Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO ESTADISTICA MATEMATICA

Sobre la aplicación de las funciones de Bessel en probabilidad y campos aleatorios con espacio paramétrico de Hilbert.

TESIS DOCTORAL

GRANADA 1977

César Rodríguez Ortíz

n

SOBRE LA APLICACION DE LAS FUNCIONES DE BESSEL EN PROBABILIDAD Y CAMPOS ALEATORIOS CON ESPACIO PARAMETRICO DE HILBERT.

MEMORIA que para optar al grado de Doctor presenta el licenciado en Ciencias Matemáticas D. César Rodriguez Ortiz.

DIRECTOR DE LA MEMORIA

Prof. Dr. D. Ramón Gutierrez Jaimez

VºBº

UNIVERSIDAD DE GRANADA. FACULTAD DE CIENCIAS

Mi agradecimiento

A D. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ, profesor agregado del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, director de ésta memoria, sin cuya colaboración y estímulo no hubiera sido concluida.

A D. ALFONSO GUIRAUM MARTIN, Director de dicho Departamento por sus contínuos ánimos y facilidades de todo tipo.

A los Doctores : D. RAFAEL HERRERIAS PLEGUEZUELO, D. ELIAS MORENO BAS y D. MIGUEL DELGADO CALVO-FLORES, por su desinteresada ayuda.

A mi estimado amigo y compañero del Departamento de Estadística Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga D. JUAN IGNACIO DOMINGUEZ MARTINEZ.

SOBRE LAS FUNCIONES DE BESSEL EN PROBABILIDAD

Y CAMPOS ALEATORIOS CON ESPACIO PARAMETRICO

DE HILBERT.

A MI ESPOSA E HIJAS

I N D I C E

CAPITULO III

Funciones aleatorias de Bessel.

CAPITULO IV.

Campos aleatorios con espacio paramétrico de Hilbert.

INTRODUCCION GENERAL.

Es bien conocido, que las funciones de Bessel aparecen en muchas cuestiones en teoría de la difusión, teoría de colas, potencial, campos aleatorios y otras muchas cuestiones en Probabilidad y Procesos Estocásticos. No sólo la diversidad de las materias, sino tambien la profusión con - que en cada una de ellas, tales funciones aparecen, hacen - del todo imposible un estudio exhaustivo del tema. Debido a ésto, hemos centrado el presente trabajo en dos temas, que por otra parte son , quizás, hoy día, los más importantes - dentro del amplio marco probabilístico en el que las funciones de Bessel aparecen; a saber:

i).- Distribuciones de Bessel.

ii).- Campos aleatorios.

i).- Generalmente, las funciones de Bessel, aparecen en muchas soluciones explícitas concernientes a cuestiones diversas de las teorías que al principio se refirieron. Usualmente, éstas soluciones, representan distribuciones de probabilidad (denominadas de Bessel por envolver a tales funciones) y la teoría requerida para su obtención y estudio,- necesita de diversos recursos analíticos complicados. La -

sistematización de la obtención de éstas distribuciones (y otras muchas más), fué iniciada por W. Feller (ref. (15)) mediante "procedimientos de aleatorización", dando tres ejemplos de ellas, que aquí denominamos por el problema probabilístico que da lugar a ellas: a). Aleatorización de densidades gamma; b). Aleatorización de recorridos aleatorios; c). Primeros Pasos . (Cap. II pag. 45 a 51).

Los anteriores ejemplos juegan un papel esencial en ésta parte del trabajo. Nuestros objetivos en ella son:

i.1).- Dar un "método constructivo" de distribuciones de Bessel, (cap. III, apartados III.1 y III.2). Fundamentalmente, un hecho nos ha llevado a tal método, condensado en las definiciones I y II de III.2: Hemos probado que las distribuciones a). b). y c). vienen dadas por soluciones de una ecuación diferencial tipo (ecuación (4) de III.1). Por otro lado, las distribuciones de Bessel, dependen del orden de la función de Bessel que envuelven, parámetro, p, de la distribución, que se mueve en un subconjunto U de R, lo que nos conducirá a funciones aleatorias, que denominamos de Bessel.

Una de las ventajas de conocer la ecuación diferencial generatriz de una familia de distribuciones, es que por sucesivas complicaciones (complicando por ejemplo los coeficientes o pasando a derivadas parciales) pueden - generarse distribuciones cada vez más complejas (por ejemplo, generar distribuciones multidimensionales asociadas a la familia en cuestión)*.

Este objetivo, que como hemos indicado, es conocido hoy día en forma muy completa para la familia de Pearson, no ha sido considerado en la bibliografía, para distribuciones relacionadas con las funciones de Bessel.

El método constructivo, que en los primeros puntos del capítulo III se desarrolla, permitirá pués, la obtención de nuevas distribuciones de Bessel, como la dada en el ejemplo c). de III.2, por nosotros encontrada. Ahora bien, dada una distribución, obtenida por el método general, no - siempre resulta fácil encontrar variables aleatorias que obedezcan a tal distribución. Los ejemplos de Feller, son -- tres problemas probabilísticos diferentes, que responden a sendas distribuciones encontradas por el método constructivo general. De aquí su importancia.-

i.2).- Como consecuencia de lo dicho en lo que antecede, una aspiración lógica, será encontrar problemas probabilísticos, resueltos mediante distribuciones de Bessel. A ello

* Por ejemplo, para la familia de Pearson vease K. Roy: An extension of the Pearson systems of frequency curves. Trab. Est. e I. O. vol XXII - cuad. 1 y 2 pag. 113-123.

dedicamos el punto III.2. Distribuciones semejantes a las ya referidas y algunas otras, son obtenidas por procedi-- mientos bien distintos al de aleatorización, encontrándose entre otras y siguiendo el criterio de denominar la -- distribución por el problema probabilístico que da lugar a ella, las : d). Simetrizada de Poisson; e). Diferencia de dos variables aleatorias de Poisson; f). Sumas - aleatorias, ya utilizadas por algunos autores.

Se hace un estudio exhaustivo de las distribuciones de Bessel que responden a problemas probabilísticos - conocidos (momentos, funciones características, infinita divisibilidad, estabilidad, etc), encontrándose resultados de interés probabilístico, como por ejemplo, la distribución (b.1), (pag. 9o), es la distribución normal asociada a un movimiento Browniano, lo cual se deduce des- - pués del análisis de la estabilidad.

Diversas cuestiones, sobre las distribuciones -- que nos ocupan, aparecen propuestas en algunos textos (lo que se señalará en su debido momento), resolviéndose aquí dichas cuestiones, dándose por otra parte nuevas demostraciones de otras, sistematizándose resultados conocidos -- dispersos, junto con los nuevos, dentro del contexto del proceso constructivo que aquí se da.

Por todo ello, ésta parte del trabajo se ha organizado en los capítulos II y III, dándose en el primero de ellos, junto con los ejemplos de Feller, el procedimiento general de aleatorización, en sus primeros puntos. En el apartado 6º de éste mismo capítulo, se hace un estudio de la difusión en varias dimensiones, análogo al que para $n = 2$ se hace en Feller tomo II (ref. (15)), haciendo uso de un sistema de coordenadas polares en R^n, cuya construcción recursiva se detalla en el capítulo IV (pag. 147), poniéndose de manifiesto para $n \geq 2$, la aparición de las funciones modificadas de Bessel, en las densidades de transición de un proceso, denominado de Bessel, cuya variable es la distancia al origen. Por último, el capítulo III, se dedica al estudio de las funciones aleatorias y distribuciones de Bessel, que ya hemos relatado. En él se condensan los resultados más originales de ésta parte. —

ii).- En muchas ocasiones, resulta necesaria la consideración de familias de variables aleatorias, con espacio paramétrico multidimensional. Por ejemplo, en algunos problemas concernientes a la propagación de ondas electromagnéticas a través de un campo aleatorio, el espacio paramétrico natural es R^4. El término "campo aleatorio", suele usarse para denominar una colección de variables aleatorias, -

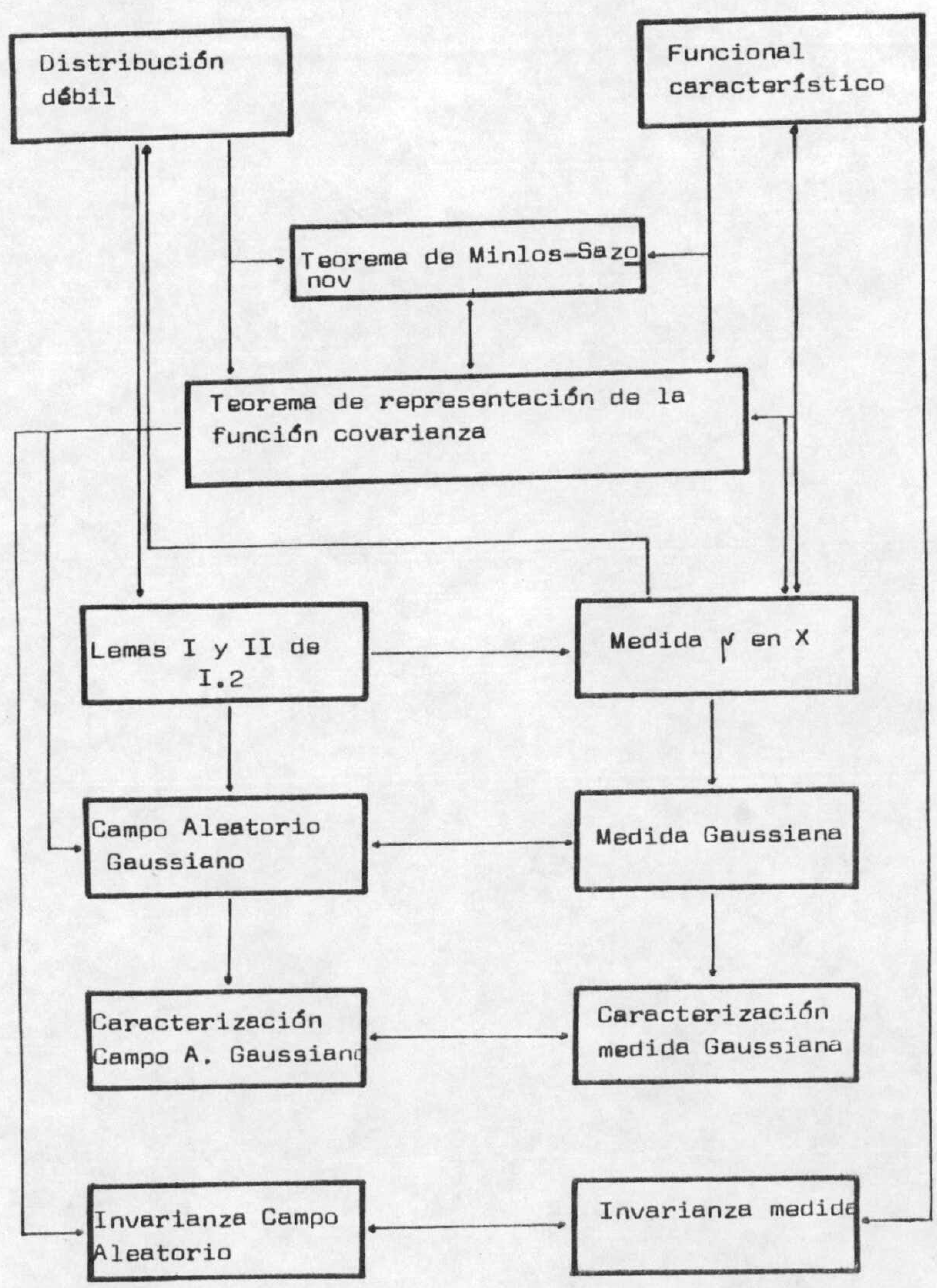
cuyo espacio paramétrico es un subconjunto de R^n. Existen, sin embargo, otros espacios paramétricos posibles. como — puede ser un espacio funcional de alguna clase (en tal caso se tendría un proceso generalizado), e incluso puede — así mismo considerarse una colección de subconjuntos de R^n, como por ejemplo en el caso de medidas aleatorias, que se utilizan en relación con la integral estocástica de segundo orden (E. Wong, ref. (7)).

En comparación con el caso unidimensional, muy po poco se conoce sobre procesos con espacios paramétricos - más generales y aunque muchos resultados con espacio paramétrico unidimensional, al no depender de la unidimensionalidad del parámetro, pueden ser fácilmente generalizados,- otros en cambio son dificilmente generalizables, debido a que dependen intrínsecamente de la geometría de R. Entre - los primeros, puede citarse el problema de la representación armónica de la función de covarianza de un proceso estacionario en sentido amplio, resuelto por el teorema representación de Bochner. Tal teorema, resulta válido, con un enuciado totalmente análogo, caso de tomar R^n como espacio paramétrico (teorema I de IV.2). Sin embargo, en caso de ser el espacio paramétrico un espacio de Hilbert, X, infinito dimensional, el teorema de Bochner ya no resulta válido. Estas consideraciones nos centran en los objeti—

vos siguientes, que pueden compendiarse en el propósito general del estudio de la representación espectral de un campo aleatorio, con espacio paramétrico de Hilbert real y separable X :

ii.1).- Representación armónica de la función covarianza de un campo aleatorio $\{X_z, z \in X\}$.

Los potentes métodos desarrollados por Skorohod - (ref. (3)), sintetizados en el capítulo I y en particular el lema II de I.2 y el teorema de Minlos-Sazonov, nos dan recursos necesarios para lograr un teorema de representación (teorema III de IV.2), quedando el de Bochner como caso particular de éste, cuando nos restringimos al caso - finito-dimensional. Una de las ventajas de éste nuevo teorema de representación es, que al identificar la función - de covarianza de un campo aleatorio homogéneo y contínuo - en media cuadrática con el funcional característico de una medida en el espacio medible de Hilbert (X,B), (cap. I, sec. I.2)pueden trasladarse a aquellos campos las propiedades que se deducen de éstos funcionales. Así por ejemplo,- las propiedades de invarianza de un campo aleatorio, estan íntimamente ligadas a las invarianzas de la medida determinada en (X,B) por la función covarianza del campo y obviamente, una caracterización de un tipo de medidas (por ejem plo Gaussianas), conduce a una caracterización de un tipo de campos (Gaussianos). Esto, junto con el objetivo que a continuación pasaremos a explicar, justifica los distintos puntos que se incluyen en el capítulo I y su incidencia con el capítulo IV, queda esquematizada en el siguiente cuadro



ii.2).- El segundo problema que abordamos en ésta parte, consiste, en en encontrar una versión isotrópica del teorema de representación III de IV.2, que nos permita determinar "la medida espectral" de un campo aleatorio "homogéneo e isotrópico". En la solución que proponemos, tal medida viene determinada a través de funciones de Bessel. - Ahora bien, puesto que para la definición del funcional - característico de una medida en (X,B), es suficiente conocer a ésta para un subespacio finito dimensional, L, el - índice de las funciones de Bessel depende de la dimensión del subespacio, L, elegido para determinarla (ésto se verá). La medida espectral que proponemos (teorema I de -- IV.5), con el fin de dar un criterio fijo, será la correspondiente a la función de Bessel de orden cero.

Son fundamentos indispensables para el logro de - éste resultado, los conceptos de funcional característico, distribución débil y otros que rápidamente pueden visualizarse en el esquema del apartado I.1, así como la construción de un sistema de coordenadas polares en L_n, útil también, como ya se ha dicho, en el proceso de Bessel. ---

Como puede comprobarse, por lo anteriormente expuesto, el capítulo I es la herramienta fundamental en éste trabajo, en lo que concierne a campos aleatorios. En él se esquematizan los dos caminos básicos para la construc - ción de medidas en el espacio de Hilbert X, real y separable, que se utilizará a lo largo del capítulo IV: 1). A -- partir del concepto de distribución débil, debido a Wiener; 2). Basado en el concepto de funcional característico, introducido por Kolmogorov en los espacios de Banach.

La dificultad principal del primer camino, estriba en que si bien dada una medida en (X,B), siempre puede construirse una distribución débil, no puede afirmarse, -- salvo bajo ciertas condiciones, lo contrario; es decir, -- que a cada distribución débil μ_* , le corresponda una medida μ en (X,B). Las restricciones bajo las cuales ésto ocurre, vienen dadas por los lemas I y II de I.2. El estudio de una medida en (X,B) a partir de su funcional característico es, bajo el punto de vista del Cálculo de Probabilidades, de mayor uso, fundamentalmente en lo que respecta a - medidas Gaussianas. El teorema I de I.4, recientemente obtenido por Kannan-Kannappan (ref. (4)), nos proporciona una caracterización de medidas Gaussianas en (X,B), Así -- mismo, se da una ecuación funcional para densidades (derivadas de Radon-Nikodym), debida a los mismos autores, analizándose su analogía con la ecuación funcional dada para los funcionales característicos.

C A P I T U L O   I

Construcción de medidas en espacios de Hilbert. Caracterización de medidas Gaussianas.

I.1. INTRODUCCION.

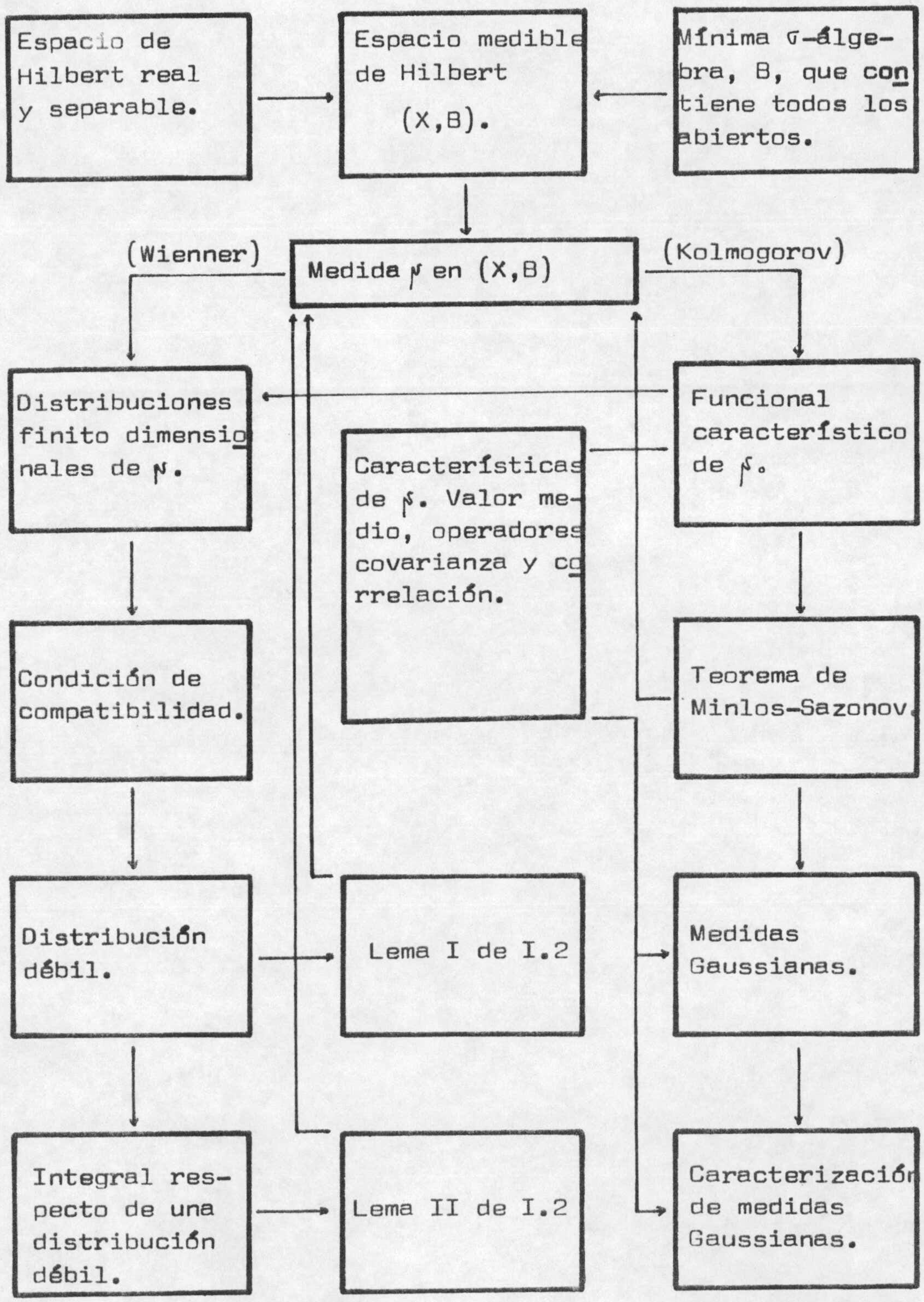
En éste primer capítulo, se desarrollan con detalle dos caminos básicos para la construcción de medidas en un espacio de Hilbert, X, real y separable. El primero de ellos, a partir del concepto de distribución débil, debido a Wienner y el segundo, basado en la noción de funcional característico, introducida por A. N. Kolmogorov en los espacios de Banach. Las medidas en (X,B), (espacio medible de Hilbert), se designan por μ ó ν , con o sin subíndices.

Como pone de manifiesto el cuadro que figura en la introducción general, los distintos puntos que en éste capítulo se desarrollan, son la herramienta fundamental para el estudio que en el capítulo IV se hace, sobre campos aleatorios cuyo espacio paramétrico es X.

Los lemas I y II, junto con el teorema de Minlos-Sazonov, fundamentalmente éste último, resuelven el problema de la construcción de medidas en (X,B).

El estudio de la caracterización de la distribución de Gauss, fué iniciado por M. Kac y S. Bernstein. En 1.939, varios autores (Darmois, Linnik, Marcinkiwicz, Prokhorov, Skitovich, etc), caracterizaron la distribución normal mediante formas lineales independientes. Kac encontró una ecuación funcional satisfecha por las funciones ca racterísticas de las variables y Corwin, mediante una -ecuación funcional satisfecha por las transformadas de ---Fourier-Stieltjes, da una caracterización de las medidas -Gaussianas en R^n. En la sección I.4, recogiendo un reciente trabajo de Kannan-Kannappan, damos una condición necesa ria y suficiente para que una medida en (X,B) sea Gaussiana, extendiendo a X los resultados de Corwin . Así mismo,-se da una ecuación funcional, encontrada por los autores -antes citados, para las derivadas de Radon-Nikodym.

El esquema siguiente, sintetiza el capítulo, dando una visión general de sus distintos puntos y la conexión entre ellos.


Espacio de Hilbert real y separable.
Espacio medible de Hilbert (X,B).
Mínima σ-álgebra, B, que contiene todos los abiertos.
(Wienner)
Medida μ en (X,B)
(Kolmogorov)
Distribuciones finito dimensionales de μ.
Funcional característico de μ.
Características de μ. Valor medio, operadores covarianza y correlación.
Condición de compatibilidad.
Teorema de Minlos-Sazonov.
Distribución débil.
Lema I de I.2
Medidas Gaussianas.
Integral respecto de una distribución débil.
Lema II de I.2
Caracterización de medidas Gaussianas.

I.2. ESPACIOS MEDIBLES DE HILBERT.

Sea X un espacio de Hilbert real y separable y B el σ-álgebra de conjuntos de Borel en X, esto es, la mínima σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a todos los abiertos, (en virtud de la separabilidad, es suficiente que contenga - todas las esferas). La pareja (X,B) será por definición un - espacio medible de Hilbert.

Dada una medida normalizada en (X,B), "μ", para cada subespacio finito dimensional L de X es posible considerar - la restricción de esta medida "μ" a la σ-álgebra de conjuntos cilíndricos engendrada por el proyector ortogonal P_L y que - denominaremos B_L. Esto hace posible definir una medida "μ_L"- sobre (L,B_L) como sigue

$$(1) \qquad \forall A \in B_L, \qquad \mu_L(A) = \mu(\{x: P_L x \in A\})$$

es decir, la medida de A es la del cilindro que se proyecta por P_L sobre A.

El hecho de que μ_L sea en efecto una medida se sigue de que si A_n $(n=1,2,\ldots)$ es una sucesión de conjuntos - de B_L tales que $\bigcap A_n = \emptyset$, los conjuntos

$$P_L^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n P_L^{-1}(A_n) \ , \quad P_L^{-1}(A_n) = \{x: P_L(x) \in A_n\},$$

tambien verifican $\bigcap P_L^{-1}(A_n) = \emptyset$.

Entonces, dada una medida μ en X tenemos asociada a ella el conjunto $\{\mu_L\}$ de todas sus proyecciones sobre los subespacios finito dimensionales de X. A este conjunto se le conoce por distribuciones finito dimensionales de la medida μ.

Por otra parte, conocida μ_L en L se conoce μ en B_L, así que si $\{L_n\}$ es una sucesión de subespacios lineales finito dimensionales, $L_n \subset L_{n+1}$, tales que $\bigcup_n L_n$ es denso en X, conocidas las μ_{L_n} podemos determinar μ en $\bigcup_n B_{L_n}$ y puesto que la clausura de este álgebra coincide con B, puede definirse μ en B de la misma forma. Es decir: conocidas $\{\mu_L\}$ o $\{\mu_{L_n}\}$ puede restablecerse μ en X de forma única.

Siendo las medidas μ_{L_n} proyecciones de la medida μ, deben de ser, para distintos n, compatibles en cierto sentido. Esta condición de compatibilidad proviene del hecho de que la base de un conjunto cilíndrico puede ser elegida de distintas formas. Así, si $L_1 \subset L_2$ y $A \in B_{L_1}$, el conjunto $P_{L_1}^{-1}(A)$ puede tambien escribirse $P_{L_2}^{-1}(A_2)$, donde

$$A_2 = \{x\colon\ x \in L_2,\ P_{L_1} x \in A\}.$$

Entonces $P_{L_1}^{-1}(A) = P_{L_2}^{-1}(A)$ y tendremos

$$\mu_{L_1}(A) = \mu(P_{L_1}^{-1}(A)) = \mu(P_{L_2}^{-1}(A_2)) = \mu_{L_2}(A_2)$$

y puesto que $A_2 = P_{L_1}^{-1}(A) \cap L_2$, la condición de compatibili -

dad puede escribirse

$$(2) \qquad \mu_{L_1}(A) = \mu_{L_2}(P_{L_1}^{-1}(A) \cap L_2).$$

La familia de medidas $\{\mu_L\}$ definida para todos los subespacios finito dimensionales L de X, satisfaciendo la condición de compatibilidad (2), se le denomina <u>distribución débil</u>.

Sea ahora una sucesión $\{L_n\}$ de subespacios, $L_n \subset L_{n+1}$, $\cup L_n$ denso en X y una sucesión de medidas μ_{L_n} en B_{L_n} satisfaciendo la condición

$$(3) \qquad \mu_{L_n}(A) = \mu_{L_{n+1}}(P_{L_n}^{-1}(A) \cap L_{n+1}).$$

A $\{\mu_{L_n}\}$ se le conoce por <u>sucesión de distribuciones finito - dimensionales</u>.

Como consecuencia de lo anterior, a cada medida - en (X,B), le corresponde una distribución débil y a distintas medidas corresponden distintas distribuciones débiles.- El problema de definir una medida en (X,B) con ayuda de las distribuciones débiles, sería fácil si a cada distribución débil le correspondiese alguna medida en (X,B). Desgraciadamente esto no es así. Una condición bajo la cual a una distribución débil le corresponde obligatoriamente una medida en (X,B) viene dada por el lema siguiente, cuya demostración puede verse en Skorohod (3) pag. 5.

LEMA I: Sea la esfera de radio r: $S_r = \{x: \|x\| \leq r\}$. La condición necesaria y suficiente para que una distribución débil $\mu_* = \{\mu_L\}$ sea generada por alguna medida μ en (X,B) es que $\forall \varepsilon > 0$ exista un $\eta > 0$ tal que para todo L

$$\mu_L(S_r \cap L) \geq 1-\varepsilon \qquad \text{cuando } r \geq \eta .$$

Sirviendonos del concepto de integral respecto de una distribución débil, que a continuación daremos, es posible establecer un segundo lema de utilización más frecuente y que nos permitirá determinar si una distribución débil es generada por alguna medida μ en (X,B).

Se denominan funciones cilíndricas a aquellas funciones $\varphi(x)$ que son μ_L-medibles, para algún subespacio L, finito dimensional. En otras palabras, cada función cilíndrica φ tiene la forma

$$\varphi(x) = \varphi_L(P_L x),$$

donde φ_L es una función B_L-medible y P_L el proyector ortogonal sobre L. Para una función cilíndrica no negativa, φ, se define la integral respecto de una distribución débil $\mu_* = \{\mu_L\}$ por

(4) $$\int \varphi(x)\, \mu_*(dx) = \int \varphi_L(x)\, \mu_L(dx).$$

Aunque μ_L no es única, la integral definida con res pecto a μ_* está unívocamente determinada, ya que fácilmente se comprueba que el segundo miembro en (4) no depende de la elección de L (Skorohod pag. 6).

Aunque es posible encontrar una clase de funciones integrables respecto de μ_* (vease (3)), para nuestros fines nos basta con lo expuesto. Con ello estamos en condiciones de enunciar el segundo lema al que hacíamos mención y que proporciona una condición necesaria y suficiente, que será de gran utilidad en el capítulo IV , para que una distribución débil sea generada por alguna medida. Su demostración puede verse en Skorohod pag. 9.

LEMA II: La condición necesaria y suficiente para que una distribución débil, $\mu_* = \{\mu_L\}$, sea generada por una medida μ en (X,B) es que

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \exp\{-\varepsilon(x,x)\}\, \mu_*(dx) = 1.$$

I.3. FUNCIONAL CARACTERISTICO DE UNA MEDIDA.

Sea μ una medida normalizada en (X,B). La función complejo valuada $\exp\{i(z,x)\}$, está evidentemente acotada y es B-medible con lo que la integral

$$\theta(z) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx) ,$$

está definida para todo $z \in X$. Esta función satisface las con diciones: a). $\theta(o) = 1$; b). Es contínua; c). Es definida positiva, es decir, para un conjunto arbitrario de vectores de X, $z_1, z_2, \ldots, z_N$

$$\sum_{j,k=1}^{N} \theta(z_j - z_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k \geq o \ , \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in C \ ,$$

puesto que

$$\sum_{j,k=1}^{N} \theta(z_j - z_k)\alpha_j\bar{\alpha}_k = \int \Big| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \exp\{i(z,x)\}\Big|^2 \mu(dx).$$

A la función $\theta(z)$ se la conoce por funcional característico de la medida μ y se distingue por el hecho de determinar unívocamente la medida μ. Esto es consecuencia de que para todo subespacio finito dimensional L y para todo $z \in L$

$$\int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx) = \int \exp\{i(z,P_L x)\}\mu(dx) =$$

$$= \int \exp\{i(z,x)\}\mu_L(dx),$$

es decir, $\theta(z)$ determina la transformada de Fourier de μ_L, que a su vez está determinada de forma única por dicha transformación. En consecuencia el funcional característico $\theta(z)$ determina todas las distribuciones finito dimensionales $\{\mu_L\}$, que a su vez pueden determinar a μ.

Observese que para la definición de $\theta(z)$ es sufi -

ciente conocer μ_L simplemente para un subespacio L unidi - mensional. Así, si $L_z = Rz$, $z \in X$, se tiene

$$\int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx) = \int \exp\{i(z,P_{L_z} x)\}\mu(dx)$$

$$= \int \exp\{i(z,x)\}\mu_{L_z}(dx),$$

quedando la medida μ definida por sus distribuciones unidi mensionales, es decir, por sus proyecciones sobre los sub - espacios unidimensionales.

Consideremos ahora una función $\theta(z)$ que satisfaga las condiciones a), b) y c). Consecuentemente en cada sub - espacio finito dimensional L, $\theta(z)$ es definida positiva y - contínua y $\forall z \in L$, por el teorema de Bochner es representa ble en la forma

$$(1) \qquad \theta(z) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu_L(dx)$$

donde μ_L es alguna medida en (L, B_L), para la cual $\mu_L(L) =$ $= \theta(o) = 1$, como consecuencia de a). Además las medidas μ_{L_1} y μ_{L_2}, $L_1 \subset L_2$, son compatibles como fácilmente puede comprobarse. De aquí que a toda función $\theta(z)$, con las condicio nes a), b), c), le corresponde una familia compatible de - distribuciones finito dimensionales $\{\mu_L\}$, de forma que se verifica (1). Esto es, a $\theta(z)$ le corresponde una distribu - ción débil. Ya que $\exp\{i(z,x)\}$ es una función cilíndrica,--

puede definirse, para toda distribución débil, la función

$$\theta(z) = \int \exp\{i(z,x)\} \mu_*(dx) .$$

Esta función satisface las condiciones a) y c) y en lugar de b), la b'): $\theta(z)$ es contínua en todo subespacio finito dimensional L. A la función $\theta(z)$ así definida se le conoce por -- funcional característico de la distribución débil.

Los funcionales característicos de una medida y de una distribución débil, se utilizan para construir familias de distribuciones finito dimensionales. Sin embargo no puede asociarse una medida a todo funcional que satisfaga las condiciones a), b), c); sino que son necesarias otras con-- diciones adicionales especificadas en el teorema de Minlos--Sazonov, que nos da una condición necesaria y suficiente - para que una función $\theta(z)$, definida en X, sea el funcional característico de una medida y que como después veremos -- constituyeuna generalización del teorema de Bochner para -- funciones definidas positivas en los espacios de Hilbert. - Antes de ello veremos algunas otras características de una medida.

Se denomina función momento de orden N de la medida μ, a la integral

$$\int (z_1,x)\ldots(z_N,x)\mu(dx) = \sigma_N(z_1,\ldots,z_N)$$

cuando ésta existe para todos $z_1, z_2, \ldots, z_N \in X$. Es fácil comprobar, que el momento funcional de orden N es simétrico, aditivo y homogéneo en cada argumento:

$$\sigma_N(\ell_1 z_1' + \ell_2 z_1'', \ldots, z_N)$$
$$= \ell_1 \sigma_N(z_1', \ldots, z_N) + \ell_2 \sigma_N(z_1'', \ldots, z_N),$$

implicando la simetría, la aditividad y homogeneidad en -- los restantes argumentos. Así mismo, se demuestra que el momento funcional de orden N, de una medida μ, es una forma N-lineal acotada (Skorohod pag. 13).

Los momentos funcionales, pueden ser expresados mediante el funcional característico $\theta(z)$ de la medida, como sigue: Se denomina <u>N-sima derivada débil</u> de $\theta(z)$, a la forma N-lineal en $(z_1, \ldots, z_N)$

(2) $$\theta^{(N)}(z; z_1, \ldots, z_N) =$$
$$= \frac{\partial^N}{\partial \ell_1 \cdots \partial \ell_N} \theta\left(z + \sum_1^N \ell_k z_k\right) \Bigg|_{\ell_1 = \ldots = \ell_N = 0.}$$

Si el momento de orden N de la medida μ existe, se tiene la relación

(3) $$\theta^{(N)}(o, z_1, \ldots, z_N) = i^N \sigma_N(z_1, \ldots, z_N).$$

Los dos primeros momentos tienen gran número de aplicaciones. Si $\sigma_1(z)$ existe, es un funcional lineal en X,

$$\sigma_1(z) = \int (z,x)\mu(dx), \quad \forall z \in X,$$

por tanto, existe un vector "a", tal que

$$\sigma_1(z) = (a,z).$$

A éste vector "a", se le denomina <u>valor medio de la medida</u> μ.

Si el momento funcional de segundo orden existe, - es una forma bilineal

$$\sigma_2(z_1,z_2) = \int (z_1,x)(z_2,x)\ \mu(dx),$$

por lo que existe un operador lineal, simétrico y acotado,- "A_1", definido sobre X y tal que

$$\sigma_2(z_1,z_2) = (A_1 z_1, z_2).$$

A "A_1" se le conoce por <u>operador covarianza de la medida</u> μ.

Resulta de mayor utilidad el <u>operador correlación "A" de la medida</u> μ, definido por la relación

$$(Az_1,z_2) = \sigma_2(z_1,z_2) - \sigma_1(z_1)\sigma_1(z_2) =$$

$$= \int (x-a, z_1)(x-a, z_2)\mu(dx).$$

Resulta fácil comprobar, que tanto el operador covarianza como el operador correlación de la medida μ, son no negativos.

Pasamos ahora al teorema de Minlos-Sazonov, cuya demostración puede verse en Skorohod pag. 15.

TEOREMA I: Sea $\theta(z)$ una función, definida en X, complejo valuada, contínua y definida positiva. La condición necesaria y suficiente para que $\theta(z)$ sea el funcional característico de una medida μ en (X,B) es que $\forall \varepsilon > 0$, pueda encontrarse un operador nuclear S_ε tal que $Re(\theta(0) - \theta(z)) < \varepsilon$, cuando $(S_\varepsilon z, z) < 1$.

Se entiende por operador nuclear, un operador simétrico, no negativo y de traza finita.

Para la demostración del teorema I, resulta esencial el lema siguiente:

LEMAI: Si μ es una medida en (X,B) tal que

$$\int \|x\|^2 \mu(dx) < \infty,$$

entonces el operador covarianza "A_1" es nuclear y

$$trA_1 = \int \|x\|^2 \mu(dx).$$

En efecto, para todo sistema ortonormal completo - $\{e_k\}$ de X, por la definición de A_1, se verifica:

$$\sum_{k=1}^{N} \sigma_2(e_k,e_k) = \sum_{k=1}^{N} (A_1 e_k, e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int (x,e_k)^2 \mu(dx)$$

y pasando al límite cuando N tiende a infinito, resulta la proposición.

I.4. MEDIDAS GAUSSIANAS.

Las medidas Gaussianas en espacios finito dimensionales, constituyen quizás la clase mas simple de medidas -- que pueden extenderse a espacios de Hilbert (esta extensión no es posible, como se sabe, para la medida de Lebesgue), - por lo que han sido extensamente estudiadas en teoría de - Probabilidades. El estudio de la caracterización de éstas - medidas fué iniciada por M. Kac y S. Bernstein (M. Kac, On Characterization of the Normal Distribution. Amer. J. Math., vol. 61, 1.939, pag.726-728), recogiendo trabajos de autores como Darmois, Linnik, Marcinkiwich, Prokhorov, Skitovich -- (que en 1.939 caracterizaron la distribución normal mediante formas lineales). Recientemente, Corwin ha dado una caracterización de medidas Gaussianas en R^n(L. Corwin, Generalized Gaussian meassures and a " Funtional equation", III -

advances in Math. vol. 6, 1.971. p. 239-251).

Una medida en (X,B) diremos que es Gaussiana, si su funcional característico es de la forma

$$(1) \qquad \theta(z) = \exp\{i(a,z) - \frac{1}{2}(Az,z)\},$$

donde $a \in X$ y A es un operador en X, simétrico, acotado y no negativo.

Después del teorema de Minlos-Sazonov, resulta fácil comprobar que $\theta(z)$ será el funcional característico de alguna medida μ en (X,B), si el operador A es nuclear.

Veamos que "a" y "A" son respectivamente el valor medio y el operador correlación de la medida μ. Se tiene:

a). $\theta'(o,z) = i(a,z)$

b). $\theta''(o,z_1,z_2) = -((a,z_1)(a,z_2) + (Az_1,z_2)$

y de aquí

a). $\sigma_1(z) = (a,z) = \frac{1}{i}\, \theta'(o,z)$

b). $\sigma_2(z_1,z_2) = (a,z_1)(a,z_2) + (Az_1,z_2) =$

$$= \frac{\theta^{(2)}(o,z_1,z_2)}{i^2} = (Az_1,z_2) =$$

$$= \sigma_2(z_1,z_2) - \sigma_1(z_1)\sigma_2(z_2).$$

De la definición (1) se sigue, que las proyecciones, μ_L, sobre los subespacios finito dimensionales L, de una medida Gaussiana, son tambien Gaussianas. De aquí que puedan elegirse las proyecciones sobre un conjunto de subespacios finito dimensionales, de forma que determinen completamente la medida y la estructura de ésta queda así simplificada.

La condición necesaria y suficiente para que una medida en (X,B) sea Gaussiana, debida a Kannan y Kannappan (4), que damos a continuación, generaliza la de Corwin y aunque en la demostración se utilizan algunos pasos de la demostración de Corwin, difieren fundamentalmente en la mayor parte. En lo que sigue se consideran medidas de probabilidad Gaussianas centradas, lo que ocurre cuando a = o y su funcional característico tiene por consiguiente la forma

$$(2) \qquad \theta(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\}.$$

Recordamos que una medida normalizada se dice Gaussiana, si cada funcional lineal acotado $F_z(x) = (z,x)$, es una variable aleatoria Gaussiana. Por otra parte, todas las medidas que se consideran, son medidas de segundo orden, esto es, tales que $\int \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$, que como se sabe por el lema I de I.3, es la condición necesaria y suficiente para que el operador covarianza de μ sea nuclear.

Se consideran tres operadores lineales, S, T y A,-

definidos en X, simétricos, acotados y mutuamente conmutativos. Se supone tambien que S, T y (S^2+T^2) son invertibles y que A es nuclear. Se denotará por U a $(S^2+T^2)^{-1}$. Por último se define una aplicación $f: X\times X \longrightarrow X\times X$ por

$$f(x,y) = (Sx+Ty, Tx-Sy).$$

Establecidas éstas premisas puede enunciarse el teorema siguiente:

<u>TEOREMA I</u> (Kannan-Kannappan): Una medida μ en (X,B) es Gaussiana, con operador covarianza "A", si y sólo si existe una medida ν en (X,B) tal que para $B \in B\otimes B$,

$$(\mu\times\mu)(B) = (\nu\times\nu)(f(B)).$$

La demostración del teorema puede verse en (4) y estriba fundamentalmente en verificar las ecuaciones funcionales

$$(4) \qquad \Theta(x)\Theta(y) = \Psi(U(Sx+Ty))\,\Psi\,(U(Tx-Sy))$$

$$(5) \qquad \Psi\,(x)\,\Psi\,(y) = \Theta(Sx+Ty)\Theta(Tx-Sy),$$

donde $\Theta(z)$ es el funcional característico de una medida Gaussiana centrada en (X,B), con operador covarianza A. Por consiguiente

(6) $$\theta(z) = \exp\{-\frac{1}{2}(Az,z)\},$$

Ψ es la función definida por

$$\Psi(z) = \theta(Sz)\theta(Tz).$$

Fácilmente se tiene entonces

$$\Psi(z) = \exp\{-\frac{1}{2}(A(S^2+T^2)x,x)\},$$

lo que prueba que $\Psi(z)$ es el funcional característico de una medida ν en (X,B).

Es posible hacer ahora la siguiente generalización del teorema I (tal generalización aparece ya inserta en la demostración del teorema anterior de Kannan-Kannapan en el artículo (4), como un aparte o comentario. Nosotros la enunciamos aquí como un nuevo teorema):

<u>TEOREMA II</u>. Una medida μ en (X,B) es Gaussiana, con operador covarianza "A", si y sólo si existen medidas ν_1 y ν_2 en -- (X,B), tales que para $B \in B \otimes B$

(7) $$(\mu\times\mu)(B) = (\nu_1\times\nu_2)(f(B)).$$

La demostración de éste teorema es paralela a la - anterior, por lo que no se entra en detalles, salvo en de-- mostrarque la ecuación funcional básica (5) sigue verifican dose en éste caso. Para verlo, supongamos que Ψ_i, i = 1, 2, sea el funcional característico de ν_i, i = 1,2. Entonces, evidentemente

$$(8) \qquad \Psi_1(x)\Psi_2(y) = \theta(Sx+Ty)\theta(Tx-Sy),$$

y teniendo en cuenta que $\theta(o) = 1 = \Psi_i(o)$,

$$(9) \qquad \Psi_1(x) = \theta(Sx)\theta(Tx) \quad ; \quad \Psi_2(y) = \theta(Ty)\theta(-Sy).$$

Definimos ahora

$$(1o) \qquad \xi(x) = \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_1(-x)} = \frac{\theta(Tx)}{\theta(-Tx)} .$$

De (9) y (1o) se tiene

$$\frac{\Psi_1(Tx)}{\Psi_2(Tx)} = \frac{\theta(STx)}{\theta(-STx)} = \xi(Sx)$$

y de ésta

$$(11) \qquad \xi(x) = \frac{\Psi_1(TS^{-1}x)}{\Psi_2(TS^{-1}x)} .$$

De (1o) y (11) se sigue

$$\xi(x)\xi(y) = \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_1(-x)} \times \frac{\Psi_1(TS^{-1}y)}{\Psi_2(TS^{-1}y)} = \frac{\theta(Ty+Tx)}{\theta(-Tx-Ty)} =$$

$= \xi(x + y).$

Sean

$$H(x) = \xi(-\frac{x}{2}) \quad ; \qquad F(x) = \theta(x)H(T^{-1}x) \quad ;$$

$$G(x) = \Psi_2(x)H(x)H(-T^{-1}Sx).$$

Entonces

$$F(Sx+Ty)F(Sx-Ty) = \Psi_1(x)\,\Psi_2(y)H(T^{-1}Sx+y)H(x-T^{-1}Sy) =$$

$$= G(y)\,\Psi_1(x)\,H(T^{-1}Sx)H(x) =$$

$$= G(y)\,\Psi_1(x)H(T^{-1}Sx)\,\frac{G(x)}{\Psi_2(x)}\,H(T^{-1}Sx) =$$

$$= G(y)G(x)\,\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}\,\xi(-T^{-1}Sx) = G(y)G(x).$$

Por tanto, puede encontrarse un homomorfismo H, -- tal que F y G satisfagan la ecuación funcional básica.

I.5. ECUACION FUNCIONAL PARA DENSIDADES.

Es bien conocido, que dos medidas Gaussianas en (X,B), son equivalentes u ortogonales. Basándonos en éste hecho, puede encontrarse una ecuación funcional para las densidades (derivadas de Radon Nikodyn) y ésta ecuación, obtenida por Kannan-Kannappan (4), es sorprendentemente análoga a las ecuaciones (5) y (6) del apartado anterior, satisfechas por los funcionales característicos.

Sean μ_1 y μ_2 dos medidas Gaussianas en (X,B), tales que $\mu_2 \ll \mu_1$. Se sabe que la densidad

$$\xi(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)$$

es positiva c. s., por lo que $\mu_2 \ll \mu_1$, implica que μ_1 y μ_2 son equivalentes. La no absoluta continuidad, significaría que μ_1 y μ_2 sean ortogonales (Gihman-Skorohod, T. II). De aquí que dos medidas Gaussianas son equivalentes u ortogonales.

Sean μ_i, ν_i, ℓ_i, $i = 1,2$, medidas de probabilidad en (X,B), tales que

$$\mu_2 \ll \mu_1$$

$$\left.\begin{aligned} (\mu_1\times\mu_1)(A) &= (\nu_1\times\nu_2)(f(A)) \\ (\mu_2\times\mu_2)(A) &= (\ell_1\times\ell_2)(f(A)) \end{aligned}\right. \qquad A \in B \otimes B\,.$$

Entonces μ_1 y μ_2 son dos medidas Gaussianas equivalentes. -

Sea

$$\xi(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x).$$

Si A es un conjunto nulo med. $\nu_1 \times \nu_2$, entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto nulo med. $\mu_1 \times \mu_1$ y por tanto, un conjunto nulo med. $\mu_2 \times \mu_2$, lo que implica que A es nulo med. $\ell_1 \times \ell_2$. Entonces $\ell_1 \times \ell_2 \ll \nu_1 \times \nu_2$ y

$$\frac{d(\ell_1 \times \ell_2)}{d(\nu_1 \times \nu_2)}(x,y)$$

existe. Claramente $\ell_1 \ll \nu_1$ y $\ell_2 \ll \nu_2$.

Sean

$$\eta_1(x) = \frac{d\ell_1}{d\nu_1}(x) \quad , \quad \eta_2(x) = \frac{d\ell_2}{d\nu_2}(x).$$

Entonces

$$\eta_1(x)\eta_2(y) = \frac{d(\ell_1 \times \ell_2)}{d(\nu_1 \times \nu_2)}(x,y) =$$

$$= \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(U(Sx+Ty))\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(U(Tx-Sy)) =$$

$$= \xi(U(Sx+Ty))\xi(U(Tx-Sy)).$$

Así, las densidades η_i, $i = 1, 2$ y ξ satisfacen la ecuación funcional

$$\eta_1(x)\eta_2(y) = \xi(U(Sx+Ty))\xi(U(Tx-Sy)),$$

cuya analogía con la ecuación funcional satisfecha por los funcionales característicos es manisfiesta.

C A P I T U L O   I I

Funciones de Bessel en Probabilidad y Procesos.

II.1. INTRODUCCION.

Las funciones de Bessel aparecen en muchas soluciones explícitas en teoría de difusión, teoría de colas, campos aleatorios y otras muchas cuestiones en Probabilidad y Procesos estocásticos. Usualmente, éstas soluciones representan distribuciones de probabilidad y la teoría requerida para su obtención y estudio, necesita de transformaciones como la de Laplace y otras relaciones y recursos del Análisis Matemático, un tanto complejos. Afortunadamente, las distribuciones en cuestión y otras muchas más, pueden ser obtenidas por simples procedimientos de aleatorización. De ésta forma, muchas relaciones pierden su caracter accidental, simplificándose considerablemente el estudio de tales distribuciones.

En los primeros puntos de éste capítulo, se dan tres ejemplos de lo anteriormente dicho: a). Aleatorización de densidades gamma; 2). Aleatorización de recorridos aleatorios; 3). Primeros pasos. Estos ejemplos, utilizados por W. Feller, para la obtención de distribuciones de Bessel mediante el método de aleatorización, son el punto de partida del método constuctivo que se dará en el capítulo III y su importancia, en éste trabajo, radica en el hecho de proporcionarnos tres distribuciones de Bessel, a partir de problemas probabilísticos diferentes, ya que la cues--

tión recíproca, es decir, dada una distribución de Bessel - obtenida por el método teórico general, del capítulo III, - no es siempre fácil encontrar variables aleatorias que respondan a tal distribución.

En el apartado 6º de ésta sección, se hace un estudio de la difusión en varias dimensiones, análogo al que para $n = 2$, se hace en (15), haciéndo uso de un sistema de -- coordenadas polares en R^n, cuya construcción recursiva se - detalla en el capítulo IV (pag.147), poniéndose de manifiesto, para $n \geq 2$, la aparición de las funciones modificadas de Bessel, en las densidades de transición de un proceso, - denominado de Bessel, cuya variable es la distancia al origen $r(t) = |\bar{r}(t)|$.

Recordemos que se llaman funciones de Bessel, o - tambien funciones cilíndricas, a las soluciones de la ecuación diferencial homogenea

$$(1) \qquad x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + (x^2 - p^2)y = 0 \,,$$

donde p es un parámetro real normalmente, pero que eventualmente puede ser complejo. La ecuación (1), denominada <u>ecuación diferencial de Bessel de índice p</u>, está caracterizada por el teorema siguiente:

TEOREMA: Toda ecuación diferencial de la forma

$$y''(x) + \frac{a(x)}{x}\, y'(x) + \frac{b(x)}{x^2}\, y(x) = 0,$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son analíticas en $x = o$, tienen como mínimo una solución

$$y = \sum_{m=o}^{\infty} c_m\, x^{m+r} \quad ,$$

donde r es un número cualquiera, real o complejo y $c_o \neq o$.

Encontrándose para y la expresión

$$(2) \qquad J_p(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \quad ,$$

como una solución particular de la ecuación (1), denominada función de Bessel de orden (o índice) p, de primera clase o especie (Rey Pastor- Castro, pag. 9).

Nosotros, a lo largo de éste y del siguiente capítulo, vamos a utilizar con frecuencia las funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario, de orden $p > -1$. Estas funciones, son las soluciones de la ecuación diferencial

$$(3) \qquad x^2 y''(x) + x\, y'(x) - (x^2 + p^2)y = 0 \quad ,$$

denominada <u>ecuación de Bessel modificada</u> y que se obtiene cambiando x por ix en (1). Si $J_p(x)$ es una solución de (1), $J_p(ix)$ lo será de (3) y la serie $J_p(ix)$ es la misma que $J_p(x)$, aunque no alternada, salvo en el factor i^p. Se tiene entonces

$$J_p(ix) = i^p \, I_p(x)$$

donde

$$(4) \qquad I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} ,$$

son las denominadas funciones de Bessel modificadas de orden p y son por otra parte los coeficientes de t^p, $p \in Z$, del desarrollo en serie de Laurent de la función (de Schlömilch) $\exp\{\frac{x}{2}(t + \frac{1}{t})\}$.

Pasamos ahora a describir los tres ejemplos, a los que antes hemos aludido, que nos van conducir a sendos tipos de distribuciones que contienen funciones de Bessel, después de ver el método general de aleatorización.

II.2. PROCEDIMIENTO GENERAL DE ALEATORIZACION.

Sea F una función de distribución, dependiente de un parámetro θ y u una densidad de probabilidad. Entonces

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\theta)u(\theta)d\theta$$

es una función monótona de x, creciente de 0 a 1 y por consiguiente una función de distribución. Si F tiene una densidad contínua f, W tiene tambien una densidad dada por

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)u(\theta)d\theta.$$

En lugar de integrar respecto de la densidad "u", podemos sumar respecto de una distribución de probabilidad discreta: si se eligen arbitrariamente θ_1, θ_2,.... y si $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$, entonces

$$(1) \qquad w(x) = \sum_k f(x,\theta_k)p_k,$$

define una nueva densidad de probabilidad. Este proceso en el que el parámetro θ ha sido considerado como una variable aleatoria y en el que se ha definido una nueva densidad de probabilidad en el plano (x,θ), que sirve como espacio muestral, se conoce en probabilidad por <u>aleatorización</u> y las densidades de la forma (1) se denominan <u>mixturas</u>.

Consideremos ahora la mixtura

$$(2) \qquad W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\theta)\, \mu(d\theta),$$

donde la distribución F tiene una esperanza $m(\theta)$ y una varianza $\sigma^2(\theta)$. Entonces, (2) tiene una esperanza

$$(3) \qquad a = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, W(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(d\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} xF(dx,\theta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} m(\theta)\mu(d\theta)$$

y una varianza

$$(4) \qquad b = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 W(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(d\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 F(dx,\theta)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2(\theta) + m^2(\theta) - a^2)\mu(d\theta).$$

Si en lugar de integrar respecto de $\mu(d\theta)$, se suma respecto de una distribución de probabilidad discreta $p_k = p(\theta = \theta_k)$, las expresiones (3) y (4) se transforman en

$$(3') \qquad a = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m(\theta_k)p_k$$

$$(4') \qquad b = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\sigma^2(\theta_k) + m^2(\theta_k) - a^2)p_k.$$

Por otra parte, si $\psi(\ell,\theta)$ es la transformada de Laplace de $F(x,\theta)$, (que supondremos ahora concentrada en $(0,\infty)$), la transformada de la mixtura (2) viene dada por:

$$(5) \qquad \text{T.L. } W(x) = \Psi(\ell) = \int_0^{\infty} e^{-\ell x} W(dx) =$$

$$= \int_0^{\infty} \mu(d\theta) \int_0^{\infty} e^{-\ell x} F(dx,\theta) =$$

$$= \int_0^{\infty} \Psi(\ell,\theta)\mu(d\theta),$$

y si

$$\varphi(t,\theta) = \int_0^{\infty} e^{itx} F(dx,\theta)$$

es la función característica de F, la función característica de (2) viene dada por

$$(6) \qquad \Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} W(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(d\theta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(dx,\theta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,\theta)\mu(d\theta).$$

II. 3. DENSIDADES GAMMA ALEATORIZADAS.

Consideremos ahora, para un $p > -1$ fijo, la densidad gamma

$$f_{1,\, p+k+1}(x) = \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} x^{p+k} e^{-x},$$

concentrada en (o,∞), (donde $x > o$, $p+k+1 > o$). Tomando el parámetro k como una variable aleatoria entero valuada y sujeta a una distribución de Poisson, de acuerdo con (1) en II.2, se obtiene la nueva densidad

$$w_p(x) = e^{-t} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t^k}{k!} f_{1,p+k+1}(x) =$$

$$= e^{-t-x} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t^k x^{p+k}}{k!\Gamma(p+k+1)} .$$

Poniendo en la anterior expresión

$$t^k x^{p+k} = (tx)^k x^p = \left(\frac{2\sqrt{tx}}{2}\right)^{2k} (\sqrt{tx})^p \, (\sqrt{x/t})^p =$$

$$= \left(2\,\frac{\sqrt{tx}}{2}\right)^{2k+p} \quad \left(\frac{x}{t}\right)^p ,$$

se obtiene

(2) $$w_p(x) = e^{-t-x} \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^p}\; I_p(2\sqrt{tx}).$$

Si $p > -1$, resulta inmediata la comprobación de que w es una densidad de probabilidad concentrada en (o,∞). - (Para $p = -1$, el miembro de la derecha en (2) no es integrable respecto de x).

Por ser la familia de densidades gamma cerrada para la convolución ($f_{p,q} * f_{p,r} = f_{p,q+r}$, $q > o$, $r > o$), se tiene

(3) $$w_p * f_{1,r} = w_{p+r} \, .$$

II. 4. ALEATORIZACION DE RECORRIDOS ALEATORIOS.

Es bien conocido, que si en un recorrido aleatorio, se postula que los intervalos de tiempo entre saltos consecutivos, corresponden variables aleatorias de densidad común e^{-t}, de éste recorrido aleatorio, se obtiene un proceso estocástico de tiempo contínuo. En otras palabras, los instantes de los saltos estan regulados por un proceso de Poisson, pero éstos mismos saltos, son variables aleatorias que toman los valores $+1$ y -1, con probabilidades p y q, independientes unas de las otras y del proceso de Poisson.

Para cada distribución sobre el recorrido aleatorio, puede obtenerse una distribución en el proceso de tiempo contínuo, aleatorizando formalmente el número de --

saltos. Para ver el procedimiento con detalle, considera - mos la posición en un instante dado t. En el recorrido alea torio base, el n-simo salto conduce a la posición $r \geq o$, si entre los n primeros saltos $(n + r)/2$ son positivos y ---- $(n - r)/2$ son negativos; pero ésto no es posible, salvo que $n - r = 2s$. En éste caso, la probabilidad de la posición r en el n-simo salto es

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} n \\ \frac{(n + r)}{2} \end{bmatrix} p^{(n+r)/2} q^{(n-r)/2} =$$

$$= \begin{bmatrix} r + 2s \\ r + s \end{bmatrix} p^{r + s} q^{s} .$$

La probabilidad de que en un tiempo t, hayan ocu- rrido $n = 2s + r$ saltos es $e^{-t} t^{n}/ n!$ y entonces, la proba bilidad de que en el proceso dependiente del tiempo, la po sición sea $r \geq o$ en el instante t , será

$$\sum_{s=o}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{n}}{n!} \begin{bmatrix} r + 2s \\ r + s \end{bmatrix} p^{r + s} q^{s} =$$

$$= e^{-t} \sum_{s=o}^{\infty} \frac{t^{r + 2s}}{(r + 2s)!} \begin{bmatrix} r + 2s \\ r + s \end{bmatrix} p^{r + s} q^{s} =$$

(multiplicando y dividiendo por $(p/q)^{r/2}$)

$$= (p/q)^{r/2}\, e^{-t}\, I_r(2\sqrt{pq}\, t),$$

lo que conduce a las conclusiones:

i). Teniendo en cuenta que $I_{-r} = I_r$ para $r = 1, 2, \ldots$, entonces para todos $t > 0$, p y q fijos

$$(2) \qquad a_r(t) = (p/q)^{r/2}\, e^{-t}\, I_r(2\sqrt{pq}\, t), \qquad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

representa una distribución de probabilidad, ($a_r \geq 0$, — $\sum a_r = 1$).

ii). $a_r(t)$ da la probabilidad de la posición r en el instante t, en el recorrido aleatorio.

De los resultados anteriores, pueden deducirse conocidas fórmulas para las funciones de Bessel. Por ejemplo, si en la identidad $\sum a_r(t) = 1$ se efectuan los cambios -

$$2\sqrt{pq}\, t = x \qquad ; \qquad p/q = u^2 ,$$

dicha identidad se transforma en

$$(3) \qquad \exp\left\{\frac{x}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u^k\, I_k(x) ,$$

que es la denominada fórmula de Schlömilch, debido a que -

éste autor introdujo en 1.857 las funciones de Bessel como ceficientes, en el desarrollo en serie de Laurent de u, de la función $\exp\{\frac{x}{2}(u + \frac{u}{2})\}$.

Por otra parte, las probabilidades $a_r(t)$, satisfacen la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$a_r(t + t') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t)\, a_{r-k}(t') \;,$$

que expresa el hecho de que si en el instante t la partícula ocupa la posición k, la transición de k a r es equivalente a la transición de o a $r - k$.

Volviendo ahora a la relación

$$a_k(t) = (p/q)^{k/2}\, e^{-t}\, I_k(2\sqrt{pq}\; t); \qquad p + q = 1,$$

se obtiene sin dificultad, que la ecuación de Chapman - Kolmogorov es equivalente a

$$(4) \qquad I_r(t + t') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(t) I_{r-k}(t'),$$

que es la conocida identidad de Neumann o tambien fórmula de adición de Neumann-Lommel.

II. 5. PRIMEROS PASOS.

En principio, nos restringiremos por simplicidad al caso de recorridos aleatorios simétricos, $p = q = 1/2$. En ésta situación, la probabilidad de que el primer paso a través del punto $r > o$ ocurra en el salto $2n - r$, viene dada por

$$(1) \qquad \frac{r}{2n-r}\begin{bmatrix} 2n - r \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}, \qquad n \geq r .$$

Siendo el recorrido aleatorio recurrente, tal primer paso debe ocurrir con probabilidad uno. Esto es, para cada r fijo, las cantidades (1) deben sumar la unidad.

En nuestro proceso dependiente del tiempo, el instante del k-simo salto tiene una densidad gamma $f_{1,k}$. Se sigue que el instante del primer paso por $r > o$, tiene densidad

$$v_r(t) = \sum_n \frac{r}{2n-r}\begin{bmatrix} 2n - r \\ n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n-r-1)!} t^{2n-r-1} e^{-t} =$$

$$= e^{-t} \frac{r}{t} \sum_n \frac{1}{n!(n-r)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-r} =$$

$$= e^{-t}\,\frac{r}{t}\,I_r(t),$$

con lo que obtenemos las conclusiones siguientes:

i). Para r fijo, $(r = 1,2,\ldots)$,

(2) $$v_r(t) = e^{-t}\,\frac{r}{t}\,I_r(t)\ ,$$

define una densidad de probabilidad concentrada en $(0,\infty)$.

ii). El instante del primer paso por $r > 0$, tiene una densidad dada por v_r.

Razonando de una forma similar, es fácil comprobar que los anteriores resultados resultan válidos para recorri dos aleatorios no simétricos, siempre que la probabilidad de un primer paso por $r > 0$, sea igual a uno; ésto es -- $p \geq q$. En la expresión (1), sólo cambia $(1/2)^{2n-r}$ por - $p^n q^{n-r}$, quedando para $r = 1,2,\ldots$

(3) $$v_r(t) = \left(\frac{p}{q}\right)^{r/2} e^{-t}\,\frac{r}{t}\,I_r(2\sqrt{pq}\ t)\ , \qquad p \geq q.$$

II. 6. PROCESO DE BESSEL.

Consideremos el movimiento Browniano n-dimensio-- nal normalizado

$$D = \{ \bar{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) : t \geq o,\ P_o \},$$

en el que las coordenadas de las funciones muestrales son movimientos Brownianos unidimensionales normalizados, independientes y $P_o(B)$ es la probabilidad de B, como función - del punto de partida, $\bar{r}(o)$, de la trayectoria Browniana n-dimensional.

Si B_s designa el álgebra $B(\bar{r}(\theta) : \theta \leq s)$, y - $P_{\bar{a}}(B)$ las probabilidades para las trayectorias que parten de $\bar{a} = \bar{r}(s) = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces, para $t > s$, de la independencia y caracter Markoviano de las coordenadas, (movimientos Brwnianos unidimensionales), se tiene

$$(1) \qquad P_o(\bar{r}(t) \in d\bar{b} \,/\, B_s) = P_{\bar{a}}(\bar{r}(t + s) \in d\bar{b}) =$$

$$= \frac{\exp\left\{ - \dfrac{|\bar{b} - \bar{a}|^2}{2(t-s)} \right\}}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \, d\bar{b} ,$$

donde:

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$|\bar{b} - \bar{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} \quad .$$

Puesto que el núcleo Gaussiano n-dimensional

$$q(t,\bar{a},\bar{b}) = \frac{\exp\{-|\bar{b} - \bar{a}|^2 /2(t - s)\}}{(2\pi(t - s)^{n/2}}$$

es solución fundamental de la ecuación

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = Gu$$

donde

$$G = \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial b_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial b_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial b_n^2} \right) ,$$

<u>D es un proceso de Markov simple, sujeto a la misma relación $G = \Delta/2$, que como en el caso unidimensional</u>.

La variable más interesante en éstos procesos, es la distanca, $|\bar{r}(t)|$, al origen, que después de (6a) re - sultará intuitivamente claro , es la variable de un proceso de difusión unidimensional. Para ver ésto, necesitamos expresar las densidades $q(t,\bar{a},\bar{b})$ en función de un sistema de coordenadas polares en R^n, $(|\bar{b} - \bar{a}|, \theta_1, \theta_2, \ldots ,\theta_n)$, cuya construcción puede verse en el capítulo IV, pag. 147 . S^{n-1} designará la esfera unitaria , do un elemento de área en S^{n-1} y v un vector unitario.

<u>DEFINICION</u>: Se denomina de Bessel al proceso

$$D^{+} = \{r(t) = |\bar{r}(t)| \ ; \ t \geq o \ , \ P_o\} ,$$

(= movimiento Browniano reflectante en el caso n=1. Para - el caso n = 2 vease W. Feller, T. II, pag. 344).

Después de (1), resulta obvio que:

(3) $$P_o(r(t) < b \ / \ B_s) = P_{\bar{a}}(r(t-s) < b) =$$

$$= \int_{|\bar{b}| < b} \frac{\exp\{-|\bar{b}-\bar{a}|^2 / \ 2(t-s)\}}{(2\pi(t-s))^{n/2}} d\bar{b} \ ; \ \bar{a} = r(s),$$

es una función exclusivamente de $r(s) = |\bar{r}(s)|$. Denotándo por R_s la inclusión $B(r(\theta): \theta \leq s) \subset B_s$, se tiene

(4) $$P_o(r(t) \in db \ / \ R_s) = P_{\bar{a}}(r(t-s) \quad db) = q^{+}(t-s,a,b)db$$

donde $a = r(s) = |\bar{a}|$ y

$$q^{+}(t,a,b) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} (2\pi t)^{n/2} \exp\{-|bv-a(1,o,\ldots,o)|^2/2t\} dob^{n-1}$$

$$= (2\pi t)^{-n/2} \exp\{-\frac{a^2+b^2}{2t}\} \int_{S^{n-1}} \exp\{-\frac{ab}{t}\cos\theta\} dob^{n-1} =$$

(Después de la fórmula integral

$$\int_o^{\pi} \exp\{i\ell t\cos\theta\} \operatorname{sen}^{n-2}\theta \, d\theta = \frac{J_{(n-2)/2}(\ell t)}{(\ell t)^{(n-2)/2}}$$

Watson-Whittaker pag. 367)

$$= t^{-1} \exp\{-\frac{a^2+b^2}{2t}\} (ab)^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}-1} (\frac{ab}{t}) \, b^{n-1},$$

$$t > o \quad , \quad a \, , \, b > o \, ,$$

es la solución fundamental de

(6a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{n-1}{b} \cdot \frac{\partial u}{\partial b}\right) , \qquad b > o$$

(6b) $$\lim_{b \downarrow o} b^{n-1} \frac{\partial u}{\partial b} = o \, .$$

Así pués, <u>el movimiento de Bessel es un proceso de Markov</u>

simple, sujeto a la misma relación al operador de Bessel

(7a) $$G^{+} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{db^2} + \frac{n-1}{b}\cdot\frac{d}{db}\right)$$

(parte radial de $G = \frac{1}{2}\Delta$), actuando en el dominio

(7b) $$D(G^{+}) = C[o,+\infty) \cap (u\colon G^{+}u \in C[o,+\infty),\ \lim_{b \downarrow o} b^{n-1}u'(b) = o)$$

que en el caso unidimensional.

La expresión (6a) sugiere al proceso de Bessel como un movimiento Browniano normalizado, cuya velocidad infinitesimal sería $(n-1)/2r$, es decir, como solución de

$$r(t) = b(t) + \frac{n-1}{2}\int_o^t \frac{ds}{r(s)} \quad ,$$

lo cual es cierto para $n \geq 2$ y tambien para $n = 1$ si

$$\lim_{\varepsilon \downarrow o} (2\varepsilon)^{-1} \text{ medida } (s\colon r(s) < \varepsilon \ , \ s \leq t) \ ,$$

se sustituye en lugar de

$$\frac{n-1}{2}\int_o^t \frac{ds}{r(t)} \ .$$

(Para las respectivas demostraciones, vease H.P. McKean -- (19) y (20).

En el caso particular $n = 2$, las densidades de transición, dada la posición (r,α) en la época o, se escriben

$$(8) \qquad \frac{p}{2\pi t} \exp\left\{-\frac{p^2 + r^2 - 2pr\cos(\theta - \alpha)}{2t}\right\}.$$

La densidad marginal de $r(t)$, se obtiene integrando (8) respecto de θ y teniendo en cuenta la fórmula integral de Bessel

$$\int_0^{2\pi} \exp\{i(x\,\mathrm{sen}\,\theta - n\theta)\}\,d\theta = 2\pi J_n(x) ,$$

(Rey Pastor-Castro, pag. 24), se tiene, para las densidades de transición del proceso $r(t)$, la expresión

$$q^+(t,r,p) = t^{-1} \exp\left\{-\frac{r^2 + p^2}{2t}\right\} I_o\left(\frac{rp}{t}\right).$$

Obviamente, las probabilidades de transición ---- $q^+(t,r,p)$, satisfacen la ecuación (2) escrita en coordenadas polares, para $n = 2$,

$$\frac{\partial q^{+}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2} q^{+}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial q^{+}}{\partial r}\right) ,$$

que es la ecuación adelantada para el proceso $r(t)$ y que nos muestra que éste tiene una velocidad infinitesimal -- igual a $1/2r$.

C A P I T U L O I I I

Funciones aleatorias de Bessel.

III.1. INTRODUCCION.

En el capítulo II, se encontraron tres tipos diferentes de distribuciones de Bessel, como respuesta a tres cuestiones distintas, resueltas por el procedimiento de aleatorización, descrito en II. 2. A saber:

a). Densidades gamma aleatorizadas.

$$(1) \qquad w_p(x) = e^{-t-x} \left(\frac{x}{t}\right)^{p/2} I_p(2\sqrt{tx}),$$

es una densidad de probabilidad, concentrada en (o,∞).

b). Aleatorización de recorridos aleatorios.

$$(2) \qquad a_r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^{r/2} e^{-x} I_r(2\sqrt{pq}\, x), \quad r = o, \pm 1, \pm 2, ..$$

da la probabilidad de la posición $r > o$, en el instante x, en un recorrido aleatorio.

c). Primeros pasos.

$$(3) \qquad v_r(x) = e^{-x} \frac{r}{x} I_r(x) ,$$

define una densidad de probabilidad, concentrada en (o,∞). La probabilidad de un primer paso por $r > o$, en el instante x , viene dada por (3).

Distribuciones de probabilidad, tales como las definidas por (1), (2) y (3), han sido, por comodidad en cuanto al lenguage, denominadas distribuciones de Bessel. En éste capítulo, daremos una "definición constructiva" de tales distribuciones; ésto es, a partir de la cual, puedan encontrarse distribuciones de Bessel. Más precisamente, encontraremos, a partir de la definición I de III.2 , familias de funciones reales de la variable real x (funciones aleatorias de Bessel), cuyos elementos $b(x,p) = w_p(x)I_p(u(x))$, son densidades, denominadas de Bessel de parámetro p y a la que pertenecen como se verá, las funciones de densidad $w_p(x)$ y $v_p(x)$. La definición II de III.2, permite construir familias (funciones aleatorias de Bessel, discretas), cuyos elementos $b_r(x) = w_r(x)I_r(u(x))$, donde la variable x juega ahora el papel de parámetro, son distribuciones de probabilidad ($b_r(x) \geq 0$, $\sum_r b_r(x) = 1$).

El hecho fundamental que nos ha llevado a tales definiciones, ha sido observar que las funciones (1), (2) y (3), tienen como propiedad común, el ser soluciones particulares de ecuaciones diferenciales del tipo

$$(4) \qquad y'' + \left(\frac{u'}{u} - \frac{u''}{u'} - 2\frac{w'}{w}\right)y' + \left(2\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} - \frac{w'}{w}\left(\frac{u'}{u} - \frac{u''}{u'}\right) - \right.$$

$$- u'^2\left(1 + \frac{p^2}{u^2}\right)\Big)y = 0 \ ,$$

donde u y w son funciones reales de la variable real x. - La ecuación (4) se obtiene de la

$$(5) \qquad y'' + \left(\frac{u'}{u} - \frac{u''}{u'} - 2\frac{w'}{w}\right)y' + \Big(2\,\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} - \frac{w'}{w}\left(\frac{u'}{u} - \frac{u''}{u'}\right) +$$

$$+ u'^2\left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)\Big)y = 0$$

cuya integral general es (Rey Pastor-Castro, pag. 219)

$$(6) \qquad y = w(x)\left[C_1 J_p(u(x)) + C_2 Y_p(u(x))\right] = w_p(x) Z_p(u(x))$$

(donde Y_p designa la función de Neumann de orden p), después de la sustitución $u \longrightarrow iu$. Puesto que la función $y = w_p(x) J_p(u(x))$ es una integral particular de (5),

$$(7) \qquad y = w(x)\ I_p(u(x))$$

lo es de (4).

Comentabamos en II.1, que las distribuciones tipo a). b). c). juegan un papel importante en éste trabajo, debido al hecho de que para ellas, junto con otras que aquí se obtienen, existen problemas probabilísticos resueltos - mediante dichas distribuciones,ya que como entonces se dijo encontada una tal distribución, por los procedimientos cons trctivos que aquí se desarrollan, no es siempre fácil obte ner variables aleatorias que obedezcan a tal distribución. Debido a ello, hacemos un estudio exhaustivo de tales distribuciones, encontrando resultados que en un principio pueden resultar sorprendentes; por ejemplo la (b.1) es la distribución normal asociada a un movimiento Browniano.

Diversas cuestiones, sobre las distribuciones a), b), c), aparecen propuestas en algunos textos, lo cual se señala en su debido momento, resolviendose aquí dichas cuestiones, dándose por otra parte nuevas demostraciones de otras, sistematizandose resultados conocidos dispersos, junto con los nuevos, dentro del contexto general del procedimiento constructivo que aquí se da.

Por otra parte, en el caso particular $w(x) = e^{-v(x)}$, la función (7) verifica la ecuación diferencial

$$(8) \qquad y'' - \left(2v' + \frac{u''}{u'} - \frac{u'}{u}\right)y' + \left(v'^2 - v'' + v'\left(\frac{u''}{u} - \frac{u'}{u}\right) - u^2\left(1 + \frac{p^2}{u^2}\right)\right)y = 0$$

que después de $u \longrightarrow iu$, se transforma en

$$(9) \qquad y'' - \left(2v' + \frac{u''}{u'} - \frac{u'}{u}\right)y' + \left(v'^2 - v'' + v'\left(\frac{u''}{u} - \frac{u'}{u}\right) + \right.$$

$$\left. + u^2\left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)y = 0, \right.$$

que es la ecuación diferencial de Aldanondo, (Aldanondo: - Métodos de resolución de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales en "aleph". Publ. F. C. Granada, pag. 16.2, - ecuación (16.2)'). Escritas respecto del operador "aleph" , $a = a(u', v')$, asociado a u y v, las ecuaciones (8) y (9) - quedan

$$(8') \qquad a^2 . y + \frac{1}{u} a.y - \left(1 + \frac{p^2}{u^2}\right)y = 0$$

$$(9') \qquad a^2 . y + \frac{1}{u} a.y - \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)y = 0 \quad ,$$

en las que la escritura queda sensiblemente simplificada.- Las funciones

$$J_p^*(x) = e^{v(x)} \; I_p(u(x))$$

son integrales particulares de (9') y son denominadas por - Aldanondo, funciones de Bessel-Aleph. Consecuentemente, las funciones

$$I_p^*(x) = e^{v(x)} \; I_p(u(x))$$

son integrales particulares de (8´) y las denominaremos —— funciones modificadas Bessel-Aleph.

III. 2. FUNCIONES ALEATORIAS DE BESSEL.

Sea E_p la ecuación diferencial (4) de III.1, $b_p(x)$ una integral de E_p y $C^2(I)$ el espacio de las funciones dos veces diferenciables en $I \subset R$. U designará el subconjunto de R, tal que para cada $p \in U$

i). $b_p(x)$ sea medible no negativa.

ii). $\int_I b_p(x)dx = 1$.

<u>DEFINICION I</u>: **Dada una ecuación diferencial, E_p, denominaremos función aleatoria de Bessel (f. a. B.), de espacio paramétrico U, asociada al par $(u,w) \in C^2(I) \times C^2(I)$, al conjunto**

(1) $$B(u,w) = \{ b_p(x) : x \in I \ , \ p \in U \}.$$

Para cada $p \in U$, el elemento $b_p(x) \in B(u,w)$, es después de i) e ii), una función de densidad , concentrada en I, que se denominará <u>densidad de Bessel</u> de orden, parámetro o índice p.

En lo que sigue, se hablará de propiedades de la familia $B(u,w)$, refiriéndonos a las propiedades comunes a todos sus elementos. Así por ejemplo, diremos que la f. a.

(1), está concentrada en I.

Ejemplos de f. a. B:

a). La ecuación diferencial

(a.1) $$y'' + \frac{2x-p+1}{x}y' + \left(\frac{4x^2 + p^2 - 4px + 4x}{4x^2} - \frac{t}{x}\left(1 + \frac{p^2}{4tx}\right)\right)y = 0,$$

se transforma en E_p, después de poner

$$u = 2\sqrt{tx} \quad , \qquad w_p(x) = e^{-t-x}\left(\frac{x}{t}\right)^{p/2} .$$

Así pués, las funciones

(a.2) $$y = e^{-t-x}\left(\frac{x}{t}\right)^{p/2} I_p(2\sqrt{tx}),$$

son soluciones particulares de (a.1), (una sustitución directa, transforma (a.1) en la identidad

(a.3) $$I''_p(u) + \frac{1}{u}I'_p(u) - \left(1 + \frac{p^2}{u^2}\right)I_p(u) = 0 \ ),$$

consecuentemente, la familia

(a.4) $$B(u,w) = \left\{ b_p(x) = e^{-t-x}\left(\frac{x}{t}\right)^{p/2} I_p(2\sqrt{tx}) : x \in I,\ p \in U \right\}$$

es una f.a.B. concentrada en $I = (0,\infty)$ y espacio paramé -

trico $U = (-1,\infty)$.

b). La ecuación diferencial

$$\text{(b.1)} \qquad y'' + \left(2 + \frac{3}{x}\right)y' + \left(\frac{3}{x} + \frac{1-p^2}{x^2}\right)y = 0 ,$$

adopta la forma E_p, después de

$$u(x) = x \qquad , \qquad w_p(x) = \frac{p}{x}\, e^{-x},$$

por lo que

$$b_p(x) = e^{-x}\, \frac{p}{x}\, I_p(x),$$

satisface la ecuación (b.1), (una sustitución directa, -- transforma (b.1) en la identidad (a.3)). Así, la familia

$$\text{(b.2)} \qquad B(x,p) = \{\, b_p(x) = e^{-x}\, \frac{p}{x}\, I_p(x) \; : \; x \in I,\; p \in U \,\},$$

es una f.a.B. concentrada en $(0,\infty)$ y espacio paramétrico $(0,\infty)$, (vease II.5 y III.7).

c). La ecuación diferencial

$$\text{(c.1)} \qquad y'' + \left(2\ell + \frac{1-2p}{x}\right)y' + \left(\ell^2 - 1 - \frac{(2p-1)\ell}{x}\right)y = 0,$$

adopta la forma de E_p , después de

$$u(x) = x \quad , \quad w_p(x) = e^{-\ell x}\, x^p \quad , \quad (\ell > 1) \; ,$$

por lo que

$$y = e^{-\ell x}\, x^p\, I_p(x) \; ,$$

es una solución particular de (c.1).

Sea

$$\text{(c.2)} \qquad b_p(x) = k_p\, e^{-\ell x}\, x^p\, I_p(x) \; , \qquad (p > -1) \; ,$$

donde

$$\text{(c.3)} \qquad k_p = \frac{2^p\, \Gamma(p+1)(\ell^2 - 1)^{p + 1/2}}{\Gamma(2p + 1)} \; .$$

Obviamente, $b_p(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ y puesto que

$$\int_0^\infty b_p(x)dx = 1 \; ,$$

lo que facilmente se deduce de la fórmula integral

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^p\, J_p(bx)dx = \left(\frac{b}{2}\right)^p \frac{\Gamma(2p + 1)}{\Gamma(p+1)(a^2 + b^2)^{p + 1/2}}$$

$$\mathrm{Re}(a \pm bi) > 0 \qquad , \qquad 2p + 1 > 0 \qquad ,$$

(H. Hochstads, pag. 243), resulta que la familia

(c.4) $\quad B(x,p) = \{ b_p(x) = k_p \, e^{-\ell x} \, x^p \, I_p(x) : x \in I ,$

$p \in U \}$,

es una f.a.B., concentrada en $I = (0,\infty)$ y espacio paramétrico $U = (-\frac{1}{2},\infty)$. ———

Sea ahora la ecuación E_r , $r \in Z$. Como anteriormente, $b_r(x)$ designará una integral particular de E_r. I designará, ahora, el subconjunto de R, tal que para cada $x \in I$

iii). $b_r(x)$ sea no negativa

iv). $\sum_{r=0}^{\infty} b_r(x) = 1.$

DEFINICION II: Dada una ecuación diferencial, E_r, denominaremos función aleatoria discreta de Bessel (de parámetro , x, contínuo), asociada al par $(u,w) \in C^2(I)\times C^2(I)$, al conjunto

$$B(u,w) = \{ b_r(x) : x \in I \}.$$

Para cada $x \in I$, las condiciones iii). y iv). muestran que $\{ b_r(x),\ r=0,1,2,.. \}$ es una distribución de probabilidad, de variable discreta r.

Ejemplos de f.a.B. discretas:

d). La ecuación diferencial

(d.1) $$y'' + (\frac{1}{x} + 2)y' + (1 + \frac{1}{x} - 4pq(1 + \frac{r^2}{4pqx^2}))y = 0 ,$$

se transforma en E_r, después de poner

$$u = 2\sqrt{pq}\ x \qquad , \qquad w_r(x) = (\frac{p}{q})^{r/2} e^{-x}.$$

Así pués,

(d.2) $$b_r(x) = (\frac{p}{q})^{r/2} e^{-x}\ I_r(2\sqrt{pq}\ x) \quad ,$$

satisface la ecuación (d.1), (una sustitución directa transforma (d.1) en la identidad

(d.3) $$I_r''(u) + \frac{1}{u} I_r'(u) - (1 + \frac{r^2}{u^2}) I_r(u) = 0),$$

de donde se concluye que la familia

(d.4) $$B(u,w) = \{ b_r(x) = (\frac{p}{q})^{r/2}\ e^{-x}\ I_r(2\sqrt{pq}\ x) : x > 0 \},$$

es una f.a.B. discreta, (vease II.4).

e). La ecuación

$$\text{(e.1)} \qquad y'' + \left(\frac{1}{x} + 4\right)y' + \left(\frac{2}{x} - \frac{r^2}{x^2}\right)y = 0 \quad ,$$

se transforma en E_r, después de

$$u = 2x \qquad , \qquad w_r(x) = e^{-2x} .$$

Así pués,

$$\text{(e,2)} \qquad B(u,w) = \{ b_r(x) = e^{-2x} \ I_r(2x) \ : \ x > o \} \ ,$$

es una f. a. B. discreta, (vease III. 3, apartado d).).

III.3. PROBLEMAS PROBABILISTICOS QUE DAN LUGAR A FUNCIONES ALEATORIAS DE BESSEL.

Evidentemente, las definiciones I y II del párrafo anterior, proporcionan un método para obstener f. a. B.; — sin embargo, construida una función aleatoria , B(u,w) , a partir de una de tales definiciones, no resulta siempre fácil, encontrar un problema probabilístico, que responda a la función aleatoria B(u,w). Las que en lo que sigue, se exponen, son aquellas para las que ésto ha sido posible. Así - después de los apartados 3º, 4º y 5º del capítulo II y de III.2, resulta obvio que

a). La familia de densidades gamma aleatorizadas, obtenida en II.3, da lugar a la f. a. B.(a.4) en III.2.

b). La aleatorización de recorridos aleatorios, - II.4, da lugar a la f. a. B. (d.4) de III.2.

c). La distribución de los primeros pasos, obtenida en II.4, da lugar a la f. a. B. (b.2) de III.2.

Distribuciones semejantes a las que han dado lugar a las funciones aleatorias de Bessel anteriores y algunas otras, que veremos a continuación, pueden ser obtenidas, por procedimientos bien distintos al de aleatorización y como respuesta a otras cuestiones a las que por - tales procedimientos se resolvieron. Así por ejemplo, la - distribución de probabilidad obtenida en II.4 (aleatorización de recorridos aleatorios), es tambien la distribución de la diferencia de dos variables aleatorias independientes de Poisson, con esperanzas px y qx .

Nuestra intención es, ahora, completar los apartados anteriores, con la obtención de éstas distribuciones, que contienen funciones de Bessel, como soluciones de problemas probabilísticos diferentes a los que ya se resolvieron, dejando para un apartado posterior el estudio de las propiedades específicas de las funciones aleatorias correspondientes.

Previamente, se necesitan algunas definiciones y conceptos, como son el de atomicidad, simetrización y otros que brevemente expondremos, remitiendo a los textos de Feller (15) y Loéve (13), para una mayor información sobre éstos y otros términos.

Sea X una variable aleatoria y F su función de distribución. ^{-}F denota la distribución de $-X$. La igualdad

$$^{-}F(x) = 1 - F(-x) \quad ,$$

define unívocamente a ^{-}F en todo punto de continuidad. La *distribución* F se dice *simétrica* , si $F = {}^{-}F$. (Cuando F tiene una densidad f, ésto implica que $f(x) = f(-x)$).

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes, con la misma distribución F. La variable $X_1 - X_2$ tiene una distribución simétrica ^{o}F, dada por

$$ {}^{o}F \;=\; F * {}^{-}F \quad , \qquad (* = \text{convolución}). $$

Como consecuencia de la propiedad de simetría ${}^{o}F(x) = 1 - {}^{o}F(-x)$, se ve inmediatamente que

$$ {}^{o}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + y)F(dy). $$

Se dirá entonces que ${}^{o}F$ se ha obtenido por simetrización - de F.

Un punto $x \in R$, al que de alguna forma, se le ha - asignado una masa positiva se le denominará átomo.

Un punto $x \in R$ es un punto de crecimiento de F si $F(I) > o$, para todo intervalo $I \ni x$.

Una distribución, F, se dirá concentrada en un conjunto A, si $F({}^{c}A) = o$ (${}^{c}A$ = complementario de A).

La distribución F es atómica si está concentrada en el conjunto de sus átomos.

Tres cuestiones, que dan lugar a distribuciones - de Bessel, son las que pasamos a describir:

d). Simetrizada de Poisson.

Si F es una distribución atómica, con los pesos - p_o, p_1,... en los puntos o,1,... respectivamente, la - distribución simetrizada ${}^oF$, es tambien atómica y asigna a los puntos $\pm n$ los pesos

$$q_n = \sum_{k=o}^{\infty} p_k p_{n+k} \qquad , \qquad q_{-n} = q_n \ .$$

En particular, cuando n es una distribución de Poisson, pa ra $n \geq o$, se tiene

$$q_n = e^{-2\ell} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\ell^{2k+n}}{k!(n+k)!} \ ,$$

de donde

$$\text{(d.1)} \qquad q_n = e^{-2\ell}\, I_n(2\ell).$$

La familia

$$\text{(d.2)} \qquad B(u,w) = \left\{ b_r(x) = e^{-2x}\, I_r(2x) \ : \ x > o \right\} ,$$

es la f. a. B. (e.2) de III.2.

e). Diferencia de dos variables aleatorias de Poisson.

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, que siguen distribuciones de Poisson, con esperanzas respectivas ℓ y μ. La distribución de la variable X − Y, viene dada por

$$F(k) = \sum_{n-m=k}^{\infty} P(X = n)P(Y = m) .$$

Supongamos en primer lugar que $k \geq 0$. Entonces

$$F(k) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X = k+m)P(Y=m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\ell + \mu)} \frac{\ell^{m+k} \mu^{m}}{(m+k)!\,m!} .$$

Multiplicando y dividiendo por $(\ell/\mu)^{k/2}$, se obtiene

$$\text{(e.1)} \qquad F(k) = e^{-(\ell + \mu)} (\ell/\mu)^{k/2} I_k(2\sqrt{\ell\mu}).$$

Si $k < 0$, entonces

$$F(k) = \sum_{m-n=-k} P(Y = m)P(X = n) ,$$

y actuando a partir de aquí de forma análoga que en el caso anterior, se llega a

$$(e.2) \qquad F(k) = e^{-(\lambda + \mu)} \, (\lambda/\mu)^{k/2} \, I_{-k}(2\sqrt{\lambda\mu}).$$

Como consecuencia de (e.1) y (e.2), para todo entero, k, se tiene

$$(e.3) \qquad F(K) = e^{-(\lambda + \mu)} \, (\lambda/\mu)^{k/2} \, I_{|k|}(2\sqrt{\lambda\mu}).$$

Finalmente y en el caso particular $\lambda = px$, $\mu = qx$, con $p + q = 1$, (e.3) se transforma en

$$(e.4) \qquad F(k) = e^{-x}(p/q)^{k/2} \, I_{|k|}(2\sqrt{pq}\ x),$$

(solución a la cuestión nº 9 , propuesta por Feller, (15), pag. 166).

La familia

$$B\,(u,w) = \{ b_k(x) = e^{-x} \, (p/q)^{k/2} \, I_k(2\sqrt{pq}\ x) : x > o \} ,$$

es la f. a. B. (d.4) de III.2.

Si se supone a X e Y, idénticamente distribuidas, ($\lambda = \mu = x$), (e.4) se transforma en

$$F(k) = e^{-2x} I_{|k|}(2x) \quad , \qquad k = o, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(solución a la cuestión nº 4, propuesta por Feller, (15), pag. 65).

f). Sumas aleatorias.

Sean $X_1, X_2, \ldots$, variables aleatorias independientes, con una distribución común F. Sea, por otra parte, la varible aleatoria N, independiente de las X_j y que puede tomar los valores o,1,2,... , con probabilidades respectivas $p_o, p_1, p_2, \ldots$. Consideremos la variable aleatoria

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots. + X_N .$$

La distribución condicional de S_N, cuando N = n , viene dada por, F^{n*}, siendo

$$F^{1*} = F \quad , \qquad F^{(n+1)*} = F^{n*} * F ,$$

y la distribución de S_N, viene dada por

$$U = \sum_{k=o}^{\infty} p_n F^{n*} .$$

Como caso particular, consideremos que las variables X_j, tomen los valores $+1$ y -1, con probabilidades respectivas, p y $q = 1 - p$. Si N es una variable de Poisson con parámetro x, una vez que $N = n$, (lo que ocurre con probabilidad $p_n = e^{-x} x^n / n!$), S_n tomará el valor k, si entre los n primeros sumandos hay $(n + k)/2$ positivos y $(n - k)/2$ negativos (Lo que ocurrirá si $n - k = 2r$), siendo la probabilidad de la suma k

$$\begin{bmatrix} n \\ \frac{1}{n}(n + k) \end{bmatrix} p^n q^{(n-k)/2} = \begin{bmatrix} 2r + k \\ r + k \end{bmatrix} p^{2r + k} q^r$$

y de aquí que

$$U = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^{2r + k}}{(2r + k)!} \begin{bmatrix} 2r + k \\ r + k \end{bmatrix} p^{2r + k} q^r .$$

Mediante idénticas consideraciones que en e), y actuando análogamente que en II.4, se obtiene finalmente

$$\text{(f.1)} \qquad U(x) = e^{-x} (p/q)^{k/2} I_{|k|}(2\sqrt{pq}\, x),$$

que resulta ser la misma que la obtenida en e). (Solución a la cuestión nº 21, propuesto en (15), pag. 167).

III. 4. DISTRIBUCIONES DE BESSEL. PROPIEDADES.

El estudio de la infinita divisibilidad de las distribuciones de Bessel, obtenidas en párrafos anteriores, no resulta obvio, en algunos casos, en los que se hace necesario la obtención de sus transformadas de Laplace, funciones generatrices y el empleo de diversos recursos analíticos. - Centrándonos en el estudio de aquella propiedad, encontraremos tambien otra serie de ellas que caracterizan intrínsecamente a las ya mencionadas distribuciones. Por otra parte,- siempre que en lo que sigue, hablemos de la transformada de Laplace de una distribución de probabilidad F, entenderemos entenderemos que F está concentrada en $[0,\infty)$, y que el intervalo de integración es cerrado (y puede ser sustituido - por $(-\infty,\infty)$). Así, la transformada de Laplace de F, viene dada por

$$(1) \qquad \text{T.L.F} = \Psi(\ell) = \int_0^{\infty} e^{-\ell x}\, F(dx), \qquad \ell \geq 0.$$

Por una extensión usual de lenguage, hablaremos de la transformada de Laplace de una variable aleatoria refi-- riéndonos a la transformada de su función de distribución F. Con la notación usual de la esperanza, (1) se escribe

$$(2) \qquad \text{T.L.F.} = \Psi(\ell) = E(e^{-\ell X}).$$

Sea F una distribución y $\Psi(\ell)$ su transformada de Laplace. Consideremos, ahora, una distribución G, de la misma forma que la distribución U, encontrada en III.3, f), ésto es

$$(3) \qquad G = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{k*} ,$$

donde $\{p_k\}$, es una distribución de probabilidad. Si $P(s) = \sum p_k s^k$, es la función generatriz de $\{p_k\}$, la transformada de Laplace de G viene dada por

$$(4) \qquad \Phi(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \Psi^k(\ell) = P(\Psi(\ell)).$$

Esta sencilla propiedad, que permite el cálculo de la transformada de Laplace de la distribución G, a partir de la transformada de F y de la función generatriz de $\{p_k\}$ y que por otra parte, viene a corroborar lo dicho al principio de éste párrafo, nos será de gran utilidad.

a). Densidades gamma aleatorizadas.

En el párrafo II.3, se obtuvo mediante la aleatorización formal de la densidad gamma $f_{1,p+k+1}$, $p > -1$, la densidad de probabilidad

$$(a.1) \qquad w_p(x) = e^{-t-x} (x/t)^{p/2} I_p(2\sqrt{tx}),$$

que posteriormente se vió, es un elemento de la f. a. B. - (a.4) de III.2.

Después del método dado en II.2 para el cálculo - de la media y varianza de una mixtura y puesto que en éste caso, la función $F(x,\theta)$ es la función gamma $f_{1,p+k+1}$, cuya media y varianza son

(a.2) $\quad m_p(k) = p+k+1$

(a.3) $\quad \sigma_p^2(k) = p+k+1,$

la esperanza "a" de w_p es

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} m_p(k)p_k \; ,$$

donde $p_k = P(\theta = k)$, es la distribución de Poisson. Después de breves cálculos, se encuentra

(a.4) $\quad a = p+t+1$

La varianza de (a.1), de acuerdo con (4') en II.2, vendrá dada por

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_p^2(k) + m_p^2(k) - a^2)p_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p+k+1 + (p+k+1)^2 - (p+t+1)^2\right) p_k$$

y de aquí

(a.5) $\quad b = p + 2t + 1.$

Por otra parte, siendo

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{(1-i\xi)^{p+k+1}}$$

la función característica de $f_{1,p+k+1}$, después de (6) en II.2, se tiene

$$\text{(a.6)} \qquad \Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i\xi)^{p+k+1}} \, p_k =$$

$$= \frac{e^{-t}}{(1-i\xi)^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-i\xi}\right)^k \frac{t}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-t + t/(1-i\xi)}}{(1-i\xi)^{p+1}}$$

es la función característica de (a.1) y su transformada de Laplace es

$$(a.7) \qquad \Psi(\ell) = \frac{e^{-t + t/(1+\ell)}}{(1-\ell)^{p+1}}$$

Es fácil ver que w_p es la convolución de una distribución de la forma (3), con una densidad gamma, $f_{1,p+1}$. En efecto; si F es la distribución exponencial y p_k es una distribución de Poisson, cuya función generatriz (Feller I, pag. 275) es

$$P(s) = e^{-t+ts} \quad ,$$

se tendrá

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \quad f(x) = e^{-\alpha x} \quad , \alpha > 0, \; x \geq 0,$$

y

$$f^{(k+1)*}(x) = \frac{k+1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} y^{k-1} \, dy = \alpha \frac{(\alpha x)^k}{k!} e^{-\alpha x} \quad ,$$

y la transformada de Laplace de F es

$$\Psi(\ell) = \frac{\alpha}{\ell + \alpha} \quad .$$

Para $\alpha = 1$, se tiene

$$f^{k*}(x) = f_{1,k}(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-x}$$

$$\Psi(\ell) = \frac{1}{\ell+1}$$

y de aquí que

$$G * f_{1,k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k f^{k*}\right)*f = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f^{(k+1)*} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t-x} \frac{(tx)^k}{k!k!} = e^{-t-x} I_0(2\sqrt{tx}) =$$

$$= w_0(x),$$

y finalmente

$$\text{(a.8)} \qquad w_k = w_0 * f_{1,k} = (G*f)f_{1,k} = G*f_{1,k+1}.$$

Se sigue de (a.8), que la transformada de Laplace de w_p , es el producto de

$$\Psi(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \Psi^k(\ell) = P(\Psi(\ell)),$$

por la transformada de $f_{1,k+1}$, dada por $1 / (\ell + 1)^{k+1}$.
Así pués, la transformada de Laplace de w_p será

$$\Psi(\ell) = \frac{1}{(\ell+1)^{p+1}} P(\Psi(\ell)) = \frac{1}{(\ell+1)^{p+1}} e^{-t+t\Psi(\ell)}$$

$$= \frac{e^{-t + t/(\ell+1)}}{(\ell+1)^p} .$$

Para t = 1, se tiene

$$\Psi(\ell) = \frac{1}{(\ell + 1)^p} e^{-1 + 1/(\ell + 1)}$$

y teniendo en cuenta la ley de traslación

$$w(\ell + a) = \int_0^\infty e^{-\ell x} e^{-ax} \mu(dx) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\ell x} \mu^*(dx) \quad , \quad \forall \ell > 0 ,$$

donde μ es una medida tal que

$$w(\ell) = \int_0^\infty e^{-\ell x} \mu(dx)$$

converge para $\ell = a$ y $\mu^*(dx) = e^{-ax} \mu(dx)$, se tiene que

$$\Psi(\ell) = \frac{e^{1/\ell}}{\ell^{p+1}}$$

es la transformada de Laplace de $\sqrt{x^p}\, I_p(2\sqrt{x})$.

De la igualdad (a.8), se sigue que para todo N

$$w_p = w_0 * f_{p/N} * \overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{N-1} * f_{p/N}$$

y de aquí, <u>la infinita divisibilidad de $\{w_p\}$</u> , en el senti do generalizado de no exigir a $X_1, X_2, \ldots, X_N$, idéntica-- mente distribuidas, (Feller II, pag. 177).

<u>b). Aleatorización de recorridos aleatorios.</u>

En el párrafo II.4, se encontró una familia de - distribuciones aritméticas, que atribuyen a $r = 0,1,2,\ldots$ las probabilidades

$$(b.1) \qquad a_r(t) = e^{-t} \left(\frac{p}{q}\right)^{r/2} I_r(2\sqrt{pq}\, t),$$

siendo p, q y t parámetros positivos y $p+q = 1$. Sabemos -- que las densidades a_r pertenecen a la f. a. B. (d.4) de -- III.2 y puesto que como en su momento se vió, tales densida des, (párrafo II.4), satisfacen la ecuación de Chapman-Kol- mogorov, resulta de ello la <u>infinita divisibilidad</u>.

Si, por otra parte, en la fórmula de Schlömilch -

$$\exp\left\{\sqrt{pq}\; t\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u^r\, I_r(2\sqrt{pq}\, t),$$

se efectúa el cambio de variable, $u = (p/q)^{1/2}\, e^{i\xi}$, se -- tiene, después de multiplicar por e^{-t}, que la función ca-- racterística de la distribución (b.1) es

$$\text{(b.2)} \qquad \Phi(\xi) = \exp\{t(pe^{i\xi} + qe^{-i\xi} - 1)\} \; ,$$

lo que demuestra que $\{a_r(t)\}$ es la distribución de la diferencia de dos variables aleatorias de Poisson con esperanzas pt y qt. Una sencilla derivación en (b.2) muestra que la media y varianza son

$$a = t(p - q) \qquad ; \qquad b = t.$$

Por otra pate, la distribución (b.1), puede ser interpretada en términos de un proceso compuesto de Poisson. Si F es una distribución arbitraria y $\alpha > 1$,

$$\text{(b.3)} \qquad Q_t = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} F^{k*} \; ,$$

define una distribución compuesta de Poisson, para la que la propiedad

$$\text{(b.4)} \qquad Q_{s+t} = Q_s * Q_t$$

es de fácil verificación (Feller II, pag.180). Si se supone que Q_t representa la distribución de $X_t - X_o$ en un proceso estocástico con incrementos estacionarios independientes, cuando F está concentrada en 1, éste proceso se reduce a un proceso ordinario de Poisson

$$P\{X_t - X_o = n\} = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} .$$

Si suponemos ahora las variables aleatorias Y_1, Y_2, ..., independientes, con una distribución común F y $N(t)$ - es la variable de un proceso de Poisson

$$P\{N(t) = n\} = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} ,$$

independiente de las Y_k, entonces (b.3) representa la distribución de la suma aleatoria $Y_1 + \ldots + Y_{N(t)}$. En otras - palabras, al n-simo salto en el proceso de Poisson, tenemos asociado el efecto Y_n y $X_t - X_o$ representa la suma de los efectos ocurridos en el intervalo (o,t). Así, (b.1) resulta ser la distribución de la suma aleatoria $Y_1 + \ldots + Y_{N(t)}$ -- cuando las variables aleatorias Y_k toman solamente los valores ± 1.

Por otra parte, la ecuación (b.4) implica la <u>estabilidad</u> de (b.1) y siendo la varianza de ésta finita, se - deduce (Renyi pag. 348 y Gnedenko-Kolmogorov pag. 183) que - (b.1) es la distribución normal asociada a un movimiento -- Browniano. Consecuentemente su exponente característico es dos.

c). Primeros pasos.

La distribución de Bessel,

$$(c.1) \qquad v_r(x) = e^{-x} \frac{r}{x} I_r(x) \quad , \quad r = 1,2, \ldots$$

corresponde a una distribución de la forma (3), donde $F(x)$ es la exponencial e^{-x}, cuya transformada de Laplace es -- $\Psi(\ell) = (\ell + 1)^{-1}$ y p_k es la distribución de los instantes de los primeros pasos por $r > o$, en el recorrido aleatorio (simétrico). La función generatriz de ésta distribución es

$$P(s) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}\right)^r \quad ,$$

(feller I, pag. 278). Poniendo $s = (\ell + 1)^{-1}$, se concluirá que la transformada de Laplace de la densidad de Probabilidad (c.1) viene dada por

$$\Psi(\ell) = (\ell + 1 - \sqrt{(\ell + 1)^2 - 1}\ )^r.$$

Que v_r es una densidad de probabilidad y (c.2) es su transformada de Laplace ha quedado probado para $r = 1, 2, \ldots$. Estos resultados son tambien válidos $\forall r > o$ y fueron probados por W. Weber, aunque con una demostración extremadamente dificultosa. Una posterior demostración puede verse en J. Soc. Industr. Appl. Math. vol. 14, (1.966) pag. 864-875. El interés probabilistico de éste resultado estriba en que implica la fórmula de convolución

(c.3) $\quad v_r * v_s = v_{r+s}$,

y en consecuencia, la infinita divisibilidad de v_r, ya que (c.3) prueba que $v_r = v_{r/n}^{n*}$, es decir, que v_r es la n-sima convolución de $v_{r/n}$ con sigo misma. Recordemos, por otra parte, que $v_r(x)$ $(r > o)$, es un elemento de la f. a. B. -- (b.2) de III.2.

Una demostración de la infinita divisibilidad de la distribución de Bessel $\{v_r : r>o\}$, que no hemos advertido en ninguno de los trabajos sobre el tema consultados, - basada en los resultados de Weber, en el teorema (Feller - II, pag. 450):

TEOREMA I: La función Ψ , es la transformada de Laplace - de una distribución de probabilidad infinitamente divisi-- ble, si y sólo si $\Psi = e^{-\psi}$, donde ψ tiene una derivada completamente monótona y $\psi(o) = o$,

y en el teorema de representación (Feller II, pag. 439):

TEOREMA II: Una función φ en (o,∞), es completamente monótona si y sólo si es representable en la forma

$$(c.4) \qquad \varphi(\ell) = \int_0^{\infty} e^{-\ell x} \rho(dx) \quad , \quad \ell > 0 \quad ,$$

donde ρ es una medidia no necesariamente finita en $(0,\infty)$,

es la siguiente:

i).- La función

$$\Psi(\ell) = (\ell + 1 - \sqrt{(\ell + 1)^2 - 1})^r$$

es representable en la forma $e^{-\psi}$. En efecto, una derivación formal, conduce a $\Psi = e^{-\psi}$, donde

$$\psi(\ell) = r \arg \operatorname{ch} (\ell + 1)$$

$$\psi'(\ell) = \frac{r}{\sqrt{(\ell + 1)^2 - 1}} \quad .$$

Obviamente $\psi(0) = 0$.

ii).- ψ' es representable en la forma (c.4) y por consi-- guiente es completamente monótona.

En efecto, la fórmula integral (H. Hochstadt, pag.

245) ,

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_r(bx)\, dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2} - a)^r}{b^r \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$Re(a \pm bi) > 0 \quad , \qquad Re(r) > -1$$

(transformada de Laplace de $J_r(bx)$), da lugar, haciendo -- uso la relación (Rey Pastor-Castro, pag.15)

$$I_r(x) = i^{-r} J_r(ix),$$

a ésta otra, cuando $b = i$, $a > 1$, $Re(r) > -1$

$$\int_0^\infty e^{-ax} I_r(x)\, dx = \frac{(\sqrt{a^2-1} - a)}{i^{2r} \sqrt{a^2-1}} \quad ,$$

que es la transformada de Laplace de I_r. En particular, para $a = \ell + 1$ y $r = 0$, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-(\ell+1)x} I_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{(\ell+1)^2-1}} = \frac{1}{r} \Psi'(x)$$

y de aquí

$$\Psi'(x) = \int_0^\infty e^{-\ell x} \mu(dx)$$

donde

$$\mu(dx) = re^{-x} I_o(x) dx \quad ,$$

lo que prueba que $\Psi'(x)$ es completamente monótona y al - fin, que Ψ es la transformada de Laplace de una distribución infinitamente divisible.

Fácilmente se obtiene la función característica - de la densidad de Bessel v_r, mediante la función generatriz

$$P(s) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{s}\right)^r \quad ,$$

poniendo

$$\Phi(t) = P(\varphi(t)),$$

donde $\varphi(t)$ es ahora la función característica de e^{-t}, con lo que queda, para $x > o$, $r > o$

$$\Phi(t) = \left(1 - it - \sqrt{(1 - it)^2 - 1}\right)^r .$$

d). Simetrizada de Poisson.

La distribución

(d.1) $\qquad q_n = e^{-2\alpha} I_n(2\alpha)$,

coincide con la (b.1), cuando $p = q = 1/2$ y $\alpha = t/2$, -- con lo que todo lo dicho para aquella, se particulariza sin dificultad para (d.1). Así, la función característica de - (d.1), presenta la forma

(d.2) $\qquad \Phi(\xi) = \exp\{\alpha(e^{i\xi} + e^{-i} - 2)\}$

y su media y varianza son iguales a 0 y 2α respectiva-- mente.

e). Diferencia de dos variables aleatorias de Poisson.

Después de b), la distribución (e.4) de III.3, ha sido ya estudiada.

f). Sumas aleatorias.

La distribución (f.1) de III.3, coincide con (b.1) de III.4. Así pués, ha sido tambien estudiada en b).

III.5. ESTIMACIONES NO PARAMETRICAS.

Fundamentalmente, se han encontrado dos tipos de distribuciones de Bessel, cuyo índice p (orden de la función modificada de Bessel, que tales distribuciones envuelven), es un parámetro real. Tales distribuciones son, el tipo a) del apartado anterior, en el que $p > -1$ y el tipo c) del mismo párrafo, en el cual (después de la demostración de Weber), $p > 0$. En tales distribuciones, la estimación del índice p, por el método de máxima verosimilitud, lleva implícito el cálculo de la derivada de I_p, respecto del parámetro p. Recordando que

$$(1) \qquad I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(p+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

tal derivada vendría dada por

$$\frac{\partial I_p(x)}{\partial p} = I_p(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}\frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{(p+k)!}.$$

Si se representa por Ψ la derivada logarítmica de la función factorial, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{(p+k)!}\right) = -\frac{\Psi(p+k)}{(p+k)!}$$

y de aquí que

$$(2)\qquad \frac{\partial I_p(x)}{\partial p} = I_p(x)\,\ln(\tfrac{x}{2}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(p+k)}{k!(p+k)!}\,(\tfrac{x}{2})^{p+2k},$$

expresión que en un principio no permite la estimación que se desea. Ahora bien, la serie que constituye la segunda - contribución a $\partial I_p/\partial p$, converge para cualquier x, pués - $\Psi(p+k)\,/\,(p+k)!$ tiende a cero, cuando k tiende a infinito; ésta serie puede, pués, ser acotada por una serie - exponencial. Si se tiene en cuenta que

$$\Psi(p+k) = \Psi(p) + S_k(p) ,$$

donde

$$S_k(p) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p+n} ,$$

la expresión (2) queda

$$(3)\qquad \frac{\partial I_p(x)}{\partial p} = I_p(x)\left[\ln(\tfrac{x}{2}) - \Psi(p)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(p)}{k!(p+k)!}(\tfrac{x}{2})^{2k+p} .$$

La primera contribución en (3) a $\partial I_p/\partial p$, coinci de con la derivada de la función

$$f_p(x) = \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{2} \right)^p ,$$

después de la aproximación $I_p(x) \simeq f_p(x)$. Esto sugiere - tomar tal aproximación, al objeto de obtener una estima -- ción de p , lo cual es aceptable siempre que $x \ll 2\sqrt{p+1}$, lo que nos llevaría a la hipótesis de suponer concentrada la variable en un intervalo (a,b), tal que $b \ll 2\sqrt{p+1}$, - condición que en el caso de distribuciones tipo a), se traduce en $b \ll (p+1)/t$.

Aceptadas las anteriores hipótesis, se tendría:

$$\frac{\partial \ln I_p(x)}{\partial p} = \frac{1}{I_p(x)} \frac{\partial I_p(x)}{\partial p} \cong \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \Psi(p) \quad ,$$

después de la cual, dada una muestra de tamaño n , se obtienen, después de algunos cálculos triviales, las estimaciones siguientes

<u>Distribuciones de tipo a) :</u>

$$\Psi(\hat{p}) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \ln x_i$$

<u>Distribuciones de tipo c) :</u>

$$\Psi(\hat{p} - 1) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \ln x_i - \ln 2 ,$$

determinándose a continuación el valor del estimador $\hat{p}$,- mediante las tablas de Davis, tomo I (Davis: "Tables of -- the higher mathematical funtions", Principia Press Blooming ton, Indiana, 1.933), que proporcionan los valores $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, para $x = p > -1$.

Por otra parte, en los diferentes tipos de distribuciones que estudiamos, aparecen parámetros, formando parte del argumento de las funciones modificadas de Bessel. - Así, el argumento en las distribuciones de tipo a), es --- $2\sqrt{tx}$, con $t > o$ y en las de tipo b), $2\sqrt{pq}\, t$, con p , q y t positivos y $p + q = 1$. La aproximación

$$(5) \qquad I_p(x) \simeq \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^p \quad , \qquad x << 2\sqrt{p+1}$$

no resulta ahora útil, caso de querer estimar el parámetro t en las primeras, si se utiliza directamente, pués la -- igualdad (2) de II.3, se reduce a

$$w_p(x) \simeq e^{-t-x} \, \frac{x^p}{p!}$$

y aunque si es válida para obtener la estimación

$$\hat{t} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i \quad ,$$

del parámetro t, a partir de una muestra aleatoria $(x_1, \ldots, x_n)$, en las distribuciones de tipo b), no lo es tampoco para estimar el parámetro p en éstas últimas. En cualquier caso, no es útil para obtener una estimación conjunta de los diferentes parámetros en las distribuciones de Bessel. No obstante, puede ser útil, caso de estimar (siempre por el método de máxima verosimilitud), uno de los parámetros, conocidos los restantes. Si el argumento de I_p, como función del parámetro s, se denota por $f(s)$, después de

$$\frac{d}{ds} \frac{I_p(s)}{s^p} = \frac{I_{p+1}(s)}{s^p} \quad ,$$

(vease Rey Pastor-Castro, pag. 40), se tiene

$$\frac{d}{ds} \frac{I_p(f(s))}{f^p(s)} = \frac{f'(s)}{f^p(s)} I_{p+1}(f(s)).$$

De aquí y después de (5), se tiene

$$(6) \qquad \frac{d}{ds} \ln \frac{I_p(f(s))}{f^p(s)} \sim \frac{1}{2(p+1)} f(s)\, f'(s) \; .$$

Así, si $f(s) = 2\sqrt{s(1-s)}\; t$, tal es el caso de las distribuciones tipo b) del párrafo III.4, se tiene

$$\frac{d}{ds} \ln \frac{I_p(2\sqrt{s(1-s)}\; t)}{(2\sqrt{s(1-s)}\; t)^p} \simeq \frac{t^2\;(1 - 2s)}{p + 1}$$

y dada una muestra aleatoria de tamaño n , puede obtenerse la estimación

$$\Phi\,(\hat{s}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{t^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i + 1}} ,$$

donde $\Phi\,(s) = s(2s-1)$, del parámetro s de la distribución

$$a_p(t) = e^{-t}\left(\frac{s}{1-s}\right)^{r/2} I_p(2\sqrt{s(1-s)}\; t)$$

de tipo b), podiendose hacer análogos razonamientos en los casos restantes.

CAPITULO IV

Campos aleatorios con espacio paramétrico de Hilbert.

IV.1. INTRODUCCION.

Generalmente se usa el término "proceso estocástico, para denotar una familia de variables aleatorias, definidas en un mismo espacio probabilístico, cuyo conjunto de índices (espacio paramétrico) es usualmente un intervalo - de la recta real o un subconjunto de ella. En muchas ocasiones, resulta más apropiado considerar familias de variables aleatorias, cuyo espacio paramétrico, sea un espacio más general. Así por ejemplo, en algunos problemas concernientes a la propagación de ondas electromagnéticas a través de un medio aleatorio, el espacio paramétrico natural es R^n. Existen otros espacios paramétricos posibles, como puede ser un espacio funcional de alguna clase (en tal caso se tendría un proceso generalizado),e incluso puede --- así mismo considerarse una colección de subconjuntos de R^n, como por ejemplo, en el caso de medidas aleatorias, que se utilizan en relación con la integral estocástica de segundo orden, (vease E. Wong). Generalmente, las hipótesis que se hacen sobre la dependencia entre las variables aleatorias, reflejan de alguna forma al espacio paramétrico. Por ejemplo, si éste es un intervalo, se suponene usualmente - la continuidad en probabilidad. Si el espacio paramétrico es un espacio lineal topológico, supondremos usualmente, - para las variables aleatorias como funciones del parámetro, la continuidad y la linealidad. Si el espacio paramétrico es un σ-álgebra, usualmente se supone la σ-aditividad y —— así sucesivamente.

En comparación con el caso unidimensional, muy poco se conoce sobre procesos con espacios paramétricos más generales. Aunque muchos resultados concernientes a procesos con espacio paramétrico unidimensional, no dependen —— del hecho de ser unidimensional el parámetro y consecuentemente son facilmente generalizables, otros en cambio, por depender intrínsecamente de la geometría de R, son difícilmente generalizables.

Consideramos en éste capítulo, campos aleatorios con espacio paramétrico un espacio de Hilbert , X, real y separable. El primero de los problemas que planteamos es - el de la representación armónica de la función covarianza y ya que como se verá, el teorema de Bochner no es generalizable al caso que nos ocupa, encontraremos tal representación con la ayuda del teorema de Minlos-Sazonov, (cap. I pag. 25). Así, demostraremos que una función, $R(z)$, será la función de covarianza de un campo aleatorio, homogeneo y - contínuo en media cuadrática, cuando las exigencias de dicho teorema sean satisfechas, obteniendose una representación para X_z , $z \in X$

$$X_z = \int \exp\{i(z,x)\} \hat{X}(dx) ,$$

donde $\hat{X}(.)$ es una función (de conjuntos), definida en (X,B) (espacio medible de Hilbert), tal que

$$E\,\hat{X}(A_1)\hat{X}(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) \quad , \qquad A_1 , A_2 \in B$$

y donde μ está definida por

$$R(z) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx).$$

Para el segundo problema, referente a la determinación de la medida espectral del campo aleatorio, encontraremos solución utilizando los conceptos de funcional característico de una medida, de distribución débil y el teorema III de IV.2, así como las propiedades de las funciones de Bessel.

Se hace un estudio aparte del caso en que la función de covarianza del campo aleatorio sea el funcional característico de una medida Gaussiana, debido a que las peculiares características de éstas medidas, permiten expresar la función de covarianza, como producto de funciones de covarianza de campos aleatorios definidos sobre los subespacios finito dimensionales.

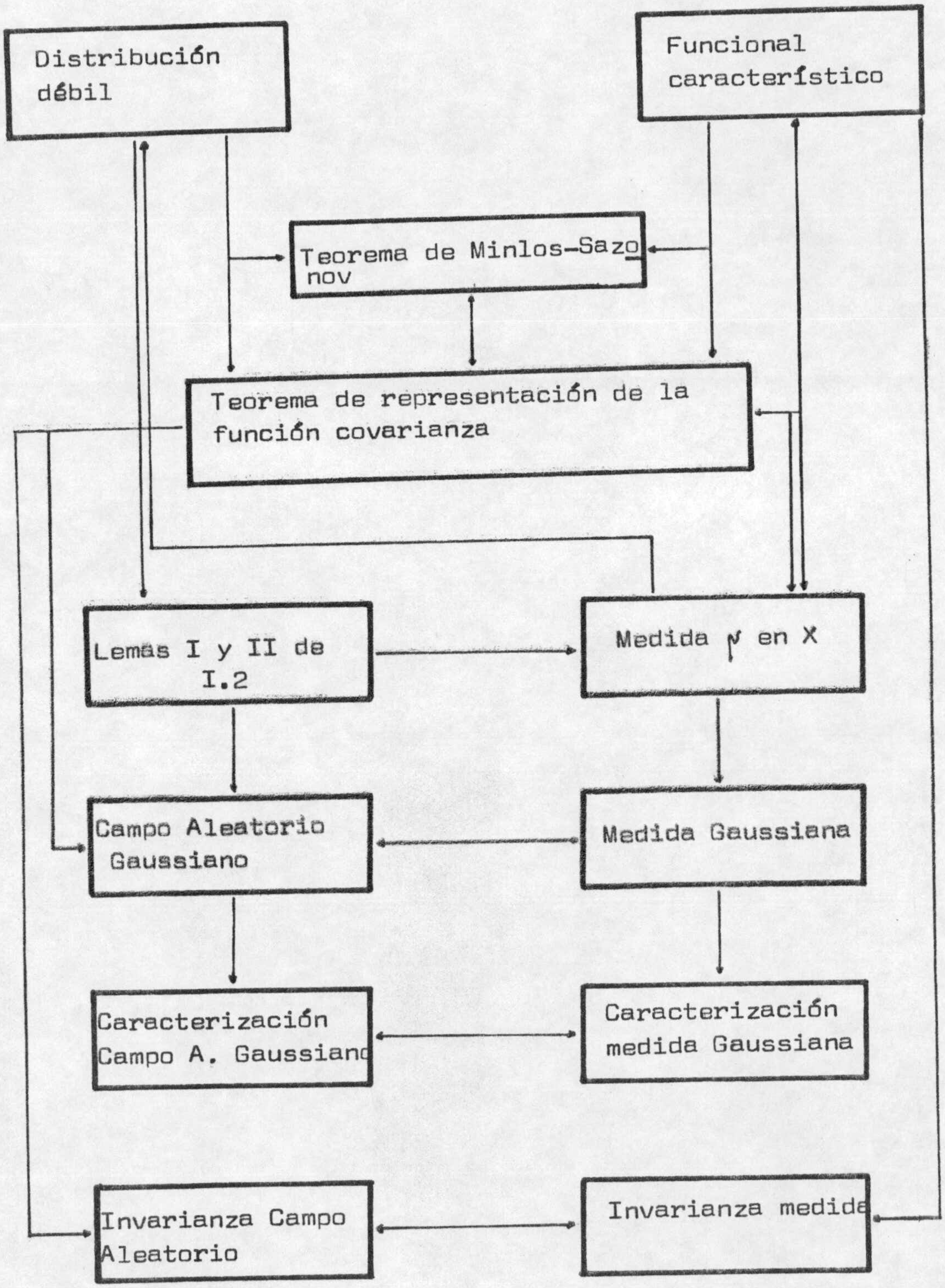
La medida espectral, viene determinada a través de funciones de Bessel. Ahora bien, puesto que una medida en -

(X,B) viene determinada por sus distribuciones finito di-- mensionales, el índice de las funciones de Bessel, depende de la dimensión del subespacio, L , elegido para determi-- narla (esto se verá). La medida espectral que proponemos, con el fin de dar un criterio fijo, será la correspondien- te a la función de Bessel de orden cero.

Finalmente, advertimos que todas las medidas, en el espacio medible de Hilbert (X,B), que aquí utilizamos,- son de segundo orden. Esto es, tales que

$$\int \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

Como ya se dijo en I.1, el capítulo primero es la herramienta de trabajo fundamental en éste, poniendo de ma nifiesto el esquema siguiente, la utilidad de los puntos - en aquel expuestos, en relación con las diversas cuestiones que aquí tratamos.


Distribución débil
Funcional característico
Teorema de Minlos-Sazonov
Teorema de representación de la función covarianza
Lemas I y II de I.2
Medida μ en X
Campo Aleatorio Gaussiano
Medida Gaussiana
Caracterización Campo A. Gaussiano
Caracterización medida Gaussiana
Invarianza Campo Aleatorio
Invarianza medida

IV.2. CAMPOS ALEATORIOS HOMOGENEOS CON ESPACIO PARAMETRICO DE HILBERT.

Consideramos a lo largo de todo éste capítulo, una familia $\{X_z \ , \ z \in X\}$ de variables aleatorias de segundo orden, definidas en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y contínuas en probabilidad. Esto es

(1) $\quad E|X_z|^2 < \infty$

(2) $\quad P(|X_z - X_{z'}| \geq \varepsilon) \xrightarrow[\|z - z'\| \to 0]{} 0 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \ ,$

donde $\|z\|$ denota la norma $\sqrt{(z,z)}$ del vertor $z \in X$ y donde X es un espacio de Hilbert real y separable. B designa el σ-álgebra de conjuntos de Borel en X y la pareja (X,B) el espacio medible de Hilbert (cap. I, sec. I.2).

Diremos que un proceso estacionario en sentido amplio es un <u>campo aleatorio homogéneo</u>, si

(3) $\quad E\,X_z = m \quad ,$ no depende de z.

(4) $\quad R(z,z') = E\,X_z\bar{X}_{z'} = E\,X_{z+z_0}\bar{X}_{z'+z_0} \quad ; \ z, z', z_0 \in X.$

Poniendo $z_0 = -z'$ en (4), se ve que la función covarianza sólo depende de $z-z'$, es decir $R(z,z')=R(z-z',o)$ y abusando de la notación, la representaremos simplemente por $R(z-z')$. Naturalmente, $R(z-z')$, es definida positiva;-ésto es, para todo conjunto arbitrario de vectores $z_1, z_2, \ldots, z_N$ y para toda colección $a_1, a_2, \ldots, a_N$ de números complejos,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_i \bar{a}_j \, R(z_i - z_j) \geq o \quad .$$

Como es bien sabido, las propiedades de segundo - orden de un proceso, son aquellas que se derivan de su función de covarianza. De entre ellas, en nuestro caso, nos - interesa destacar el criterio de continuidad en media cuadrática y aunque su demostración, cuando z varía en un - conjunto arbitrario, T, con la única condición de que las - operaciones efectuadas sobre los elementos de T sean cerradas, (en particular ésto siempre ocurre si $T = R = (-\infty, +\infty)$), puede verse en Loève pag. 142 , nosotros la hacemos aquí - en el caso $T = X$.

<u>TEOREMA I</u>: (Criterio de continuidad en media cuadrática).

a). Un campo aleatorio $\{X_z, \ z \in X\}$ es contínuo - en media cuadrática en un punto $z \in X$, si y sólo si $R(.,.)$ es contínua en **el** punto diagonal $(z,z) \in X{\times}X$.

b). Si $\{X_z,\ z\in X\}$ es contínuo en media cuadrática en cada punto $z \in X$, entonces $R(.,.)$ es contínua en cada punto de XxX.

Demostración: a). Si $R(.,.)$ es contínua en $(z,z) \in XxX$, entonces

$$E\,|X_z - X_{z'}|^2 = (R(z,z) - R(z,z')) +$$

$$+ (R(z',z') - R(z',z)) \xrightarrow[\|z - z'\| \to 0]{} 0.$$

Recíprocamente, si $\{X_z,\ z\in X\}$ es contínuo en media cuadrática en $z \in X$, se tiene

$$R(z', z") - R(z,z) = E\,X_{z'}\bar{X}_{z"} - E|X_z|^2 =$$

$$E(X_{z'} - X_z)\bar{X}_{z"} - E\,X_z\overline{(X_{z"} - X_z)} ,$$

entonces

$$|R(z', z") - R(z,z)| \leq |E(X_{z'} - X_z)\bar{X}_{z"}| +$$

$$|E\,X_z\overline{(X_{z"} - X_z)}|$$

y teniendo en cuenta la desigualdad de Schwartz

$$|R(z',z'') - R(z,z)| \leq \sqrt{E\,|X_{z'} - X_z|^2 \; E|X_{z''}|^2} \; +$$

$$+ \sqrt{E|X_z|^2 \; E|X_{z''} - X_z|^2} \xrightarrow[\substack{\|z-z'\| \to 0 \\ \|z-z''\| \to 0}]{} 0$$

b). Si $\{X_z,\ z \in X\}$ es contínua en media cuadrática en cada punto $z \in X$, entonces

$$|R(z,z') - R(z_1,z_1')| = |E\, X_z \bar{X}_{z'} - E\, X_{z_1} \bar{X}_{z_1'}| =$$

$$= |E(X_z - X_{z_1})\bar{X}_{z'} - E\, X_{z_1} (\overline{X_{z'} - X_{z_1'}})| \leq$$

$$\leq |E(X_z - X_{z_1})\bar{X}_{z'}| + |E\, X_{z_1} (\overline{X_{z'} - X_{z_1'}})| =$$

$$\leq \sqrt{E|X_z - X_{z_1}|^2 \; E|X_{z'}|^2} + \sqrt{E|X_{z_1}|^2 \; E|X_{z'} - X_{z_1'}|^2}$$

$$\xrightarrow[\substack{\|z-z_1\| \to 0\,. \\ \|z'-z_1'\| \to 0\,.}]{} 0$$

El resultado más importante, respecto de la representación armónica de la función covarianza de un proceso estacionario en sentido amplio $\{X_t,\ -\infty < t < +\infty\}$ y cuya de mostración puede verse en E. Wong pag. 94, es el siguiente teorema de Bochner

TEOREMA II : Una función $R(t)$, $-\infty < t < +\infty$, es la función de covarianza de un proceso estacionario en sentido amplio si y sólo si puede representarse en la forma

$$(5) \qquad R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i v t} F(dv) ,$$

donde F es una medida de Borel en la recta real $R=(-\infty,+\infty)$ denominada medida espectral del proceso.

En el caso de tomar R^n como espacio paramétrico, el teorema de Bochner subsiste, con un enunciado totalmente análogo, para la función de covarianza de un campo aleatorio homogéneo y contínuo en media cuadrática, sin mas que cambiar (5) por

$$(6) \qquad R(z) = \int_{R^n} \exp\{2\pi i(v,z)\} F(dv) \quad ,$$

siendo ahora F una medida finita de Borel en R^n y (v,z) el producto escalar $\sum_{i=1}^{n} v_i z_i$, obteniendose una representación para $\{X_z,\ z \in R^n\}$ de la forma

$$X_z = \int_{R^n} \exp\{2\pi i(v,z)\} \hat{X}(dv) \quad ,$$

donde $\hat{X}(.)$ es una función aleatoria, definida sobre los — conjuntos de Borel en R^n y tal que

$$E\,\hat{X}(A)\hat{X}(B) = F(A \cap B)\ .$$

(Para una información adicional remitimos a los textos de E. Wong (7), Yaglon (17) y Gihman-Skorohod (8)).

En el caso de ser el espacio de Hilbert X, el espacio paramétrico, el teorema de Bochner ya no resulta válido, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Sea X el espacio $L_2(I,m)$, donde I es un intervalo cualquiera en R y m la medida de Lebesgue. Sea por otra parte la función $R(z) = \exp\{-\|z\|^2\}$. Evidentemente — $R(z)$ es continua, no negativa y $R(0) = 1$. Sin embargo, no existe ninguna medida μ en (X,B), tal que

$$R(z) = \int \{\exp\, i(z,x)\}\, \mu(dx),$$

ya que si tal medida existiese se tendría que para un sistema ortogonal completo $\{e_j\}$ de X, las variables aleatorias $\{(x,e_j),\ j = 1,2,\ldots\}$ son independientes y de Gauss. Por la ley de los grandes números, tendremos que

$$(7) \qquad \lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (x,e_j)^2 = 1 \quad (\mathrm{mod.}\ \mu)\ .$$

Por otra parte, $x \in X$, se tiene que $x = \sum_j (x, e_j) e_j$ con $\|x\|^2 = \sum_j (x, e_j)^2 < \infty$, lo que supone una contradicción con (7). Así pués, necesitamos imponer algunas condiciones a $R(z)$, lo que haremos basándonos en el teorema de Minlos--Sazonov (cap. I, pag. 25). El siguiente teorema generaliza el de Bochner al caso infinito dimensional y no aparece -- demostrado en la bibliografía por nosotros consultada:

TEOREMA III: La condición necesaria y suficiente para que $R(z)$ sea la función de covarianza de un campo aleatorio homogéneo y contínuo en media cuadrática, es que $R(z)$ sea el funcional característico de alguna medida finita μ en (X, B).

Demostración: La condición es en efecto necesaria, pués si $R(z)$ es el funcional característico de alguna medida finita μ en (X,B), se tiene: a). $R(z)$ es definida positiva; -- b). $R(o) = 1$; c). $R(z)$ es contínua. Así, como consecuencia de a), $R(z)$ será la función de covarianza de algún campo - aleatorio y obviamente depende exclusivamente de z. La condición b) implica por otro lado:

$$R(o) = R(z-z) = E\, X_z \bar{X}_z = E|X_z|^2 = 1 < \infty.$$

Por último, la condición c) implica la continuidad de -- $R(\cdot,\cdot)$, en todo punto diagonal $(z,z) \in X \times X$ y como consecuencia la continuidad en media cuadrática, pués

$$E|X_z - X_{z'}|^2 = \left(R(z,z) - R(z,z')\right) +$$

$$+ \left(R(z',z') - R(z',z)\right) \xrightarrow[\|z-z'\| \to 0]{} 0 .$$

Así pués, $R(z)$ es la función de covarianza de algún campo aleatorio homogéneo y contínuo en media cuadrática. Además facilmente puede construirse un tal campo aleatorio, cuya función de covarianza sea $R(z)$. Para ello, consideremos una sucesión aleatoria, ξ , en X con la distribución

$$P(\xi \in A) = \frac{1}{k}\mu(A) \text{ , donde } k = \mu(X) \text{ ,}$$

para todo conjunto de Borel $A \in B$, (μ designa la medida - definida en (X,B) por $R(z)$). Si ponemos

$$X_z = \sqrt{k} \exp\{ i(\xi,z) + i\varphi\} ,$$

siendo φ una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(-\pi,\pi)$ y φ, ξ, mutuamente independientes, entonces

a). $E X_z = 0$

b). $R(z_1,z_2) = E X_{z_1} \bar{X}_{z_2} = k E\left[\exp\{i(\xi,z_1-z_2)\}\right] =$

$$= \int \exp\{i(x,z_1-z_2)\} \mu(dx).$$

Recíprocamente, supuesto que $R(o) = 1$, (tal suposición es consecuente con la hipótesis de ser X_z una variable aleatoria de segundo orden, pués entonces $R(o) = R(z,z) = E\, X_z \bar{X}_z = E|X_z|^2 < \infty$), puede construirse una familia compatible de distribuciones finito dimensionales, como sigue: Por ser $R(z)$ contínua en z (como consecuencia de la continuidad en media cuadrática) y definida positiva, sobre cada subespacio finito dimensional, L, de X, ésta función será definida positiva y contínua. Por el teorema de Bochner $R(z)$, $z \in L$, es entonces representable en la forma

$$R(z) = \int_L \exp\{i(x,z)\} \mu_L(dx) \quad ,$$

donde μ_L es alguna medida en (L, B_L) para la cual

$$\mu_L(L) = R(o) = 1.$$

Así pués, $R(z)$ será la función de covarianza de un campo aleatorio con espacio paramétrico L.

Puesto que las medidas μ_{L_1} y μ_{L_2}, son compatibles cuando $L_1 \subset L_2$ (cap. I, pag. 16), es decir

$$R(z) = \int_{L_2} \exp\{i(x,z)\} \mu_{L_2}(dx) =$$

$$= \int_{L_1} \exp\{i(x,z)\} \mu_{L_1}(dx) \quad ,$$

$R(z)$ será el funcional característico de una distribución débil μ_*,

$$R(z) = \int \exp\{i(x,z)\}\, \mu_*(dx).$$

Después del lema II de I.2, bastará con ver que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \exp\{-\varepsilon(x,x)\}\, \mu_*(dx) = 0$$

y ésto se reduce a la suficiencia en el teorema de Minlos--Sazonov. La demostración es como sigue:

Haciendo uso de la identidad

$$\exp\{-\varepsilon(x,x)\} = (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{i(z,x) - \frac{(z,z)}{4\varepsilon}\}\, m_L\,(dz)$$

donde m_L es la medida de Lebesgue en L y n_L la dimensión de L, ponemos

$$\int \exp\{-\varepsilon(x,x)\}\, \mu_L(dx) =$$

$$= (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{-\frac{(z,z)}{4\varepsilon}\} \int \exp\{i(z,x)\}\, \mu_L(dx)\; m_L(dx) =$$

$$= (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{-\frac{(z,z)}{4\varepsilon}\}\, R(z)\; m_L(dz),$$

con lo que hemos representado la integral múltiple, como - un producto de integrales simples. Entonces

$$1 - \int \exp\{-\varepsilon(x,x)\} \mu_L(dx) =$$

$$= (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{-\frac{(z,z)}{4\varepsilon}\} (1 - R(z))\ m_L(dz) =$$

$$= (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{-\frac{(z,z)}{4}\} \operatorname{Re}(1 - R(z))\ m_L(dz).$$

Sea S_δ un operador nuclear, tal que $\operatorname{Re}(1 - R(z)) < \delta$ cuando $(S_\delta z,z) < 1$ y $\{e_k\}$ una base de L. Entonces, te-- niendo en cuenta que

$$(S_\delta z,z) = \sum_{k,j} (S_\delta e_k, e_j)(z,e_k)(z,e_j)$$

y que

$$(2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\{-\frac{(z,z)}{4}\} (z,e_k)(z,e_j) m_L(dz) =$$

$$= 8\varepsilon\delta_j^k \quad ; \quad \delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}$$

se tiene

$$1 - \int \exp\{-\varepsilon(x,x)\} \mu_L(dx) \leq$$

$$\leq (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n_L} \int \exp\left\{-\frac{(z,z)}{4\varepsilon}\right\} (\delta + 2(S_\delta z,z)) m_L(dz) =$$

$$= \delta + 8\varepsilon \sum_{1}^{n_L} (S_\delta e_k, e_k) ,$$

así pués

$$1 - \int \exp\{-\varepsilon(x,x)\} \mu_*(dx) = \delta + 8 \operatorname{tr} S_\delta .$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \downarrow o$ y $\delta \downarrow o$, la condición del - lema II de I. 2 queda satisfecha.

Como consecuencia del teorema anterior, las condines bajo las cuales $R(z)$ es la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo y contínuo en media cuadrática , vienen dadas por el teorema siguiente:

<u>TEOREMA III</u>. (De minlos-Sazonov): La condición necesaria y suficiente, para que la función complejo valuada $R(z)$, contínua y definida positiva, sea la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo y contínuo en media cuadrática, es que exista un operador nuclear, S_ε , $\forall \varepsilon > o$, tal que $|R(o) - R(z)| < \varepsilon$, cuando $(S_\varepsilon z, z) < 1$.

IV. 3. CAMPOS ALEATORIOS GAUSSIANOS.

Hacemos a continuación una mención especial a aquellos campos aleatorios, homogéneos y contínuos en media cuadrática, cuya función de covarianza es de la forma

$$(1) \qquad R(z) = \exp\left\{i(a,z) - \frac{1}{2}(Az,z)\right\} ,$$

donde $a \in X$ y A es un operador en X, acotado y simétrico. Después del teorema de Minlos-Sazonov, la función $R(z)$ será la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo y contínuo en media cuadrática, si A es nuclear. En efecto, puesto que

$$1 - \operatorname{Re} R(z) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\} (1 - \cos(a,z)) \quad .$$

Si $\quad 1 - \operatorname{Re} R(z) < \varepsilon$, entonces $\quad 1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\} < \varepsilon$
y $(Az,z) < 2 \ln \dfrac{1}{1-\varepsilon}$, entonces

$$(Az,z) < (S_\varepsilon z,z) \ln \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} ,$$

y de aquí que las condiciones del teorema de Minlos-Sazonov quedan satisfechas cuando A es nuclear.

A los campos aleatorios $\{X_z, z \in X\}$, cuya función de covarianza, $R(z)$, es de la forma (1), los denominamos -- <u>campos aleatorios Gaussianos</u>, debido a que una medida μ en (X,B), se denomina Gaussiana, si cada funcional lineal acotado $F_z = (z,x)$, es una variable aleatoria Gaussiana. Conocida la función de covarianza, queda automáticamente determinada una medida Gaussiana en (X,B), de la cual $R(z)$ es la transformada de Fourier. Recíprocamente, dada una medida μ en (X,B), cuyo valor medio sea "a" y su operador de co-- rrelación "A" , (cap. I, pag. 24), queda perfectamente de-- terminada la función de covarianza de un campo aleatorio, - homogeneo y contínuo en media cuadrática, por la expresión (1), ya que recordando la definición de N-sima derivada dévada débil y su relación con los momentos funcionales

$$R^{(N)}(o, z_1,\dots,z_N) = i^N \sigma_N(z_1,\dots,z_N) ,$$

dadas en el capítulo I, se tiene

$$(2) \qquad R^{(1)}(o,z) = i(a,z)$$

$$R^{(2)}(o, z_1,z_2) = -((a_1,z_1)(a_1,z_2) + (Az_1,z_2)).$$

Entonces, de la primera de éstas expresiones

$$\sigma_1(z) = \frac{1}{i} R^{(1)}(z) = (a,z)$$

y de la segunda

$$\sigma_2(z_1,z_2) = \frac{1}{i^2} R^{(2)}(o,z_1,z_2) = (a,z_1)(a,z_2) + (Az_1,z_2)$$

de donde finalmente, resulta

$$(Az_1,z_2) = \sigma_2(z_1,z_2) - \sigma_1(z_1)\sigma_1(z_2) \quad ,$$

lo que demuestra la afirmación anterior.

Dado que la función exponencial es una función cilíndrica, todas las proyecciones finito dimensionales de la medida Gausiana por ella determinada, son a su vez Gaussianas sobre los correspondientes subespacios finito dimensionales. Consecuentemente, sus transformadas de Fourier, seran funciones de covarianza de campos aleatorios Gaussianos en dichos subespacios.

La propiedad más interesante de los campos aleatorios Gaussianos es que <u>su función de covarianza puede representarse como un producto de funciones de covarianza de</u>

campos aleatorios, definidos sobre los subespacios finito dimensionales y la medida por ella determinada en (X,B), es posible representarla como producto de las medidas definidas, sobre los correspondientes subespacios finito dimensionales de X.

En efecto. Supongamos en primer lugar que el operador "A" es estrictamente positivo, en cuyo caso diremos que la medida μ es no degenerada. Sea entonces un sistema ortogonal completo, $\{e_j\}$, de autovectores de de A y $\{\lambda_j\}$ los correspondientes autovalores. Sea L_n el subespacio engendrado por los vectores $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $z = \sum_k \xi_k e_k$ un vector de L_n. Entonces, para todo z de L_n, podemos escribir

$$R(z) = \exp\left\{ i \sum_{1}^{n} \xi_k \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} \xi_k^2 \lambda_k \right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{ i\, \xi_k \alpha_k - \frac{1}{2} \xi_k^2 \lambda_k \right\}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad

$$\exp\left\{ i\, \xi_k \alpha_k - \frac{1}{2} \xi_k^2 \lambda_k \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \int \exp\left\{ i\, \xi_k z - \frac{(z-\alpha_k)^2}{2\lambda_k} \right\} dz$$

se concluye que

$$R(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \int \exp\{i\, \xi_k \tau_k - \frac{\tau_k^2}{2\lambda}\}\, d\tau .$$

El anterior producto de integrales, puede convertirse en una integral simple, mediante las consideraciones siguientes

$$x = \sum_1^n \tau_k\, e_k \quad ; \quad a_n = \sum_1^n \alpha_k e_k \quad ; \quad m_{L_n}(dx) = \prod_1^n d\tau_n$$

donde m_{L_n} designa la medida de Lebesgue en L_n. Se tiene

$$R(z) = \Big(\prod_{k=1}^{n} (2\pi\lambda_k)^{-\frac{1}{2}} \Big) \int \exp\{i(z,x) - \frac{1}{2}(A^{-1}(x-a_n), x-a_n)\} m_{L_n}(dx)$$

que comparada con la expresión general de la función de covarianza (funcional característico de una medida)

$$R(z) = \int \exp\{i(z,x)\} \mu(dx) \quad ,$$

nos proporciona la expresión de μ_{L_n} en L_n. Para todo conjunto de Borel, $B \in B_{L_n}$:

$$\mu_{L_n}(B) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\lambda_k)^{-\frac{1}{2}} \int_B \exp\{-\frac{1}{2}(A^{-1}(x-a_n), x-a_n)\}\, m_{L_n}(dx).$$

Análogamente, si consideramos el subespacio $L^{(k)}$ engendrado por e_k, para todo conjunto, B, del σ-álgebra $B_{L^{(k)}}$, construida sobre $L^{(k)}$, se tiene

$$\mu_{L^{(k)}}(B) = (2\pi\lambda_k)^{-1/2} \int_B \exp\{-\frac{1}{2}(A^{-1}(x-\alpha_k e_k), x-\alpha_k e_k)\} m_{L^{(k)}}(dx)$$

y puesto que $L_n = L^{(1)} \times L^{(2)} \times \dots \times L^{(n)}$, tendremos que

$$\mu_{L_n} = \prod_{k=1}^{n} \mu_{L^{(k)}} .$$

Como X puede ser considerado como un subconjunto del conjunto producto cartesiano infinito $L_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} L^{(k)}$, podemos considerar la medida $\prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L^{(k)}}$ en éste conjunto. Resulta fácil ver, que la medida así definida en (L_∞, B_∞) y la medida μ en (X,B), son identificables. En efecto, sea $(x_1, x_2, \dots)$ un punto de L_∞ y

$$C = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in B_k \ , \ B_k \in B_{L^{(k)}}, k=1,\dots,N\}$$

un conjunto cilíndrico en L_∞. De acuerdo con la definición de producto infinito de medidas, se tiene

$$(\prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L^{(k)}})(C) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{L^{(k)}}(B_k) =$$

$$= \mu(\{x : P_{L(k)}(x) \in B_k , k = 1,\ldots,n \}) .$$

Entonces, la medida $\left(\prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L(k)}(B_k)\right)(C)$, puede ser extendida al σ-álgebra mínima B_{L_∞} , que contiene todos los conjuntos cilíndricos en L_∞. Es decir, la medida μ puede extenderse a L_∞, poniendo para cada conjunto medible $C \in B_{L_\infty}$

$$\mu_{L_\infty}(C) = \mu(C \cap X)$$

y para todo conjunto cilíndrico C de L_∞

$$\mu_{L_\infty}(C) = (C \cap X) = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L(k)} (C) ,$$

lo que implica que ambas coinciden en B_{L_∞}, ésto es

$$\mu_{L_\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L(k)} .$$

Como μ_{L_∞} en (L_∞, B_{L_∞}), tiene como soporte a X y X es un conjunto medible en B_L, se tiene

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,k}$$

donde los $C_{n,k}$ son los cilindros de la forma

$$C_{n,k} = \{(x^1, x^2, \dots) : \sum_{1}^{n} (x^i, e_i)^2 \leq k;\ x^i \in L_i\} \ ,$$

lo que significa que μ_{L_∞} y μ se identifican, por lo que puede escribirse

(3) $$\mu = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_{L}(k) \ .$$

Así, una medida Gaussiana, es un producto infinito de medidas definidas en un sistema ortogonal de subespacios unidimensionales.

En el caso de medidas Gaussianas degeneradas, (A no es estrictamente positivo), consideremos la descomposición $X = X_1 \times X_2$, donde X_1 es la clausura del rango del operador A y X_2 su complemento ortogonal. Sean por otra parte μ_1 la proyección de μ en X_1 y μ_2 la proyección de μ en X_2. μ_1 y μ_2 determinan las funciones de covarianza de sendos campos aleatorios $R_1(z)$ y $R_2(z)$ con espacios paramétricos respectivos X_1 y X_2 :

$$R_1(z) = \exp\{i(a_1, z) - \frac{1}{2}(Az, z)\} \ , \ a_1 = P_{X_1} a \ ; \ z \in X_1$$

$$R_2(z) = \exp\{i(a_2, z)\} \qquad ; \ a_2 = P_{X_2} a \ ; \ z \in X_2$$

observándose que

$$R(z_1 + z_2) = R(z_1)R(z_2) \ , \quad z_1 \in X_1 \quad , \quad z_2 \in X_2 \ .$$

En primer lugar, veamos que la anterior igualdad implica - que $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Para ello resulta suficiente demostrar que para todo par de funciones cilíndricas $\varphi_1(x_1)$ en X_1 y $\varphi_2(x_2)$ en X_2, tenemos

$$(4) \qquad \int \varphi(x)\,\mu(dx) = \int_{X_1} \varphi_1(x_1)\,\mu_1(dx_1) \int_{X_2} \varphi_2(x_2)\,\mu_2(dx_2),$$

donde

$$\varphi(x) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \qquad \text{si} \qquad x = x_1 + x_2 \ .$$

Si

$$\varphi_k(x) = \exp\{i(z_k, x_k)\} \ , \quad z_k \in X_k \ , \quad (k = 1,2) \ ,$$

entonces $\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)$ implica (3). Esto tambien es cierto para funciones de la forma $\varphi_k(x_k) = \alpha_{i,j} \exp\{i(z_k^j, x_k)\}$. Por medio de éstas funciones, puede aproximarse, en el sentido de la convergencia puntual, una función contínua arbitraria, de forma que (3) se verifique. Recíprocamente, es - fácil ver que cuando $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, entonces $R(z_1 + z_2) = R(z_1)\,R(z_2)$, con lo que nos queda el teorema siguiente

<u>TEOREMA I</u> : Si X_1 y X_2 son dos subespacios ortogonales - de X tales que $X = X_1 + X_2$, μ una medida en (X,B), μ_k la

proyección de μ sobre X_k $(k = 1,2)$ y $R(z)$, $R_k(z)$ las funciones características de μ y μ_k respectivamente, entonces, la condición necesaria y suficiente para que $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ es que

$$R(z_1 + z_2) = R(z_1)R(z_2).$$

Volviendo a las medidas Gaussianas, obviamente μ_1 será una medida no degenerada en X_1, por lo que $\mu = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_L(k)$, (sólo en X_1). La medida μ_2, por ser $R_2(z) = \exp\{i(a_2,z)\}$ es una medida concentrada en el punto a_2, es decir, para todo $B \in B_{X_2}$

$$\mu_2(B) = 1 \qquad \text{si} \qquad a_2 \in B$$

$$\mu_2(B) = 0 \qquad \text{si} \qquad a_2 \notin B .$$

μ_2 puede ser representada en la forma (3), eligiendo una sucesión arbitraria de subespacios ortogonales unidimensionales L''_n en X_2. Si $\sum_n L''_n$ es denso en X_2, denotando por $a''_n = P_{L''_n} a_2$ y por μ''_n la medida en $B_{L''_n}$ para la cual

$$\mu''_n(B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a''_n \in B \quad , \qquad B \in B_{L''_n} \\ 0 & \text{si} \quad a''_n \notin B \end{cases}$$

tenemos $\mu_2 = \prod \mu_n''$, ya que μ_1 y μ_2 son cada una de e-llas medidas producto, tambien lo será μ.-

IV.4. CAMPOS ALEATORIOS INVARIANTES MEDIANTE TRASLACIONES Y TRANSFORMACIONES ORTOGONALES.

Sea $\{X_z, z \in X\}$, un campo aleatorio y $R(z,z')$ su función de covarianza. Diremos que tal campo aleatorio es invariante para una clase "T" de transformaciones en X, cuando para todo elemento t de T, $R(z,z') = R(tz,tz')$, es decir

$$(1) \qquad E X_z \bar{X}_{z'} = E X_{tz} \bar{X}_{tz'} \quad , \quad \forall t \in T .$$

El objeto de éste párrafo es, en primer lugar, el estudio de algunas propiedades de la función covarianza de un campo aleatorio, invariante mediante traslaciones y transformaciones ortogonales. Anteriormente, se definieron en IV.2, los campos aleatorios homogéneos, como campos aleatorios invariantes mediante traslaciones. Esta condición, junto con la de continuidad en media cuadrática, dieron lugar al teorema de representación III de IV.2, que asegura para $R(z)$ la forma

$$(2) \qquad R(z) = \int \exp\{i(z,x)\} \mu(dx) .$$

Por otra parte, sabemos que la medida de Gauss en R^n, dada por

$$p_t(B) = (2\pi t)^{-n/t} \int e^{-x^2/2t} dx \quad , \quad B \in B(R^n) ,$$

es invariante por rotaciones. En el caso del espacio de Hilbert, ésto puede no ser así; no obstante, puede demostrarse, que tal medida posee la propiedad de invarianza rotacional en un otro espacio de Hilbert inmerso en el original (para la demostración vease H. Kuo, pag. 33, ref. (1o)). Esto que precede, nos lleva a interrogarnos sobre las invarianzas de la medida μ determinada en (X,B) por el funcional característico (2). Este será el segundo objetivo de éste apartado.-

Los estudio de invarianzas en campos aleatorios, son muy actuales. Así por ejemplo y por citar alguno de los más racientes, Akio Noda ha estudiado en una clase de campos aleatorios Gaussianos en R^n, la propiedad que el autor denomina de "invaranza proyectiva" (Gaussian randon field with proyective invariance, Nagoya Math. J. vol. 59, (1.975), 65-66). Un campo aleatorio $\{X_z, z \in R^n\}$, posee la propiedad de invarianza proyectiva, si su función de covarianza permanece invariante por traslaciones, transformaciones ortogonales, semejanzas e inversiones de centro prefijado z_o,-

encontrando el citado autor, que la condición necesaria y suficiente para la invarianza proyectiva es que la función de covarianza del campo, tenga la forma

$$R(z,z') = |cte| \, \|z - z'\|^{\alpha} \quad ; \qquad 0 < \alpha \leq 2. —$$

Por otra parte, toda medida con la propiedad de invarianza rotacional en un espacio de Hilbert (más concretamente en el dual de un espacio nuclear), puede ser expresada como una "superposición" de medidas Gaussianas. Este resultado, debido a Y. Umemura (ref. (16)), lo expondremos brevemente, (teoremas I y II y corolario de II), después de algunas definiciones previas. (Para las demostraciones remitimos a (16)). -

Sea E un espacio nuclear, H su completado mediante una norma Hilbertiana contínua $\|.\|$ y E^{*} el dual de E.- Entonces, puede suponerse $E \subset H \subset E^{*}$.

Diremos que un operador ortogonal u en H es una <u>rotación de E</u>, si satisface las siguientes condiciones

(1) —. u aplica E en E.

(2) $\quad$ -. $\quad u$ es homeomórfico en E.

Todas las rotaciones de E, forman un grupo, que - se denota por $O(E)$ y se denomina <u>grupo de las rotaciones de E</u>. Si se tiene en cuenta que $u = u^{*-1}$, $O(E)$ puede -- ser considerado como un grupo de transformaciones de E^* en sí mismo.

Sea ahora, un grupo, G, de transformaciones ho-- meomórficas de E^* en sí mismo. Dada una medida μ en E^*, se define la transformada de $t_g\mu$, como sigue

(3) $\quad t_g\mu(A) = \mu(gA)$, $\quad$ para todo conjunto de Borel A.

Si $\mu = t_g\mu$, $\forall g \in G$, se dirá que μ es <u>G-inva-- riante</u>. Si $t_g\mu$ es absolutamente contínua con respecto a μ, $\forall g \in G$, se dirá entonces que μ es <u>G-casi-invariante</u>. Fi nalmente, μ, se dirá <u>G-egórdica</u>, si μ es G-casi-invariante y la condición $A = gA$, $g \in G$, implica que $A = \emptyset$ ó $A = E^*$ c.s.. En el caso que $G = O(E)$, se dice simplemente que es <u>O-invariante</u> o <u>O-egórdica</u>.

Ya que $E \subset E^*$, las traslaciones por elementos - de E en E^* pueden ser definidas por $x \longrightarrow x + \xi$. To-- das éstas traslaciones forman un grupo identificable a E . De aquí se siguen los conceptos de <u>E-casi-invarianza</u> y -

y E-casi-egordicidad.

Es fácil ver que la función

$$(4) \qquad \Theta(\xi) = \exp\left\{-\frac{c^2}{2}\|\xi\|^2\right\} , \quad (c > 0) \quad ,$$

es contínua y definida positiva en E. La correspondiente medida, μ_c , en E^* , es la medida de Gauss con varianza c^2. Puede demostrarse que μ_c es E-egórdica y O-invariante. — Por otra parte, si $c \neq c'$, μ_c es singular respecto de $\mu_{c'}$.

El teorema siguiente nos proporciona una caracterización de medidas O-invariantes como una superposición de medidas Gaussianas:

TEOREMA I (Umemura): Una medida μ en E^* es O-invariante si y sólo si existe un número real $\alpha \geq 0$ y una medida finita $m(c)$ en el intervalo $(0,\infty)$, tal que para todo conjunto de Borel A en E^*

$$(5) \qquad \mu(A) = \int_{0<c<\infty} \mu_c(A)\, dm(c) + \alpha\delta(A) \quad ,$$

donde δ denota la medida de Dirac en el origen de E^*. —

La suficiencia de la condición (5) es evidente. -

Para la demostración de la necesidad, Umemura necesita de los lemas siguientes, del primero de los cuales se encontrará una nueva versión proximamente.

<u>LEMA I</u>: Una medida μ en E^* es O-invariante, si y sólo si su funcional característico $\theta(\xi)$ depende exclusivamente de $\|\xi\|$. —

<u>LEMA II</u> (teorema de Berstein): Si una función $\varphi(t)$, definida en $[o,\infty)$, es completamente monótona y contínua a la derecha de $t = o$, existe entonces una medida finita $\bar{m}(s)$ en $[o,\infty)$, tal que

$$\varphi(t) = \int_{o \leq s < \infty} \exp\{-st\} \, d\bar{m}(s) \quad .$$

Una función se dice completamente monótona, si

$$(-1)^n \Delta_\alpha^{(n)} \varphi(t) \equiv \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (k\alpha + t) \geq o \; ,$$

para $n = o,1,2,\ldots$, $t \geq o$, $\alpha \geq o$. —

<u>LEMA III</u>: Si $\varphi(\|\xi\|^2)$ es positiva definida en E, entonces

a). $\varphi(\|\xi\|^2) \geq o$

b). $\Delta_{\alpha}^{(1)} \varphi(\|\xi\|) \equiv \varphi(\|\xi\|^2 + \alpha) - \varphi(\|\xi\|^2)$, es

negativa definida.

Nota: Para la validez del lema III es esencial que E sea - infinito dimensional.

TEOREMA II (Umemura): Sea μ una medida O-invariante en E^*.

a). Si μ es E-casi-invariante, existe entonces - una medida **finita** $m(c)$ en $(0,\infty)$ tal que

$$\mu(A) = \int_{0<c<\infty} \mu_c(A)dm(c) .$$

b). Si μ es E-egórdica, entonces $\mu = \mu_c$, para al- gun $c > 0$.

c). Si μ es O-egórdica, entonces $\mu = \mu_c$ para al- gun $c > 0$ ó $\mu = \delta$.

COROLARIO: Para toda medida O-invariante, con excepción de la medida de Dirac, la E-egordicidad es equivalente a la - O-egordicidad. ___

Volviendo a nuestro espacio de Hilbert real y separable, X, para la consecución de los resultados, que en párrafos posteriores exponemos, necesitamos demostrar el teorema siguiente:

<u>TEOREMA III</u>: La condición necesaria y suficiente para que un campo aleatorio $\{X_z, z \in X\}$, contínuo en media cuadrática y media costante, sea invariante mediante traslaciones y transformaciones ortogonales, es que su función de covarianza dependa solamente de $\|z - z'\|$; es decir

(3) $$R(z,z') = R(\|z - z'\|).$$

Demostración: La necesidad es trivialmente cierta. Por otra parte y puesto que las hipótesis de suficiencia implican la homogeneidad del campo, la función $R(z,z')$ dependen solamente del vector $z - z'$

$$R(z,z') = E\, X_z \bar{X}_{z'} = E\, X_{z-z'} \bar{X}_o = R(z - z').$$

Si consideramos ahora un sistema ortonormal completo $\{e_j\}$ de X y t una transformación (rotación) que lleva el vector $z-z'$ sobre la recta vectorial $L_1 = Re_1$, se tiene

$$R(z - z') = E\, X_{t(z-z')} \bar{X}_{t(o)} = E\, X_{\|z-z'\| e_1} X_o =$$

$$= R(\| z - z' \|),$$

lo que demuestra (3). ——

Nuestro objetivo ahora, es ver que la medida en (X,B) determinada por la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo y contínuo en media cuadrática e invariante mediante transformaciones ortogonales, posee también ésta última propiedad.

<u>TEOREMA IV</u>: La medida μ determinada en (X,B) por la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo , contínuo en media cuadrática e invariante mediante transformaciones ortogonales, es tambien invariante para éste tipo de transformaciones.

Demostración: Hemos de ver que para toda transformación ortogonal t en X, se verifica

(4) $\mu(B) = \mu(tB)$, $\forall B \in \mathbb{B}$,

donde μ designa la medida definida en (X,B) por

$$R(\| z \|) = \int \exp \{ i(z,x) \} \mu(dx).$$

Puesto que $R(\|tz\|) = R(\|z\|)$, se tiene

$$(5) \qquad \int \exp\{i(tz,x)\}\mu(dx) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx)$$

y ya que $(tz,x) = (tz,tt^{-1}x) = (z,t^{-1}x)$, mediante un cambio de variable de integración, tenemos

$$(6) \qquad \int \exp\{i(tz,x)\}\mu(dx) = \int_{tX} \exp\{i(z,y)\}\mu(tdy) =$$

$$= \int \exp\{i(z,x)\}\mu(tdx).$$

De las igualdades (5) y (6), se sigue que $\forall\, z \in X$ y para toda transformación ortogonal t

$$(7) \qquad R(\|z\|) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu(dx) = \int \exp\{i(z,x)\}\mu(tdx)$$

y puesto que el funcional característico de una medida, se carateriza por el hecho de determinar unívocamente a ésta, (cap. I, sec. I.3), de la igualdad (7) se sigue (4).—

Puesto que para la definición de $R(z)$, es suficiente conocer μ_L , para un subespacio finito dimensional L (meramente para un subespacio unidimensional L_z == Rz), la igualdad

$$(8) \qquad R(\|z\|) = \int_L \exp\{i(z,x)\}\mu_L(dx) =$$

$$= \int_L \exp\{i(z,x)\}\mu_L(tdx),$$

obtenida de la misma forma que (7), pone de manifiesto la propiedad

$$\mu_L(B) = \mu_L(tB) \quad , \quad B \in \mathbb{B}_L$$

para toda transformación unitaria t en L. De aquí el siguiente corolario

<u>COROLARIO I</u>: Las proyecciones finito dimensionales, μ_L , de la medida μ determinada en (X,B) por la función de covarianza de un campo aleatorio homogeneo y contínuo en media cuadrática, son invariantes mediante transformaciones ortogonales en L.—

Como consecuencia de los teoremas III y IV, se tiene el suiguiente corolario, que coincide con el lema I, caso de identificar X a E^*.

<u>COROLARIO II</u>: Una medida μ en (X,B) es invariante mediante transformaciones ortogonales, si y sólo si su funcio—

nal característico, $R(z)$, depende exclusivamente de $\|z\|$.-

IV.5. CAMPOS ALEATORIOS HOMOGENEOS E ISOTROPICOS.

Un campo aleatorio $\{X_z, z \in X\}$, homogéneo y contínuo en media cuadrática se dice que es "homogéneo e isotrópico", si su función de covarianza $R(z,z')$, depende exclusivamente de la norma del vector $z - z'$; ésto es

(1) $$R(z,z') = R(\|z - z'\|).$$

Ya que un campo aleatorio "homogéneo e isotrópico es necesariamente homogéneo, por el teorema de representación III de IV.2, tendremos

(2) $$R(\|z\|) = \int \exp\{i(z,x)\} \mu(dx).$$

Por otra parte, las consideraciones de invarianza para éste tipo de campos aleatorios, efectuadas en el apartado anterior, así como que el funcional característico de una medida, μ, determina todas las proyecciones finito dimensionales μ_{L_n}, sugieren la construcción en L_n de un sistema de coordenadas polares $(\|z\|, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, con cuyo concurso puede encontrarse una nueva versión del teorema de la covarianza III de I .2, denominada "versión isotrópica". Tal sistema de coordenadas polares en L_n, se construye recursivamente como sigue:

Sea $\{e_j\}$ un sistema ortogonal completo de L_n. Consideremos la esfera (n-1)-dimensional $S^{n-1} = \{z \in L_n : \|z\| = 1\}$ en L_n. Todo punto $z \in L_n$ puede ser determinado unívocamente por su distancia, $\|z\|$, al origen y por el punto de intersección, con S^{n-1}, de la recta que lo une con el origen,

(3) $$\frac{z}{\|z\|} = \left(\frac{\alpha_1}{\|z\|}, \frac{\alpha_2}{\|z\|}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\|z\|}\right).$$

Por tanto, todo $z \in L_n$ está determinado unívocamente por $\|z\|$ y $n-1$ coordenadas que identifican un punto de S^{n-1}. Si consideramos la esfera unidad S^1 en L_2, cada punto $z \in S^1$, puede ser representado de la forma

(4) $$z = (\cos \theta_1 , \operatorname{sen} \theta_1) \quad , \quad o \leq \theta < 2\pi .$$

Así pués, S^1 tiene una sóla coordenada θ_1. Supongamos $L_k \subset L_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ y para S^n elegimos el punto $e = (1,o,\ldots,o)$ denominándole "polo norte". El conjunto de los puntos de S^n con $\alpha_1 = \cos \theta_n$, forman una esfera (n-1) -dimensional, con radio $\operatorname{sen} \theta_n$, lo que implica que si un sistema de coordenadas $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, ha sido ya definido para S^{n-1}, automáticamente tendremos un sistema $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ para S^n (con la particularidad de que θ_n = cte represen_ ta la esfera S^{n-1}). Así pués, partiendo de (4), podremos - encontrar un sistemas de coordenadas $(\|z\|, \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ en L_n.

Entonces, $\forall z \in L_n$, se tiene

$$R(\|z\|) = \int \exp\{i(z,x)\} \mu_{L_n}(dx)$$

y para toda transformación unitaria t

$$R(\|tz\|) = R(\|z\|) = \int \exp\{i(tz,x)\} \mu_{L_n}(dx).$$

Puesto que $(tz,x) = (tz, tt^{-1}x) = (z,t^{-1}x)$, mediante un - cambio de variable de integración se obtiene

$$(5) \qquad \int_{L_n} \exp\{i(tz,x)\} \mu_{L_n}(dx) = \int_{tL_n} \exp\{i\ell(z,u)\} \mu_{L_n}(t(d\ell)) =$$

$$= \int_{L_n} \exp\{i(z,x)\} \mu_{L_n}(t(dx)).$$

De (4) y (5) se sigue que $\forall z \in L_n$ y para cada ro- tación t.

$$\int_{L_n} \exp\{i(z,x)\} \mu_{L_n}(dx) = \int_{L_n} \exp\{i(z,x)\} \mu_{L_n}(t(dx)),$$

y puesto que la medida μ, con las condiciones y consistencia expresadas en el capítulo I, es una medida isotrópica en el sentido de que

$$\mu_{L_n}(A) = \mu_{L_n}(tA)$$

para todo conjunto de Borel $A \in B_{L_n}$, tomando ahora $z \in Re$, esto es $\alpha_1 = \|z\|$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = o$ y haciendo uso de la isotropía de μ_{L_n}, se tiene:

$$(6) \qquad R_{L_n}(\|z\|) = \int_o^{\infty} \int_{S^{n-1}} \exp\{ i\ell \|z\| \cos \varphi_{n-1} \} d\Omega_{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}} F_o(d\ell)$$

donde $d\Omega$ es un elemento de superficie de la esfera unitaria S^{n-1}. El conjunto de los puntos de S^{n-1}, qué tienen la n-sima coordenada igual a φ_{n-1}, es una esfera de dimensión n-2, de radio $\operatorname{sen}\varphi_{n-1}$ y cuya superficie puede ser dada por $\operatorname{sen}^{n-2}\varphi_{n-1}\, \text{area}(S^{n-2})$, y puesto que el integrando sólo depende de φ_{n-1}, tenemos

$$R(z) = K\int_o^{\infty} \int_o^{\pi} \exp\{i\ell \|z\| \cos\varphi_{n-1}\} \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} F_o(d\ell)$$

donde K ea el area total de S^{n-2}. Incluyendo K en F_o y puesto que

$$\int_0^{\pi} e^{i\ell \|z\| \cos\varphi} \operatorname{sen}^{n-2}\varphi \, d\varphi = \frac{J_{(n-2)/2}(\ell \|z\|)}{(\ell \|z\|)^{(n-2)/2}}$$

(Watson-Whittaker. ref. (5), pag. 367), se llega a

$$(7) \qquad R(\|z\|) = \int_0^{\infty} \frac{J_{(n-2)/2}(\ell \|z\|)}{(\ell \|z\|)^{(n-2)/2}} F_o(d\ell).$$

En el caso de tomar L bidimensional, la representación (7) queda

$$(8) \qquad R(\|z\|) = \int_0^{\infty} J_o(\ell \|z\|) \, F_o(d\ell),$$

con lo que llegamos así al teorema siguiente, que constituye la "versión isotrópica" del teorema de la covarianza:

<u>TEOREMA I</u>: La función $R(z)$ es la función de covarianza de un campo aleatorio, homogéneo e isotrópico y contínuo en media cuadrática, si y sólo si puede representarse en las formas (7) y (8), siendo F_o una medida de Borel, finita, en (o,∞) que denominamos "medida espectral" del campo aleatorio.-

Como consecuencia de todo lo anterior, es posible eneunciar ahora de una forma distinta, el corolario II del teorema IV de IV.4, así como el lema I de dicho apartado, caso de identificar X a E^*:

<u>COROLARIO</u>: Una medida μ en (X,B) es invariante mediante - transformaciones ortogonales (O-invariante si $X = E^*$) si y sólo si su funcional característico puede representarse en las formas (7) y (8). ----

B I B L I O G R A F I A

1).- AKIO NODA: "Gaussian randon field with proyective invariance". Nagoya Math. J. vol. 59, 1.975, 65-66.

2).- A. E. TAYLOR: "Introduction to funtional analysis". - John Wiley 1.967.

3).- A. V. SKOROHOD: "Integration in Hilbert Spaces". -- Springer-Verlag, 1.974.

4).- D. KANNAN and PL. KANNAPPAN: " On characterization of Gaussian measures in a Hilbert space". Ann. Inst. Henri Poincaré, sec B, vol XI nº 4,1.975.

5).- E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: "A course of modern analysis". Cambridge University Press. 1.969.

6).- ERDELYI - MANUS - OBERHETTINGER - TRICOMI: "Higher - transcendental funtions". Mc. Graw-Hill, 1.953.

7).- E. WONG: "Stochastic processes in information and -- dynamical systems". Mc. Graw-Hill, 1.971.

8).- GIHMAN and A. V. SKOROHOD: " The theory of stochastic processes". T. II. Springer-Verlag, 1.975.

9).- H. HOCHSTADT: "Les funtions de la phisique mathematique". Masson et Cie, 1.973.

1o).- HUI-HSIUNG KUO: "Gaussian measures in Banach spaces". Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, 1.975.

11).- K. ITO-Mc KEAN Jr. : "Diffusion processes end their sample path". Springer-Verlag, 1.974.

12).- B. V. GNEDENKO and A. V. KOLMOGOROV: "Unit distributions for sums of independent random variables". — Addisson-Wesley Publishim Company.

13).- M. LOEVE: "Probability theory". Vam Nostrand, 1.96o.

14).- REY PASTOR-CASTRO: "Funciones de Bessel y aplicaciones". Dossat, 1.958.

15).- W. FELLER: "And introduction to probability theory - and its aplicatios". Vol II. John Wiley. New York ,- 1.966.

16).- YASUO UMEMEURA: "Rotationally invariant measures in - the dual space of a nuclear space". Proc. of Japan - Academy, nº 1, 1962, 15-37.

17).- YAGLOM, A. M. : "Second Order homogeneus randon fields". Berkeley Symp. Math. Stad. and Prob.

18).- KENNETH S. MILLER: "Complex random fields". Information sciences 9, 185-225 (1.975)

19).- H. P. McKEAN JR. : "The Bessel motion and a singular integral equation". Mem. Coll. Sci. Univ. Kiôto Ser. A, Math. 33, 317-322.

20).- H. P. McKEAN JR. : " A Skorohod integral equation for a reflecting barrier diffussion". J. Math. Kyôto Univ. 3, 85-88 (1.963).

21).- A. RENYI : " Cálculo de Probabilidades". Ed. Reverté 1.976.