ELEMENTA GEOMETRIÆ

THEORICÆ ET PRACTICÆ,

AUCTORE

ANTONIO LECCHIO

E SOCIETATE JESU,

IN UNIVERSITATE BRAYDENSI

MATHESEOS PROFESSORE.

TOMUS II.

MEDIOLANI MDCCLIV.

EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ

APUD JOSEPH MARELLUM

SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.

LECTORI.

DUo ſunt, quæ Tironi impeditam faciunt, ac minus accommodam Geometriam Solidorum: alterum eſt, Solidorum in plana ſuperficie deſcriptio, quæ res phantaſiam plane ſubactam poſtulat, & exercitatam: alterum, prolixitas demonſtrationum, præſertim in methodo antiqua. Nam, quod ad primum attinet, quanti laboris eſt in tanto linearum procurſu, in ſuo quamque poſitu rite repræſentare? atque has e plano ipſo, ac typo veluti prodeuntes ſibi fingere, illas in receſſu & e longinquo, alias ad normam inſiſtentes, pleraſque obliqua poſitione; tum planorum pariter occurrentium interſectiones, parallelifmum, ac ſolidorum angulorum cujuſque modi flexiones varias in eadem plana ſuperficie imaginari? Operoſius eſt Tironi interdum corporis magnitudinem, figuram, & ſitum concipere animo, quam theorematis ipſius naturam, vimque demonſtrationis, ordinemque complecti.

Ut hac moleſtia Tirones levarem, multum operæ in figuris quam aptiſſime delineandis conſumpſi, quæque deſcribi oporteret, deligendis. Ac primo, quæ in corporum ſectionibus ſubnaſcuntur proprietates variæ, non unico iconiſmo complexus ſum omnes. Singu-

lis

lis ſectionum modis ſinguli typi reſpondent, ut figuram minus impeditam haberemus uni rei ſervientem; tum vero ipſas ſectionum facies curavi, ut in planum traducerentur, & aliæ aliis opem ferrent, & legentium imaginationem dirigerent. Quid quod, ſimul ac Tironi collibitum eſt, præſto eſt typus Propoſitioni cuivis ſubjectus; neque modo huc, modo illuc contorquenda eſt oculorum acies, quod Tironi ſolet eſſe moleſtiſſimum; ſed ad legentem veniunt figuræ etiam non vocatæ. Parva quidem res in ſpeciem, & exilis, ſed ad uſum magna, ac prope neceſſaria, præſertim in Geometria Solidorum.

Quod vero ad methodum attinet, eam mihi tenendam cenſui, quam ſuperioribus Libris; & inſigniora Geometriæ practicæ problemata cum Theoria conjunxi. Nam properanti ad Geometriam hæc tanquam diverſoria capienda tibi ſunt, commorandumque modo in hac, modo in illa Geometriæ practicæ parte, qua ſe cunque dederit occaſio, quoad expediet, ut locorum ſitum non tanquam civis, & incola, ſed ut cupidus viator inſpexiſſe videare. Antiquam etiam Geometrarum methodum, quam exhauſtionum appellant, longioremque, quo utebantur, ambitum indirectæ demonſtrationis per reductionem ad abſurdum, penitus inflexi ad Recentiorum expeditam, directam-

que

que demonſtrandi methodum; ſive indiviſibilium eam voces, ſive evaneſcentium, aut infinite parvorum. Ac ne qua forte ſuboriri poſſet dubitatio de firmitate principiorum, quorum alia ab Antiquis adhibita fuere, alia a Recentioribus invecta, diſſertationem adjeci in calce operis, *de Methodo Geometrica*, quam quidem Tironibus cupio eſſe notiſſimam: in qua & plura illuſtrium Mathematicorum principia attuli ſane inter ſe diverſa, ſingulorum commodis, atque incommodis adnotatis; & unam quaſi ex omnibus conflatam argumentandi rationem inſtitui, quæ mihi & commodiſſima, & minime omnium periculoſa eſſe viſa eſt. Nam in diſciplinis, & artibus omnibus, per quas gradimur, tendimuſque ad naturæ cognitionem, ipſa artium principia, & fundamenta cognoſcenda ſunt, capitaque illa rerum, e quibus omnis poſtea ad ſingulas tractandas, & demonſtrandas res, argumentatio ducitur, percipienda penitus, & probe tenenda. Illa etiam me cura coquebat, quod in tanta principiorum varietate propius nihil eſſe factum videbam, quam ut labefactarentur fundamenta ſcientiæ omnium firmiſſimæ.

Illud tamen ſibi perſuadeat Tiro velim, laborem quidem ipſi imminutum iri hac noſtra qualicumque opera, non penitus ſublatum; quod nullus Scriptorum mehercule aut

præ-

præſtitit hactenus, aut præſtare in poſterum poteſt. Habet enim Geometria Solidorum, non ſingularem quidem, ac propriam difficultatem, præſertim in noſtra methodo; ſed totius Geometriæ planæ comprehenſionem uſque adeo ad ſingula theoremata pervagatam, & fuſam, ut quicunque ab hujus elementis probe inſtructus non acceſſerit, vix poſſit in Solidorum natura inveſtiganda cum fructu verſari; quæ res non mediocrem in prima elementaria inſtitutione exercitationem, uſumque deſiderat.

Veruntamen, ſicut in omnibus artibus, ita & in Geometria, hoc primum, hoc poſtremum eſſe monitum Tironi volo, ut multo ante ingenium quiſque ſuum exploret, quo uno ſpes omnis vertitur. Eſt enim quatenus Scriptorum induſtriæ dari locus poſſit: at præclaram illam perfecti Geometræ laudem nemo aſſequetur unquam, cui ingenium ad res geometricas plane factum natura non dederit. Quemadmodum eorum oculi, quibus a natura vegeti, & perſpicaces ſunt traditi, facili, lenique converſu in quamcunque ſe dederint partem, celeriter omnia, & ſine labore, quæ volunt, contuentur; ſic mens bene inſtructa, & ſubornata a natura ad omnia comprehendenda perſpicax erit, in quæ intenderit, quæque parvo ductu, exiguaque monſtratione Scriptor aperuerit.

GEOMETRIA ELEMENTARIS THEORICO-PRACTICA SOLIDORUM.

AGGREDIMUR eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſive ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata. Solidum autem, ſive corpus, nempe tertium genus quantitatis, illud dicitur, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem, ſive profunditatem habet. Cùm autem ſolidi geneſis Lib. 1. Geom. planæ deſcripta, ea ſit, ut concipiamus ſuperficiem aliquam elevari, ſive in tranſverſum moveri, & ſic deſcribi veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum, vel imaginemur ſolidum corpus tanquam compoſitum ex infinitis numero planis invicem ſuperimpoſitis: hinc, ut rectè, & ordine procedamus, conſultiſſimùm erit, horum Elementorum exordia ca-

pere ex vario planorum inter ſe, & cum lineis rectis occurſu, in quo jaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt, corporum doctrina univerſa nititur.

Quotquot autem Geometriam elementarem tradiderunt, omiſſis ferè, & poſthabitis ſolidorum elementis, eamdem mancam admodum, atque imperfectam tradidiſſe cenſendi ſunt. Quotus enim quiſque eſt, qui Matheſeos partes pleraſque ſine ſolidorum ſcientia aggredi poſſit? Nam & Trigonometria ſphærica, & pars magna Geometriæ practicæ, Staticæ, atque Geographiæ hiſce principiis innituntur, & quæ occurrunt paullo difficiliora in Gnomonica, Sectionibus conicis, Aſtronomia, Perſpectiva, atque Optica univerſa, intellectis rite ſolidorum principiis faciliora redduntur.

ELE-

ELEMENTUM I.

De vario Planorum inter se, & cum lineis rectis occursu.

AXIOMA I.

1. *SI a quovis puncto cujusdam plani ducatur recta linea, hæc, vel cum eodem plano tota congruet, vel ab ipso tota recedet.*

Patet ex genesi rectæ lineæ, & planæ superficiei tradita Lib. 1. Geom. planæ n. 20. & 21.

Corollarium I.

2. BIna rectæ lineæ puncta cum eodem plano congruere non possunt, quin tota congruat.

Corollarium II.

3. EJusdem rectæ lineæ pars una nequit esse in subjecto plano, & altera extra ipsum. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 1.

Corollarium III.

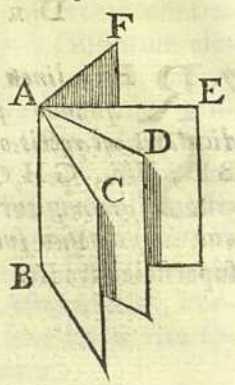
4. SI duo plana se mutuò secent, communis eorum intersectio est linea recta. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 3.

Nam, si bina quævis sectionis communis puncta connectantur lineà rectà, hæc jacebit in utroque plano (n. 2.).

AXIOMA II.

5. *PEr quamvis rectam lineam* AB *infinita numero plana duci possunt.*

Ab extremitate A rectæ AB duci intelligantur infinitæ numero rectæ AC, AD, AE &c. Jam verò, si recta AB motu sibi semper parallelo moveatur juxta varias harum rectarum directiones AC, AD, AE &c., totidem plana generabit, quæ per eamdem rectam AB transibunt.



AXIOMA III.

6. *OMne triangulum in uno est plano. Et duæ rectæ se mutuò secantes, in eodem plano sunt.* Euclid. lib. 11. prop. 2.

Instar axiomatis assumi potest, cùm triangulum nihil sit aliud, quàm plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam patet pars altera.

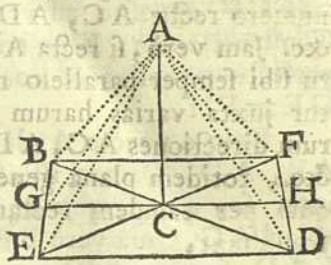
De

De Rectis perpendiculariter plano occurrentibus.

DEFINITIO I.

7. R*Recta linea* AC *plano perpendicularis dicitur, quando perpendicularis est rectis omnibus* BD, EF, GH *&c., a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano.*

Perpendicularis plano.



Corollarium I.

8. HInc a puncto A in sublimi extra planum unica perpendicularis AC ad idem planum duci potest. Nam ab eodem puncto A ad eamdem rectam, puta, BD, perpendicularis unica duci potest.

Plano perpendicularis unica ab eodem puncto.

Corollarium II.

9. ERgo etiam ab eodem puncto C ejusdem plani unica perpendicularis CA excitari potest. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 13.

PROPOSITIO I.

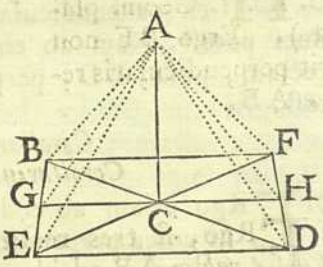
THEOREMA.

10. S*I recta quæpiam* AC *sit perpendicularis binis rectis* BD, EF, *quæ in eodem plano se intersecant in ipsius rectæ termino* C, *erit eadem* AC

pariter perpendicularis cuilibet alteri rectæ GH, *quæ per eumdem terminum* C *ducatur in eodem plano.*

Demonstratio. Fiat CE = CD = CB = CF; ductisque rectis BE, FD, triangula BCE, FCD erunt similia, & æqualia; adeoque BE = FD; & angulus CEG = CFH. Atqui angulus ECG = FCH opposito ad verticem, & CE = CF per Constructionem. Ergo triangula ECG, FCH sunt perfectè æqualia; & consequenter CG = CH, & GE = FH.

Dein a puncto A ducantur rectæ AE, AF, AB, AD. Omnes istiusmodi rectæ erunt æquales inter se, quippe quæ æqualiter distant a perpendiculari AC. Quia verò BE = FD, triangula EAB, FAD sunt perfectè æqualia. Erit ergo angulus AEG = AFH. Et quoniam GE = FH, & AE = AF, triangula EAG, FAH erunt pariter perfectè æqualia. Ergo AG = AH. Sed ostensum jam est CG = CH. Ergo recta AC habet duo puncta A & C, quorum singula æquidistant a duobus terminis rectæ GH; & consequenter recta AC est perpendicularis ipsi GH (n. 54. lib. 1. Geom. planæ). Quod erat &c.



Corollarium I.

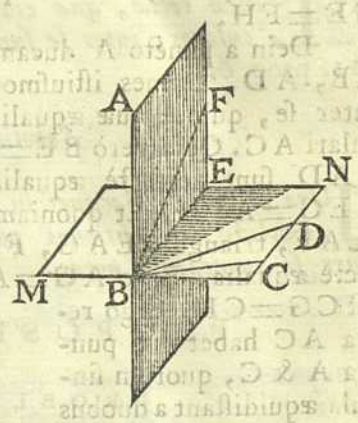
11. ERgo recta AC perpendicularis binis rectis BD, EF in quodam plano ductis per ejus concursum cum ipso plano, erit perpendicularis & reliquis omnibus, & ipsi plano. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 4.

Co-

Corollarium II.

12. SI duæ rectæ BC, BD perpendiculares ſint ad idem punctum B cujuſdam rectæ AB, quævis alia recta, puta, BF per idem punctum B ducta, quæ non ſit in plano MN perpendicularium BC, BD, non erit perpendicularis eidem rectæ AB.

Nam ducto plano per ABF ad occurſum plani MN, recta BE communis interſectio, erit perpendicularis ipſi AB (n. 10.). Atqui BE & BF in eodem plano ABF poſitæ, ambæ non poſſunt eſſe perpendiculares eidem AB ad idem punctum B (n. 50. lib. 1. Geom. planæ). Ergo BF non erit perpendicularis rectæ AB.



Corollarium III.

13. ERgo, ſi tres rectæ BC, BD, BE eidem rectæ AB ad idem punctum B ſint perpendiculares, tres illæ erunt in uno plano. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 5.

Nam, ſi earum quævis, puta, BE eſſet extra planum reliquarum, eadem non eſſet perpendicularis rectæ AB (n. 12.), contra hypotheſim.

AXIOMA IV.

14. E *Binis rectis parallelis, si una sit perpendicularis plano cuipiam, erit & altera*. Euclid. lib. 11. prop. 8.

AXIOMA V.

15. L *Ineæ rectæ, quæ eidem plano sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ*. Euclid. lib. 11. prop. 6.

Scholion.

J*Ure monet P. Tacquet in suis elementis duas hasce Euclidis propositiones postulari posse, tanquam per se immediatè notas.*

PROPOSITIO II.

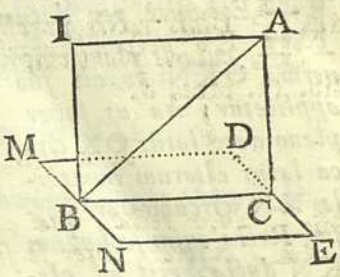
PROBLEMA.

16. D*Ato puncto* A *in sublimi, ad subjectum planum* ME *perpendicularem* AC *ducere*. Euclid. lib. 11. prop. 11.

Resolutio. Ducta quavis recta MN in plano dato ME, ducatur ex A perpendicularis AB in eamdem MN; tum in eodem plano dato ducatur recta BC ipsi MN perpendicularis; in quam ex A demittatur rursum perpendicularis AC. Hæc erit perpendicularis dato plano ME.

Demonstratio. Nam, cùm recta MN per Constr. perpendicularis sit binis rectis BA, BC, erit eadem

eadem (n. 11.) perpendicularis plano per ipsas ducto AIBC. Quare, si ducatur recta DCE parallela ipsi MBN, erit & ipsa DE perpendicularis eidem plano AIBC (n. 14.), ac proinde etiam perpendicularis rectæ AC (n. 7.). Cùmque ipsa AC sit etiam perpendicularis rectæ CB per Constr., erit eadem AC perpendicularis toti plano MNED (n. 11.). Quod erat &c.



PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

17. D*Ato plano* ME, *a puncto* B, *quod in illo datum est, perpendicularem* BI *excitare*. Euclid. lib. 11. prop. 12.

Resolutio. Assumatur punctum quodcunque A extra planum ME, & ducatur perpendicularis AC in subjectum planum, per præced.; tum in plano BCAI ex B ducatur recta BI parallela rectæ CA. Dico rectam BI fore perpendicularem quæsitam.

Demonstratio patet ex Axiomate 4. n. 14.

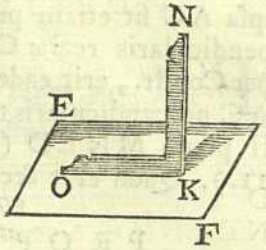
Corollarium.

LIneæ ab eodem puncto ductæ, nequeunt ambæ ad idem planum esse perpendiculares. Nam (n. 15.) forent parallelæ, quod fieri non potest.

Scho-

Scholion.

MEchanicè per datum punctum K in plano dato EF perpendicularis ducitur eidem plano, si norma OKN angulo suo recto K ad datum punctum applicetur, ita ut super plano dato latus OK circa latus alterum immobile KN circumrotari possit. Recta enim secundùm KN ducta, erit ad planum datum ex dato puncto K erecta perpendicularis.

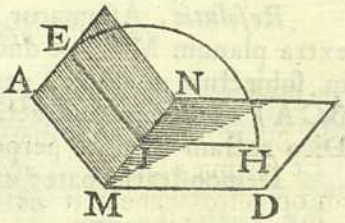


De occursu Planorum inter se.

DEFINITIO II.

Angulus planus,

18. BInorum planorum AN, ND, se in quadam recta intersecantium aperturam, seu divaricationem voco Angulum planum.



Corollarium.

Ejusque mensura.

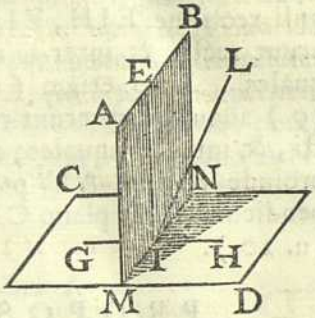
19. SI in binis planis AN, ND, e quovis puncto I mutuæ intersectionis MN ducantur binæ rectæ EI, HI perpendiculares ipsi intersectioni,

ni, angulus rectilineus EIH erit menſura inclinationis planorum. Nam arcus EH & eſt menſura anguli rectilinei EIH, & proportionalis eſt divarications horum planorum, & conſequenter conſiderari debet tanquam menſura anguli plani.

DEFINITIO III.

20. *PLanum* AN *perpendiculare dicitur plano* CD, *quando eidem inſiſtens in neutram partem inclinat: hoc eſt, cum plano* CD *duos angulos efficit* AND, BMC *hinc atque inde æquales.*

Planum alteri perpendiculare.



Corollarium I.

21. SI planum plano inſiſtat, vel duos rectos angulos efficit, vel duobus rectis æquales.

Et ſi bina plana ſe interſecent, angulos ad verticem oppoſitos habebunt æquales, quorum ſumma æquabitur quatuor rectis.

Scholion.

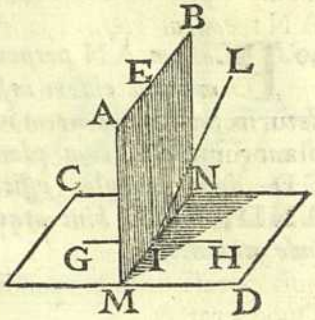
QUæ de lineis rectis circa unum punctum ſe interſecantibus demonſtrantur angulorum affectiones, facilè per te ipſum traduces ad communem planorum interſectionem.

Co-

Corollarium II.

22. PLanum AN transiens per rectam EI alteri plano CD perpendicularem, est ipsi quoque perpendiculare. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 18.

Nam, si a termino I rectæ EI ducatur GIH perpendicularis sectioni communi MN planorum, anguli rectilinei EIH, EIG erunt recti, & inter se æquales. Ergo etiam (n. 19.) anguli plani erunt recti, & inter se æquales; ac proinde planum AN perpendiculare erit plano CD (n. 20.).



PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

23. *SI bina plana* AN, CD *sibi invicem perpendicularia fuerint, ac præterea in plano* AN *ducatur* EI *perpendicularis communi sectioni* MN *duorum planorum: eadem recta* EI *perpendicularis erit plano* CD.

Demonstratio. Per punctum I in plano CD ducatur recta GIH perpendicularis sectioni MN. Angulus rectilineus EIH est mensura inclinationis planorum (n. 19.). Atqui per hyp. angulus planus est rectus. Ergo rectilineus EIH rectus erit; & consequenter EI perpendicularis duabus rectis MN, GH, & ipsi plano CD (n. 11.). Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

24. *SI bina plana* AN, CD *ſibi invicem perpendicularia fuerint, & a puncto* I *ſectionis communis* MN *ducatur recta* IL, *quæ non ſit in plano* AN: *eadem recta* IL *non erit perpendicularis plano* CD.

Demonſtratio. In plano AN a puncto I excitetur recta IE perpendicularis ſectioni MN duorum planorum. Hæc recta IE per præced. erit pariter perpendicularis plano CD. Atqui a puncto I perpendicularis unica IE ad planum CD excitari poteſt (n. 9.). Ergo recta IL, quæ non eſt in plano AN, non poteſt eſſe perpendicularis eidem plano CD. Quod erat &c.

Corollarium I.

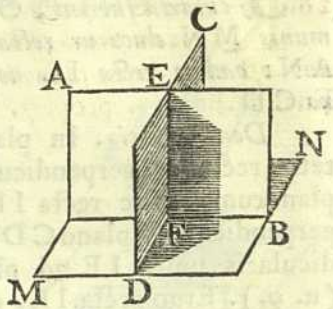
25. SI bina plana AN, CD ſibi invicem perpendicularia fuerint, recta EI uni ex iis, nempe plano CD perpendicularis per interſectionem MN ducta, jacebit in altero.

Co-

Corollarium II.

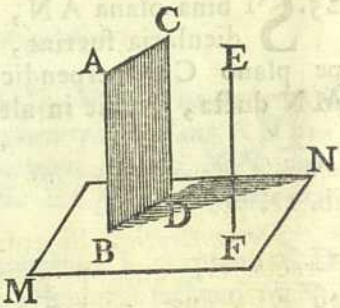
26. DUorum planorum A B, C D eidem plano M N perpendicularium interſectio E F eſt ipſi plano M N perpendicularis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 19.

Nam recta E F ipſi plano perpendicularis, educta ex puncto F, in quo ſe interſecant illa duo plana, debet jacere in utroque ex ipſis (n. 24.), ac proinde congruere cum eorum communi interſectione.



Corollarium III.

27. ERgo duæ perpendiculares A B, C D eidem plano M N, ſunt in eodem plano. Nam junctis extremitatibus B & D, per rectam B D, ſuper M N excitetur planum perpendiculare A D, quod ſecet M N in recta B D: duæ perpendiculares A B, C D erunt in eodem plano A D, quod perpendiculariter inſiſtit plano M N (n. 24. & 25.).

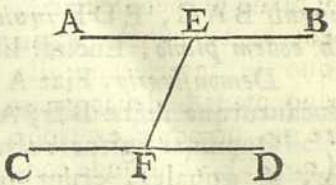


De

De occurſu Rectarum parallelarum in planam ſuperficiem.

AXIOMA VI.

28. R*Ecta* EF *ſecans rectas* AB, CD *poſitas in eodem plano, in uno eſt cum ipſis plano.* Euclid. lib. 11. prop. 7.



Corollarium.

29. HInc, ſi recta EF ſecet parallelas AB, CD, in eodem erit cum ipſis plano. Omnes enim parallelæ ſunt in uno plano.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

30. R*Ectæ* AB, CD (Fig. n. 27.), *quæ ſunt eidem rectæ* EF *parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam inter ſe ſunt parallelæ.* Euclid. lib. 11. prop. 9.

Demonſtratio. Si enim per quodvis punctum F rectæ EF ducatur planum MN perpendiculare ipſi EF, duæ rectæ AB, CD, per hyp. parallelæ eidem EF, erunt pariter perpendiculares plano MN (n. 14.), & conſequenter parallelæ inter ſe (n. 15.). Quod erat &c.

PRO-

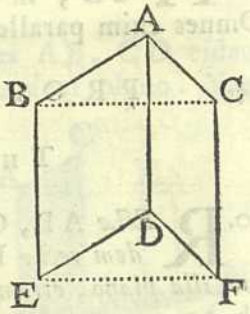
PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

31. *SI duæ rectæ* AB, AC, *quæ angulum* BAC *comprehendant, fuerint parallelæ duabus rectis* DE, DF, *quæ angulum* EDF *efficiant, erunt anguli* BAC, EDF *invicem æquales, licet non sint in eodem plano*. Euclid. lib. 11. prop. 10.

Demonstratio. Fiat AB = DE, & AC = DF; ducanturque rectæ BE, AD, CF, BC, EF.

Quoniam igitur rectæ AB, DE sunt parallelæ, & æquales, erunt in eodem plano; & rectæ AD, BE, quæ earum extremitates jungunt, pariter parallelæ, & æquales (n. 105. & 107. lib. 1. Geom. planæ). Rursum, quia per Constr. AC, DF sunt parallelæ, & æquales, rectæ AD, CF sunt pariter parallelæ, & æquales. Ergo rectæ BE, CF sunt (n. 30.) parallelæ, & æquales; & consequenter rectæ BC, EF sunt etiam parallelæ, & æquales. Itaque duo triangula BAC, EDF habent tria latera mutuò æqualia, singula singulis; & consequenter anguli BAC, EDF sunt æquales. Quod erat &c.



Corollarium.

32. ERgo, si ex binis parallelis AB, DE, altera AB sit perpendicularis uni AC ex binis aliis parallelis AC, DF, etiam secunda DE ex primis binis perpendicularis erit secundæ DF ex binis secundis.

De

De Planis parallelis.

DEFINITIO IV.

33. P*Arallela plana ſunt, quæ utcunque, & in quamlibet partem producta ſemper æquidiſtant.*

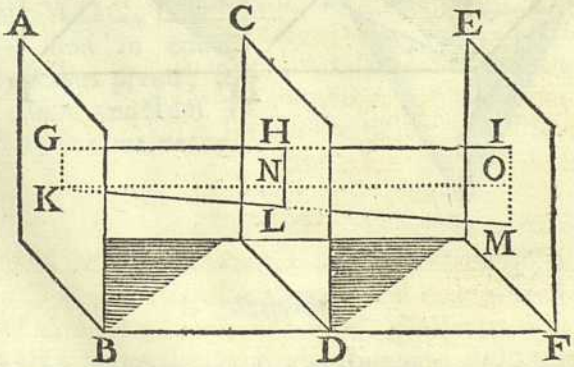
Corollarium.

34. SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 16.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

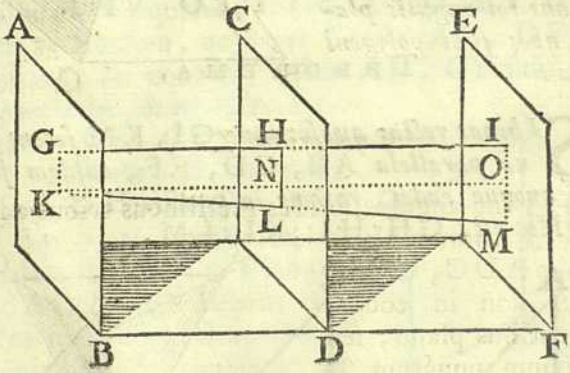
35. S*I binas rectas quaſcunque* GI, KM *ſecent plana parallela* AB, CD, EF, *eaſdem ſecabunt quoque eadem ratione in punctis* H & L. *Hoc eſt*, GH:HI::KL:LM.



Demonſtratio. Ducatur recta KO parallela ipſi GI, & occurrens planis CD, EF in punctis N & O. Quoniam (n. 34.) GK, HN, IO interſectiones planorum parallelorum ſunt inter ſe parallelæ, erit ex regulis proportionum KL:LM::KN:NO::GH:HI. Quod erat &c.

Corollarium.

36. SImili ratione, ubi planum ſecet bina plana parallela, in eorum angulis planis omnes illæ affectiones habebuntur, quas Elem. 2. Lib. 1. Geom. planæ demonſtravimus in angulis rectilineis, ubi recta ſecat binas rectas parallelas.



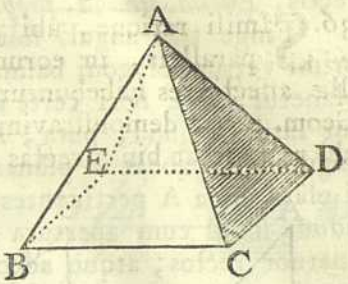
ELE-

ELEMENTUM II.

De Angulo ſolido, de Priſmate, & Cylindro.

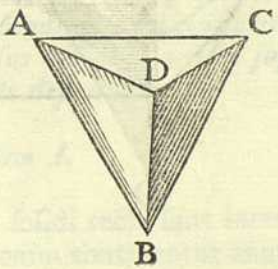
DEFINITIONES.

37. *SI ex omnibus angulis* B, C, D, E *polygoni cujuſdam rectilinei ad quodvis punctum* A *poſitum extra ejus planum ducantur rectæ, conſurget in* A *angulus ſolidus conſtans tot angulis planis, quot ſunt polygoni latera.* Angulus ſolidus



Corollarium I.

38. HInc angulus ſolidus rectilineus tribus ad minimùm planis angulis ADC, CDB, BDA non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum D conſtitutis continetur. Rectilineus :



Scholion.

QUemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum;

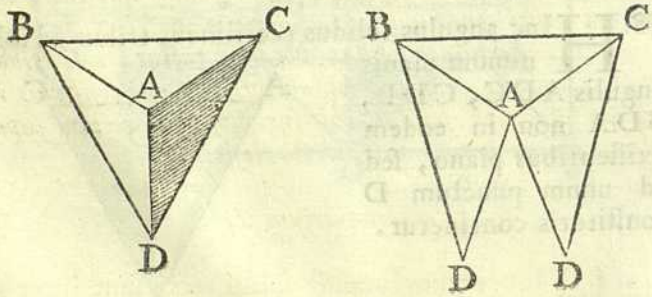
cierum; atque, ut ex tribus rectis unicum triangulum componitur, ita ex tribus angulis planis unicus angulus solidus.

Corollarium II.

Ejus quantitas:

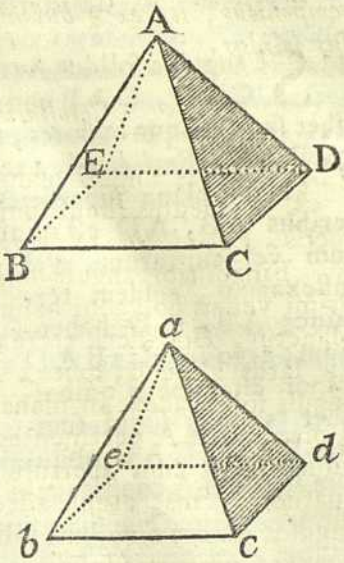
39. OMnes anguli plani angulum solidum constituentes simul sumpti minores sunt quatuor rectis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 21.

Finge tibi anguli solidi verticem A ita comprimi versùs polygoni basim BCD, ut penitus complanetur. Hoc fieri certè non potest, quin aperiatur latus aliquod, puta, AD, ac proinde figura anguli solidi abeat in planam; in qua omnes anguli plani circa A pertinentes ad priorem angulum solidum simul cum apertura nova DAD constituent quatuor rectos; atque adeo perspicuum est omnes angulos planos angulum solidum constituentes simul sumptos minores esse quatuor rectis.



40. *Æqua-*

40. *Æquales anguli ſolidi dicuntur, qui planis angulis numero, & magnitudine æqualibus, eodemque ordine diſpoſitis continentur.* Nimirum æquales erunt anguli ſolidi conſtituti ad vertices A & *a*, ſi non ſolùm fuerint quatuor anguli plani, qui utrumque conſtituant, verùm etiam, ſi ita illi ſe ſe habuerint, ut angulus BAC ſit æqualis angulo *bac*, & angulus CAD = *cad* &c. Æqualitas.



Vel, *æquales anguli ſolidi ſunt, qui intra invicem poſiti congruunt.*

41. *Angulus ſolidus vocatur rectus, qui tribus rectis angulis planis comprehenditur, uti conſtabit in cubo. Angulus ſolidus obtuſus eſt, qui rectum ſuperat, acutus verò, qui a recto deficit.* Angulus ſolidus rectus: obtuſus: acutus.

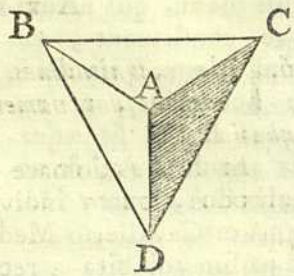
Corollarium I.

42. HInc omnes anguli ſolidi recti ſunt inter ſe æquales. Omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine æqualibus.

Corollarium II.

43. SI angulus ſolidus A tribus planis angulis B A C, C A D, D A B continetur, horum duo quilibet ſunt reliquo majores, nimirum B A C + C A D > D A B. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 20.

Nam plana ſuperficies B A D intercepta a lateribus A B, A D eſt minima omnium ſuperficierum vel curvarum, vel inflexarum, eoſdem terminos A B, A D habentium; ergo angulus B A D minor eſt duobus quibuſlibet angulis ſimul ſumptis B A C, C A D angulum ſolidum A conſtituentibus.



Corollarium III.

Anguli ſolidi conſtitutio.

44. EX quotcunque angulis planis poterit ſemper angulus ſolidus conſtitui, dummodo & omnes ſimul minores ſint quatuor rectis, & quivis ex iis minor ſit reliquis ſimul ſumptis. *Euclid. lib.* 11. *prop.* 23.

Scholion.

45. *QUæ hìc de angulis ſolidis minutiùs tractari ſolent, aliò transferam, tum quia pleraque neceſſaria non ſunt, & geometrico rigore demonſtrari non poſſunt ſine fuſiore apparatu, tum verò maximè quia non alium habent uſum, quàm pro figu-*

vis

ris solidis regularibus, quæ planis superficiebus terminantur, & vocantur poliedra regularia, seu corpora regularia, quippe quæ planis regularibus, & æqualibus continentur; quorum tractatio in aliis Elementis erit commodior. Nunc verò ad genesim, affectionesque explicandas aggrediamur prismatis, & cylindri, quæ multò faciliorem viam nobis aperient ad reliqua solidorum symptomata demonstranda.

AXIOMA.

46. *ILlæ magnitudines sunt æquales, quarum elementa sunt numero, & quantitate respectivè æqualia.*

In hoc Axiomate tota vertitur demonstrandi methodus, quam indivisibilium vocant, a Bonaventura Cavallerio Mediolanensi primùm inventa, & passim adhibita a recentioribus Geometris, qui eam mollire conati sunt, substituendo loco indivisibilium evanescentia divisibilia, quæ Cavallerianæ methodo apprime quadrant; ut alibi in hisce Elementis planum faciam, ne Tirones morer in ipso limine. Summam itaque trado hujus methodi indivisibilium, quantùm satis est ad progrediendum. Methodus Indivisibilium.

I. Considerantur lineæ quasi ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, solida ex infinitis planis, aliisve superficiebus, ut res postulaverit.

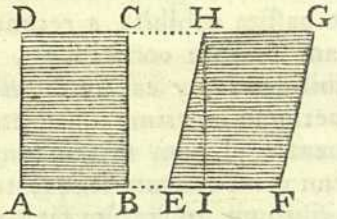
II. Indivisibilia hæc elementa, ac tota eorum summa comparatur in una magnitudine cum singulis elementis, eorumque summà in altera magnitudine; & sic duarum magnitudinum ratio, vel æqualitas determinatur.

Hinc, si duarum superficierum, vel solidorum

elementa demonſtrentur eſſe numero, & quantitate reſpectivè æqualia, duæ illæ ſuperficies, vel ſolidæ magnitudines erunt æquales; numerus autem horum elementorum determinatur a perpendiculari, quæ vel ſuperficierum, vel ſolidorum metitur altitudinem.

Exemplum. Demonſtrare oporteat duo parallelogramma ſuper eadem baſi, vel æquali, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia.

Summa linearum, quæ componunt ſuperficiem primi parallelogrammi æquatur ſummæ linearum, quæ componunt ſuperficiem ſecundi. Nam utriuſque ſumma in ſpatio ab iiſdem parallelis intercepto concluditur, cujus extenſionem metitur perpendicularis CB = HI. Similiter lineæ lineis æquales eſſe demonſtrantur, ſingulæ ſingulis. Ergo duo hæc parallelogramma ex eodem æqualium elementorum numero conſtant, ac proinde æqualia ſunt.



Eodem principio mox demonſtrabitur vel ratio, vel æqualitas ſolidorum.

Scholion.

QUàm circumſcriptè hac methodo utendum ſit, quæ vitandæ æquivocationes, an differat de re ab antiqua exhauſtionum methodo, & quibus de cauſis hanc indiviſibilium methodum antiquæ prætulerint recentiores Geometræ, exponam fuſiùs peculiari diſſertatione in calce horum Elementorum.

De

De Prismate, & Cylindro.

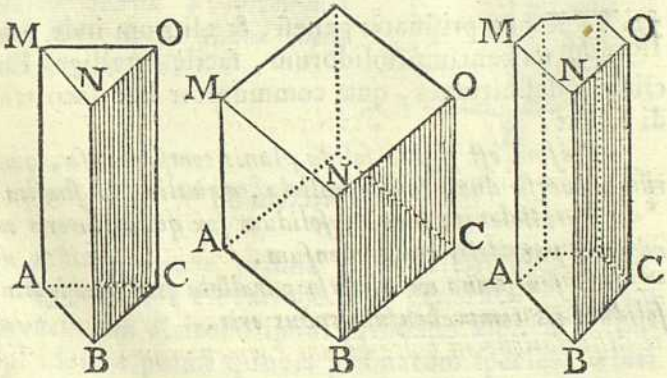
DEFINITIONES.

47. *SI planum quodvis* ABC *motu sibi semper parallelo moveatur juxta directionem rectæ* AM, *spatium solidum, quod ab eodem plano describitur, vocatur prisma.* Prisma.

48. *Planum* ABC, *ex cujus motu gignitur prisma, basis generatrix dicitur. Recta* AM *directrix, & perpendicularis ducta a quovis puncto basis generatricis ad basim oppositam, vocatur altitudo prismatis.* Basis generatrix. Directrix. Altitudo.

49. *Si linea directrix* AM *perpendicularis sit basi generatrici* ABC, *prisma dicitur rectum; aliter, obliquum.* Prisma rectum: Obliquum.

50. *Si basis generatrix* ABC *sit parallelogrammum, hujusmodi prisma vocari solet parallelepipedum; quod rectum, aut obliquum erit, uti directrix, perpendicularis fuerit, aut obliqua basi generatrici. Pa-* Parallelepipedum Rectum, aut obliquum:

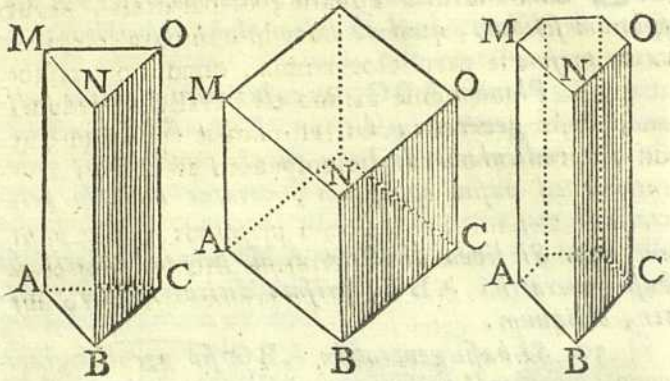


ral-

Rectangulum. *rallelepipedum dicitur etiam rectangulum, si & rectum sit, ejusque basis generatrix sit pariter rectangulum.*

51. *Cubus autem vocari solet parallelepipedum rectangulum, cujus basis sit quadratum, & linea directrix* AM *æquetur lateri* AB *ejusdem basis.*

Cubus.



Corollarium I.

52. EX hac prismatis genesi, & aliorum inde subnascentium solidorum, facilè intelliges Euclidæas definitiones, quæ communiter hoc loco tradi solent.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum adversa duo, sunt parallela, æqualia, & similia.

Parallelepipedum est solidum sex quadrilateris ex adverso parallelis comprehensum.

Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata, solidum iis comprehensum cubus erit.

Co-

Corollarium II.

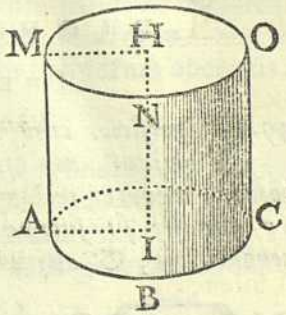
53. HInc omne parallelepipedum eſt priſma, licet non omne priſma ſit parallelepipedum. Nam in omni parallelepipedo duo plana poſita ex adverſo ſunt ſimilia, æqualia, & parallela, prout priſma poſtulat. Verùm, cùm hæc in parallelepipedo debeant eſſe parallelogramma, quod non poſtulat priſma, non omne priſma eſt parallelepipedum. In quo diſferant & conveniant.

Similiter omnis cubus eſt parallelepipedum; at non viciſſim omne parallelepipedum eſt cubus.

54. *Cylindrus eſt ſpecies priſmatis, cujus baſis generatrix eſt circulus; diciturque rectus, aut obliquus, prout directrix* AM *perpendicularis eſt, aut obliqua baſi generatrici.* Cylindrus.

55. *Axis cylindri recti, aut obliqui eſt recta* HI *baſium centra connectens.* Axis.

56. *Gignitur etiam cylindrus rectus a rectangulo* AMHI *circa unum latus* HI *in orbem ducto.*



Corollarium I.

57. CUm omne priſma gigni intelligatur ex parallela elevatione baſis generatricis, quam elevationem altitudo ipſius priſmatis metitur: concipi idcirco poteſt quævis priſmatum ſpecies veluti compoſita ex tot planis rectilineis ſibi mutuò impoſitis, adeoque inter ſe parallelis, ſimilibus, & Compoſitio priſmatum, & menſura.

æqua-

æqualibus, quot ſunt puncta in illius altitudine. Quare poteſt priſma quodcunque aſſumi, veluti factum ex ductu baſis in altitudinem.

Corollarium II.

Superficies priſmatis.

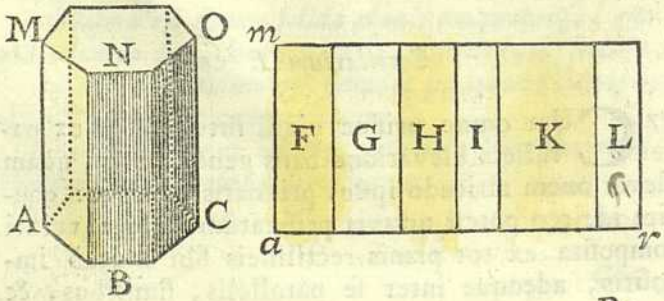
58. DEmpta baſi generatrice ABC, & ipſi oppoſita MNO, ſuperficies priſmatis componitur ex totidem parallelogrammis, quot baſis generatrix ABC habet latera.

Nam in geneſi priſmatum ſuperiùs deſcripta, latus quodlibet baſis generatricis movetur motu ſibi parallelo juxta directionem lineæ rectæ, ac proinde parallelogrammum gignit. Si priſma rectum ſit, quodlibet horum parallelogrammorum erit rectangulum.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

59. *SUperficies cujuſvis priſmatis ſive recti, ſive obliqui, non comprehenſis baſibus utrinque oppoſitis, æquatur rectangulo* FGHIKL, *cujus baſis* ar *æqualis ſit ſummæ laterum, ſive perimetro baſis generatricis, & altitudo æqualis altitudini priſmatis.*



De-

Demonſtratio. Nam (n. 58.) ſuperficies cujuſvis priſmatis, non comprehenſis baſibus utrinque oppoſitis, componitur ex totidem parallelogrammis, quot baſis generatrix habet latera. Atqui parallelogramma ſingula, quibus ſuperficies componitur, æqualia ſunt ſingulis parallelogrammis F, G, H, I, K, L, quorum per hyp. æquales ſunt reſpectivè baſes, & altitudo utrinque communis. Ergo ſuperficies cujuſvis priſmatis &c. Quod erat &c.

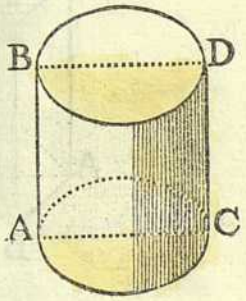
Corollarium I.

60. CUm autem baſis priſmatis multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta eorum magnitudine abeat in curvam continuam, ſatis patet priſma abire in ſolidum cylindricum, cujus ſuperficies, demptis utrinque baſibus oppoſitis, æqualis erit rectangulo *m a r*, habente baſim *a r* æqualem perimetro circuli A B C, & altitudinem *m a* æqualem altitudini dati priſmatis in cylindrum abeuntis. Superficies cylindri.

Corollarium II.

61. ERgo ſuperficies convexa cylindri recti, cujus altitudo A B eſt æqualis diametro A C ſuæ baſis, erit quadrupla areæ ejuſdem baſis.

Nam circulus, hoc eſt, baſis generatrix hujus cylindri æquatur rectangulo, cujus baſis ſit circuli perimeter, & altitudo ſemiſſis radii (n. 296. lib. 1. Geom. planæ); & ſuperficies convexa ejuſdem cylindri eſt æqualis rectangulo, cujus baſis ſit idem circuli perimeter, & altitudo ejuſdem diameter, ſive ſemiſſis radii quater ſumpta.



PRO-

PROPOSITIO II.

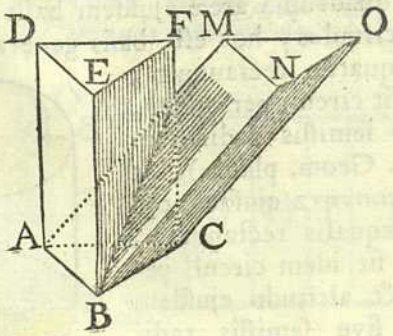
THEOREMA.

Æqualitas prismatum.

62. PRismata ABCDEF, ABCMNO, *quæ eamdem habeant basim, aut bases æquales, & inter parallela plana existant, erunt æqualia.* Euclid. prop. 29. & 30. lib. 11.

Demonstratio. Ad normam genesis superiùs descriptæ concipiamus prisma quodvis tanquam compositum ex infinitis laminis, seu superficiebus rectilineis invicem superimpositis, & basi generatrici parallelis: lamina quælibet hujus prismatis æqualis erit basi generatrici (n. 47.); & consequenter, si duo prismata eamdem habeant basim, aut bases æquales, componentur etiam ex laminis, seu superficiebus rectilineis æqualibus.

Rursum, quia per hyp. prismata existunt inter parallela plana, necesse est, ut eodem prorsus laminarum numero componantur. Cùm enim duo plana parallela semper æquidistent, fieri non potest ut major laminarum numerus congeratur in unum

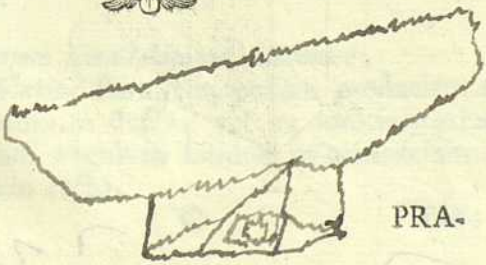


pris-

prisma, quàm in aliud. Ergo duorum prismatum, quæ æqualem, vel eamdem habent basim, & altitudinem, elementa omnia sunt numero, & magnitudine respectivè æqualia; ac proinde per axioma n. 46. erunt inter se æqualia. Quod erat &c.

Corollarium.

63. ERgo prismata, quorum bases, & altitudines æquantur, sunt pariter æqualia; nam possunt inter parallela plana existere.



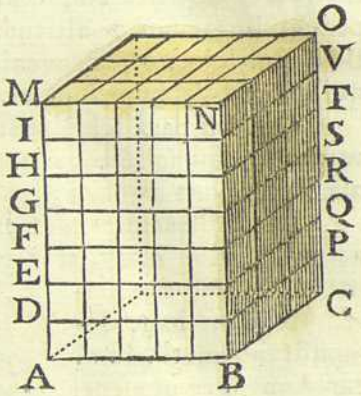
PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. SOLIDORUM.

Dimensio Prismatum, & Cylindrorum.

64. CORPORUM mensura est cubus alicujus notæ mensuræ linearis, ut pollicis, palmi, pedis &c. Recta MI repræsentat longitudinem unius pedis, supra quam descriptum sit quadratum, sive pes quadratus. Cubus supra hoc quadratum descriptus, est cubus unius pedis, sive pes cubicus; cujus nimirum & longitudo, & latitudo, & altitudo, hoc est, dimensiones singulæ sunt unius pedis. Atque idem de aliis mensuris intellige. Vide quæ diximus n. 39. Geom. planæ.



PROBLEMA I.

65. *Soliditatem parallelepipedi invenire.*

Resolutio. Parallelepipedum producitur ex basi in altitudinem ducta, vel ex multiplicatione trium laterum angulum solidum continentium in parallelepipedo recto.

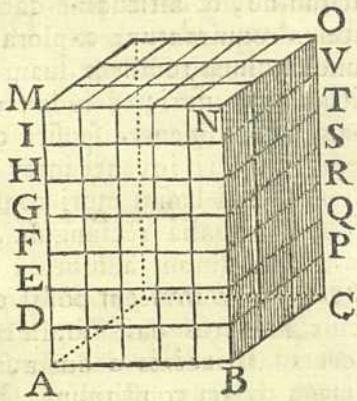
Basis ad arbitrium est quodlibet unum e planis sex, quæ parallelepipedum continent, puta, planum ABC.

Altitudo autem est perpendicularis inter basim ABC, & planum oppositum MNO extensa, quæ in parallelepipedo recto est ipsum latus ejus BN.

Metire igitur tria latera BA, BC, BN angulum solidum continentia. Esto BA pedum 5, BC pedum 3, quibus inter se multiplicatis producetur numerus quadratorum pedum 15, quibus basis ABC æqualis est; quo deinde per numerum pedum linearium 7 altitudinis, seu lateris tertii BN multiplicato, provenient 105 pedes cubici, quibus parallelepipedum æquale est.

Quòd si parallelepipedum sit cubus, uno latere noto, ejus soliditas innotescit. Cubi enim omnia latera sunt æqualia.

Demonstratio pendet ex genesi, & compositione prismatum n. 47. tradita; cui ut assuescant Tirones, sibique familiarem reddant hanc demonstrandi methodum, eamdem in re præsenti juvat retexere.



Intelligatur basis ABC moveri versùs MNO juxta directricem BN, ea lege, ut semper maneat sibi ipsi parallela. Quando basis ABC absolverit unum pedem AD, constat singula ejus quadrata,

drata, ſeu pedes quadratos produxiſſe unum cubum, ſeu unum pedem cubicum. Rurſum ubi abſolverit pedem ſecundum D E, ſinguli baſeos pedes quadrati produxerunt cubicum pedem unum; & ſic deinceps per reliquos lateris, ſeu altitudinis A M pedes procedendo. Ergo quando baſis pervenerit in M N O, hoc eſt, quando totum parallelepipedum deſcripſerit, manifeſtum eſt, ipſam tot pariter produxiſſe pedes cubicos, quantus eſt numerus, qui fit ex quadratis pedibus baſeos multiplicatis per pedes altitudinis B N; ac proinde ex altitudine in baſim ductà innoteſcit vera quantitas parallelepipedi. Quod erat &c.

Corollarium.

66. QUando conclavia, cubicula, aulæ plerumque parallelepipeda ſunt, eorum capacitas ex hoc Problemate nullo negotio deducitur.

Si murus extruendus proponatur, longitudine, latitudine, & altitudine datis; & quæſtio ſit, quot lateres requirantur: explora prius, quot lateres ſecundùm longitudinem ſuam diſpoſiti expleant longitudinem muri; deinde, quot lateres ſecundùm ſuam latitudinem diſpoſiti expleant muri latitudinem: numeri inventi inter ſe multiplicati dabunt lateres, qui baſim muri conſtituunt; perinde enim eſt ſive æqualia rectangula, ſive quadrata æqualia ad menſuram adhibeas. Inquire tandem, quot lateres ſupra invicem poſiti expleant muri altitudinem: numerus baſis ſupra repertus, ductus in numerum altitudinis dabit numerum laterum, qui murum totum conſtituunt; habenda tamen erit ratio ſpatii a calce lateribus intermixta occupandi.

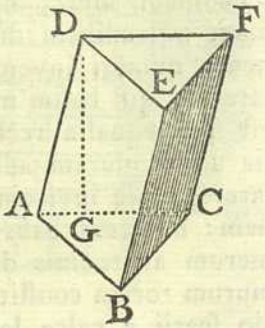
PROBLEMA II.

67. *Soliditatem prismatis cujuscunque invenire.*

Resolutio. Prismatis soliditas producitur ex basi ducta in altitudinem. Est autem basis alterutrum e parallelis planis; quæ, quoniam efformari possunt per figuras quaslibet rectilineas, etiam prismatum species innumeræ sunt. Altitudo est perpendicularis, utraque plana parallela tangens. Si prisma rectum est, latus ipsum est altitudo.

Fac igitur notam prismatis altitudinem DG in aliqua mensura. Si prisma sit erectum, e plano superiore ad inferius demitte perpendiculum, cujus longitudinem metire aliqua mensura. Si prisma jaceat in terra, inter utrumque parallelum planum extende perpendiculariter normæ adminiculo productum funem; ejusque longitudinem metire, ut prius.

Deinde, ut Elem. 7. Lib. 1. Geom. planæ traditum est, ubi omnis generis figuræ rectilineæ mensurantur, unam ex basibus ABC notam redde in quadratis ejusdem mensuræ, qua altitudinem fecisti notam: numerus quadratorum basis ductus in numerum altitudinis, dabit numerum cuborum ejusdem mensuræ, quibus datum prisma æquale est.

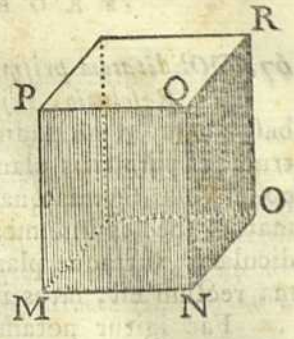


Demonstratio patet ex n. 47.

Vel, super rectangulo, quod basi ABC æquale sit, intelligatur erigi parallelepi-

pedum

pedum rectum MR, ejusdem altitudinis cum prismate ABCDEF: erit hoc prismati æquale (n. 62.). Atqui parallelepipedum istud producitur ex basi sua ducta in suam altitudinem (n. 65.), hoc est, per Constructionem ex prismatis basi ABC in altitudinem ejusdem prismatis. Ergo etiam prisma ABCDEF producitur ex basi ABC in altitudinem prismatis. Quod erat &c.



PROBLEMA III.

68. *Cylindrum metiri.*

Resolutio. Omnis cylindri soliditas habetur ex basi in altitudinem ducta. Metire igitur cylindri altitudinem aliquà mensurà: item basis diametrum; tum ex hac inquire (n. 297. Geom. planæ), quot quadrata ejusdem mensuræ contineat basis. Hæc per altitudinem multiplicata dabit ejusdem mensuræ cubos, quibus cylindrus datus æqualis est.

Demonstratio constat ex n. 54.

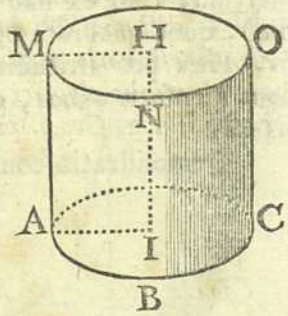
Scholion.

69. *PEr cylindrum hìc intelligo non eum tantummodo, qui propriè cylindrus dicitur, & definitur n. 54.; sed etiam omnia illa solida, quæ fiunt ex plano curvilineo quocunque ducto in aliquam altitudinem, dummodo basis curvilineæ, vel elypticæ, vel alterius generis dimensio in aliqua nota mensura, saltem quàm proximè inveniatur. Pro his omnibus regula universalis tradita est.*

Aliter.

70. *CYlindri recti dimensio facilior.*

Resolutio. Metire latus AM, & radium AI basis: hæc in se invicem ducta dabunt aream rectanguli AMHI; tum ex radii AI semisse, tanquam radio, elice peripheriam illi debitam (n. 297. Geom. planæ). Area rectanguli ducta in hanc peripheriam dabit cubos, quibus cylindrus æqualis est.



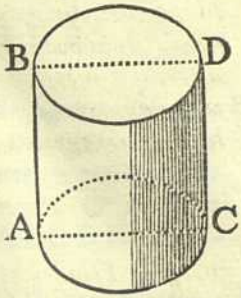
Demonstratio patet ex prop. 2. lib. 3. cyl., & Annul. P. Taquet, ejusque corollario, ubi demonstrat cylindrum æquari parallelepipedo, cujus basis est rectangulum IM, quod cylindrum genuit; altitudo autem par peripheriæ, cujus radius est semissis radii AI.

PRO-

PROBLEMA IV.

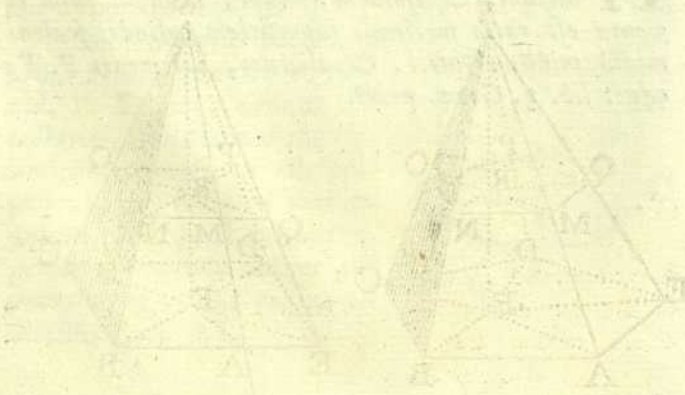
71. *CUrvam Cylindri circularis recti ſuperficiem metiri.*

Reſolutio. Cylindrica ſuperficies producitur ex circumferentia baſis ducta in altitudinem. Metire igitur diametrum AC baſis cylindri, ex qua reperi circumferentiam baſis; tum menſurà eàdem metire altitudinem. Hæc in circumferentiam ducta exhibebit ejuſdem menſuræ quadrata, quibus cylindri curva ſuperficies (demptis nempe baſibus, quæ ſunt duo circuli) æqualis eſt.



Scholion.

HÆc regula tantùm pertinet ad cylindrum ſtrictè dictum, & quidem rectum; nondum enim inventa eſt ratio metiendi ſuperficiem cylindri ſcaleni, multò minùs elyptici, & aliorum, uti monet P. Tacquet lib. 3. Geom. pract.



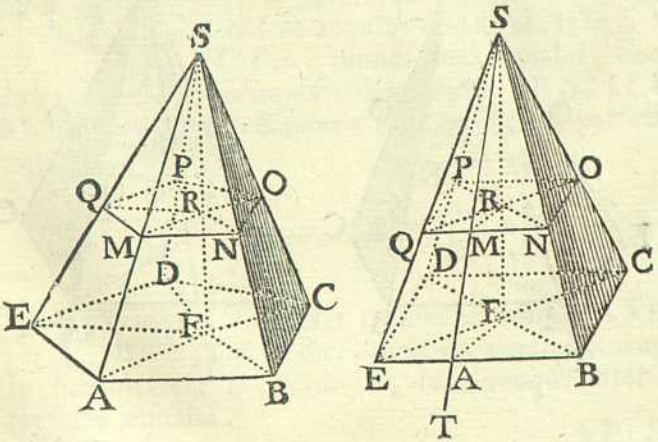
ELEMENTUM III.

De Sectionibus Pyramidis, & Coni, ac de horum Solidorum affectionibus, & comparatione cum Prismate, & Cylindro.

DEFINITIONES.

72. PYRAMIS SABCDE *est figura solida, pluribus, quàm duobus, triangulis planis rectilineis comprehensa, quorum vertices in unum omnes punctum* S *coeant, & ipsorum bases figuram planam rectilineam* ABCDE *constituant.* Pyramis.

73. *Planum rectilineum* ABCDE *Basis dicitur;* Basis. & potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum &c.; a quo quidem tota pyramis denominationem sumit, ita ut dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona &c.; tot enim



trian-

triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot anguli, seu latera in illius base numerantur.

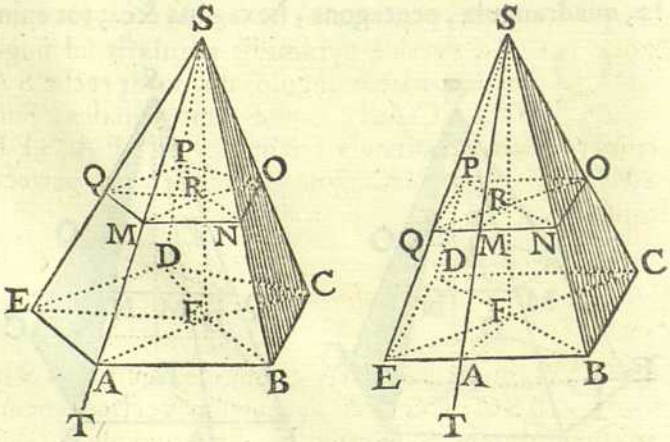
Vertex. 74. *Punctum* S, *in quo coeunt omnium triangulorum vertices, nuncupatur summitas, seu Vertex pyramidis.*

Altitudo. 75. *Perpendicularis* SF *a vertice* S *ducta in planum rectilineum basis* ABCDE, *dicitur Altitudo pyramidis.*

Axis. Pyramis recta, & inclinata. 76. *Axis verò vocatur recta ducta a vertice in centrum basis. Si axis ad perpendiculum basi incumbat, pyramis recta vocatur; inclinata verò, si axis obliquè ad basim se habeat.*

Scholion.

UT *triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter solidas prima, & simplicissima est.*



77. Ali-

77. Aliter etiam, ac multò universaliùs definiri pyramis, & conus hac ratione potest.

Si extra planum quodvis ABCDE *acceptum fuerit punctum* S, *ab eoque ducatur recta indefinita* ST, *tangens planum in* A, *quæ, puncto* S *manente fixo, circa perimetrum plani* ABCDE *convertatur, donec in eum locum* SAT *redeat, unde moveri cœperat: superficies a recta linea* ST *descripta, dicitur pyramidalis superficies; corpus verò, quod hac superficie, & plano rectilineo continetur, pyramis vocatur.* Pyramidis genesis.

78. *Si pyramis* SABCDE *pro basi habeat polygonum regulare* ABCDE; *& recta* SF *ducta a vertice* S *ad centrum* F *circuli, cui polygonum potest inscribi, sit perpendicularis plano hujus polygoni: dicetur pyramis regularis.* Pyramis regularis.

Corollarium I.

79. QUæ a vertice pyramidis regularis ad singulos suæ baseos angulos ducuntur rectæ SA, SB, SC &c., omnes sunt æquales. Sunt enim totidem hypotenusæ triangulorum SFA, SFB, SFC &c., quæ rectangula sunt in F, & perfectè æqualia.

Corollarium II.

80. PYramidis regularis triangula omnia ASB, BSC, CSD &c., quorum vertices coeunt in summitatem S pyramidis, sunt quoque inter se perfectè æqualia.

81. Si

81. *Si basis pyramidis sit circulus, pyramis vocatur Conus.*

Conus.

Rectæ SA, SB, SC *a vertice* S *coni ad circumferentiam baseos ductæ, vocantur Latera coni;* quæ tota esse in coni superficie, ex ejus genesi manifestum est.

Latera coni.

Axis coni est recta SF *ex vertice ad baseos centrum ducta.*

Axis.

Altitudo coni est perpendicularis SI *ducta a vertice coni in ejusdem basim* ABCDE.

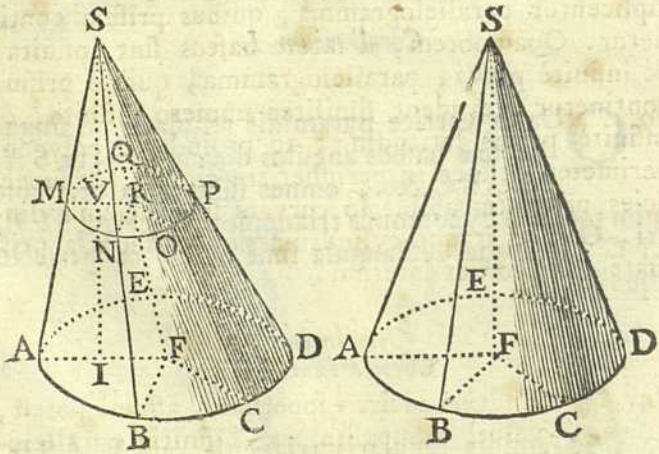
Altitudo.

Si coni axis SF *sit suæ basi perpendicularis, conus rectus vocatur;* idemque axis SF vicem altitudinis obibit.

Conus rectus,

Sin autem coni axis SF *sit suæ basi obliquus, conus vocabitur obliquus, seu scalenus;* ejusque axis SF altitudinem SI superabit.

Scalenus.



Scho-

Scholion.

82. *COnus rectus concipi etiam potest genitus a triangulo rectangulo* S F A *circa unum latus* S F *basi perpendiculare in orbem ducto; ex qua genesi rursum infertur rectas omnes* S A, S B, S C *ductas a vertice coni recti ad circumferentiam suæ basis, esse inter se æquales.*

LEMMA I.

83. *CYlindrus considerari potest tanquam prisma infinitorum laterum.*

Spectetur prisma, cujus utraque basis opposita sit polygonum regulare. Evidens est multiplicari non posse latera polygoni baseos, quin pariter multiplicentur parallelogramma, quibus prisma continetur. Quamobrem, si latera baseos sint infinita, & infinitè parva, parallelogramma, quibus prisma continetur, evadent similiter numero infinita, & infinitè parvæ latitudinis; ac proinde & polygoni perimeter desinet in peripheriam circuli, & superficies prismatis abibit in curvam superficiem cylindri. Constat itaque cylindrum non differre a prismate infinitorum laterum.

Corollarium.

84. CYlindrica idcirco superficies assumi potest, veluti composita ex infinitis parallelogrammis infinitè parvæ latitudinis.

LEM-

LEMMA II.

85. *Conus considerari potest tanquam pyramis infinitorum laterum.*

Nam quemadmodum polygonum regulare, sive basis pyramidis abit in peripheriam circuli, si in infinitum multiplicantur ipsius latera; ita superficies pyramidis in eo casu abibit in curvam superficiem coni; ac proinde ipsa pyramis in conum transibit, sive a cono discerni nulla ratione poterit.

Corollarium.

86. Hinc considerari potest superficies coni, veluti composita ex infinitis triangulis, basim infinitè parvam habentibus.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

87. *Si pyramis, aut conus* SABCDE *secetur plano* MNOPQ *parallelo basi, erunt omnes rectæ* SF, SA, SB, SC *&c. ductæ a vertice* S *ad basim* ABCDE, *proportionaliter ab eodem sectæ; hoc est,* SF:SR::SA:SM::SB:SN::SC:SO &c.

Demonstratio. Per rectam SF a vertice S productam utcumque ad basim, & per alias totidem SA, SB, SC &c. similiter a vertice ad basim protractas, ducantur plana SFA, SFB, SFC &c.

Perspicuum est (n. 34.) rectas MR, NR, OR &c. parallelas fore rectis AF, BF, CF, singulas

gulas ſingulis; quamobrem triangula ASF, BSF, CSF &c. ſimilia erunt triangulis MSR, NSR, OSR &c. Atque hinc erit SF:SR::SA:SM::SB:SN::SC:SO &c. Quod erat &c.

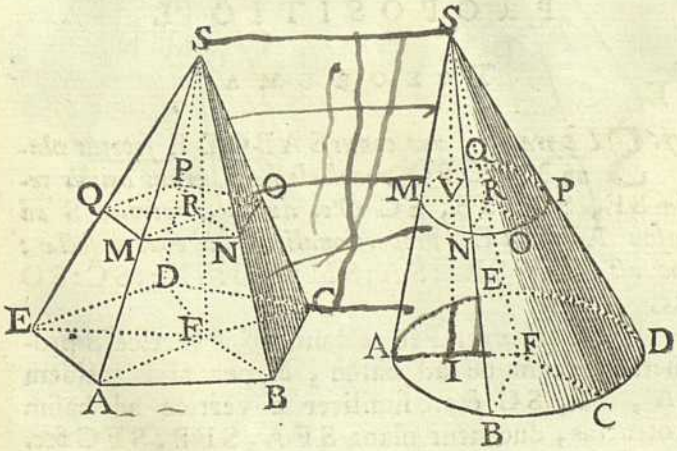
PROPOSITIO II.

THEOREMA.

88. *SI pyramis quævis* SABCDE *ſecetur plano* MNOPQ *parallelo baſi, erit ſectio* MNOPQ *ſimilis baſi* ABCDE.

Demonſtratio. Cùm enim latera AB, BC, CD &c. baſis ABCDE parallela ſint lateribus MN, NO, OP &c. plani paralleli MNOPQ (n. 34.), erit

I. Angulus ABC = MNO, & BCD = NOP &c.



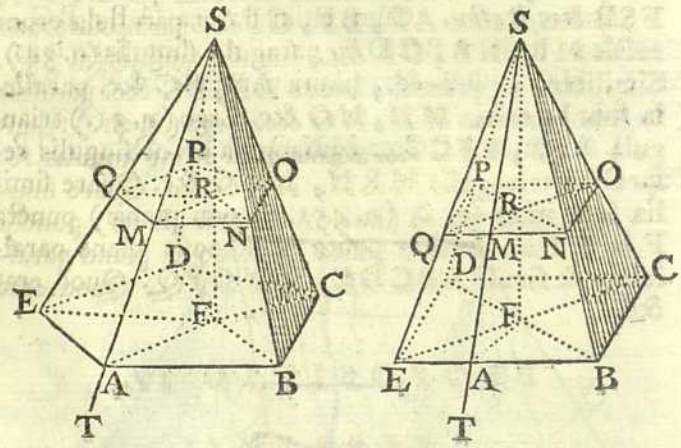
II. In

II. In planis æquiangulis ABCDE, MNOPQ, latera circa æquales angulos erunt proportionalia.

Nam propter parallelas AB, MN, triangula ASB, MSN ſunt ſimilia; ac proinde AB:MN:: SB:SN.

Similiter propter parallelas NO, BC, triangula BSC, NSO ſunt ſimilia; & conſequenter SB:SN::BC:NO.

Ergo AB:MN::BC:NO; atque ita de reliquis. Quare ſectiones MNOPQ, ABCDE ſunt ſimiles. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

89. *SI a vertice* S *pyramidis ducatur utcunque in basim recta* SF, *punctum* R, *ubi sectioni parallelæ eadem occurrit, & punctum* F *basis, erunt puncta similiter posita in basi* ABCDE, *& in sectione parallela* MNOPQ. Puncta similiter posita.

Demonstratio. Per rectam SF, & per rectas SA, SB, SC &c. ducantur totidem plana FSA, FSB &c. Rectæ AF, BF, CF &c. parallelæ erunt rectis MR, NR, OR &c., singulæ singulis (n. 34.). Similiter, ex præced., latera AB, BC &c. parallela sunt lateribus MN, NO &c. Ergo (n. 31.) triangula AFB, BFC &c. æquiangula erunt singulis respectivè triangulis MRN, NRO &c. Quare similia sunt inter se, & (n. 451. Geom. planæ) puncta F & R sunt similiter posita in utroque plano parallelo, & simili ABCDE, MNOPQ. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

90. *LIneæ homologæ* AF, MR, *sive intersectiones planorum parallelorum cum plano transeunte per rectam* SF, *ac præterea latera homologa* AB, MN, *& perimetri basis, & sectionis, erunt omnia duabus rectis* SF, SR *proportionalia*.

Demonstratio. Nam propter rectarum AF, MR parallelismum, triangula ASF, MSR sunt

 simi-

ſimilia; ac proinde AF:MR::SF:SR. Quod erat primum.

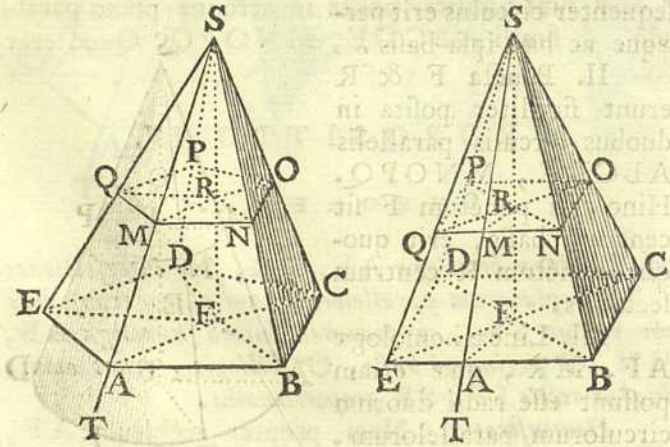
Et quoniam triangula AFB, MRN ſunt ſimilia ex præced., erit AB:MN::AF:MR; & conſequenter AB:MN::SF:SR. Quod erat ſecundum.

Denique, quia (n. 88.) polygona ABCDE, MNOPQ ſimilia ſunt, erunt (n. 476. Geom. planæ) inter ſe, uti AB ad MN. Ergo ABCDE: MNOPQ::SF:SR. Quod erat tertium.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

91. A*Reæ baſis* ABCDE, *& ſectionis parallelæ* MNOPQ *erunt quadratis* $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$ *proportionales.*



De-

Demonstratio. Quoniam (n. 88.) duo plana parallela ABCDE, MNOPQ sunt similia, erit (n. 500. Geom. planæ) area ABCDE ad aream MNOPQ :: $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Atqui, ex præced., AB : MN :: SF : SR; & consequenter $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{SF}^2 : \overline{SR}^2$. Ergo area ABCDE ad aream MNOPQ :: $\overline{SF}^2 : \overline{SR}^2$. Quod erat &c.

Corollarium I.

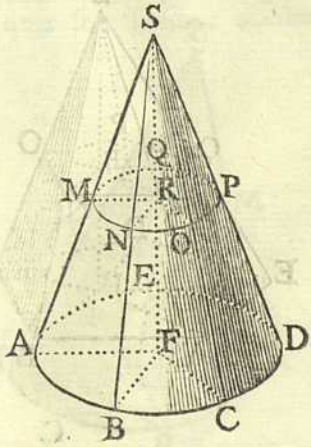
92. QUia conus considerari potest tanquam pyramis infinitorum laterum (n. 85.); hinc quæcunque dicta sunt de sectione pyramidis, locum habebunt in cono. Sectiones coni.

Quare, si conus SABCDE secetur plano MNOPQ parallelo suæ basi ABCDE,

I. Sectio MNOPQ erit basi similis; & consequenter circulus erit peræque ac hæc ipsa basis.

II. Puncta F & R erunt similiter posita in duobus circulis parallelis ABCDE, MNOPQ. Hinc, si punctum F sit centrum basis, erit quoque punctum R centrum sectionis.

III. Lineæ homologæ AF, MR, quæ etiam possunt esse radii duorum circulorum parallelorum, proportionales erunt dua-

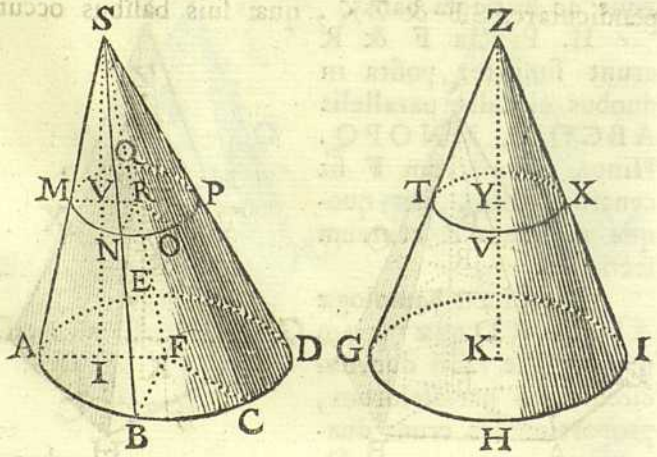


bus lineis SF, SR. Cùm autem circulorum perimetri ſint, ut radii (n. 480. Geom. planæ); hinc horum perimetri erunt, ut rectæ SF, SR, quæ a vertice pyramidis per centra circulorum parallelorum tranſeunt.

IV. Cùm ſuperficies circulorum proportionales ſint quadratis radiorum (n. 506. Geom. planæ); hinc circulorum parallelorum ſuperficies ABCDE, MNOPQ proportionales erunt quadratis $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$ duarum rectarum, quæ a vertice pyramidis per centra circulorum tranſeunt.

Corollarium II.

93. SI a vertice coni ad quodvis punctum I baſis ducatur recta SI, quæ occurrat in U ſectioni circulari MNOPQ parallelæ ipſi baſi, erit (n. 87.) SF:SR::SI:SU, & $\overline{SF}^2:\overline{SR}^2::\overline{SI}^2:\overline{SU}^2$. Atqui, ex præced. Coroll., radii AF, MR, & pe-



rimetri

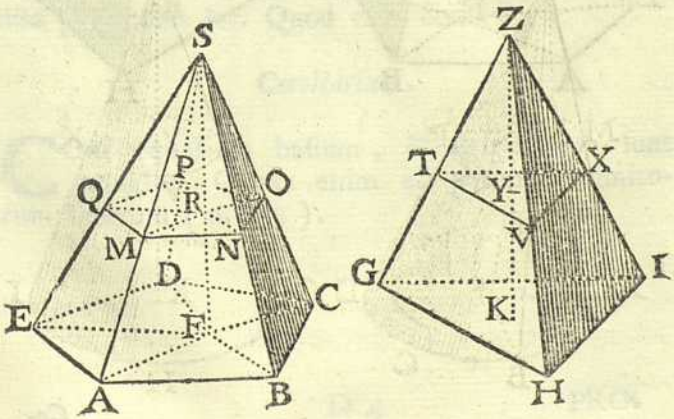
rimetri duorum circulorum parallelorum ABCDE, MNOPQ ſunt proportionales rectis SF, SR, & ſuperficies horum circulorum quadratis $\overline{SF}^2$, $\overline{SR}^2$. Ergo radii AF, MR, & circulorum perimetri ſe habent, ut rectæ SI, SU; & horum ſuperficies, uti quadrata $\overline{SI}^2$, $\overline{SU}^2$.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

94. *SI duæ pyramides, aut coni* SABCDE, ZGHI *ejuſdem altitudinis ſecentur plano baſibus parallelo, & in æquali ab utriuſque vertice, vel baſi diſtantia: erunt areæ ſectionum* MNOPQ, TVX *proportionales areis ſuarum reſpectivè baſium* ABCDE, GHI. Areæ ſectionum.

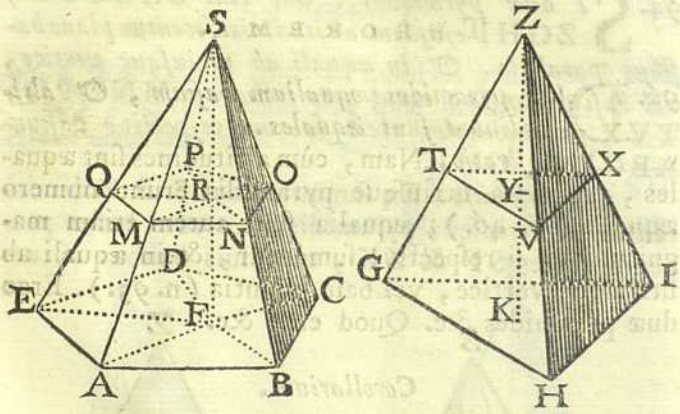
Demonſtratio. Ex ſummitatibus S & Z demittantur in utriuſque pyramidis, aut coni baſim perpendiculares SF & ZK, quæ ſuis baſibus occur-



 rant

rant in F, K, & planis ſectionum parallelis occurrant pariter in R, Y.

Quoniam, per hyp., eadem eſt utriuſque pyramidis altitudo, eademque ſectionum parallelarum diſtantia a ſuis ſummitatibus S & Z, erit $SF = ZK$, & $SR = ZY$; ac proinde $\overline{SF}^2 = \overline{ZK}^2$, & $\overline{SR}^2 = \overline{ZY}^2$. Atqui area MNOPQ ad aream ABCDE :: $\overline{SR}^2 : \overline{SF}^2$ (n. 91.), ſive :: $\overline{ZY}^2 : \overline{ZK}^2$; & $\overline{ZY}^2 : \overline{ZK}^2$ :: area TVX : ad aream GHI. Ergo area MNOPQ :: ABCDE :: TVX : GHI; & alternando MNOPQ : TVX :: ABCDE : GHI. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

95. SI duæ pyramides æqualium basium, & altitudinum secentur plano earum basibus parallelo, & in æquali ab earum vertice, vel basi distantia, erunt sectionum areæ MNOPQ, TVX inter se æquales; quippe quæ proportionales sunt areis basium ABCDE, GHI, quæ ponuntur æquales.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

96. *DUæ pyramides æqualium basium, & altitudinum sunt æquales.*

Demonstratio. Nam, cùm altitudines sint æquales, elementa utriusque pyramidis erunt numero æqualia (n. 46.); æqualia sunt autem etiam magnitudine, si respectivè sumantur, & in æquali ab utriusque vertice, vel basi distantia (n. 95.). Ergo duæ pyramides &c. Quod erat &c.

Corollarium.

CONi æqualium basium, & altitudinum sunt æquales. Conus enim est pyramis infinitorum laterum (n. 85.).

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

97. *OMnis sectio parallelepipedi, prismatis, cylindri, pyramidis, aut coni, quæ sit suæ basi parallela, erit eidem basi similis.* Euclid. lib. 11. prop. 25.

Demonstratio. Nam I. res patet in parallelepipedo, prismate, cylindro, quorum genesis repetenda est ex motu sibi constanter parallelo ejusdem basis generatricis.

II. In pyramide, & cono constat n. 94.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

98. *OMnia solida ejusdem nominis invicem comparata, nimirum, parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides, aut coni, æqualium basium, & altitudinum, sunt æqualia, sive recta ea sint, sive obliqua.* Euclid. lib. 11. prop. 29. 30. & 31.

Demonstratio. Nam sectiones omnes basi parallelæ, sunt per præced. eidem basi similes; & in æquali a suis basibus, quæ ponuntur æquales, distantia, sunt magnitudine æquales; & in æquali altitudine, sunt etiam numero æquales. Ergo omnia hæc solida ejusdem nominis invicem comparata eodem constant elementorum æqualium numero; ac proinde per Axioma sunt æqualia. Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

99. ERgo in ſolidorum menſura determinanda, erit unicè habenda ratio & eorum altitudinis, & baſis. Nam, quamvis parallelepipedum obliquum plus habeat ſuperficiei, quàm rectum; tamen utriuſque ſoliditas erit æqualis, ſi æqualem ambo baſim habeant, & altitudinem.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

100. *SOlida parallelepipeda, & priſmata æqualium altitudinum, ſunt, ut baſes; & quæ habent æquales baſes, ſunt, ut altitudines.* Euclid. lib. 11. prop. 32.

Demonſtratio. Nam I., ſi ſint æqualium altitudinum, horum elementa erunt quidem utrinque numero æqualia, ſed magnitudine baſibus proportionalia, ſingula ſingulis. Ergo omnium ſumma in uno ad omnium ſummam in altero, hoc eſt (n. 46.), priſmata æqualium altitudinum, erunt inter ſe, ut baſes. Quod erat primum.

II. Si ſint æqualium baſium, horum elementa erunt quidem utrinque magnitudine æqualia, ſingula ſingulis, ſed numero altitudinibus proportionalia. Ergo omnium ſumma in uno ad omnium ſummam in altero, hoc eſt, priſmata æqualium baſium, erunt, ut altitudines. Quod erat alterum.

Co-

Corollarium.

HInc cylindri æqualium altitudinum, ſunt, ut baſes, & qui habent æquales baſes, ſunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 11. *&* 14.

Nam cylindri ſunt priſmata infinitorum laterum.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

101. *SI cylindrus plano ſecetur adverſis baſibus parallelo, erunt cylindri ſegmenta, uti ſegmenta axis.* Euclid. lib. 12. prop. 13.

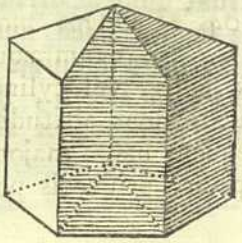
Demonſtratio. Nam omnia harum ſectionum plana erunt inter ſe æqualia. Ergo ſegmenta erunt, ut totidem cylindri æqualium baſium; ac proinde, per præced., erunt, ut altitudines; quæ in cylindris rectis ſunt ipſimet axes, & in cylindris obliquis ſunt axibus proportionales. Quod erat &c.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA.

102. *OMne priſma polygonum dividi poteſt in priſmata triangularia.*

Demonſtratio. Cùm enim adverſæ baſes oppoſitæ, parallelæ, & æquales ſint polygonæ, quæ in triangula reſolvi poſſunt; conſtat diviſionem hanc peragi poſſe in omni priſmate polygono, ut in ſubjecta figura. Quod erat &c.



PRO-

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA.

103. *SI basis prismatis æquet bases omnes plurium minorum prismatum sub eadem altitudine, etiam soliditas prismatis æquabit soliditatem reliquorum omnium simul sumptorum. Idem dicendum de pyramidibus.*

Demonstratio. Nam, si concipiantur in hisce solidis plana parallela basi, æqualis erit planorum numerus in singulis, cùm sit æqualis altitudo. Præterea planum quodlibet in majore prismate æquale erit summæ omnium in reliquis. Nam basis est ad summam basium, uti sectio in majore prismate ad summam omnium sectionum in reliquis. Atqui basis prismatis, per hyp., æquat summam basium prismatum minorum. Ergo &c. Quod erat primum.

Eadem consideratio traducitur ad pyramides sub eadem altitudine, si modò sectiones comparentur in æquali a basibus distantia. Quod erat alterum.

Corollarium.

104. EOdem modo demonstrabitur vel cylindrum æquari prismati æqualis altitudinis, & basis, vel cylindrum æquari pluribus cylindris sub eadem altitudine, quorum bases simul sumptæ æquent basim majoris cylindri. Nam cylindrus est species prismatis polygoni infinitorum laterum.

LEM-

LEMMA.

105. *OMnis pyramis polygona dividi poteſt in trigonas pyramides.*

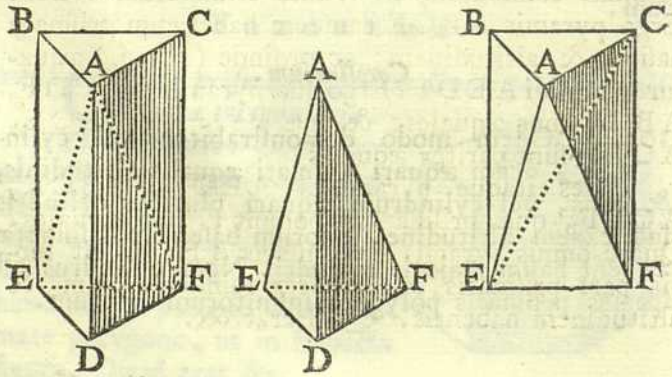
Nam pyramidis polygonæ baſis eſt polygonum, quod reſolvi poteſt in triangula. Jam verò, ſi a vertice pyramidis polygonæ, juxta directionem laterum ejuſdem, concipiantur totidem plana, quæ per hæc triangulorum latera polygonum dividentia tranſeant, totidem pariter habebuntur pyramides triangulares, in quas pyramis polygona dividitur.

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA.

106. *OMnis pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis eamdem baſim, & altitudinem habentis.* Euclid. lib. 12. prop. 7.

Demonſtratio. Triangulare priſma ABCFDE ſecetur plano tranſeunte per punctum A, & per



puncta

puncta E, F, ſive per latus EF baſis EFD. Perſpicuum eſt diviſum iri priſma in duas pyramides ABCFE, AEDF; quarum prima ABCFE baſim habebit parallelogrammum BCFE, & verticem A; ſecunda verò AEDF baſim habebit cum priſmate communem, nimirum triangulum EDF, ejuſque verticem A in baſi oppoſita BAC ejuſdem priſmatis. Dico hanc ſecundam pyramidem AEDF habentem eamdem cum priſmate baſim, & altitudinem, fore tertiam priſmatis partem.

Secetur enim rurſum prima pyramis ABCFE plano tranſeunte per punctum A, & per puncta C & E, ſive per rectas AC & AE. Sanè, cùm diagonalis EC dividat parallelogrammum BCFE in duo triangula æqualia, pyramides ABCE, ACEF habebunt æquales baſes. Habent autem etiam æqualem altitudinem; cùm altitudo utriuſque non differat a recta ducta a vertice A perpendiculariter in planum parallelogrammum BCFE. Ergo (n. *96.*) duæ iſtæ pyramides ABCE, ACEF ſunt æquales.

Atqui pyramis ABCE ita etiam conſiderari poteſt, ut ejus vertex ſit punctum E, ejuſque baſis priſmati communis, ſit etiam triangulum ABC. Ergo pyramis ABCE eamdem habet cum priſmate baſim, & altitudinem; ac proinde (n. *96.*) æquatur pyramidi AEDF. Ergo duæ pyramides AEDF, ABCE ſunt æquales; & duæ pyramides ABCE, ACEF ſunt pariter æquales.

Tres itaque pyramides AEDF, ABCE, ACEF, quæ priſma componunt, ſunt æquales. Quare omnis pyramis triangularis AEDF eſt tertia pars priſmatis triangularis eamdem baſim, & altitudinem habentis. Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

107. HInc omne prisma triangulare dividi potest in tres pyramides triangulares inter se æquales. *Euclid.* 12. *prop.* 7.

Corollarium II.

108. HInc pyramis quævis polygona est tertia pars prismatis eamdem basim, & altitudinem habentis. Nam, uti prisma quodvis resolvitur in triangularia prismata (n. 102.), ita & pyramis quæcunque in trigonas pyramides (n. 105.). Quo facto, patet demonstratio ex Theoremate. Nam singulæ partes prismatis triplæ erunt singularum partium pyramidis; ac proinde totum prisma totius pyramidis triplum est.

Corollarium III.

109. ERgo conus est tertia pars cylindri eamdem basim, & altitudinem habentis. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 10.

Nam multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta eorum magnitudine, pyramis abit in conum, & prisma in cylindrum desinit.

Corollarium IV.

110. ERgo pyramis quæcunque æquatur prismati sub eadem basi, & triente suæ altitudinis, vel, sub eadem altitudine, & triente suæ baseos.

Et

Et reciprocè, prisma quodvis æquatur pyramidi sub eadem basi, & triplo majore altitudine, vel, pyramidi sub eadem altitudine, & basi triplo majore.

Corollarium V.

111. PYramides æquè altæ, sunt directè, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 6.

Nam prismata tripla sunt pyramidum eamdem basim, & altitudinem habentium. Atqui prismata æquè alta, sunt directè, ut bases; & quæ habent bases æquales, sunt, ut altitudines (n. 100.). Ergo etiam pyramides æquè altæ &c.

Corollarium VI.

112. SImiliter coni æquè alti, sunt directè, ut circuli basium; & vicissim, coni æqualium basium, sunt, ut altitudines. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 11.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA.

113. *SI parallelepipeda æqualia sunt, reciprocant bases, & altitudines; hoc est, basis primi est ad basim secundi, ut reciprocè altitudo secundi ad altitudinem primi. Et, si reciprocant bases, & altitudines, æqualia sunt.* Euclid. lib. 11. prop. 34.

Demonstratur prima pars. Altitudo primi vocetur A, ejusque basis M: altitudo secundi vocetur B, ejusque basis N. Quoniam parallelepipeda po-

ponuntur æqualia, erit $A \times M = B \times N$; & consequenter, si hæc æquatio in analogiam resolvatur, ut dictum est n. 383. Geom. planæ, erit $A : B :: N : M$; hoc est, altitudines erunt in ratione reciproca basium. Quod erat primum.

Secunda pars patet. Nam, si ponatur $A : B :: N : M$, erit $A \times M = B \times N$. Quod erat alterum.

Corollarium.

114. QUæ hìc de parallelepipedis demonstrata sunt, æquè conveniunt prismatis quibuscunque, pyramidibus, conis, & cylindris. *Euclid. lib.* 12. *prop.* 9.

PROPOSITIO XVI.

PROBLEMA.

115. *SOliditas pyramidis cujuscunque, aut coni habetur ex basi ducta in tertiam partem altitudinis.*

Resolutio. Metire igitur mensura aliqua pyramidis altitudinem: explora deinde, quot ejusdem mensuræ quadrata contineat basis; quæ pro multiplici pyramidum specie esse potest figura quævis rectilinea. Numerus quadratorum baseos ductus in trientem numeri altitudinis, aut altitudo tota in basis trientem dabit cubos ejusdem mensuræ, quibus data pyramis æqualis est.

Exemplum. Altitudo pyramidis inventa sit pedum 90; basis verò pedum quadratorum 10000 contineat. Triens altitudinis 90 est 30, quæ ducta in basim 10000 efficiunt 300000 pedum cubicorum, quibus pyramis data æqualis est.

De-

Demonſtratio. Pyramis eſt tertia pars priſmatis eamdem baſim, & altitudinem habentis (n. 108.). Atqui hujus ſoliditas provenit ex altitudine tota ducta in baſim. Ergo pyramidis ſoliditas proveniet ex tertia altitudinis parte in baſim ducta, aut ex tota altitudine in baſeos trientem. Quod erat &c.

Eadem demonſtratio convenit cono ex n. 109.

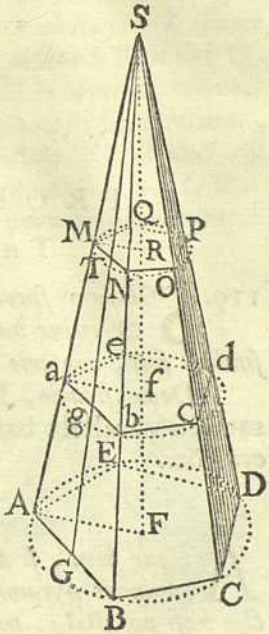
ELEMENTUM IV.

De truncis Pyramidum.

DEFINITIONES.

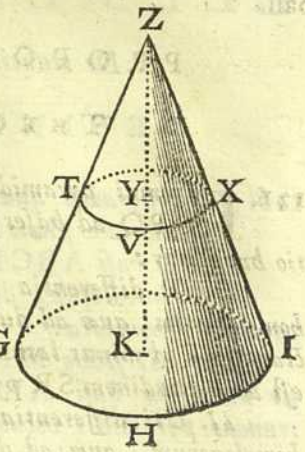
116. *Si pyramis quævis* SABCDE *secetur utcunque plano* MNOPQ, *portio pyramidis a basi* ABCDE, *& sectione* MNOPQ *intercepta, dicitur truncus pyramidis, seu pyramis obtruncata.* Pyramis obtruncata

117. *Si sectio* MNOPQ *sit parallela basi* ABCDE, *truncus pyramidis vocabitur pyramis truncata ad bases parallelas.* Ad bases parallelas.



Coni truncus.

118. *Si conus* ZGHI *secetur plano* TVX *parallelo, aut non parallelo suæ basi, portio coni a basi, & sectione intercepta, dicitur truncus coni, seu conus truncatus ad bases parallelas, aut non parallelas.*



PROPOSITIO I.

THEOREMA.

119. *Solidum speciem præferens trunci pyramidis, & cujus bases oppositæ sint parallelæ, quin similes sint, non erit truncus pyramidis.*

Demonstratio. Nam (n. 88.) omnis sectio pyramidis parallela basi, est eidem basi similis. Quod erat &c.

Scholion.

Atque hinc, si dubitetur, an solidum aliquod sit truncus pyramidis, satis erit expendere, an sectio basi parallela, sit eidem basi similis.

Corollarium.

120. ERgo duo quævis plana similia considerari possunt, perinde ac si horum unum esset basis

basis pyramidis, & alterum esset sectio parallela basi.

PROPOSITIO II.

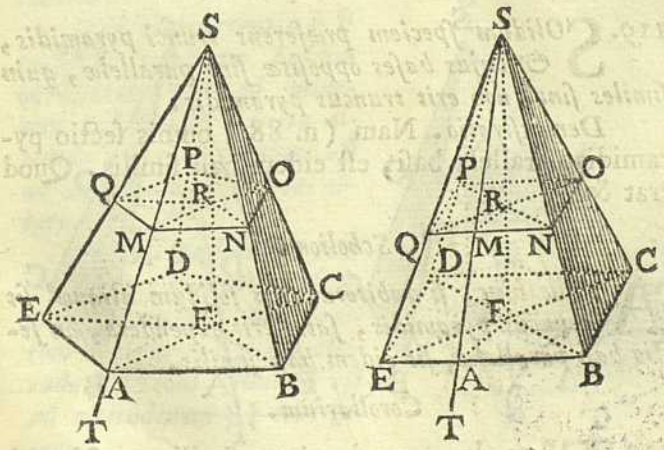
THEOREMA.

121. *IN omni pyramide obtruncata* ABCDEMNOPQ *ad bases parallelas, hæc duplex proportio habebitur:*

I. Uti differentia AB — MN *duorum laterum homologorum, quæ ad duas trunci parallelas bases spectant, est ad minus latus* MN; *ita altitudo* FR *trunci est ad altitudinem* SR *pyramidis ablatæ* SMNOPQ. Inventio altitudinis ablatæ in pyramide obtruncata,

II. Uti differentia AB — MN *duorum laterum homologorum, quæ ad duas oppositas bases pertinent, est ad majus latus* AB; *ita altitudo* FR *trunci est ad altitudinem* SF *pyramidis integræ* SABCDE. Et altitudinis integræ.

Demonstratio. Nam, si pyramis quæcunque



SABCDE ſecetur plano parallelo ſuæ baſi, erit (n. 90.) AB:MN::SF:SR; hinc dividendo, & convertendo elicietur hæc duplex proportio:

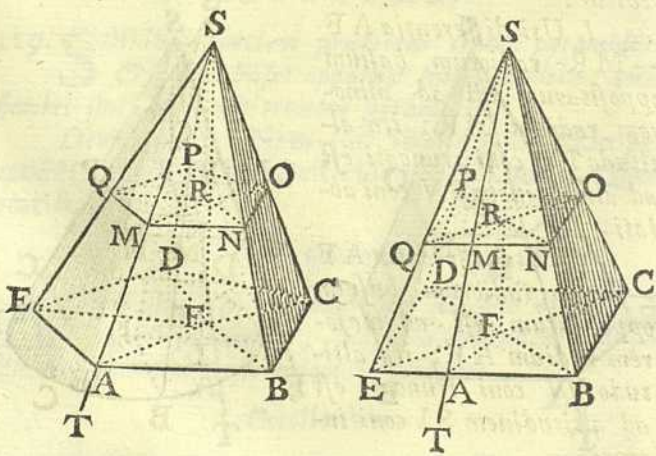
I. AB—MN:MN::SF—SR:SR, ſive:: FR:SR.

II. AB—MN:AB::SF—SR:SF, ſive:: FR:SF.

Ponatur jam rectam SF perpendicularem eſſe baſi ABCDE, ac proinde perpendicularem quoque ſectioni parallelæ MNOPQ: erit FR altitudo pyramidis obtruncatæ ad baſes parallelas, SF altitudo pyramidis integræ, SR altitudo pyramidis ablatæ. Conſtat itaque propoſitum.

Corollarium.

122. COgnita altitudine trunci pyramidis ad baſes parallelas, cognitiſque duobus lateribus homologis harum baſium, per ſimplicem pro-



por-

portionem invenietur altitudo pyramidis ablatæ, & altitudo pyramidis integræ.

Scholion.

123. *QUoniam multiplicato in infinitum numero laterum, & imminuta magnitudine pyramis desinit in conum, cui pariter (n. 92.) convenire demonstravimus symptomata omnia, quæ de sectione pyramidis parallela basi demonstrata sunt (n. 90.): idcirco hoc idem Theorema, proportione servata, locum habebit in omni cono obtruncato ad bases parallelas. Itaque*

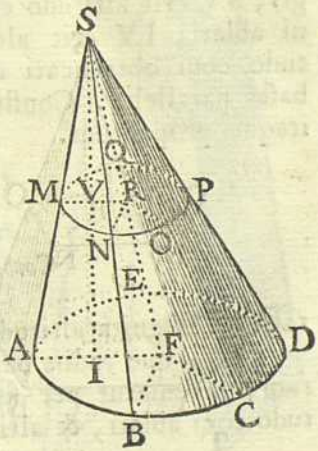
PROPOSITIO III.

THEOREMA.

124. *IN omni cono obtruncato* ABCDEMNOPQ *ad bases parallelas, hæc duplex proportio habebitur:*

I. Uti differentia AF — MR *radiorum basium oppositarum est ad minorem radium* MR; *ita altitudo* IV *coni truncati est ad altitudinem* SV *coni ablati.*

II. Uti differentia AF — MR *radiorum basium oppositarum est ad majorem radium* AF; *ita altitudo* IV *coni truncati est ad altitudinem* SI *coni integri.*



Inventio altitudinis ablatæ in cono obtruncato,

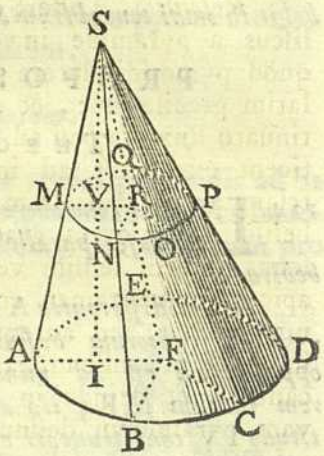
Et altitudinis integræ.

Demonſtratio. Nam, ſi conus quicunque SABCDE ſecetur plano baſi parallelo, ducaturque a vertice S coni ad quodvis punctum I ſuæ baſis recta SI occurrens in V ſectioni circulari MNOPQ, demonſtravimus n. 92. radios AF, MR baſium oppoſitarum proportionales eſſe duabus rectis SI, SV; hoc eſt, AF:MR::SI:SV; hinc dividendo, & convertendo hæc duplex proportio elicitur:

I. AF—MR:MR::SI—SV:SV, ſive::IV:SV.

II. AF—MR:AF::SI—SV:SI, ſive::IV:SI.

Ponatur jam rectam SI perpendicularem eſſe baſi ABCDE coni, & conſequenter perpendicularem pariter ſectioni parallelæ MNOPQ: SI erit altitudo coni integri; SV erit altitudo coni ablati; IV erit altitudo coni obtruncati ad baſes parallelas. Conſtat itaque propoſitum.



Corollarium.

125. COgnita altitudine coni truncati, cognitiſque radiis baſium oppoſitarum parallelarum, invenietur per ſimplicem proportionem altitudo coni ablati, & altitudo coni integri.

PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

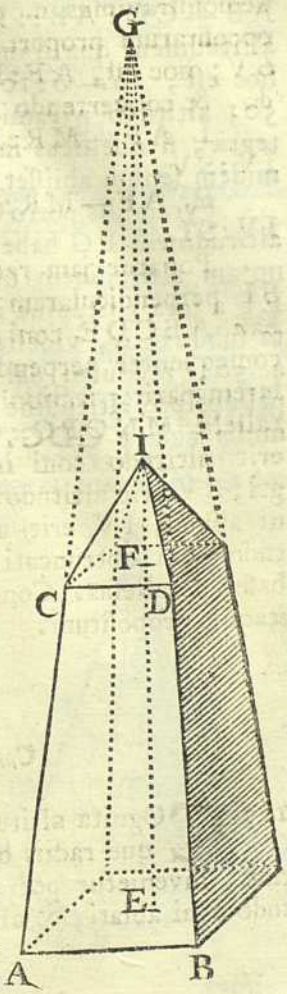
ELEM. IV. SOLIDORUM.

PROBLEMA I.

126. *ALtitudinem obeliſci, ſi truncus non eſſet, ſed lateribus continuo fluxu in ultimum punctum confluentibus ad inſtar pyramidis excurreret, invenire.*

Reſolutio. Differt obeliſcus a pyramide in eo, quòd pyramidis latera paulatim gracileſcant, & continuato fluxu a baſi ad verticem excurrant ad inſtar triangulorum iſoſcelium; obeliſci verò latera gracileſcunt quidem ſenſim verſùs apicem, non tamen continuato fluxu, ſed antequam in punctum confluant, truncantur, & deinde in parvam pyramidem deſinunt; uti exhibetur in ſchemate. Unde obeliſcus vocari etiam ſolet pyramis truncata; & corpus trunco impoſitum C DI ſolet appellari pyramidium, ſeu pyramidion.

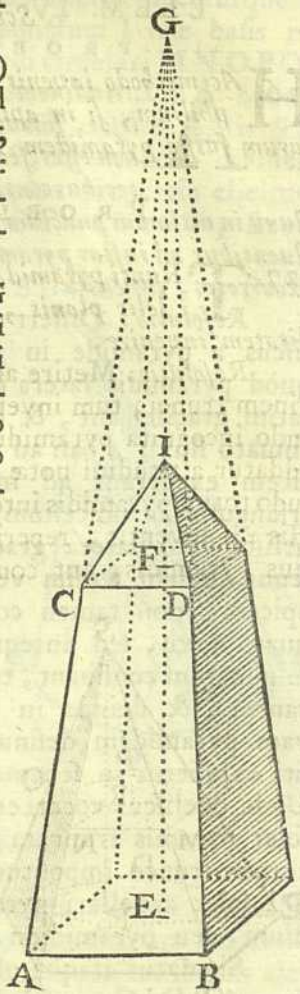
Sit datus itaque obeliſcus ABDIC, cujus baſis infimæ ſingula latera A B habeant palmos 10, ſupremæ



basis CD latera singula palmos *6*, & altitudo EF inter utramque basim interjecta, palmos 20.

Fiat itaque (n. 121.) AB — CD : AB :: EF ad altitudinem quæsitam EG; hoc est, 10 — *6* : 10 :: 20 : 50, altitudo pyramidis integræ, si obeliscus in pyramidem sensim abiisset.

Pyramidis porro CDG altitudinem FG habebis, si notam altitudinem obelisci EF a tota altitudine inventa subduxeris, videlicet 20 a 50; residuum dabit 30 palmos pro altitudine pyramidis ablatæ CDG.



Scho-

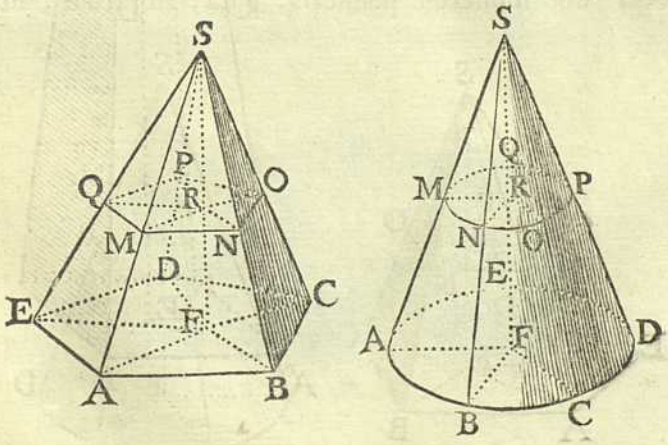
Scholion.

HAc methodo invenit P. Kircherus obeliſcum Pamphilium, ſi in apicem ultimum excurriſſet, futurum fuiſſe pyramidem 133 palmorum.

PROBLEMA II.

127. TRunci pyramidalis, aut conici duobus parallelis planis, aut circulis intercepti ſoliditatem invenire.

Reſolutio. Metire aliquo genere menſuræ altitudinem trunci; tum inveniatur (n. 121. & 124.) altitudo incognita pyramidis, aut coni ablati, quæ, ſi addatur altitudini notæ ipſius trunci, fit nota altitudo totius pyramidis integræ, aut coni S A B C D E. His ita inventis, reperiatur (n. 115.) ſoliditas totius pyramidis, aut coni integri; tum ſoliditas py-



rami-

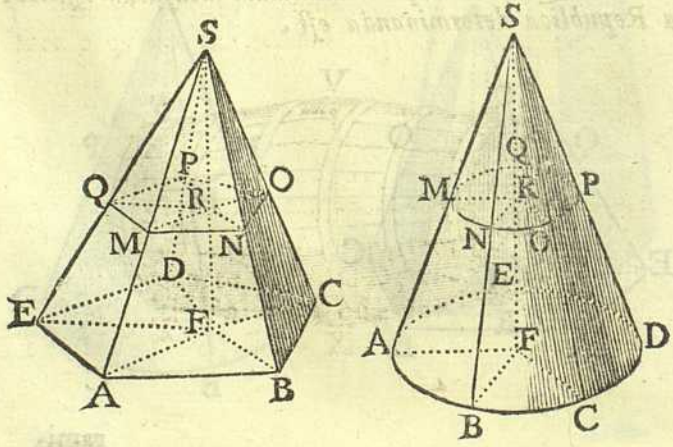
ramidis, aut coni ablati SMNOPQ; minorem ſubtrahe a majori: reſiduum dabit ſoliditatem trunci pyramidalis, aut conici duobus parallelis planis, aut circulis intercepti.

Corollarium I.

128. SOliditas obeliſcorum cum Kirchero in obeliſco Pamphilio lib. 1. cap. 6. inveſtigabitur eadem methodo, inquirendo ſeparatim ſoliditatem trunci pyramidis, dein ſoliditatem pyramidii.

Corollarium II.

129. SImiliter gravitatem, ſive pondus obeliſcorum ita invenies. Fac ex eadem obeliſci materia cubum ejuſdem prorſus magnitudinis cum menſuris cubicis, quibus conſtat obeliſci ſoliditas: hujus cubi pondus explora per exactiſſimam bilancem: duc numerum ponderis, puta, librarum, in



nu-

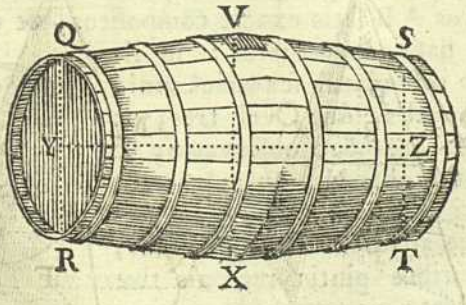
numerum cuborum totius obelisci; & summa producta dabit pondus quæsitum.

Corollarium III.

130. EX hoc Problemate habetur dimensio doliorum, quæ componuntur plerumque ex duobus truncis conicis QRXV, STXV basi communi XV ex adverso insistentibus. De horum dimensione alias praxes mox subjiciam. Hìc solùm moneo, ut liquoris dolio contenti quantitas habeatur, a diametris VX, QR, & latere QV deducendam esse asserum crassitiem, antequam operatio in Problemate præscripta instituatur.

Scholion.

M*Ensuræ liquidorum pro locorum varietate sunt variæ. Hoc omnibus commune, unam esse minimam, sive primam, ex qua cæteræ majores componuntur. Quantitas liquidi minimam mensuram efficiens a Republica determinanda est.*



PRO-

PROBLEMA III.

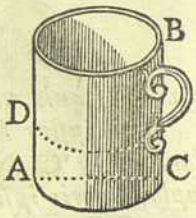
131. *Virgam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, puta, vini, cerevisiæ &c. in vase cylindrico contenti.*

Resolutio. Metiri liquidum nihil est aliud, quàm invenire, quot contineat mensuras, nimirum, quot pintas, vel cados &c. Quicumque ergo dolia metiri desiderat,

I. Determinare debet certam mensuram in sua regione usitatam, puta, pintam, seu sextarium.

II. Cùm autem vasa consueta, quibus utuntur communiter Mercatores in mensuris liquidorum, sint irregularia, eadem ad figuram regularem revocare oportet. Si dolia nostratia quadratam haberent basim, mensuras reliquas ad cubos, aut ad parallelepipeda revocaremus; cùm autem cylindrica sint, aut tantisper conica, præstat cylindrorum mensuram hìc constitui cylindrum; atque adeo pinta, seu sextarius ad cylindrum revocetur.

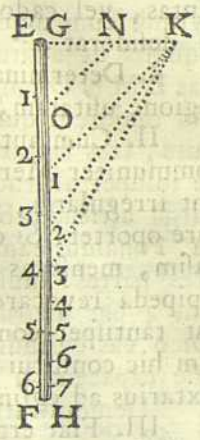
III. Fiat ergo ex stanno, aut etiam ferro albo cylindrus A B satis exactè compositus, & cujus diameter basis cognoscatur: in illud vas infundatur sextarius vini, aut, si velis, duo, vel tres, ut exactiùs procedat observatio; & diligenter observa, quam partem cylindri occupet: puta, C D; noteturque altitudo A D, quæ uni, vel pluribus pintis regionis tuæ respondeat.



IV.

IV. Tum in duabus ejusdem virgæ faciebus fiant duæ species notarum, altera pro altitudinibus, & altera pro diametris basium. Ac prima quidem, quæ altitudinibus numerandis destinatur, ita perficietur. Dividatur virga EF in partes æquales altitudini notæ AD.

V. Altera verò ejusdem virgæ facies GH, quam diametris basium assignavimus, dividatur eo modo, quo lineam quadratorum dividendam esse diximus n. 540. Geom. planæ; nimirum, sit linea GK perpendicularis ad GH; sintque GK, G1 æquales lineæ, seu diametro AC. Perspicuum est lineam K1 esse diametrum circuli dupli ipsius AC. Nam circuli se habent, ut quadrata diametrorum (n. 506. Geom. planæ).



VI. Fiat G2 = K1: erit K2 diameter circuli tripli basis AC. Sit G3 = K2; & ita deinceps. Habebuntur diametri circulorum omnium certam rationem habentium cum diametro AC.

Scholion.

132. *SI quis vellet diametrum circuli duplo minoris ipsius* AC, *dividat latera* GK, G1 *bifariam in* O *&* N. *Dico* ON *esse diametrum circuli duplo minoris ipsius* AC. *Nam circulus, cujus diameter* OG, *aut* GN, *est quarta pars circuli* AC; *quibus simul æqualis est circulus, cujus diameter* ON; *ut constat ex elementis; atque ita deinceps.*

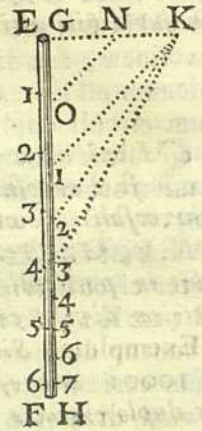
PRO-

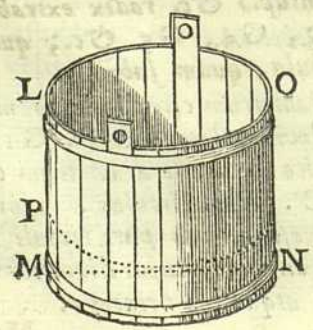
PROBLEMA IV.

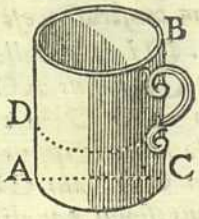
133. *METiri quodvis vas cylindricum ope virgæ superiùs constructæ.*

Resolutio. Esto quodvis vas cylindricum L M N O, cujus quæritur capacitas. Primò metire basim M N virgà basibus destinatà. Ponamus M N æqualem esse lineæ G 3: circulus diametro M N descriptus, triplus erit circuli A C; atque adeo, si impleretur vas cylindricum usque ad punctum P, posito quòd M P æqualis sit altitudini A D, vas L M N O contineret triplo majorem quantitatem, puta, tres sextarios. Metire insuper altitudinem L M virgà altitudinibus destinatà. Ponamus eam continere tres partes: multiplico basim 3 per altitudinem 3. Dico vas cylindricum M O esse capacem 9 pintarum.

Demonstratio patet ex n. 68.







Scho-

Scholion I.

134. *IN constructione hujus virgæ mensoriæ monet Bayerus citatus a Wolfio, minorem, quoad fieri possit, assumi oportere altitudinem cylindri mensuram unam, puta, sextarium, capientis. Nam, quò minor est altitudo ejusdem, eò major erit basis diameter; unde & ipsa, & diametri cylindrorum plures mensuras capientes, postea faciliùs in suas minutias subdividentur. Idem Bayerus apud Wolfium suadet, ut nonnisi unius digiti altitudo assumatur.*

Scholion II.

135. *SI cui notus sit calculus decimalium, quem fusè exposui in meis Commentariis Arithmeticæ universalis Newtoni, facilè inveniet diametros* G2, G3, G4 *&c. etiam in numeris; easque determinabit in particulis diametri* AC, *per modum scalæ geometricæ divisæ centesimis, aut millesimis.*

Exemplum. *Sit diameter* AC *divisa in particulas* 1000: *erit ejus quadratum* = 1000000; *ex hujus duplo extracta radix quadrata erit* G2; *si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur, prodibunt diametri* G3, G4, G5 *&c.; quem in usum constructa est tabula, quam subjicio.*

Mensura	Diameter	Mensura	Diameter
1	1.000	11	3.316
2	1.414	12	3.464
3	1.732	13	3.605
4	2.000	14	3.741
5	2.236	15	3.873
6	2.449	16	4.000
7	2.645	17	4.123
8	2.828	18	4.242
9	3.000	19	4.359
10	3.162	20	4.472 &c.

Ratio est, quia cylindri eamdem altitudinem habentes sunt inter se, ut bases, & consequenter, ut quadrata diametrorum. Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram unam capientis. Quare, si inde extrahantur radices, habebuntur diametri ipsæ.

Scholion III.

136. *IN hoc artificio metiendi quodvis vas cylindricum notat Wolfius analogiam non inconcinnam. Nam, quemadmodum superiùs solidorum omnium mensura assumptus est cubus; ita hoc loco cylindrorum mensuram constituimus cylindrum. Similiter circulorum mensura constituitur circulus, sicuti superiùs omnium superficierum mensura quadratum.*

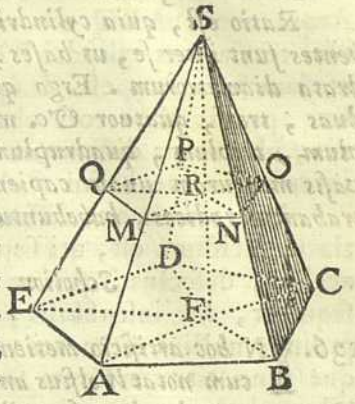
PROBLEMA V.

137. *AN praxis communiter adhiberi solita in dimetiendis vasis inæqualium basium sit errori sensibili obnoxia.*

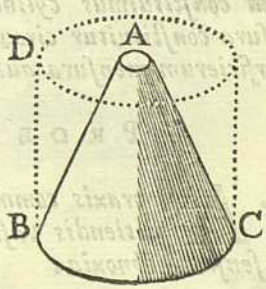
Reso-

Resolutio. Hactenus praxis tradita ritè procederet, si liquidorum vasa, quorum capacitatem metimur, bases utrinque haberent æquales; at pleraque vel conica sunt, vel ex duobus conis truncatis conflata, quemadmodum dolia, aut alia ejusdemmodi. Qua in re, si quis exactè procedere vellet, ei perficiendus esset conus, & metiendus duplex conus, & aut minor ex majori auferendus, aut unus alteri addendus esset.

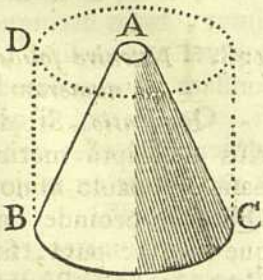
Communiter tamen aliter proceditur. Quæritur area basis ABCDE, item area basis MNOPQ. Adduntur simul istæ bases; earumque summæ dimidium sumitur; sic enim habetur basis, quam vocant æquatam, seu aliquam basim intermediam inter utramque basim. Hanc basim intermediam multiplicant per altitudinem; atque ita mensuram capacitatis eliciunt coni truncati.



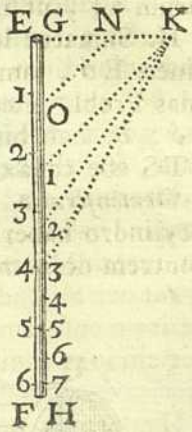
Hæc praxis, quamvis sit usitatissima, tamen est errori obnoxia, quoties magna est differentia inter utramque basim; quod ita demonstro. Sit conus ABC ferè perfectus, ita ut circa punctum A restet parvus admodum circulus. Sanè in hoc cono



modicè truncato differentia inter utramque basim sensibilis est. Itaque, juxta praxim usitatam, inter circulum, seu basim BC, & basim A quæratur circulus medius, seu æquatus: hic erit ferè media pars circuli BC, aut paulo major; multiplicetur per altitudinem coni: producetur cylindrus, qui erit ferè media pars cylindri CD. Atqui conus ABC est tantùm tertia pars cylindri BD, ut jam ostensum est. Itaque hæc praxis est errori obnoxia, ubi magna differentia est inter utramque basim.



Ubi tamen hæc differentia modicissima est, uti sæpius accidit, defectus, qui ex ea sequitur, fit insensibilis, ac proinde nullius momenti; atque hinc citra errorem sensibilem hac praxi utimur in mensura doliorum, uti mox ostendam.



PRO-

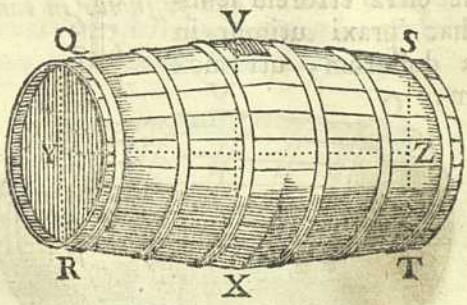
PROBLEMA VI.

138. *INvenire ſoliditatem dolii; hoc eſt, determinare numerum menſuarum, quas capit.*

Reſolutio. Sit dolium QRTS. I. Virgà ſuperiùs deſcriptà metire diametrum VX; quia verò baſis QR paulo minor eſt, metire etiam diametrum QR, ac proinde baſim; ſumaturque inter utramque media: puta, ſit prima, ſeu VX æqualis lineæ G3; & ſit QR æqualis lineæ G2; determinetur pro vera baſi ſemiſſis ſummæ horum numerorum, nimirum $2\frac{1}{2}$, ut in Probl. præced.

II. Sumatur longitudo YZ, quæ ponatur æqualis lineæ E*6*, jam ad altitudines cylindrorum metiendas Probl. præced. comparatæ: multiplica $2\frac{1}{2}$ per *6*; & habebis productum 15. Dico dolium QRTS eſſe capax ſextariorum 15.

Demonſtratio. Nam ex Probl. præced. dolium pro cylindro haberi poteſt, cujus baſis inter fundum, & ventrem dolii media æquidifferens ſit. Quod erat &c.



Scholion I.

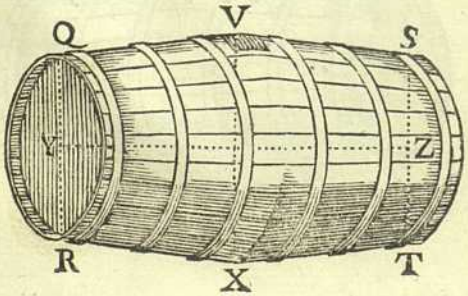
139. *OMnes mensuræ intra vas accipiendæ sunt, ita ut, si exteriùs desumantur, semper ligni crassities sit detrahenda.*

Scholion II.

SUpponitur autem basis ST *æqualis basi* QR; *alioquin illius diversitatis ratio haberi deberet. Similiter, si contingat basim non esse perfectè circularem, sed unam diametrum esse alterà longiorem, utramque diametrum metiri oporteret, & earum semisummam assumere pro diametro circuli fundo dolii æqualis.*

Scholion III.

HÆc praxis, etsi ad rigorem geometricum non sit exacta, tamen satis experientiæ respondet in iis doliorum figuris passim in Italia adhiberi solitis. Quare hac praxi contenti esse possumus in tanta regionum, & doliorum varietate.



ELE-

ELEMENTUM V.

De Mensura superficierum Pyramidis, & Coni.

DEFINITIO.

140. ALTITUDO absoluta pyramidis longè diversa est ab altitudine triangulorum ejusdem superficiem componentium. Illam definivimus esse rectam a summitate pyramidis ductam perpendiculariter in ejus basim; hæc autem est linea ab eodem pariter vertice ducta perpendiculariter in latus perimetri basis.

Quare *in pyramide recta, & regulari, & cono pariter recto altitudo utriusque superficiei est linea recta omnium brevissima, quæ super eamdem superficiem a vertice figurarum ad perimetrum basis duci possit.* Altitudo superficiei.

Scholion.

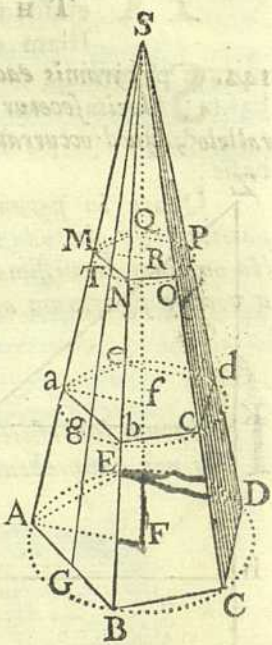
IN harum superficierum definienda mensura observabis non comprehendi superficiem basium.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

141. *SUperficies pyramidis rectæ, & regularis* SABCDE *æquatur triangulo* ZHI, *cujus altitudo* ZH *ſit æqualis altitudini* SG *trianguli cujuſvis* SAB, *& cujus baſis* HI *ſit æqualis perimetro* ABCDE *baſis pyramidis.*

Vel, æquatur parallelogrammo ſub eadem altitudine, & cujus baſis ſit ſemiſſis ejuſdem perimetri.



Demonſtratio. Nam hæc triangula ſuperficiem pyramidis rectæ, & regularis componentia, habent æqualem baſim, & altitudinem, & inter ſe æqualia ſunt; ac proinde omnia ſimul ſumpta æquantur triangulo rectangulo ZHI, cujus baſis HI æqualis ſit ſummæ baſium, & altitudo ZH æqualis communi altitudini eorumdem triangulorum. Cùm autem hoc idem triangulum æquetur parallelogrammo ſub eadem altitudine, & ſemiſſi baſeos; hinc conſtat propoſitum.

Co-

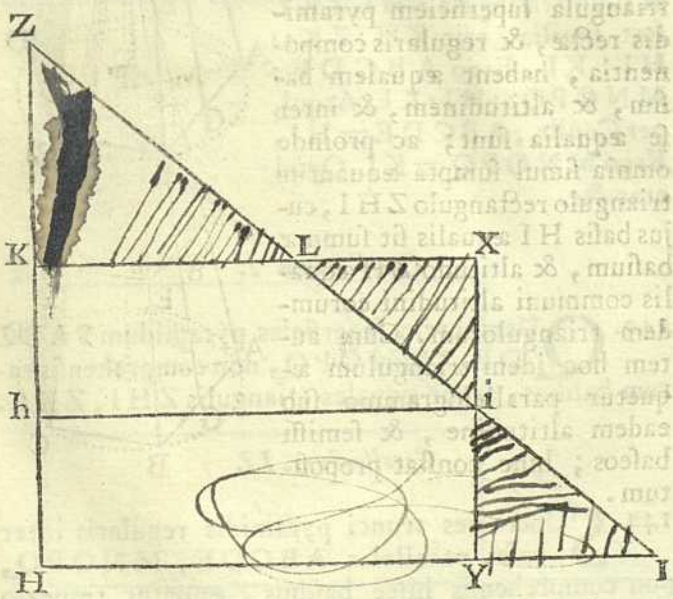
Corollarium.

SUperficies pyramidis rectæ, & regularis est factum ex semissi perimetri baseos in altitudinem superficiei, vel ex semissi ejusdem altitudinis in perimetrum baseos.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

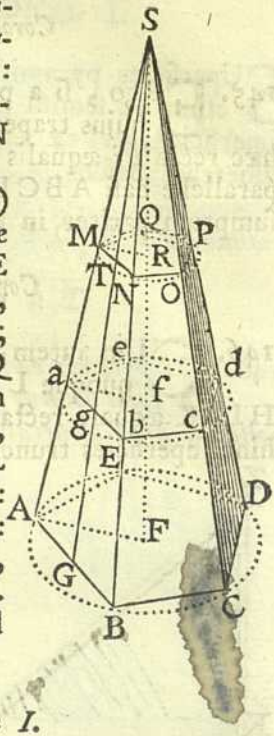
142. SI *pyramis eadem* SABCDE *recta, & regularis secetur plano* MNOPQ *suæ basi parallelo, quod occurrat in* T *rectæ* SG *metienti altitu-*



dinem

Campus

dinem ſuperficiei conicæ ; ac præterea ab altitudine deſcripti trianguli ZHI *abſcindatur portio* ZK = ST, *ducaturque* KL *parallela baſi* HI: *Dico eamdem rectam* KL *æqualem eſſe perimetro ſectionis* MNOPQ.



Demonſtratio. Nam (n. 90.) perimetri ſectionis parallelæ MNOPQ, & baſis ABCDE proportionales erunt rectis SG, ST, ſive, per hyp., ZH, ZK; ideſt, ABCDE : MNOPQ :: SG : ST :: ZH : ZK. Cùm autem propter parallelas HI, KL, duo triangula ZHI, ZKL ſint ſimilia, erit ZH : ZK :: HI : KL. Ergo ABCDE : MNOPQ :: HI : KL. Atqui, per Conſtr., ABCDE = HI. Ergo MNOPQ = KL. Quod erat &c.

Corollarium I.

143. QUamobrem ſuperficies pyramidum SABCDE, SMNOPQ, non comprehenſis earum baſibus, erunt æquales triangulis ZHI, ZKL.

Corollarium II.

144. SUperficies trunci pyramidis regularis inter baſes parallelas ABCDE, MNOPQ, non comprehenſis hiſce baſibus, æquatur trapezio HILK.

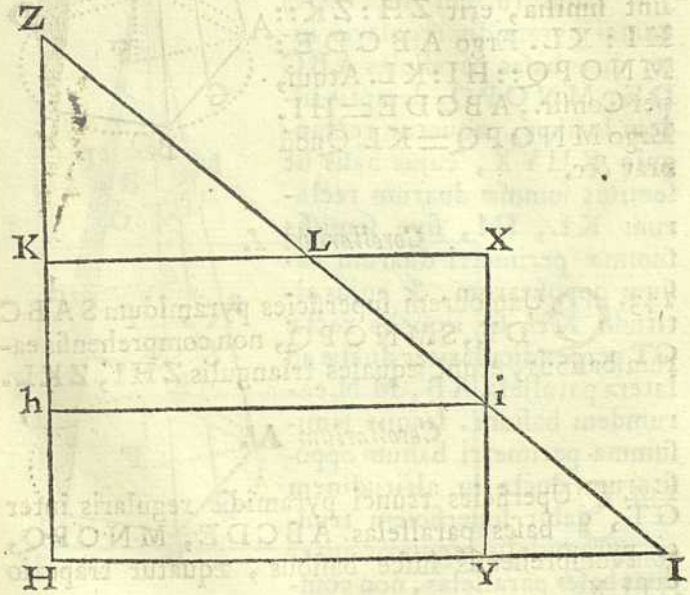
Co-

Corollarium III.

145. ERgo, ſi a puncto medio *h* altitudinis KH hujus trapezii ducatur *hi* parallela baſi HI, hæc recta *hi* æqualis erit perimetro ſectionis *abcde* parallelæ baſi ABCDE, tranſeuntis per punctum *g* ſumptum pariter in medio rectæ TG.

Corollarium IV.

146. CUm autem, per Conſtr., K*h*=*h*H, erit quoque L*i*=*i*I, ac proinde trapezium HILK æquale rectangulo KHYX, & *hi*=HY; hinc ſuperficies trunci pyramidis inter duas baſes pa-

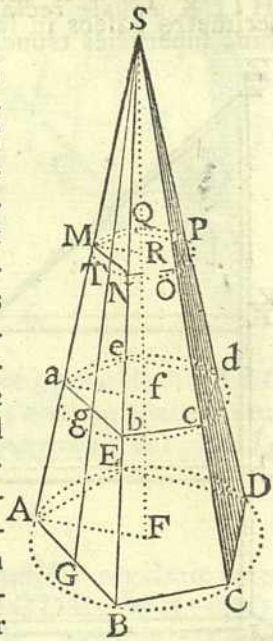


ral-

rallelas æquatur areæ parallelogrammi KHYX, cujus basis HY æqualis sit perimetro sectionis *abcde* factæ in distantiis æqualibus ab iisdem trunci basibus, & cujus altitudo KH æqualis sit rectæ TG perpendiculari lateribus AB, MN basium ejusdem trunci.

Corollarium V.

147. PRæterea, cùm duo triangula LX*i*, IY*i* sint æqualia, erit LX = YI, & KL + LX = *bi* = HY = KL + YI. Ergo 2*bi* = KL + YI + HY = KL + HI; & consequenter *bi* = HY = $\frac{KL+HI}{2}$.



Hinc rursum superficies trunci pyramidis regularis inter duas bases parallelas ABCDE, MNOPQ, demptis iisdem basibus, æquatur rectangulo KHYX, cujus basis sit semissis summæ duarum rectarum KL, HI, sive semissis summæ perimetri duarum basium oppositarum, & cujus altitudo KH sit æqualis rectæ GT perpendiculariter ductæ ad latera parallela AB, MN earumdem basium. Itaque semisumma perimetri basium oppositarum ducta in altitudinem GT, dabit superficiem trunci pyramidalis regularis inter duas bases parallelas, non comprehensis iisdem basibus.

Scho-

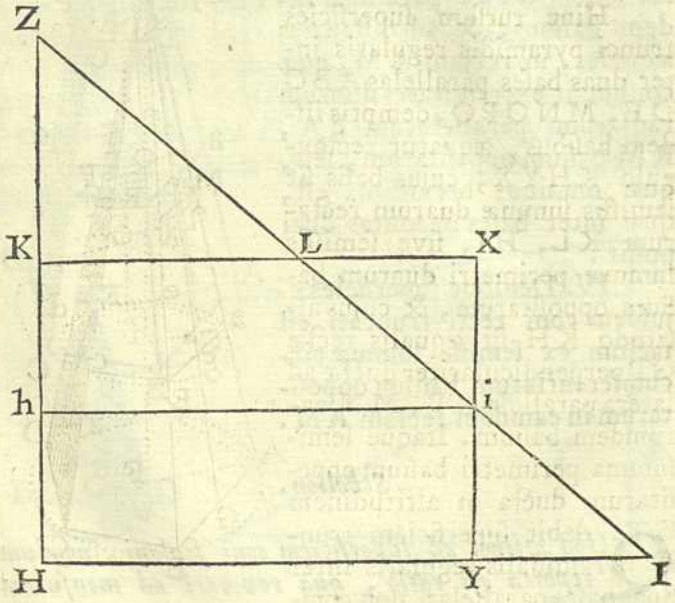
Scholion.

METiendæ ſuperficiei pyramidis irregularis nulla alia ſuppetit regula, quàm ſeparatim quærere aream triangulorum coeuntium ad verticem pyramidis, quorum ſumma addita areæ baſis dabit integram pyramidis ſuperficiem.

Corollarium VI.

148. QUoniam conus rectus eſt pyramis regularis infinitorum laterum, hinc

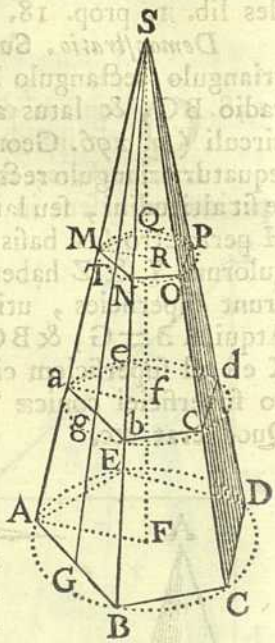
I. Superficies coni recti eſt ſemiſſis producti ex perimetro baſeos in latus coni, ſeu altitudinem ſu-



per-

perficiei conicæ, vel, eſt factum ex ſemiſſi perimetri baſeos in latus coni, vel ex ſemiſſi lateris in perimetrum baſeos.

II. Cùm ſectio MNOPQ ſit parallela baſi, & ad æquales a vertice, & ejuſdem baſi diſtantias facta, erit perimeter circuli MNOPQ æqualis ſemiſſi circumferentiæ baſis. Superficies itaque ejuſdem coni erit factum ex perimetro hujus ſectionis MNOPQ ducto in latus coni.



III. Superficies coni recti truncati ad baſes parallelas MNOPQ, ABCDE, non comprehenſis baſibus, erit productum ex ductu circumferentiæ ſectionis *abcde* parallelæ iiſdem baſibus, & ad diſtantias æquales, in rectam AM, quæ conjungit extremitates duorum radiorum parallelorum FA, RM baſium oppoſitarum, ſeu, quæ omnium breviſſima eſt, quæ inter baſes oppoſitas duci poſſit.

IV. Denique ſuperficies ejuſdem coni recti truncati eſt factum ex ſemiſſe ſummæ circumferentiarum baſium oppoſitarum in eamdem rectam AM.

Scholion.

QUòd attinet ad ſuperficiem coni ſcaleni, nondum reperta eſt ratio, qua revocari ad menſuram poſſit.

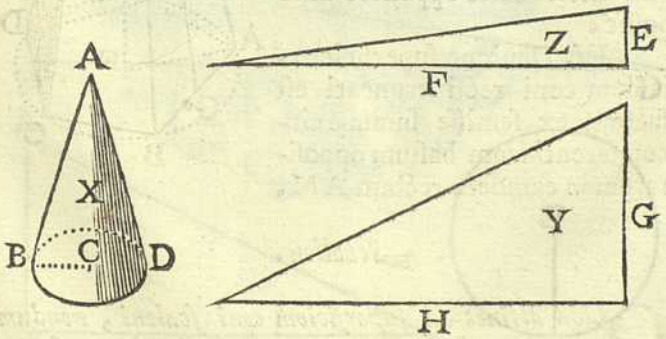
PRO-

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

149. *SUperficies coni recti* X *est ad superficiem circuli baseos* BCD, *uti* AB *altitudo suæ superficiei est ad radium* BC *ejusdem circuli*. Archimedes lib. 1. prop. 18.

Demonstratio. Superficies hujus circuli æquatur triangulo rectangulo Z, cujus latus E æquale sit radio BC, & latus alterum F perimetro ejusdem circuli (n. 296. Geom. planæ). Superficies coni X æquatur triangulo rectangulo Y, cujus latus G æquale sit altitudini, seu lateri coni AB, & latus alterum H perimetro suæ basis (n. 148.). Ergo duorum triangulorum Y & Z habentium bases æquales F & H, erunt superficies, uti eorum altitudines G & E. Atqui AB = G, & BC = E. Itaque superficies coni X est ad superficiem circuli BCD, uti AB altitudo superficiei conicæ est ad BC radium circuli. Quod erat &c.



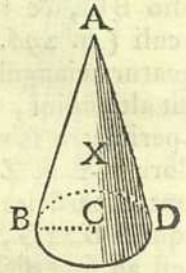
PRO-

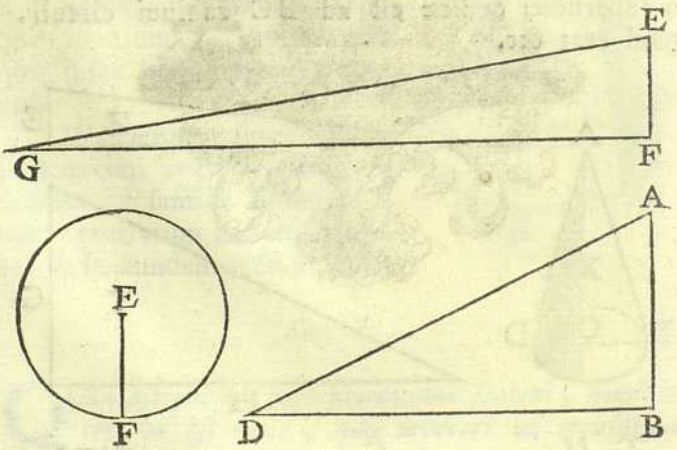
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

150. *SUperficies circuli, cujus radius sit medius proportionalis inter altitudinem superficiei conicæ, & radium basis coni, æquatur superficiei ejusdem coni.* Archimedes lib. 1. prop. 17.

Demonstratio. Esto conus X, cujus AB sit altitudo suæ superficiei, & BD perimeter suæ basis. Quare superficies conica æqualis erit triangulo rectangulo ABD (n. 148.). Rursum recta BC sit radius basis coni; ponaturque EF media proportionalis inter AB & BC; atque eadem EF sit radius circuli, cujus perimeter sit recta FG. Itaque superficies hujus circuli æqualis erit triangulo re-





ctan-

ſtangulo EFG. Demonſtrandum jam unicè ſupereſt triangulum ABD, nempe ſuperficiem coni X æquari triangulo EFG, hoc eſt, ABD = EFG. Per hyp., AB:EF::EF:BC; & quoniam circumferentiæ circulorum ſunt inter ſe, uti eorum diametri, vel ſemidiametri; ideſt, EF:BC::FG:BD, erit AB:EF::EF:BC::FG:BD. Ergo AB:EF::FG:BD; & conſequenter AB × BD = EF × FG. Atqui horum æqualium productorum ſemiſſes ſunt triangula ABD & EFG. Ergo ABD = EFG. Quod erat &c.

ELEMENTUM VI.

De Sphæra.

DEFINITIONES.

151. SPHÆRA *est solidum unica superficie comprehensum, in cujus area punctum est* C, *quod dicitur centrum; a quo omnes rectæ, quæ in illam curvam superficiem cadunt, sunt inter se æquales.* Centrum,

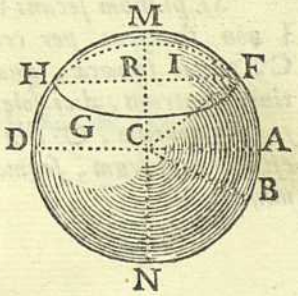
152. *Quævis recta* CA, CB, CF *&c. ducta a centro sphæræ in ejus superficiem, dicitur radius, seu semidiameter. Recta autem* DA, *aut alia quævis per centrum ducta, & utrinque terminata ad superficiem, vocatur diameter sphæræ.* Radius, Diameter,

Corollarium I.

153. OMnes sphæræ diametri æquales sunt inter se. Nam diameter quævis componitur ex binis radiis.

Corollarium II.

154. SI semicirculus MAN circa suam diametrum MN immotam gyret, generat sphæram habentem idem centrum, & eamdem diametrum. Nam omnes rectæ CB, CA, CF ductæ a centro immoto C semicirculi ad quævis superficiei puncta, erunt æquales eidem CM, vel CN immotæ. Genesis sphæræ.



Corollarium III.

155. HInc, ſi in ſemiperipheria M A N ſemicirculi genitoris ſumatur quodvis punctum F, a quo ducatur perpendicularis F R ad ſuam diametrum, hæc eadem recta erit radius circuli deſcripti per revolutionem puncti F.

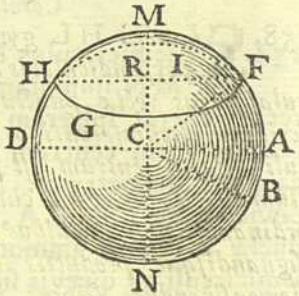
Corollarium IV.

Compoſitio ſphæræ, 156. SOliditas ergo ſphæræ conſiderari poterit tanquam compoſita ex infinitis laminis circularibus parallelis invicem ſuperimpoſitis, quas tranſverſim, & perpendiculariter ſecet eadem diameter M N, & quarum ſingulæ producantur a totidem ordinatis ſemicirculi, & perpendicularibus diametro M N, circa quam revolvuntur.

Sector, *Si ſector* M R F *circuli gyret circa ſuum radium* M R, *ſolidum a revolutione hujus ſectoris inde genitum, vocatur ſector ſphæræ, ſeu pyramis ſphærica.*

Segmentum. *Si ſphæra ſecetur plano, partes, in quas eadem dividitur, vocantur ſegmenta.*

Si planum ſecans F G H I *non tranſeat per centrum* C, *portio ſphæræ, quæ continet centrum, dici ſolet majus ſegmentum, & illa, quæ eſt extra centrum, ſegmentum minus.*



Scho-

Scholion.

CUm sphæricæ portionis, aut corporis ei inscripti, aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus, nisi adjungatur tota. Rursum, cùm de cylindris, & conis ago, semper intelligo rectos.

Corollarium V.

157. HInc, si sphæra secetur quovis plano, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ; quo casu habebit diametrum, & centrum commune cum diametro, & centro sphæræ; ac prout planum sectionis magis, vel minùs accedet ad centrum sphæræ, circulus per sectionem genitus, erit major, vel minor.

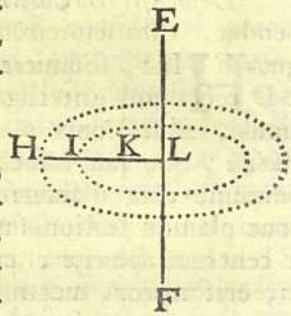
MONITUM.

158. *SI recta* HL *gyret circa rectam* EF, *cui sit perpendicularis, singula hujus rectæ puncta describent circumferentiam circuli, cujus centrum est punctum* L. *Jam verò, cùm in ordinandis proportionibus, designandisque productis inter demonstrandum sæpius adhibendæ sint circumferentiæ, & superficies circulorum; molestumque accidat, si singulis*

vicibus opus ſit ſcribere, circumferentia, aut ſuperficies circuli ſub hoc, vel illo radio: *conſultiùs putarunt plerique recentiores Geometræ has expreſſiones compendioſiùs ſignis aliquot notare.*

Itaque circumf. HL, circumf. IL, circumf. KL *ſignificant circumferentias circulorum ſub radio* HL, IL, KL. Circul. HL, circul. IL, circul. KL *ſignificant ſuperficies circulorum ſub radio* HL, IL, KL &c.

Similiter, cùm area circuli ſit factum ex circumferentia in ſemiſſem radii, ſuperficies circuli ſub radio KL *poterit etiam ſic deſignari, circumf.* KL $\times \frac{KL}{2}$.



Eadem ratione cylindrus, cujus radius HL, *& altitudo* EL, *notabitur per circul.* HL $\times$ EL. *Et conus, cujus radius* HL, *&* EL *altitudo, repræſentabitur per circul.* HL $\times$ EL $\frac{}{3}$.

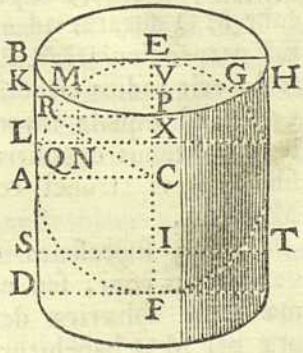
De

De Superficie Sphæræ.

LEMMA I.

159. *SI cylindrus rectus sphæræ circumscribatur, & utriusque convexa superficies secetur planis basi cylindri parallelis, & intervallis infinitè parvis, zonæ elementares utriusque convexæ superficiei erunt numero æquales.*

Demonstratio, quæ a sola vocum explanatione pendet. Esto semicirculus EAF inscriptus rectangulo EBDF. Semicircumferentia EAF, & latus BD rectanguli intelligantur divisa in infinitas particulas infinitè parvas, & invicem respondentes, uti MQ, KL, per infinitas rectas, puta, KV, LX perpendiculares diametro EF. Tum circa diametrum EF rotentur semicirculus, & rectangulum EBDF: ille sphæram, hoc cylindrum sphæræ circumscriptum motu suo generabit. Particula autem quævis, puta, MQ semiperipheriæ EAF describet zonam infinitè parvæ latitudinis, ac proinde elementum superficiei sphæricæ, quam eadem circumferentia describet. Et rursum in recta BD pars quævis infinitè parva correspondens KL describet zonam elementarem respectivam superficiei convexæ cylindri geniti a recta BD sub eadem sphæræ diametro, & altitudine.



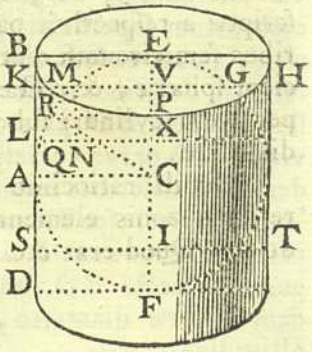
His animadverſis, perſpicuum eſt zonas elementares utriuſque convexæ ſuperficiei, ſphæricæ, & cylindricæ fore numero æquales. Nam perpendiculares omnes KV, LX ad axem EF revolutionis ſemper divident ſemicircumferentiam EAF, & rectam BD in eumdem numerum partium, quæ invicem reſpondebunt, ſingulæ ſingulis. Quod erat &c.

LEMMA II.

160. *Iſdem ſtantibus, zonæ elementares utrinque deſcriptæ a particulis mutuò reſpondentibus* MQ, KL *tum ſemicircumferentiæ, tum rectæ* BD, *ſunt magnitudine æquales, ſingulæ ſingulis.*

Demonſtratio. Particula MQ ſemiperipheriæ, cùm ſit infinitè parva, cenſeri poterit inſtar lineæ rectæ; ac proinde in ſua revolutione ſuper EF, & latitudine ſua infinitè parva deſcribet ſuperficiem parvi coni truncati, cujus oppoſitæ baſes erunt genitæ a duabus rectis MV, QX perpendicularibus axi EF.

Quamobrem, ſi per punctum medium R particulæ MQ ducatur ad axem EF perpendicularis RP, hæc recta erit radius circuli (n. 155.) ad æquale intervallum a duabus oppoſitis baſibus parvi trunci conici MVXQ.



Hinc ſuperficies convexa hujus coni, ſeu minimæ zonæ ſphæricæ deſcriptæ per MQ habebitur (n. 148.), ſi per MQ latus coni multiplicetur circum-

feren-

ferentia circuli, cujus radius eſt R P; nimirum, ſuperficies zonæ ſphæricæ elementaris ritè repræſentabitur per hoc productum, circumf. R P × M Q. Similiter (n. 60.) ſuperficies convexa parvæ zonæ cylindricæ deſcriptæ per K L habebitur, ſi per K L multiplicetur circumferentia circuli, cujus radius eſt L X; nimirum, ſuperficiem hujus zonæ cylindricæ benè repræſentat hoc productum, circumf. L X × K L. His poſitis, propoſitum Lemma huc tandem devolvitur, ut oſtendatur circumf. R P × M Q = circumf. L X × K L.

Ducatur infinitè parva M N parallela axi E F, ſeu perpendicularis ipſi P R; ducaturque R C. Conſtat duo triangula M N Q, R P C eſſe ſimilia (n. 413. Geom. planæ); nam habent latera mutuò perpendicularia, ſingula ſingulis. Ergo M Q : M N :: R C : R P. Atqui M N = K L, & R C = A C = L X; hinc M Q : K L :: L X : R P. Jam verò (n. 480. Geom. planæ) L X : R P :: circumf. L X : circumf. R P. Quare M Q : K L :: circumf. L X : circumf. R P; & conſequenter circumf. R P × M Q = circumf. L X × K L.

Equantur itaque duarum zonarum correſpondentium ſuperficies, ſphærica, & cylindrica, deſcriptæ a reſpectivis particulis M Q, K L elementaribus ſemicircumferentiæ E A F generantis ſuperficiem ſphæræ, & rectæ B D generantis convexam ſuperficiem cylindri ſub eadem ſphæræ altitudine, & diametro.

Simili ratiocinio demonſtrabitur æqualitas in reliquis zonis elementaribus ſphæricis, & cylindricis. Quod erat &c.

Scho-

Scholion.

HÆc duo Lemmata quàm expeditam viam aperiant Archimedæis de ſphæra Theorematis demonſtrandis facilè intelliget is, qui Archimedem ipſum legerit.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

161. *CYlindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies convexa, demptis baſibus oppoſitis, æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ.*

Demonſtratio. Per duo Lemmata præcedentia conſtat ſummam omnium zonarum elementarium, quæ componunt ſuperficiem ſphæricam, & numero, & magnitudine reſpectivè æquari ſummæ omnium zonarum, quæ componunt ſuperficiem convexam cylindri ſphæræ circumſcripti. Ergo cylindri &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

162. CUjuſcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ. *Archimedes lib.* 1. *prop.* 37.

Sphæram concipe inſcriptam cylindro: cujus proinde baſis æqualis erit maximo circulo ejuſdem ſphæræ, & altitudo æqualis diametro maximi ſphæræ circuli. Hoc poſito, ſuperficies convexa hujus cylindri recti eſt quadrupla areæ ſuæ baſis (n. 61.). Atqui ſuperficies convexa cylindri per Theor. æquat ſuperficiem ſphæricam. Ergo hæc eſt qua-

quadrupla areæ basis cylindri circumscripti, hoc est, circuli maximi ejusdem sphæræ.

Corollarium II.

163. EX hoc præclaro, atque admirabili Theoremate habetur dimensio superficiei sphæricæ. Duplex est praxis.

I. Metire diametrum sphæræ, ex qua (n. 297. Geom. planæ) elice circumferentiam: utriusque semisses invicem multiplicatæ dabunt (n. 295. & 296. Geom. planæ) aream maximi sphæræ circuli: quæ quater sumpta ipsam sphæræ superficiem dabit.

Ut si, juxta suppositionem P. Tacquet, & aliorum, maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horæ, sive belgica 5940000, hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria belgica 23760000, quæ in superficie orbis terræ continentur.

Scholion.

AD inveniendam aream maximi circuli, quoniam perinde est sive semisses diametri, & circumferentiæ inter se multiplices, sive totas, modò producti sumas dimidium: ea ex duabus via tenenda est, qua fractiones evitantur.

II. Multiplica diametrum sphæræ per circumferentiam maximi circuli: productum ipsa erit sphæræ superficies. Nam productum ex diametro, & circumferentia quadruplum est producti ex semidiametro, & semicircumferentia, hoc est, maximi sphæræ circuli. Atqui etiam sphæræ superficies quadru-

drupla eſt maximi circuli. Ergo productum ex diametro, & circumferentia, ſuperficiei ſphæræ equale eſt.

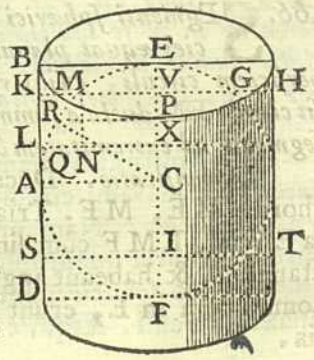
Ut ſi terræ diametro, juxta eamdem ſuppoſitionem, dentur milliaria unius horæ $2750\frac{14}{71}$; atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640: hi duo numeri, omiſſa fractione, invicem multiplicati dabunt rurſum quadrata milliaria belgica 23760000. totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.

Corollarium III.

164. SI cylindrus, ac ſphæra cylindro inſcripta ſecentur planis KH, ST ad axem EF perpendicularibus, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

Nam utraque convexa ſuperficies trunci ſphærici, & cylindrici ex iiſdem elementis componitur, ex eodem nempe zonarum correſpondentium, & æqualium numero.

Hinc ſuperficiem convexam trunci ſphærici inter duo plana parallela intercepti metiri facilè diſces. Nam, quemadmodum ſuperficiem convexam cylindri inter duo plana parallela intercepti metimur, multiplicando ejus altitudinem KS, ſeu VI per circumferentiam circuli, cujus radius ſit SI, ſive AC, qui eſt etiam radius ſphæræ; ita ſuperficies convexa trunci ſphærici a



duo-

duobus planis parallelis comprehensi obtinebitur, multiplicando eorumdem planorum distantiam VI per circumferentiam circuli, qui eumdem habeat radium, quem habet sphæra; nimirum, circumf. AC × VI, sive circumf. EC × VI. +

Corollarium IV.

165. HInc segmenti sphærici EMVGE convexa superficies æquat convexam superficiem cylindri BH habentis eamdem sphæræ diametrum, & eamdem altitudinem EV, quam habet idem segmentum.

Nam utriusque convexa superficies ex iisdem constat zonarum correspondentium elementis, numero, & magnitudine æqualibus. Itaque, quemadmodum superficies convexa cylindri BH = circumf. KV × BK = circumf. EC × EV; ita superficies convexa segmenti EMVGE æquabitur facto circumf. EC × EV. 17

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

166. *SEgmenti sphærici* EMVGE *convexa superficies æquat planam superficiem circuli, cujus radius sit chorda* EM *ducta a summitate segmenti ad extremitatem basis.*

Demonstratio. Ducantur chordæ ME, MF. Triangula EVM, EMF cùm sint rectangula, & habeant angulum communem in E, erunt similia. A B C D

Ergo

Ergo $EV : EM :: EM : EF :: \frac{EM}{2} : \frac{EF}{2} = EC$.

Quare $EV : EM :: \frac{EM}{2} : EC$;

ſive $EV : \frac{EM}{2} :: EM : EC$.

Cùm autem circulorum circumferentiæ ſint, ut radii, erit $EM : EC ::$ circumf. EM : circumf. EC.

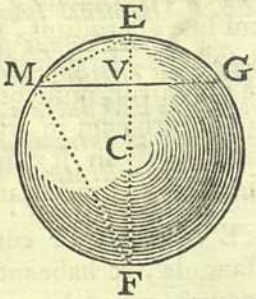
Ergo $EV : \frac{EM}{2} ::$ circumf. EM : circumf. EC;

ac proinde circumf. $EC \times EV =$ circumf. $EM \times \frac{EM}{2}$.

Atqui primum productum, circumf. $EC \times EV$ eſt (n. 165.) ſuperficies convexa ſegmenti ſphærici EMVGE; & ſecundum productum, circumf. $EM \times \frac{EM}{2}$ eſt ſuperficies circuli, cujus radius ſit EM. Ergo &c. Quod erat &c.

Corollarium.

167. SUperficies convexa ſegmenti ſphærici EMVGE adæquat utramque ſimul ſuperficiem, nimirum, circuli, ſeu baſeos ſegmenti ſub radio MV, & ſuperficiem circuli ſub radio EV, qui altitudinem exhibet ejuſdem ſegmenti ſphærici.



Nam, cùm triangulum MVE ſit rectangulum in V, ſuperficies circuli, cujus radius eſt latus EM, æquabitur ſummæ duorum circulorum, quorum radii ſunt hæc eadem latera MV, EV anguli recti.

De

De Sphæræ Soliditate.

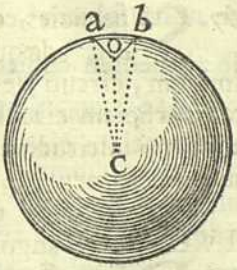
PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

168. *Sphæræ soliditatem invenire.*

Resolutio. Superficiem sphæræ inventam n. 163. duc in trientem sui radii, vel in sextantem suæ diametri: hoc factum dabit soliditatem sphæræ.

Demonstratio. Si enim superficies sphæræ concipiatur resoluta in particulas ita parvas, puta, *a o b*, ut infinitè accedant ad superficiem planam, & a singulis earum perimetri punctis ad centrum sphæræ tendant rectæ *ac*, *oc*, *bc*, habebitur soliditas sphæræ resoluta in totidem pyramides, quarum bases erunt illæ particulæ superficiei sphæricæ, & altitudo communis erit radius sphæræ. Quare omnium summa æquabitur pyramidi habenti basem æqualem toti illi superficiei sphæricæ, & altitudinem eamdem. Atqui (n. 115.) hujus pyramidis soliditas habetur, multiplicando suam basim, idest sphæræ superficiem, per trientem suæ altitudinis, radii nempe sphæræ. Ergo soliditas sphæræ invenitur, multiplicando ipsius superficiem in trientem sui radii, vel in sextantem suæ diametri. Quod erat &c.



Co-

Corollarium.

169. OMnis ſphæra æqualis eſt cono, vel pyramidi, cujus altitudo par eſt radio ſphæræ, baſis verò ſuperficiei ſphæræ æqualis.

Exemplum. Eſto ſphæræ diameter $= 4$ pedibus. Per rationem veræ proximam ab Archimede traditam inveniatur longitudo circumferentiæ ſui maximi circuli. Fiat itaque $7 : 22 :: 4 : \frac{4 \times 22}{7} = \frac{88}{7}$, valor circumferentiæ quæſitæ, quæ multiplicata per ſuam diametrum (n. 163.) dabit ſuper[illegible] ſphæ[illegible]; erit itaque [illegible] ſuperficies $= \frac{88}{7} \times 4 = \frac{352}{7} = 50 + \frac{2}{7}$. Denique ducatur $50 + \frac{2}{7}$ in ſextam partem diametri, hoc eſt, in $\frac{4}{6}$, ſive in $\frac{2}{3}$, erit $50\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} + \frac{4}{21} = 33\frac{1}{3} + \frac{4}{21} = 33 + \frac{11}{21}$. Quod ſignificat ſoliditatem unius ſphæræ, cujus diameter ſit $= 4$ pedibus, eſſe 33 pedum cubicorum, & $\frac{11}{21}$ unius pedis cubici proximè; nam ratio Archimedæa diametri ad circumferentiam circuli non eſt niſi ratio approximata.

Scholion I.

170. *DEmonſtratio jam allata hujus Problematis, & aliorum ſequentium per methodum indiviſibilium facillima eſt, ac penitus diverſa ab ea demonſtrandi methodo, qua uſus eſt Archimedes; quæ, quamvis ſubtilis, & ingenioſa ſit, prolixa tamen eſt, & ar-*

& ardua, ad quam videlicet adhibentur propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum verò Theorema ab Archimede proponitur in hunc modum: Omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem verò radium.

Scholion II.

171. H*Inc, dato quòd superficies terræ sit proximè sphærica, invenietur ejus soliditas.*

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23760000; *& semidiameter esto milliariorum horariorum* 1375, *cujus tertia pars est* $458\frac{1}{3}$: *multiplica* 458, *omissa fractione, per* 23760000: *provenient* 10882080000 *cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.*

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

172. I*Nvenire rationem, quam habet soliditas sphæræ ad soliditatem cylindri eidem sphæræ circumscripti.*

Resolutio, ac demonstratio. Quoniam basis cylindri sphæræ circumscripti est maximus circulus ejusdem sphæræ, & altitudo hujus cylindri est sphæræ diameter; vocetur L cylindrus, S sphæra, C circumferentia maximi ejusdem circuli, & D ipsius diameter.

Jam verò soliditas hujus cylindri habetur ex ductu suæ basis in suam altitudinem; basis cylindri

propositi est circulus, cujus area æquatur producto circumferentiæ in semissem radii, sive in quartam partem diametri. Itaque hæc area erit $C \times \frac{D}{4} = \frac{CD}{4}$; quæ rursum ducta in altitudinem D, exhibet $\frac{CDD}{4}$ soliditatem cylindri L circumscripti.

Atqui soliditas sphæræ S est $\frac{CDD}{6}$; nam (n. 163.) superficies sphæræ est CD, quæ multiplicata in sextam partem suæ diametri, nimirum, in $\frac{D}{6}$, dabit (n. 168.) $CD \times \frac{D}{6} = \frac{CDD}{6}$ soliditatem sphæræ.

Quare $L : S :: \frac{CDD}{4} : \frac{CDD}{6}$.

Multiplicetur utrumque membrum secundæ rationis, more fractionum, per 4 & 6:

erit $L : S :: 6\,CDD : 4\,CDD :: 6 : 4 :: 3 : 2$.

Ergo $L : S :: 3 : 2$. Quod erat &c.

Hinc ostenditur celebre Archimedæum Theorema. *Soliditas cylindri recti ad soliditatem sphæræ, cui circumscribitur, est in proportione sesquialtera, hoc est, ut 3 ad 2*; sive, *Soliditas sphæræ æquatur duabus tertiis partibus soliditatis cylindri recti sphæræ circumscripti.*

Scholion.

Quantì hoc Theorema fecerit Archimedes, argumento est, quòd tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Qua de re erit non injucunda Tironibus narratio Tullii lib. 5. tusc. quæst.

Ex

Ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere, & radio excitabo, qui multis annis post fuit, Archimedem; cujus ego Quæstor ignoratum ab Syracusanis, cùm esse omnino negarent, septum undique, & vestitum vepribus, & dumetis indagavi sepulcrum: tenebam enim quosdam senariolos, quos in ejus monumento esse inscriptos acceperam; qui declarabant in summo sepulcro sphæram esse positam cum cylindro. Ego autem, cùm omnia collustrarem oculis, (est enim ad portas agragianas magna frequentia sepulcrorum) animadverti columellam non multùm e dumetis eminentem, in qua inerat sphæræ figura, & cylindri; atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi me illud ipsum arbitrari esse, quod quærerem. Immissi cum falcibus multi purgarunt, & aperuerunt locum; quò, cùm patefactus esset aditus, ad adversam basim accessimus. Apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum, dimidiatis ferè. Ita nobilissima Civitas, quondam verò etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine arpinate didicisset.

Verùm, ne fortasse Tirones calculo literali minimè assueti, præcedentem demonstrationem ægrè assequantur, placet idem Theorema geometricè, & universaliter demonstrare, præmisso hoc Lemmate.

LEMMA.

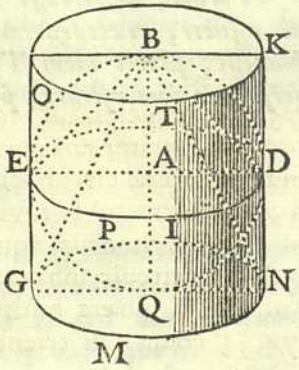
173. *Hemisphærium* EOBD, *coni* EBD *eamdem secum basim, & altitudinem habentis duplum est.*

Demonstratio. Conus, cujus basis est superficies hemisphærica EOBD, altitudo autem radius, est ad conum EBD, ut basis ad basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Atqui superficies hemisphærica EOBD dupla est maximi circuli PT (n. 162.). Ergo conus habens pro basi superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus est coni EBD. Jam verò (n. 168. & 169.) hemisphærium æquatur cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

174. *Cylindrus rectus* GK *sphæræ, cui circumscribitur, & soliditate, & superficie tota sesquialter est.*



Demonstratio. Communis sphæræ, ac cylindri axis esto BQ; conus verò maximus hemisphærio EOBD inscriptus, sit EBD.

1. Cylindrus EK (semissis totius GK) triplus est coni EBD (n. 109.); hemisphærium verò ejusdem coni duplum est ex

Lem.

Lem. Ergo cylindrus eſt ad hemiſphærium, ut 3 ad 2; & conſequenter totus cylindrus GK eſt ad totam ſphæram, ut 3 ad 2.

II. Superficies convexa cylindri ſphæræ circumſcripti abſque baſibus quadrupla eſt baſeos MI; ac proinde cum baſibus, hoc eſt, tota cylindri ſuperficies erit ſextupla baſeos MI, quæ par eſt maximo circulo ſphæræ. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4, ſive, ut 3 ad 2.

Itaque cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate, & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat &c.

Scholion.

OPportunè notat P. Tacquet idcirco fortaſſe inter alia tam multa, & præclara inventa ſua hoc Archimedi præ reliquis placuiſſe, quòd & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet, atque una rationalis proportio.

Corollarium I.

175. SI concipiatur conus GBN habens pro baſi pariter circulum ſphæræ maximum, & cylindrus ſphæræ circumſcriptus; erunt conus, ſphæra, cylindrus ad ſe invicem, ut numeri 1, 2, 3.

Nam cylindrus æquatur producto ex baſi ſua, ſive areà circuli ſphæræ maximi in diametrum BQ (n. 68.); ſphæra binis ejus producti trientibus (n. 174.); conus uni trienti (n. 109.).

Corollarium II.

176. SI concipiatur conus habens pro basi circulum sphæræ maximum, & pro altitudine radium ejusdem sphæræ, hæc erit quadrupla hujus coni.

Corollarium III.

177. ERgo sphæra æquatur cono, cujus basis sit quadrupla maximi sphæræ circuli, & altitudo par radio ejusdem sphæræ. Nam hic conus quadruplus erit alterius habentis radium sphæræ pro altitudine, & pro basi circulum sphæræ maximum.

Corollarium IV.

178. ERgo sphæra æquatur etiam cono, cujus basis sit æqualis superficiei sphæricæ, & altitudo par radio ejusdem. Nam superficies sphæræ quadrupla est maximi sphæræ circuli.

ELE-

ELEMENTUM VII.

De Ratione Superficierum, & Solidorum in corporibus similibus.

DEFINITIO.

179. CORPORA *similia sunt, quæ totidem ex æquo planis sibi mutuò similibus continentur.*

Corollarium I.

180. IN corporibus similibus latera omnia homologa planorum terminantium pariter homologorum sunt in eadem ratione. Nam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia.

Corollarium II.

181. PLana omnia terminantia homologa duorum corporum similium sunt in eadem ratione. Hæc quippe plana, cùm sint similia, erunt proportionalia quadratis suorum laterum homologorum. Cùm autem latera homologa sint omnia in eadem ratione (n. 180.), eorum quadrata erunt pariter in eadem ratione; & consequenter plana omnia terminantia homologa duorum corporum similium sunt in eadem ratione.

Corollarium III.

182. IN corporibus ſimilibus anguli ſolidi homologi ſunt æquales. Nam in planis ſimilibus anguli homologi ſunt æquales; anguli verò ſolidi homologi ex concurſu planorum homologorum oriuntur.

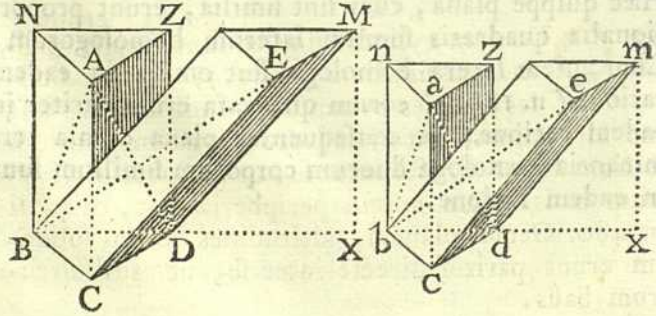
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Ratio altitudinum.

183. *SImilium priſmatum* BCDEM, bcdem *altitudines* MX, mx *ſunt, ut duo quælibet homologa baſium latera* CD, cd.

Demonſtratio. Erectis enim ad perpendiculum ſuper eaſdem baſes duobus aliis priſmatis ſimilibus NC, *nc*, & ſub iiſdem reſpectivè altitudinibus, erit (n. 180.) latus ZD ad latus homologum *zd*, hoc eſt, per hyp., MX : *mx* :: CD : *cd*. Quare ſimilium priſmatum BCDEM, *bcdem* &c. Quod erat &c.



Co-

Corollarium I.

184. HInc ſimilium pyramidum altitudines ſunt pariter, ut duo quælibet homologa baſium latera.

Corollarium II.

185. BAſes priſmatum, & pyramidum ſimilium ſunt in ratione duplicata altitudinum. Sunt enim plana ſimilia (n. 179.), & conſequenter in ratione duplicata laterum homologorum CD, *cd* (n. 499. & 500. Geom. planæ).

Corollarium III.

186. ALtitudines priſmatum, & pyramidum ſimilium ſunt directè, ut perimetri baſium. Nam perimetri baſium ſunt, ut duo latera earumdem homologa (n. 476. Geom. planæ).

Corollarium IV.

187. QUoniam cylindri ſimiles ſunt ſpecies priſmatum ſimilium (n. 83.), & coni ſimiles, ſpecies pyramidum ſimilium (n. 85.); hinc altitudines tam cylindrorum, quàm conorum ſimilium erunt directè inter ſe, ut peripheriæ circulorum baſis. Cùm autem peripheriæ ſint, ut radii (n. 480. Geom. planæ), altitudines horum ſolidorum erunt pariter directè inter ſe, ut radii circulorum baſis.

PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

Ratio superficierum.

188. *Superficies omnium solidorum similium, quæ planis rectilineis terminantur, sunt, ut duo quælibet plana homologa, ac proinde proportionales quadratis duorum homologorum laterum planorum eorumdem.*

Demonstratio. Plana similia, quibus ipsa solida continentur, sunt in eadem ratione (n. 181.). Ergo, ut singula singulis, ita omnia omnibus; hoc est, summa planorum terminantium solidum, sive tota superficies ipsius solidi erit ad summam omnium planorum terminantium aliud solidum, sive ad totam superficiem alterius solidi similis, ut planum unius ad planum alterius. Atqui plana similia sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum. Ergo superficies omnium solidorum similium &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

189. Superficies prismatum, & pyramidum similium sunt in ratione duplicata, sive, ut quadrata suarum altitudinum. Horum namque altitudines sunt directè inter se, ut duo quælibet homologa basium latera (n. 183. & 184.).

Corollarium II.

190. Hinc, cùm cylindri similes sint species prismatum similium, & similes coni sint species similium pyramidum, curvæ tam cylindrorum,

quàm

quàm conorum ſimilium ſuperficies ſunt reſpectivè inter ſe in ratione duplicata, ſive, ut quadrata ſuarum altitudinum.

Corollarium III.

191. CUm altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſint, ut radii circulorum baſis (n. 187.), curvæ ſuperficies cylindrorum & conorum ſimilium ſunt reſpectivè in ratione duplicata, ſive, ut quadrata ipſorum radiorum, ac proinde, ut ipſi baſium circuli (n. 506. Geom. planæ).

Corollarium IV.

192. CUrvæ ſimilium cylindrorum, atque conorum ſuperficies, ſumptæ unà cum eorumdem circulis, ſunt in ratione radiorum circulorum baſis duplicata. Nam circuli, quibus ſimiles cylindri terminantur, quique ſunt ſimilium conorum baſes, ſunt pariter in ratione duplicata ſuorum radiorum.

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

193. *OMnia priſmata, parallelepipeda, cylindri, pyramides, & coni ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.* Ratio ſolidorum.

Demonſtratio. Sunt enim, ut facta ex baſibus in altitudines. Ergo in ratione compoſita baſium, & altitudinum (n. 486. Geom. planæ). Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

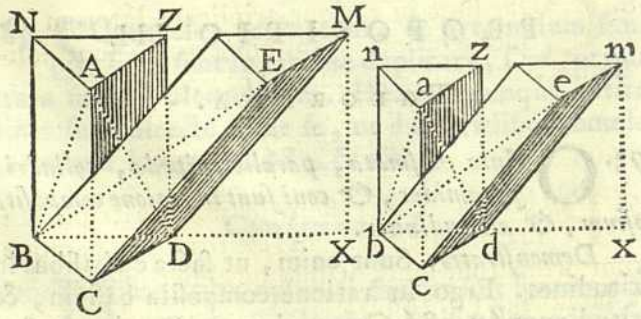
194. QUare, ſi baſes fuerint æquales, altitudinum rationem habent; ſi altitudines fuerint æquales, baſium rationem habent.

Corollarium II.

195. CYlindrorum, & conorum baſes ſunt circuli, qui duplicatam habent rationem ſuarum diametrorum. Ergo cylindri, & coni quicunque ſunt in ratione compoſita ex directa altitudinum, & duplicata diametrorum; & conſequenter, ſi fuerint æquè alti, ſunt, ut quadrata diametrorum.

Corollarium III.

196. QUare, ſi in cylindris, & conis altitudo fuerit diametro baſium æqualis, erunt in ratione triplicata diametrorum baſium (n. 492. Geom. planæ).



PRO-

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

197. PRiſmata ſimilia MBC, mbc ſunt in ratione triplicata ſuorum laterum homologorum CD, cd.

Demonſtratio. Sunt quippe inter ſe, per præced., in ratione compoſita ex ratione baſium BCD, *bcd*, & ex ratione altitudinum MX, *mx*. Atqui baſes BCD, *bcd* ſunt in ratione duplicata laterum hohomologorum CD, *cd* (n. 499. Geom. planæ); & altitudines MX, *mx* ſunt directè, ut ipſa latera CD, *cd* (n. 183.). Ergo priſma MBC eſt ad priſma *mbc* in ratione compoſita ex ratione laterum CD, *cd*, & ex eadem duplicata. Hæc autem eſt ipſiſſima ratio triplicata laterum CD, *cd*. Ergo priſmata ſimilia ſunt in ratione triplicata ſuorum laterum homologorum. Quod erat &c.

Corollarium I.

198. CUbi ſunt in ratione triplicata laterum homologorum. Nam omnes cubi ſunt ſolida ſimilia, & ſimilia priſmata (n. 179.).

Corollarium II.

199. PRiſmata ſimilia ſunt in ratione triplicata ſuarum altitudinum. Altitudines namque horum priſmatum ſunt, ut duo quælibet ipſorum latera homologa (n. 183.).

Co-

Corollarium III.

200. PYramides ſimiles ſunt in ratione triplicata tum laterum homologorum, tum altitudinum. Pyramides quippe ſunt directè inter ſe, ut priſmata ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituta (n. 108.); atque adeo pyramides ſimiles ſunt, ut priſmata ſimilia; ac proinde &c.

Corollarium IV.

201. CUm cylindri ſimiles ſint ſpecies priſmatum ſimilium, & ſimiles coni ſint ſpecies pyramidum ſimilium, tam cylindri, quàm coni ſimiles ſunt in ratione triplicata ſuarum altitudinum.

Corollarium V.

202. CUmque altitudines tam cylindrorum, quàm conorum ſimilium ſint directè inter ſe, ut radii circulorum baſis (n. 187.), tam cylindri, quàm coni ſimiles ſunt directè inter ſe in ratione ipſorum radiorum triplicata; atque hinc, ut cubi tam ipſorum radiorum, quàm ſuarum altitudinum (n. 494. Geom. planæ).

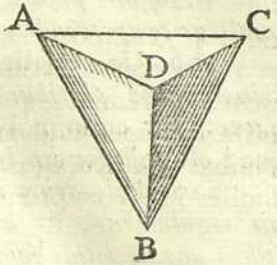
DEFINITIONES.

203. *EX omnibus ſolidis, quæ planis ſuperficiebus terminantur, illa dicuntur regularia, quæ planis regularibus, & æqualibus continentur; omneſque ipſorum anguli ſunt inter ſe æquales.*

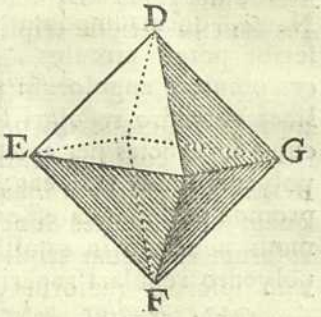
204. Corpora regularia ſunt cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum, & icoſaedrum. Cætera autem corpora ab his diverſa, irregularia nuncupantur.

205.

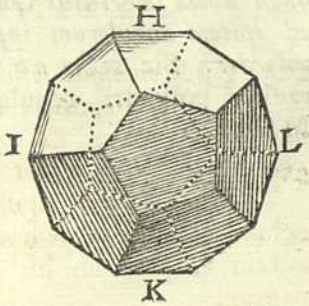
205. *Tetraedrum eſt ſolidum quatuor triangulis planis rectilineis, regularibus, & inter ſe æqualibus terminatum;* ut ſolidum ABCD.



206. *Octaedrum eſt ſolidum octo triangulis planis rectilineis, regularibus, & inter ſe æqualibus comprehenſum;* ut ſolidum DEFG.



207. *Dodecaedrum eſt ſolidum, quod duodecim pentagonis æqualibus, & regularibus continetur;* ut ſolidum HIKL.



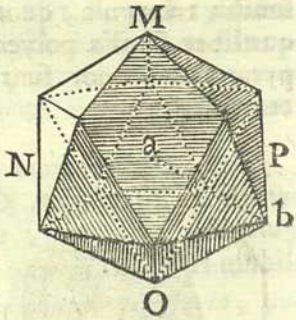
208.

208. *Icosaedrum* postremò *est solidum, quod viginti triangulis planis rectilineis, regularibus, & æqualibus comprehenditur;* ut solidum MNOP.

209. Universaliter *Polyedrum vocatur illud solidum, quod pluribus figuris planis rectilineis terminatur.* Est enim polyedrum in genere solidorum, quod est polygonum in genere planorum.

210. *Polyedrum regulare illud dicitur, quod planis regularibus, & æqualibus continetur; omnesque ipsius anguli solidi sunt inter se æquales.*

211. *Centrum polyedri regularis est punctum a sumptum in illius area, a quo omnes rectæ ductæ ad singulos ipsius polyedri angulos solidos sunt æquales.* Nam, quemadmodum polygono regulari circumscribi potest circulus, cujus peripheria per apices omnium angulorum polygoni transeat; ita cuilibet polyedro regulari sphæra circumscribi potest, cujus superficies per apices omnium angulorum ipsius polyedri simul transeat; ac proinde perspicuum est ejusmodi punctum in quolibet polyedro regulari reperiri.



212. *Radius polyedri regularis est recta quævis linea ducta ab illius centro ad apicem angulorum ipsius polyedri.* Sic recta *ab* est radius polyedri regularis MNOP.

Co-

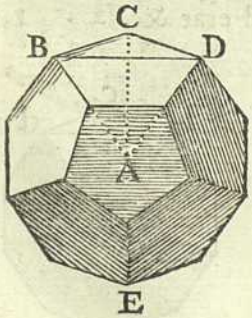
Corollarium.

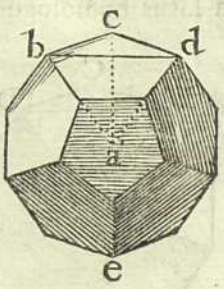
213. OMnia corpora regularia, nimirum, omnes cubi, omnia tetraedra &c. ſunt reſpectivè ſibi mutuò ſimilia. Etenim planis numero æqualibus, & figurà ſimilibus, utpote regularibus, omnia reſpectivè continentur.

LEMMA.

214. *POlyedra ſimilia in totidem ex æquo pyramides ſimiles, quarum baſes ſint ipſorum plana terminantia, reſolvi poſſunt, ſi ab eorum centro ad ſingulos angulos ſolidos ducantur radii.*

Cùm enim polyedrum ſit inter figuras ſolidas, quod eſt polygonum inter planas, quemadmodum duo quælibet polygona ſimilia reſolvi poſſunt in tot ſimilia triangula, quot ſunt ipſorum latera; ita duo quælibet ſimilia polyedra reſolvuntur in tot ſimiles pyramides, quot ſunt plana, quibus polyedra ipſa terminantur.



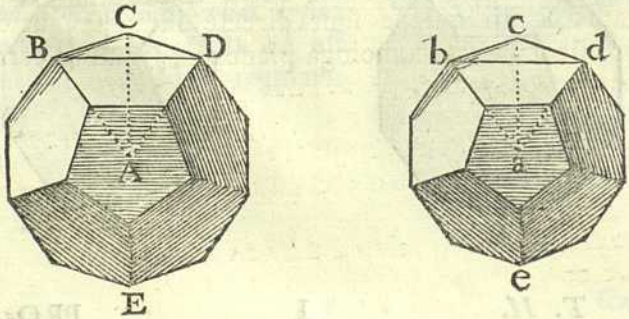


PROPOSITIO V.

THEOREMA.

215. *Polyedra ſimilia ſunt in ratione triplicata ſuorum laterum homologorum.*

Demonſtratio. Pyramis BADC, cujus vertex eſt centrum polyedri, ſit una ex illis, ex quibus componitur polyedrum BCDE; & ſimiliter pyramis *badc* una ex illis, in quas reſolvitur polyedrum *bcde*; eruntque per Lemma pyramides ipſæ ſimiles inter ſe. Quamobrem pyramis BADC eſt ad pyramidem *badc* in ratione triplicata lateris CD ad latus homologum *cd* (n. 200.). Duæ autem quælibet pyramides ſimiles, in quas polyedra ipſa reſolvi poſſunt, hanc eamdem habent rationem inter ſe; eademque eſt ratio omnium laterum homologorum in polyedris ſimilibus (n. 180.). Ergo ſumma omnium pyramidum componentium polyedrum BCDE erit ad ſummam earum omnium, quæ polyedrum *bcde* conſtituunt, ſive, ſoliditas unius ad ſoliditatem alterius erit, ut illarum una BADC ad unam *badc*, atque adeo in ratione triplicata lateris CD ad latus homologum *cd*. Quod erat &c.



Co-

Corollarium I.

216. RAdii polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directè inter se, ut duo quælibet latera homologa planorum. Etenim tam radii AB, *ab*, quàm rectæ BD, *bd* sunt latera homologa pyramidum similium BADC, *badc*, in quas polyedra similia resolvuntur; erit ergo AB : *ab* :: BD : *bd* (n. 180.).

Corollarium II.

217. SUperficies polyedrorum regularium ejusdem generis sunt in ratione duplicata suorum radiorum. Hujusmodi namque polyedra sunt similia solida (n. 213.), quorum superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum (n. 188.); radii autem sunt directè inter se, ut duo quælibet homologa planorum latera.

Corollarium III.

218. POlyedra regularia similia ejusdem generis sunt in ratione suorum radiorum triplicata. Radii quippe sunt directè inter se, ut duo quælibet latera homologa planorum, quibus terminantur polyedra.

LEMMA.

219. *Polyedrum regulare planis numero infinitis, & magnitudine infinitè parvis comprehensum desinit in sphæram.*

Perspicuum est enim, tantò magis ad sphæram polyedrum accedere, quò numero plura, & magnitudine exiliora sint plana, quibus continetur. Quare, si multiplicetur numerus planorum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum, polyedrum abibit in sphæram.

Corollarium.

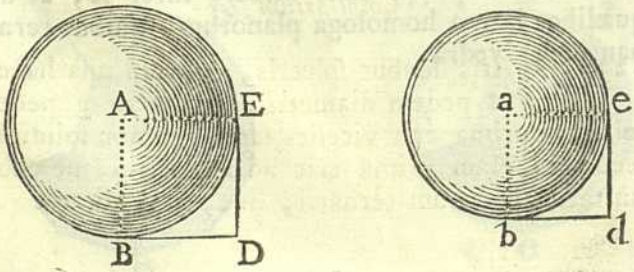
220. Omnes idcirco sphæræ spectari possunt tanquam polyedra regularia ejusdem generis.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

221. *Sphærarum superficies sunt in ratione duplicata suorum radiorum.*

Demonstratio. Sphæræ EB, *eb* assumi possunt



tan-

tanquam polyedra regularia ejusdem generis. Ergo earum superficies sunt in ratione radiorum AB, *ab* duplicata, sive, ut eorum quadrata (n. 217.). Quod erat &c.

Scholion.

ITaque sphæra, cujus radius sit unius pedis, tricesies minùs superficiei habebit, quàm sphæra, cujus radius sit pedum 6. Superficies quippe harum sphærarum erunt, ut quadrata radiorum, sive, ut 1 *ad* 36.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

222. *SPhæræ sunt in ratione triplicata, sive, ut cubi suorum radiorum* AB, *ab*.

Demonstratio. Cùm enim per Lem. spectentur tanquam polyedra regularia ejusdem generis, erunt & ipsæ sphæræ in ratione triplicata, sive, ut cubi suorum radiorum AB, *ab*, vel diametrorum. Quod erat &c.

Corollarium I.

223. DAtis duabus sphæris, quarum una habeat 1 pedem diametri, & altera 3 pedes, soliditas primæ erit vicesies septies minor soliditate secundæ. Nam prima erit ad secundam, ut cubus unitatis ad cubum ternarii, sive, ut 1 ad 27.

Corollarium II.

224. NOtabis obiter principium universale, quod maximi usus est in physicis, nimirum, non eadem proportione decrescere superficiem corporis, qua decrescit tota moles, seu soliditas; cùm hæc decrescat in ratione triplicata, superficies verò solùm in ratione duplicata. Quare in minore mole corporis major proportionaliter superficies habetur, & in majore mole alterius homogenei corporis minor respectivè superficies; quod adhibito superiore exemplo sic explicatur.

Sphæra, cujus diameter sit trium pedum, vicesies septies plus habet soliditatis, quàm sphæra diametri unius pedis. Quamobrem, si harum sphærarum superficies parem habere deberent proportionem ad earum soliditatem, superficies majoris ad superficiem minoris esse oporteret, ut 27 ad 1. Est autem tantùm, ut 9 ad 1; sunt enim sphærarum superficies inter se, uti quadrata diametrorum ex Theor. Itaque superficies corporum non sunt eorum soliditati proportionales.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

225. *POlyedra, quæ dicuntur regularia, plura esse non possunt, quàm quinque, nimirum, tetraedrum, octaedrum, icosaedrum, cubus, dodecaedrum.*

Demonstratio. Angulorum solidorum proprietas demonstrata n. 39. maximum usum habet pro figu-

ris

ris ſolidis determinandis, quæ vocantur polyedra regularia; quippe quæ facies omnes æquales habent rectilineas, & regulares. Ea autem non poſſe eſſe plura, quàm quinque, ſic ex anguli ſolidi natura demonſtratur.

Omnis angulus ſolidus conſtare debet angulis planis, qui ſimul ſumpti ſint minores quatuor rectis (n. 39.); non poteſt autem conſtare paucioribus, quàm tribus. Itaque

I. A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis, ſeu tetraedri. Nam trianguli æquilateri angulus quivis continet gradus 60; & conſequenter tres anguli plani conſtituentes angulum ſolidum erunt ſimul minores duobus rectis.

II. Ex quatuor triangulis æquilateris ſimiliter ad unum punctum coeuntibus conſtitui poteſt angulus ſolidus octaedri.

III. Ex quinque angulus ſolidus icoſaedri. Nam æquilateri trianguli anguli quatuor, aut quinque ſunt quatuor rectis minores.

IV. Angulus quivis quadrati, cùm ſit graduum 90, per ſe patet a tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi.

V. Angulus quivis pentagoni continet gradus 108. Quoniam verò tres anguli pentagonici ſunt quatuor rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempe dodecaedri.

Atque hinc quinque exſurgunt regularia corpora. Præter hæc nulla eſſe alia ſic demonſtratur.

A ſex æquilateris triangulis non poterit effici angulus ſolidus, multò minùs a pluribus; ſex quippe anguli trianguli æquilateri conficiunt quatuor rectos.

A quatuor quadratis non poſſe conſtitui angulum ſolidum, ac multò minùs a pluribus, per ſe patet.

Quatuor anguli pentagonici ſunt quatuor rectis majores; ſinguli enim efficiunt gradus 108. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus.

Angulus quivis hexagoni continet gradus 120; & conſequenter tres anguli hexagonici ſunt quatuor rectis æquales.

Cùm verò tres anguli hexagonici ſint quatuor rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octogoni &c. quatuor rectis majores erunt.

Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas omnes eſſe ineptas ut ſolidum angulum conſtituant; adeoque quinque tantùm eſſe ſpecies corporum regularium, eorum nimirum, quæ conſtituantur tribus angulis pentagonorum, quatuor quadratorum, tribus, vel quatuor, vel quinque triangulorum æquilaterorum. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

226. *METiri ſoliditatem, ac ſuperficiem quinque corporum regularium.*

Reſolutio. Tetraedri ſoliditas invenitur n. 115., cùm ſit pyramis triangularis æquilatera.

Cubi, ſeu hexaedri ſoliditas n. 67.

Octaedri area ſic invenitur. Quia octaedrum dividitur in duas pyramides ſimiles, & æquales, utriuſque pyramidis area eſt inveſtiganda.

Dodecaedri area ſimiliter invenitur. Quia du-

ctis

ctis ex centro dodecaedri ad omnes ejus angulos rectis lineis, dodecaedrum dividitur in duodecim pyramides pentagonas æquales; si soliditas unius inventa multiplicetur per 12, procreatur area totius dodecaedri.

Icosaedrum dividitur pariter in 20 pyramides triangulares æquales. Soliditas inventa unius pyramidis multiplicetur per 20; & totius icosaedri soliditas obtinebitur.

Superficies eorundem prodit, si area unius plani terminantis quæratur, & inventa multiplicetur per numerum, a quo corpus denominatur.

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

227. *Soliditatem corporum irregularium metiri.*

Resolutio. Corporum irregularium dimetiendorum ratio geometrica alia non est, quàm ut prius in regularia resolvantur. Nam soliditates singulorum inventæ per Probl. præced., & simul junctæ dabunt soliditatem totius corporis irregularis.

Quoniam verò quædam irregularia corpora commodè in regularia resolvi non possunt, cujusmodi sunt statuæ, urnæ, amphoræ, vasa diversarum figurarum, frusta saxorum, & similia; idcirco Clavius, Wolfius, ac plerique Scriptores aliam tradunt mechanicam regulam ad hujusmodi corpora dimetienda, quam describit Clavius lib. 5. Geom. pract. cap. 11.

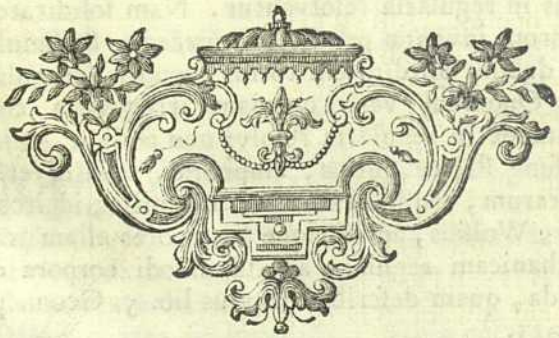
Paretur arca lignea ex asseribus lævigatis, instar parallelepipedi cujusdam, quæ pice ita oblinatur, ut aquam continere possit. Arca hæc tantæ debet

debet esse longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, ut corpus metiendum intra ipsam positum, aquà totum possit operiri.

Posita hac arca horizonti æquidistante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantùm aquæ, quantùm satis est, ut corpus impositum omnino tegat; notenturque diligenter suprema latera aquæ in asseribus arcæ, ut habeatur altitudo aquæ usque ad arcæ fundum.

Extracto deinde corpore, ita tamen, ut nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rursum latera aquæ, postquam quieverit.

Quòd si metiamur duo parallelepipeda, quorum basis communis est arcæ fundus, altitudines verò sunt rectæ lineæ a lateribus aquæ notatis usque ad basim, & minus a majore subtrahamus; relinquetur parallelepipedum soliditati corporis propositi omnino æquale.



PRA-

PRAXIS GEOMETRICA

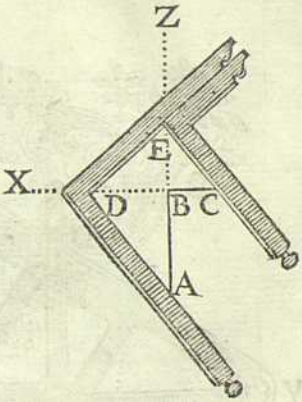
ELEM. VII. SOLIDORUM.

De Transformatione Figurarum solidarum in alias Figuras solidas.

PROBLEMA I.

228. INTER *duas datas rectas* AB, BC *invenire duas medias proportionales.*

Resolutio. Ponantur AB, BC ad rectum angulum; & producantur indefinitè versus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ; & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, ea lege, ut & latus unum transeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata norma secunda transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias proportionales inter AB & BC; hoc est, AB:BD::BD:BE::BE:BC.



Demonstratio patet ex n. 567. Geom. planæ. Nam ADE rectangulum triangulum est; & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo AB:BD::BD:BE. Ob eamdem causam BD:BE::BE:BC. Quod erat &c.

Scho-

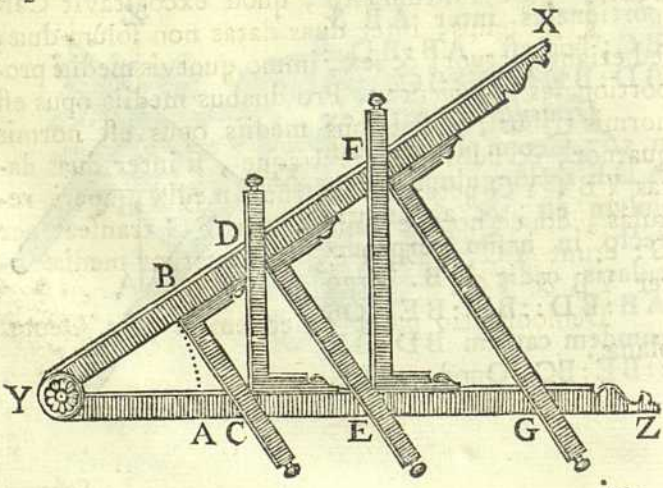
Scholion.

HÆc resolutio, quæ Platoni tribuitur, quamvis illa quidem & ingeniosa sit, & omnium, quæ afferri solent, facillima; tamen, quia habita normæ, & regulæ applicatione, non nisi tentando fit, geometrica non est.

PROBLEMA II.

229. *INter duas datas rectas invenire quotvis medias proportionales.*

Resolutio. Ad similitudinem circini paretur instrumentum XYZ, compositum duabus regulis mobilibus XY, ZY, quæ aperiri possint, & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ ea lege, ut, dum aperiuntur regulæ, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD



im-

impellat normam DE in regula YX, & ſic deinceps; dum verò regulæ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G incidant in unum, idemque punctum A. Sint itaque inveniendæ duæ mediæ proportionales inter duas datas rectas. Minor datarum transferatur in regulam YX, & ſit YB; major in regulam alteram YZ, & ſit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur; & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico YC, YD eſſe duas medias proportionales inter datas YB, YE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex n. 567. Geom. pl. Nam ex natura inſtrumenti in trigono rectangulo YCD erit YB : YC :: YC : YD.
Rurſum in trigono rectangulo YDE erit
YC : YD :: YD : YE. Quod &c.

Corollarium.

230. HOc inſtrumento, quod excogitavit Carteſius, inter duas datas non ſolùm duæ, ſed etiam quatuor, & ſex, immo quotvis mediæ proportionales reperientur. Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro tribus mediis opus eſt normis quatuor, & ſic deinceps. Itaque, ſi inter duas datas YB, YG petantur quatuor mediæ, aperi regulas, donec normæ quintæ latus FG tranſeat per G: erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB & YG.

Demonſtratio patet ex eodem n. 567. Geom. planæ.

Scho-

Scholion I.

ARtificium hoc, quamvis sit paulò operosius, magnam sanè laudem Cartesio conciliavit, tum quia nihil perficit tentando, tum verò maximè quia ad quotcunque medias se extendit; quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos a Geometris hactenus inventos obtineri potest. Qua verò ratione idem Problema per analysim resolvatur, fusè docuimus in nostris commentariis Arith. universalis lib. 2. parte 3. n. 291.

Scholion II.

PEr duas medias proportionales perficitur cubi duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione augentur, vel minuuntur; quemadmodum idipsum in figuris planis effici demonstravimus per unam mediam. At quoniam in Geometria practica multò commodiùs numeris utimur, quàm lineis; idcirco subdo sequens Problema, cujus generalem resolutionem dedi in meis commentariis Arith. univers. lib. 2. p. 3. n. 291.

PROBLEMA III.

231. *INter duos datos quotvis numeros, puta, 2 & 16, invenire duos medios proportionales.*

Resolutio. I. Primus datorum 2 cubetur, & fiat 8.

II. Instituatur regula trium, in qua duo primi termini sint primus, & secundus datorum numerorum 2 & 16, & tertius terminus sit cubus 8 primi numeri 2; & per regulam proportionum inveniatur quartus proportionalis 64, nimirum, 2 : 16 : : 8 : 64.

III.

III. Radix cubica hujus quarti numeri proportionalis, hoc eſt, 4, erit primus duorum mediorum, qui quæruntur.

IV. Inter hunc primum numerum duorum mediorum inventum 4, & ſecundum datum 16 quæratur rurſum medius proportionalis; qui, uti præſcribitur in Arithmetica, obtinebitur, multiplicando 4 in 16; & a producto 64 extracta radix quadrata 8 dabit medium proportionalem quæſitum inter 4 & 16. Quamobrem 4 & 8 ſunt duo medii proportionales inter datos numeros 2 & 16; ſunt enim in proportione continua, 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16.

Quòd ſi inter operandum radix cubica, aut quadrata obtineri exactè non poſſit, approximatio ad veram radicem ope decimalium inſtituenda eſt, uti docuimus in noſtris commentariis Arith. univerſalis.

Demonſtratio. Si quatuor numeri fuerint in proportione continua, erit cubus primi ad cubum ſecundi, uti primus numerus ad quartum (n. 493. Geom. planæ). Cognitis ergo primo numero, & quarto, & cubo primi, invenietur per regulam auream cubus ſecundi; cujus radix cubica dabit ſecundum numerum quatuor continuè proportionalium. Denique medius proportionalis inter ſecundum & quartum exhibet tertium numerum quatuor continuè proportionalium. Quod erat &c.

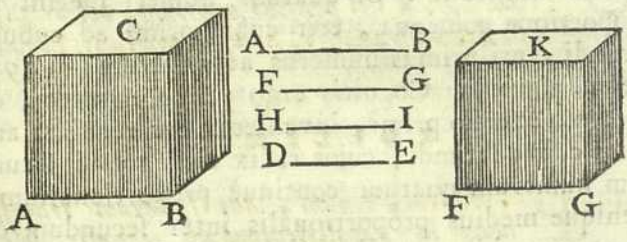
PRO-

PROBLEMA IV.

232. *INvenire cubum, qui ad alium datum C sit in data quacunque ratione, puta 2, ad 3.*

Resolutio. Dividatur latus AB dati cubi C in tres partes æquales; & harum partium duabus fiat æqualis recta DE; tum inter AB & DE quærantur per Probl. I. aut II. aut III. duæ mediæ proportionales FG, HI. Dico cubum, cujus latus sit FG prima duarum mediarum, fore illum, qui quæritur.

Demonstratio. Quoniam quatuor rectæ AB, FG, HI, DE sunt in proportione continua, erit cubus primæ AB ad cubum secundæ FG, uti prima AB ad quartam DE (n. 493. Geom. planæ). Atqui per Constr., AB est ad DE, uti 2 ad 3. Ergo &c. Quod erat &c.



Scholion.

ATque hoc est celebratissimum illud Problema, quod deliacum a deliaco Apolline dictum est, quòd is lue sævissima Athenas populante, consultus respondisset, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus lib. 8.

Co-

Corollarium.

233. QUoniam sphæræ sunt, ut cubi suorum radiorum, seu diametrorum (n. 222.), quemadmodum cylindri, prismata, coni, & pyramides similes (n. 201. & 202.); hinc, dato id genus solido, ut inveniatur aliud simile solidum in data ratione majus, vel minus, satis erit, ut eadem operatio instituatur respectu suorum axium, quæ nuper instituta est respectu laterum cubi. Invento axe, construendum est solidum dato simile; quod proinde erit in data ratione.

Scholion.

UT ne Tironum exercitationi desim, sequentium Problematum vel penitus omittam, vel brevissimè indicabo demonstrationes, quæ ex præjactis Elementis facilè repeti possunt.

PROBLEMA V.

234. *PYramidem, conum, aut sphæram transformare in parallelepipedum æqualis soliditatis.*

Resolutio. I. Basis rectilinea, vel circularis pyramidis, aut coni transformetur in æquale rectangulum, uti docuimus Elem. 7. Geom. planæ n. 296. & 297., & in Praxi geom. ejusdem Elem. n. 305. & sequentibus; tum super hoc rectangulo, tanquam base, fiat parallelepipedum, cujus altitudo sit tertia pars altitudinis pyramidis, aut coni propositi. Dico factum &c.

II. Quod attinet ad sphæram, ejus superficies transformabitur primò in rectangulum, multiplicando sphæræ diametrum in circumferentiam maximi circuli (n. 163.); tum super hoc rectangulo construatur parallelepipedum, cujus altitudo æquet trientem radii sphæræ, aut sextantem suæ diametri. Dico factum &c.

PROBLEMA VI.

235. *CYlindrum, aut prisma quodvis polygonum in parallelepipedum ejusdem soliditatis convertere.*

Resolutio. Reducta basi cylindri, aut prismatis dati in rectangulum, super quo erigatur parallelepipedum ad eamdem cum prismate, & cylindro altitudinem, Dico factum &c.

PROBLEMA VII.

236. *DAto cono æqualem pyramidem ejusdem altitudinis construere; & vicissim, pyramidi conum æqualem ejusdem altitudinis.*

PROBLEMA VIII.

237. *DAto prismati, vel cylindro, æqualem sub eadem altitudine pyramidem, vel conum construere.*

Et vicissim, datæ pyramidi, vel cono æquale prisma, vel cylindrum ejusdem altitudinis invenire.

Resolutio. In primo casu, basis prismatis, vel cylindri triplicetur, hoc est, augeatur in ratione tri-

tripla; tum ſuper eadem baſi ſic aucta, extruatur pyramis, vel conus ad eamdem altitudinem.

In ſecundo caſu, baſis pyramidis, vel coni minuenda erit in ratione tripla; & ſupra eamdem ſic imminutam erigatur priſma, vel cylindrus ad ipſius pyramidis, vel coni altitudinem.

PROBLEMA IX.

238. *DAtum cylindrum, vel priſma, ſimiliter datum conum, vel pyramidem cujuſcumque altitudinis, in æqualem cylindrum &c. ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum revocare.*

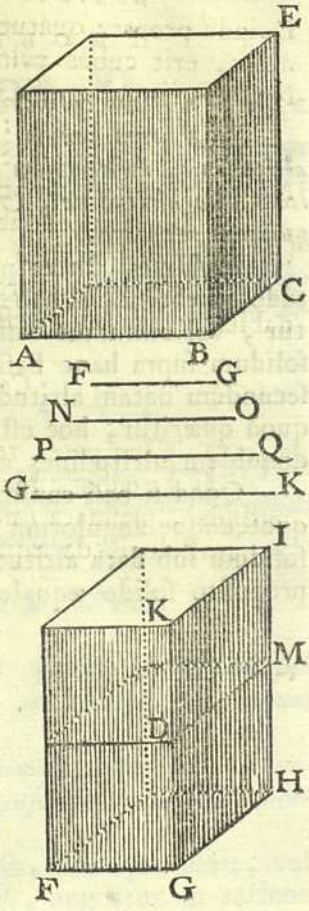
Reſolutio. In ea proportione, quàm data altitudo quæſiti ſolidi habet ad altitudinem dati, augeatur, vel minuatur baſis ejuſdem dati ſolidi. Nam ſolidum ſupra hanc baſim auctam, vel diminutam ſecundùm datam altitudinem, conſtructum, erit id, quod quæritur, hoc eſt, æquale dato ſolido; quandoquidem altitudines cum baſibus reciprocæ ſunt.

Quòd ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum, & ſupra eam conſtruatur ſolidum ſub data altitudine, erit hoc etiam ſolidum propoſito ſolido æquale.

PROBLEMA X.

239. D*Ato parallelepipedo* A E *æqualem cubum construere.*

Resolutio. Si tres parallelepipedi A E dimensiones fuerint inter se inæquales, uti hìc supponitur:



I. Inter duas minores dimensiones A B & B C quæratur media proportionalis F G, cujus quadratum F H sit basis alterius parallelepipedi F I habentis eamdem altitudinem dati parallelepipedi A E; quare unum alteri erit æquale, cùm utriusque bases, & altitudines sint æquales.

II. Inter latus unum F G, & altitudinem G K alterius parallelepipedi F I, quærantur duæ mediæ proportionales N O & P Q. Dico cubum primæ N O æqualem fore parallelepipedo F I, seu dato A E.

Demonstratio. Fiat G D = F G, ut habeatur cubus F M; voceturque F G, seu G H, seu G D, *a*; G K, *b*; & N O, *c*. Parallelepipedum F I erit *aab*; cubus F M erit *aaa*; & cubus ex

recta

recta NO erit ccc. Oportet jam ostendere $aab = ccc$.

Cubus FM, & parallelepipedum FI, propter eamdem basim FH, erunt inter se in ratione suarum altitudinum GD & GK; ac proinde

$$aaa : aab :: a : b.$$

Deinde propter quatuor rectas continuè proportionales, erit cubus primæ FG ad cubum secundæ NO, uti prima FG ad quartam GK; hoc est

$$aaa : ccc :: a : b.$$

Ergo $aaa : aab :: aaa : ccc$;
& consequenter $aab = ccc$. Quod erat &c.

Si dimensiones dati parallelepipedi forent numeris expressæ, easdem inter se multiplicare oporteret; & ex harum producto extracta radix cubica dabit latus cubi quæsiti.

Corollarium.

240. HInc patet reductio omnium solidorum in cubos. Nam pyramides, coni, sphæræ, cylindri, prismata (n. 234. & 235.) transformantur in parallelepipeda æqualis soliditatis.

De Circino proportionis, ac de usu Lineæ Stereometricæ, seu solidorum, & Metallicæ.

241. GEometriæ elementaris progressionem æquis passibus comitatur circinus proportionis; ac duæ postremæ eidem instrumento inscriptæ, explicandæ sunt lineæ, solidorum nimirum, ac metallica, quarum in praxi geometrica mirificus est usus.

Vocant passim hanc lineam stereometricam, seu solidorum, quia ejus usus elucet in augendis, ac minuendis corporibus, seu solidis; hæc continet homologa latera solidorum similium, quæ minimi solidi ab unitate incipientis multipla sunt juxta ordinem naturalem numerorum 1, 2, 3 &c. usque ad 64; qui numerus ferè solet esse maximus terminus divisionum ejusdem lineæ stereometricæ, proximo intervallo prope lineam chordarum, instrumento inscriptæ.

PROBLEMA XI.

242. L*ineam solidorum instrumento inscribere.*

Resolutio. Divisio hujus lineæ hac methodo instituitur.

I. Accipe ex scala geometrica quotcunque particulas, puta, 1000, pro latere solidi omnium maximi 64 circino inscribendi. Seligitur numerus iste partium æqualium, quippe qui commodior est calculo peragendo, reliquisque lateribus solidorum eliciendis.

II. Quia verò radix cubica numeri 64 est 4, & radix cubica unitatis est 1; consequens est, ut latus assumptum solidi 64 quater contineat latus solidi primi,

primi, & omnium minimi ab unitate incipientis; cujus proinde latus erit in iisdem particulis 250. Nam solida similia sunt inter se, ut cubi suorum laterum homologorum (n. 215.).

III. Numerus earumdem particularum 500, duplus primi numeri 250, dabit latus octavi solidi, nimirum solidi octies majoris primo. Nam cubus numeri 2, idest 8 continet octies cubum unitatis.

Similiter numerus 750, triplus primi numeri 250, erit latus solidi vigesimi septimi. Nam cubus numeri 3 est 27; & totidem vicibus continet cubum unitatis.

IV. Paulo major difficultas subeunda in calculo est, ut inveniantur latera homologa solidorum, quæ dupla sint, tripla, quadrupla &c. primi solidi; quæ quidem latera non ita exactè exprimi numeris pariter possunt; nam eorum solidorum radices sunt incommensurabiles. Approximatio tamen ad ipsorum radices surdas, quantùm satis est ad usum, fieri potest sequenti methodo.

V. Invenire oporteat numerum, qui exprimat latus solidi, quod duplum sit primi solidi, similis, & omnium minimi. Hujus latus inventum 250 cubetur, & fiat cubus 15625000; a quo duplicato, hoc est, a numero 31250000, extrahatur radix cubica, quæ proximè invenietur esse 315, & erit latus solidi dupli.

VI. Ut habeatur latus solidi, quod triplum sit primi, & minimi, triplicandus erit hic idem numerus 15625000, ab eoque sic triplicato extrahenda radix cubica, quæ invenietur esse 360; atque ita de reliquis lateribus homologis, quæ singula clarè perspicies in sequenti tabula.

Divisiones laterum homologorum pro Linea solidorum.

1	250.	33	802.
2	315.	34	810.
3	360.	35	818.
4	397.	36	825.
5	427.	37	833.
6	454.	38	840.
7	478.	39	848.
8	500.	40	855.
9	520.	41	862.
10	538.	42	869.
11	556.	43	876.
12	572.	44	882.
13	588.	45	889.
14	602.	46	896.
15	616.	47	902.
16	630.	48	908.
17	643.	49	914.
18	655.	50	921.
19	667.	51	927.
20	678.	52	933.
21	689.	53	939.
22	700.	54	945.
23	711.	55	951.
24	721.	56	956.
25	731.	57	962.
26	740.	58	967.
27	750.	59	973.
28	759.	60	978.
29	768.	61	984.
30	777.	62	989.
31	785.	63	995.
32	794.	64	1000.

PROBLEMA XII.

243. *SImilia corpora in data proportione augere, vel minuere.*

Resolutio. Quæritur cubus alterius dati duplus. Latus cubi dati transfer circino communi in lineam solidorum transversim, hinc atque inde ad intervallum numeri pro libito assumpti, puta, inter 20 & 20: stante eadem circini proportionum apertura, accipe intervallum numeri dupli, ut in hoc exemplo intervallum transversale inter 40 & 40. Hoc erit latus cubi quæsiti.

Si quæras sphæram alterius datæ triplam in soliditate; transfer diametrum datæ sphæræ ad intervallum pro libito assumptum, puta, inter 20 & 20: intervallum inter 60 & 60 erit diameter sphæræ quæsitæ.

Si minuenda sit sphæra in proportione tripla, procedendum esset contraria ratione.

Corollarium.

SImili methodo utendum cum lateribus homologis aliorum corporum regularium similium ad illa augenda, vel minuenda. Quòd si latera hæc homologa longiora sint, quàm ut intervallis instrumenti transversim applicari possint, sumatur horum semissis, triens, quadrans &c. Nam quod ex eadem operatione prodibit, erit semissis, triens, aut quadrans dimensionis quæsitæ.

Demonstratio pendet ex similitudine triangulorum, & constructione lineæ solidorum.

PRO-

PROBLEMA XIII.

244. D*Atis duobus ſolidis ſimilibus, invenire eorum proportionem mutuam.*

Reſolutio. Aperto inſtrumento, latus unius ſolidi transferatur in lineam ſolidorum ad intervallum eorum numerorum, qui tibi commodiores videbuntur; tum vide, cui intervallo numerorum in eadem linea accommodatur tranſverſim latus homologum alterius ſolidi ſimilis. Numeri, quibus hæc duo latera homologa convenient, dabunt quæſitam rationem duorum corporum ſimilium.

PROBLEMA XIV.

245. L*Ineam conſtruere, hoc eſt, modulum, vulgò* calibro, *qui uſui ſit ad cognoſcenda diverſa pondera inæqualium pilarum ferrearum, quæ a tormentis bellicis explodi ſolent.*

Reſolutio. Docet experientia, pilam ferream, cujus diameter ſit trium pollicum, ponderare quatuor libras; vel, ut tutiùs procedas propter varietatem hujus metalli inæqualiter defæcati, poteris per te ipſum, capere experimentum. Hoc dato, invenies diametros reliquarum pilarum diverſi ponderis, & ejuſdem metalli hac methodo. Trium pollicum longitudinem transfer in lineam ſolidorum tranſverſim inter 4 & 4: ſtante hac inſtrumenti apertura, accipe circino communi in eadem linea ſolidorum, intervalla omnium numerorum ab 1 uſque ad 64: longitudines ſingulæ transferantur ſucceſſivè in lineam metallo inciſam, vel in latus circini proportionis, uti obſervabis in adjecta figura

ſe-

ſequentis paginæ; & ad extremitatem cujuslibet diametri appone numeros reſpondentes in linea ſolidorum. Hi numeri ſignabunt totidem libras globi ferrei, habentis talem diametrum.

Ut autem in eadem recta, hoc eſt, in eodem modulo ſignentur fractiones, puta, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ unius libræ, ita operaberis. Accipe globum ferreum unius libræ; ejuſque diametrum transfer in lineam ſolidorum, ad intervallum quarti ſolidi, nimirum, inter 4 & 4. Sub hac inſtrumenti apertura intervallum primi ſolidi, hoc eſt, inter 1 & 1, erit diameter globi ponderantis $\frac{1}{4}$ unius libræ: intervallum inter 2 & 2 erit diameter globi ponderantis $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ libræ; atque ita de reliquis.

Scholion.

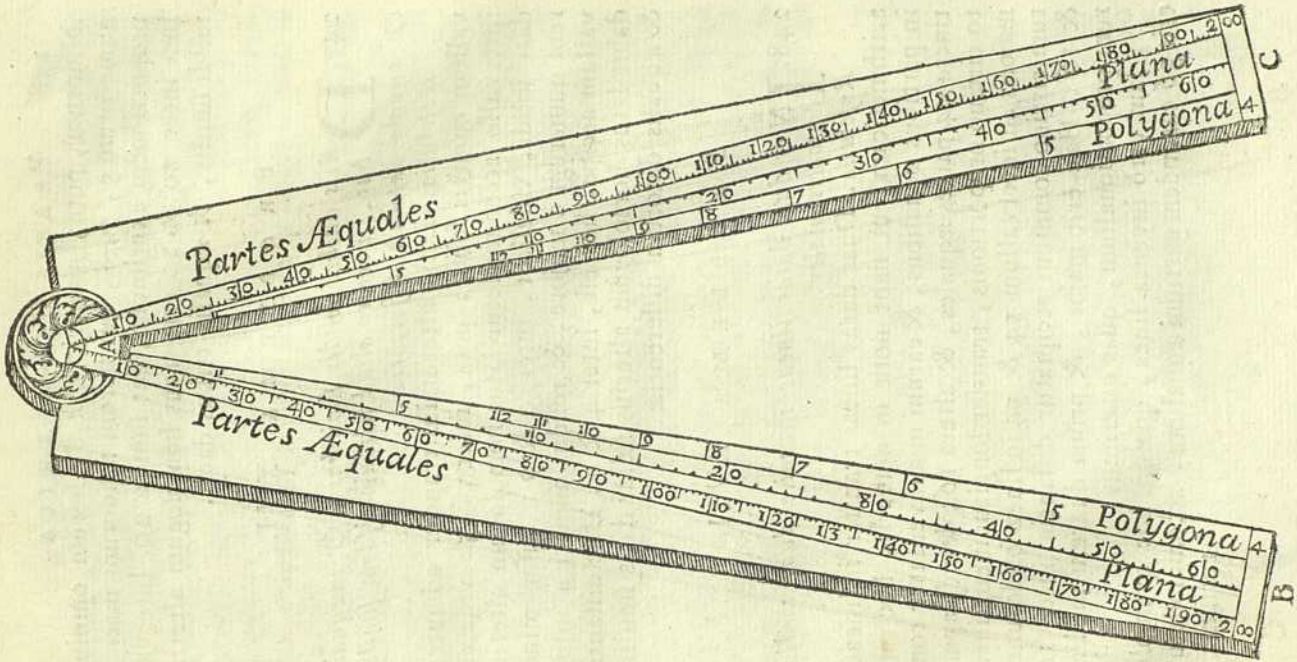
Diametri globorum menſurantur circino ſphærico; ut tradi ſolet in inſtrumentis Architecturæ militaris.

PROBLEMA XV.

246. *Propoſitis quotlibet ſolidis ſimilibus, conſtruere unum omnibus æquale, ac ſimile.*

Reſolutio. Ex datis ſolidis ſimilibus unum pro libito ſelige; ejuſque latus circino communi acceptum transfer in lineam ſolidorum, ad intervallum cujuſvis ſolidi, puta, inter 5 & 5: hac manente poſitione, quæres, quibus tranſverſim numeris, & intervallis accommodentur latera homologa reliquorum ſoli-

A
Chordæ
Chordæ
Solida
Solida
B
C


Partes Æquales
Plana
Polygona
C
Partes Æquales
Polygona
Plana
B

ſolidorum, puta, numeris 7 & 8: horum omnium numerorum 5, 7, 8, qui horum ſolidorum inter ſe proportionem exprimunt, fiat ſumma 20. Intervallum inter 20 & 20 erit latus homologum alterius ſolidi ſimilis, & æqualis tribus datis.

PROBLEMA XVI.

247. *DAtis duobus ſolidis ſimilibus, & inæqualibus, invenire aliud ſolidum eiſdem ſimile, & æquale datorum differentiæ.*

Reſolutio. Latus alterutrius transfer ad intervallum cujuſvis ſolidi, puta, inter 5 & 5: vide cui intervallo accommodetur latus homologum alterius dati ſolidi, videlicet, inter 9 & 9: aufer minorem numerum a majore; & reſidui numeri 4 intervallum accipe, hoc eſt, inter 4 & 4. Hæc diſtantia dabit latus homologum alterius ſolidi datis ſimilis, & æqualis datorum differentiæ.

PROBLEMA XVII.

248. *INter duas datas lineas invenire duas medias proportionales.*

Reſolutio. Duas datas lineas transfer in lineam arithmeticam, ut fiant notæ in numeris, hoc eſt, in partibus æqualibus; & earum una inveniatur continere 54 partes æquales, & altera 16; deinde aperto circino proportionis, transfer longitudinem lineæ majoris ad intervallum 54 & 54 in linea ſolidorum; tum circino communi accipiatur diſtantia inter 16 & 16. Hæc erit major, & prima duarum mediarum proportionalium, quas quærimus.

Jam verò inventa linea, quæ in hoc exemplo erit 36 earundem partium æqualium, accommodetur

rurſum

rurſum eidem intervallo 54 & 54; quod fiet reſtrictis paululum lateribus inſtrumenti; & altera vice accipiatur diſtantia inter 16 & 16. Hæc erit minor, & ſecunda duarum mediarum, quæ in hoc exemplo invenietur eſſe 24 partium æqualium; ac propterea hæ quatuor lineæ erunt in eadem continua proportione, quam habent hi quatuor numeri 54, 36, 24, 16.

Demonſtratio. Nam propter conſtructionem inſtrumenti, & lineæ ſolidorum, ac proportionem, quam intervalla ſumpta tranſverſim, obtinent cum lateribus inſtrumenti, erit cubus rectæ tranſverſalis 54 ad cubum alterius rectæ tranſverſalis 36, utì latus ipſum lineæ ſolidorum 54 ad latus alterum 16. Quare recta tranſverſalis 36 erit prima duarum mediarum proportionalium, quæ interponi debent inter 54 & 16.

Rurſum per eamdem conſtructionem, cubus rectæ tranſverſalis 36 ad cubum rectæ tranſverſalis 24 eſt, ut latus idem 54 ad latus alterum 16. Ergo recta tranſverſalis 24 eſt ſecunda duarum mediarum proportionalium, quæ interponuntur inter 54 & 16. Tres itaque rectæ 54, 36, 24, 16 ſunt in continua proportione. Quod erat &c.

De Linea Metallica.

PROBLEMA XVIII.

249. *Lineam metallicam inſtrumento inſcribere*.

Reſolutio. Corpora regularia, ut ſphæræ, cubi, & ſimilia, diverſorum metallorum comparari inter ſe poſſunt dupliciter, mole, ac pondere. Pondere comparatio fit, quando inter corpora diverſi generis, mole æqualia, at inæqualia pondere,

re, quæritur, quæ ſit ratio ponderis illorum, & quantò unum altero ſit gravius, aut levius. Magnitudine autem fit comparatio, cùm poſita pari gravitate, quæritur, quæ ſit ratio, ſeu proportio magnitudinis eorumdem, quantòve ſit unum altero majus, aut minus.

Poſſunt præterea corpora ejuſdem generis, ſed molis differentis, comparari inter ſe quoad pondus, tum etiam quoad magnitudinem.

Omnibus his comparationibus uſui erit ſequens linea inſtrumento inſcribenda, quam idcirco metallicam vocant; quippe quæ conducit ad cognoſcendam proportionem, quam inter ſe habent ſex metalla, ex quibus ſolida confici ſolent. Hæc prope lineam ſolidorum inſcribitur; ſignanturque metalla notis charateriſticis, quas unicuique proprias voluerunt Alchimiſtæ.

Diviſio hujus lineæ fundatur experimentis diverſorum ponderum, quæ ſub eadem mole obtinent ſingula ſex iſthæc metalla; unde elicitur eorum proportio quoad diametros globorum ex diverſis metallis ſub æquali pondere; uti exhibetur ſequenti tabula

Aurum	☉	730.
Plumbum	♄	863.
Argentum	☾	895.
Cuprum	♀	937.
Ferrum	♂	974.
Stannum	♃	1000.

Ita-

Itaque a centro inſtrumenti duc lineam rectam æqualem longitudini ejuſdem: hæc dividatur in particulas æquales 1000; & in ea notetur numerus particularum deſumptus ab eadem tabula: punctis finalibus appone ſigna, quæ ſignificant metalla, eo ordine, quo in tabula notantur. Stannum minus omnium ponderoſum, deſignabitur in extremitate hujus lineæ, ſecundùm totam longitudinem ſcalæ partium 1000; ac reliqua metalla centro propiora, ordine quæque ſuo.

PROBLEMA XIX.

250. *Dato globo unius metalli, ejuſque diametro, invenire alium cujuslibet alterius metalli pondere æqualem.*

Reſolutio. Data diameter transferatur ad intervallum duorum punctorum, quæ dati globi metallum deſignant: ſub hac inſtrumenti apertura accipiatur diſtantia eorum punctorum, quæ ſpeciem metalli quæſitam notant. Hæc diſtantia erit diameter globi, qui quæritur.

Corollarium.

251. REſpectu corporum ſimilium eodem modo operaberis, ut invenias latera ſingula homologa, nimirum, longitudinem, latitudinem, & altitudinem, ſeu profunditatem corporum, quæ conſtruenda ſunt.

PROBLEMA XX.

252. *INvenire proportionem metallorum quoad pondus.*

Reſolutio. Sit invenienda proportio,

quam habeat argentum ad aurum quoad pondus; hoc eſt, decerni debeat, quantò ponderoſior ſit globus aureus globo argenteo ejuſdem molis, & voluminis.

A centro inſtrumenti ad punctum, ſeu ſignum metalli minùs ponderantis inter duo propoſita, quod ſemper remotius erit ab eodem centro, uti argentum reſpectu auri, accipe circino communi in linea metallica hanc diſtantiam; eamque, aperto inſtrumento, transfer in lineam ſolidorum tranſverſim ad intervallum cujuslibet numeri, puta, inter 50 & 50. Stante hac inſtrumenti apertura, accipe rurſum in linea metallica diſtantiam a centro ad punctum, ſeu ſignum auri; quam diſtantiam experiundo tentabis cuinam numero tranſverſim applicetur in linea ſolidorum; inveniaturque congruere intervallo 27 & 27, paulo plus. Hi duo numeri permutatim expriment proportionem duorum metallorum; nimirum, pondus auri erit ad pondus argenti ſub eodem volumine, ut 50 ad $27\frac{1}{6}$, ſive, ut 100 ad $54\frac{1}{3}$.

PROBLEMA XXI.

253. *Dato quovis corpore, vel artefacto ex ſtanno, vel ex materia cujuſvis ex ſex metallis, invenire, quantum ex quinque aliis metallis requiratur, ut confici poſſit aliud corpus, vel artefactum ſimile, & æquale propoſito.*

Reſolutio. Eſto ſtatua ex ſtanno, cui exactè ſimilis, & æqualis proponatur conſtruenda alia ex argento.

I. Ponderetur accuratè ſtatua ex ſtanno; inveniaturque eſſe librarum 36.

II.

II. In linea metallica accipiatur diſtantia a centro inſtrumenti uſque ad punctum, ſeu ſignum argenti, ex quo novam ſtatuam conficere oportet.

III. Aperto inſtrumento, hæc diſtantia transferatur tranſverſim ad numeros lineæ ſolidorum 36 & 36.

IV. Denique in eadem linea metallica accipiatur diſtantia a centro inſtrumenti ad punctum, ſeu ſignum ſtanni; & manente prima inſtrumenti apertura, exploretur, quibus tranſverſim numeris lineæ ſolidorum accommodari poſſit hæc diſtantia; inveniaturque congruere intervallo 50 & 50, paulo plus. Hic numerus indicabit, libris argenti $50\frac{1}{4}$ circiter opus eſſe, ut conſtruatur ſtatua, vel aliud quodvis artefactum ſimile, & æquale propoſito ſtanneo.

PROBLEMA XXII.

254. *DUorum corporum ſimilium ex diverſis metallis invenire rationem ponderum, datis eorum diametris, aut lateribus homologis.*

Reſolutio. Recta EF ſit diameter ſphæræ ſtanneæ, & GH diameter argenteæ; quæraturque ratio ponderum, quam inter ſe habent propoſitæ ſphæræ.

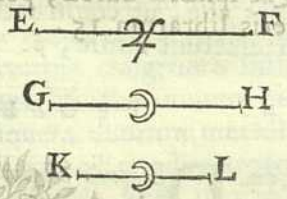
Accipe diametrum EF, eamque transfer tranſverſim ad intervallum punctorum, quæ ſtannum deſignant; tum manente eadem inſtrumenti apertura, ſume intervallum punctorum, quæ deſignant argentum, hoc eſt, metallum alterius ſphæræ: ſi hoc intervallum æquale eſſet diame-

 tro

tro GH, duæ propositæ sphæræ essent pondere æquales; si verò diameter sphæræ argenteæ minor sit intervallo punctorum argenti, quemadmodum diameter KL, indicio id erit, pondus sphæræ argenteæ minus esse pondere stanneæ.

Ut autem decerni possit, quantò minùs ponderet, simul erunt comparandæ diametri GH & KL in linea solidorum, hoc pacto.

Inventum intervallum punctorum argenti, quod in nostro casu est GH, transferatur ad intervallum cujuslibet numeri ex linea solidorum, puta, ad 60 & 60; explora deinde, quibus numeris ejusdem lineæ accommodetur transversim diameter datæ sphæræ argenteæ KL; ponaturque congruere intervallo 20 & 20: erit pondus sphæræ argenteæ, cujus diameter KL, ad pondus sphæræ stanneæ, cujus diameter EF, ut 20 ad 60.



PROBLEMA XXIII.

255. *Datis pondere, & diametro sphæræ, aut latere cujuslibet alterius corporis ex quavis sex metallorum specie conflati, invenire diametrum, aut latus homologum alterius corporis similis ex quopiam aliorum quinque metallorum, quod sit ponderis dati.*

Resolutio. Esto recta MN diameter sphæræ cupreæ, cujus pondus sit librarum 10: quæritur diameter sphæræ aureæ, cujus pondus sit librarum 15.

I. Ope lineæ metallicæ inveniatur diameter sphæræ aureæ, cujus pondus æquet pondus sphæræ cu-

cupreæ; nimirum, diameter MN transferatur ad intervallum punctorum, quæ cuprum designant; & in hac circini apertura accipiatur intervallum punctorum auri, quod dabit diametrum OP sphæræ aureæ, ponderis librarum 10.

II. Hanc diametrum OP transfer in linea solidorum ad intervallum 10 & 10; & in eadem instrumenti apertura intervallum 15 & 15 ejusdem lineæ solidorum dabit quæsitam diametrum QR sphæræ aureæ, ponderis librarum 15.

DISSERTATIO

DE METHODO GEOMETRICA.

UM omnis elementaris institutio nihil ferè sit aliud, quàm artium introductio, atque ex variis principiis collecta doctrina, qua fit, ut artium studiosi per se ipsi niti possint, & progredi longius ad reliquum, qui multò amplior superest, scientiæ curriculum conficiendum: hoc mihi etiam in hisce Elementis puravi esse faciendum, ut separatim exponerem, quæ methodo utrentur antiqui Geometræ in solidorum demonstrationibus, quæve recentiores; & utra utri præstaret; an nominibus inter se differret, re congruerit; an denique, ut plerique opinantur, quanatùm antiquorum methodum facilitate vincit recentiorum demonstrandi ratio, tantùm antiquorum methodus sevidentiâ præcelleret. Magni enim refert hanc utriusque methodi comprehensam animo noti-

DISSERTATIO

DE METHODO GEOMETRICA.

UM omnis elementaris inſtitutio nihil ferè ſit aliud, quàm artium introductio, atque ex variis principiis collecta doctrina, qua fit, ut artium ſtudioſi per ſe ipſi niti poſſint, & progredi longiùs ad reliquum, qui multò amplior ſupereſt, ſcientiæ curriculum conficiendum: hoc mihi etiam in hiſce Elementis putavi eſſe faciendum, ut ſeparatim exponerem, qua methodo uterentur antiqui Geometræ in ſolidorum demonſtrationibus, quave recentiores; & utra utri præſtaret; an nominibus inter ſe differret, re congrueret; an denique, ut plerique opinantur, quantùm antiquorum methodum facilitate vincit recentiorum demonſtrandi ratio, tantùm antiquorum methodus ævidentià præcelleret. Magni enim refert hanc utriuſque methodi comprehenſam animo noti-

tiam afferre ſecum Tirones, qui & in veterum Geometrarum lectione verſari volent, a quibus hæc omnis de ſolidis parta doctrina eſt, & recentiorum etiam inventa, qui Geometriam noſtra hac ætate amplificarunt, ſeriò cognoſcere. Quare tripartita erit hæc diſſertatio.

I. Exponam Antiquorum methodum, quam vocant, exhauſtionum, ejuſque principia, & quomodo demonſtrationibus geometricis applicetur.

II. Agam de Recentiorum methodo, quam vocant, indiviſibilium, vel evaneſcentium diviſibilium, & infinitè parvorum; eamque a variis, quæ opponi ſolent, difficultatibus vindicabo.

III. Oſtendam cum Walliſio hanc Recentiorum methodum reapſe non aliam eſſe ab antiquiori exhauſtionum methodo, eodemque niti utramque fundamento; ſed breviore via per hanc obtineri, quod longiore ambitu methodus Antiquorum aſſequebatur.

De Methodo exhauſtionum.

DEFINITIO.

1. *MAgnitudo quævis per inſcriptas ſibi magnitudines exhauriri dicitur, cùm inſcriptæ magnitudines ab ipſa deficere tandem poſſunt defectu minore quovis dato.*

Similiter, magnitudo quævis per circumſcriptas ſibi magnitudines exhauritur, cùm hæ ipſam denique ſuperant exceſſu minore quovis dato.

Quibus autem principiis in hac methodo uterentur antiqui Geometræ, placet ex eodem Newtono repetere, qui tom. 1. Philoſ. nat. ſect. 1. antiquam exhauſtionum methodum ad recentioris methodi facilitatem, ac brevitatem inflexit, iiſdem poſitis principiis.

LEMMA I.

2. *QUantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro data quavis differentia, fiunt ultimò æquales.*

Senſus eſt. Intelligantur circulo inſcripta, & circumſcripta duo polygona ordinata. Palam eſt ambitum polygoni circumſcripti excedere ambitum inſcripti. Finge jam arcubus ſine fine biſectis, plura ſemper, ac plura latera eidem circulo circumſcribi, & inſcribi: conſtat exceſſum ambitus circumſcripti ſupra ambitum polygoni inſcripti tandem fieri quovis dato minorem; & utrumque ad peripheriam circuli

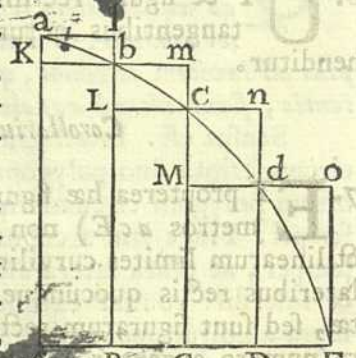
culi accedere propiùs, quàm pro data quavis differentia; hoc est, utriusque ambitum tandem in peripheriam desinere, & ad æqualitatem cum circulo, quem polygona exhauriunt, constanter accedere. Ergo utriusque polygoni ambitus fient ultimò æquales.

Demonstratio. Nam, *Si negas*, inquit Newtonus loco cit., *fiant ultimò inæquales; & sit earum differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere, quàm pro data differentia D: contra hypothesim*. Quod erat &c.

LEMMA II.

Ultimæ rationes æqualitatis.

3. *SI in figura quavis* AacE, *rectis* Aa, AE, *& curvà* acE *comprehensà, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd *&c. sub basibus* AB, BC, CD *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta, & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn *&c.; dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: Dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta, circumscripta, & curvilinea, sunt rationes æqualitatis*.



Demonstratio. Nam figuræ inscriptæ, & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est, ob æquales omnium

nium bases, rectangulum sub unius basi *Kb*, & altitudinum summà *Aa*, idest, rectangulum *ABla*, Sed hoc rectangulum, eò quòd latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lem. I.) figura inscripta, & circumscripta, & multò magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. Quod erat &c.

Corollarium I.

4. HInc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corollarium II.

5. ET multò magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd* &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figura curvilinea.

Corollarium III.

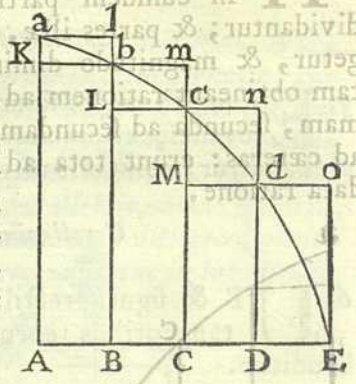
6. UT & figura rectilinea circumscripta, quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corollarium IV.

7. ET propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei; hoc est, non sunt ex lateribus rectis quocunque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum, quorum latera numero augentur, & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Exhaustionum limites.

Ap-

Appositè autem perimetrum *acE* vocat Newtonus limitem curvilineum, quippe qui limes est augmentationis summæ parallelogrammorum inscriptorum, & limes diminutionis summæ circumscriptorum. Nam summa inscriptorum augeri magis non potest, quàm figura curvilinea *acE*, ad quam propiùs in infinitum accedere potest: neque summa circumscriptorum decrescere potest infra eamdem figuram curvilineam, ad cujus æqualitatem constanter vergit, propiùsque semper accedit, quàm pro data quavis differentia. Quare perimeter *acE* limes est augmentationis unius summæ, & diminutionis alterius summæ. Fieri ergo potest, ut ita proximè accedant ad hunc limitem, ut earum differentia a figura curvilinea assignari non possit; ac proinde figura inscripta, circumscripta, & curvilinea æquales sint. Idem dicendum, si eadem parallelogramma inscribantur, & circumscribantur simili ratione triangulo.



LEMMA III.

8. *SI in duabus figuris* AacE, PprT, *inscribantur, ut supra, duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus; & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem: Dico, quòd figuræ*

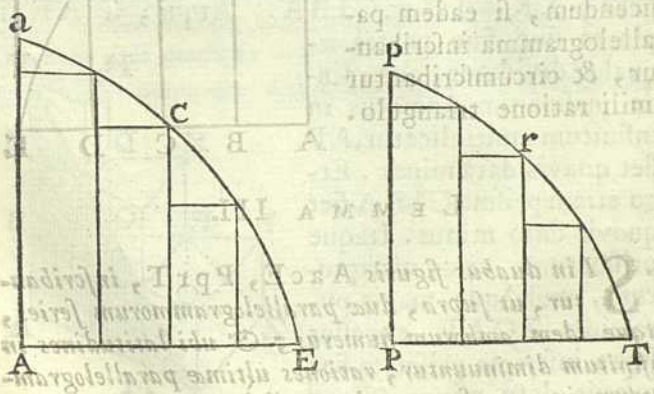
duæ

duæ AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*

Demonſtratio. Etenim, ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula; ita componendo fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per Lem. II.) ad ſummam priorem, & figura poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. Quod erat &c.

Corollarium.

9. HInc, ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eumdem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur, & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione.

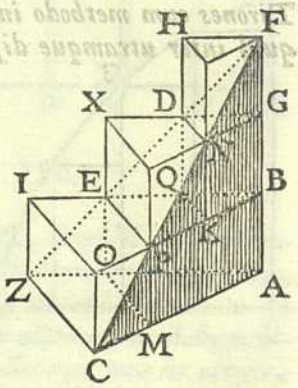


LEM-

LEMMA IV.

10. *SI in pyramide* ZCAF *inſcribantur, & circumſcribantur priſmata quotcunque, ut ſupra, in infinitum: Dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem priſmata inſcripta, circumſcripta, & pyramis, ſunt rationes æqualitatis.*

Demonſtratio. Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B & G factis ſectionibus GDN & BEP, baſi ZAC parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPMAO & GDNKBQ: his deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA; nam priſma HG eſt æquale priſmati DB, ac proinde HG + XK = PXGB = MEBA; ergo tria priſmata HG + XK + IM = CIBA. Atqui, ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet quavis datà minor. Ergo etiam priſma CIBA fiet quovis dato minus. Itaque priſmatum circumſcriptorum, multòque magis pyramidis ZCAF exceſſus ſupra inſcripta priſmata fiet quovis dato minor. Ergo ultimæ rationes, quas ha-



bent

bent ad se invicem prismata inscripta, circumscripta, & pyramis, sunt rationes æqualitatis. Quod erat &c.

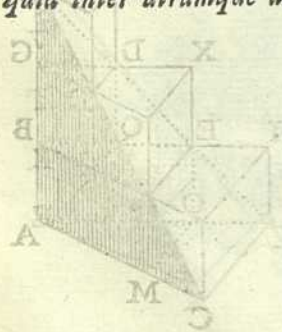
LEMMA V.

11. *PYramidum, & prismatum, quæ conis, & cylindris in infinitum inscribuntur, rationes ultimæ cum iisdem conis, & cylindris sunt rationes æqualitatis.*

Demonstratur, ut Lemma II. Nam, ut isthic plana circulo inscripta in infinitum, exhauriunt circulum, in eumque desinunt; ita hic pyramides, & prismata, quæ conis, & cylindris in infinitum inscribantur, eosdem exhauriunt, & fiunt ultimò his æquales. Quod erat &c.

Scholion.

HÆc methodus his principiis progrediens, quomodo demonstrationibus geometricis solidorum applicetur, palam faciam uno, aut altero exemplo; ut hanc Tirones cum methodo indivisibilium conferre possint, & quid inter utramque discriminis intersit, decernere.



Exem-

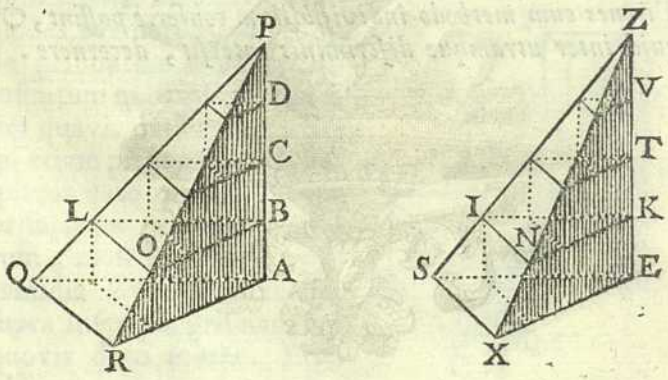
Exemplum I.

THEOREMA.

12. *Pyramides triangulares æquè altæ eam inter se proportionem habent, quam bases* AQR, ESX.

Demonstratio. Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit partes æquales, sed æquè multas utrinque divisis, factisque per divisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æquè multa, & æquè alta.

Jam verò, quia prismata LA, IE sunt æquè alta, erit prisma LA ad prisma IE, ut basis LOB ad basim INK (n. 100. Geom. fol.); hoc est, (n. 94. Geom. fol.) ut basis QRA ad basim SXE. Eodem modo ostendam singula prismata uni pyramidi inscripta, esse ad singula inscripta alteri, ut basis QAR ad basim SEX. Ergo etiam simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad basim. Quare, cùm eadem



can-

tandem (per Lem. IV.) desinant in ipsas pyramides, etiam ipsæ erunt, ut bases (per Lem. III. ejusq. Coroll.). Quod erat &c.

Exemplum II.

THEOREMA.

13. *Conorum æquè altorum proportio eadem est, quæ basium. Idem accidit cylindris æquè altis.*

Demonstratio. Pyramides conis æquè altis inscriptæ, sunt, ut bases. Atqui pyramides tandem in conos desinunt (per Lem. V.). Ergo etiam coni sunt, ut bases (per Lem. III. ejusq. Coroll.). Quod erat primum.

Idem demonstrabis de cylindris respectu prismatum sine fine inscriptorum. Quod erat alterum.

De Methodo indivisibilium.

14. MEthodus exhaustionum per continuam inscriptionem, & circumscriptionem figurarum, donec earum inter se differentia evadat quavis assignabili minor: hæc, inquam, methodus traducta est in eam, quæ dici jam solet Geometria indivisibilium, seu methodus indivisibilium.

Inventores methodi.

A Bonaventura Cavallerio Mediolanensi Ordinis Jesuatorum primitus introducta est hæc methodus in tractatu primùm edito, anno 1635.; postea a Torricellio illustrata in operibus suis anno 1644. editis; & rursum ab eodem Cavallerio in alio tractatu ab illo edito, anno 1647. uberiùs exculta, & amplificata. Galilæus, a cujus schola prodierant par illud nobile Geometrarum, Cavallerius, & Torricellius, multò ante hujus methodi semina jecerat in Dialogo I.; &, quod mirere, primus omnium hac ipsa methodo usus est, suppresso indivisibilium nomine, Dialog. III. theor. I. Italiæ ergo debemus, Italisque Geometris novam hanc Geometriæ methodum, quæ tantopere hoc ævo exculta est.

15. Summa totius methodi Cavallerianæ hæc est.

I. Continuum quodvis, seu quantitas consideratur ex indivisibilibus numero infinitis constare, nimirum, ut exponit Wallisius in tract. de motu, cap. 4., *ex particulis homogeneis, infinitè exiguis, numero infinitis;* hoc est,

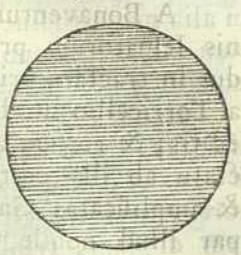
Linea concipitur constare ex infinitis punctis, sive lineolis infinitè exiguis, longitudine æqualibus,

vel

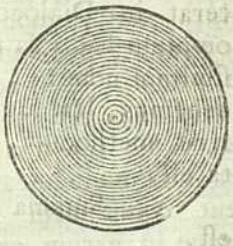
vel æquè altis, quarum cujusvis longitudo, vel altitudo sit pars infinitesima longitudinis, vel altitudinis totius lineæ; Elementa dimensionum.

Superficies ex infinitis lineis sive rectis, sive curvis parallelis, hoc est, superficieculis æquè altis, quarum cujusvis altitudo sit infinitesima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis, quibus illæ lineæ intelliguntur constare, nimirum, ex superficieculis æqualibus, & similibus, quarum cujusvis magnitudo sit infinitesima totius areæ;

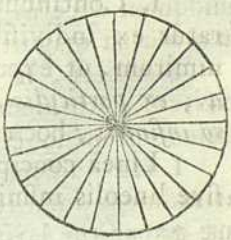
Solidum denique ex infinitis numero superficiebus, hoc est, solidolis æquè altis, sive æquè crassis, quorum cujusvis altitudo, vel crassities sit infinitesima totius; vel etiam ex solidolis infinitè exiguis, & æqualibus, quorum singulorum magnitudo sit infinitesima totius.



II. Hujusmodi lineolæ, superficieculæ, solidola &c., quæ communiter dici solent elementa, variis modis disponi possunt, prout Geometræ demonstranti expedire videbitur.



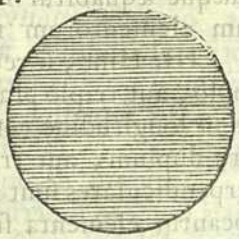
Exemplum. Circulus dicetur hoc sensu ex infinitis numero rectis parallelis constare, ad eamdem unam aliquam diametrum ordinatim applicatis, hoc est, parallelogrammis æquè altis; vel ex infinitis numero circumferentiis concentricis, hoc est, annulis æquè crassis; vel Compositio,



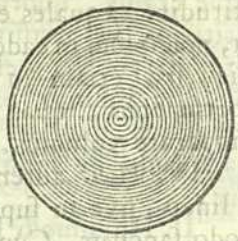
ex infinitis numero radiis, hoc eſt, ſectoribus, vel triangulis ſimilibus &c. Et ſphæra ſimiliter ſive ex infinitis numero planis æquè craſſis, ſive ex totidem ſuperficiebus ſphæricis concentricis, ſive ex infinitis numero ſectoribus ſphæricis, aut pyramidulis &c.

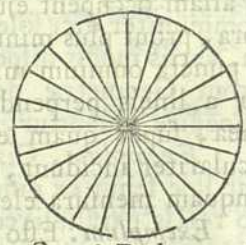
Comparatio,

III. Hæc, quæ vocant paſſim, indiviſibilia elementa, ac tota eorum ſumma comparatur in una magnitudine cum ſingulis elementis, eorumque ſummà, in alia magnitudine; & ſic duarum magnitudinum ratio, vel æqualitas determinatur.



Itaque, ſi recta linea concipiatur diviſa in partes inter ſe æquales, & quavis data minores, ævidens eſt fore eamdem duplam, triplam &c. alterius, ſi duplò, aut triplò plura ejuſdemmodi elementa contineat; quæ non modò inter ſe æqualia eſſe oportet in eadem linea, ſed in alia quavis, cui poſſit illa comparari: aliter hujuſmodi lineæ non haberent communem menſuram; neque in earum comparatione quidquam decerni poſſet de earum mutua magnitudine.





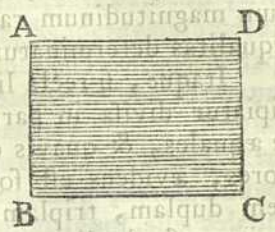
Similiter, ſi ab omnibus rectæ A B elementis excitentur totidem perpendiculares, quas in rem preſentem pono eſſe inter ſe longitudine æquales:

I. Hæ quidem perpendiculares habebunt ſingulæ latitudinem infinitè parvam, ſed æqualem, quippe quæ æquabitur latitudini elementorum rectæ A B.

II.

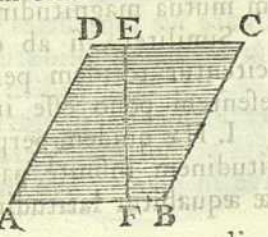
II. Erunt invicem parallelæ, ac se se contingent juxta totam suam longitudinem; quare omnes simul sumptæ rectangulum ABCD conficient, cujus superficies erit harum perpendicularium summa; quæque æquabitur facto primæ BC ductæ in numerum elementorum rectæ AB.

III. Hinc, si rectangulum aliud habeatur, quod duplò, aut triplò plures perpendiculares primis æquales in longitudine contineat, hoc ipso demonstrabitur fore duplum, aut triplum primi. Hujusmodi autem perpendiculares sunt illæ, quæ vocantur elementa superficierum, & quas crassitie, seu latitudine æquales esse oportet, non solùm in eadem superficie, sed etiam in omnibus superficiebus, quas inter se comparare volumus.



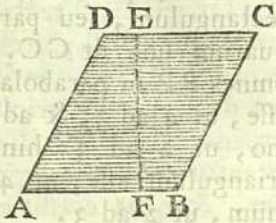
IV. Hæc autem elementorum æqualitas sive in lineis, sive in superficiebus, aut solidis, hac methodo sancitur. Cùm enim eædem lineæ incidentes in aliam occupent ejusdem puncta majora, vel minora, prout plus minùsve ad illam inclinatæ fuerint, ac puncta omnium minima sint illa, quæ occupantur a lineis perpendiculariter incidentibus: hinc linea, super quam elementa superficierum perpendiculariter incidunt, illa est, quæ unicè assumitur tanquam mensura elementorum omnium. Æqualitas elementorum.

Exemplum. Esto parallelogrammum ABCD, cujus elementa sint basi AB parallela; quæraturque linea, quæ horum elementorum numerum exprimat, ac metiatur. Hæc erit perpen-

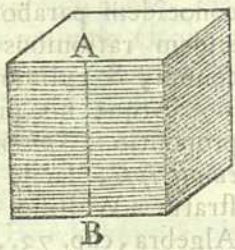


 di-

dicularis EF, non autem latus AD. Ratio eſt, quia hujus parallelogrammi elementa ſingula occupant ejuſdem perpendicularis EF puncta omnium minima, quæ poſſint occupari; & conſequenter totidem ſunt ſuperficiem parallelogrammi componentia elementa, quot ſunt in perpendiculari EF. Secus verò, cùm eadem rectanguli ABCD elementa obliquè incidant in latus AD, occupant majora puncta, quàm ſint ejuſdem lateris elementa; ac proinde par utrinque elementorum numerus eſſe non poteſt.



V. Simili ratione, ſi ab omnibus elementis lineæ AB concipiamus excitari ſuperficies eidem perpendiculares, quas in rem præſentem ponamus æquales eſſe longitudine, & latitudine, I. Hujuſmodi ſuperficies habebunt omnes æqualem craſſitiem, & minorem quavis data: II. Erunt invicem parallelæ, ac ſe contingent ſecundùm utramque dimenſionem; ſolidumque conficient, cujus ſoliditas æquabitur ſummæ harum ſuperficierum. Hinc, ſi aliud ſolidum contineat duplò, aut triplò plures ſuperficies æquales, definietur duplum, aut triplum eſſe primi ſolidi. Quare hæ ſuperficies dicentur elementa ſolidorum.



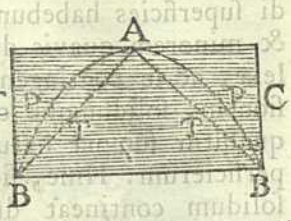
VI. Hæc eadem methodus applicari etiam ſolet elementis figurarum ſecundùm aliquam ordinatam proportionem creſcentibus, vel decreſcentibus, ſive in planis, ſive in ſolidis.

Eſto

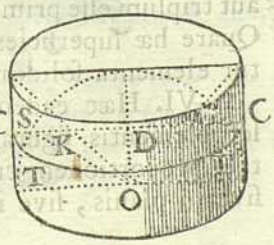
Elementorum proportionalitas.

Esto parabola APBB (figura plana ex sectione coni genita, utì in sectionibus conicis exponetur) ex innumeris rectis composita, basi BB parallelis, quarum una sit PP; atque triangulum inscriptum ejusdem basis, & altitudinis, ex totidem parallelis, quarum una sit TT; & circumscriptum rectangulum, seu parallelogrammum ex totidem, quarum una sit CC. Jam, si probetur rectas illas omnes PP in parabola, ad omnes TT in triangulo esse, ut 4 ad 3; & ad omnes CC in parallelogrammo, ut 2 ad 3: hinc concludetur parabolam ad triangulum esse, ut 4 ad 3; & ad parallelogrammum, ut 2 ad 3.

Similiter in solidis ponamus conoeidem parabolicam ex innumeris circulis confici, quorum unus sit PP; & inscriptum conum ex totidem, quorum unus sit TT; & circumscriptum cylindrum ex totidem, quorum unus sit CC. Jam, si probetur omnes illos circulos PP, ad omnes TT esse, ut 3 ad 2; atque ad omnes CC, ut 3 ad 6: hinc concludetur conoeidem parabolicam in eisdem rationibus esse ad conum, & cylindrum.



Atque his principiis celebris illa Archimedis propositio: *Sphæram esse duos trientes cylindri circumscripti*, facilè demonstratur a Wallisio, tract. de Algebra, cap. 73., in hunc modum.

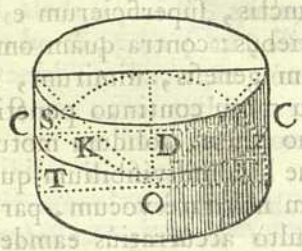


Suppositis enim (ut in figura) cylindro, hemisphærio, & inverso cono, ejusdem basis, & altitudi-

 nis,

Usus methodi indivisibilium.

nis, planis secari basi parallelis, quorum unum sit CTTC; quoniam quadratum rectæ SD est ubique æquale quadrato rectæ OS, seu CD, dempto quadrato OD, seu DK; & consequenter, cum circuli sint inter se, ut semidiametrorum quadrata: erunt omnes circuli complentes hemisphærium, æquales omnibus complentibus cylindrum, demptis omnibus complentibus conum. Ergo cylindrus, dempto cono, est æqualis hemisphærio; & consequenter, cùm conus sit cylindri triplus, hemisphærium est duo trientes cylindri sibi circumscripti; adeoque tota sphæra duo trientes cylindri circumscripti sphæræ. Quod erat &c.



EXA-

EXAMEN

Methodi indivisibilium.

16. UT primùm prodiit Geometria indivisibilium, offendit Geometras vox ipsa indivisibilium; ac durior visa est hæc compositio linearum e punctis, superficierum e lineis, solidorum e superficiebus: contra quàm omni ævo definita fuerat horum genesis; nimirum, lineam generari ex fluxu, seu motu continuo puncti, superficiem motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei. Itaque hæc indivisibilium quantitatum hypothesis, partim novitate vocum, partim quòd primi Inventores multò accurratiùs eamdem non circumscripserint, rejecta est a pluribus, ut primùm proposita fuit; nec desunt etiamnum, qui fallacem hanc esse suspicentur, eique minimè fidendum autument. Inter reliquos Dominus De la Chapelle in sua Geometriæ institutione, n. 412. hanc methodum ad examen revocat; complureſque fallacias, ac paralogismos in eadem retegere se posse putat. Quare, si ab hujus ingeniosissimi Viri difficultatibus Geometriam hanc indivisibilium vindicavero, simulque ostendero eamdem recidere in antiquam exhaustionum methodum; non erit cur posthac timeant Tirones hanc semitam, uti facillimam in demonstrando, ita & firmissimam inire.

17. *On a opposé*, inquit ipse, *contre cette méthode, qu' il étoit impossible qu' une surface fût composée de lignes sans aucune largeur, & que la solidité d'un corps puisse résulter de plusieurs surfaces mises les unes sur les autres &c.* Objectio D. De la Chapelle,

In

In eumdem sensum opposuerat P. Tacquet lib. 1. par. 1. cylindricorum, & annularium, in scholio ad prop. 12.

Ac Patris Tacquet.

Methodum demonstrandi per indivisibilia, vel, ut ego appellare soleo, per heterogenea, quam nobilis Geometra Bonaventura Cavallerius in lucem protulit, pro legitima, ac geometrica admittendam non existimo. Procedit illa a lineis ad superficies, a superficiebus ad corpora; atque æqualitatem, vel proportionem in lineis repertam concludit de superficie, repertam in superficiebus traducit ad solida. Qua ratiocinandi forma conficitur omnino nihil; quando neque ex circulis sphæra componitur &c. Admittunt quidem Geometræ, lineam generari ex fluxu puncti, superficiem ex fluente linea, corpus ex superficie; sed aliud longè est, ex indivisibilium fluxu quantitatis species generari, aliud ex indivisibilibus componi. Primum omnino exploratæ veritatis est; alterum cum Geometria sic pugnat, ut nisi illud ipsa destruat, ipsam destrui necesse sit.

18. At jam pridem præoccupaverat hanc objectionem Wallisius cap. 75. Algebræ, his verbis.

Wallisii solutio.

Jam verò hæc non ita intelligenda sunt, quamvis verba sic sonare videantur, quasi lineæ illæ, quarum nulla est latitudo, complere possent superficiem; aut superficies planæ, aliæque, quarum nulla est crassities, complere solidum. Sed per lineas intelligendæ sunt minutulæ superficies, ejusdem cum lineis illis longitudinis, sed latitudinis exiguæ; quarum omnium, quotcunque fuerint, latitudines simul sumptæ, altitudinem æquent illius figuræ, quam supponuntur complere. Et similiter per superficies illas, circulosve, intelligenda sunt prismata, cylindrive, ea tenuitate, ut simul omnium crassities, seu altitudo æqualis sit altitudini illius solidi, quod supponuntur complere. Cùm igitur dici-

dicitur parabola, triangulum, aut parallelogrammum ex totidem lineis constare, aut solidum ex totidem circulis, & similia; tantundem est ac si diceretur, constare quidem illa ex totidem tenuibus parallelogrammis, solidumque ex totidem tenuibus cylindrulis, ut eorum omnium, quotcunque fuerint, altitudines simul sumptæ, æquales sint altitudini illius figuræ, quam componunt.

19. Ex his constat in methodo indivisibilium nullum fieri ad heterogeneas quantitates transitum, hoc est, utì exponit P. Tacquet, a punctis ad lineas, a lineis ad superficies &c., neque æqualitatem, aut proportionem lineis repertam transferri ad superficies &c. Nam ex prima methodi indivisibilium positione elementa linearum sunt lineolæ æquè altæ, superficierum sunt superficieculæ æquè altæ &c.; ac proinde nulla reductione opus est, utì necessarium putat P. Tacquet, qui sic Cavallerium oppugnat, ut ipsius invento faveat, ac, si quid duriusculi in ipsis vocibus præseferat, emollire velit, & planius facere; ait enim: *Absit tamen, ut invento pulcherrimo debitam laudem cupiam detrahere. Hoc solùm dico, demonstrationes per heterogenea institutas, ad assensum non cogere, nisi, quod fieri plerumque potest, ad homogenea reducantur.* Quid autem sibi velit nomine hujus reductionis ad homogenea, explicat ipse Prop. 9. lib. 1. parte 1. cylindric. & annul. Ego verò ad exemplum Tironibus multò familiarius hanc ipsam Tacqueti reductionem traducam; & an differat a prima Cavallerii indivisibilium positione, clarissimè exponam.

Exem-

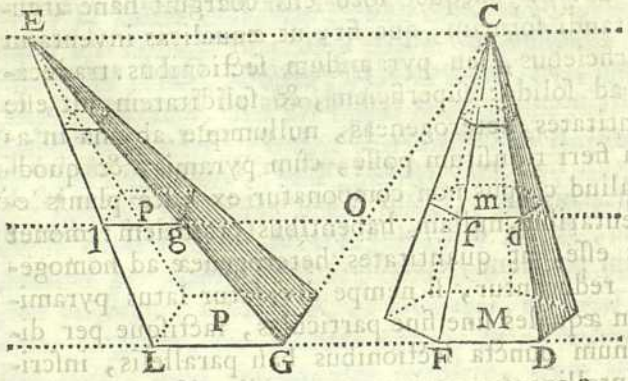
Exemplum.

20. PYramides CM, EP, æqualium baſium, & altitudinum, ſunt æquales in ſoliditate.

Methodo indiviſibilium

DEmonſtratio. Eſto baſis M pyramidis hexagonalis CM, æqualis in ſuperficie baſi P pyramidis quadratæ EP, ejuſdem altitudinis. Si utraque pyramis ſecetur plano baſibus parallelo, hæc ſectio exhibebit duo plana elementaria *m*, *p*, ſimilia (n. 94. Geom. ſol.) reſpectivæ baſi pyramidum.

Concipe jam in omni parallelarum CE, DL intervallo fieri hujuſmodi ſectiones ſimiles: dividetur utraque pyramis in eumdem numerum planorum elementarium. Quare, ſi demonſtretur elementa ſingula componentia pyramidem hexagonalem æquari ſingulis reſpectivè elementis pyramidis quadratæ, demonſtrabitur utriuſque pyramidis æqualitas.



Oſten-

Oſtendam itaque elementum m æquari elemento p, quod eidem correſpondet. Ducatur CG, & propter parallelas CE, dl, DL, erit

$DF : df :: CD : cd :: CG : CO :: EG : Eg :: GL : gl.$

Ergo $DF : df :: GL : gl$;

atque hinc $\overline{DF}^2 : \overline{df}^2 :: \overline{GL}^2 : \overline{gl}^2$.

Cùm autem planum M ſit ſimile plano m, & planum P ſimile plano p, ac præterea figuræ ſimiles ſint inter ſe, utì quadrata laterum homologorum, erit $M : m :: \overline{DF}^2 : \overline{df}^2$;

& $P : p :: \overline{GL}^2 : \overline{gl}^2$;

& conſequenter $M : m :: P : p$;

& alternando, $M : P :: m : p$.

Sed per hyp. $M = P$. Ergo $m = p$.

Eadem æqualitas demonſtrabitur in aliis elementis. Ergo ſumma elementorum pyramidis hexagonalis æquatur ſummæ elementorum pyramidis quadratæ. Cùm autem horum elementorum numerus, propter æqualem altitudinem pyramidum, ſit utrinque æqualis, pyramides æqualium baſium, & altitudinum erunt æquales. Quod erat &c.

21. P. Tacquet loco cit. coarguit hanc argumentandi formam, qua fit, ut æqualitas inventa in ſuperficiebus, ſeu pyramidum ſectionibus traducatur ad ſolida: ſuperficiem, & ſoliditatem ait eſſe quantitates heterogeneas, nullumque ab una in aliam fieri tranſitum poſſe, cùm pyramis, & quodvis aliud corpus non componatur ex hiſce planis elementaribus nullam habentibus craſſitiem: monet opus eſſe, ut quantitates heterogeneæ ad homogeneas reducantur, ſi nempe dividatur latus pyramidis in æquales ſine ſine particulas, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus baſi parallelis, inſcripta intelligantur utrique pyramidi priſmata quadrata,

ta, & hexagona æqualium ſemper altitudinum; quæ priſmata in pyramides ipſas deſinent, prout priſmatum inſcriptorum numerus augetur, & altitudo minuitur in infinitum. Ex horum autem priſmatum, quæ comparantur inter ſe, perpetua æqualitate, neceſſariò etiam pyramidum æqualitas demonſtrabitur.

Reductio ad homogenea inutilis.

At, pace tanti Viri, hæc reductio eſt ipſiſſima Cavallerii poſitio, utì expoſitum eſt n. 15., & ab eodem Walliſio diſertis verbis declaratur. Neque enim Cavallerius cogitavit unquam, corporum elementa eſſe ſuperficies omni prorſus craſſitie carentes; ſed corporum elementa eſſe voluit alia minora corpora, puta in caſu noſtro, priſmata inſcripta, quæ propter altitudinem infinitè parvam jurè vocari poterant ſuperficies, quaſi evaneſcente craſſitie. Hoc verò aſſerere non aliud eſt, quàm, more Veterum, per inſcripta homogenea propoſitas quantitates exhaurire.

22. Opponit rurſum D. De la Chapelle. *Reprenons la démonſtration des Indiviſibiliſtes. Les pyramides de même baſe, & de même hauteur ont un même nombre de tranches: on l'accorde. Il eſt démontré géométriquement que toutes les tranches de l'une ſont éguales à toutes les tranches de l'autre, chacune à chacune: on en convient. Or les pyramides ſont compoſées de ces tranches ſuperficielles? Les defenſeurs des indiviſibles en ont reconnu l'impoſſibilité. Il faut donc que ce ſoient des tranches ſolides, qui compoſent les pyramides; ainſi il reſte à démontrer que ces tranches ſolides ſont éguales, chacune à chacune. Les Indiviſibiliſtes le ſuppoſent; leur démonſtration eſt donc une pétition de principe. A la vérité ils prouvent à la rigueur que les baſes, entre leſquelles ſont compriſes les petites tranches élémentaires ou les petites pyramides tronquées, ont une égualité correſpondante;*

mais

mais c' eſt changer l' état de la queſtion. Je demande que l' on m' établiſſe une égualité de ſolides, e l' on n' aboutit qu' à une égualité de ſurfaces. Quel paralogiſme!

Miror hæc objici poſſe ab eo, qui demonſtrandi methodum in ſuperiori Theoremate adhibitam paulo attentiùs conſiderarit; nimirum, duo elementa, hoc eſt, ſolida invicem comparata in utraque pyramide demonſtrantur æqualia iiſdem geometricis principiis, quibus uti ſolemus in prima elementari Geometria, ac præterea iiſdem principiis, eademque progreſſione, qua utebantur antiqui Geometræ in methodo exhauſtionum. Nam juxta hanc methodum indiviſibilium, parallelogramma ex minutis parallelogrammis, cylindri ex minutis cylindrulis, pyramides ex minutulis priſmatis conſtant, quorum ſumma adæquat figuram, quam componunt.

23. Verum quidem eſt, inquit Walliſius loc. cit., ejuſmodi minuta parallelogramma complere poſſe exactè illud grandius, quod componunt, parallelogrammum, cubos componi ex minutis priſmatis, etiam ſecundùm geometricum rigorem; ſed in triangulo, parabola, aut in pyramide id fieri exactè non poteſt; quippe quæ ex parallelogrammis, aut priſmatis non componuntur. Attamen veriſſimum illud eſt, poſſe utique ex hujuſmodi parallelogrammis confici figuram triangulo, ſeu parabolæ inſcribendam, aut circumſcribendam, & ex priſmatis inſcribendam, aut circumſcribendam pyramidi, quæ ab illis differat magnitudine, quæ minor ſit quavis aſſignabili; & quidem quæ ita continuè minuatur, prout augetur parallelogrammorum illorum, aut priſmatum numerus; ac proinde, ſi hæc ſupponantur infinitè multa, erit ea differentia infi-

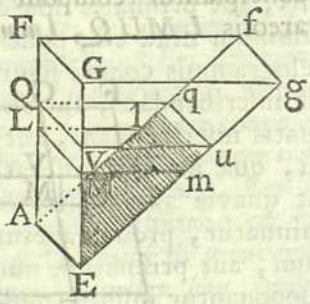
nitè

nitè exigua, adeoque evanescens: *Quæ non alia est*, inquit Wallisius, *quàm exhaustionum methodus, aliis terminis exposita, & compendiosiùs*.

Idipsum vidit acutissimus Vir Dominus De la Chapelle, qui paulo post subdit: *Peut-être que cette méthode bien analysée ne seroit pas différente de la méthode d'exaustion; mais c'est a quoi je ne veux pas toucher*; contra quàm fieri oportebat in hac ipsa, quam tradit, elementari institutione, in qua maximè intererat, ut quid veri, quid falsi utraque methodus contineret, an vocibus differret, an re, accuratè expenderet, & cautè definiret.

Hanc esse ipsissimam Cavallerii mentem facilè constat ex toto ipsius opere, ac præsertim ex iis difficultatibus, quas egregii suæ ætatis Geometræ Cavallerio objecerant. Nam, utì refert etiam P. Boschovich in suis elementis, opposuerat Cavallerio P. Guldinus, fieri aliquando posse, ut hæc methodus indivisibilium in errorem induceret, si ita acciperetur, utì verba sonare viderentur. Nam, si bina rectangula *FAEG*, *fAEg*, non in eodem plano posita terminarentur ad binas rectas *Ff*, *Gg*, perpendiculares plano prioris; rectangulum posterius esset longius priore in ratione rectæ *Eg* subtendentis angulum rectum *EGg*, ad *EG* latus trianguli rectanguli; cùm nimirum communis altitudo esset *FA*, & tamen sectiones *LM*, *lm* essent æquales eidem *AE*, adeoque & inter se.

Objectio P. Guldini.

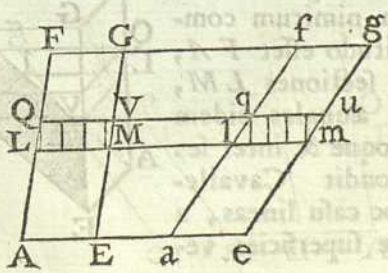


Respondit Cavallerius in hoc casu lineas, a quibus eæ superficies ve-

luti

luti contexuntur, esse utrobique quidem æquales, sed textum ipsum rariorem in secundo rectangulo. Si enim fiat secunda sectio *QUu* admodum proxima priori, bina fila *QU*, *qu* erunt æqualia inter se, sed *qu* ab *lm* remotius, quàm *QU* ab *LM*. Suam autem methodum ajebat tunc solùm procedere, cùm, præter æqualitatem sectionum, e quibus figura constare concipitur, etiam binarum quarumcunque inter se proximarum distantiæ æquales sint; hæc enim cautio necessaria est, ut figurarum æqualitas demonstretur. Sint enim parallelogrammata *AG*, *ag* (ut in fig. seq.) constituta in eodem plano super basibus æqualibus *AE*, *ae*, & inter easdem parallelas: eorum æqualitas hac methodo ostenditur: tum quia sectiones *LM*, *lm*, *QU*, *qu* parallelæ basibus *AE*, *ae* æquales sint iis, & inter se; tum verò maximè, quia lineæ illæ in ipsis superficiebus parallelogrammorum æquè inter se distent, licet earum distantiæ *UM*, *um*, computatæ in directione laterum, non sint æquales, si eæ directiones diversæ fuerint, adeoque ipsorum laterum æqualitas non habeatur. Distantiæ æquales sectionum.

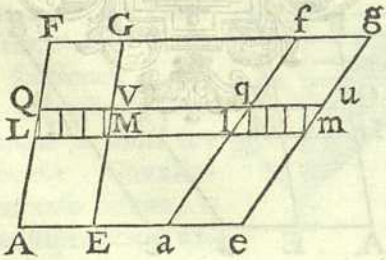
Atque hinc intelliges planissimè, quare in methodo Cavallerii superficies *AFGE*, *afge* non concipiantur componi e lineis *LM*, *lm*, sed ex areolis *LMUQ*, *lmuq*, quæ inter lineas conti-



nentur, uti & ſolida ex ſpatiolis ſolidis inter ſuperficies contentis; in quibus nimirum areolis, & ſpatiolis ſolidis baſes, & craſſitudines æquales erunt, & numerus idem.

Nam erectis lineis perpendicularibus utrique oppoſitæ ſectioni infinitè proximæ, continuataque diviſione utriuſque ſectionis in infinitum numerum particularum æqualium, & ſimilium, æqualis ſemper aſſumi poterit utrobique earumdem numerus; & ſolùm circa margines *LQ*, *UM*, *lq*, *um*, ob laterum obliquitatem deeſſe poterunt hinc inde in angulis infinitè parva ſpatiola, quorum numerus reſpectu reliquorum minuetur in infinitum, ubi in infinitum minuatur craſſitudo, & ſectiones oppoſitæ ad ſe invicem accedant in infinitum. Quare, ubi illorum elementorum, nimirum ſpatiorum, quæ binis ſectionibus infinitè proximis continentur, æqualitas aſſumitur, contemnitur aliquid infinitè parvum reſpectu ipſius ſummæ.

Explicat autem egregiè P. Boſchovich in ſuis elementis tom. I. n. 113., quì fieri poſſit, ut, quoties in comparandis binis quantitatibus finitis, contemnendo aliqua, quæ reſpectu earum ſunt infinitè parva, invenitur æqualitas, toties vera æqualitas haberi debeat, nec ullus, ne infiniteſimus quidem



error

error inde oriri possit. *Finitæ enim quantitates*, inquit, *sunt eæ, quæ in se determinatæ sunt: infinitè parvæ quantitates sunt eæ, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscunque limites in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infinitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nullum errorem parere potest, ne infinitesimum quidem. Nam, si illæ finitæ quantitates essent inæquales, haberent differentiam aliquam in se determinatam; quoniam autem illæ quantitates infinitesimæ possunt minui ultra quoscunque limites in se determinatos, poterunt simul omnes esse minores, quàm illa differentia supposita, quam idcirco compensare non possent; nec posset ex illarum contemptu derivari æqualitas quantitatis illius in se determinatæ, nimirum differentiæ suppositæ.*

Infinitesimarum contemptus.

De Methodo exhauſtionum ab antiquis Geometris adhibita Euclide, & Archimede.

24. VEteres Geometræ in hac ipſa, quam expoſuimus, exhauſtionum methodo, multò longiore ambitu utebantur; ac in iis quæſtionibus, quæ infiniti conſiderationem involvunt, ſuas demonſtrationes ad abſurdum revocabant, & ex falſis ſuppoſitionibus verum eruebant. Ejuſmodi Antiquorum methodus eodem fundamento innititur, quo methodus Recentiorum, ſed multò eſt implicatior, & longior; cujus brevem ſynopſim dabo, quæ uſui erit Tironibus in veterum Geometrarum lectione.

Euclidis Lemma.

Inſtar Lemmatis præmittunt hoc Theorema, quod Euclides demonſtrat prop. 1. lib. 10. elem.; nimirum: *Duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a majore auferatur majus quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur majus quàm dimidium, & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.*

Notat Walliſius veram fore propoſitionem, ſi pro $\frac{1}{2}$ ſumeretur $\frac{1}{3}$, aut $\frac{1}{4}$, aliave pars hujuſmodi, & ſic continuè; aſſumit autem Euclides $\frac{1}{2}$, non ex neceſſitate, ſed pro arbitrio ſuo, ut commodiùs hoc Lemma applicetur propoſitionibus, quæ hac methodo demonſtrandæ erunt; utì mox exemplo planum faciam.

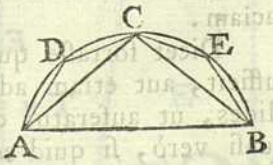
Dicet fortaſſe quiſpiam: Si ablatio dimidii ſufficit, aut etiam adhuc minoris; cur jubet Euclides, ut auferatur continuè pluſquam dimidium? quaſi verò, ſi quid eo minus auferatur, non ſufficeret.

Re-

Respondet Wallisius loco cit. Si Propositionem hanc propter se præcipuè intendisset Euclides, non esset dubitandum, quin dixisset potius: Si a toto auferatur sui dimidium, & a residuo dimidium sui, & ita porro in infinitum; aut etiam adhuc universaliùs: Si a toto auferatur pars sui proportionalis, & a residuo similis pars sui proportionalis, aut etiam major, & sic continuè &c. Nam hac etiam via perveniretur tandem ad partem data quavis minorem. Cur ab Euclide restrictiùs proponatur.

Sed Propositionem hanc intenderat Euclides, non tam propter se ipsam, sed ut Lemma ad ulteriores usus: hinc non omne illud in hoc Theoremate dici, quod dici potuisset, sed tantundem, & in tali forma, ut aptissimè posset ad eos usus accommodari; similemque cautionem passim adhibet in aliis Lemmatis exponendis; cautèque abstinet ab eis universaliùs proponendis, quàm erat opus ad rem suam. *Quod moneo*, inquit Wallisius, *ne quis eum negasse putet, aut ignorasse illorum universalitatem, quæ minùs universaliter pronunciat, aut nescire quæ tacet.*

Euclidæi Theorematis exemplum hoc esto. In segmento circuli A C B inscriptum triangulum A B C ejusdem basis, & altitudinis, est plusquam dimidium; est enim dimidium circumscripti parallelogrammi: hoc igitur exempto, residua segmenta A C, C B simul sumpta, sunt minus quàm dimidium. Similiterque inscripta triangula A D C & C E B sunt plusquam dimidium illorum segmentorum; adeoque residua segmenta quatuor A D, D C, C E, E B simul sumpta, sunt minus quàm dimidium primi residui; & sic continuè; ita ut tandem perveniatur ad residua Usus Lemmatis.



dua ſegmenta tam exigua, ut eorum aggregatum minus ſit quavis data quantitate.

Scopus Euclidis.

At verò, inquit Walliſius, ſi requiratur, ut inſcribantur triangula ſuper eas baſes, quæ ſint præciſè dimidia illorum ſegmentorum, aut eorum certa pars aliqua, id ægrè obtinebitur. Prudenter itaque factum eſt ab Euclide, ut illud Lemma ſic verbis exponeretur, ut aptiſſimè poſſit his uſibus accommodari.

Veterum in demonſtrando circuitus.

Hoc Lemmate nititur antiqua methodus exhauſtionum, qua paſſim utuntur Euclides, Archimedes, aliique Geometræ, tum veteres, tum recentiores. Sed antiqui eodem, quo recentiores, principio, ſeu Lemmate exorſi, longiore circuitu in progreſſu ſuas demonſtrationes ad abſurdum revocabant, & ex falſis ſuppoſitionibus verum eruebant. Summa totius progreſſus erat hujuſmodi. Ut inter duas quantitates, quæ ad æqualitatem conſtanter vergunt, & tandem propiùs accedunt, quàm pro data quavis differentia, rationem æqualitatis intercedere demonſtrarent, prius ſupponebant inter eas quantitates eſſe vel majoris, vel minoris inæqualitatis rationem; deinde utrumque falſum demonſtrabant; & ex hac reductione, quam ad abſurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem eſſe concludebant.

Reductio ad abſurdum.

Hujus methodi ſpecimen exhibeo ex Archimedis prop. 1. de dimenſione circuli.

Exemplum I.

THEOREMA.

25. *Circulus æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus latera angulum rectum continentia, æqualia ſunt*

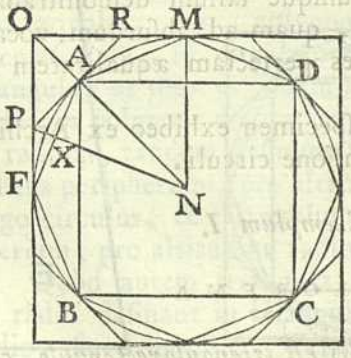
ſunt alterum ſemidiametro, alterum perimetro iſtius circuli.

Demonſtratio. Eſto A B C D circulus, & E triangulum, utì ſupponitur. Dico huic triangulo illum circulum eſſe æqualem, hoc eſt, neque majorem, neque minorem eſſe.

Indirecta Antiquorum demonſtratio.

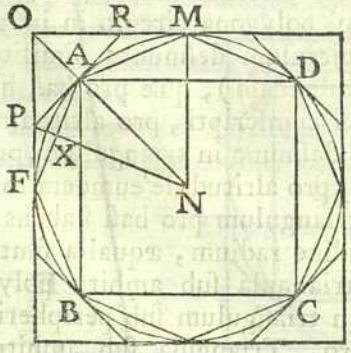
Eſto enim, ſi fieri poteſt, major ille circulus triangulo; ſitque A C quadratum inſcriptum; ſintque arcus continuè biſecti, utì expoſitum eſt in Lemmate: ſegmenta reſidua ſimul ſumpta (per Lem.) minora erunt, quàm exceſſus, quo ſupponitur circulus excedere triangulum. Ergo ſic inſcripta figura rectilinea eſt triangulo major.

Jam verò a centro N eſt N X ad inſcriptæ rectilineæ perimetrum perpendicularis, quæ minor eſt ſemidiametro circuli, & conſequenter minor & altero laterum trianguli E continentium angulum rectum. Rurſum



perimeter inſcriptæ figuræ rectilineæ, quippe qui minor eſt circuli perimetro, minor quoque erit eorum laterum reliquo ejuſdem trianguli E; & conſequenter rectilinea figura inſcripta minor erit triangulo E; quod eſt abſurdum; nam ante præſumebatur major.

Eſto jam, ſi fieri poteſt, circulus ille triangulo minor. Circumſcribatur quadratum; ſintque arcus continuè biſecti, & per biſectionum puncta tangentes ductæ. Eſt igitur O A R angulus rectus, adeoque O R major quàm M R = R A. Ergo triangulum R O P eſt pluſquam dimidium figuræ O F A M, & ſic continuè; eruntque tandem (per Lem.) reſidui ſectores, quales P F A, minùs quàm exceſſus, quo ſupponitur triangulum E excedere circulum; ac proinde circumſcripta rectilinea figura minor



erit

erit triangulo E; quod eſt abſurdum, propter NA æqualem uni lateri trianguli E ex ſuppoſitione, & propter perimetrum rectilineæ figuræ circumſcriptæ majorem baſe ejuſdem trianguli E; nam hic perimeter major eſt perimetro circuli, cui circumſcribitur.

Itaque circulus, cùm neque major ſit, neque minor, æqualis eſt triangulo E. Quod erat &c.

Hæc eſt ab antiquis Geometris adhibita demonſtrandi ratio, quæ quàm perplexa ſit, & tædio plena, nemo non videt.

Confer jam Recentiorum directam, brevemque demonſtrationem, quam ſic proponunt.

Exemplum II.

THEOREMA.

26. *Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter.*

Demonſtratio. Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta, in circulum deſinunt; ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam), quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium, tandem deſinunt in triangulum, pro baſi habens peripheriam, pro altitudine eumdem radium. Ergo circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium, æqualia ſunt. Directa Recentiorum demonſtratio.

Quòd autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio deſinant in triangulum ſub peripheria, & radio, ſic demonſtro. Triangula ſub ambitu circum-

cumſcripti polygoni, & radio, ſunt ad triangulum ſub peripheria, & eodem radio, ut baſis ad baſim, nempe, ut ambitus polygoni ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Atqui ambitus polygoni in peripheriam deſinit. Ergo & triangula deſinent in triangulum. Quod erat &c.

Hæc autem perbrevis, ac directa demonſtratio unicè poſtulat præmitti inſtar Lemmatis Theorema, quod demonſtravimus n. 293. Geom. planæ.

Polygonum ordinatum circulo circumſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo verò perpendicularis in latus unum ex centro ducta.

De

De Methodo Newtoniana evanescentium divisibilium, sive rationum primarum, & ultimarum.

27. HÆc Veterum indirecta, & perplexa demonstrandi ratio minimè placuit Newtono, qui, ut & rigidam illam Archimedis, & Euclidis, in theorematum demonstratione methodum adhiberet, & Recentiorum etiam assequeretur brevitatem, & facilitatem directæ demonstrationis,

I. Antiquorum utique principium Lemmate I. generaliter expressit, ut fusè exposui num. 2., illudque in Lemmatis sequentibus n. 3. 4. &c. ad curvas generatim applicavit, & inde directas, perbrevesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. *Præmisi verò*, inquit ipse lib. 1. sect. 1. lem. 11. philos. nat., *hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum; contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium.*

II. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis; & propterea methodus illa minùs geometrica censetur, durior, inquam, & minùs geometrica, quippe quæ, saltem quoad voces, videtur abhorrere a genesi quantitatis geometricæ; loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit; & quantitates mathematicas non ut ex partibus quàm minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat. *Malui*, inquit, *demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas, & rationes, primasque nascentium, idest, ad limites summarum, & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes, qua potui brevita-*

te

te, *præmittere*. Nimirum, ut dictum eſt n. 3., ſi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividatur, & eorum numerus augeatur, & latitudo minuatur in infinitum, horum parallelogrammorum ſumma nunquam poterit eſſe major areà curvilineà; ſed hæc area erit terminus, ſeu limes, ad quem parallelogrammorum decreſcentium ſumma ſemper accedit, & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evaneſcunt, aut naſcuntur. Idem dicendum de evaneſcentibus curvarum chordis reſpectu perimetri curvilineæ. *His enim*, inquit, *idem præſtatur, quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis tutiùs utemur*.

III. Ac ne quiſpiam in horum evaneſcentium diviſibilium notione laboraret, & minùs cautè eamdem uſurparet, ſic porro monet. *Si quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel, ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia; non ſummas, & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum, & rationum limites ſemper intelligi*.

Quantitates itaque evaneſcentes concipi non debent velut determinatæ, aut determinabiles quædam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant. Quaſcunque enim portiunculas linearum, ſuperficierum, aut corporum acceperimus, aut deſignaverimus, hæ ſemper re ipsà finitæ erunt, non evaneſcentes; quare non ſunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coarctandæ; unde hæ quantitates ſemper ut decreſcentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

IV. Quia verò opponi poterat, quantitatum evaneſcentium nullam eſſe ultimam proportionem; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima,

ubi

ubi evanuerunt, nulla eſt: Reſpondet Newtonus loc. cit. *Sed & eodem argumento æquè contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finitur, provenientis velocitatem ultimam* (puta, gravis ſurſum projecti, & ad altiſſimum locum pervenientis); *hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe*. Dein Newtonus directè reſpondet, & fallaciam vocum aperit. *Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur; neque antequam attingit locum ultimum, & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc, cùm attingit; ideſt, illam ipſam velocitatem, quacum corpus attingit locum ultimum, & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur; & ſumma prima, & ultima eſt quacum eſſe, vel augeri, aut minui incipiunt, & ceſſant*.

Hæc itaque ſumma eſt hujus methodi evaneſcentium, utì conſtare cuivis poteſt ex Lem. I. II. & III. n. 2. & ſeq. Ut quantitatum evaneſcentium, aut naſcentium relationes, atque proprietates inveniantur, conſiderantur I. quantitates finitæ, quarum inveſtigantur relationes, & proprietates, & lex, qua continuò creſcunt, vel decreſcunt: II. His cognitis facilè intelligitur, quænam proprietates quantitatibus illis creſcentibus, ac decreſcentibus ſemper conveniant, ac proinde etiam cùm in infinitum minuuntur, & evaneſcunt, vel cùm naſcuntur. Imò verò ex Lem. I. aliiſque invenitur, quæ ſint proprietates, quæ licet quantitatibus finitis non conveniant, evaneſcentibus tamen, & naſcentibus competunt;

petunt; cùm nempe quantitates finitæ decrescentes, ad illas proprietates, ut ita dicam, perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro data quavis differentia. *In hoc continuo accessu*, inquit Newtonus, *extat limes, quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima; & par est ratio limitis quantitatum, & proportionum omnium incipientium, & cessantium; cùmque hic limes sit certus, & definitus, problema est verè geometricum, eundem determinare.*

Contendi etiam potest, pergit Newtonus, *quòd, si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus; contra quam Euclides de incommensurabilibus libro decimo elementorum demonstravit. Verùm hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum (hoc est, quantitatum determinatarum, & indivisibilium), sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propiùs assequi possunt, quàm pro data quavis differentia, nunquam verò transgredi, neque prius attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ, seu maximæ, quarum ista est ratio.*

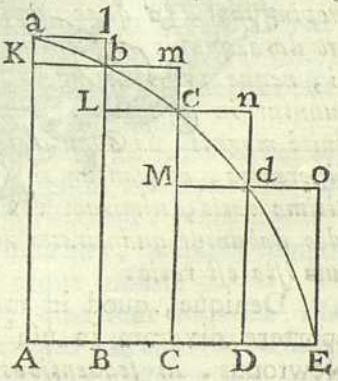
Denique, quod in methodo Cavallerii caveri oportere dixeram in usu vocum, idipsum monet Newtonus. *In sequentibus igitur, si quando facili re-*

verum conceptui consulens dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas: cave intelligas quantitates magnitudine determinatas; sed cogita semper diminuendas sine limite.

Ut autem Tirones diversarum quantitatum sine fine decrescentium limites, quos nunquam transgredi possunt, neque prius attingere, quàm quantitates diminuantur in infinitum, distinctiùs assequantur, resumatur schema Lemmatis II. n. 3.

Linea *Bb* motu sibi semper parallelo accedat ad lineam *Aa*; & interim punctum *b* ita moveatur in linea *Bb*, ut semper reperiatur in arcu *ba*: decrescente linearum *Aa*, *Bb*, distantià *AB*, decrescit quoque earum differentia *Ka*; & tandem, evanescente *AB*, evanescit *Ka*; atque hinc *Bb*, seu *AK* fit ultimò æqualis lineæ *Aa*.

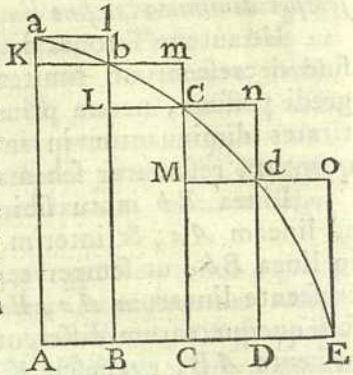
Evanescunt autem *AB*, *Ka*, cùm lineæ *Aa*, *Bb*, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut sic dixerim, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum *Aa*, *Bb* differentia *Ka* minor est quavis linea data, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu *AK*, & *Bb*.



Similiter, quia evanescente *Ka*, trianguli *Kab*, & parallelogrammi *Kl* areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis *Ab*; parallelogrammum istud *Ab* usurpari potest pro parallelogrammo *Al*, aut etiam pro figura *ABba*, hoc est, pro differentia area-

arearum curvilinearum *AEca*, *BEcb*.

Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum, ſeu evaneſcentium ordines. Nam parallelogrammum *Kl* infiniteſimum erit reſpectu parallelogrammi *Ab*; hoc verò parallelogrammum infiniteſimum erit reſpectu areæ curvilineæ *AEca*. Idemque dicendum de quantitatibus ſolidis evaneſcentibus diverſorum ordinum, ſi figura *AEca* circa axem ſuum *AE* revolvatur.



Sy-

SYNOPSIS.

28. HAbes jam quid inter Veterum, & Recentiorum methodum interſit; ac præterea an indiviſibilium methodus nomine differat, re congruat cum methodo evaneſcentium diviſibilium.

I. Antiqui perinde, ac recentiores Geometræ eodem omnes fundamento uſi ſunt; & quantitates infinitè parvas, ſeu evaneſcentes, pro nihilo habendas eſſe in multis demonſtrationibus, tanquam axioma poſuerunt Euclides, & Archimedes. Hinc licet imperfecta admodum fuerit Veterum Geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infiniteſimalis principia. Unico exemplo vulgaris Geometriæ contentus ero.

Ut demonſtrarent circulos eſſe inter ſe, ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inſcripta eſſe, vel circumſcripta polygona ſimilia, quorum latera numero augerentur, & longitudine minuerentur in infinitum; ita ut polygonorum inſcriptorum, vel circumſcriptorum differentia foret quavis data magnitudine minor. Quia verò hæc polygona ſunt, ut quadrata diametrorum circulorum, quibus inſcribuntur, vel circumſcribuntur, circulos pariter eſſe, ut quadrata diametrorum, concludebant.

Hæc demonſtrandi ratio varios infinitorum ordines ſupponit; quamvis idipſum vel non adverterent Veteres, vel non exprimerent. Nam conſiderabant polygona circulis inſcripta, tanquam compoſita ex infinitis numero, atque infinitè parvis, ſeu evaneſcentibus lateribus; quæ ſunt minimæ illæ quantitates, quas Recentiores vocant infiniteſimas primi ordinis. Conſtat præterea differentiam poly-

goni inſcripti circulo, quavis data minorem, componi ex infinitis numero, atque infinitè parvis, ſeu evaneſcentibus circuli ſegmentis, quorum chordæ ſunt latera polygoni: hæc rurſum ſegmenta ſunt minimæ illæ quantitates, quas ſecundi ordinis infiniteſimas dicunt Recentiores.

His limitibus hanc methodum circumſcripſerant Veteres; primuſque omnium Cavallerius anno 1635. univerſæ Geometriæ planæ, ac ſolidæ eamdem methodum applicavit; quam idcirco Geometriam indiviſibilium, hoc eſt, infinitè parvorum nominavit.

II. Hinc methodus indiviſibilium non alia eſt, quàm exhauſtionum methodus compendioſior, & ad ſolidorum Theoremata uberiùs traducta.

III. A methodo Cavallerii Newtonus voces *indiviſibilium* ſuſtulit, rem retinuit; & corporum elementa per evaneſcentia diviſibilia luculentiùs explicat; & lineas e lineolis, non e punctis, ſuperficies ex areolis, non e lineis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis, non e ſuperficiebus compoſitum ſupponit. Quod idem Cavallerius, breviùs quidem, ſed obſcuriùs propoſuerat per methodum indiviſibilium.

IV. Antiquam autem exhauſtionum methodum ad meliorem formam revocavit nova methodus, qua fit, ut inter duas quantitates æqualitas directè ſæpe demonſtretur, quam indirectè, & per longiſſimas ambages Antiqui per reductionem ad abſurdum inveniebant.

V. Eodem fundamento innititur tam methodus Cavalleriana, quàm methodus evaneſcentium diviſibilium, ſeu infiniteſimalis: utraque inveſtigationi eſt aptiſſima, utraque demonſtrationes mirum in modum contrahit.

VI. In utraque methodo cavendum, ne contem-

temnatur aliquid, quod non decrescat ultra quoscunque limites in se determinatos respectu ejus quantitatis, ex cujus comparatione contemnitur. Quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

VII. Tot itaque diffidentes methodus sive exhaustionum, sive indivisibilium, sive evanescentium divisibilium, & infinitè parvorum in eumdem ferè scopum conspirare facilè intelliges. Quod multò ante prospexerat D. d'Alembert in celeberrimo suo tractatu Dimanicæ his verbis.

La méthode des infinimens petits a un inconvénient; c'est que les commençans, qui n'en pénétrent pas toûjours l'esprit, pourrojent s'accoûtumer à regarder ces infinimens petits comme des réalitez; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle même a donné occasion à quelques mauvais livres contre la certitude de la Géométrie. La méthode des infinimens petits n'est autre chose que la méthode des raisons premiéres, & derniéres, c'est à dire, des rapports des quantitates qui naissent ou qui s'évanouissent.

FINIS.

CUm usu invaluerit, ut Euclidis Elementa passim a Scriptoribus antiquioribus citentur, ac plerique Euclidæo ordini jamdiu assueverint; visum mihi fuit faciendum, ut Indicem subjicerem, unde constare posset cuivis, ubinam in nostra elementari institutione, eorum demonstratio quærenda sit, quæ Euclides sex prioribus Libris Geometriæ planæ, & undecimo, ac duodecimo Geometriæ Solidorum complexus est. Plerasque omisimus, quas Euclides in gratiam sequentium demonstrat. Propositionibus singulis in ordine Euclidæo respondent numeri, quibus series nostrorum Elementorum contexitur.

In ordine Euclidæo		In nostro
Lib. I.		Tomus I.
Prop.	1.	num. 208.
	4.	229.
	5.	226.
	6.	224.
	8.	232.
	10.	73.
	11.	70.
	12.	66.
	13.	74.
	14.	78.
	15.	86.
	16.	222.
	18. 19.	227.
	20.	211.
	21.	88. 235.
	22.	212.
	23.	64.
	24. 25.	231.
	27.	110.
	28.	114.
	29.	115.
	30.	116.

In ordine Euclidæo		In nostro
Lib. I.		Tomus I.
Prop. 31.	num.	103.
32.		121.
33.		244.
34.	248.	249.
35. 36.		252.
37. 38.		257.
39. 40.		259.
41.		250.
42. 44. 45.	304.	&c.
47.		514.
48.		518.
Lib. II.		
4.		508.
5.		513.
11.		577.
12.		546.
13.		549.
Lib. III.		
1.		144.
2.		137.
3.	145.	146.
4.		145.
5. 6.		130.
7. 8.	132.	136.
9.		134.
10.	134.	150.
11. 12.		153.
13.		151.
15.		135.
16.	139.	160.
17.		185.
18.		139.
19.		141.
20.		177.
21.		176.

In ordine Euclidæo	In nostro Tomus I.
Lib. III.	
Prop. 22.	num. 188.
25.	144.
26. 27.	135. 179.
31.	180. 181. 182.
32.	186.
33.	191.
34.	190.
35.	556.
36.	560. 561.
Lib. IV.	
5.	207.
10.	579.
15.	288.
Lib. V.	
4.	386.
16.	384.
17.	390.
18.	388. 392.
22.	490.
23.	491.
26.	387.
27.	385.
28.	389.
29.	391.
Lib. VI.	
1.	374.
2.	397. 400. 407.
3.	401.
4.	410.
5.	415.
6.	414.
10.	402. 403.
12.	404.
13.	566.
16.	383.

In ordine Euclidæo	In nostro
Lib. VI.	Tomus I.
Prop. 19.	num. 498.
20.	446. 500.
23.	497.
30.	577.
31.	520.
Lib. XI.	Tomus II.
1.	3.
2.	6.
3.	4.
4.	11.
5.	13.
6.	15.
7.	28.
8.	14.
9.	30.
10.	31.
11.	16.
12.	17.
13.	9.
16.	34.
18.	22.
19.	26.
20.	43.
21.	39.
23.	44.
25.	97.
29. 30. 31.	62. 98.
32.	100.
Lib. XII.	
6.	111.
7.	106. 107.
9.	114.
10.	109.
11.	112.
13.	101.
34.	113.

IN-

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ planæ continentur.

Notiones.

De Lineis.

Postu-

De Mensuris.

LIBER I.

ELEMENTUM I.

De variis Linearum rectarum sibi mutuò occurrentium affectionibus.

puncto

dem

ELEMENTUM II.

De variis rectarum Linearum nunquam concurrentium affectionibus.

Praxis Geometrica

Libellationis.

Elementum III.

De Lineis circularibus, earumque mutuo inter ſe, & cum lineis rectis occurſu.

Theor.

Theor. Si extra circulum, vel in ipſa circumferentia circuli, vel in circulo, quodvis aliud a centro accipiatur punctum, a quo rectæ plures in circumferentiam cadant: I. Maxima erit, quæ per centrum tranſit; II. Aliarum major eſt illa, cujus extremitas eſt propior extremitati maximæ. Et reciprocè. *pag.* 70. 71.

Corollo I. Si duæ rectæ ab eodem puncto, quod non ſit centrum, ad circumferentiam ductæ, ſint æquales, earum extremitates erunt æqualiter diſſitæ ab extremitate rectæ tranſeuntis per centrum. Et reciprocè. 72.

Corollo II. Fieri ergo non poteſt, ut ab eodem puncto, quod non ſit centrum, ad circumferentiam tres rectæ æquales duci poſſint. *ibid.*

Corollo III. Diameter eſt omnium chordarum maxima. Et reciprocè. 73.

Theor. Omnium rectarum, quæ a puncto, quod non ſit centrum, in circumferentiam cadunt, minima eſt, quæ producta tranſit per centrum. Et reciprocè. 74. 75.

Theor. Si recta circumferentiæ occurrat in duobus punctis, circulum ſecat. *ibid.*

Corollo I. Tangens circumferentiæ occurrit in unico puncto. 76.

Corollo II. Recta a centro ad punctum contactus ducta, tangenti perpendicularis eſt. 77.

Corollo III. Recta, quæ a centro perpendiculariter ducatur ad tangentem, tranſit per punctum contactus. *ibid.*

Corollo IV. Tangens reciprocè perpendicularis radio in puncto contactus. 78.

Corollo V. Et reciprocè recta, quæ perpendiculariter ducatur ad extremitatem radii, tanget circulum. *ibid.*

Theor. Si recta perpendiculariter, & bifariam ſecet chordam, I. hæc tranſibit per centrum; II. & bifariam ſecabit arcum. 78. 79.

Corollo I. II. Hinc, ſi recta quævis duas habeat ex his quatuor proprietatibus, nimirum, I. tranſeat per centrum; II. perpendicularis ſit chordæ; III. ſecet arcum,

ELEMENTUM IV.

De Angulorum menſura.

ELE-

ELEMENTUM V.

De Triangulis rectilineis.

Def. QUid ſit triangulum, & quotuplex, & inſcriptum circulo. *pag.* 113. 114.

Theor. Triangulo circulum circumſcribere. 115.

Theor. Super datà rectà triangulum æquilaterum, vel iſoſceles, vel ſcalenum conſtruere. 115. 116. 117.

Probl. Ex tribus datis rectis, quarum duæ quælibet reliquà ſint majores, triangulum conſtituere. 118.

Theor. Omnis trianguli tres ſimul anguli duobus rectis ſunt æquales. 118. 119.

Coroll. In quibus trium angulorum analyſis exhibetur. *ibid.*

Theor. Omnis trianguli externus quivis angulus duobus internis oppoſitis æqualis eſt. 121.

Theor. In omni triangulo latera oppoſita æqualibus angulis ſunt æqualia. Et reciprocè. 123.

Coroll. I. Æquiangulum triangulum etiam æquilaterum eſt. Et viciſſim. 124.

Coroll. II. Trianguli iſoſcelis ad baſim anguli ſunt æquales. Et viciſſim. *ibid.*

Theor. In omni triangulo latus majus opponitur angulo majori. Et viciſſim. *ibid.*

Theor. Si duorum triangulorum latus unum uni, & alterum alteri ſit æquale, angulique ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur & baſes, & tota triangula. 125.

Theor. Si duorum triangulorum baſes, angulique illis baſibus adjacentes, unus uni, alter alteri, fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt. *pag.* 126.

Theor. Si duo triangula habuerint duo latera duobus, alterum alteri, æqualia; unum verò triangulum, angulum illis lateribus contentum majorem habeat altero,

ELEMENTUM VI.

De Quadrilateris.

Coroll.

PRAXIS GEOMETRICA.

De Figuris Iſoperimetris.

ELEMENTUM VII.

De Polygonis.

Coroll.

Praxis Geometrica.

Figurarum planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

Reductio.

Additio.

Probl. Data ſint triangula, vel polygona ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis æquale. *pag.* 188. 189.

Probl. Figuras quaſcunque rectilineas transformare in unicum triangulum dati ad baſim anguli, & datæ altitudinis, aut cujus vertex ſit in dato puncto. 189.

Probl. Datæ ſint figuræ rectilineæ quæcunque ſimul addendæ, ut ſumma ſit parallelogrammum. *ibid.*

Multiplicatio.

Probl. Datum triangulum per quemlibet numerum 2, 3, 4, 5 &c. multiplicare, ita ut duplum, triplum, quadruplum & ſic in infinitum, multiplum conſtituatur. 190.

Probl. Triangulum datæ altitudinis invenire, quadruplum, aut pro libito multiplum datæ cujuſvis figuræ rectilineæ. *ibid.*

Subtractio.

Probl. Datum triangulum a triangulo ſubtrahendum, ut maneat triangulum. 191.

Probl. Datum polygonum a polygono ſubtrahendum, ut differentia, ſeu exceſſus ſit triangulum. *ibid.*

Probl. Datum triangulum a quovis polygono ſubtrahere, ductà in eodem polygono rectà lineà a puncto dato in uno ſuorum laterum. 192.

DE GEODESIA.

Triangulorum Diviſio.

Probl. TRiangulum in quotlibet partes æquales dividere per lineas rectas a dato angulo ductas. 196.

Probl. Triangulum in quotlibet partes æquales dividere per lineas rectas a dato ſuper uno latere puncto ductas. *ibid.*

Probl.

Quadrilaterum Divisio.

LIBER II.

De Proportione rectarum Linearum.

ELEMENTUM I.

De Rationibus, & Proportionibus.

Coroll.

ELEMENTUM II.

De Lineis proportionaliter ſectis, de Triangulis ſimilibus, ac de Lineis ad idem punctum concurrentibus.

Praxis Geometrica.

Probl.

Elementum III.

De Polygonis ſimilibus generatim, & de Punctis ſimiliter poſitis.

PRAXIS GEOMETRICA.

De Re Ichnographica.

ELEMENTUM IV.

De Ratione Laterum homologorum, & de Perimetro Figurarum similium.

pta, vel tres dumtaxat angulos habeant respectivis circumferentiis respondentes, erunt ambitus polygonorum inter se, ut diametri. *pag.* 329.

Theor. Si duo polygona similia circulis sint circumscripta, vel eorum tria latera homologa circulos tangant, erunt polygonorum ambitus proportionales radiis. 330.

Theor. Si duorum circulorum arcubus sine fine bisectis plura semper, ac plura in infinitum latera circumscribi, & inscribi intelligantur: ambitus polygonorum desinunt in circuli peripheriam. Et duorum circulorum circumferentiæ, sunt inter se, ut eorum radii, seu diametri. 331.

Praxis Geometrica.

Figurarum similium perimetrum addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere, hac lege, ut figuræ subnascentes sint datis similes.

Probl. Figuram rectilineam construere, cujus perimeter æquetur summæ ex perimetris duarum figurarum, quæ eidem similes sint, & quarum duo latera sint homologa. 333.

Probl. Invenire polygonum, cujus perimeter æquetur differentiæ inter perimetros duorum polygonorum, quæ eidem sint similia, & quorum duo latera sint homologa. 334.

Probl. Invenire polygonum, cujus perimeter sit multiplex perimetri polygoni similis. 335.

Probl. Perimetrum dati polygoni dividere in ratione data; suisque partibus perimetrum construere polygonorum dato similium. *ibid.*

LI.

LIBER III.

De ratione Superficierum.

ELEMENTUM I.

Def. QUid ſit Ratio compoſita, Exponens rationis compoſitæ, Ratio compoſita ex omnibus intermediis, Æqualitas ordinata, & perturbata, Ratio duplicata, triplicata &c. *pag.* 339. &c.

Theor. Duo quævis parallelogramma, ſive ſimilia ſint, ſive non ſimilia, ſunt inter ſe, utì facta baſis in altitudinem reſpectivè, nimirum, ſunt in ratione compoſita baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. 344.

Theor. Parallelogramma, quæ unum angulum uni habent æqualem, & conſequenter æquiangula ſunt, habent rationem compoſitam ex rationibus laterum æqualem angulum continentium. 345.

Theor. Parallelogramma ſimilia, ſunt inter ſe, utì quadrata laterum homologorum. 346.

Theor. Similium polygonorum ſuperficies ſunt inter ſe, utì quadrata ſuorum laterum homologorum. 347.

Coroll. Duo polygona ſimilia circulis inſcripta, ſunt, ut quadrata radiorum. 349.

Coroll. Circuli ſunt inter ſe, ut quadrata radiorum. 350.

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris ſimilibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

Def. QUid ſit Radix, Quadratum, Cubus. 351.

Lemma I. Si recta linea ſecta ſit utcunque, quadratum totius componitur ex quadratis partium, & duplo rectangulo ſub iiſdem partibus comprehenſo. 352.

Lemma II. Si recta linea ſecta ſit utcunque, quadratum unius

De Quantitatibus incommenſurabilibus.

PRA-

Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

De Circino proportionis.

ELE-

ELEMENTUM III.

De Quadratis in Triangulo non rectangulo, & in Parallelogrammo invicem comparatis, & de Quadrilateris circulo inſcriptis.

Theor. QUæ ſit ratio quadrati lateris obtuſo angulo oppoſiti ad duo reliqua quadrata, quæ fiunt a lateribus obtuſum angulum comprehendentibus. *pag.* 385.

Probl. In omni triangulo obtuſangulo, ſi ab angulo acuto demittatur perpendicularis in latus eidem oppoſitum productum, invenire interceptam lineam inter perpendicularem, & obtuſum angulum, vel acutum, ac præterea invenire perpendicularem ipſam. 387.

Theor. Quæ ſit ratio quadrati lateris acuto angulo oppoſiti ad duo reliqua quadrata. 388.

Coroll. I. II. Dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. 389.

Theor. In omni parallelogrammo ſumma duorum quadratorum ex diagonalibus æquatur ſummæ quatuor quadratorum ex lateribus. 390.

Theor. Si quadrilaterum circulo ſit inſcriptum, factum duarum diagonalium æquatur ſummæ factorum laterum oppoſitorum. 391.

Theor. In quadrilatero, quod circulo ſit inſcriptum, qua ratione diagonalis una aliam ſecet. 392.

LIBER IV.

De Sectionibus Rectarum geometricis.

ELEMENTUM I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis proportionalibus.

PRA-

ELEMENTUM II.

De Lineis ſectis extrema, & media ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

IN-

INDEX

Universalis Propositionum, quæ in Elementis Geometriæ Solidorum continentur.

ELEMENTUM I.

De vario Planorum inter se, & cum Lineis rectis occursu.

De occursu Planorum inter se.

ſectioni duorum planorum: eadem recta perpendicularis erit alteri plano. *pag.* 12.

Theor. Si bina plana ſibi invicem perpendicularia fuerint, & a puncto ſectionis communis ducatur recta, quæ non ſit in uno duorum planorum: eadem recta non erit perpendicularis alteri plano. 13.

De occurſu Rectarum parallelarum in planam ſuperficiem.

Axioma. Recta ſecans rectas poſitas in eodem plano, in uno eſt cum ipſis plano. 15.

Coroll. Recta ſecans rectas parallelas, in eodem eſt cum ipſis plano. *ibid.*

Theor. Rectæ, quæ ſunt eidem rectæ parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam inter ſe ſunt parallelæ. *ibid.*

Theor. Si duæ rectæ, quæ angulum comprehendant, fuerint parallelæ duabus rectis, quæ angulum pariter efficiant, erunt hujuſmodi anguli inter ſe æquales, licet non ſint in eodem plano. 16.

De Planis parallelis.

Theor. Si binas rectas quaſcunque ſecent plana parallela, eaſdem ſecabunt quoque proportionaliter. 17.

Coroll. Si planum ſecet bina plana parallela, in eorum angulis planis omnes illæ affectiones habebuntur, quæ in angulis rectilineis, ubi recta ſecat binas rectas parallelas. 18.

Elementum II.

De Angulo ſolido, de Priſmate, & Cylindro.

Def. QUid ſit Angulus ſolidus, ejuſque quantitas, & æqualitas, ac præterea rectus, acutus, obtuſus. 19.

Coroll. I. Omnes anguli ſolidi recti ſunt inter ſe æquales. 21.

Coroll.

Praxis Geometrica.

Dimenſio Priſmatum, & Cylindrorum.

Elementum III.

De Sectionibus Pyramidis, & Coni, ac de horum Solidorum affectionibus, & comparatione cum Priſmate, & Cylindro.

ſimul

Elementum IV.

De Truncis Pyramidum.

hæc

hæc duplex proportio habebitur:

I. Utì differentia duorum laterum homologorum, quæ ad duas trunci parallelas bases spectant, est ad minus latus; ita altitudo trunci est ad altitudinem pyramidis ablatæ.

II. Utì differentia duorum laterum homologorum, quæ ad duas oppositas bases pertinent, est ad majus latus; ita altitudo trunci est ad altitudinem pyramidis integræ. *pag.* 69.

Coroll. Hinc invenietur altitudo pyramidis ablatæ, & pyramidis integræ. 70.

Theor. In omni cono obtruncato ad bases parallelas, hæc duplex proportio habebitur:

I. Utì differentia radiorum basium oppositarum est ad minorem radium; ita altitudo coni truncati est ad altitudinem coni ablati.

II. Utì differentia radiorum basium oppositarum est ad majorem radium; ita altitudo coni truncati est ad altitudinem coni integri. 71.

Praxis Geometrica.

Probl. ALtitudinem obelisci, si truncus non esset, sed lateribus continuo fluxu in ultimum punctum confluentibus ad instar pyramidis excurreret, invenire. 73.

Probl. Trunci pyramidalis, aut conici duobus parallelis planis, aut circulis intercepti soliditatem invenire. 75.

Coroll. Dimensio doliorum &c. 77.

Probl. Virgam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, puta, vini, cerevisiæ &c. in vase cylindrico contenti. 78.

Probl. An praxis communiter adhiberi solita in dimetiendis vasis inæqualium basium sit errori sensibili obnoxia. 82.

Probl. Invenire soliditatem dolii. 85.

Ele-

ELEMENTUM V.

De Mensura superficierum Pyramidis, & Coni.

Theor. SUperficies pyramidis rectæ, & regularis æquatur triangulo, cujus altitudo sit æqualis altitudini trianguli cujusvis, & cujus basis sit æqualis perimetro basis pyramidis;

Vel, æquatur parallelogrammo sub eadem altitudine, & cujus basis sit semissis ejusdem perimetri. *pag.* 88.

Coroll. Hinc dimensio ejusdem. 89.

Coroll. Semisumma perimetri basium oppositarum ducta in altitudinem superficiei, dabit superficiem trunci pyramidalis regularis inter duas bases parallelas, non comprehensis basibus. 92.

Coroll. Hinc superficies coni recti, & ejusdem truncati ad bases parallelas. 94.

Theor. Superficies coni recti est ad superficiem circuli baseos, utì altitudo suæ superficiei est ad radium ejusdem circuli. 95.

Theor. Superficies circuli, cujus radius sit medius proportionalis inter altitudinem superficiei conicæ, & radium basis coni, æquatur superficiei ejusdem coni. 96.

ELEMENTUM VI.

De Sphæra.

Def. QUid sit Sphæra, Centrum, Radius &c., genesis, ac compositio sphæræ, Sector &c. 99.

Lemma I. Si cylindrus rectus sphæræ circumscribatur, & utriusque convexa superficies secetur planis basi cylindri parallelis, & intervallis infinitè parvis, zonæ elementares utriusque convexæ superficiei erunt numero æquales. 103.

Lemma II. Iisdem stantibus, zonæ elementares utrinque de-

De Sphæræ Soliditate.

ELE-

ELEMENTUM VII.

De Ratione Superficierum, & Solidorum in Corporibus similibus.

PRA-

De Transformatione Figurarum ſolidarum in alias Figuras ſolidas.

De Circino proportionis, ac de uſu Lineæ Stereometricæ, ſeu ſolidorum, & Metallicæ.

De Linea Metallica.

Diſſertatio de Methodo Geometrica.

De Methodo Exhauſtionum.

Lemma I. Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt,

De Methodo Indiviſibilium.

De Methodo Exhauſtionum ab antiquis Geometris adhibita, Euclide, & Archimede.

De Methodo Newtoniana evaneſcentium diviſibilium, ſive rationum primarum, & ultimarum.

FINIS.