acuerdo con evaluar las acciones de los estudiantes relacionadas con cada fase; existen indicios de que socavarían el desarrollo de la competencia para resolver problemas de sus estudiantes. Entre ellas que, la evaluación de ser capaz de identificar palabras clave en problemas aritméticos (87,5%) o la limpieza y pulcritud de su trabajo de resolución (82,1%). Con respecto a los instrumentos, las respuestas de más de tres cuartos de los participantes indican que prefieren instrumentos abiertos, en los que los estudiantes pueden mostrar su proceso de resolución. Concretamente, la entrevista personal estructurada obtiene un 75% de reconocimiento, frente a casi un tercio del uso de una prueba de llenar espacios en blanco.

Recursos

Sobre recursos, los participantes del grupo de 4º año presentan ideas contradictorias sobre su uso e importancia en la enseñanza de la resolución de problemas. Con respecto a las representaciones (específicamente pictóricas), un 91,1% responde que debería promoverse a lo largo de todo el proceso de resolución. Sin embargo, al mismo tiempo, casi tres cuartos indican que debería focalizarse en la fase de comprensión. Algo similar ocurre con los materiales manipulativos. Más del 90% este grupo indica que son necesarios y ayuda a los estudiantes a visualizar y manejar relaciones matemáticas, pero también casi el 70% indica que ayudarán a los estudiantes a escribir sus cálculos de manera ordenada.

Grupo 4º año con formación adicional

Como el grupo de 4º año, las respuestas de este grupo están ubicadas en las dos dimensiones, aunque con mayor presencia en la dimensión acuerdo. Esto sugiere que el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza de la resolución de problemas es común para este grupo, pero también coexisten ideas que pueden impedir que ese conocimiento se plasme en la práctica docente. Específicamente, el conocimiento sobre los enfoques de enseñanza y los recursos muestran mayores diferencias.

Enfoques

Al igual que el grupo de 4º año, los participantes presentan ideas contradictorias sobre los enfoques de enseñanza. Específicamente, todos los participantes señalan que un enfoque de enseñanza sobre la resolución de problemas es adecuado; y aproximadamente el 80% sostuvo lo mismo sobre el enfoque de la enseñanza a través de la resolución de problemas; o aproximadamente la mitad señala que un enfoque de enseñanza para la resolución de problemas es adecuado. No obstante, solo el 38,7% afirma que las estrategias y fases deben enseñarse. Así mismo, dos tercios manifiestan que el enfoque de la clase deben ser los conceptos matemáticos involucrados en la resolución; o también que (poco menos del 80%) el profesor debe ejemplificar todos los problemas antes de que los alumnos resuelvan. En este sentido, las respuestas sugieren que no hay claridad acerca de las implicaciones de cualquiera de los enfoques.

Discurso

Entre el 80% y el 100% de las respuestas de los participantes tienen un reconocimiento acerca de las acciones que permitirían un discurso adecuado para fomentar la resolución de problemas. Entre ellas, todos los participantes acuerdan promover el uso de diferentes estrategias, dirigir la discusión al proceso de resolución o discutir y reflexionar sobre lo realizado. Sin embargo, tres cuartos indican la necesidad de que los maestros siempre deben enseñar estrategias que resuelvan problemas.

Bloqueo

En relación al bloqueo de los estudiantes, todos los participantes indican que el profesor debe identificar el error antes de sugerir ayuda. Además, más del 90% reconoce la necesidad de proponer representaciones alternativas para superar el bloqueo en la comprensión o estrategias alternativas para superar el bloqueo en la implementación del plan. Sin embargo, sus respuestas a un ejemplo concreto (ítems 28 a 30 en la tabla 25) sugiere que, a pesar de identificar dónde se encuentra el error, no existe claridad en las acciones que se deben tomar para acompañar al estudiante a superar el bloqueo. Así, cuando se les pide que elijan una ayuda para un estudiante que entendió el problema pero cometió un error en un cálculo, casi dos tercios indican que se les debe pedir que vuelvan a leer el problema nuevamente hasta que lo entiendan y menos del 40% indica que sería mejor sugerir un cambio de estrategia para superar el error.

Evaluación

Los participantes del grupo de 4º año con formación adicional muestran dificultades para identificar criterios de evaluación. Como el grupo de 4º año, estos participantes manifiestan conocimiento sobre una amplia gama de criterios. Concretamente, más del 90% está de acuerdo con evaluar las diferentes acciones de los estudiantes relacionada con cada fase. No obstante, al mismo tiempo, existen varias respuestas postivas a criterios que irían en desmedro del desarrollo de la competencia para resolver problemas que reciben altos porcentajes de acuerdo positivo. Entre ellos, la evaluación de que los estudiantes sean capaces de identificar palabras clave en problemas aritméticos (79,6%) o la limpieza y pulcritud de su trabajo al resolver problemas (81,7%). Respecto a los instrumentos, algunos como la observación, los autoinformes y la invención de problemas, obtienen más del 80% de aprobación. Por otro lado, menos de tres cuartos indican las entrevistas personales o respuestas de resoluciones de problemas de los estudiantes como una técnica de evaluación adecuada. Como el grupo 4º año, este grupo tiene menos respuestas positivas en instrumentos que tienen respuestas cerradas como pruebas de opción múltiple o de pruebas de llenado del espacio en blanco.

Recursos

El grupo de 4º año con formación adicional presenta algunas ideas contradictorias con respecto a los recursos. Acerca de los materiales concretos, casi el 100% responde que son necesarios y ayudan a visualizar y manejar relaciones matemáticas. Al mismo tiempo, señalan que ayudan a escribir los cálculos de manera ordenada. En cuanto a las representaciones pictóricas, el 95,7% de los participantes de este grupo respondieron que deberían promoverse a lo largo del proceso de resolución, pero al preguntar si solo deberían centrarse en la fase de comprensión, casi dos tercios responden afirmativamente.

Discusión

Los resultados relativos al aprendizaje muestran que ambos grupos obtienen numerosas respuestas alineadas con las recomendaciones de la literatura (e.g. Lester y Cai, 2016). Concretamente, los futuros profesores manifiestan conocimientos adecuados sobre las características de los resolutores exitosos, los criterios de selección de problemas, la importancia de la invención de problemas, entre otros. Sin embargo, los conocimientos relacionados con la resolución de problemas como una tarea escolar y los factores no cognitivos son los más conflictivos. Por un lado, las estrategias que declararon menos conocidas o que no usarían, son aquellas que se han relacionado con procesos de resolución auténticos (Mason et al., 2010). Asimismo, existen contradicciones relacionadas con la comprensión del proceso de resolución como lineal o cíclico. Esto sugiere una comprensión bastante tradicional de la resolución de problema, que podría convertirse en un enfoque basado en la heurística de Pólya (Chapman, 2017). En este enfoque, la resolución de problemas es entendida y puesta en práctica como un proceso lineal y sin problematizar las tareas.

Asimismo, los resultados sobre los factores que influyen en la resolución de problemas sugieren que no existe una conciencia de las implicancias de sus propias creencias en el aprendizaje de los estudiantes. Se ha señalado que la estrategia de palabras claves suele estar presente en clases donde los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas y en las que los profesores mantienen su uso a pesar de no tener resultados exitosos (Jonassen, 2003). Sin embargo, esta es una idea aceptada por bastantes participantes.

Por otro lado, las principales diferencias observadas en el agrupamiento de las respuestas las encontramos en el aprendizaje de resolución de problemas. En las ideas relativas a este tópico, el grupo 4º año manifiesta más respuestas en las dimensiones de duda y contradicción que el grupo de 4º año con formación adicional, específicamente en el conocimiento de las estrategias. Este resultado puede ser una consecuencia de las dificultades que presentan los futuros profesores españoles en su propia competencia para resolver problemas y el conocimiento matemático asociado (Nortes y Nortes, 2016). Este hecho indicaría que el conocimiento del proceso de resolver un problema influye principalmente en la comprensión pedagógica del proceso y las creencias, pero menos en las características de los resolutores, selección e invención de problemas. No obstante, esta disociación entre lo que entienden por problema y aspectos de su enseñanza también ha sido observada por Andrews y Xenofontos (2015).

Del mismo modo, la formación adicional recibida por el grupo de 4º año con formación adicional no tiene un efecto suficiente. Esto debido a que la variación de los porcentajes, en su mayor parte, es de aproximadamente el 20% (con la excepción de dos respuestas). Estas dos respuestas están ubicadas en los temas que muestran la mayor dificultad: estrategias y factores no cognitivos en la sección de aprendizaje, lo que confirma que este conocimiento es el más complejo para los futuros profesores.

Con respecto a los resultados del cuestionario sobre enseñanza de la resolución de problemas, encontramos resultados similares. Sobre el conocimiento de los enfoques de enseñanza, los hallazgos muestran que los futuros profesores tienen conocimiento relacionado con los tres enfoques (para, sobre y sobre), reconociendo a cada uno y algunas de sus características. Como señalan algunos autores (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; Chapman, 2017; Schroeder y Lester, 1989), es improductivo argumentar a favor de uno u otro, pues en la realidad del aula se superponen. Sin embargo, las respuestas del grupo de 4º año muestran una mayor cantidad de dudas, específicamente, en preguntas que aluden a las características de los enfoques de para y sobre la resolución. Concretamente, ambos grupos se inclinan a señalar un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas como el *más* apropiado, como lo sugieren algunos autores (Lester y Cai, 2016; Son y Lee, 2016). Sin embargo, las acciones centrales en este enfoque, como la discusión de conceptos matemáticos imbricados en los problemas no presentan altos niveles de respuesta positiva, a diferencia de otras ideas como ejemplificar la resolución de cada problema antes de que los estudiantes los enfrenten. Es decir, los futuros profesores responden positivamente a las ideas expuestas de manera general, que podrían responderse desde el sentido común. No obstante, en sus respuestas a ideas específicas o en las que se les pide que indiquen una acción concreta, surgen ideas contradictorias. Este hecho se refleja en al menos un caso en todos los componentes que identificamos en nuestro análisis de las pautas curriculares oficiales, pero se acentúa en aquellos relacionados con los enfoques de enseñanza.

Este último hecho, sugiere que el conocimiento de los futuros profesores no tiene una estructura que los organice. Esto se debe a que cada enfoque podría asociarse con la gestión específica del discurso, el bloqueo, la evaluación y los recursos (e.g. Chapman, 2017). Sin embargo, al carecer de esta estructura, los conocimientos no tendrán un eje conductor común para comprender las consecuencias de sus acciones.

Del mismo modo, la formación adicional recibida por el grupo de 4º año con formación adicional tampoco tendría un efecto suficiente en este conocimiento. Esto debido a que la variación de los porcentajes, en su mayor parte, es aproximadamente del 15% para las respuestas sobre enseñanza (con la excepción de una respuesta). Esta respuesta está ubicada en el tema con la mayor dificultad: los enfoques de enseñanza, confirmando que este conocimiento es el más complejo para los futuros maestros.

Capítulo 7

Profundización en el conocimiento sobre resolución de problemas: Entrevistas

En el último capítulo de resultados, describimos los hallazgos relativos a las razones subyacentes en las respuestas que se mostraron conflictivas en los cuestionarios. En esta última fase de la investigación, mediante un análisis clúster seleccionamos un grupo de estudiantes que finalizaban el Grado de Magisterio y que habían respondido a nuestros cuestionarios. A cada uno de ellos se le realizó una entrevista en profundidad para aclarar sus respuestas al cuestionario. Los hallazgos son presentados en tres apartados: uno referido a la caracterización de problema, el proceso de resolución y la disposición. Finalizamos el capítulo con una discusión de los resultados.

Con el objeto de indagar en los resultados obtenidos con los cuestionarios y tratar de entenderlos con más detalle hemos realizado entrevistas individualizadas a estudiantes que se encuentran en el tramo final de sus estudios de grado. Los hallazgos que se desprenden de las entrevistas permiten profundizar en el conocimiento de los futuros profesores sobre los problemas y la resolución de problemas. En particular, nos centramos en las ideas conflictivas sobre la caracterización de un problema y el proceso de resolución que surgieron en las respuestas a los cuestionarios.

El criterio de selección de los entrevistados se basó en el análisis clúster (Anexo 4) realizado a las respuestas de los cuestionarios explicado en capítulo de metodología. En los grupos que emergieron para cada componente, los participantes de cada formación se distribuyeron de forma similar. Es decir, la formación recibida podría no ser un factor a la que pueda atribuirse las diferencias en el conocimiento sobre caracterización de problema, resolución y disposición de manera general para todos los participantes. Por este motivo, los resultados se han organizado sin tener en consideración el grupo, sino el componente y sus conocimientos asociados. Esto con el fin de profundizar en las razones subyacentes a las respuestas, que puedan explicar los resultados de los cuestionarios.

La tabla 26 muestra el perfil, el grupo y la cantidad de participantes. La tabla debe leerse observando la primera fila de datos, en la que encontramos a 56 participantes que se han ubicado en el perfil A1 sobre caracterización de problema, en el B1 en la resolución de problemas y en C1 en disposición. Además, todos ellos estaban en grupos finales avanzados. Lo mismo sucede con los perfiles restantes. Esto sería un indicativo de que la formación incide en el conocimiento de los tres componentes en su conjunto, que presentan los futuros profesores de manera individual. Con esto queremos decir que si bien los participantes que se ubicaron en los perfiles A1 corresponden a futuros profesores de ambos grupos; al ser caracterizados de acuerdo a sus perfiles en cada componente (caracterización de problema, proceso de resolución y disposición), se han agrupado de acuerdo a la formación recibida (grupo de 4º año o grupo de 4º año con formación adicional). Al escapar a los objetivos de esta investigación, no hemos continuado explorando este resultado pero se hace necesario una profundización.

Tabla 30. *Perfiles de los entrevistados*

Participante	Conocimiento del proceso							Grupo
	Caracterización de problema		Proceso de resolución		Disposición			
	A1	A2	B1	B2	C1	C2	C3	
56	X		X		X			G4ºA
12	X		X			X		G4º
1	X		X				X	G4ºA
9	X			X	X			G4º
3	X			X		X		G4ºA
2	X			X			X	G4º
42		X	X		X			G4ºA
8		X	X			X		G4º
2		X	X				X	G4ºA
3		X		X	X			G4º

Nota: G4º = grupo 4º año; G4ºA = grupo 4º año con formación adicional

De los 10 grupos se entrevistó a un sujeto de cada grupo, a excepción del grupo que presentó un solo participante, pues el futuro profesor no aceptó la invitación. Esto quiere decir que fueron realizadas nueve entrevistas. Además, existe un participante que ha quedado fuera pues el análisis clúster lo ha dejado fuera de los grupos sobre la caracterización de un problema. Al observar sus respuestas al cuestionario de este participante, podemos evidenciar que se debió a que contestó en forma negativa a la casi totalidad de respuestas relativas a la consideración del resolutor y a la de tipos de tareas.

Caracterización de problema

Como se indicó anteriormente, los resultados sobre la caracterización de problema mostraron diferencias entre los dos grupos finales de futuros profesores. Específicamente, en el grupo de 4º año con formación adicional, los resultados mostraron una situación anómala. Concretamente, mientras el curso adicional parecía ayudarles a mantener menos contradicciones, no parecía afectar su visión tradicional de los problemas, que continuaron manteniendo. Estos hallazgos fueron respaldados por las entrevistas, en los casos que exponemos a continuación.

Respecto a la caracterización de los problemas basándose en el procedimiento, existe una dualidad en el pensamiento de los futuros profesores. Esto puede observarse en un participante que señala por una parte:

> yo creo que primeramente tienes que tener, los alumnos tienen que tener unos contenidos adquiridos y luego ya después trabajar esos problemas

Sin embargo, luego continúa

Entrevistado:	En algunas, es verdad que en algunas veces nada más que la lógica se saca, entonces es un poco…
Investigador:	Pero con lógica, tú te refieres a …
Entrevistado:	Con la lógica bueno voy uniendo conceptos de años anteriores o simplemente cosas que son básicas o diarias en la vida

Este extracto es un indicio sobre esta doble vertiente en el conocimiento de los futuros profesores. El primero hace mención a que se deben conocer los procedimientos, pero luego hace alusión a que otros conocimientos previos articularían una solución. En la misma línea, otro entrevistado señala que:

> para una persona que no es aprendiz y no tiene conocimientos previos sobre ese problema, pues no va a poder resolverlo…

Para luego continuar:

> Sí sería un problema, porque no ha tenía experiencia previa con esa situación.

Las respuestas indican que por una parte, los futuros maestros tienen conocimientos sobre el rol que juegan los conocimientos previos. Sin embargo, su conocimiento sobre los problemas se limita a aplicar contenidos en ellos. Esto se observa en fragmentos como:

> Sí claro, porque como tú puedes resolver algo que no… Es… ¿cómo aprendes a correr si no sabes si no sabes andar?, te lo digo… Es como si tú a un niño le dices divídeme esto, pero no le enseñas ni a sumar, ni a restar antes. En un problema le pides que divida y él no sabe ni sumar, ni restar, ni multiplicar. Tiene que tener un proceso

Sobre el papel que juega el resolutor en el etiquetado, las entrevistas muestran respuestas similares. Los entrevistados sitúan el rol de los conocimientos previos por una parte, y por otra los problemas matemáticos. Esto se observa al preguntarles si el resolutor juega un rol en el etiquetado de una tarea como problema, un participante expresa:

> A ver, yo creo que depende del alumno si es un problema o no, porque tú realmente… tú no sabes lo que piensa ese alumno y si es un problema con más dificultad o menos dificultad para ese alumno… Entonces se llaman problemas pero a lo mejor ese problema que está planteado… a lo mejor para ese alumno no es un problema porque lo resuelve muy fácil y, sin embargo, si le cuesta más a lo mejor ya lo considera un problema

Esta respuesta muestra claramente que existe un reconocimiento del papel del resolutor. Podemos observar que la consideración está basada en lo dificultoso que pueda resultar resolver el problema y que esa dificultad depende del resolutor y sus conocimientos. Esto se observa en otros entrevistados que señalan:

> Sí, un problema… el problema tiene que estar adaptado a su edad, a las competencias que tenga el alumnado

No obstante, existe una disociación entre, por una parte, la dificultad que podría causar en el posible resolutor y por otra, los problemas. Por ejemplo:

> a ver, es un problema objetivamente es un problema, no hay más. Pero para él o sea… pienso que no tendría dificultad al resolverlo

Esta disociación podría deberse a que la dificultad a la que los participantes hacen mención no se relaciona con las matemáticas implicadas en el problema, sino con las experiencias previas del resolutor relativas al contexto, pues los participantes señalan que:

> No, tiene que importar la edad, creo para mí. Porque a lo mejor un niño que no ha visto una granja nunca o alguien que no ha tenido la experiencia de eso

La misma idea puede observase en los que otro participante señala:

Investigador:	¿Tú crees que serían problemas lo de los cuadernillos Rubio[5]?
Entrevistado:	Pues no, pienso que no porque no se basan… solo se basa en el contexto escolar sin basarse en situaciones reales de la vida real, es como muy matematizado todo, muy matemático

Además de esta dificultad atribuida al contexto, existe también una idea que la dificultad del problema está en la comprensión del enunciado en cuanto a entendimiento de lo expresado y no en las relaciones matemáticas subyacentes:

> si alguien lo lee y lo entiende a la primera no le va a resultar difícil ni le va a resultar como un problema, no sé, yo lo entiendo así… pero ahora si alguien lo lee y a lo mejor tiene un mal día, no lo entiende, o por lo que sea, no lo llega a asimilar o a entender en ese momento pues a lo mejor si le resulta como… se va como acumulando ese no entenderlo y se le resulta un problema.

[5] En España, los cuadernillos de Rubio son un método famoso de apoyo a los libros de texto convencionales utilizados por los profesores, basados en la repetición ordenada y sistemática de ejercicios con una progresión en dificultad.

No obstante, en cualquiera de los casos, la dificultad no está puesta en los conceptos matemáticos presentes en el problema.

Este papel preponderante dado al contexto está supeditado a su conceptualización de problemas como problemas aritméticos verbales. Esta idea se ve reflejada en la conceptualización de problemas basada en los tipos de tareas y sus características. Los futuros maestros no consideran las tareas rutinarias sin contexto como problemas, pero tampoco reconocen como problemas a las tareas abiertas contextualizadas. Respecto a la tarea *(745.580 + 898.834) : (15.3745 x 8.203)* un participante responde:

> Para mí el primero no es un problema puesto que no hay una situación en la que el dicente se deba de poner en situación mientras que la B [otra tarea] yo pienso que si es un problema puesto que si esta contextualizada

O también:

> Porque esto está expresado en valor numérico y no esta expresado con un enunciado

Mientras que para la tarea abierta contextualizada, señalan que:

> A ver, yo creo que eso es más una pregunta más un poco diaria o literal, cuantos chuches comen, pero… igual como que se lo estas preguntando tú como profesor se lo podrías estar preguntado yo como amiga a mi compañera, entonces son como típicas situaciones que no ven, que los alumnos no dicen uy esto es un problema de matemática

En esta respuesta se puede inferir la necesidad de estructura. El conocimiento sobre los problemas que poseen los participantes necesita de un marco que contenga una información precisa. Esto se hace evidente en el siguiente fragmento:

Investigador:	La tarea ¿cuántos chuches comen tus compañeros de clases en una semana? ¿es un problema? Tus compañeros respondieron que sí, ¿por qué crees tú que respondieron así?
Entrevistado:	Pero no tienes datos ni…
Investigador:	O sea, para ti no sería un problema…
Entrevistado:	Es que no tiene datos fijos, tendría que… pues a saber tú qué sabes cuantos chuches comen tus compañeros… Entonces tendría que empezar a preguntar… Preguntar, a recoger datos, quizás si es un problema si te dice que tienes que hacer una recogida de datos y hacer la cuenta sí…

Este extracto hace notar que la estructura en la que los futuros profesores piensan al conceptualizar problemas es una estructura aritmética. Dos ejemplos de ellos son las respuestas siguientes; la primera dice:

> Porque sería un conteo, si tú a lo mejor en vez de poner cuántos chuches comen tus compañeros de clases en una semana, vale… realizas el conteo y realiza un cálculo de si es bueno para la salud o no es bueno para la salud, o intervienen otros factores sí, pero contar yo como dos chuches, apuntar todos los días a la semana dos chuches, tres chuches no creo que sea un problema.

Mientras que otro entrevistado señala:

> Si, bueno no parece por el primer momento, sería un proceso de toma de datos y luego cuando acaba la semana y tú tienes todos los datos registrados, pues ya operas, si sería un problema

En ambos casos se observa que los procedimientos de toma y registro de datos, no son considerados válidos para etiquetar un problema. Por tanto, esto sugiere que la identificación de un problema debe considerar una operación aritmética.

Resolución de problemas

En general, los resultados sobre la conceptualización del proceso de resolución muestran pocas diferencias entre el grupo de 1º año y los dos grupos finales. En estos últimos se puede observar una visión lineal sobre el proceso, en el sentido de que la invención de problemas, que podría dar una visión cíclica, no se considera. Además de ello, la identificación de errores en las respuestas hipotéticas de los estudiantes y el reconocimiento de la estrategia de ensayo y error fueron problemáticos para todos los futuros profesores. Estos resultados indicarían su perspectiva lineal sobre el proceso de resolución. Las entrevistas focalizaron sus preguntas sobre estos aspectos, otorgando luz a las razones subyacentes.

Respecto al conocimiento sobre que la invención de problemas no es parte del proceso de resolución, las respuestas de los entrevistados indican que se entienden como entidades separadas, ya que consideran el planteamiento de problemas una actividad diferente. Particularmente un participante señala:

> Yo creo que no, que si no lo pide el ejercicio no es parte de un problema.

Otro entrevistado señala también:

> A ver, en cuanto a la resolución, hacer problemas más similares como tal, no; pero sí que para la adquisición de los conocimientos, sí.

Sus respuestas indican que esta separación se debe a que en su conocimiento, la invención de problemas es considerada una actividad de aprendizaje que ayuda a comprender aspectos en los que hay dificultades. Esto se infiere de respuestas como:

> es aconsejable siempre y cuando al alumno no se le haya quedado claro este problema.

Respecto al conocimiento sobre metacognición en la resolución de un problema, concretamente a la identificación del error y sus causas, una razón es la importancia que conceden a la operación aritmética. Sus respuestas indican que la actividad de resolución gira en torno a algoritmos, de modo que cometer errores en ellos, es lo mismo que no entender el problema, pues señalan que:

> puede ser que no haya comprendido el problema o que lo ha comprendido pero no sabe encontrar la solución.

Sin embargo, la mayoría de los sujetos entrevistados si reconocían el error en la entrevista, culpabilizando al cálculo, como vemos en el la siguiente respuesta:

> Vale, a ver, sabemos que hay error. La opción C, pues sabemos que hay error y no comprendió el problema, yo creo que el problema si lo ha comprendido lo que ha tenido un error de cálculo porque si el primer, la primera parte del problema, que es como lo que va a continuar, lo ha realizado correctamente no es que el alumno no haya comprendido el problema, es que ha tenido un error de cálculo en uno de los apartados que le va a llevar a la solución, entonces si se equivoca en el proceso el resultado va a ser erróneo.

Finalmente, respecto a las respuestas a una solución destinada a ser un ejemplo de la estrategia de ensayo y error, los futuros maestros que mostraron poco reconocimiento tendían a confundirla con las estrategias buscar un patrón o construir una tabla. Las respuestas en las entrevistas hacen notar que las razones a estas respuestas están en que su conocimiento sobre las estrategias es sobre características superficiales de la representación de la solución. Es probable que esto esté relacionado con la poca práctica que tienen con su uso o en una utilización poco revisada, es decir sin reflexionar sobre lo hecho en términos de Pólya (1981). La confusión surge al ver varias respuestas que sugieren ser intentos de respuesta o varias respuestas, entonces se lo asocia con la estrategia, aunque sea una distinta. El siguiente extracto ejemplifica esto:

Entrevistado: Yo creo que le di a buscando un patrón

Investigador: Buscar un patrón, ¿no? Vale, ¿Por qué no hacer una tabla?

Entrevistado: Es que la tabla la hace, pero más bien con…, no sé, como veo el área muchas veces repetidas y veo muchas soluciones diferentes, ¿no?, por eso asocio a buscar un patrón

El siguiente extracto muestra claramente como un participante pasa de focalizar su atención de las características superficiales a mirar qué se responde:

Entrevistado: Yo veo hacer una tabla ahí, no sé. La verdad, que no le veo duda, es una tabla.

Investigador: Vale

Entrevistado: Es que no lo entiendo, si no saben que poner, es que yo veo una tabla.

Investigador: Vale, Vale. Y este otro pasó, más o menos lo mismo, que es este problema, un granjero estaba contando sus… un niño lo respondió esto así, y aquí tus compañeros tampoco supieron cuál era la respuesta correcta. Aquí hizo los cálculos el niño

Entrevistado: Yo sigo viendo una tabla

Investigador: A pesar de que no estén las líneas dices tú

Entrevistado: Un patrón no es

Investigador: Vale

Entrevistado: Ensayo y error, tampoco, porque yo [INAUDIBLE - 16:43] intentar razonar una cosa, ver que no lo has conseguido e intentar hacer otra

Investigador: Vale

Entrevistado: Bueno no, no, es ensayo y error. No te engañes, es ensayo y error porque ha probado varias cosas, dice estas cosas y ha ido viendo si se acerca o no se acerca hasta acá, prueba con la correcta hasta que… ha ido probando y ha visto la correcta

Investigador: Vale

Entrevistado: Es que no me había dado cuenta de esa, no, es ensayo y error. Claro

Investigador: Pero ¿por qué pensaste al comienzo que era una tabla? ¿por las columnas?

Entrevistado: Por las columnas, no pero ahora al verlas, me he ido por ahí, pero ahora al verlas, es que no me he leído esto tampoco, es ensayo y error, tú vas probando hasta que das con los aciertos.

Disposición

La disposición incluye una variedad de acciones productivas hacia la resolución de problemas. En este trabajo, nos centramos en la disposición como la aceptación del desafío de resolver un problema. En este sentido, las respuestas de los futuros maestros sugieren un entendimiento donde la motivación es el desencadenante de la disposición. Así, las respuestas en las entrevistas muestran que tienen claridad sobre el papel de la motivación al señalar que:

Investigador: Entonces, ¿tú crees que se podría resolver un problema con éxito sin estar motivado?

Entrevistado: Se podría resolver si, y estar bien. Pero no…, objetivamente estaría bien, pero luego el niño lo haría sin estar motivado, sin más, sin buscar más allá, sin repasar quizás o buscar otros métodos diferentes de resolver, como hemos dicho.

Nuestros resultados sugieren que los futuros profesores no consideran la motivación como una categoría dentro de la disposición. En este sentido, otorgan una importancia sustancial a la motivación, ya que sería responsable de producir otros aspectos de la disposición. Por ejemplo, un participante señala:

> si tienes experiencia sí puedes resolverlo, pero si no estás motivado como he dicho antes, pues no vas a tener ganas de hacerlo. Un problema que es mucho más amplio que una simple cuenta, si tú no te concentras y te pones a pensar, razonar, a buscar soluciones, investigar no vas a poder resolverlo.

En la misma línea otro señala que:

> Yo pienso que tener… no motivado de uy vamos a hacer un problema pero si no estar desganado, lo que decía, no por nada sino porque si tu estas desganado a la hora de leerlo no lo vas a entender.

Aquí se evidencia que existe un reconocimiento de que el estudiante debe querer resolver el problema, pero no es diferente de la aceptación del desafío.

Discusión

Las entrevistas nos han permitido indagar en las razones que sustentan las respuestas de los cuestionarios. Particularmente, sus conocimientos sobre aspectos relativos a los problemas son los más problemáticos. Específicamente, la consideración del resolutor y del posible procedimiento de resolución. Este resultado concuerda con otros estudios que señalan las dificultades que manifiestan los futuros profesores en su conocimiento al respecto (e.g. Chapman, 1999; Prieto y Valls, 2010). En este sentido, los resultados de nuestro estudio otorgan una posible explicación a por qué los futuros profesores son capaces de identificar e interpretar el pensamiento de estudiantes (Tyminski et al., 2014), pero les dificulta utilizar esa información. Nuestros hallazgos señalan que este no uso del conocimiento podría estar dado por esta no conexión entre lo que consideran problema y sobre el rol que juega el resolutor. Creemos que desde su perspectiva sí están considerando al resolutor, pero a través de aspectos como el contexto en que se sitúa el problema o su capacidad de comprenderlo, apartándose del conocimiento matemático. En este sentido, su conocimiento sobre las características de los problemas no logra conjugarse para hacer coincidir todos los elementos que requiere que una tarea sea un problema.

Por otra parte, la separación entre ideas relativas a la caracterización de problema y resolutor podría explicarse por el tipo de problemas al que se han visto expuesto este grupo de participantes durante su escolaridad. Existe suficiente evidencia para afirmar que las pautas y materiales curriculares tienen influencia en el pensamiento de los futuros profesores (Blanco, 1997; Johar et al., 2017; Xenofontos y Andrews, 2014). En consecuencia, es posible pensar que esta disociación pueda estar afectada por el rol que juegan los problemas en los textos escolares españoles (e.g. Pino y Blanco, 2008). Esto también podría explicar la necesidad de estructura y la importancia otorgada a los problemas aritméticos. Además esta idea podría ser reforzada por la importancia que tienen en el currículo escolares de primaria (NCTM, 2000) y que probablemente han recibido implícitamente durante su formación.

El proceso de resolución no presenta ideas conflictivas, pero sí limitaciones. Una de ellas tiene relación con el carácter lineal de la resolución de problemas. Sin embargo, nuestros resultados indican que la formación tiene un impacto positivo en esto. Por otro lado, este impacto es en términos de reconocimiento debido al conocimiento superficial de las características de las estrategias.

CAPÍTULO 8
CONCLUSIONES

En este capítulo final[6], presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación. Iniciamos su exposición atendiendo a la consecución de los objetivos propuestos en el planteamiento del problema (capítulo 1) y describimos simultáneamente sus principales aportaciones. Seguidamente, reflexionamos y aportamos algunas conclusiones relativas al método utilizado. Finalmente, presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación de esta investigación.

[6] Este capítulo ha sido traducido al inglés para acreditar la mención internacional de esta tesis doctoral. El documento puede encontrarse en el Anexo 5.

RECAPITULACIÓN

La investigación que hemos realizado partió del supuesto de que hay una indeterminación, una laguna en la concreción del conocimiento profesional que deben tener los maestros de educación primaria sobre resolución de problemas y que por tanto deberían adquirir los estudiantes de magisterio en su formación inicial. Desde nuestra perspectiva estos conocimientos les servirán de fundamento a los estudiantes para que en su futuro profesional puedan realizar una enseñanza acorde con los aportes teóricos actuales en resolución de problemas como campo de investigación. Esto requiere un cambio de mentalidad sobre qué son los contenidos curriculares en matemáticas. Tradicionalmente los contenidos curriculares explícitos han sido articulados en torno a temas matemáticos en los que se incluyen conceptos, hechos y procedimientos. Los procesos, como la resolución de problemas, no eran explícitamente un contenido a enseñar, pero si a practicar en cada uno de estos temas. A partir de un momento dado se empieza a pensar en la resolución de problemas como un contenido más, y a proponer que se le incluya en las propuestas curriculares como tal (NCTM, 1989, 2000). Esto cambia la perspectiva, pero muchos de los profesores en activo no entiende el mensaje (Gaulin, 2001) debido a su escaso conocimiento de las nociones teóricas ligadas a la resolución de problemas como campo de investigación.

Una de las cuestiones a la que hay que prestar atención en la formación inicial de profesores, tiene relación con la mejora de los conocimientos apropiados en los docentes para involucrar significativamente a sus estudiantes cuando resuelven problemas. No obstante, si bien la resolución de problemas ha sido extensamente investigada por la comunidad de educadores matemáticos (Lesh y Zawojewski, 2007; Lester y Kehle, 2003; Schoenfeld, 1992; Weber y Leikin, 2016), esta perspectiva del conocimiento del profesor es relativamente nueva. En este sentido, consideramos que este trabajo es un aporte al campo, tanto por sus aportes teóricos como sus implicaciones para la formación de profesores. El primero, a través de un refinamiento de categorías de conocimiento profesional orientado a la resolución de problemas. El segundo, a través de una descripción detallada de las fortalezas y debilidades del conocimiento que sobre el conocimiento que manifiestan futuros profesores, especificando aspectos que potenciar o prestar atención en los planes de formación.

A partir de los anteriores presupuestos y como se expuso en el capítulo 1, la investigación gira en torno a dos preguntas de investigación:

- ¿Qué conocimientos profesionales sobre resolución de problemas de matemáticas se exige en los currículos a los profesores de educación primaria para su enseñanza?
- ¿Qué conocimientos profesionales sobre resolución de problemas de matemáticas manifiestan los profesores de primaria al terminar su formación inicial?

Estas preguntas se han concretizado en dos objetivos generales y cinco específicos asociados. El primero objetivo fue abordado a través de un análisis de pautas curriculares presentado en el capítulo 5. Dicho análisis lo hemos desarrollado en torno a dos objetivos específicos OE1 y OE2. El segundo objetivo general lo hemos concretizado en tres objetivos específicos OE3, OE4 y OE5 y lo hemos desarrollado recogiendo datos en dos momentos distintos empleando dos técnicas de recogida de datos: mediante cuestionario escrito y entrevista individual.

En lo que sigue exponemos las conclusiones en función de los objetivos planteados.

CONCLUSIONES EN RELACIÓN AL PRIMER OBJETIVO GENERAL

El primer objetivo general surgió de la pregunta relativa a qué tipo de conocimiento profesional supone la enseñanza de la resolución de problemas de matemáticas. Dado que el profesor necesita ajustarse a las directrices curriculares oficiales, estas determinan en gran parte los conocimientos que deben poseer los profesores. Por ello, el primer objetivo específico va en la línea de sintetizar las directrices que sobre resolución de problemas se dan en las propuestas curriculares. Así, el primer objetivo plantea:

- OG1. Identificar categorías de conocimiento profesional de profesores de primaria sobre resolución de problemas de matemáticas.

Este objetivo surge como concretización de la primera pregunta de investigación. Para su consecución, lo hemos operativizado a través de dos objetivos específicos. Estos objetivos son abordados mediante un estudio de documentos curriculares que comienza a partir del marco teórico propuesto por Chapman (2012, 2014, 2015).

Conclusiones en relación al objetivo específico 1

- OE1. Determinar el conocimiento profesional sobre la resolución de problemas de matemáticas en normativas curriculares de educación primaria.

Un primer acercamiento fue la identificación de elementos de resolución de problemas en las pautas curriculares (Piñeiro, 2015). En el estudio que presentamos en el capítulo 4, identificamos y discutimos desde una perspectiva curricular y teórica, unas posibles categorías, su organización y estructura. Consideramos necesario este análisis para realizar una profundización en el tópico de esta investigación: el conocimiento profesional sobre resolución de problemas en profesores en formación.

Este primer estudio nos ha permitido solventar en parte, las limitaciones que presentan los modelos de conocimiento del profesor (Foster et al., 2014). Hemos seguido las recomendaciones de Shulman (1996) y de Schoenfeld (2012) para indagar en una propuesta de categorías basado en los constructos teóricos de competencia para resolver problemas y triángulo didáctico (Piñeiro, Castro-Rodríguez, et al., 2019) y especialmente en el marco de Chapman (2012, 2014, 2015). Esta reflexión revela un conocimiento sobre la resolución de problemas y un conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas necesario para la enseñanza de la resolución de problemas. Es importante señalar que a estas dimensiones se debe sumar la propia competencia del profesor para resolver problemas, y por supuesto sus propios factores no cognitivos.

Concretamente, nuestro trabajo hace patente que las directrices curriculares presentan un marcado énfasis en la clasificación de tipos de problemas y en las fases de resolución. Ambos aspectos descritos como conducentes a una aplicación del contenido matemático. En este sentido, ambos conocimientos responden a una mirada utilitaria de las matemáticas, dónde la resolución de problemas es posicionada como un activo para lograr metas. En este contexto, es posible pensar que se ha realizado una mirada ingenua sobre el real significado de los currículos escolares con un enfoque funcional (Rico, 2007).

Otro aspecto tiene que ver con que un documentos curricular en el que se explicite en mayor medida lo que se requiere que los estudiantes aprendan sobre resolución de problemas, no está relacionado con un puntaje alto en la prueba PISA. Si bien existen muchos factores influyen en los resultados de evaluaciones de este tipo, es factible pensar que una mayor autonomía profesional proporciona mejores resultados. En este sentido, identificar los conocimientos necesarios de los docentes relativos a la resolución de problemas es un aporte para el desarrollo profesional de los docentes.

Conclusiones en relación al objetivo específico 2

- OE2. Organizar el conocimiento profesional sobre resolución de problemas de matemáticas utilizando el marco de Chapman (2015).

En la caracterización realizada sobre el conocimiento sobre resolución de problemas y que es mostrada en el capítulo 4, identificamos tres elementos teóricos sobre los problemas y su resolución que deberían formar parte del conocimiento del profesor (ver figura 38). Un primer elemento se relaciona con la (1) caracterización de problema, (2) un segundo con el proceso de resolver un problema y (3) un tercer elemento con aspectos no cognitivos. En segundo lugar, para el conocimiento didáctico, identificamos interacciones que permiten desentrañar elementos de conocimiento del profesor que han sido omitidos por la literatura al caracterizar dicha noción: (1) el estudiante como resolutor, (2) la resolución de problemas como tarea escolar, (3) factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas, y (4) gestión de la enseñanza de la resolución de problemas. Los tres primeros componentes tienen relación con el aprendizaje de la resolución de problemas, mientras que el cuarto es relativo a su enseñanza.

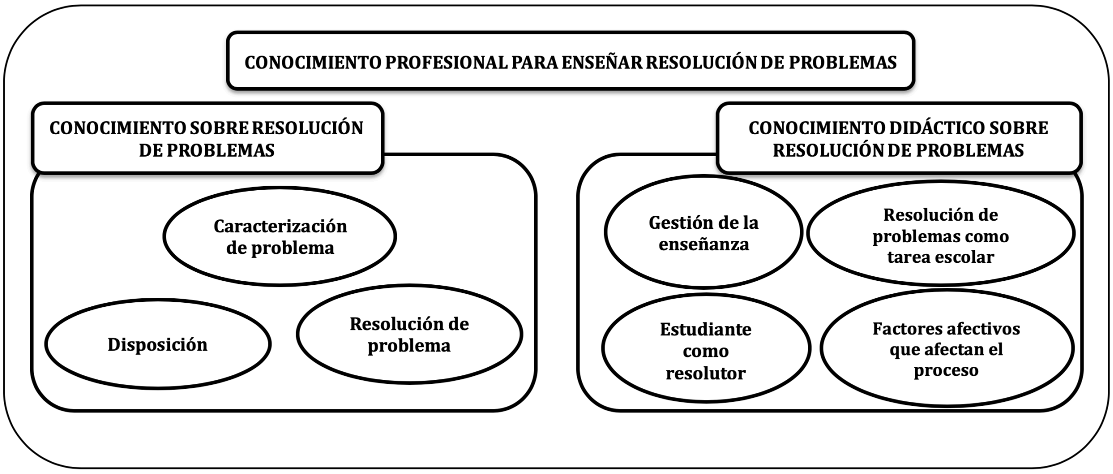


Figura 38. Componentes del conocimiento sobre resolución de problema.

Los componentes del conocimiento de la resolución de problemas que esbozamos aquí, permiten profundizar en aspectos relacionados con la formación del profesorado y que se ha convertido en un imperativo en las sociedades actuales. Particularmente, la calidad del conocimiento y el desarrollo del conocimiento del profesor es una preocupación presente en la formación inicial de profesores, especialmente sobre resolución de problemas (e.g. Blanco et al., 2015). Por tanto, nuestro trabajo supone un aporte en cuanto pone de manifiesto una problemática que merece mayor atención por la comunidad de investigadores en educación matemática.

Particularmente, la investigación que aquí presentamos aporta un refinamiento de los aspectos que Chapman (2012, 2014, 2015) ha propuesto en su modelo de conocimiento. Concretamente, aspectos como la reacomodación de la invención de problemas, la especificación sobre el conocimiento sobre problemas y sobre el proceso de resolución de problemas; o la refinación de conocimientos relativos al aprendizaje (resolutores exitosos, etc.) y la enseñanza (enfoques, etc.); y la incorporación de un meta-conocimiento sobre los factores no cognitivos como un componente del conocimiento del profesor.

Se ha planteado que el conocimiento del profesor puede ser extremadamente específico y sensible al contexto (Kuntze, 2012; Scheiner, 2015). Si bien nuestro trabajo toma una perspectiva particular en el conocimiento del profesor, la intención no es presentar un modelo teórico, sino poner de manifiesto y hacer explícito la preocupación de algunos investigadores sobre las especificidades de los procesos matemáticos como elementos del conocimiento del profesor (Chapman, 2015, Foster et al., 2014; Weber y Leikin, 2016). Realizamos esta acción identificando una serie de categorías que pueden ser de utilidad para investigar el conocimiento del profesor, sin perder de vista su conocimiento sobre resolución de problemas. Creemos que es necesario que aspectos claves, como la identificación de los problemas basadi en los procedimientos, en el resolutor o en sus clasificaciones, sean incorporados a los modelos de conocimientos.

CONCLUSIONES EN RELACIÓN AL SEGUNDO OBJETIVO GENERAL

- OG2. Identificar y caracterizar el conocimiento profesional de profesores de primaria al terminar su formación inicial sobre resolución de problemas de matemáticas.

La segunda pregunta de investigación la hemos operativizado mediante un objetivo general y tres específicos. Estos objetivos los hemos abordado mediante la recogida de datos en dos formas distintas aplicadas secuencialmente: cuestionarios escritos aplicados en gran grupo y realización de entrevistas individuales. Los datos recogidos mediante cuestionarios nos han permitido identificar y caracterizar el conocimiento sobre resolución de problemas y pedagógico sobre resolución de problemas en un grupo de futuros profesores de la Universidad de Granada. Con estos datos abordamos los objetivos específicos 3 y 4. Posteriormente, realizamos un estudio de profundización mediante entrevistas centrado en los aspectos que presentaron conflictos entre los participantes. Con estas entrevistas de profundización, abordamos el objetivo específico 5. Los hallazgos relativos al conocimiento sobre resolución de problemas y pedagógico sobre resolución de problemas, incluidos en los capítulos 6 y 7, tienen implicaciones prácticas en la formación inicial de maestros de primaria que discutiremos en los apartados siguientes. No obstante, algunos resultados generales y los instrumentos desarrollados son herramientas que pueden resultar útil para investigadores del área.

Respecto a los resultados generales, señalar que el conocimiento que poseen los futuros maestros de este estudio es, mayoritariamente, de carácter teórico. El contraste entre este hallazgo y la competencia para resolver problemas exhibida por los futuros maestros al confrontar una actividad de resolución (e.g. Boote y Boote, 2018), y en particular los futuros maestros españoles (e.g. Nortes y Nortes, 2016), plantea la cuestión de si la relación entre el conocimiento (conocimiento sobre el proceso en nuestro caso) y el conocimiento didáctico es de la misma naturaleza cuando la perspectiva es un proceso. Concretamente, se ha señalado que un mayor y mejor conocimiento del contenido se relaciona con un mayor y mejor conocimiento didáctico del contenido (Carrillo, 2014). En este sentido, cabe preguntarse, es igual esta relación cuándo la perspectiva es un proceso.

Respecto al instrumento (cuestionario) que se desarrolla en esta investigación tiene el potencial de captar aspectos específicos del conocimiento sobre la resolución de problemas de los futuros maestros propuesto en investigaciones anteriores (e.g. Chapman, 2015). Por tanto es un aporte que resulta de este trabajo. Los análisis de los comentarios de los expertos validaron la idoneidad del instrumento para explorar este conocimiento. Las pruebas piloto dieron lugar a modificaciones, específicamente eliminando ambigüedades y por tanto mejorando su confiabilidad. Además, el resultado de las pruebas piloto indicó que proporciona información significativa sobre el conocimiento de los futuros maestros con respecto a lo que saben y sus limitaciones (Piñeiro, Chapman et al., 2019).

Debemos advertir que el instrumento no está diseñado para explorar exhaustivamente el conocimiento para enseñar la resolución de problemas, sino para centrarse en aspectos clave relacionados con el conocimiento de los problemas, el proceso de resolución y su enseñanza. Por lo tanto, tampoco está destinado para ser utilizado como una herramienta que califique el conocimiento sobre resolución de problemas. No obstante, este instrumento se presenta como una oportunidad para informar y tomar referencias respecto a la formación de maestros, especialmente, en los temas que el instrumento explora. Así, puede proporcionar información sobre el conocimiento de futuros profesores sobre resolución de problemas y su conocimiento didáctico sobre resolución de problemas que es requerido por los documentos curriculares.

Conclusiones en relación al objetivo específico 3

- ♦ OE3. Caracterizar el conocimiento sobre el proceso de resolución de problemas de matemáticas en profesores de primaria al terminar su formación inicial.

Los futuros profesores de este estudio han demostrado un conocimiento teórico sobre problemas y sobre el proceso de resolución. Sin embargo, debido a las dificultades que hemos indicado en el capítulo 5, es posible que este conocimiento no se transfiera a la práctica docente. Si bien nuestro estudio no pretende ser un estudio evaluativo, creemos que el programa de formación del que forman parte los sujetos de este estudio puede informase a partir de nuestros resultados. Específicamente, fomentando una caracterización del problema más vinculada con los resolutores y una perspectiva cíclica del proceso de resolución. En este contexto, experiencias donde se vean enfrentados a reflexionar sobre la resolución de problemas y su enseñanza son esenciales para expandir su conocimiento.

Como hemos podido observar y documentar, los estudiantes para profesor de este estudio estaban familiarizados con una gran cantidad de ideas que se muestran alineadas con el conocimiento teórico sobre resolución de problemas que reporta la literatura. La mayoría de los participantes se muestran de acuerdo con afirmaciones que son reconocidas por la comunidad como adecuadas para conceptualizar un problema (Lester y Cai, 2016). Esto puede explicarse en gran medida por la formación generalista que reciben los profesores de primaria. Como es natural, este tipo de formación se ha señalado como influyente en las creencias contemporáneas sobre la enseñanza de las matemáticas (Anderson, White y Sullivan, 2005).

Particularmente, los hallazgos sobre la conceptualización del problema muestran pequeñas diferencias entre el grupo de 1º año y grupo de 4º año, pero bastante significativas con el grupo de 4º año con formación adicional. Concretamente, este último grupo, a pesar que estuvo expuesto a una enseñanza explícita sobre resolución de problemas, presenta un concepto de problema limitado, inclusive, más tradicional. Respecto al conocimiento sobre las tareas que podrían considerarse problemas, cada grupo presenta diferencias y el grupo de 4º año con formación adicional, incluso contradicciones. Un elemento que puede explicar estos resultados tiene relación con la dificultad que presenta la etiquetación de tareas como problemas en la escuela. Como ya hemos señalado, los problemas matemáticos escolares son etiquetados primero por el docente que los utilizará y posteriormente por los estudiantes.

Con respecto al proceso de resolución, es importante señalar que los futuros maestros de este estudio manifiestan un conocimiento bastante amplio de fases y estrategias. No obstante, el conocimiento de las fases es limitado en aspectos ligados a la metacognición y a la invención de problemas. Mientras que el conocimiento sobre estrategias, los participantes reconocen una variedad, pero la que se asocia con un proceso genuino de resolución (ensayo y error) presenta menor reconocimiento. Un factor que puede explicar estos resultados tiene relación con la fuerte presencia que tienen en las normativas curriculares y que puede verse en los resultados del primer estudio.

Además, los hallazgos sugieren que las concepciones con las que los maestros comienzan sus programas de formación deben ser el foco de atención. Ya que a pesar de que están formados específicamente en el proceso de resolver problemas y su enseñanza, esto es insuficiente para que su conocimiento se alinee con lo que se espera que los maestros conozcan sobre resolución de problemas (e.g. Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015; Chapman, 2015). Es necesario que los futuros profesores no solo conozcan las características de los problemas sino que también desarrollen criterios que les permitan valorar hasta qué punto una tarea matemática puede constituirse como un problema para los estudiantes.

Del mismo modo, es necesario que los futuros maestros conozcan el proceso de resolución, sus características y estrategias, pero este conocimiento debe basarse en una visión flexible y cíclica del proceso. Los hallazgos sugieren que si bien los futuros profesores recibieron formación específica, sus dificultades parecían estar relacionadas con la forma en que se recibieron. Con esto queremos decir que el conocimiento superficial de la estrategia de ensayo y error indicaría que conocen la estrategia, pero no han reflexionado lo suficiente sobre las acciones que se realizan en ella. A pesar de ser una estrategia que probablemente utilicen constantemente, tienen dificultades para diferenciarla de construir una tabla o buscar un patrón, debido a que superficialmente se ven similares. En este sentido, es necesario proponer actividades donde la exploración y la reflexión sean los focos. Esto sugiere que, solamente resolver problemas no es suficiente para ayudar a los futuros maestros a ampliar su conocimiento teórico sobre los problemas de matemáticas y su resolución.

Conclusiones en relación al objetivo específico 4

- OE4. Caracterizar el conocimiento didáctico sobre resolución de problemas de matemáticas en profesores de primaria al terminar su formación inicial.

Hemos obtenido que los futuros maestros poseen conocimientos pedagógicos sobre la resolución de problemas pero no los tienen organizados. Además, este conocimiento manifestado no refleja un aprendizaje reflexivo debido a que no son conscientes de las repercusiones que tienen algunas acciones. Esto debido a que al preguntarles de manera general se declaran contrarios a algunas ideas, pero en ejemplos específicos, sus respuestas manifiestan acuerdo. Esto puede deberse a que, si bien han recibido específicamente formación en el proceso de enseñanza de la resolución de problemas, con ello no logran que su conocimiento se alinee con lo que se espera que los maestros sepan sobre enseñar a resolver problemas (e.g. Chapman, 2015). En este sentido, es necesario que los futuros maestros no solo conozcan las características de los enfoques, sino que también reflexionen sobre lo que significa en sus actos como profesores cada uno de ellos. En particular, el programa que forma a los docentes en este estudio debería poner atención a cómo la formación teórica está relacionada con la enseñanza de la resolución de problemas. Concretamente, creemos que los futuros maestros deberían adquirir un conocimiento que permita articular el *cómo* dan sentido a la enseñanza de la resolución de problemas.

Concretamente, nuestros hallazgos muestran que el conocimiento del aprendizaje de la resolución de problemas en el grupo sin formación adicional presenta mayores limitaciones que el grupo con formación adicional. Mientras que en el conocimiento de la enseñanza se presenta bastante similar en ambos grupos. Esto sería un indicativo de que la formación recibida no está teniendo el efecto deseado. Por otro lado, los resultados sobre el conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas reafirman que la invención de problemas no es considerada como parte del proceso. Esto debido a que esta actividad de invención de problemas, que es una de las formas que permite entender el proceso de resolución como cíclico (Wilson et al., 1994), también presenta dificultades al preguntarles desde una perspectiva pedagógica. Es importante señalar además que la falta de coherencia entre el que consideran el enfoque de enseñanza adecuado, no se relaciona con las acciones que estarían asociadas a él.

Conclusiones en relación al objetivo específico 5

- OE5. Profundizar en el conocimiento profesional sobre el proceso de resolución de problemas de matemáticas manifestados por un grupo de profesores de educación primaria al terminar su formación inicial.

Un aspecto que el estudio de profundización puso de manifiesto es la desconexión entre los conocimientos de los futuros profesores. Si bien, consideran al resolutor para etiquetar las tareas como problemas, solo lo hacen pensando en los aspectos que no tienen relación con las matemáticas imbricadas en ellos. Los futuros maestros reconocen la importancia del resolutor y, por otro lado, reconocen la importancia de los conocimientos del resolutor, pero no conectan estas ideas para establecer criterios en el etiquetado de tareas como problemas. Estos resultados pueden ser explicados por la exposición que los futuros maestros han tenido al enfrentarse a actividades de resolución de problema en su escolaridad y que probablemente han moldeado sus concepciones. Estas concepciones de corte tradicional (Blanco, 1997) se han visto confrontadas con ideas nuevas durante la formación recibida y no han tenido el tiempo suficiente para reacomodarse o se han acomodado según los sistemas de creencias existentes.

Esto reafirma la importancia de la exploración y la reflexión en la formación docente sobre la resolución de problemas. Creemos que los programas de formación deben tomar en cuenta aspectos de los modelos de conocimiento desarrollados desde la perspectiva de un proceso, como el propuesto por Chapman (2015) o Foster et al. (2014). La naturaleza transversal de los procesos contribuiría a que el conocimiento de los maestros en formación establezca conexiones de manera natural.

LIMITACIONES

Las limitaciones que exponemos son las que surgieron, de manera general, en el transcurso de esta investigación, y particularmente, señalamos limitaciones surgidas en cada una de las partes que lo componen.

En el análisis de normativas curriculares con el que desarrollamos una serie de categorías para los posteriores estudios presenta como limitación específica que no es, ni pretende ser, representativo. Seleccionamos seis documentos curriculares con una serie de criterios que dan validez y abarcan una serie de características que nos permite un acercamiento a lo que se exige a los profesores. Además, se debe tener en cuenta que las pautas curriculares tienden a reducir los significados de la resolución de problemas y toman una mirada ingenua de esta (Lesh, 2006).

Respecto a los resultados obtenidos mediante los dos cuestionarios escritos, en cada de ellos, la muestra de sujetos seleccionada fue intencional. Participaron voluntariamente estudiantes universitarios del grado de Maestro de Educación Primaria, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Esto hace que a la hora de valorar los resultados se deba realizar atendiendo a esta característica, es decir, las generalizaciones a otros contextos que no sean similares al que ofrece el marco de formación de estudiantes del grado de magisterio deben realizarse cuidadosamente. Por tanto, los resultados están limitados a grupos de sujetos con características similares.

Asimismo, el que los participantes del estudio sobre el conocimiento sobre la resolución de problemas no fueron los mismos que los participantes del estudio sobre el conocimiento didáctico de la resolución de problemas puede considerarse como otra limitación. Esto debido a que limita nuestras interpretaciones y conclusiones relativas a la interrelación que pueda establecerse entre cada dimensión de conocimiento del profesor. Si bien los sujetos poseen características comunes al ser estudiantes universitarios que cursan estudios para el grado de maestro, lo que garantiza la validez de las consideraciones realizadas, el hecho de ser un estudio en cierto modo transversal y secuencial tiene ciertas limitaciones interpretativas.

En esta misma línea, la no exploración cualitativa del conocimiento didáctico ha producido que la profundización con que nos hubiese gustado abordarla se vea limitada. Las entrevistas sobre el conocimiento de la resolución de problemas nos permitieron abordar las razones subyacentes a las respuestas y poner de manifiesto la poca organización del conocimiento de los futuros maestros. Creemos que la falta de esta exploración es una limitación al potencial explicativo de algunas de nuestras interpretaciones.

Sobre los cuestionarios escritos cabe decir que no formaba parte de nuestros objetivos la creación de instrumentos estandarizados para evaluar el conocimiento del profesor. Nuestros instrumentos contienen ítems que, como ya hemos expuesto, permiten una exploración sobre este conocimiento pero no deben considerarse exhaustivos. El carácter cerrado de los ítems hace que su aplicación necesite de otras perspectivas para dar una mirada más profunda al conocimiento del profesor. Sin embargo, seleccionamos este tipo de ítem intencionadamente para centrarnos en la presencia o no de determinados aspectos. De la misma manera, los instrumentos que desarrollamos toman en consideración aspectos teóricos y curriculares por lo que se hace necesario continuar su desarrollo incluyendo aspectos de la práctica docente.

LÍNEAS ABIERTAS

A partir de los resultados, interpretaciones y conclusiones, además de las limitaciones que hemos hecho evidentes, surgen una serie de posibles perspectivas que pueden convertirse en líneas de acción futuras. Hemos organizado estas posibilidades de acuerdo en tres focos.

Continuidades para el refinamiento del sistema de categorías que explore el conocimiento profesional sobre resolución de problemas

- ♦ Una primera acción que surge es la ampliación de los documentos curriculares que se tomen como muestra. En este sentido, los resultados permitirían un refinamiento e incorporación de elementos que permitan explorar de manera más exhaustiva este conocimiento.

- Si bien las categorías generales del modelo de Chapman (2015) ya han sido utilizadas para interpretar el conocimiento de profesores sobre resolución de problemas (Chapman, 2016). Creemos que explorar este conocimiento en el aula de primaria permitiría un refinamiento al sistema en su conjunto propuesto en este trabajo que lo haga más completo. Las diferencias existentes en las formaciones entre profesores de primaria y secundaria (Liljedahl et al., 2009) nos hacen pensar que las prácticas de enseñanza en aulas de primaria proveerían elementos que permitan refinar el sistema de categorías.
- Una línea que se muestra interesante tiene relación con realizar una exploración de carácter interpretativo, invitando a participar a profesores en servicio. Un estudio con participantes de estas características supondría dejar de lado los instrumentos de este trabajo, pero supondría una perspectiva que aportaría al entendimiento que el campo posee sobre cómo los profesores utilizan su conocimiento sobre la resolución de problemas cuando efectivamente la están enseñando.
- Otro elemento que se observa interesante es explorar la relación existente entre el sistema de categorías y otro modelo de conocimiento. El modelo propuesto por Carrillo et al. (2018) presenta explícitamente un subdominio en dónde se situaría la resolución de problemas ¿Es posible que todas las categorías de este trabajo estén contenidas en ella? Esta y otras preguntas son oportunidades de continuar este trabajo y expandir nuestra comprensión sobre el conocimiento del profesor.

Continuidades para la exploración del conocimiento sobre resolución de problemas y al conocimiento didáctico sobre resolución de problemas

- Un primer aspecto que surge como línea de continuidad es un estudio que incorpore los mismos sujetos para indagar en ambas dimensiones de conocimiento. Un estudio de este tipo supondría la realización de un análisis sobre las interrelaciones existentes entre las dimensiones exploradas en este estudio, superando las limitaciones que expusimos en el apartado anterior.

- En la misma línea, se podría realizar un estudio longitudinal que permitiera observar el desarrollo durante el transcurso de la formación inicial. Un estudio de estas características proveería de información valiosa sobre los aspectos que podrían ser mejorados en los programas de formación. De esta manera se podría abordar y explorar la relación que tienen las actividades con el aprendizaje de los estudiantes para maestro. Una perspectiva interesante es explorar la relación entre la formación con la creación de ciertos perfiles de respuesta en los participantes. Aspecto que hemos podido observar incipientemente en nuestro trabajo.
- Un aspecto que podría ser de interés tiene relación en cómo los futuros maestros operativizan estos conocimientos al diseñar o planificar actividades de enseñanza. Un estudio que analizara el conocimiento manifestado en las producciones de estudiantes cuando plantean tareas o planifican lecciones aportaría información relevante para comprender las posibles relaciones entre su conocimiento manifestado y el expuesto en sus producciones.
- Una línea de trabajo interesante tiene relación con ampliar la exploración de este conocimiento a profesores en servicio. Un estudio que continúe en esta misma línea y que se valga de observaciones de clases para constatar el conocimiento puesto en práctica sería valioso para informar al campo sobre cómo se relacionan y cómo *se ven* estos conocimientos en el aula.
- Asimismo, una exploración que contemple tanto la competencia de los profesores para resolver problemas como el conocimiento utilizado para enseñar, tanto en profesores de primaria como secundaria sería una línea de continuidad interesante. Esto en el sentido que aportaría luces sobre la pregunta que planteamos anteriormente sobre la relación existente entre conocimiento de la resolución de problemas y pedagógico de la resolución de problemas y la competencia del profesor.

Continuidad para el desarrollo de instrumentos que indaguen el conocimiento del profesor sobre resolución de problemas

- Una de las limitaciones de este estudio tiene relación con la estandarización del instrumento utilizado. En este sentido, continuar con el desarrollo del instrumento, aportando criterios de validez estadística y ampliando a otros tipos de ítems, constituiría un aporte valioso al campo.

Referencias

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (ñao) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10.

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 125-143.

Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies*, *13*(2), 121-142.

Aguayo-Arriagada, C. G. (2018). *El Análisis Didáctico en la formación inicial de maestros de primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Alsina, A. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, *19*(1), 99-126.

Alwarsh, A. (2015). *Developing a protocol for describing problem-solving instruction* (Tesis de maestría). Bowling Green State University, OH.

Anderson, J., White, P. y Sullivan, P. (2005). Using a schematic model to represent influences on, and relationships between, teachers' problem-solving beliefs and practices. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 9-38.

Andrews, P. y Xenofontos, C. (2015). Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of three Cypriot primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(4), 299-325.

Askew, M. (2016). *Transforming primary mathematics* (2a ed.). Oxon, Reino Unido: Routledge.

Ball, D. L. y Bass, H. (2009, marzo). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en el *43º Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik*. Oldenburg, Alemania.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4a ed., pp. 433-456). Washington, DC: AERA.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2a ed.). Madrid, España: Akal.

Barmby, P., Bolden, D. y Thompson, L. (2014). *Understanding and enriching problem solving in primary mathematics*. Northwich, Reino Unido: Critical Publishing.

Baumert, J. y Kunter, M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss y M. Neubrand (Eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers* (pp. 25-48). Boston, MA: Springer.

Begle, E. G. (1968). Curriculum research in mathematics. En H. J. Klausmeler y G. T. O'Hearn (Eds.), *Research and development toward the improvement of education* (pp. 44-48). Madison, WI: Dembar Educational Research Services.

Bisquerra, R. (1989). *Introducción conceptual al análisis multivariable: un enfoque informático con los paquetes SPSS-X, BMDP, LISREL y SPAD*. Barcelona, España: PPU.

Blanco, L. J. (1993). Una clasificación general de problemas matemáticos. *Épsilon*, *25*, 49-60.

Blanco, L. J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quadrante, 6*(2), 45-65.

Blanco, L. J. (2004). Problem solving and the initial practical and theretical education of teachers in Spain. *Mathematics Teacher Education & Development*, *6*, 37-48.

Blanco, L. J. y Caballero, A. (2015). Modelo integrado de resolución de problemas de matemáticas: MIRPM. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria* (pp. 109-122). Cáceres, España: Universidad de Extremadura.

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*. Cáceres, España: Universidad de Extremadura.

Blömeke, S., Hsieh, F.-J., Kaiser, G. y Schmidt, W. H. (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Boote, S. K. y Boote, D. N. (2018). ABC problem in elementary mathematics education: Arithmetic before comprehension. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(2), 99-122.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141.

Bostic, J. D. (2011). *The effects of teaching mathematics through problem-solving context on sixth-grade students' problem-solving performance and representation use* (Tesis doctoral). University of Florida, FL.

Bransford, J. D. y Stein, B. S. (1986). *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona, España: Labor.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Mahwah, NJ: LEA.

Bruno, A. y García, J. A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. *RELIME*, *7*(1), 25-48.

Bruun, F. (2013). Elementary teachers' perspectives of mathematics problem solving strategies. *The Mathematics Educator*, *23*(1), 45-59.

Buchholtz, N. (2019). Planning and conducting mixed methods studies in mathematics educational research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 131-152). Cham, Suiza: Springer.

Burns, R. B. y Lash, A. A. (1988). Nine seventh-grade teachers' knowledge and planning of problem-solving instruction. *The Elementary School Journal*, *88*(4), 369-386.

Butts, T. (1990). Posing problems properly. En S. Krulik y R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. En F. K. Lester y R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving. Prekindergarten-Grade 6* (pp. 241-254). Reston, VA: NCTM.

Cai, J. (2010). Helping elementary school students become successful mathematical problem solvers. En D. V. Lambdin y F. K. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics. Translating research for elementary school teachers* (pp. 9-14). Charlotte, NC: NCTM.

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números*, *58*, 45-60.

Cañadas, M. C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M., Villarraga, M. y Villegas, J. L. (2002). Materiales didácticos en la resolución de problemas. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 101-112). Granada, España: Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. y Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. (2003). Resolución de problemas, su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 153-161.

Carrillo, J. (2014). El conocimiento de los estudiantes para maestro (Teds-M España) desde la perspectiva de su especialización. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 115-123). Salamanca, España: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 8* (pp. 2985-2294). Ankara, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Castro-Rodríguez, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática* (pp. 1-15). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa* (Memoria de Tercer Ciclo). Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. En D. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en educación matemática. Resolución de problemas* (pp. 11-28). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada y SAEM THALES.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 119-141). Granada, España: Comares.

Castro, E. y Ruíz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 89-108). Madrid, España: Pirámide.

Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(3), 201-228.

Chapman, O. (1999). Inservice teacher development in mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*(2), 121-142.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211-230.

Chapman, O. (2008). Instructional practices to facilitate prospective mathematics teachers' learning of problem solving for teaching. En M. Santos-Trigo y Y. Schimizu (Eds.), *ICME-*

11. Topic Study Group 19. Research and development in problem solving in mathematics education (pp. 158-167). Monterrey, México: ICME.

Chapman, O. (2012). Practice-based conception of secondary school teachers' mathematical problem-solving for teaching. En T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 107-114). Taipéi, Taiwán.

Chapman, O. (2014). Mathematical problem-solving proficiency and knowledge for teaching. En S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Canadian Mathematics Education Study Group. Proceedings 2012 Annual Meeting* (pp. 163-170). Edmonton, Canadá: CMESG/GCEDM.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, *3*(1), 19-36.

Chapman, O. (2016). An exemplary mathematics teacher's ways of holding problem-solving knowledge for teaching. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 139-146). Szeged, Hungría: PME.

Chapman, O. (2017). Mathematics teachers' ways of supporting students' learning of problem solving. En M. Stein (Ed.), *A life's time for mathematics education and problem solving* (pp. 45-69). Borsdorf, Alemania: WTM Verlag.

Charles, R. I. y Lester, F. K. (1982). *Teaching problem solving: What, why,& how*. Palo Alto, CA: Dale Seymur Publication.

Charles, R. I., Lester, F. K. y O'Daffer, P. G. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: NCTM.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Cheng, L. P. y Yee, L. P. (2012). A Singapore case of Lesson Study. *Mathematics Educator*, *21*(2), 34-57.

Chiu M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(1), 36-48.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, *37*(3), 149-158.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. Londres, Reino Unido.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Mathematical problem solving through sequential process analysis. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *13*(1), 73-110.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8a ed.). Nueva York, NY: Routledge.

Consejo Federal de Educación. (2011a). *Núcleos de aprendizaje prioritarios. 1º ciclo Educación Primaria. 1º, 2º y 3º años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.

Consejo Federal de Educación. (2011b). *Núcleos de aprendizaje prioritarios. 2º ciclo Educación Primaria. 4º, 5º y 6º años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.

Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Córcoles, A. C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *Zetetike*, *14*(1), 7-28.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Creswell, J. W. (2012). Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches (3a ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Creswell, J. W. (2013). *Research design. Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4a ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Creswell, J. W. y Plano, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (3a ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Curcio, F. R. y Artzt, A. F. (2003). Reflecting on teaching mathematics through problem solving. En F. K. Lester y R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving. Prekindergarten-Grade 6* (pp. 127-141). Reston, VA: NCTM.

Curriculum Planning and Development Division. (2007). *Mathematics syllabus primary*. Singapur: Ministry of Education.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

De Proença, M. C. (2015). O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. *BOLEMA*, *29*(52), 729-755.

Deng, Z. (2018). Pedagogical content knowledge reconceived: Bringing curriculum thinking into the conversation on teachers' content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, *72*, 155-164.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: Analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM*, *42*(2), 205-218.

Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25.

Díaz, V. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Donalson, S. E. (2011). *Teaching through problem solving: Practices of four high school mathematics teachers* (Tesis doctoral). University of Georgia, GA.

Dreher, A. y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89-114.

Edwards-Leis, C. y Robinson, D. (2018). *Problem solving in primary mathematics: Learning to investigate!* Londres, Reino Unido: Routledge.

Eisenberg, T. A. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 216-222.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3a ed., pp. 313-335). Nueva York, NY: Taylor & Francis.

English, L. D., Lesh, R. y Fennewald, T. (2008, julio). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. Trabajo presentado en *The 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, México: ICME

Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI study*. Boston, MA: Springer.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, R. y Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children' s thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403-434.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Nueva York, NY: MacMillan.

Fernández-Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid, España: Grupo Mayéutica Educación.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 441-468.

Fink, A. (2003). *How to ask survey questions* (2a ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Flores-Medrano, E., Escudero, D. I. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Cerme 8* (pp. 3055-3064). Ankara, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Flores, P., Moreno, A. y del Río, A. (2016). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de matemáticas. En Encarnación Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 141-152). Granada, España: Comares.

Flores, P., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2008). Matemáticas y su didáctica en el EEES. En Universidad de Cádiz (Eds.), *Actas I Jornadas de trabajo sobre experiencias piloto de implantación del crédito europeo en las Universidades Andaluzas* (pp. 471–482). Cádiz, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

Foong, P. Y. (2013). Resolución de problemas en matemática. En L. P. Yee (Ed.), *La enseñanza de la matemática en la Educación Básica* (pp. 65-91). Santiago, Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Foster, C., Wake, G. y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 97-104). Vancouver, Canadá: PME.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, *54*(3), 363-407.

Fülöp, E. (2015). Problem-solving strategies in mathematics. *LUMAT*, *3*(1), 37-54.

García, G. y Santarelli, N. (2004). Los procesos metacognitivos en la resolución de problemas y su implementación en la práctica docente. *Educación Matemática*, *16*(2), 127-141.

García, M. y Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 105-122). Madrid, España: Síntesis.

Garofalo, J. y Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(3), 163-176.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19*, 51-63

Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Cerda, G. y Saadati, F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: diseño y validación de un cuestionario. *Enseñanza de Las Ciencias*, *36*(3), 99-120.

Giné, C. y Deulofeu, J. D. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *BOLEMA*, *28*(48), 191-208.

Guzmán, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos* (2a ed.). Madrid, España: Pirámide.

Gvozdic, K. y Sander, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(2), 157-175.

Hallman-Thrasher, A. (2017). Prospective elementary teachers' responses to unanticipated incorrect solutions to problem-solving tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(6), 519-555.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). DF, México: McGraw-Hill Education.

Hiebert, J. y Wearne, D. (2003). Developing understanding through problem solving. En H. L. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving. Grade 6-12* (pp. 3-13). Reston, VA: NCTM.

Hill, H. y Ball, D. L. (2009). The curious -and crucial- case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, *91*(2), 68-71.

Hitt, F., Saboya, M. y Cortés, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology* (pp. 57-74). Cham, Suiza: Springer.

Ho, K. F. y Hedberg, J. G. (2005). Teachers' pedagogies and their impact on students' mathematical problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 238-252.

Holmes, E. E. (1985). *Children learning mathematics: A cognitive approach to teaching*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Jakobsen, A., Ribeiro, M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Johar, R., Patahuddin, S. M. y Widjaja, W. (2017). Linking pre-service teachers' questioning and students' strategies in solving contextual problems: A case study in Indonesia and The Netherlands. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1), 101-128.

Johnson, B. R., Onwuegbuzie, A. J. y Turner, L. A. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, *1*(2), 112-133.

Jonassen, D. H. (2003). Designing research-based instruction for story problems. *Educational Psychology Review*, *15*(3), 267-296.

Kaplan, A., Doruk, M. y Özdemir, F. (2015). Opinions of pre-service primary mathematics teachers about problem solving and proving. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, *14*, 31-47.

Kaur, B. (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. *The Mathematics Educator*, *2*(1), 93-112.

Kelle, U. y Buchholtz, N. (2015). The combination of qualitative and quantitative research methods in mathematics education: A "mixed methods" study on the development of the professional knowledge of teachers. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 321-361). Dordrecht, Países Bajos, Springer.

Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(2), 184-193.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1980). What is a problem? *Problem Solving*, *4*(2), 1-5.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(1), 101-116.

Kilpatrick, J. (2014). Competency frameworks in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 85-87). Heidelberg, Alemania: Springer.

Kilpatrick, J. (2016a). Más Rico: una historia actualizada de investigación en Educación Matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 33-44). Granada, España: Comares.

Kilpatrick, J. (2016b). Reformulating: Approaching mathematical problem solving as inquiry. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 69-81). Nueva York, NY: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koh, J. H. L. (2019). Articulating teachers' creation of technological pedagogical mathematical knowledge (TPMK) for supporting mathematical inquiry with authentic problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(6), 1195-1212.

Kramarski, B. y Revach, T. (2009). The challenge of self-regulated learning in mathematics teachers' professional training. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 379-399.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2a ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education* (pp. 181-198). Cham, Suiza: Springer.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. y Neubrand, M. (2013). *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV Project*. Nueva York, NY: Springer.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: Global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 273-292.

Kuzle, A. (2017). Contextual principles for the development of problem solving material. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 113-120). Singapur: PME.

Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M. y Hannula, M. S. (2018). Connections of primary teachers' actions and pupils' solutions to an open problem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(5), 967-983.

Lambdin, D. V. (2003). Benefits of teaching through problem solving. En F. K. Lester y R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving. Prekindergarten-Grade 6* (pp. 3-14). Reston, VA: NCTM.

Land, T. J. (2017). Teacher attention to number choice in problem posing. The *Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 35-46.

Lappan, G. y Phillips, E. (1998). Teaching and learning in the connected mathematics project. En L. Leutzinger (Ed.), *Mathematics in the middle* (pp. 83-92). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R. (2006). New directions for research on mathematical problem solving. En R. Zevenbergen y M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 15-33). Adelaide, Australia: MERGA.

Lesh, R., English, L. D., Riggs, C. y Sevis, S. (2013). Problem solving in the primary school (K-2). *Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 35-60.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: NCTM.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K. (1982). Issues in teaching mathematical problem solving in the elementary grades. *School Science and Mathematics, 82*(2), 93-98.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). Nueva York, NY: Academic Press.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660-675.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 245-278.

Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Nueva York, NY: Springer.

Lester, F. K. y Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. En R. A. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving; learning and teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: LEA.

Leung, S.-K. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 103-116.

Leung, S.-K. S. (2016). Mathematical problem posing: A case of elementary school teachers developing tasks and designing instructions in Taiwan. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 327-344). Nueva York, NY: Springer.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 361-386). Nueva York, NY: Springer.

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., … Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI study* (pp. 25-33). Boston, MA: Springer.

Lin, F.-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 483-520). Rotterdam, Países Bajos: Springer.

Livy, S. y Downton, A. (2018). Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. The *Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 150-160.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina y C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formacao?* (pp. 47-82). Lisboa, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao, Secçao de Educaçao Matemática

Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: The influence of teacher intervention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal*, *14*(2), 87-98.

Lupiáñez, J.L., Molina, M., Flores, P. y Segovia I. (2007). Mathematics primary teacher training in the context of the European Higher Education area. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 223-231.

Masingila, J. O. y Lester, F. K. (1998). *Mathematics for elementary teachers via problem solving. Instructor's resource manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Mason, J. (2016). When is a problem…? "When" is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 263-285). Nueva York, NY: Springer.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2a ed.). Dorset, Reino Unido: Pearson Education.

Mayer, R. E. y Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. En A. Alexander y P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 287-303). Nueva York, NY: Routledge.

McLeod, D. B. y McLeod, S. H. (2002). Synthesis - Beliefs and mathematics education: Implications for learning, teaching, and research. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics* (pp. 115-123). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases curriculares Educación Básica*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, *52*, 19349-19420.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España: SEIEM.

Montes, M., Ribeiro, M. y Carrillo, J. (2017). Conceptual issues in developing a framework for examining teachers' knowledge. En S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *ERME Topic Conference on mathematics teaching, resources and teacher professional development* (pp. 187-196). Belín, Alemania: Humboldt-Universität zu Berlin and ERME.

Montoro, V., Ferrero, M. y Ferraris, C. (2003). Rol que le asignan los docentes a los ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo exploratorio. *Educación Matemática*, *15*(3), 109-117.

Morse, J. M. (2003). Principles of mixed method and multimethod research design. En A. Tashakkori y C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social & behavioral research* (1a ed., pp. 189-208). Thousand Oaks, CA: SAGE.

National Core Curriculum for Basic Education. (2004). *National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education*. Helsinki, Finlandia: National Board of Education.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Autores.

NCTM. (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (2010). *Making it happen. A guide to interpreting and implementing common core state standards for mathematics*. Reston, VA: Autor.

NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Autor.

Nelson, I. D. y Kirkpatrick, J. (1975). Problem solving. En J. N. Payne (Ed.), *Mathematics learning in early childhood* (pp. 69-94). Reston, VA: NCTM.

Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM*, *50*(4), 601-612.

Ni, Y., Li, Q., Cai, J. y Hau, K.-T. (2015). Has curriculum reform made a difference in the classroom? An evaluation of the new mathematics curriculum in Mainland China. En B. Sririman, J. Cai, K.-H. Lee, F. Fan, Y. Shimizu, C. S. Lim y K. Subramanium (Eds.), *The first sourcebook on Asian research in mathematics education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India* (pp. 15-16). Charlotte, NC: Information Age.

Nipper, K. y Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: Conceptualizing mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 333-341.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *Third Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). Atenas, Grecia: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M. A. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En Praktika (Ed.). *23th Panellenio synedrio mathematikis paideias* (pp. 39-47). Patras, Grecia: Elleniki Mathematiki Etaireia.

Nortes, R. y Nortes, A. (2016). Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria. *Revista de Investigación Educativa*, *34*(1), 103-117.

O'Shea, J. y Leavy, A. M. (2013). Teaching mathematical problem-solving from an emergent constructivist perspective: the experiences of Irish primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 293-318.

OECD. (2005). *The definition and selection of key competences. Executive summary*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD. (2013). *PISA 2015 draft mathematics framework*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: What students know and can do. Student performance in mathematics, reading and science*. París, Francia: OECD Publishing.

Osana, H. P., Lacroix, G. L., Tucker, B. J. y Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(4), 347-380.

Oser, F. K., Achtenhagen, F. y Renold, U. (2006). Competence oriented teacher training: Old research demands and new pathways. En F. K. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold (Eds.), *Competence oriented teacher training* (pp. 1-7). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Otten, S. (2010). *Thirty years of problem solving in mathematics education: Policy and promise* (Comprehensive Examination for DSME). Michigan State University, MI.

Pansell, A. y Andrews, P. (2017). The teaching of mathematical problem-solving in Swedish classrooms: A case study of one grade five teacher's practice. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(1), 65-84.

Papini, C. (2015). El papel del análisis de problemas aritméticos en la formación continua del docente. *Educación Matemática*, *27*(2), 67-93.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics education*. Helsinki, Finlandia: Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Perdomo-Díaz, J., Rojas, C. y Felmer, P. (2018). La resolución de problemas como estrategia de desarrollo profesional docente: tensiones que se generan en el profesor. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 101-122.

Piñeiro, J. L. (2015). *Resolución de problemas desde una perspectiva curricular: Implicaciones para la formación de profesores* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de Educación Primaria. *EDMA 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(2), 50-64.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2018). Enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: una revisión a la investigación con profesores. En J. Osorio y M. Glöel (Eds.), *La didáctica como fundamento de la práctica profesional docente. Tendencias, enfoques y avances* (pp. 47-66). Concepción, Chile: Ediciones UCSC.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en Educación Primaria. *PNA*, *13*(2), 104-129.

Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas en primaria: una perspectiva curricular. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 427-436). Málaga, España: SEIEM.

Piñeiro, J. L., Chapman, O., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Exploring prospective primary school teachers' mathematical problem-solving knowledge. En J. Novotná y H. Moraová (Eds.), *Opportunities in learning and teaching elementary mathematics* (pp. 305-315). Praga, República Checa: Charles University.

Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63-88

Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (2a ed.). DF, México: Trillas.

Ponte, J. P. da. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. En J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro y H. A. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE1* (pp. 59-72). Porto, Portugal: SPCE.

Ponte, J. P. da. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona, España: Graó.

Ponte, J. P. da y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Ponte, J. P. da y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teacher's learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3a ed., pp. 275-296). Nueva York, NY: Routledge.

Posamentier, A. S. y Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions. A resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Posamentier, A. S. y Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics. Grades 3-6*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Pratt, N. y Woods, P. (2008). Changing PGCE students' mathematical understanding through a community of inquiry into problem solving. *Research in Mathematics Education*, *9*(1), 79-94.

Prieto, J. L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, *22*(1), 57-85.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

Puig, L. (2008a). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 93-111). Badajoz, España: SEIEM.

Puig, L. (2008b). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, *2*(3), 87-107.

Ramírez-Uclés, R., Castro-Rodríguez, E., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). What makes a task a problem in early childhood education? *European Early Childhood Education Research Journal*, *26*(4), 574-588.

Reséndiz, L., Block, D. y Carrillo, J. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, *29*(2), 99-123.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, *número extraordinario*, 275-294.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *AIEM*, (4), 47-64.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *28*(8), 1185-1195.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Ruiz, F., Molina, M., Lupiáñez, J.L., Segovia, I. y Flores, P. (2009). Mathematics primary teachers training at the University of Granada: An adaptation to the EHEA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 425-454.

Ryve, A. (2007). What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(1), 43-61.

Saadati, F., Cerda, G., Giaconi, V., Reyes, C. y Felmer, P. (2019). Modeling Chilean mathematics teachers' instructional beliefs on problem solving practices. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(5), 1009-1029.

Saadati, F., Chandía, E. y Ruíz, N. (2018). Pedagogical problem solving knowledge of Chilean mathematics teachers and instructional reflection. En D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 129-136). Rancagua, Chile: PME.

Sakshaug, L. E. y Wohlhuter, K. A. (2010). Journey toward teaching mathematics through problem solving. *School Science and Mathematics*, *110*(8), 397-409.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. DF, México: Trillas.

Scheiner, T. (2015). Theorising about mathematics teachers' professional knowledge: The content, form, nature, and course of teachers' knowledge. En M. Marshman, V. Geiger y A. Bennison (Eds.), *Mathematics education in the margins. Proceedings of the 38th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 563-570). Sunshine Coast, Australia: MERGA.

Schmidt, S. y Bednarz, N. (2002). Arithmetical and algebraic types of reasoning used by pre-service teachers in a problem-solving context. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *2*(1), 67-90.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G., Houang, R. T. y Wiley, D. E. (1997). *Many visions, many aims. Volume 1. A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM*, *39*(5-6), 537-551.

Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM*, *44*(5), 587-599.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 9-34.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (1a ed., Vol. 2, pp. 321-354). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Schroeder, T. L. y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton y A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary mathematics. 1989 yearbook* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: LEA.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Skjong, R. y Wentworth, B. (2000, junio). Expert judgement and risk perception. Trabajo presentado en *The 11th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Stavanger, Norway: ISOPE.

Smith, S. P. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. En J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 263-274). Reston, VA: NCTM.

Socas, M. M., Hernández, J. y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sanchez, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de las matemáticas y educación matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga, España: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga y SEIEM.

Son, J.-W. y Kim, O.-K. (2015). Teachers' selection and enactment of mathematical problems from textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 491-518.

Son, J.-W. y Kim, O.-K. (2016). Curriculum enactment patterns and associated factors from teachers' perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(4), 585-614.

Son, J.-W. y Lee, M. Y. (2016). Preservice teachers' conception of effective problem-solving instruction and their problem solving. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 829-836). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 341-350.

Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: estrategias*. Madrid, España: Narcea.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2a ed.). Madrid, España: Morata.

Stanic, G. M. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-23). Reston, VA: LEA y NCTM.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268–275.

Stein, M. K., Boaler, J. y Silver, E. A. (2003). Teaching mathematics through problem solving. Research perspectives. En F. K. Lester y R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving. Prekindergarten-Grade 6* (pp. 245-256). Reston, VA: NCTM.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164-185). Perth, Australia: MASTEC.

Stylianides, G. J. y Hino, K. (2018). *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers. An international perspective*. Cham, Suiza: Springer.

Tatto, M. T., Ingvarson, L., Schwille, J., Peck, R., Senk, S. L. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Temur, Ö. D. (2012). Analysis of prospective classroom teachers' teaching of mathematical modeling and problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *8*(2), 83-93.

Thames, M. H. y Ball, D. L. (2010). What math knowledge does teaching require? *Teaching Children Mathematics*, *17*(4), 220-229.

Turner, F. y Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland y K. Ruthven

(Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J.-J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Cham, Suiza: Springer.

Vale, C., Widjaja, W., Doig, B. y Groves, S. (2019). Anticipating students' reasoning and planning prompts in structured problem-solving lessons. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(1), 1-25.

van de Walle, J. A. (2003). Designing and selecting problem-based task. En F. K. Lester y R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade 6* (pp. 67-80). Reston, VA: NCTM.

van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 319-351.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de Educación Primaria sobre probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *BOLEMA*, *29*(52), 681-703.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 339-359.

Verschaffel, Lieven, Greer, P. y De Corte, E. (2007). Whole number concept and operation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics education* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Weber, K. y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353-382). Rotterdam, Países Bajos: Springer.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L. y Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). Nueva York, NY: MacMillan.

Wood, T. (Ed.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* (1a ed.). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Xenofontos, C. y Andrews, P. (2014). Defining mathematical problems and problem solving: prospective primary teachers' beliefs in Cyprus and England. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 279-299.

Zhu, F. y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problems types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626.