

T 11-41

**UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS**

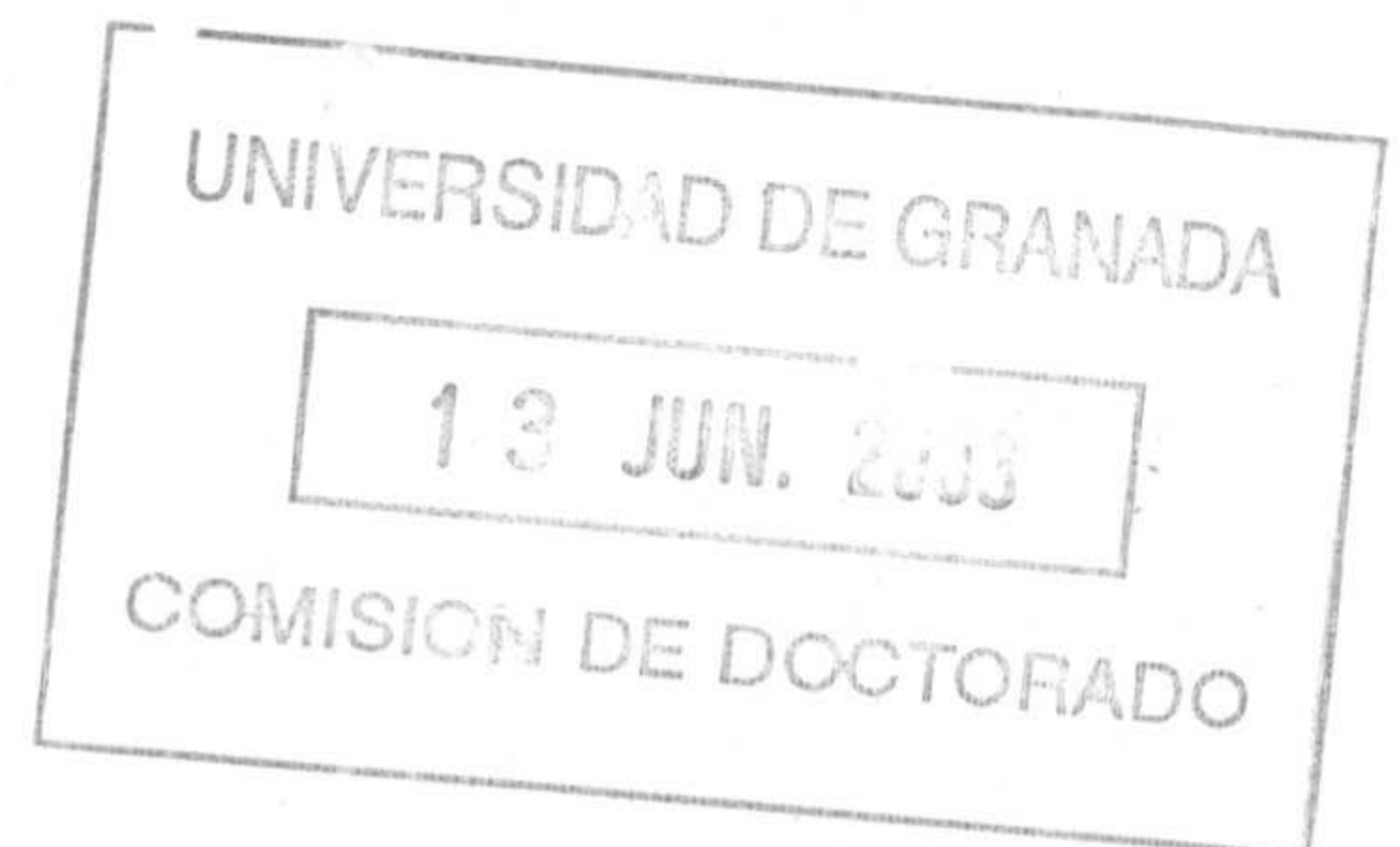


UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 11/7/03
ENTRADA NUM. 2218

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E
INVESTIGACIÓN OPERATIVA**

**REPRESENTACIÓN Y SIMULACIÓN DE PROCESOS
FRACTALES MULTIPARAMÉTRICOS**

TESIS DOCTORAL



**ROSAURA FERNÁNDEZ PASCUAL
JUNIO 2003**

TESIS DOCTORAL

REPRESENTACIÓN Y SIMULACIÓN DE PROCESOS FRACTALES MULTIPARAMÉTRICOS

Memoria presentada para optar
al grado de doctor en Ciencias
por Rosaura Fernández Pascual

Rosaura Fernández Pascual

Vº Bº
Director de Tesis

M. D. Ruiz Medina

Prof. Dr. D^a. M. D. Ruiz Medina

Vº Bº
Director de Tesis

J. M. Angulo Ibáñez

Prof. Dr. D. J. M. Angulo Ibáñez

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E I.O.
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA**

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
N.º Documento <u>614987673</u>
N.º Copia <u>i 17853898</u>

Deseo expresar mi agradecimiento a todos los que me han ayudado durante la realización de este trabajo. En especial:

A mi madre, sin cuyo apoyo no hubiera sido posible.

A Javi, por su interés, comprensión y paciencia.

A mis directores de tesis, por sus inestimables aportaciones en la elaboración de esta memoria.

A la Universidad de Jaén, por la prestación de los medios necesarios para llevar a cabo esta investigación.

Índice

Introducción	5
1 Preliminares	13
1.1 Introducción	13
1.2 Campos aleatorios α -generalizados	14
1.2.1 Propiedades espectrales de los operadores de covarianza	22
1.3 Ruido blanco generalizado y representación abstracta	24
1.3.1 El caso ordinario	26
1.4 Expansión ortogonal mediante wavelets	28
1.4.1 Transformada wavelet de un proceso	28
1.4.2 Transformada wavelet generalizada	30
1.4.3 Expansión ortogonal generalizada mediante wavelets .	32
2 Reconstrucción y extrapolación	35
2.1 Introducción	35
2.2 Antecedentes	37
2.3 Planteamiento de los problemas	46

2.4	Desarrollo ortogonal de un campo aleatorio en términos de wavelets	49
2.5	Resolución funcional del problema inverso de estimación	55
2.5.1	Aproximación discreta en términos de wavelets	55
2.5.2	Aproximación finito-dimensional	59
2.6	Aplicación	63
2.6.1	Estudio sobre el error de truncamiento	63
2.6.2	Estudio del problema de reconstrucción y extrapolación	64
2.7	Conclusión	66
3	Estimación inversa con ruido	77
3.1	Introducción	77
3.2	Planteamiento del problema	78
3.3	Desarrollo ortogonal en términos de wavelets de un campo aleatorio perturbado	80
3.4	Resolución funcional del problema de estimación	84
3.4.1	Resolución en términos de campos aleatorios generalizados wavelets	85
3.4.2	Formulación finito-dimensional	90
3.5	Aplicación	94
3.6	Conclusión	97
4	Procesos relacionados con la ecuación de Black-Scholes	115
4.1	Introducción	115
4.2	Antecedentes	118
4.3	Ecuación fraccionaria de Black-Scholes sobre tiempo fractal	125

4.4	Expansión ortogonal mediante wavelets	126
4.5	Los problemas de extrapolación y filtrado	129
4.5.1	Problema de extrapolación	130
4.5.2	Problema de filtrado	132
4.6	Aproximación finito-dimensional	133
4.7	Simulaciones	135
4.8	Conclusión	136
Líneas abiertas		143
Apéndice A		145
A.1	Espacios de Sobolev	145
A.1.1	Teoremas de Inyección	152
A.1.2	Teoremas de Inyección sobre dominios fractales	153
Apéndice B		155
B.1	Operadores lineales	155
B.1.1	Propiedades espectrales de operadores autoadjuntos	156
B.1.2	Perturbación de operadores lineales	161
Apéndice C		163
C.1	Bases de Riesz y aproximación multirresolución	163
C.2	Bases ortonormales de wavelets	165
Bibliografía		169

Introducción

En diversas áreas de aplicación, tales como medicina, prospecciones geofísicas, hidrología, astronomía, etc., interesa investigar el comportamiento conjunto de dos fenómenos físicos aleatorios relacionados por una ecuación dada en términos de operadores que pueden ser lineales o no. El objetivo de estas investigaciones puede centrarse en la estimación de un campo de salida a partir del conocimiento del campo aleatorio asociado de entrada (*problema directo de estimación*), o bien en pretender estimar el campo de entrada a partir de la observación de la salida, que en ocasiones se verá afectada por un ruido de observación (*problema inverso de estimación*). En este tipo de sistemas, las propiedades de regularidad del inverso del operador que define la relación entre los campos aleatorios de entrada y salida determina la calidad de definición de las características del campo aleatorio estimado. Específicamente, en el caso en que no existe el inverso acotado de dicho operador pequeñas desviaciones sobre los valores del campo observado pueden conducir a grandes variaciones en la estimación de los valores del campo de interés.

Diversos autores, entre otros Franklin (1970) y Prenter y Vogel (1985), han estudiado el problema en términos de procesos estocásticos en espacios de Hilbert, centrandó su investigación en la búsqueda de métodos de regula-

rización del problema. Lehtinen (1989) considera el estudio con variables generalizadas definidas sobre espacios de distribuciones. Ramm (1990) estudia el problema de filtrado para campos aleatorios cuyo operadores de covarianza son funciones racionales de polinomios de un operador diferencial elíptico autoadjunto de orden entero sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. La extensión de este planteamiento al caso fraccionario y generalizado se deriva en Angulo, Ruiz-Medina y Anh (2000), donde se obtiene una regularización del problema directo de estimación basada en la condición de dualidad para campos aleatorios generalizados sobre espacios de Sobolev fraccionarios. Miller y Willsky (1995) proponen una aproximación mediante wavelets al problema inverso de estimación para modelos multiescalares en un contexto bayesiano. Angulo y Ruiz-Medina (1999) derivan desarrollos ortogonales en términos de wavelets para campos aleatorios ordinarios a partir de la factorización del operador de covarianza, garantizada bajo ciertas condiciones. Dichos desarrollos proporcionan una discretización no redundante de la ecuación integral que define el problema inverso ordinario de estimación lineal mínimo-cuadrática. En Ruiz-Medina, Angulo y Anh (2003b) se considera la formulación de dicho problema en un contexto generalizado y se deriva una solución estable basada en la condición de dualidad del campo aleatorio de observación. La extensión al caso espacio-temporal mediante la implementación de técnicas de estimación lineal mínimo-cuadrática basada en la fusión de estimadores espaciales lineales mínimo-cuadráticos se contempla en Ruiz-Medina y Angulo (2000), donde se deriva una aproximación finito-dimensional basada en wavelets para la solución de dicho problema.

El planteamiento de los problemas anteriores en términos de campos a-

leatorios generalizados sobre espacios de Sobolev fraccionarios (*campos aleatorios fraccionarios generalizados*) permite su estudio para procesos singulares tales como procesos fractales y autosimilares, difusiones anómalas, etc. (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002, 2003a, y Ruiz-Medina, Anh y Angulo, 2001). El contexto generalizado fraccionario es pues apropiado para el análisis de procesos de evolución definidos, por ejemplo, mediante versiones fraccionarias de la ecuación del calor y de la ecuación de Burger (Angulo, Ruiz-Medina, Anh y Grecksch, 2000; Anh y Leonenko, 2002; Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2001). Procesos de este tipo se presentan, por ejemplo, en aplicaciones relacionadas con fenómenos medioambientales, especialmente fenómenos de turbulencias (ver, por ejemplo, Farge, Hunt y Vassilicos, 1993; Barnsley y Hurd, 1993; Beran, 1994; Peters, 1994; Frisch 1995; Barabasi y Stanley, 1995; Iannaccone y Khokha, 1996; Falconer, 1997; Mandelbrot, 1997; Hilfer, 2000; Anh y Heyde, 1999, etc.)

Para campos definidos sobre \mathbb{R}^n , el espectro continuo del operador de covarianza proporciona una herramienta clave en el estudio de la estructura de segundo orden de campos aleatorios fraccionarios (ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2000). En el caso estacionario, el espectro continuo del operador de covarianza coincide con la densidad espectral del campo aleatorio. En el caso de dominios acotados, bajo ciertas condiciones, la estructura de segundo orden puede caracterizarse en términos del espectro puntual (autovalores) del operador de covarianza (ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2003).

En este trabajo de investigación se propone una aproximación funcional a los problemas de reconstrucción, extrapolación y filtrado inversos asociados a una clase de campos aleatorios definidos mediante filtros lineales fraccio-

narios en términos de ruido blanco. La aproximación desarrollada se basa en la formulación de dichos problemas en términos de campos aleatorios generalizados *pseudowavelets* (i.e. en términos de wavelets transformadas), contruidos en términos de wavelets transformadas definidas mediante los filtros lineales fraccionarios (directo e inverso) que relacionan la clase de campos aleatorios considerada con ruido blanco. El movimiento browniano fraccionario y el movimiento de Riesz-Bessel fraccionario (ver Anh, Angulo y Ruiz-Medina, 1999) constituyen ejemplos interesantes dentro de la clase de campos aleatorios considerada, que ha sido estudiada en el contexto generalizado fraccionario en los trabajos anteriormente mencionados. Asimismo, se han realizado estudios de simulación que ilustran el funcionamiento de la aproximación propuesta para los problemas de estimación mencionados en relación con el orden de regularidad de los campos aleatorios de entrada y salida, definidos en términos de movimiento browniano fraccionario. En particular, el orden de truncamiento es analizado en función de la regularidad de los campos aleatorios de entrada y salida y de la regularidad de la base de wavelets considerada. En el problema de filtrado también se analiza la influencia del orden de regularidad del ruido de observación sobre la calidad de las estimaciones. Específicamente, los siguientes aspectos se han contemplado en el desarrollo de los contenidos de los capítulos de esta tesis.

En el Capítulo 1, se recogen las herramientas necesarias para el desarrollo y comprensión de los resultados derivados en el resto de capítulos. En particular, se introducen los conceptos fundamentales en relación con el contexto generalizado referenciado anteriormente, así como las expansiones ortogonales mediante wavelets de campos aleatorios fraccionarios generalizados que

permiten aproximar la solución de los problemas considerados.

En el Capítulo 2 se considera la aproximación funcional, basada en campos aleatorios generalizados *pseudowavelets*, para los problemas de reconstrucción y extrapolación inversa para campos aleatorios definidos mediante filtros lineales fraccionarios en términos de ruido blanco (ver Fernandez-Pascual, Ruiz-Medina y Angulo, 2003a). La aproximación obtenida se basa en el desarrollo débil de los campos aleatorios de entrada y salida en términos de wavelets transformadas mediante filtros lineales fraccionarios. Dichos desarrollos inducen respectivas expansiones en serie para los operadores de covarianza de los campos aleatorios de entrada y salida. Las soluciones a los problemas de reconstrucción y extrapolación se formulan entonces en términos de estos desarrollos en serie y de los desarrollos en serie definidos mediante las correspondientes bases de Riesz duales. Bajo ciertas condiciones, las soluciones definidas en sentido débil se interpretan en sentido fuerte (i.e. en sentido ordinario). El truncamiento de las series anteriores conduce a una aproximación finito-dimensional del problema. Finalmente, se desarrollan estudios de simulación que ilustran los resultados derivados en relación con la aproximación finito-dimensional obtenida para los problemas de reconstrucción y extrapolación inversa.

El Capítulo 3 se dedica al estudio del problema inverso de estimación lineal mínimo-cuadrática para la clase de campos aleatorios anteriormente mencionada, considerando el caso en que el campo aleatorio de salida se ve afectado por un ruido de observación aditivo. La aproximación del estimador se desarrolla de nuevo en el contexto de campos aleatorios generalizados *pseudowavelets* y se estudian condiciones sobre el orden de singularidad del

ruido de observación para que sea posible regularizar el problema. Se obtiene así una aproximación funcional, en sentido débil, para el problema inverso de filtrado, que se interpretará de nuevo en sentido fuerte para ciertos órdenes de regularidad de los campos aleatorios involucrados. El estudio de simulación desarrollado en este capítulo ilustra de nuevo los resultados obtenidos en relación con la aproximación finito-dimensional derivada a partir de la aproximación débil *pseudowavelet* de la solución del problema de filtrado. En particular, se analiza la influencia del orden de regularidad del ruido en relación con los órdenes de regularidad de los campos aleatorios de entrada y salida.

En el Capítulo 4 se estudian los problemas de predicción y filtrado lineales mínimo-cuadráticos de un proceso de precios generalizado no libre de riesgo (ver Fernandez-Pascual, Ruiz-Medina y Angulo, 2003b). Se considera un modelo diferencial de orden fraccionario para el log-precio definido sobre tiempo fractal, como extensión de la ecuación clásica de Black-Scholes. Se aplican entonces los resultados de los capítulos anteriores, extendidos al caso de dominio con geometría fractal, para obtener una aproximación débil de la solución de los problemas de predicción y filtrado asociados al proceso de precios generalizado sobre tiempo fractal. Específicamente, se consideran aproximaciones débiles *pseudowavelets* para resolver los problemas mencionados.

Finalmente, se describen brevemente algunas líneas abiertas en relación con los aspectos estudiados en esta tesis.

Los Apéndices A, B y C, que se incluyen al final de la tesis, proporcionan las herramientas básicas en relación con los contenidos de este trabajo de

investigación.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

En este capítulo se proporcionan herramientas fundamentales necesarias en relación con los contenidos tratados en el resto de capítulos. Se introducen los elementos fundamentales y resultados sobre la teoría de campos aleatorios generalizados fraccionarios y desarrollos ortogonales en términos de wavelets que serán utilizados en los próximos capítulos y que han sido derivados en Ruiz-Medina, Angulo y Anh (2002, 2003a); Angulo y Ruiz-Medina (1999) y Angulo, Ruiz-Medina y Anh (2003).

En particular, en la Sección 2 se introduce el concepto de campo aleatorio generalizado y la condición de dualidad o condición de existencia del campo generalizado dual, que permite en los Capítulos 2 y 3 la obtención de una solución estable de los problemas inversos de reconstrucción, extrapolación y filtrado. Las propiedades de regularidad de segundo orden de estos campos se caracterizan en términos de las propiedades geométricas de los espacios

de Hilbert de núcleo reproductor asociados. A partir de dichos espacios se obtendrá la factorización del operador de covarianza de un campo aleatorio generalizado en términos de isomorfismos.

En la Sección 3 se describe la representación abstracta de un campo aleatorio fraccionario generalizado en términos de los isomorfismos definidos en la Sección 2 y de un ruido blanco fraccionario generalizado. Bajo ciertas condiciones, la representación abstracta se define en términos de operadores diferenciales de orden fraccionario tales como el operador de Laplace negativo.

La solución a los problemas de estimación tratados en los Capítulos 2 y 3 de esta tesis se aproxima en términos de las expansiones ortogonales mediante wavelets de los campos involucrados. Por esta razón, en la Sección 4 se introduce la transformada wavelet de un proceso y la extensión dada por Angulo y Ruiz-Medina (1999), en términos de bases de Riesz duales pertenecientes a espacios de Sobolev fraccionarios obtenidas al aplicar una transformación lineal definida de la factorización de la covarianza, a una base ortonormal de wavelets. La incorrelación de los coeficientes aleatorios que definen esta expansión proporciona una descripción no redundante del proceso considerado.

1.2 Campos aleatorios α -generalizados

En esta sección se introduce el concepto de campo aleatorio α -generalizado (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). La existencia del campo aleatorio α -generalizado dual \tilde{X}_α , de un campo aleatorio α -generalizado X_α , respecto a

un espacio de Sobolev fraccionario $\overline{H}^\alpha(S) = \overline{H}^\alpha(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, permite obtener la factorización de la covarianza y su representación abstracta en términos de ruido blanco. Bajo la condición de dualidad, las propiedades de regularidad de segundo orden de X_α vienen caracterizadas en términos de las propiedades geométricas del espacio de Hilbert de núcleo reproductor asociado con norma equivalente, en este caso, a la norma del espacio $V_\alpha = [\overline{H}^\alpha(S)]^*$.

Se considera un espacio de probabilidad completo, (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio de Hilbert de variables aleatorias real valuadas definidas sobre (Ω, \mathcal{A}, P) , de media cero y momento de segundo orden finito, con el producto interno definido por

$$\langle X, Y \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = E[XY], \quad X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P). \quad (1.1)$$

La siguiente definición introduce el concepto de campo aleatorio α -generalizado, como una extensión al caso fraccionario de la definición de campo aleatorio n -generalizado introducido por Anh, Ruiz-Medina y Angulo (2000).

Definición 1 Para $\alpha \in \mathbb{R}$, una función aleatoria X_α de U_α en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se dice que es un campo aleatorio α -generalizado si es lineal y continua en media-cuadrática respecto a la topología de U_α .

Nota 1 El campo aleatorio α -generalizado X_α define la restricción en sentido débil al dominio S de una distribución aleatoria sobre \mathbb{R}^n para $\alpha \geq 0$, y de un campo aleatorio ordinario sobre \mathbb{R}^n para $\alpha < 0$.

Nota 2 Nótese que el orden mínimo de singularidad fraccionario α de un campo aleatorio ordinario X no es positivo y proporciona información sobre

el orden de regularidad de su función de covarianza B_X . Este orden determina el espacio de funciones en el que X es integrable en media cuadrática y, por tanto, puede definirse su operador de covarianza R_X . Es más, si un campo aleatorio ordinario X tiene orden mínimo de singularidad fraccionario α , entonces

$$\langle [R_X f]^*, f \rangle_{\bar{H}^\alpha(S)} = \int_S \int_S B_X(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) f(\mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} < \infty, \quad \forall f \in \bar{H}^\alpha(S), \quad (1.2)$$

donde $\alpha \leq 0$.

Se tiene entonces que la función f en la ecuación (1.2) es una distribución y dicha ecuación adquiere sentido cuando B_X pertenece al espacio de funciones test $H^{-\alpha}(S)$ sobre el que se definen las distribuciones de $\bar{H}^\alpha(S)$. En este caso, el orden de regularidad $-\alpha$ de las mencionadas funciones test compensa el orden de singularidad α de las correspondientes distribuciones.

En el caso en que $-\alpha > n/2$, la función de covarianza B_X de X es continua y, por tanto, el campo aleatorio ordinario que tiene orden mínimo de singularidad fraccionario α es continuo en media-cuadrática.

Las propiedades de regularidad y singularidad de segundo orden de un campo aleatorio α -generalizado se caracterizan en términos de los siguientes espacios de Hilbert:

El espacio de Hilbert de variables aleatorias

$$H(X_\alpha) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \{X_\alpha(\varphi) : \varphi \in \bar{H}^\alpha(S)\},$$

y el espacio de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(X_\alpha)$ generado por su función de covarianza. Este espacio se define isométricamente a partir del espacio

$H(X_\alpha)$, de manera que $\mathcal{H}(X_\alpha)$ está formado por las funciones u de $H^{-\alpha}(S)$ que satisfacen

$$u(\phi) = E[YX_\alpha(\phi)], \quad \phi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad (1.3)$$

para un cierto $Y \in H(X_\alpha)$. En este espacio, el producto interno viene dado por

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}(X_\alpha)} = E[YZ], \quad u, v \in \mathcal{H}(X_\alpha),$$

donde Y y Z son variables aleatorias pertenecientes al espacio $H(X_\alpha)$ asociadas con u y v , respectivamente, mediante la identidad (1.3). Se tiene, entonces, que el espacio $\mathcal{H}(X_\alpha)$ viene dado por

$$\mathcal{H}(X_\alpha) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \{B_\alpha(\phi, \cdot) = E[X_\alpha(\phi)X_\alpha(\cdot)] : \phi \in \overline{H}^\alpha(S)\}.$$

La aplicación del Teorema del Núcleo (ver Gel'fand y Vilenkin, 1964) conduce a la siguiente representación de la función de covarianza B_α de un campo aleatorio α -generalizado X_α :

$$\begin{aligned} B_\alpha(\varphi, \phi) &= E[X_\alpha(\varphi)X_\alpha(\phi)] = \langle [R_\alpha\varphi]^*, \phi \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)} \\ &= \int_S R_\alpha\varphi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{z})d\mathbf{z}, \quad \varphi, \phi \in \overline{H}^\alpha(S), \end{aligned}$$

en términos de un operador lineal, continuo, simétrico y positivo, R_α , que denominaremos *operador de covarianza*, definido de $\overline{H}^\alpha(S)$ en $H^{-\alpha}(S)$, (Teorema de Representación de Riesz).

De forma equivalente, se define el espacio $\mathcal{H}(X_\alpha)$ mediante

$$\mathcal{H}(X_\alpha) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \{R_\alpha(\phi) : \phi \in \overline{H}^\alpha(S)\}.$$

Según se ha comentado anteriormente, el siguiente concepto relativo a la dualidad entre espacios de Sobolev fraccionarios $\overline{H}^\alpha(S)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es fundamental en la derivación de los resultados que se muestran en este capítulo. En particular, la condición de dualidad define una clase de campos aleatorios con norma del espacio de Hilbert de núcleo reproductor equivalente a la norma del espacio $H^{-\alpha}(S)$. Esta condición implica que el operador de covarianza R_α de X_α es elíptico.

Definición 2 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que el campo aleatorio generalizado

$$\tilde{X}_\alpha : [\overline{H}^\alpha(S)]^* = H^{-\alpha}(S) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

es el dual respecto a $\overline{H}^\alpha(S)$ (o bien, es el α -dual) del campo aleatorio α -generalizado

$$X_\alpha : \overline{H}^\alpha(S) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

si satisface:

$$(i) H(X_\alpha) = H(\tilde{X}_\alpha).$$

$$(ii) \left\langle X_\alpha(\phi), \tilde{X}_\alpha(g) \right\rangle_{H(X_\alpha)} = \langle \phi, g^* \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)}, \text{ para } \phi \in \overline{H}^\alpha(S), \text{ y } g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*,$$

donde g^* denota el elemento dual de g respecto a la topología de $\overline{H}^\alpha(S)$.

Notese que el dual de \tilde{X}_α respecto a $H^{-\alpha}(S)$, es el campo aleatorio α -generalizado X_α . Asimismo, se consideran para el campo aleatorio α -dual \tilde{X}_α los espacios $H(\tilde{X}_\alpha)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$ definidos mediante

$$H(\tilde{X}_\alpha) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \left\{ \tilde{X}_\alpha(f) : f \in [\overline{H}^\alpha(S)]^* \right\}$$

y

$$\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \left\{ \tilde{B}_\alpha(f, \cdot) = E \left[\tilde{X}_\alpha(f) \tilde{X}_\alpha(\cdot) \right] : f \in [\overline{H}^\alpha(S)]^* \right\}$$

Los espacios $H(X_\alpha)$ y $\mathcal{H}(X_\alpha)$, y los espacios $H(\tilde{X}_\alpha)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$, se pueden relacionar, respectivamente, mediante los isomorfismos isométricos

$$J : H(X_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}(X_\alpha) \text{ y } J' : H(\tilde{X}_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha),$$

definidos como sigue:

$$Y \mapsto JY, \quad \text{con } (JY)(\phi) = EYX_\alpha(\phi), \quad \forall \phi \in U_\alpha,$$

$$Z \mapsto J'Z, \quad \text{con } (J'Z)(g) = EZ\tilde{X}_\alpha(g), \quad \forall g \in [U_\alpha]^*.$$

Las inclusiones $\mathcal{H}(X_\alpha) \subseteq [\overline{H}^\alpha(S)]^*$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha) \subseteq \overline{H}^\alpha(S)$ permiten considerar los siguientes operadores:

$$K : \mathcal{H}(X_\alpha) \rightarrow [\overline{H}^\alpha(S)]^*, \quad \text{con } g \mapsto Kg = g,$$

$$K' : \mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha) \rightarrow \overline{H}^\alpha(S), \quad \text{con } \phi \mapsto K'\phi = \phi.$$

Las composiciones de los operadores J y K , y J' y K' , respectivamente, permiten introducir los operadores S_α y S'_α , definidos como

$$S_\alpha := KJ : H(X_\alpha) \rightarrow [\overline{H}^\alpha(S)]^*,$$

$$S'_\alpha := K'J' : H(\tilde{X}_\alpha) \rightarrow \overline{H}^\alpha(S).$$

A continuación, se recogen algunos resultados preliminares que proporcionan información sobre las relaciones entre X_α y \tilde{X}_α , así como entre $\mathcal{H}(X_\alpha)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$, a través de la teoría de operadores de covarianza. Estos espacios se pueden relacionar, respectivamente, con los espacios de Sobolev fraccionarios $H^{-\alpha}(S)$ y $\overline{H}^\alpha(S)$ como se recoge en las siguientes Proposiciones 1 y 2.

Proposición 1 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Sea X_α un campo aleatorio α -generalizado. Si existe el campo aleatorio dual α -generalizado \tilde{X}_α , entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

(i) Los operadores $S'_\alpha X_\alpha$ y $X_\alpha S'_\alpha$ son los operadores identidad sobre los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $H(X_\alpha)$, respectivamente. Recíprocamente, los operadores $S_\alpha \tilde{X}_\alpha$ y $\tilde{X}_\alpha S_\alpha$ son los operadores identidad sobre los espacios $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$ y $H(\tilde{X}_\alpha) = H(X_\alpha)$, respectivamente.

(ii) Si A es el operador definido por

$$A := S'_\alpha S_\alpha^{-1} : [\overline{H}^\alpha(S)]^* \rightarrow \overline{H}^\alpha(S),$$

se pueden obtener las siguientes identidades:

$$X_\alpha(\varphi) = \tilde{X}_\alpha(A^{-1}\varphi), \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S),$$

y

$$\tilde{X}_\alpha(g) = X_\alpha(Ag), \quad \forall g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*.$$

Asimismo, $\tilde{R}_\alpha R_\alpha$ y $R_\alpha \tilde{R}_\alpha$ son los operadores identidad sobre los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$, respectivamente.

Consideramos a continuación los siguientes productos internos sobre los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$

$$\langle \varphi, \phi \rangle_{B_\alpha} = B_\alpha(\varphi, \phi), \quad \forall \varphi, \phi \in \overline{H}^\alpha(S),$$

$$\langle f, g \rangle_{\tilde{B}_\alpha} = \tilde{B}_\alpha(f, g), \quad \forall f, g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*. \quad (1.4)$$

que definen los productos internos en los espacios $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$ y $\mathcal{H}(X_\alpha)$ según se prueba en la siguiente proposición. Dichos productos internos generan

normas respectivamente equivalentes a las de los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$. Asimismo, los espacios de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$ y $\mathcal{H}(X_\alpha)$ son duales.

Proposición 2 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Bajo la condición de dualidad,

(i) los espacios $(\overline{H}^\alpha(S), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)})$ y $(\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)})$ (respectivamente,

$([\overline{H}^\alpha(S)]^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*})$ y $(\mathcal{H}(X_\alpha), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(X_\alpha)})$) tienen normas equivalentes;

(ii) los espacios de Hilbert $(\overline{H}^\alpha(S), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_{X_\alpha}}) = (\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)})$ y $([\overline{H}^\alpha(S)]^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_{\tilde{X}_\alpha}}) = (\mathcal{H}(X_\alpha), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(X_\alpha)})$ son duales entre sí;

(iii) se verifican las siguientes identidades geométricas:

$$\langle \varphi, g^* \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)} = \langle \varphi^*, g \rangle_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*} = \langle R_\alpha \varphi, g \rangle_{\tilde{B}_\alpha} = \langle \varphi, \tilde{R}_\alpha g \rangle_{B_\alpha},$$

$$\forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad \forall g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^* ;$$

(iv) $I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*} R_\alpha$ y $\tilde{R}_\alpha I_{\overline{H}^\alpha(S)}$ son operadores autoadjuntos sobre $\overline{H}^\alpha(S)$ y $R_\alpha I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*}$ y $I_{\overline{H}^\alpha(S)} \tilde{R}_\alpha$ son operadores autoadjuntos sobre $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$, donde $I_{\overline{H}^\alpha(S)}$ y $I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*}$ denotan los isomorfismos definidos por

$$I_{\overline{H}^\alpha(S)} : \overline{H}^\alpha(S) \rightarrow [\overline{H}^\alpha(S)]^*, \quad I_{\overline{H}^\alpha(S)}(\varphi) = \varphi^*, \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S),$$

$$I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*} : [\overline{H}^\alpha(S)]^* \rightarrow \overline{H}^\alpha(S), \quad I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*}(g) = g^*, \quad \forall g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*. \quad (1.5)$$

Nota 3 De la Proposición 2 se derivan las siguientes afirmaciones:

(i) Los operadores K y K' , como aplicaciones de $\mathcal{H}(X_\alpha)$ en $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$ y de $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$ en $\overline{H}^\alpha(S)$, respectivamente, son bicontinuos.

(ii) El operador A es un isomorfismo entre los espacios $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$ y $\overline{H}^\alpha(S)$.

(iii) R_α y \tilde{R}_α son operadores adjuntos con respecto a los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\alpha}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{B}_\alpha}$.

En el siguiente Teorema se deriva la factorización de los operadores de covarianza R_α y \tilde{R}_α de los campos aleatorios α -generalizados X_α y \tilde{X}_α , respectivamente, en términos de isomorfismos. Estas factorizaciones permiten obtener, en la próxima sección, la representación abstracta en términos de ruido blanco de X_α y \tilde{X}_α sobre los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $[\overline{H}^\alpha(S)]^*$, respectivamente.

Teorema 1 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Sea X_α un campo aleatorio α -generalizado. Si existe el dual \tilde{X}_α , entonces, el operador de covarianza R_α de X_α y el operador de covarianza \tilde{R}_α de \tilde{X}_α se pueden factorizar respectivamente como

$$\begin{aligned} R_\alpha &= S_\alpha (S'_\alpha)^{-1}, \\ \tilde{R}_\alpha &= S'_\alpha S_\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Este resultado proporciona la transformación lineal que intervienen en las bases de Riesz duales que definen los desarrollos ortogonales de X_α y \tilde{X}_α en la Sección 1.4, utilizados en las aproximaciones discretas derivadas para la solución de los problemas de reconstrucción, extrapolación y filtrado en la Sección 1.3.

1.2.1 Propiedades espectrales de los operadores de covarianza

En esta sección, se estudian las propiedades espectrales del operador de covarianza R_α asociado a un campo aleatorio con norma del espacio de Hilbert

de núcleo reproductor equivalente a la de un espacio de Sobolev de orden apropiado, definido sobre un dominio acotado y regular $S' \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proposición 3 (Ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2003). Si existe el campo aleatorio dual \tilde{X}_α de X_α , entonces se satisfacen las siguientes desigualdades para los autovalores $\{\lambda_n(R_\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de R_α y $\{\lambda_n(\tilde{R}_\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \tilde{R}_α :

(i) Para $\alpha < 0$,

$$|\lambda_k(R_\alpha)| \leq C_2 k^{2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

$$|\lambda_k(\tilde{R}_\alpha)| \geq \tilde{C}_1 k^{-2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

y para $\alpha > 0$,

$$|\lambda_k(R_\alpha)| \geq C'_1 k^{2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

$$|\lambda_k(\tilde{R}_\alpha)| \leq \tilde{C}'_2 k^{-2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

(ii) En el caso en que S sea un conjunto compacto, se tiene, para $\alpha < 0$,

$$|\lambda_k(R_\alpha)| \geq C_1 k^{2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.10)$$

$$|\lambda_k(\tilde{R}_\alpha)| \leq \tilde{C}_2 k^{-2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.11)$$

y para $\alpha > 0$,

$$|\lambda_k(R_\alpha)| \leq C'_2 k^{2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

$$|\lambda_k(\tilde{R}_\alpha)| \geq \tilde{C}'_1 k^{-2\alpha/n}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

1.3 Ruido blanco generalizado y representación abstracta

Bajo la condición de dualidad, las factorizaciones de los operadores de covarianza de X_α y \tilde{X}_α , conducen a la definición de isomorfismos L y L' , en términos de los cuales se obtienen las representaciones abstractas de ambos campos aleatorios fraccionarios generalizados. Tales representaciones proporcionan los filtros lineales que relacionan X_α y \tilde{X}_α con ruido blanco generalizado sobre $\overline{H}^\alpha(S)$ y $H^{-\alpha}(S)$, respectivamente.

Definición 3 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Un campo aleatorio generalizado $\varepsilon(\cdot)$ definido sobre un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ se denomina un ruido blanco generalizado respecto a H si

$$\langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{H(\varepsilon)} = \langle u, v \rangle_H, \quad \forall u, v \in H.$$

El concepto de ruido blanco generalizado fraccionario o ruido blanco generalizado sobre un espacio de Sobolev fraccionario $\overline{H}^\alpha(S)$ (α -GWN) es una particularización de ruido blanco generalizado sobre un espacio de Hilbert H introducido en la Definición 3.

La función de covarianza de un campo aleatorio α -generalizado ε_α es una forma bilineal dada por el producto interno del correspondiente espacio de Sobolev fraccionario $\overline{H}^\alpha(S)$:

$$E[\varepsilon_\alpha(\phi)\varepsilon_\alpha(\varphi)] = \langle \varepsilon_\alpha(\phi)\varepsilon_\alpha(\varphi) \rangle_{H(X_\alpha)} = \langle \varphi, \phi \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)}, \quad \forall \varphi, \phi \in \overline{H}^\alpha(S).$$

Definición 4 *Se dice que un campo aleatorio generalizado X_α definido sobre el espacio $\overline{H}^\alpha(S)$ admite una representación abstracta en sentido débil si existe un isomorfismo $L : \overline{H}^\alpha(S) \rightarrow \overline{H}^\alpha(S)$ tal que*

$$X_\alpha(L\varphi) = \varepsilon_\alpha(\varphi), \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad (1.14)$$

donde ε_α denota un ruido blanco α -generalizado.

El siguiente Teorema establece las condiciones bajo las cuales un campo aleatorio α -generalizado X_α , se puede representar por una ecuación abstracta en sentido débil (única salvo isomorfismos isométricos). En el caso ordinario, $\alpha < 0$, por los Teoremas de Inyección para espacios de Sobolev fraccionarios (ver Apéndice A), esta representación admite una única solución ordinaria continua en media-cuadrática para $-\alpha > n/2$. Asimismo, bajo ciertas condiciones adicionales (localidad del operador \tilde{X}_α), se puede derivar una representación diferencial de orden fraccionario a partir de la representación abstracta. En el caso gaussiano, esta representación diferencial proporciona información sobre las propiedades de regularidad de las trayectorias de la correspondiente solución ordinaria.

Teorema 2 *(Ver Anh, Ruiz-Medina y Angulo, 2000) Supongamos que existe el campo aleatorio α -generalizado dual \tilde{X}_α del campo aleatorio α -generalizado X_α . Entonces, el campo aleatorio α -generalizado X_α admite una representación abstracta en sentido débil, única salvo isomorfismos isométricos.*

Nota 4 *La representación dada por el Teorema anterior se puede reescribir como sigue*

$$X_\alpha(L\varphi) = \varepsilon_\alpha(\varphi) = \varepsilon_{L^2(S)}[\mathcal{I}_{-\alpha}(\varphi)], \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad (1.15)$$

en términos de un ruido blanco generalizado sobre $L^2(S)$ $\varepsilon_{L^2(S)}(\cdot)$, siendo $\mathcal{I}_{-\alpha} = (I - \Delta)_S^{\alpha/2}$ la potencia fraccionaria de orden $\alpha/2$ del operador $(I - \Delta)_S$ dada en términos del operador de Laplace negativo en el dominio S . En este sentido, para $\alpha > 0$, el miembro derecho de la ecuación (1.15) puede interpretarse (en sentido débil) como la derivada de orden fraccionario α de ruido blanco generalizado sobre $L^2(S)$, siendo entonces X_α dado por (1.15) un campo aleatorio impropio.

Nota 5 Una representación similar se puede obtener para \tilde{X}_α mediante

$$\tilde{X}_\alpha(L'g) = \tilde{\varepsilon}_\alpha(g) = \varepsilon_{L^2(S)} \left[(I - \Delta)_S^{-\alpha/2}(g) \right], \quad \forall g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*, \quad (1.16)$$

o equivalentemente por

$$\tilde{X}_\alpha(g) = \varepsilon_{L^2(S)} [R_\alpha L I_{[\overline{H}^\alpha(S)]^*} (I - \Delta)_S^{\alpha/2} h], \quad h \in L^2(S),$$

donde $g = (I - \Delta)_S^{\alpha/2} h$, con $g \in [\overline{H}^\alpha(S)]^*$.

Los ruidos blancos fraccionarios generalizados que definen dos representaciones abstractas de X_α y \tilde{X}_α están relacionados mediante un isomorfismo isométrico.

En el caso en que $\alpha > 0$, el miembro derecho de la ecuación (1.16) se interpreta en términos de integración fraccionaria de orden α (en sentido débil) de ruido blanco generalizado en $L^2(S)$.

1.3.1 El caso ordinario

En este apartado se tratan aspectos relacionados con la interpretación ordinaria de las representaciones abstractas consideradas anteriormente, para

X_α y \tilde{X}_α . Cuando el parámetro $\alpha > 0$, se tiene que X_α define un campo aleatorio ordinario en sentido débil y \tilde{X}_α es un campo aleatorio generalizado impropio. En el caso en que $\alpha < 0$, se tiene que \tilde{X}_α define en sentido débil y que X_α es un campo aleatorio generalizado impropio.

Los campos aleatorios fraccionarios generalizados X_α y \tilde{X}_α admiten una representación diferencial de orden fraccionario en el caso en que $\alpha < 0$ y L es local, y, en el caso en que $\alpha > 0$ y L' es local, respectivamente. Estas ecuaciones vienen dadas en términos de integración fraccionaria, en sentido débil, de ruido blanco sobre $L^2(S)$.

Según se prueba en el siguiente Teorema (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002 y 2003a) la existencia de una única solución ordinaria continua en media-cuadrática de las ecuaciones abstractas que representan X_α y \tilde{X}_α queda garantizada para $\alpha < -n/2$ y $\alpha > n/2$, respectivamente, aplicando los Teoremas de Inyección para espacios de Sobolev fraccionarios.

Teorema 3 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). *Sea X_α un campo aleatorio α -generalizado que satisface la condición de dualidad. Entonces, para $\alpha < -n/2$, X_α admite una única representación integral en media-cuadrática en términos de un campo aleatorio ordinario continuo en media-cuadrática \mathcal{X}_α , solución de la ecuación*

$$\tilde{\mathcal{T}}_\alpha^* \mathcal{X}_\alpha = \varepsilon, \quad (1.17)$$

donde la igualdad se interpreta en media-cuadrática y ε es el ruido blanco generalizado en $L^2(S)$ que define la representación abstracta (1.15) de X_α . Aquí, $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha = L(I - \Delta)_S^{-\alpha/2}$, donde L denota el isomorfismo sobre $\bar{H}^\alpha(S)$ que define la representación abstracta de X_α y $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha^*$ representa el operador adjunto.

Para $\alpha > n/2$, el campo aleatorio generalizado dual \tilde{X}_α admite una única representación integral en media-cuadrática en términos de un campo aleatorio ordinario continuo en media-cuadrática $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha$, solución de la ecuación

$$\mathcal{T}_\alpha^* \tilde{\mathcal{X}}_\alpha = \varepsilon, \quad (1.18)$$

donde \mathcal{T}_α^* representa, como antes, el operador adjunto de $\mathcal{T}_\alpha = L'(I - \Delta)_S^{\alpha/2}$ y L' denota el isomorfismo sobre $H^{-\alpha}(S)$ que define la representación abstracta de \tilde{X}_α . El ruido blanco generalizado ε sobre $L^2(S)$ coincide con el dado en la ecuación (1.17) y la igualdad se interpreta, como antes, en media-cuadrática.

Nota 6 En el caso en que $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ sea local,

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{T}}_\alpha(\phi)) \subseteq \text{supp}(\phi), \quad \forall \phi \in L^2(S),$$

se tiene que \mathcal{T}_α admite una representación diferencial de orden fraccionario en términos de operadores pseudodiferenciales elípticos restringidos al dominio S . Análogamente, si \mathcal{T}_α es local, $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ admite una representación diferencial de orden fraccionario en términos de operadores pseudodiferenciales elípticos restringidos al dominio S .

1.4 Expansión ortogonal mediante wavelets

1.4.1 Transformada wavelet de un proceso

Sea $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso de segundo orden con media cero. Bajo ciertas condiciones, dicho proceso se puede representar en media-cuadrática como sigue:

$$X(t) \underset{\text{m.c.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k}(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1.19)$$

donde $\{\varphi_{0,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de V_0 y $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de W_j , asociados a un análisis multirresolución $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, j representa el nivel de resolución y los coeficientes de aproximación α_k , y coeficientes de detalles $\beta_{j,k}$, se calculan mediante

$$\alpha_k \underset{\text{m.c.}}{=} \int X(t) \overline{\varphi_{0,k}(t)} dt,$$

$$\beta_{j,k} \underset{\text{m.c.}}{=} \int X(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt.$$

La representación anterior también puede darse en el sentido de las trayectorias bajo condiciones adicionales (ver Rozovskii, 1983) y se suele conocer como transformada wavelet del proceso X .

La extensión al caso multidimensional es inmediata al considerar un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver Apéndice C). Sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ constituida por una base ortonormal de funciones de escalamiento $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0\}$ del espacio $V_0 \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, y una base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j:\lambda} : \lambda \in \Lambda_j\}$, $j \geq 0$, de los espacios $W_j \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 0$, entonces, $\{X(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n\}$ se puede considerar la serie convergente en media-cuadrática

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0 \subset \mathbb{Z}^n} \alpha_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \beta_{j:\lambda} \psi_{j:\lambda}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.20)$$

En la siguiente sección se muestra una expansión ortogonal de un campo aleatorio en términos de bases duales de Riesz de espacios de Sobolev fraccionarios, construidas a partir de una base ortonormal de wavelets multidimensional mediante una transformación lineal apropiada (ver Angulo y Ruiz-Medina, 1999).

1.4.2 Transformada wavelet generalizada

Se considera una base ortonormal de $L^2(S)$, donde S denota un dominio acotado con frontera C^∞ de \mathbb{R}^n , constituida por una base ortonormal de funciones de escalamiento $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$ del espacio $V_0^S \subset L^2(S)$, y bases ortonormales de wavelets $\{\psi_{j:\lambda} : \lambda \in \Lambda_j^S\}$, $j \geq 0$, de los espacios $W_j^S \subset L^2(S)$, $j \geq 0$, respectivamente, con

$$L^2(S) = V_0^S \bigoplus_{j \geq 0} W_j^S. \quad (1.21)$$

Aquí, Γ_j^S y Λ_j^S , $j \in \mathbb{Z}$, representan conjuntos finitos de índices, puesto que estamos considerando funciones de escalamiento y wavelets con soporte compacto contenido en S .

La siguiente proposición describe las propiedades de las secuencias de subespacios de $H^{-\alpha}(S)$,

$$\mathcal{T}(V_j^S), j \in \mathbb{Z}, \quad y \quad \mathcal{T}(W_j^S), j \in \mathbb{Z},$$

y las propiedades de las secuencias de subespacios de $\bar{H}^\alpha(S)$,

$$\tilde{\mathcal{T}}(V_j^S), j \in \mathbb{Z}, \quad y \quad \tilde{\mathcal{T}}(W_j^S), j \in \mathbb{Z}$$

donde $\{V_j^S, j \in \mathbb{Z}\}$ se generan, respectivamente, a partir de $\{\phi_{j:\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_j^S\}$, para $j \in \mathbb{Z}$, y proporcionan una aproximación multirresolución de $L^2(S)$, y $\{W_j^S \subset L^2(S), j \in \mathbb{Z}\}$ se generan, respectivamente, a partir de $\{\psi_{j:\lambda} : \lambda \in \Lambda_j^S\}$, para $j \in \mathbb{Z}$.

Sean R_α y \tilde{R}_α los operadores de covarianza de X_α y \tilde{X}_α de forma que R_α y \tilde{R}_α admiten las representaciones

$$R_\alpha = \mathcal{T}\mathcal{T}', \quad (1.22)$$

$$\tilde{R}_\alpha = \tilde{\mathcal{T}}\tilde{\mathcal{T}}', \quad (1.23)$$

en términos de los isomorfismos $\mathcal{T} : L^2(S) \rightarrow H^{-\alpha}(S)$ y $\tilde{\mathcal{T}} : L^2(S) \rightarrow \overline{H}^\alpha(S)$.

Proposición 4 (Ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2003). Sean \mathcal{T} y $\tilde{\mathcal{T}}$ los operadores definidos en las ecuaciones (1.22) y (1.23), respectivamente. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

(i) Las secuencias de espacios

$$\{M_j = \mathcal{T}(V_j^S) : j \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad \{M^j = \tilde{\mathcal{T}}(V_j^S) : j \in \mathbb{Z}\}$$

son secuencias crecientes de subespacios cerrados y disjuntos cuyas uniones son respectivamente densas en los espacios $H^{-\alpha}(S)$ y $\overline{H}^\alpha(S)$.

(ii) Los sistemas

$$\{\varphi_{j:\mathbf{k}} := \mathcal{T}(\phi_{j:\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}, \quad \text{y} \quad \{\varphi^{j:\mathbf{k}} := \tilde{\mathcal{T}}(\phi_{j:\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$$

generan respectivamente los subespacios M_j y M^j , para cada $j \in \mathbb{Z}$, y se tiene que

$$\begin{aligned} M_{j+1} &= M_j + N_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ M^{j+1} &= M^j + N^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

donde $N_j = \mathcal{T}(W_j^S)$ se genera a partir de $\{\gamma_{j:\lambda} := \mathcal{T}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S\}$ y $N^j = \tilde{\mathcal{T}}(W_j^S)$ se genera a partir de $\{\gamma^{j:\lambda} := \tilde{\mathcal{T}}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S\}$.

(iii) Los sistemas

$$\{\varphi_{\mathbf{k}} := \mathcal{T}(\phi_{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma_{j:\lambda} := \mathcal{T}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S, j \geq 0\} \quad (1.24)$$

y

$$\{\varphi^{\mathbf{k}} := \tilde{\mathcal{T}}(\phi_{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\lambda} := \tilde{\mathcal{T}}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S, j \geq 0\} \quad (1.25)$$

son bases duales de Riesz con respecto a $L^2(S)$. Entonces, para cada $g \in H^{-\alpha}(S)$ y $\phi \in \overline{H}^\alpha(S)$,

$$\begin{aligned} \langle g, \phi^* \rangle_{g \in H^{-\alpha}(S)} &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g(\varphi^{\mathbf{k}}) \phi(\varphi_{\mathbf{k}}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^S} g(\gamma^{j:\lambda}) \phi(\gamma_{j:\lambda}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g^*(\varphi_{\mathbf{k}}) \phi^*(\varphi^{\mathbf{k}}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^S} g^*(\gamma_{j:\lambda}) \phi^*(\gamma^{j:\lambda}) \\ &= \langle g^*, \phi \rangle_{\overline{H}^\alpha(S)}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde $*$ denota, como antes, dualidad entre espacios de Hilbert. Las descomposiciones

$$H^{-\alpha}(S) = M_0 \widetilde{\bigoplus}_{j \geq 0} N_j \quad \text{y} \quad U_\alpha = M^0 \widetilde{\bigoplus}_{j \geq 0} N^j \quad (1.27)$$

son biortogonales ($\widetilde{\bigoplus}$ denota la suma no-directa de subespacios).

Nota 7 En el caso en que los operadores \mathcal{T} y $\widetilde{\mathcal{T}}$ sean homogéneos la descomposición biortogonal introducida en la proposición anterior proporciona una aproximación pseudo-multirresolución de $H^{-\alpha}(S)$ y $\overline{H}^\alpha(S)$ (ver, por ejemplo, Donoho, 1995).

En la próxima sección se aplica la Proposición 4 para obtener, bajo la existencia del campo dual \widetilde{X}_α de X_α , una expansión ortogonal mediante wavelets de X_α (respectivamente \widetilde{X}_α) en términos de las dos bases duales de Riesz introducidas en la Proposición 4.

1.4.3 Expansión ortogonal generalizada mediante wavelets

El siguiente Teorema proporciona una alternativa a la expansión de Karhunen-Loève para construir bases ortonormales del espacio de Hilbert de núcleo re-

productor de un campo aleatorio. En particular, la expansión de Karhunen-Loève proporciona la siguiente base ortonormal de los espacios de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(X_\alpha)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$, respectivamente:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= (\lambda_m(R_\alpha))^{1/2} \phi_m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \varphi^m &= (\lambda_m(\tilde{R}_\alpha))^{1/2} \phi_m = (\lambda_m(R_\alpha))^{-1/2} \phi_m, \quad m \in \mathbb{N},\end{aligned}\quad (1.28)$$

donde $\{\lambda_n(R_\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\lambda_n(\tilde{R}_\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotan, respectivamente, los autovalores de R_α y \tilde{R}_α y $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denota el sistema de autofunciones asociado. En el siguiente resultado se proporciona una base ortonormal de los espacios $\mathcal{H}(X_\alpha)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha)$ construida a partir de una base ortonormal de funciones wavelets.

Teorema 4 (Ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2003). *Bajo las condiciones de la Proposición 4, las bases duales de Riesz*

$$\{\varphi_{\mathbf{k}} := \mathcal{T}(\phi_{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma_{j:\lambda} := \mathcal{T}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S, j \geq 0\}$$

y

$$\{\varphi^{\mathbf{k}} := \tilde{\mathcal{T}}(\phi_{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\lambda} := \tilde{\mathcal{T}}(\psi_{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S, j \geq 0\}$$

son, respectivamente, bases ortonormales de los espacios de Hilbert de núcleo reproductor X_α y \tilde{X}_α .

Corolario 1 (Ver Angulo, Ruiz-Medina y Anh, 2003). *Bajo las condiciones del Teorema 4, X_α admite la siguiente expansión en media-cuadrática:*

$$X_\alpha(\phi) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} X_\alpha(\varphi^{\mathbf{k}}) \varphi_{\mathbf{k}}(\phi) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^S} X_\alpha(\gamma^{j:\lambda}) \gamma_{j:\lambda}(\phi), \quad (1.29)$$

para todo $\phi \in \overline{H}^\alpha(S)$. Los coeficientes aleatorios $\{X_\alpha(\varphi^{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$ y $\{X_\alpha(\gamma^{j:\lambda}) : \lambda \in \Lambda_j^S, j \geq 0\}$ son incorrelados.

Análogamente, el campo dual \tilde{X}_α admite la siguiente representación en media-cuadrática:

$$\tilde{X}_\alpha(g) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \tilde{X}_\alpha(\varphi_{\mathbf{k}}) \varphi^{\mathbf{k}}(g) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^S} \tilde{X}_\alpha(\gamma_{j:\lambda}) \gamma^{j:\lambda}(g), \quad (1.30)$$

para todo $g \in H^{-\alpha}(S)$, con coeficientes aleatorios incorrelados.

Las expansiones ortogonales introducidas en el Corolario 1 proporcionan una descomposición en términos de *wavelets-vaguelettes* en media-cuadrática de los filtros lineales generalizados (1.15) y (1.16) definidos en las representaciones abstractas de X_α y \tilde{X}_α (ver Sección 1.3) que relacionan respectivamente, X_α y \tilde{X}_α con $\varepsilon_{L^2(S)}$ (ver Donoho, 1995, sobre descomposiciones *wavelet-vaguelette* para filtros lineales determinísticos).

Los resultados sobre expansiones ortogonales en términos de wavelets mostrados en esta sección serán aplicados en los Capítulos 2 y 3 para definir una aproximación finito-dimensional a los problemas de reconstrucción, extrapolación y filtrado inversos, asociados a campos con órdenes de regularidad/singularidad fraccionarios.

Capítulo 2

Reconstrucción y extrapolación

2.1 Introducción

En este capítulo se consideran los problemas de reconstrucción y extrapolación para campos aleatorios con órdenes fraccionarios de regularidad y singularidad. La formulación inversa de estos problemas se halla asociada frecuentemente al estudio de sistemas cuya salida es conocida u observable y cuya entrada representa la cantidad de interés. Encontramos ejemplos en áreas tales como ingeniería (Ekstrom, 1982), medicina y biología (Christakos y Hristopulos, 1998; Louis, 1992; Lubbig, 1995), geofísica (Campi, 1980; Santosa y Symes, 1998; Trampert, Leveque y Cara, 1992), hidrología (Dietrich y Newsam, 1989; Kitanidis y Vomvoris, 1983; Sun, 1994), meteorología (Huang y Cressie, 1996; Wikle y Cressie, 1999), etc.

Formalmente, se considera la siguiente ecuación:

$$Af = g$$

donde f representa el campo entrada, g representa el campo de salida y A es un operador que supondremos lineal. La ecuación anterior se interpretará en media cuadrática.

En el problema de reconstrucción estudiado en este capítulo se supone que g es observable en todo su dominio. Se trata entonces de estimar los valores de f en todo su dominio a partir de la observación de g . Por simplicidad se supondrá que coinciden los dominios de f y g . Si A es un operador con inverso acotado, la resolución de este problema se puede llevar a cabo en un contexto determinístico. En la situación considerada, f y g poseen órdenes de regularidad/singularidad fraccionarios (ver Benassi, Jaffard y Roux, 1997; Christakhos, 2000 y Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002 y 2003a), el operador A no posee un inverso acotado sobre el espacio de funciones de cuadrado integrables sobre el dominio común de f y g , $L^2(S)$ y es necesario regularizar el problema para obtener una solución que dependa de forma continua de los datos. En el caso en que A es compacto, esta regularización se llevará a cabo considerando la teoría de campos aleatorios generalizados sobre espacios de Sobolev fraccionarios (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003b). La herramienta esencial que consideraremos para resolver en la práctica este problema consistirá en la transformada wavelet (ver Fernández-Pascual, Ruiz-Medina y Angulo, 2003a).

En el problema de extrapolación se supone que el campo g es observable en un subdominio. Se trata entonces de estimar f en un dominio que contiene al subdominio observable. Nuevamente se aplicará la teoría de campos aleatorios generalizados sobre espacios de Sobolev fraccionarios para regularizar el problema y la transformada wavelet permitirá la definición de una

solución de dicho problema en la práctica.

En los problemas mencionados, la estimación de f se realizará mediante la aplicación del Teorema de la Proyección Ortogonal en un contexto generalizado. La inversión de la ecuación de Wiener-Hopf asociada se formula entonces en términos de operadores y funciones test en espacios de Sobolev fraccionarios apropiados. Bajo ciertas condiciones la solución débil obtenida se puede interpretar en sentido fuerte.

2.2 Antecedentes

En el planteamiento clásico del problema de estimación en el contexto de procesos de segundo orden, se consideran un proceso de observación $\{X_t, t \in S\}$ y una variable aleatoria Y de interés cuyos valores se estiman mediante su proyección ortogonal en el espacio de Hilbert H_X generado por X siendo $H_X = \overline{\text{sp}}\{X_t, t \in S\}$. Dicha proyección verifica:

- (i) $\hat{Y} \in H_X$,
- (ii) $E[\hat{Y} - Y]^2 = \min_{Z \in H_X} E[Z - Y]^2$,

definiendo el estimador lineal mínimo-cuadrático de Y basado en la información proporcionada por X .

En los problemas de filtrado y predicción se considera Y definida en términos de las variables aleatorias del proceso de interés respectivamente dado por $Y_t = X_t + N_t$, $Y_t = X_{t+\tau}$, $\tau > 0$, donde N_t es un ruido de observación incorrelado con X .

En particular, el filtrado de Wiener proporciona la definición del estimador lineal mínimo-cuadrático a través del espectro para procesos estacionarios

con función de densidad espectral bien definida. Es decir, el estimador lineal mínimo-cuadrático se define en términos de un filtro lineal invariante en el tiempo.

Sean dos procesos estacionarios en sentido amplio $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ e $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$. Se supone que existen las funciones de densidad espectral absolutamente integrables, S_X , S_Y y S_{XY} , tales que,

$$E [X_{t+\tau} \bar{X}_t] = \int_{\mathbb{R}} S_X(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (2.1)$$

$$E [X_{t+\tau} \bar{Y}_t] = \int_{\mathbb{R}} S_{XY}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (2.2)$$

$$E [Y_{t+\tau} \bar{Y}_t] = \int_{\mathbb{R}} S_Y(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (2.3)$$

Denotamos por H_{X_s} el espacio de Hilbert generado por $\{X_s, s \leq t\}$. Entonces, la proyección $\hat{E} [Y_t | H_{X_s}]$ se caracteriza por las condiciones

- (i) $\hat{E} [Y_t | H_{X_s}] \in H_{X_s}$,
- (ii) $(Y_t - \hat{E} [Y_t | H_{X_s}])$ es ortogonal a H_{X_s} .

Los siguientes resultados son fundamentales en la resolución del problema de estimación mediante filtrado de Wiener.

Proposición 5 Sea $S \in L^2$ una función real no negativa tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln S(\nu)|}{1 + \nu^2} d\nu < \infty.$$

Entonces, existe una función $h \in L^2$ tal que,

$$|\hat{h}(\nu)|^2 = S(\nu), \quad (2.4)$$

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{h}(\nu) d\nu = 0, \quad t < 0, \quad (2.5)$$

$$\hat{h}(u + iv) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(u+iv)t} h(t) dt \neq 0, \quad v > 0. \quad (2.6)$$

Si S_X verifica las condiciones de la Proposición 5, entonces $\{X_t\}$ se puede representar en términos de proceso de ruido blanco, $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{R}\}$, mediante un filtro con función de transferencia \hat{h} , y recíprocamente, se puede obtener $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{R}\}$ a partir de $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ mediante el filtro $1/\hat{h}$. Estas afirmaciones se pueden expresar en términos de un proceso con incrementos ortogonales $\{Z_t, t \in \mathbb{R}\}$ asociado a $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{R}\}$, con $Z_0 = 0$ y $E[dZ_t dZ_s] = \delta_{ts}$, tal que,

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} h(t-s) dZ_s = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \hat{h}(\nu) d\hat{Z}_\nu. \quad (2.7)$$

La condición (2.6) implica que, para cada t , $Z_t \in H_{X_t}$.

El proceso Z_t , se puede derivar a partir del proceso espectral $\{\hat{X}_\nu, \nu \in \mathbb{R}\}$ mediante la ecuación

$$Z_t = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\hat{h}(\nu)} \int_0^t e^{i2\pi\nu s} ds d\hat{X}_\nu. \quad (2.8)$$

Proposición 6 Sean $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ dos procesos estacionarios en sentido amplio que satisfacen (2.1), (2.2) y (2.3). Se considera \hat{h} obtenido mediante la factorización de S_X que satisface (2.4). Sea $\{Z_t, t \in \mathbb{R}\}$ el proceso introducido en las ecuaciones (2.7) y (2.8). Entonces,

$$\hat{E}(Y_t | H_{X_t}) = \int_{-\infty}^t g(t-s) dZ_s, \quad (2.9)$$

donde g viene dado por $g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi\nu t} \frac{\overline{S_{XY}(\nu)}}{\hat{h}(\nu)} d\nu$, $t \in \mathbb{R}$, y la integral se interpreta en media cuadrática.

Asimismo, la solución (2.9) se puede definir en términos de un filtro γ dado por

$$\hat{\gamma}(\nu) = \int_0^\infty g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt,$$

mediante la expresión

$$\hat{E}(Y_y|H_{X_t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}(\nu)}{\hat{h}(\nu)} e^{i2\pi\nu t} d\hat{X}_\nu, \quad (2.10)$$

de donde se deriva que el estimador lineal mínimo-cuadrático se obtiene en términos del proceso X_t y un filtro lineal invariante en el tiempo con función de transferencia $\hat{\gamma}/\hat{h}$.

En la práctica, la formulación de Wiener para el problema de filtrado no siempre resulta apropiada por alguna de las siguientes causas: Se dispone de procesos no estacionarios, o aunque lo sean no existe su función de densidad espectral; no se conocen las propiedades de segundo orden de X_t e Y_t , y/o no se dispone de la observación del proceso en el pasado infinito para calcular el estimador.

Estas limitaciones quedan subsanadas en la formulación del filtrado de Kalman, en la que se requieren condiciones más sencillas de conseguir en la práctica. A diferencia del filtrado de Wiener, cuya solución viene dada en términos de un filtro lineal invariante en el tiempo, la solución del filtrado de Kalman se expresa en términos de una ecuación diferencial (ver, por ejemplo, Wong y Hajek, 1985).

Para el caso de campos aleatorios no estacionarios, Ramm (1990) define la solución al problema de estimación lineal mínimo-cuadrática, para la clase de campos aleatorios cuyas funciones de covarianza $B(x, y)$ son núcleos de operadores definidos como funciones racionales positivas de operadores elípticos autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dichas funciones admiten la siguiente representación espectral

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Lambda} P(\lambda) Q^{-1}(\lambda) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (2.11)$$

donde Λ representa el espectro continuo del operador de covarianza, $d\rho$ la medida espectral y $\Phi(x, y, \lambda)$ el núcleo espectral de un operador elíptico autoadjunto \mathcal{L} , de orden s ; $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ denotan polinomios positivos de grados p y q , respectivamente.

En el caso en que $p > q$, el operador con núcleo (2.11) es un operador integro-diferencial elíptico; si $p = q$, entonces $B = cI + K$, donde $c > 0$, I denota el operador identidad y K es un operador compacto autoadjunto; si $p < q$, se dice que B es un operador compacto autoadjunto en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Se considera un campo aleatorio de observación dado por

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \subseteq L^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.12)$$

donde $s(\mathbf{x})$ denota el campo aleatorio de interés, y $n(\mathbf{x})$ un ruido; sin pérdida de generalidad, se supone que ambos tienen media cero. Se considera que la función de covarianza $B_{\mathcal{U}}$ del campo observado \mathcal{U} y la función de covarianza cruzada $B_{\mathcal{U},s}$, son conocidas y se desea encontrar el estimador lineal mínimo-cuadrático de $As(\mathbf{x}_0)$, donde A es un operador dado. Dicho estimador lineal se define como sigue

$$\hat{\mathcal{U}} = H(\mathcal{U}) = \int_S h(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathcal{U}(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (2.13)$$

donde $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una distribución, bajo la condición,

$$\varepsilon = E[H\mathcal{U} - As]^2 = \text{mínimo}. \quad (2.14)$$

En el caso en que $A = I$, el problema de estimación planteado coincide con el problema de filtrado.

La condición necesaria para encontrar el mínimo en la ecuación (2.14),

viene dada por la identidad

$$\int_S B_U(\mathbf{z}, \mathbf{y}) h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = B_{U,s}(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{z} \in S, \quad (2.15)$$

donde el miembro izquierdo de (2.15) adquiere sentido si el núcleo $B_U(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ pertenece al espacio de funciones test sobre el que se define la distribución h . En la ecuación (2.15), la localización \mathbf{x} donde se quiere estimar s actúa como un parámetro, por lo que dicha ecuación se puede interpretar como

$$(R_U h)(\mathbf{z}) = \int_S B_U(\mathbf{z}, \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = B_{U,s}(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \in S, \quad (2.16)$$

en términos del operador de covarianza R_U de \mathcal{U} , donde la única condición que se impone sobre $B_U(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ es que pertenezca a la clase de núcleos de funciones racionales positivas de operadores elípticos autoadjuntos sobre $H = L^2(\mathbb{R}^n)$. Se considera que $f \in H^\alpha = H^\alpha(S)$, con $\alpha = (q - p)s/2$.

Si $q \leq p$, la solución de (2.16) con orden mínimo de singularidad existe y es única, perteneciendo al espacio $H^{m+2|\alpha|}$ si $f \in H^m$.

Si $q > p$, el orden de singularidad de h es, en general, positivo, $\text{ord } h = \alpha$. Entonces, se tiene que $R_U : H^{-\alpha}(S) \rightarrow H^\alpha(S)$ es un isomorfismo. Si h_1 resuelve (2.16) y $\text{ord}(h_1) > \alpha$, h_1 no verifica (2.14) y, por tanto, la única solución de (2.14) es la solución con orden mínimo de singularidad α dada por (2.16), estable bajo pequeñas perturbaciones de los datos.

Considerando un contexto multiescalar, como el que asumimos para resolver el problema de estimación lineal mínimo-cuadrática a lo largo de los Capítulos 2, 3, y 4, Miller y Willsky (1995) derivan una formulación referida a espacio-escala para el caso en que se disponga de información fusionada procedente de distintos sensores con diferente resolución y cobertura espacial. En particular, consideran que la información a-priori se define en términos

de un modelo fractal en un contexto bayesiano, definido en el dominio de la transformada wavelet con el propósito de regularizar el siguiente problema:

Sea el sistema de ecuaciones integrales,

$$y_i(\mathbf{x}) = \int t_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}')g(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' + n_i(\mathbf{x}'), \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.17)$$

donde g denota la función que se desea reconstruir y los núcleos t_i y las características del proceso de ruido n son conocidas, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En la práctica, el conjunto de datos se compone de un número finito de muestras $y_i(x_j), j = 0, \dots, N_i$.

Utilizando un desarrollo mediante wavelets, la función g admite la siguiente representación:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{n=0} g(m, n)\varphi_{m,n}(\mathbf{x}) + \sum_{k=m}^{F_g-1} \sum_{n=0}^{N_g(k)} \gamma(k, n)\psi_{k,n}(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

donde $\varphi_{m,n}$ y $\psi_{k,n}$ son las versiones trasladadas y escaladas de las funciones φ y ψ , de escalamiento y wavelet, con soporte compacto, donde $N_g(m)$ denota el número finito de términos en la expansión a escala m y F_g representa la escala más fina de reconstrucción y C_g la más basta.

A partir de las relaciones recursivas

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_n l(n)\varphi(2x - n), \\ \psi(x) &= \sum_n h(n)\psi(2x - n), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde l y h denotan, respectivamente, los filtros *low* y *high* finitos asociados a la base de wavelets, se obtienen los vectores de coeficientes de escalamiento de g a escala m , $g(m)$, los vectores de coeficientes wavelets de g a escala m ,

$\gamma(m)$, y la relación entre $g(m+1)$, $g(m)$ y $\gamma(m)$ mediante la transformada wavelet discreta,

$$g(m) = L(m)g(m+1), \quad (2.20)$$

$$\gamma(m) = H(m)g(m+1), \quad (2.21)$$

$$g(m+a) = L^T(m)g(m) + H^T(m)\gamma(m), \quad (2.22)$$

con $L(m)$ y $H(m)$ matrices cuyas componentes son los coeficientes de los filtros l y h , respectivamente.

Las ecuaciones (2.21) y (2.22) permiten la construcción de una matriz \mathcal{W}_g , a partir de $L(m)$ y $H(m)$, que relaciona los coeficientes de escalamiento de la escala más fina, $g = g(F_g)$, con los coeficientes de escalamiento de la escala más basta, $g(C_g)$, y los coeficientes de detalles, $\gamma(m)$, para $m = C_g, C_g + 1, \dots, F_g - 1$, mediante

$$\gamma = \mathcal{W}_g g = [\gamma(F_g - 1)^T, \dots, \gamma(C_g)^T, g(C_g)^T]^T. \quad (2.23)$$

Nos referiremos al vector γ como la *transformada wavelet* de la función g .

En la práctica, el conjunto muestral suele ser discreto, y el modelo de observación se expresa por

$$y_i = T_i g + n_i, \quad (2.24)$$

donde el elemento (α, β) de la matriz T_i viene dado por

$$[T_i]_{\alpha, \beta} = \int t_i(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}') \varphi_{F_g, \beta}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

A continuación, se define la transformada wavelet discreta del vector de observaciones muestrales,

$$\eta_i = \mathcal{W}_i y_i = \mathcal{W}_i T_i \mathcal{W}_g^T \gamma + \mathcal{W}_i n_i \equiv \Theta \gamma + \nu_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.25)$$

donde, η_i está constituido por los coeficientes de escalamiento, $y_i(C_i)$, y el conjunto de coeficientes wavelets, $\eta_i(m)$ a escalas $C_i \leq m \leq F_i - 1$. Finalmente, se fusiona la información recogida por todos los sensores,

$$y = Tg - n,$$

donde,

$$\begin{aligned} y &= [y_1^T, \dots, y_k^T]^T, \\ T &= [T_1^T, \dots, T_k^T]^T, \\ n &= [n_1^T, \dots, n_k^T]^T, \end{aligned} \quad (2.26)$$

y, aplicando de nuevo la transformada wavelet a la fusión de la información, la ecuación (2.25) en el dominio transformado admite la extensión

$$\eta = \Theta\gamma + \nu.$$

Según la metodología tradicional, la estimación óptima se define en términos de ecuaciones de estimación dadas por

$$\left(T^T \bar{R}^{-1} T + L^T L \right) \hat{g}_{trad} = T^T \bar{R}^{-1} y. \quad (2.27)$$

Desde una perspectiva de estimación estadística, la combinación de un enfoque probabilístico de los modelos y el uso de un contexto multiescalar permite estimar g y evaluar la precisión de dicho estimador. Miller y Willsky (1995) consideran el problema de reconstrucción definiendo el máximo estimador a posteriori (map), supuesto que $n \sim \mathcal{N}(0, \bar{R})$ y $g \sim \mathcal{N}(0, \bar{P}_0)$, donde \bar{P}_0 es la matriz de covarianzas a-priori para el campo aleatorio de entrada g y \bar{R} es la

matriz de covarianzas del ruido de observación. Las ecuaciones de estimación se expresan entonces como sigue:

$$\left(T^T \bar{R}^{-1} T + (\bar{P}_0^{-1/2})^T \bar{P}_0^{-1/2}\right) \hat{g}_{map} = T^T \bar{R}^{-1} y. \quad (2.28)$$

Mediante la aplicación de la transformada wavelet a \bar{R} y \bar{P}_0 , se definen,

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathcal{W} \bar{P}_0 \mathcal{W}^T, \\ R &= \mathcal{W} \bar{R} \mathcal{W}^T, \end{aligned} \quad (2.29)$$

y se deriva la siguiente expresión de las ecuaciones de estimación en el dominio de la transformada wavelet,

$$\left(\Theta^T R^{-1} \Theta + (P_0^{-1/2})^T P_0^{-1/2}\right) \hat{\gamma}_{map} = \Theta^T R^{-1} \eta. \quad (2.30)$$

En particular, si $\bar{P}_0 = (\lambda^2 L^T L)^{-1}$, el estimador de g obtenido mediante el planteamiento lineal mínimo-cuadrático coincide con el obtenido mediante el enfoque bayesiano. En el caso en que $\bar{P}_0 = (\lambda^2 L^T L)^{-1}$, donde L representa una diferenciación de primer orden, se tiene que g es un movimiento browniano, verificando $Lg = w$, con $w \sim \mathcal{N}(0, \lambda^{-2} I)$.

2.3 Planteamiento de los problemas

Se consideran los problemas de reconstrucción y extrapolación inversa en términos de un campo aleatorio de entrada, f , y un campo aleatorio de salida, g , ambos definidos sobre un dominio S . Los campos aleatorios f y g se encuentran relacionados mediante un filtro lineal definido en términos de

un operador integral como sigue:

$$g(\mathbf{z}) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_S k(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{z} \in S, \quad (2.31)$$

donde 'm.c.' indica integración en media cuadrática. Nos referiremos a la estimación lineal mínimo-cuadrática de los valores de f sobre S , a partir de la observación de g sobre S , como problema de reconstrucción, y nos referiremos a la estimación de f sobre S_f a partir de la observación de g sobre $S_g \subseteq S_f$, como problema inverso de extrapolación.

A continuación se van a introducir las formulaciones ordinaria y generalizada de los problemas anteriores. En el planteamiento ordinario de los problemas de reconstrucción y extrapolación se considera el siguiente modelo de observación:

$$g(\mathbf{z}) = \int_{S_f} k(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{z} \in S_g, \quad (2.32)$$

siendo $S_g = S_f$ en el problema de reconstrucción y $S_g \subseteq S_f$ en el problema de extrapolación. La aplicación del Teorema de la Proyección Ortogonal conduce a la siguiente ecuación integral:

$$B_{fg}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_{S_g} l(\mathbf{z}, \mathbf{x}) B_{gg}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{z} \in S_f. \quad (2.33)$$

El estimador lineal mínimo-cuadrático viene dado entonces por

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \mathcal{L}g(\mathbf{z}) = \int_{S_g} l(\mathbf{z}, \mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \in S_f. \quad (2.34)$$

En la práctica suele presentarse el caso en que S_f y S_g son finitos. En tal caso, la estimación viene dada por

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n l_i g(\mathbf{x}_i).$$

donde $\{l_i : i = 1, \dots, n\}$ satisface el sistema de ecuaciones derivado mediante discretización de la ecuación (2.33).

En el planteamiento generalizado, la ecuación integral (2.31) se define en términos de los campos aleatorios generalizados g_α y f_β respectivamente asociados a g y f (ver Capítulo 1), como sigue:

$$g_\alpha(\varphi) = f_\beta(K' \varphi), \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad (2.35)$$

siendo α el orden de singularidad de g , el parámetro β representa el orden de singularidad de f y por tanto, el operador adjunto K' de K es acotado entre los espacios $\overline{H}^\alpha(S)$ y $\overline{H}^\beta(S)$.

El estimador lineal mínimo-cuadrático $\hat{f}_\beta(\phi)$ de $f_\beta(\phi)$, basado en la información que proporciona $\{g_\alpha(\varphi) : \varphi \in \overline{H}^\alpha(S)\}$, viene definido en términos del operador lineal $\mathcal{L}' : \overline{H}^\beta(S) \rightarrow \overline{H}^\alpha(S)$, adjunto de \mathcal{L} , como sigue:

$$\hat{f}_\beta(\phi) = g_\alpha(\mathcal{L}'(\phi)), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\beta(S). \quad (2.36)$$

La aplicación del Teorema de la Proyección Ortogonal en este contexto conduce a la siguiente ecuación lineal de estimación:

$$R'_{f_\beta g_\alpha}(\phi) \stackrel{H^{-\alpha}(S)}{=} R_{g_\alpha}(\mathcal{L}'\phi), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\beta(S). \quad (2.37)$$

La ecuación adjunta viene dada por

$$R_{f_\beta g_\alpha}(\varphi) \stackrel{H^{-\beta}(S)}{=} \mathcal{L}R_{g_\alpha}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \overline{H}^\alpha(S), \quad (2.38)$$

donde $R_{f_\beta g_\alpha}$ denota el operador de covarianza asociado con la función de covarianza cruzada $B_{f_\beta g_\alpha}$ entre f_β y g_α .

En el caso en que $\beta > n/2$, el operador \mathcal{L} admite una representación integral en términos de un núcleo l que define las estimaciones puntuales de f en sentido fuerte (ver Teoremas de Inyección de espacios de Sobolev fraccionarios en espacios de Hölder, Apéndice A).

2.4 Desarrollo ortogonal de un campo aleatorio en términos de wavelets

En esta sección se obtiene una formulación de los campos aleatorios de entrada y salida en términos de expansiones ortogonales mediante wavelets. En términos de dichas expansiones se derivará una aproximación débil del estimador lineal mínimo-cuadrático en la Sección 2.5.

Se suponen las siguientes condiciones sobre f y g que definen la clase de campos aleatorios para la que se estudian los problemas de reconstrucción y extrapolación:

(C1) El campo aleatorio entrada f se genera a partir de un ruido blanco ε , en términos de la siguiente relación lineal:

$$f(\phi) \underset{\text{m.c.}}{=} \varepsilon(\mathcal{T}_f \phi), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\beta(S),$$

donde el filtro \mathcal{T}_f es un operador lineal que define un isomorfismo entre $\overline{H}^\beta(S)$ y $L^2(S)$.

(C2) La norma del espacio de Hilbert de núcleo reproductor del campo generalizado definido por g es equivalente a la norma del espacio de Sobolev fraccionario $H^{-\alpha}(S)$.

Nota 8 Como consecuencia de (C1)-(C2), se tiene que K , como operador entre los espacios $H^{-\beta}(S)$ y $H^{-\alpha}(S)$, y K^{-1} como operador entre los espacios $H^{-\alpha}(S)$ y $H^{-\beta}(S)$, son acotados.

El siguiente resultado proporciona las representaciones ortogonales en sentido débil de los campos entrada y salida bajo las condiciones (C1)-(C2).

Teorema 5 Sean f y g dos campos aleatorios relacionados por la ecuación integral (2.31). Suponemos que se verifican las condiciones (C1)-(C2). Entonces, f y g admiten las siguientes expansiones ortogonales en sentido débil sobre S :

$$f_{\beta}(\cdot) \underset{H(f_{\beta})}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} f_{\beta}(\varphi^{\mathbf{k}}) \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} f_{\beta}(\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot), \quad (2.39)$$

$$g_{\alpha}(\cdot) \underset{H(g_{\alpha})}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g_{\alpha}((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}) K \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} g_{\alpha}((K^{-1})' \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot), \quad (2.40)$$

siendo $\varphi_{\mathbf{k}} = \mathcal{T}'_f(\phi_{\mathbf{k}})$, para todo $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$, y $\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{T}'_f(\psi_{j:\boldsymbol{\theta}})$, para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S$, $j \geq 0$, con $R_f = \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f$. El sistema $\{\varphi^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ define la base de Riesz dual con respecto a $L^2(S)$ de la base de Riesz $\{\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, construida a partir de la base ortogonal de wavelets $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\psi_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ de $L^2(S)$.

Demostración A partir del Teorema del Núcleo (ver Gel'fand y Vilenkin, 1964), las funciones de covarianza $B_{f_{\beta} f_{\beta}}$ y $B_{g_{\alpha} g_{\alpha}}$ admiten las siguientes representaciones en términos de operadores simétricos y positivos $R_{f_{\beta}}$ y $R_{g_{\alpha}}$,

respectivamente:

$$\begin{aligned} B_{f_\beta f_\beta}(\phi, \psi) &= R_{f_\beta}(\phi)(\psi) = R_{f_\beta}(\psi)(\phi), \quad \forall \phi, \psi \in \overline{H}^\beta(S), \\ B_{g_\alpha g_\alpha}(\phi, \psi) &= R_{g_\alpha}(\phi)(\psi) = R_{g_\alpha}(\psi)(\phi), \quad \forall \phi, \psi \in \overline{H}^\alpha(S). \end{aligned}$$

A partir de (C1), se obtiene

$$R_{f_\beta}(\phi)(\psi) = \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f(\phi)(\psi), \quad \forall \phi, \psi \in \overline{H}^\beta(S), \quad (2.41)$$

y de la ecuación (2.31), g se define mediante la identidad

$$g_\alpha(\phi) = \varepsilon(\mathcal{T}_f K' \phi), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\alpha(S),$$

que permite definir el operador R_{g_α} en términos de \mathcal{T}_f como sigue:

$$R_{g_\alpha}(\phi)(\psi) = K \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f K'(\phi)(\psi), \quad \forall \phi, \psi \in \overline{H}^\alpha(S). \quad (2.42)$$

La ortonormalidad de los coeficientes aleatorios de las expansiones dadas en las ecuaciones (2.39) y (2.40) se deriva a partir de la ortonormalidad de la base $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\psi_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ con respecto a la geometría de $L^2(S)$ y de las ecuaciones (2.41) y (2.42) :

$$\begin{aligned} E [f_\beta(\varphi^{\mathbf{k}}) f_\beta(\varphi^{\mathbf{p}})] &= \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f(\varphi^{\mathbf{k}})(\varphi^{\mathbf{p}}) = \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}) \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{p}}) \\ &= \mathcal{T}'_f(\phi_{\mathbf{k}}) \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{p}}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}}, \\ E [f_\beta(\varphi^{\mathbf{k}}) f_\beta(\gamma^{j:\theta})] &= \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f(\varphi^{\mathbf{k}})(\gamma^{j:\theta}) = \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}) \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{j:\theta}) \\ &= \mathcal{T}'_f(\phi_{\mathbf{k}}) \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{j:\theta}) = 0, \\ E [f_\beta(\gamma^{j:\theta}) f_\beta(\gamma^{h:\lambda})] &= \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f(\gamma^{j:\theta})(\gamma^{h:\lambda}) = \mathcal{T}'_f \mathcal{T}_f \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{j:\theta}) \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{h:\lambda}) \\ &= \mathcal{T}'_f(\psi_{j:\theta}) \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{h:\lambda}) = \delta_{j,h} \delta_{\theta,\lambda}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Los elementos del sistema $\{\varphi^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S\}$ se definen como sigue:

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathbf{k}} &= \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \\ \gamma^{j:\theta} &= \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{j:\theta}), \quad \forall \theta \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{p}}) &= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}} = \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}) (\mathcal{T}_f'(\phi_{\mathbf{p}})), \quad \forall \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \Gamma_0^S, \\ \varphi^{\mathbf{k}}(\gamma_{j:\theta}) &= 0 = \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}) (\mathcal{T}_f'(\psi_{j:\theta})), \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \quad \theta \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0, \\ \gamma^{j:\theta}(\gamma_{h:\lambda}) &= \delta_{j,h} \delta_{\theta,\lambda} = \mathcal{T}_f^{-1}(\gamma_{j:\theta}) (\mathcal{T}_f'(\psi_{h:\lambda})), \\ &\quad \forall \mathbf{k}, \mathbf{h} \in \Gamma_0^S, \quad \theta, \lambda \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0.\end{aligned}\tag{2.44}$$

A partir de las igualdades

$$\begin{aligned}B_{f_{\beta}f_{\beta}}(\phi, \phi) &= \|\mathcal{T}_f(\phi)\|_{L^2(S)}^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\mathcal{T}_f(\phi)(\phi_{\mathbf{k}})]^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} [\mathcal{T}_f(\phi)(\psi_{j:\theta})]^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\varphi_{\mathbf{k}}(\phi)]^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} [\gamma_{j:\theta}(\phi)]^2, \quad y \\ B_{g_{\alpha}g_{\alpha}}(\psi, \psi) &= \|\mathcal{T}_f K'(\psi)\|_{L^2(S)}^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\mathcal{T}_f K'(\psi)(\phi_{\mathbf{k}})]^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} [\mathcal{T}_f K'(\psi)(\psi_{j:\theta})]^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [K\varphi_{\mathbf{k}}(\psi)]^2 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} [K\gamma_{j:\theta}(\psi)]^2,\end{aligned}\tag{2.45}$$

para cada $\phi \in \overline{H}^{\beta}(S)$ y $\psi \in \overline{H}^{\alpha}(S)$, se tiene que el miembro derecho de las

ecuaciones

$$\begin{aligned}
 & E \left[f_\beta(\phi) - \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} f_\beta(\varphi^{\mathbf{k}}) \varphi_{\mathbf{k}}(\phi) - \sum_{j=0}^M \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} f_\beta(\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\phi) \right]^2 \\
 & = B_{f_\beta f_\beta}(\phi, \phi) - \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\varphi_{\mathbf{k}}(\phi)]^2 - \sum_{j=0}^M \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\phi)]^2, \quad y \\
 & E \left[g_\alpha(\psi) - \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g_\alpha((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}) K \varphi_{\mathbf{k}}(\psi) - \sum_{j=0}^M \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} g_\alpha((K^{-1})' \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi) \right]^2 \\
 & = B_{g_\alpha g_\alpha}(\psi, \psi) - \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [K \varphi_{\mathbf{k}}(\psi)]^2 - \sum_{j=0}^M \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi)]^2,
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

tiende a cero cuando M tiende a infinito.

Nótese que los cardinales de los conjuntos de Γ_0^S y Θ_j^S , $j \geq 0$, que representan el número de coeficientes no nulos de escalamiento y wavelets, respectivamente, son finitos debido a que se ha considerado una base ortonormal de funciones wavelet con soporte compacto contenido en S (ver Apéndice C).

■

Nota 9 La continuidad en media cuadrática de g para $-\alpha > n/2$ se prueba a partir de los Teoremas de Inyección de espacios de Sobolev fraccionarios en espacios de Hölder-Zygmund (ver Apéndice A). En el caso en que también $-\beta > n/2$, las expansiones ortogonales derivadas en sentido débil en el Teorema 5 para f y g pueden ser interpretadas en sentido fuerte. Así, las siguientes expansiones ortogonales pueden obtenerse puntualmente para f y g : Para $\mathbf{z} \in S$,

$$f(\mathbf{z}) \underset{\text{m.c.}}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} f^{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} f^{j:\boldsymbol{\theta}} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}), \quad (2.47)$$

$$g(\mathbf{z}) \underset{\text{m.c.}}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g^{\mathbf{k}} K \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} g^{j:\boldsymbol{\theta}} K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}), \quad (2.48)$$

donde, para $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$ y $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S$, $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{k}} &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_S f(\mathbf{z}) \varphi^{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \\ f^{j:\boldsymbol{\theta}} &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_S f(\mathbf{z}) \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \\ g^{\mathbf{k}} &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_S g(\mathbf{z}) (K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \\ g^{j:\boldsymbol{\theta}} &\underset{\text{m.c.}}{=} \int_S g(\mathbf{z}) (K^{-1})' \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

representando $\underset{\text{m.c.}}{=}$ la identidad en media cuadrática, y definiéndose

$$\{\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$$

y

$$\{\varphi^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$$

como en el Teorema 5 considerando las correspondientes identidades en sentido fuerte (ver Angulo y Ruiz-Medina, 1999).

2.5 Resolución funcional del problema inverso de estimación

2.5.1 Aproximación discreta en términos de wavelets

El siguiente resultado proporciona una estimación débil de f basada en la proyección del problema de reconstrucción en la base $\{K\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{K\gamma_{j;\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, del espacio de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(g_\alpha)$ de g_α .

Teorema 6 *Supongamos que se verifican las condiciones del Teorema 5. Entonces,*

$$\begin{aligned}
 f_\beta(\cdot) & \underset{H(f_\beta)}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g_\alpha ((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}) R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) \\
 & \quad + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} g_\alpha ((K^{-1})' \gamma^{j;\boldsymbol{\theta}}) R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \gamma_{j;\boldsymbol{\theta}}(\cdot) \\
 & \underset{H(f_\beta)}{=} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varepsilon(\phi_{\mathbf{k}}) R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) \\
 & \quad + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \varepsilon(\psi_{j;\boldsymbol{\theta}}) R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \gamma_{j;\boldsymbol{\theta}}(\cdot), \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

donde $\underset{H(f_\beta)}{=}$ denota la igualdad en media cuadrática en el espacio de Hilbert

$H(f_\beta)$ definido por $H(f_\beta) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \{f_\beta(\varphi) : \varphi \in \overline{H}^\beta(S)\}$ y

$$\begin{aligned}
 R_{g_\alpha}^{-1}(\phi)(\psi) & = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} ((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}})(\phi) ((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}})(\psi) \\
 & \quad + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} ((K^{-1})' \gamma^{j;\boldsymbol{\theta}})(\phi) ((K^{-1})' \gamma^{j;\boldsymbol{\theta}})(\psi). \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

Nota 10 Las expansiones ortogonales en sentido débil derivadas del Teorema 5 proporcionan aproximaciones funcionales de f y g . La fórmula de reconstrucción (2.50), derivada en términos de dichas expansiones, conduce a una estimación funcional de f sobre S .

Demostración A partir de la condición (C1) y la ecuación (2.31), se tiene que

$$g_\alpha(\phi) = \varepsilon(\mathcal{T}_f K' \phi), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\alpha(S).$$

Bajo las condiciones del Teorema 5,

$$\begin{aligned} g_\alpha((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}) &= \varepsilon(\mathcal{T}_f K' (K')^{-1} \mathcal{T}_f^{-1} \phi_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \\ g_\alpha((K^{-1})' \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) &= \varepsilon(\mathcal{T}_f K' (K')^{-1} \mathcal{T}_f^{-1} \psi_{j:\boldsymbol{\theta}}) = \varepsilon(\psi_{j:\boldsymbol{\theta}}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f_\beta(\varphi^{\mathbf{k}}) &= \varepsilon(\mathcal{T}_f \mathcal{T}_f^{-1} \phi_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \\ f_\beta(\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}) &= \varepsilon(\mathcal{T}_f \mathcal{T}_f^{-1} \psi_{j:\boldsymbol{\theta}}) = \varepsilon(\psi_{j:\boldsymbol{\theta}}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Los coeficientes aleatorios ortonormales que definen la fórmula de reconstrucción (2.50) coinciden, pues, con los coeficientes aleatorios que definen la expansión ortogonal de f en el Teorema 5.

Para todo $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$ y $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S$, $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) &= \mathcal{T}_f' \mathcal{T}_f K' (K')^{-1} \mathcal{T}_f^{-1} (\mathcal{T}_f')^{-1} K^{-1} K \mathcal{T}_f' \phi_{\mathbf{k}}(\cdot) = \varphi_{\mathbf{k}}, \\ R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1} K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot) &= \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por tanto, la ecuación (2.50) permite generar f a partir de la expansión ortogonal de g . La expansión en serie (2.51) se obtiene del desarrollo dual del

inverso $R_{g_\alpha}^{-1}$ de R_{g_α} . Es decir, puesto que,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} K\varphi_{\mathbf{k}}(\phi)K\varphi_{\mathbf{k}}(\psi) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} K\psi_{j:\boldsymbol{\theta}}(\phi)K\psi_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi) \quad (2.54)$$

converge a $R_{g_\alpha}(\phi)(\psi) = K\mathcal{T}'_f\mathcal{T}_fK'$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} ((K^{-1})'\varphi^{\mathbf{k}})(f) ((K^{-1})'\varphi^{\mathbf{k}})(g) \\ & + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} ((K^{-1})'\psi^{j:\boldsymbol{\theta}})(f) ((K^{-1})'\psi^{j:\boldsymbol{\theta}})(g), \end{aligned}$$

converge a $R_{g_\alpha}^{-1}(f)(g) = (K')^{-1}\mathcal{T}_f^{-1}(\mathcal{T}'_f)^{-1}K^{-1}(f)(g)$. ■

En el siguiente resultado se deriva una fórmula de extrapolación inversa funcional mínimo-cuadrática de f basada en su expansión ortogonal en términos de wavelets transformadas. La siguiente notación será utilizada en las representaciones débiles en serie de la función de covarianza cruzada entre f y g y de la función de covarianza de g :

$$\begin{aligned} h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_j) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot) [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j), \\ h^{KK}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_i) [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_i) [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j), \end{aligned} \quad (2.55)$$

respectivamente, para $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in S$.

Teorema 7 *Bajo las condiciones del Teorema 5, suponiendo que el conjunto de observación de g es finito, constituido por las localizaciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in$*

S , para $-\alpha > n/2$, se obtiene la siguiente formulación funcional del estimador lineal mínimo-cuadrático de f en el problema de extrapolación:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\cdot) &= \mathcal{L}[g(\mathbf{x}_1), \dots, g(\mathbf{x}_n)]^T(\cdot) \\ &:= [h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_1), \dots, h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_n)] \begin{bmatrix} h^{KK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & h^{KK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ & \ddots & \\ h^{KK}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \dots & h^{KK}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times [g(\mathbf{x}_1), \dots, g(\mathbf{x}_n)]^T, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde 'T' denota la transposición de vectores y matrices.

Demostración A partir del Teorema 5, f admite un desarrollo ortogonal como en la ecuación (2.39). Dicho desarrollo induce un desarrollo ortogonal transformado para g en términos de $\{K\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, y las siguientes expansiones en serie de los operadores de covarianza $R_{f\beta g\alpha}$ y $R_{g\alpha}$:

$$\begin{aligned} R_{f\beta g\alpha}(\phi)(\psi) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\phi) K\varphi_{\mathbf{k}}(\psi) \\ &\quad + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\phi) K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi), \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} R_{g\alpha}(\psi)(\varphi) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} K\varphi_{\mathbf{k}}(\psi) K\varphi_{\mathbf{k}}(\varphi) \\ &\quad + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j} K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi) K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\varphi), \end{aligned} \quad (2.58)$$

para $\phi \in \overline{H}^\beta(S)$ y $\psi, \varphi \in \overline{H}^\alpha(S)$.

En el caso generalizado, la formulación débil del Teorema de la Proyección Ortogonal conduce a la siguiente identidad:

$$\mathcal{L} = R_{f_\beta g_\alpha} R_{g_\alpha}^{-1}, \quad (2.59)$$

definiendo $\hat{f}_\beta(\phi) = g_\alpha(\mathcal{L}'\phi)$, el estimador lineal mínimo-cuadrático de f_β , para $\phi \in \overline{H}^\beta(S)$, (ver ecuaciones (2.36) y (2.38)). Las ecuaciones (2.57) y (2.58) conducen entonces a un desarrollo en serie de la solución en sentido débil, \mathcal{L} . Para $-\alpha > n/2$, R_{g_α} admite una expresión integral, y el desarrollo en serie de R_{g_α} proporciona un desarrollo en serie de la función de covarianza asociada B_{g_α} dado mediante la ecuación (2.55). Puesto que $-\alpha > n/2$, considerando $\psi = \delta_{x_i}, i = 1, \dots, n$ en (2.57) se obtiene entonces (2.56). (ver Teoremas de Inyección de espacios de Sobolev en espacios de Hölder-Zygmund, Apéndice A). ■

2.5.2 Aproximación finito-dimensional

La expansión ortogonal en sentido débil de f dada en (2.39) conduce a la siguiente aproximación de su operador de covarianza, R_{f_β} :

$$\begin{aligned} R_{f_\beta}(\phi)(\psi) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\phi) \varphi_{\mathbf{k}}(\psi) \\ &+ \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} \gamma_{j:\theta}(\phi) \gamma_{j:\theta}(\psi), \quad \forall \phi, \psi \in \overline{H}^\beta(S). \end{aligned} \quad (2.60)$$

El truncamiento de (2.57), (2.58) y (2.60) a cierta escala $j = M$ proporciona aproximaciones finito-dimensionales para los operadores R_{f_β} , R_{g_α} y

$R_{f\beta g\alpha}$, respectivamente. Utilizando los superíndices \mathbf{k} y $(j : \theta)$ para denotar las coordenadas con respecto a los elementos de los sistemas $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$ y $\{\psi_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, es decir, $u^{\mathbf{k}} := u(\phi_{\mathbf{k}})$ y $u^{j:\theta} := u(\psi_{j:\theta})$, para cualquier $u \in L^2(S)$, se tiene entonces, la siguiente notación en coordenadas para la aproximación finito-dimensional de $R_{f\beta}$:

$$\begin{aligned}
R_{f\beta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_m}, \\
R_{f\beta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p}, \\
R_{f\beta}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p} \gamma_{j:\theta_r}^{i:\theta_q}; \quad (2.61)
\end{aligned}$$

análogamente, para $R_{g\alpha}$,

$$\begin{aligned}
R_{g\alpha}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_m}, \\
R_{g\alpha}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p}, \\
R_{g\alpha}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{i:\theta_q}; \quad (2.62)
\end{aligned}$$

y para $R_{f\beta g\alpha}$,

$$\begin{aligned}
 R_{f_{\beta}g_{\alpha}}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} [K \varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} [K \gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_m}, \\
 R_{f_{\beta}g_{\alpha}}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} [K \varphi_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} [K \gamma_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p}, \\
 R_{f_{\beta}g_{\alpha}}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} [K \varphi_{\mathbf{k}_n}]^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p} [K \gamma_{j:\theta_r}]^{i:\theta_q},
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde $l, m = 1, \dots, N(0)$, $p = 1, \dots, Q(h)$ y $q = 1, \dots, Q(i)$, para $h, i = 0, \dots, M$, siendo $N(0)$ el número de funciones de escalamiento a escala 0 y $Q(j)$ el número de funciones wavelets a escala j .

Las ecuaciones (2.61), (2.62) y (2.63) conducen, respectivamente, a las siguientes aproximaciones matriciales de los operadores $R_{f_{\beta}}$, $R_{g_{\alpha}}$ y $R_{f_{\beta}g_{\alpha}}$ restringidos al subespacio finito-dimensional generado por

$$\left\{ \phi_{\mathbf{k}_1}, \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ \psi_{j:\theta_1}, \dots, \psi_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\} :$$

$$\begin{aligned}
 R_{f_{\beta}} &\simeq BB^T, \\
 R_{g_{\alpha}} &\simeq K_B K_B^T, \\
 R_{f_{\beta}g_{\alpha}} &\simeq BK_B^T,
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} V & G_0 & \dots & G_M \\ \hline V^0 & G_0^0 & \dots & G_M^0 \\ \vdots & & \vdots & \\ V^M & G_0^M & \dots & G_M^M \end{array} \right], \quad (2.65)$$

siendo

$$V = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_1} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{\mathbf{k}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_{N(0)}} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{\mathbf{k}_{N(0)}} \end{bmatrix}, \quad V^i = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{k}_1}^{i:\theta_1} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{i:\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\mathbf{k}_1}^{i:\theta_{Q(i)}} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{i:\theta_{Q(i)}} \end{bmatrix},$$

$$G_j = \begin{bmatrix} \gamma_{j:\theta_1}^{\mathbf{k}_1} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{\mathbf{k}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{j:\theta_1}^{\mathbf{k}_{N(0)}} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{\mathbf{k}_{N(0)}} \end{bmatrix}, \quad G_j^i = \begin{bmatrix} \gamma_{j:\theta_1}^{i:\theta_1} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{i:\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{j:\theta_1}^{i:\theta_{Q(i)}} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{i:\theta_{Q(i)}} \end{bmatrix},$$

para $i, j = 0, \dots, M$. La matriz K_B se define de forma similar a la matriz B , considerando las coordenadas de las funciones transformadas $\{K\varphi_{\mathbf{k}_1}, \dots, K\varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}\} \cup \{K\gamma_{j:\theta_1}, \dots, K\gamma_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M\}$ con respecto a la base finito-dimensional $\{\phi_{\mathbf{k}_1}, \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N(0)}}\} \cup \{\psi_{j:\theta_1}, \dots, \psi_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M\}$.

Se obtiene entonces la siguiente aproximación finito-dimensional de la fórmula de reconstrucción (2.50):

$$\hat{f}(\cdot) \simeq \left[BK_B^T (K_B K_B^T)^{-1} K_B \mathcal{E} \right] (\cdot), \quad (2.66)$$

donde el vector aleatorio \mathcal{E} representa la transformada wavelet de ε a escala M .

De forma similar, la ecuación (2.56) se aproxima por

$$\hat{f}(\cdot) \simeq \left[BB^T K_A(\underline{\mathbf{x}})^T (K_A(\underline{\mathbf{x}}) BB^T K_A(\underline{\mathbf{x}})^T)^{-1} G \right] (\cdot), \quad (2.67)$$

donde $K_A(\underline{\mathbf{x}})$ representa la matriz que contiene los valores de las funciones wavelets transformadas,

$$\left\{ K\phi_{\mathbf{k}_1}, \dots, K\phi_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ K\psi_{j:\theta_1}, \dots, K\psi_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\},$$

en las localizaciones observadas $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, y el vector aleatorio G contiene los valores de g en tales localizaciones.

2.6 Aplicación

En esta sección se consideran modelos dados por ruido blanco integrado fraccionalmente y movimiento browniano fraccionario, para ilustrar los resultados derivados en el Teorema 5 (ver Sección 2.6.1), y Teoremas 6 y 7 (ver Sección 2.6.2).

2.6.1 Estudio sobre el error de truncamiento

Estudiamos en primer lugar la precisión en términos del error cuadrático medio de la expansión ortogonal obtenida en el Teorema 5 truncada, en función de la escala de truncamiento, de la base wavelet utilizada y de la regularidad del modelo considerado.

Concretamente, se calculan las expansiones ortogonales débiles de dos modelos de movimiento browniano fraccionario con índices de Hurst 0.3 y 0.1, así como de dos modelos de ruido blanco integrado fraccionalmente con órdenes de regularidad fraccionaria 0.33 y 0.12. y Es decir, se estudian los modelos cuyos órdenes de regularidad son:

$$(a) \alpha = -0.8, \quad (b) \alpha = -0.6, \quad (c) \alpha = -0.33, \quad (d) \alpha = -0.12,$$

respectivamente. Se considera la señal original discretizada en un número de puntos equivalente a una escala 10 (i.e. el dominio se particiona en 2^{10} subintervalos de igual tamaño) y se obtienen los errores cuadráticos medios entre la señal discretizada en cuestión y las aproximaciones en serie mediante wavelets derivadas en este capítulo, truncadas a diferentes niveles de resolución, que varían desde 1 hasta 9, considerando asimismo distintas bases de wavelets.

En particular, las aproximaciones calculadas se han realizado en términos de las bases de wavelets de Daubechies por sus propiedades de regularidad y por tener soporte compacto. Los resultados obtenidos para los modelos mencionados anteriormente se comparan en la Figura 2.1. La representación de los errores cuadráticos medios obtenidos con la base Daubechies 3 (db3) se realiza mediante una línea continua, los calculados con la base Daubechies 5 (db5), mediante una línea discontinua y los correspondientes a la base Daubechies 7 (db7) se muestran mediante una línea de puntos.

En general, se observa un comportamiento similar entre las distintas bases de wavelets consideradas, para un α fijo, aunque se aprecia que la aproximación mejora relativamente cuando el orden de regularidad del modelo, $-\alpha$, aumenta.

2.6.2 Estudio del problema de reconstrucción y extrapolación

Se considera la ecuación integral

$$g = (-\Delta)^{\gamma/2} f, \quad \gamma < 0, \quad (2.68)$$

donde se supone que el campo aleatorio de entrada f viene dado por la ecuación diferencial

$$(-\Delta)^{-\beta/2} f = \varepsilon, \quad -\beta > 0, \quad (2.69)$$

siendo ε un ruido blanco Gaussiano. El campo aleatorio f tiene entonces orden de regularidad en media cuadrática $-\beta$ y el campo de salida g tiene orden de regularidad en media cuadrática $-\alpha = -\beta - \gamma$ y satisface la ecuación

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} g = \varepsilon, \quad -\alpha > 0. \quad (2.70)$$

Consideramos la restricción en sentido débil de g y f a un intervalo acotado, $[-4, 4]$, en términos de funciones wavelets con soporte compacto contenido en dicho intervalo. La entrada f y la salida g se hallan discretizadas en 1024 puntos.

Se implementa la fórmula de reconstrucción derivada en el Teorema 6 en términos de las bases de wavelets Daubechies 1 (db1), Daubechies 3 (db3), Daubechies 5 (db5) y Daubechies 7 (db7) para $\beta = -0.60$ y $\alpha = -0.80$ (ver Figura 2.2).

En el caso del problema de extrapolación, se calcula una aproximación de la estimación funcional lineal mínimo-cuadrática en términos de db1, db3, db5 y db7, en los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \beta &= -0.60, & \alpha &= -0.80 & (\text{caso ordinario}); \\ \beta &= -0.10, & \alpha &= -0.65 & (\text{caso generalizado ordinario}); \\ \beta &= -0.10, & \alpha &= -0.35 & \text{y} \\ \beta &= -0.02, & \alpha &= -0.12 & (\text{caso generalizado}). \end{aligned}$$

Los resultados se muestran en las Figuras 2.3 - 2.8. Los errores cuadráticos medios asociados se recogen en la Tabla 2.1.

Se observa que, en el caso ordinario, los resultados que se muestran están afectados por pequeños errores numéricos derivados de la implementación de las convoluciones involucradas en las generaciones que, en los ejemplos considerados, requieren el truncamiento en las colas y en posibles singularidades de los núcleos que las definen. Este efecto, que evidentemente depende de los parámetros del modelo, puede observarse, por ejemplo, en la Figura 2.2, donde aunque se captan las principales características, se introduce un cierto grado de suavizamiento en las altas frecuencias.

La implementación del caso generalizado requiere la definición de la función de covarianza de la salida y de la función de covarianza cruzada entre la entrada y la salida, así como de la observación muestral en términos de coeficientes wavelets. Como cabe esperar, las estimaciones obtenidas con la base de wavelets db7 proporcionan una mejor aproximación en este caso.

2.7 Conclusión

Se deriva una aproximación basada en wavelets, en sentido débil, para los problemas de reconstrucción y extrapolación funcional lineal mínimo-cuadrática, para una clase de campos aleatorios con norma del espacio de Hilbert de núcleo reproductor equivalente a la norma de un espacio de Sobolev fraccionario de orden apropiado. En dichos problemas, se supone que el operador de covarianza de la salida y el operador de covarianza cruzada entre la entrada y la salida son conocidos. En la práctica, esta información se puede

obtener a partir de un conocimiento físico previo sobre el campo aleatorio de entrada y su relación con el campo aleatorio de salida. En ambos casos, la aproximación funcional de la entrada f se obtiene en términos de una base ortonormal del espacio de Hilbert de núcleo reproductor asociado a la salida.

En el caso en que el orden de regularidad fraccionario del campo aleatorio de entrada es superior a $n/2$, se puede interpretar dicha aproximación en sentido fuerte. El truncamiento de las expansiones ortogonales basadas en wavelets a diferentes escalas conduce a una aproximación finito-dimensional de sus respectivas soluciones.

Se desarrolla un estudio de simulación para ilustrar los resultados derivados, considerando dos clases de modelos fractales definidos, respectivamente, en términos de integración fraccionaria de ruido blanco (ver Samorodnitsky y Taqqu, 1994) y movimiento browniano fraccionario (ver Wornell, 1990).

En el caso generalizado (ruido blanco integrado fraccionariamente), la definición en sentido débil de la correspondiente solución ordinaria en términos de coeficientes wavelets de la función de covarianza conduce a una mejor aproximación de los estimadores lineales mínimo-cuadráticos para esta clase de campos aleatorios fractales.

Parámetros del modelo		Tamaño muestral	Base de wavelets			
β	α	n	db1	db3	db5	db7
-0.60	-0.80	256	0.2123	0.2038	0.2037	0.2036
-0.60	-0.80	512	0.2096	0.1968	0.1967	0.1865
-0.10	-0.65	256	0.3591	0.3592	0.3593	0.3594
-0.10	-0.65	512	0.2716	0.2717	0.2718	0.2719
-0.10	-0.35	512	1.1743	0.8138	0.0542	0.0552
-0.02	-0.12	512	0.4881	0.0228	0.0096	0.0003

Tabla 2.1: Errores cuadráticos medios obtenidos para los diferentes casos estudiados en el problema de extrapolación.

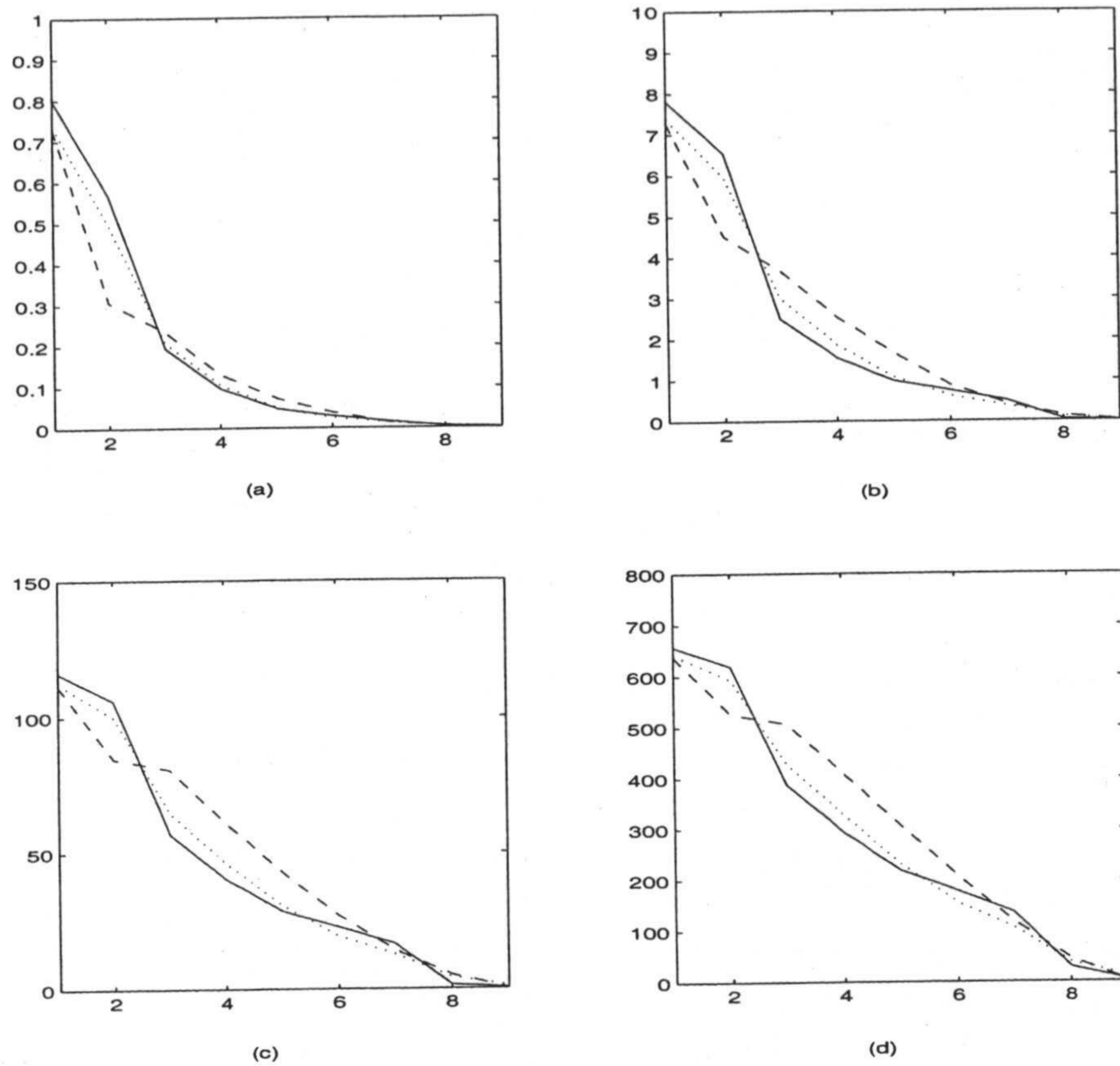


Figura 2.1: Residuos mínimo-cuadráticos entre la señal original y las aproximaciones wavelet usando db3 (línea continua), db5 (línea discontinua), y db7 (línea de puntos), a diferentes niveles de resolución (donde el nivel 10 representa la información completa), para (a) $\alpha = -0.8$, (b) $\alpha = -0.6$, (c) $\alpha = -0.33$ y (d) $\alpha = -0.12$.

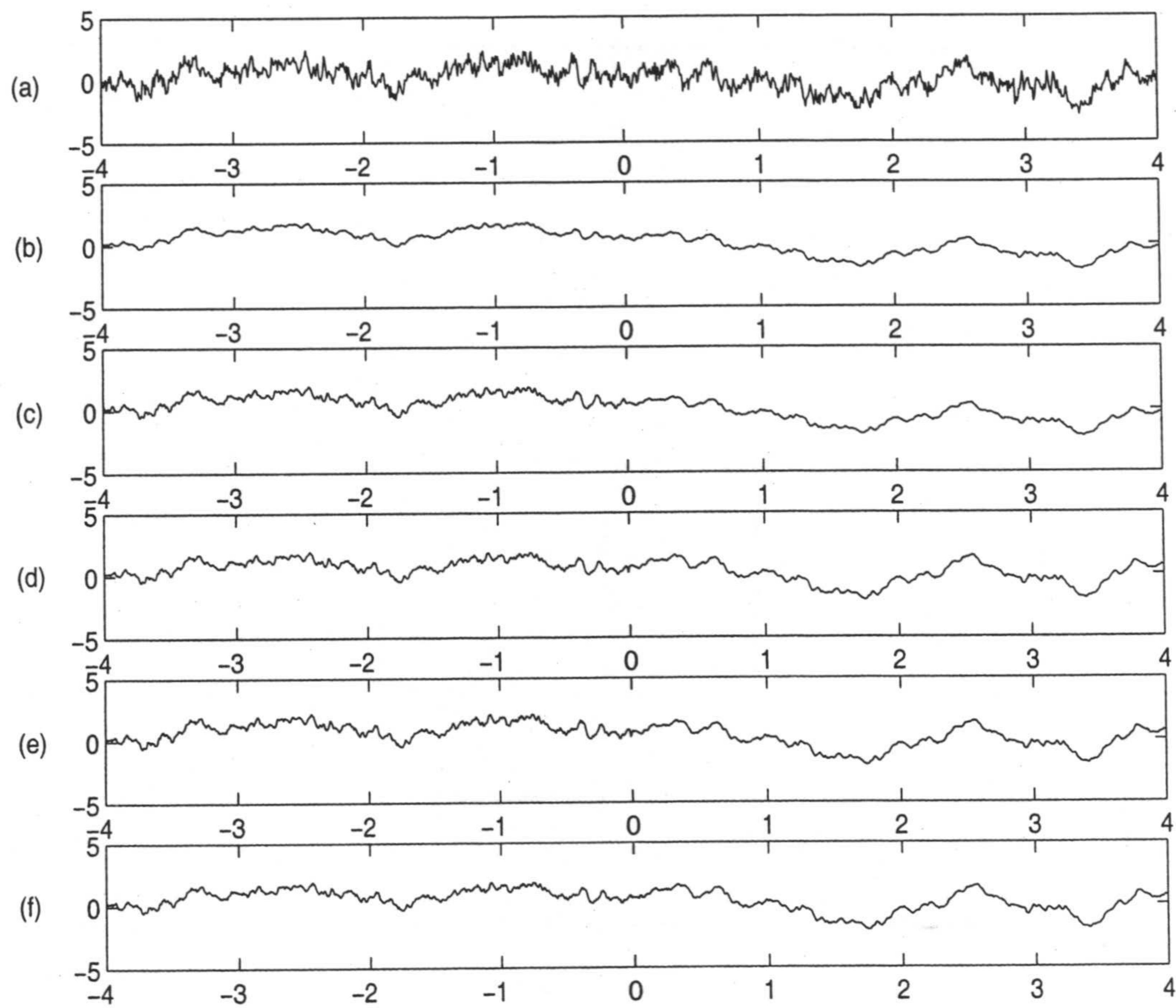


Figura 2.2: Problema de reconstrucción, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$: Entrada (a); salida (b); reconstrucción funcional utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

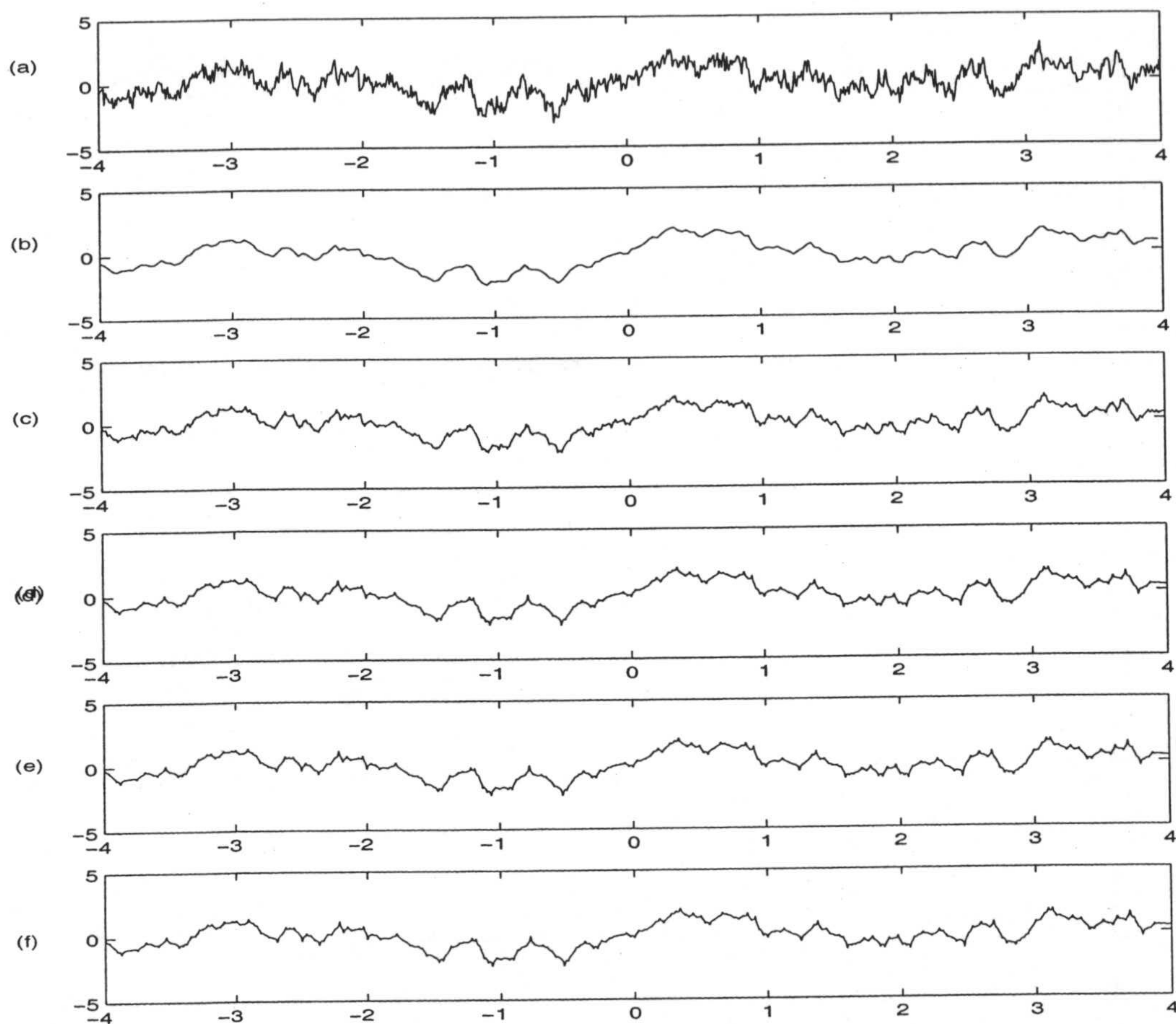


Figura 2.3: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, $n = 256$: Entrada (a); salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

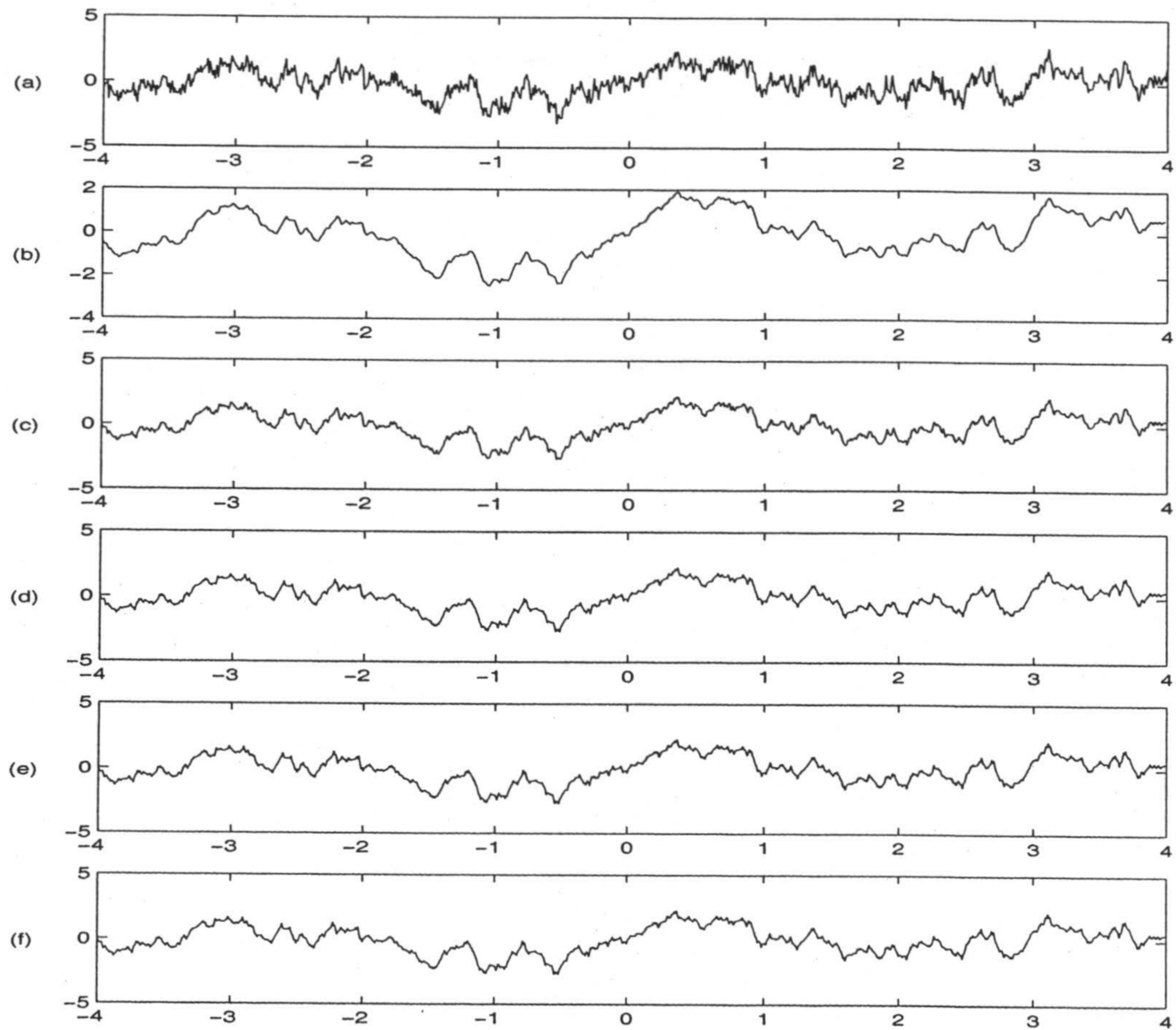


Figura 2.4: *Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, $n = 512$: Entrada (a); salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).*

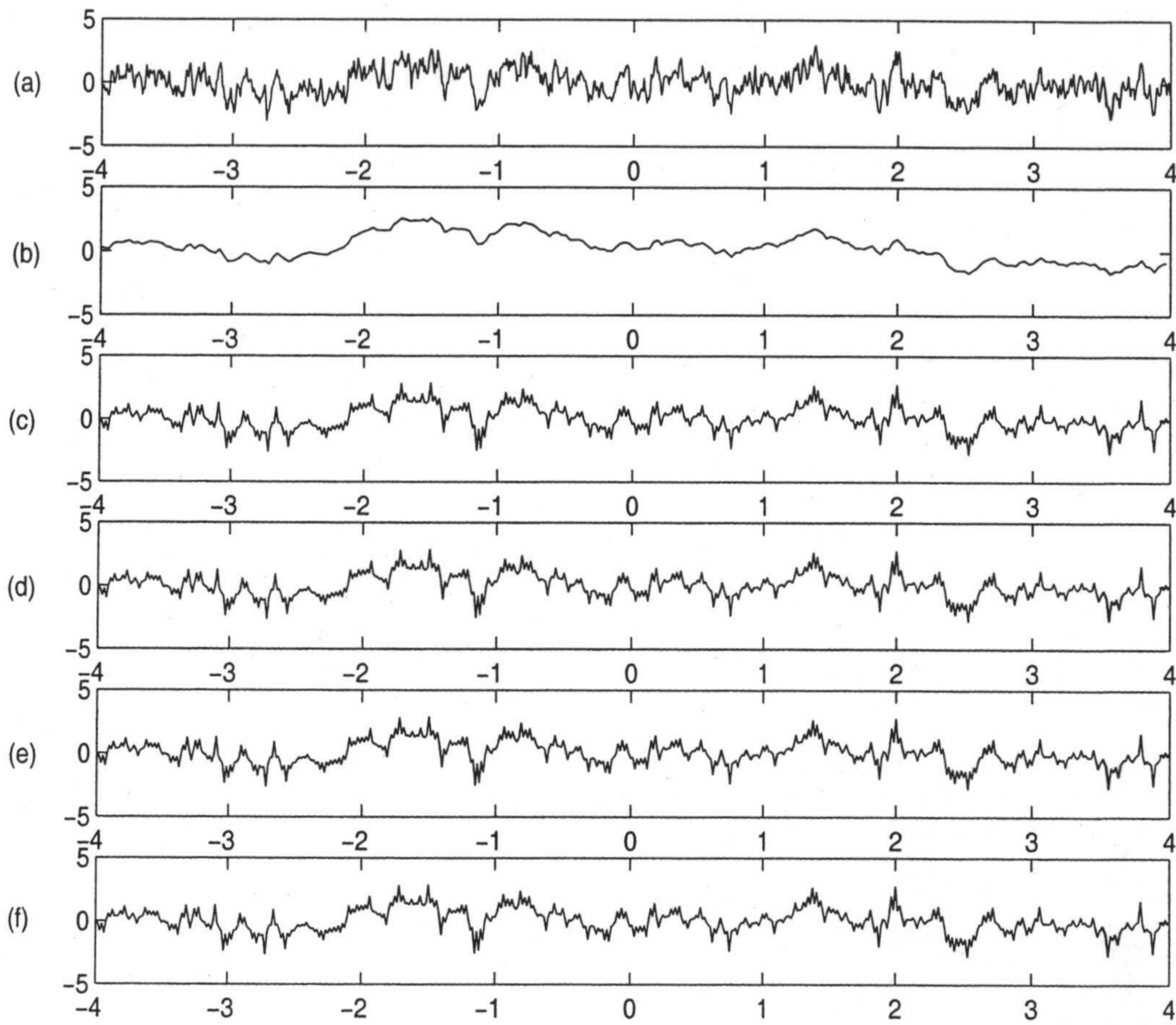


Figura 2.5: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.1$, $\alpha = -0.65$, $n = 256$: Entrada (a); salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

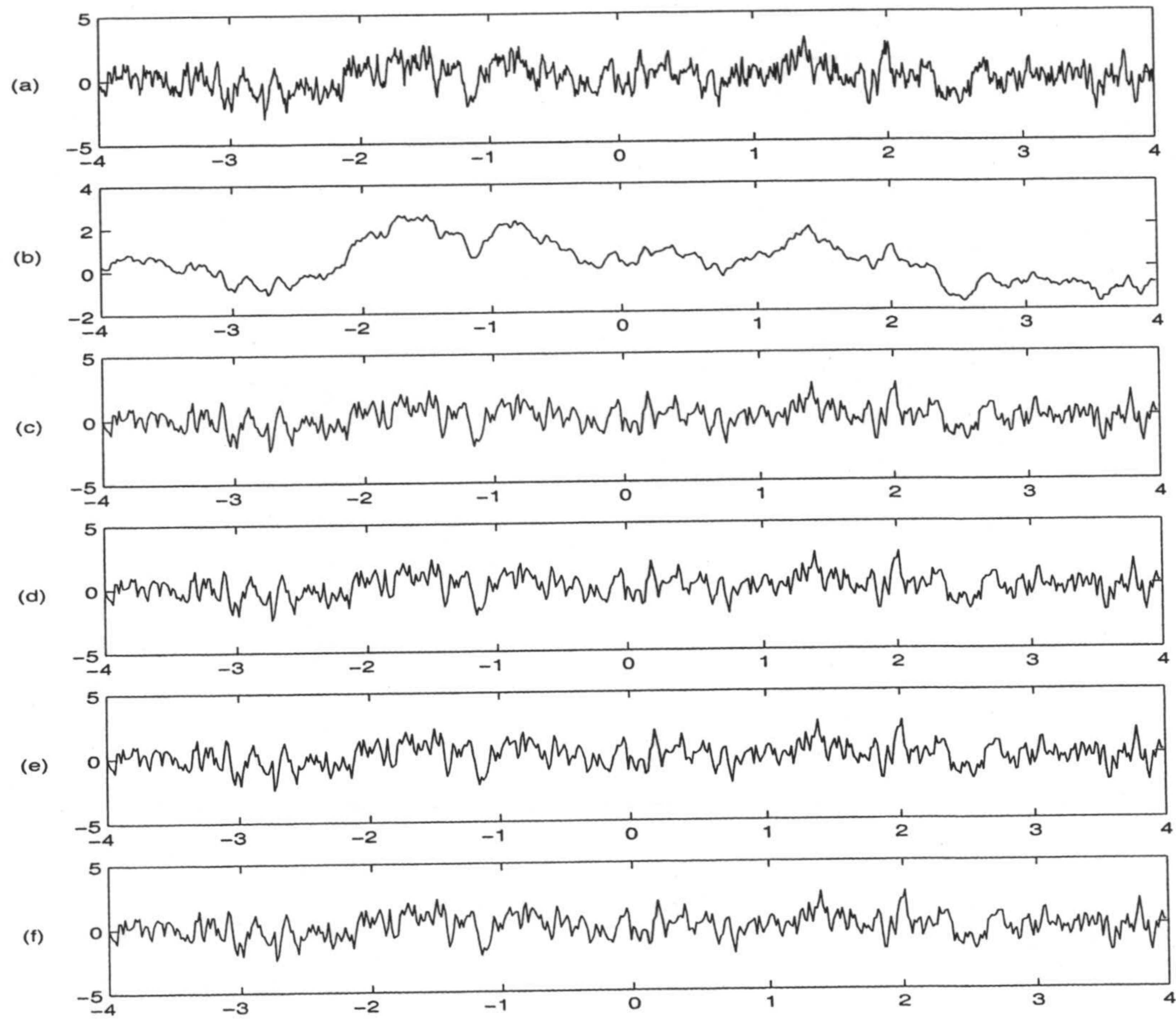


Figura 2.6: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.1$, $\alpha = -0.65$, $n = 512$: Entrada (a); salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

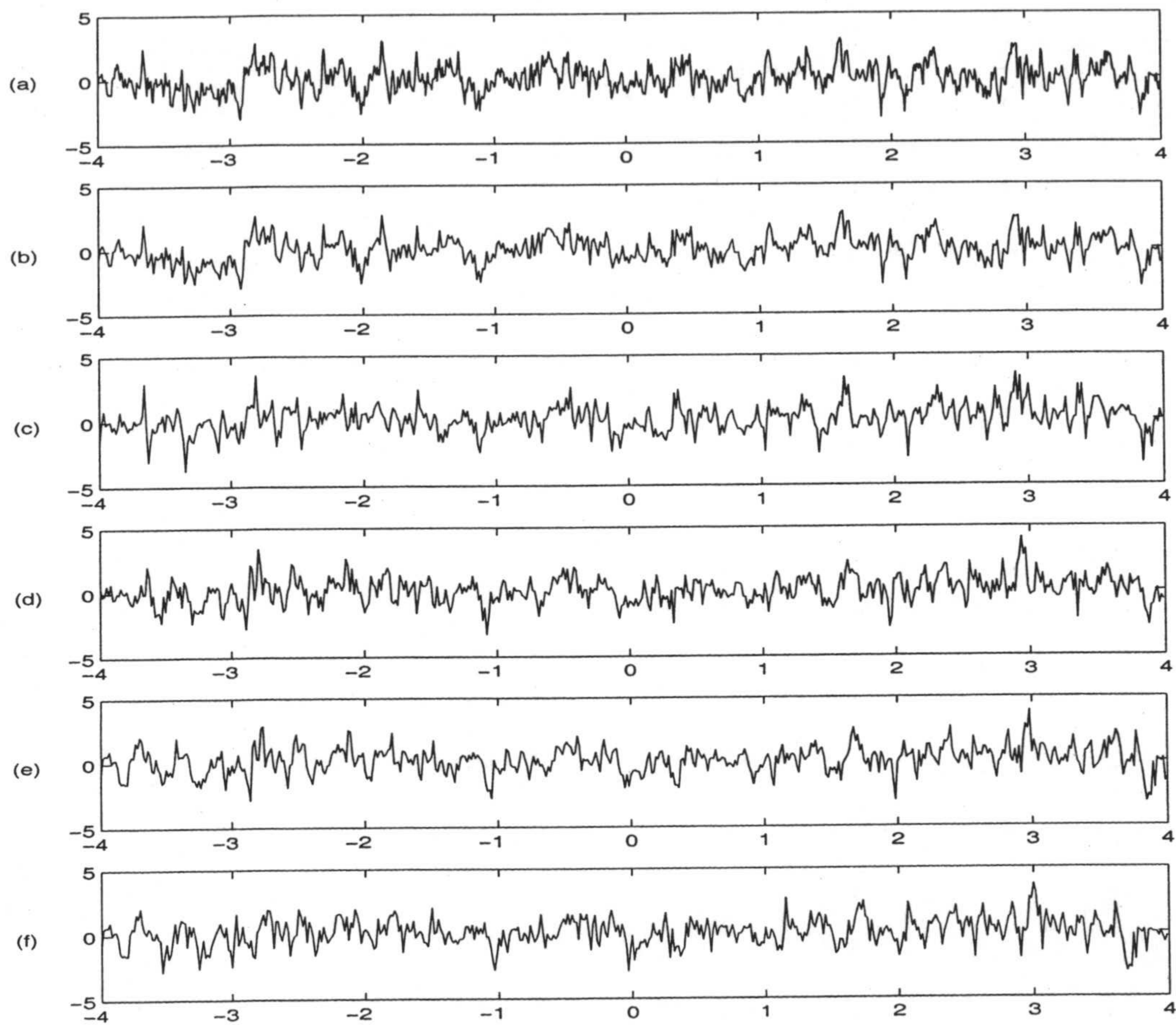


Figura 2.7: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.1$, $\alpha = -0.35$, $n = 512$:
Input (a) ; salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c),
db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

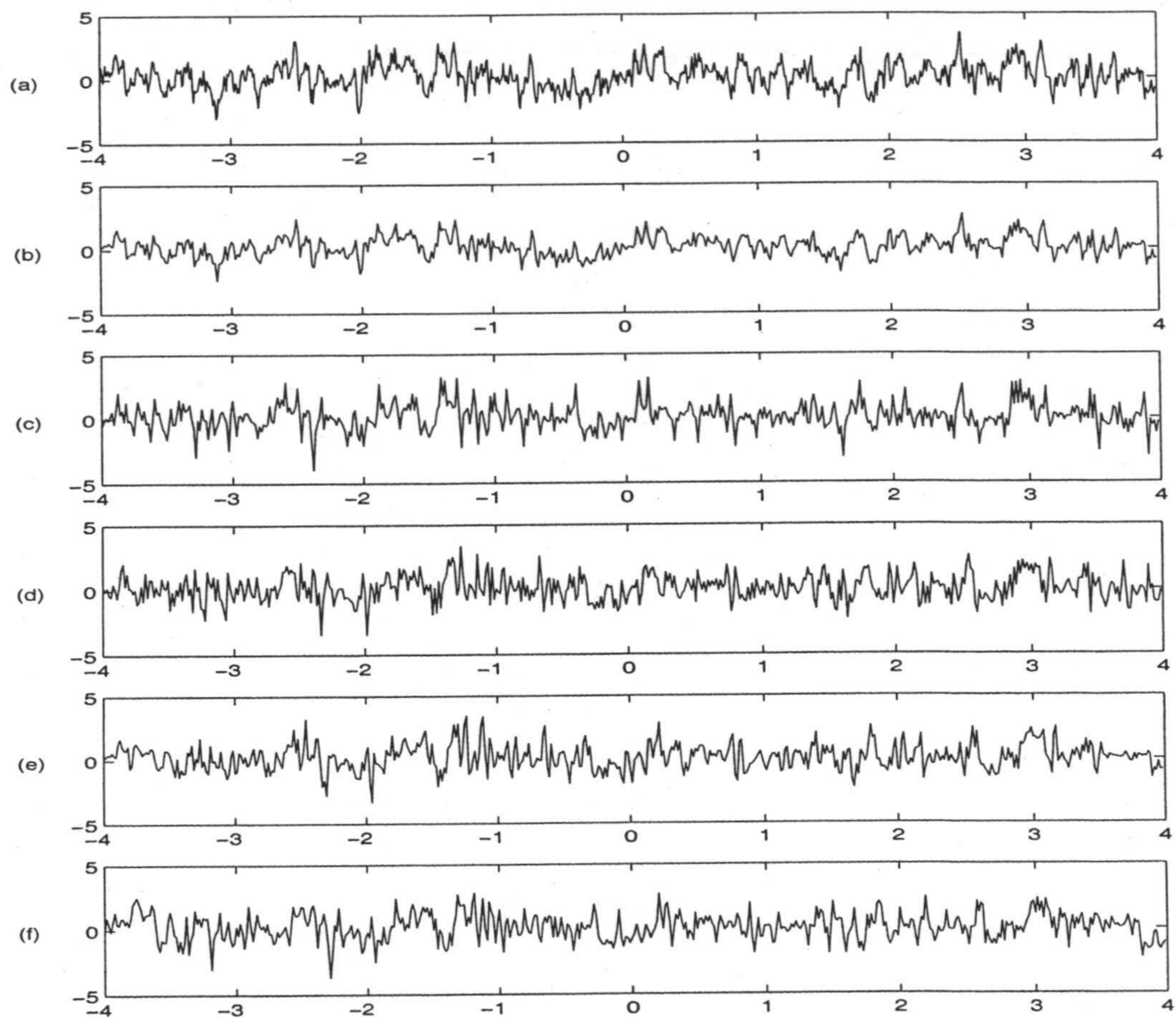


Figura 2.8: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.02$, $\alpha = -0.12$, $n = 512$: Entrada (a); salida observada (b); estimaciones funcionales utilizando db1 (c), db3 (d), db5 (e) y db7 (f).

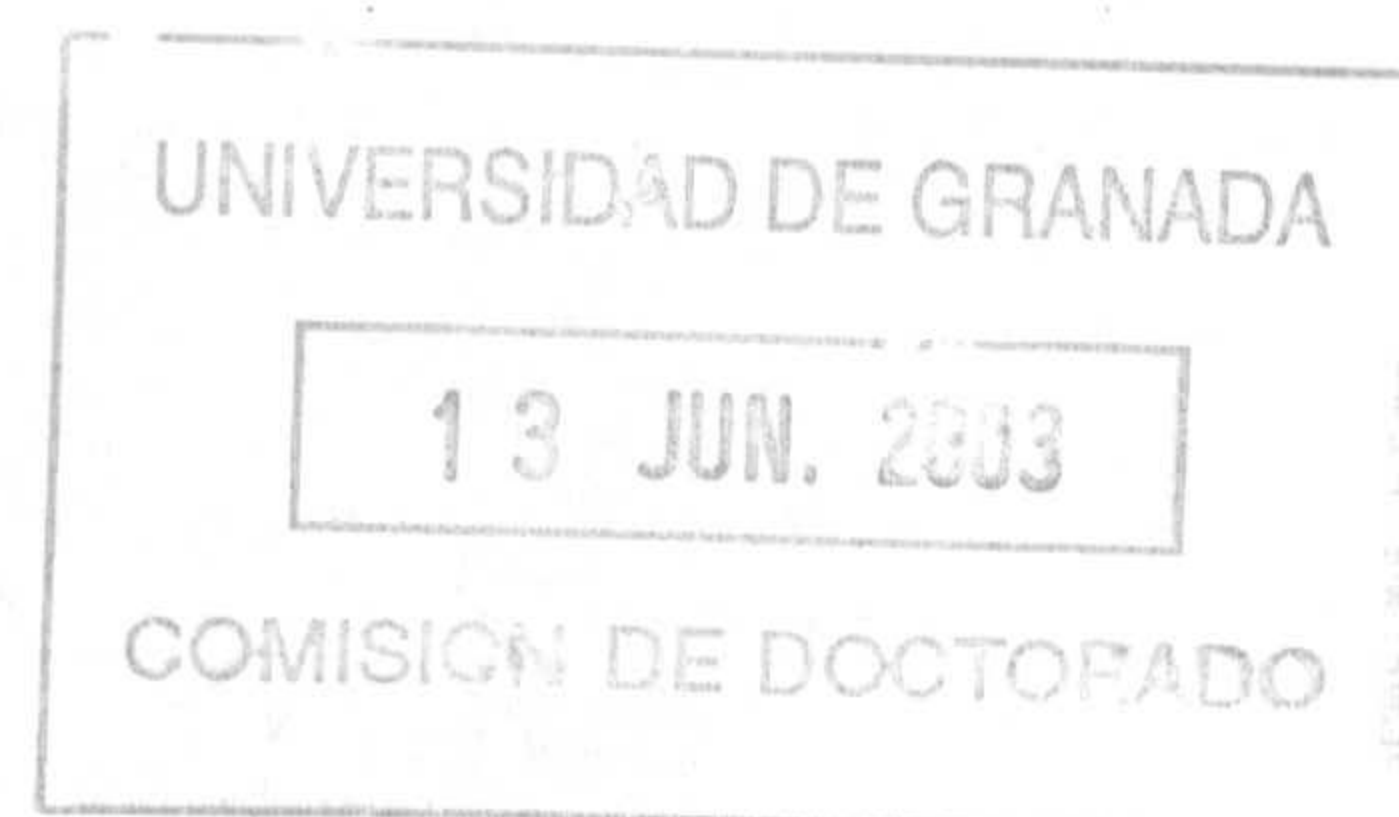
Capítulo 3

Estimación inversa con ruido

3.1 Introducción

En este capítulo se considera el problema de estimación inversa de un campo aleatorio de entrada relacionado mediante un filtro lineal con un campo salida afectado por un ruido de observación, con órdenes fraccionarios de regularidad/singularidad. Se estudian condiciones sobre los órdenes de regularidad del ruido de observación para definir una única solución estable del problema. Bajo ciertas condiciones, se define una solución de las ecuaciones funcionales que definen el estimador lineal mínimo-cuadrático derivadas de la aplicación del Teorema de la Proyección Ortogonal en un contexto generalizado.

La aproximación presentada se desarrolla en términos de campos aleatorios generalizados definidos a partir de wavelets transformadas (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a). Una herramienta fundamental en esta aproximación es el espacio de núcleo reproductor constituido por distribuciones o funciones pertenecientes a un espacio de Sobolev fraccionario de orden α .



propiado. Específicamente, se considera la clase de campos aleatorios con norma del espacio de Hilbert de núcleo reproductor equivalente a la norma de un espacio de Sobolev fraccionario y, para esta clase, se obtendrá una solución en sentido débil al problema de extrapolación inverso, basada en su formulación infinito-dimensional en términos de las expansiones ortogonales mediante wavelets de los campos aleatorios involucrados (ver Angulo y Ruiz-Medina, 1999, para el caso ordinario; Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003b, para el caso generalizado). Mediante el truncamiento de dichas expansiones ortogonales a niveles de resolución específicos, se obtiene una aproximación finito-dimensional del problema. Esta solución derivada en sentido débil se puede interpretar en sentido fuerte para ciertos rangos de los órdenes de regularidad de los elementos de la clase de campos aleatorios considerada (ver Teoremas de Inyección, Apéndice A).

3.2 Planteamiento del problema

En el planteamiento ordinario del problema de extrapolación se consideran, como en el capítulo anterior, dos campos aleatorios definidos sobre un dominio S y relacionados mediante la ecuación integral

$$g(\mathbf{y}) \underset{\text{m.c.}}{=} \int_S k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = K(f)(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S, \quad (3.1)$$

donde k representa, como antes, el núcleo del operador integral K , y 'm.c.' indica integración en media-cuadrática.

Se considera el problema de estimación lineal mínimo-cuadrática de f a

partir del siguiente modelo de observación:

$$Z(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_Z \subseteq S, \quad (3.2)$$

donde N representa el ruido de observación, incorrelado con g , con orden fraccionario de regularidad $-\nu$. El campo aleatorio Z tiene entonces orden de regularidad $-\vartheta = (-\alpha) \wedge (-\nu)$.

El estimador lineal mínimo-cuadrático $\hat{f}(\mathbf{z})$, basado en la información dada por las observaciones $\{Z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S_Z\}$, viene definido por

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \int_{S_Z} l(\mathbf{z}, \mathbf{x}) Z(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \in S_f. \quad (3.3)$$

Considerando la formulación (3.1) en términos de campos aleatorios generalizados dada por

$$\begin{aligned} g_\alpha(\phi) &= \int_S g(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_S \int_S \phi(\mathbf{y}) k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} d\mathbf{y} \\ &= \int_S \left[\int_S k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = f_\beta(K'(\phi)), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\alpha(S), \end{aligned} \quad (3.4)$$

la versión generalizada del modelo de observación (3.2) viene dada por

$$Z_\vartheta(\varphi) = g_\alpha(\varphi) + N_\nu(\varphi), \quad \varphi \in \overline{H}^\vartheta(S). \quad (3.5)$$

El estimador lineal mínimo-cuadrático $\hat{f}_\beta(\phi)$ de f_β , basado en la información que proporciona $\{Z_\vartheta(\varphi) : \varphi \in \overline{H}^\vartheta(S)\}$ se calcula entonces en términos del operador lineal $\mathcal{L}' : \overline{H}^\beta(S) \rightarrow \overline{H}^\vartheta(S)$, definido por

$$R'_{f_\beta Z_\vartheta}(\phi) \stackrel{=}{=}_{\overline{H}^{-\vartheta}(S)} R_{Z_\vartheta}(\mathcal{L}'(\phi)), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\beta(S), \quad (3.6)$$

como sigue:

$$\hat{f}_\beta(\phi) = Z_\theta(\mathcal{L}'(\phi)). \quad (3.7)$$

Bajo las condiciones que se establecen en el Teorema 10, se obtiene la inversión estable de la ecuación (3.6). En el caso en que $-\beta > n/2$, la solución derivada puede definirse en sentido fuerte mediante

$$\mathcal{L}Z(\mathbf{z}) = \hat{f}(\mathbf{z}) = R_{fg}R_Z^{-1}(\delta_{\mathbf{z}}(.)), \quad \forall \mathbf{z} \in S, \quad (3.8)$$

donde $\delta_{\mathbf{z}}$ representa la distribución delta de Dirac en la localización \mathbf{z} .

Para resolver el problema de estimación se supone que el campo aleatorio de observación se encuentra disponible en un conjunto finito de localizaciones, $S_Z \subseteq S$. Se considera como información previa la clase de modelos que representa las propiedades de segundo orden del campo aleatorio generalizado f_β , así como la forma funcional lineal, K .

3.3 Desarrollo ortogonal en términos de wavelets de un campo aleatorio perturbado

En esta sección se deriva una representación ortogonal en sentido débil del campo aleatorio de observación Z en términos de wavelets. Se consideran condiciones sobre g y N que permiten obtener una base ortonormal del espacio de Hilbert de núcleo reproductor de Z en términos de wavelets transformadas, derivandose así una formulación infinito-dimensional no redundante en media cuadrática del modelo de observación.

Se suponen las siguientes condiciones sobre f , g y N que definen la clase de campos aleatorios para la que se estudia el problema de extrapolación:

(C1) El campo aleatorio de entrada f es generado a partir de un ruido blanco ε , en términos de la siguiente relación lineal:

$$f(\phi) \underset{\text{m.c.}}{=} \varepsilon(\mathcal{T}_f \phi), \quad \forall \phi \in \overline{H}^\beta(S),$$

donde el filtro \mathcal{T}_f es un operador lineal que define un isomorfismo entre $\overline{H}^\beta(S)$ y $L^2(S)$.

(C2) Una de las dos normas definidas sobre los espacios de Hilbert de núcleo reproductor de los campos aleatorios generalizados g_α y N_ν dados por g y N , es equivalente a las normas de los espacios de Sobolev fraccionarios $H^{-\alpha}(S)$ y $H^{-\nu}(S)$, respectivamente.

El siguiente resultado proporciona la expansión ortogonal en sentido débil del modelo de observación bajo las condiciones (C1)-(C2).

Teorema 8 Sean f , g y Z definidos por (3.2) y sean f_β , g_α y Z_ϑ los campos aleatorios generalizados construidos a partir de f , g y Z , respectivamente, con órdenes de regularidad $-\beta$, $-\alpha$ y $-\nu$, respectivamente. Bajo las condiciones (C1)-(C2), se tiene que

$$Z_\vartheta(\cdot) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} Z_\vartheta(\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}}) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\cdot) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} Z_\vartheta(\tilde{\gamma}^{j:\boldsymbol{\theta}}) \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot), \quad (3.9)$$

donde $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} = \mathcal{T}'_Z(\phi_{\mathbf{k}})$, para todo $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$, y $\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{T}'_Z(\psi_{j:\boldsymbol{\theta}})$, para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S$, $j \geq 0$ y $R_{Z_\vartheta} = \mathcal{T}'_Z \mathcal{T}_Z$, representando R_{Z_ϑ} el operador de covarianza de Z_ϑ . La base $\{\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\tilde{\gamma}^{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ define la base de Riesz dual de $\{\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ respecto a $L^2(S)$, siendo

$$\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}} = \mathcal{T}_f^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{k} \in \Gamma_0^S,$$

$$\tilde{\gamma}^{j:\theta} = \mathcal{T}_f^{-1}(\psi_{j:\theta}), \quad \theta \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0.$$

Los coeficientes aleatorios

$$\{Z_\theta(\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{Z_\theta(\tilde{\gamma}^{j:\theta}) : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$$

son incorrelados con varianza uno.

Nota 11 Para $-\beta > n/2$, la expansión anterior se puede interpretar en sentido fuerte.

Teorema 9 Sea Z el campo aleatorio de observación definido en (3.2) y Z_θ su campo aleatorio generalizado asociado dado por (3.5). Se supone que las normas de los espacios de Hilbert de núcleo reproductor de los campos aleatorios generalizados asociados g_α y N_ν son equivalentes a las normas de los espacios $H^{-\alpha}(S)$ y $H^{-\nu}(S)$. Si el campo aleatorio de entrada satisface (C1), entonces la expansión ortogonal en sentido débil mediante wavelets de Z derivada en el Teorema 8 se puede expresar en términos de las expansiones ortogonales mediante wavelets de g_α y N_ν como sigue:

$$\begin{aligned} Z_\theta(\cdot) \Big|_{H(Z_\theta)} = & \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} g_\alpha((K^{-1})' \varphi^{\mathbf{k}}) K \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} g_\alpha((K^{-1})' \gamma^{j:\theta}) K \gamma_{j:\theta}(\cdot) \\ & + \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} N_\nu(\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}}) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\cdot) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^S} N_\nu(\tilde{\gamma}^{j:\theta}) \tilde{\gamma}_{j:\theta}(\cdot), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde, $\varphi_{\mathbf{k}} = \mathcal{T}_f'(\phi_{\mathbf{k}})$, para todo $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$, y $\gamma_{j:\theta} = \mathcal{T}_f'(\psi_{j:\theta})$, para todo $\theta \in \Theta_j^S$, $j \geq 0$. El sistema $\{\varphi^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma^{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ define la base de Riesz dual con respecto a $L^2(S)$ de la base de Riesz $\{\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\gamma_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, construida a partir de la base ortogonal de wavelets $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\psi_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$ de $L^2(S)$, y $\{\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$

$\cup \left\{ \tilde{\gamma}_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0 \right\}$ constituye una base ortonormal del espacio de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(N_\nu)$ de N_ν , siendo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \mathcal{T}'_N(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \\ \tilde{\gamma}_{j:\theta} &= \mathcal{T}'_N(\psi_{j:\theta}), \quad \theta \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0, \\ \tilde{\varphi}^{\mathbf{k}} &= \mathcal{T}_N^{-1}(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{k} \in \Gamma_0^S, \\ \tilde{\gamma}^{j:\theta} &= \mathcal{T}_N^{-1}(\psi_{j:\theta}), \quad \theta \in \Theta_j^S, \quad j \geq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $\mathcal{T}'_N : L^2(S) \rightarrow H^{-\nu}(S)$ un isomorfismo tal que $R_{N_\nu} = \mathcal{T}'_N \mathcal{T}_N$. Asimismo, $\mathcal{H}(Z_\vartheta) = \mathcal{H}(g_\alpha) \oplus \mathcal{H}(N_\nu)$.

Demostración Bajo las condiciones supuestas, $R_{g_\alpha}^{-1}$ y $R_{N_\nu}^{-1}$ son acotados como operadores entre los espacios $H^\alpha(S)$ y $\overline{H}^\alpha(S)$, y los espacios $H^\nu(S)$ y $\overline{H}^\nu(S)$, respectivamente. Se tiene entonces que R_{g_α} y R_{N_ν} admiten respectivas factorizaciones dadas por

$$\begin{aligned} R_{g_\alpha} &= \mathcal{T}'_g \mathcal{T}_g, \\ R_{N_\nu} &= \mathcal{T}'_N \mathcal{T}_N, \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{T}_g : \overline{H}^\alpha(S) \rightarrow L^2(S)$ y $\mathcal{T}_N : \overline{H}^\nu(S) \rightarrow L^2(S)$ isomorfismos (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2003a).

Por tanto, las expansiones débiles de g y N se pueden definir en términos de dichos isomorfismos de forma similar a cómo se construye la expansión de f en el Teorema 5. La ecuación (3.10) se obtiene entonces sustituyendo las expansiones ortogonales en sentido débil de g y N en la definición (3.5) de Z_ϑ . En este caso, para cada $\mathbf{k} \in \Gamma_0^S$ y $\theta \in \Theta_j^S, j \geq 0$,

$$\begin{aligned} Z_\vartheta(\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}})\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\cdot) &= g_\alpha(\varphi^{\mathbf{k}})\varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) + N_\nu(\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}})\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\cdot), \\ Z_\vartheta(\tilde{\gamma}^{j:\theta})\tilde{\gamma}_{j:\theta}(\cdot) &= g_\alpha(\gamma^{j:\theta})\gamma_{j:\theta}(\cdot) + N_\nu(\tilde{\gamma}^{j:\theta})\tilde{\gamma}_{j:\theta}(\cdot), \end{aligned} \quad (3.12)$$

de donde se deriva la relación entre las bases ortonormales de los espacios de Hilbert de núcleo reproductor de Z_ϑ , g_α y N_ν que aparecen en las correspondientes expansiones ortogonales mediante wavelets. ■

3.4 Resolución funcional del problema de estimación

En esta sección se estudian condiciones bajo las cuales se puede obtener una inversión estable de la formulación (3.6) de la ecuación de Wiener-Hopf generalizada. Aplicando el siguiente teorema a los operadores de covarianza asociados a los campos aleatorios introducidos en el modelo de observación en un contexto generalizado, se tiene que la condición de dualidad del campo de salida g_α no se ve afectada por la perturbación del ruido de observación N_ν .

Teorema 10 *Sea Z el campo aleatorio de observación definido en la ecuación (3.2). Se supone que g satisface la condición (C2). En el caso en que $\vartheta = \alpha$, si el operador de covarianza R_{N_ν} asociado al ruido de observación N_ν satisface la condición*

$$\| R_{N_\nu} \| < \| R_{g_\alpha}^{-1} \|^{-1}, \quad (3.13)$$

entonces $R_{Z_\vartheta}^{-1}$ es un operador acotado y

$$\| R_{Z_\vartheta}^{-1} \| \leq [\| R_{g_\alpha}^{-1} \|^{-1} - \| R_{N_\nu} \|]^{-1}, \quad (3.14)$$

denotando $\|\cdot\|$ la norma definida sobre el espacio de operadores lineales acotados entre dos espacios de Hilbert, y siendo R_{Z_ϑ} , R_{g_α} y R_{N_ν} los operadores de covarianza de los campos aleatorios Z_ϑ , g_α y N_ν , respectivamente.

Demostración Se sigue de la aplicación directa del Lema 1 del Apéndice B. ■

Nota 12 En el caso en que el orden de regularidad del campo aleatorio de observación sea igual al orden de regularidad del ruido de observación, es decir, $\vartheta = \nu$, el resultado anterior admite una formulación análoga.

3.4.1 Resolución en términos de campos aleatorios generalizados wavelets

El Teorema 10 proporciona condiciones suficientes bajo las cuales $R_{Z_\vartheta} : \overline{H}^\vartheta(S) \rightarrow H^{-\vartheta}(S)$ y $R_{Z_\vartheta}^{-1} : H^{-\vartheta}(S) \rightarrow \overline{H}^\vartheta(S)$ son acotadas, y por tanto, definen formas bilineales que generan normas equivalentes a las definidas sobre los espacios $\overline{H}^\vartheta(S)$ y $H^{-\vartheta}(S)$. Es decir, los productos internos

$$\langle u, v \rangle_{[\mathcal{H}(Z_\vartheta)]'} = R_{Z_\vartheta}(u)(v), \quad u, v \in [\mathcal{H}(Z_\vartheta)]'$$

y

$$\langle u, v \rangle_{\overline{H}^\vartheta(S)} = \langle (I - \Delta)^{\vartheta/2} u, (I - \Delta)^{\vartheta/2} v \rangle_{L^2(S)}, \quad (3.15)$$

así como

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}(Z_\vartheta)} = R_{Z_\vartheta}^{-1}(u)(v), \quad u, v \in [\mathcal{H}(Z_\vartheta)]$$

y

$$\langle u, v \rangle_{H^{-\vartheta}(S)} = \langle (I - \Delta)^{-\vartheta/2} u, (I - \Delta)^{-\vartheta/2} v \rangle_{L^2(S)}, \quad (3.16)$$

generan, respectivamente, las siguientes normas equivalentes:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{[\mathcal{H}(Z_\vartheta)]'} &\simeq \|\cdot\|_{\overline{H}^\vartheta(S)}, \\ \|\cdot\|_{\mathcal{H}(Z_\vartheta)} &\simeq \|\cdot\|_{H^{-\vartheta}(S)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

El sistema de funciones

$$\begin{aligned} &\{K\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\} \\ &\cup \{\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\} \end{aligned}$$

constituye una base ortonormal del espacio de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(Z_\vartheta)$ del campo aleatorio generalizado de observación Z_ϑ bajo las condiciones del Teorema 9.

Los coeficientes aleatorios

$$\begin{aligned} &\{g_\alpha[K^{-1'}\varphi^{\mathbf{k}}] : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{g_\alpha[K^{-1'}\gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}] : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\} \\ &\cup \{N_\nu[\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}}] : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\} \cup \{N_\nu[\tilde{\gamma}^{j:\boldsymbol{\theta}}] : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0\} \end{aligned}$$

de Z_ϑ con respecto a la base determinística anterior constituyen una base ortonormal del espacio de Hilbert de variables aleatorias $H(Z_\vartheta)$ generado por Z_ϑ . Nos referiremos al sistema de variables aleatorias definido por estos coeficientes como el *campo aleatorio generalizado pseudowavelet asociado con el campo aleatorio ordinario de observación Z* . Este sistema proporciona

una discretización no redundante del espacio de Hilbert $H(Z)$ de variables aleatorias generadas por Z .

Para definir una solución estable del problema de estimación lineal mínimo-cuadrática considerado en este capítulo, se realiza la proyección ortogonal de f sobre el espacio $H(Z_\vartheta) = H(g_\alpha) \oplus H(N_\nu)$, generado por la base ortonormal

$$\begin{aligned} & \left\{ g_\alpha [K^{-1'} \varphi^{\mathbf{k}}] : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S \right\} \cup \left\{ g_\alpha [K^{-1'} \gamma^{j:\boldsymbol{\theta}}] : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0 \right\} \\ & \cup \left\{ N_\nu [\tilde{\varphi}^{\mathbf{k}}] : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S \right\} \cup \left\{ N_\nu [\tilde{\gamma}^{j:\boldsymbol{\theta}}] : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S, j \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considerando los campos aleatorios generalizados *pseudowavelets* asociados a f , g y Z , se derivan las siguientes ecuaciones de estimación en términos de las correspondientes funciones wavelet transformadas:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) K \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &+ \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot) K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}) \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \right] = \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} K \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) K \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}) K \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \tilde{\tilde{\varphi}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) \tilde{\tilde{\varphi}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \tilde{\tilde{\gamma}}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}) \tilde{\tilde{\gamma}}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

para todo $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in S_Z$.

Bajo las condiciones del Teorema 9, para $-\vartheta$ y $-\beta > n/2$, la función de covarianza cruzada entre f y Z y la función de covarianza de Z admiten las

siguientes representaciones:

$$h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_j) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\cdot) [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\cdot) [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j) \quad (3.20)$$

$$h^{KK}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_i) [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_i) [\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_i) [K\varphi_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_i) [K\gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j) \\ &+ \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_i) [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}](\mathbf{x}_j) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j^S} [\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_i) [\tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}](\mathbf{x}_j), \end{aligned} \quad (3.22)$$

para $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in S$.

El siguiente resultado proporciona una fórmula de estimación funcional de f basada en la ecuación de estimación (3.19) evaluada sobre el conjunto de localizaciones observables de Z , $S_Z^{obs} = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Teorema 11 *Supongamos que se verifican las condiciones del Teorema 10. Sea Z el campo aleatorio dado por la ecuación (3.2), observado sobre un conjunto finito de localizaciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in S$. Entonces, para $-\vartheta > n/2$, la fórmula*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\cdot) &:= \mathcal{L}[Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_n)]^T \\ &= [h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_1), \dots, h^{IK}(\cdot, \mathbf{x}_n)] \begin{bmatrix} h^{KK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & h^{KK}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ & \ddots & \\ h^{KK}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \dots & h^{KK}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times [Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_n)]^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

proporciona una estimación lineal funcional de f , donde ${}^{\top}$ denota la transposición de vectores y matrices y h^{IK} y h^{KK} se definen como en (3.20) y (3.21), respectivamente.

Nota 13 h^{KK} se define como en (3.22) bajo las condiciones del Teorema 9.

Demostración

Puesto que se verifican las condiciones del Teorema 5 del Capítulo 2 y del Teorema 8 de este capítulo, las expansiones débiles de f , y Z inducen las siguientes expansiones en serie de los operadores de covarianza $R_{f_{\beta}Z_{\vartheta}}$ y $R_{Z_{\vartheta}}$, para todo $\phi \in \overline{H}^{\beta}(S)$, y para todo $\psi, \varphi \in \overline{H}^{\vartheta}(S)$,

$$R_{f_{\beta}Z_{\vartheta}}(\psi)(\phi) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \varphi_{\mathbf{k}}(\phi) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\psi) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j} \gamma_{j:\boldsymbol{\theta}}(\phi) \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi), \quad (3.24)$$

$$R_{Z_{\vartheta}}(\psi)(\varphi) = \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma_0^S} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\psi) K \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(\varphi) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_j} K \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\psi) \tilde{\gamma}_{j:\boldsymbol{\theta}}(\varphi). \quad (3.25)$$

Como se comentó en la Sección 3.2, la aplicación del Teorema de la Proyección Ortogonal en un contexto generalizado conduce a la siguiente identidad:

$$R_{f_{\beta}g_{\alpha}}(\varphi) \underset{H^{-\beta}(S)}{=} R_{f_{\beta}Z_{\vartheta}}(\varphi) = \mathcal{L}R_{Z_{\vartheta}}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \overline{H}^{\vartheta}(S),$$

donde \mathcal{L} es el operador lineal que define el estimador lineal mínimo-cuadrático de f_{β} (ver ecuación (3.7)). Para $-\vartheta > n/2$, la distribución delta de Dirac está en $\overline{H}^{\vartheta}(S)$, y considerando entonces en la ecuación anterior las funciones test φ definidas por la distribución delta de Dirac asociada con las localizaciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, se obtiene un sistema de n ecuaciones cuya solución \mathcal{L} viene dada por la ecuación (3.23), en términos de las expansiones en serie de $R_{f_{\beta}Z_{\vartheta}}$ y $R_{Z_{\vartheta}}$ definidas en las ecuaciones (3.24) y (3.25), respectivamente. ■

3.4.2 Formulación finito-dimensional

El truncamiento de las expansiones ortogonales en sentido débil de los campos de entrada, de salida y de ruido de observación proporciona una aproximación finito-dimensional de la ecuación (3.19), que implícitamente define una aproximación finito-dimensional del estimador funcional $\hat{f}(\cdot)$ derivado en el Teorema 11.

Las aproximaciones finito-dimensionales (3.27), (3.28) y (3.29) de los operadores R_{f_β} , R_{Z_θ} y $R_{f_\beta Z_\theta}$, respectivamente, se obtienen mediante el truncamiento de los desarrollos en serie (2.60) (3.24) y (3.25) a cierta escala $j = M$. Los superíndices \mathbf{k} y $(j : \theta)$ se utilizan para denotar las coordenadas con respecto a los elementos de los sistemas $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \Gamma_0^S\}$ y $\{\psi_{j:\theta} : \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0\}$, es decir,

$$\begin{aligned} u^{\mathbf{k}} &= u(\phi_{\mathbf{k}}), \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma_0^S \quad y \\ u^{j:\theta} &= u(\psi_{j:\theta}), \quad \forall \theta \in \Theta_j^S, j \geq 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

para cualquier $\varphi \in L^2(S)$. De forma análoga a como se introdujo en el Capítulo 2, se tiene entonces que R_{f_β} se aproxima en términos de las coordenadas

$$\begin{aligned} R_{f_\beta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_m}, \\ R_{f_\beta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p}, \\ R_{f_\beta}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p} \gamma_{j:\theta_r}^{i:\theta_q}; \end{aligned} \quad (3.27)$$

análogamente, para R_{Z_ϑ} ,

$$\begin{aligned}
R_{Z_\vartheta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_m} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N(0)} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_m}, \\
R_{Z_\vartheta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N(0)} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p}, \\
R_{Z_\vartheta}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} [K\varphi_{\mathbf{k}_n}]^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p} [K\gamma_{j:\theta_r}]^{i:\theta_q} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N(0)} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{i:\theta_q};
\end{aligned} \tag{3.28}$$

y para $R_{f_\beta Z_\vartheta}$,

$$\begin{aligned}
R_{f_\beta Z_\vartheta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\phi_{\mathbf{k}_m}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{\mathbf{k}_m} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{\mathbf{k}_m}, \\
R_{f_\beta Z_\vartheta}(\phi_{\mathbf{k}_l})(\psi_{h:\theta_p}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{h:\theta_p} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{\mathbf{k}_l} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{h:\theta_p}, \\
R_{f_\beta Z_\vartheta}(\psi_{h:\theta_p})(\psi_{i:\theta_q}) &= \sum_{n=1}^{N(0)} \varphi_{\mathbf{k}_n}^{h:\theta_p} [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}]^{i:\theta_q} + \sum_{j=0}^M \sum_{r=1}^{Q(j)} \gamma_{j:\theta_r}^{h:\theta_p} [\tilde{\gamma}_{j:\theta_r}]^{i:\theta_q},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $l, m = 1, \dots, N(0)$, $p = 1, \dots, Q(h)$ y $q = 1, \dots, Q(i)$, para

$h, i = 0, \dots, M$, siendo $N(0)$ el número de funciones de escalamiento a escala a escala 0 y $Q(j)$ el número de funciones wavelet a escala j .

Las aproximaciones matriciales de los operadores R_{f_β} , R_{Z_θ} y $R_{f_\beta Z_\theta}$, derivadas de la restricción de dichos operadores al subespacio generado por la base ortonormal finito-dimensional de wavelets

$$\left\{ \phi_{\mathbf{k}_1}, \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ \psi_{j:\theta_1}, \dots, \psi_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\}, \quad (3.30)$$

conducen a la siguiente aproximación matricial de $\hat{f}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\cdot) &\simeq \mathbf{BK}_B^T (\Theta\Theta^T)^{-1} \Theta \underline{\mathbf{Z}}_\theta \\ &= \mathbf{BK}_B^T [\mathbf{K}_B \mathbf{K}_B^T + \mathbf{NN}^T]^{-1} \Theta \underline{\mathbf{Z}}_\theta = \\ &= \mathbf{BB}^T \mathbf{K}^T [\mathbf{KBB}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{NN}^T]^{-1} [\mathbf{KB} + \mathbf{N}] \underline{\mathbf{Z}}_\theta, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde 'T' denota la transposición de vectores y matrices y,

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} V & G_0 & \dots & G_M \\ \hline V^0 & G_0^0 & \dots & G_M^0 \\ \vdots & \vdots & & \\ V^M & G_0^M & \dots & G_M^M \end{array} \right], \quad (3.32)$$

siendo

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_1} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{\mathbf{k}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_{N(0)}} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{\mathbf{k}_{N(0)}} \end{bmatrix}, & V^i &= \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{k}_1}^{i:\theta_1} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{i:\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\mathbf{k}_1}^{i:\theta_{Q(i)}} & \dots & \varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}}^{i:\theta_{Q(i)}} \end{bmatrix}, \\ G_j &= \begin{bmatrix} \gamma_{j:\theta_1}^{\mathbf{k}_1} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{\mathbf{k}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{j:\theta_1}^{\mathbf{k}_{N(0)}} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{\mathbf{k}_{N(0)}} \end{bmatrix}, & G_j^i &= \begin{bmatrix} \gamma_{j:\theta_1}^{i:\theta_1} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{i:\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{j:\theta_1}^{i:\theta_{Q(i)}} & \dots & \gamma_{j:\theta_{Q(j)}}^{i:\theta_{Q(i)}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para $i, j = 0, \dots, M$. Las matrices \mathbf{K}_B , Θ y \mathbf{N} se definen de forma similar a la matriz B , considerando las coordenadas de las funciones wavelets transformadas,

$$\left\{ K\varphi_{\mathbf{k}_1}, \dots, K\varphi_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ K\gamma_{j:\theta_1}, \dots, K\gamma_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\},$$

$$\left\{ \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_1}, \dots, \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ \tilde{\gamma}_{j:\theta_1}, \dots, \tilde{\gamma}_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\}$$

y

$$\left\{ \tilde{\tilde{\varphi}}_{\mathbf{k}_1}, \dots, \tilde{\tilde{\varphi}}_{\mathbf{k}_{N(0)}} \right\} \cup \left\{ \tilde{\tilde{\gamma}}_{j:\theta_1}, \dots, \tilde{\tilde{\gamma}}_{j:\theta_{Q(j)}}, j = 0, \dots, M \right\},$$

con respecto a la base finito-dimensional (3.30), respectivamente. Asimismo, \mathbf{K} denota la matriz de coordenadas del operador K con respecto a dicha base finito-dimensional y $\underline{\mathbf{Z}}_\vartheta$ representa la transformada wavelet de ruido blanco a escala M .

Consideremos la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \phi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}_1), \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N_0}}(\mathbf{x}_1), \dots, \psi_{j:\theta_{Q(M)}}(\mathbf{x}_1) \\ \phi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}_2), \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N_0}}(\mathbf{x}_2), \dots, \psi_{j:\theta_{Q(M)}}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \phi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{x}_n), \dots, \phi_{\mathbf{k}_{N_0}}(\mathbf{x}_n), \dots, \psi_{j:\theta_{Q(M)}}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

de valores de las funciones de la base ortonormal finito-dimensional de wavelets considerada sobre un conjunto finito de localizaciones $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Entonces, la ecuación (3.31) puede reescribirse como

$$\hat{f}(\cdot) \simeq \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{K}^T\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{K}^T\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\mathbf{C}^T]^{-1} \underline{\mathbf{Z}}, \quad (3.34)$$

donde $\underline{\mathbf{Z}} = [Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_n)]^T$, y ‘ T ’ la transposición de vectores y matrices.

3.5 Aplicación

En esta sección se consideran, como en el capítulo anterior, modelos pertenecientes a una familia definida en términos de movimiento browniano fraccionario para ilustrar los resultados anteriores. Se estudia el caso uniparamétrico correspondiente a f , g , N y Z definidos sobre un intervalo de la recta real $S \subseteq \mathbb{R}$. En particular se considera el sistema dado por la ecuación integral (2.68).

Se supone que los campos aleatorios f y g de entrada y salida, respectivamente, vienen definidos en términos de un ruido blanco gaussiano ε mediante las ecuaciones diferenciales (2.69) y (2.70).

Las observaciones se definen mediante la ecuación

$$Z = g + N, \quad (3.35)$$

donde N representa ruido de observación, satisfaciendo el campo de entrada la ecuación

$$(-\Delta)^{-\nu/2} f = \tilde{\varepsilon}, \quad -\nu > 0 \quad (3.36)$$

siendo $\tilde{\varepsilon}$ un proceso de ruido blanco gaussiano incorrelado con ε .

En particular, se considera el caso ordinario y, en función de los órdenes de regularidad de los campos aleatorios involucrados, se distinguen los siguientes ejemplos:

Estudio 1

$$\begin{aligned} -\alpha = 0.75 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = -0.8 \\ -\alpha = 0.75 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = -0.875 \\ -\alpha = 0.75 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = -0.95 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Estudio 2

$$\begin{aligned} -\alpha = 0.85 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = 0.7 \\ -\alpha = 0.85 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = 0.8 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Estudio 3

$$\begin{aligned} -\alpha = 0.8 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = 0.7 \\ -\alpha = 0.8 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad -\nu = 0.9 \\ -\alpha = 0.8 \quad , \quad -\beta = 0.6 \quad \text{y} \quad \textit{ruido blanco}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

con $S_Z = S_f = [-4, 4]$.

En los casos considerados en los tres estudios, se han obtenido estimaciones del campo aleatorio de entrada f en 1024 localizaciones a partir de la observación de Z sobre conjuntos de 256 y 512 localizaciones contenidas en las 1024. Resulta evidente que la variabilidad y la calidad de la estimación viene determinada por la cantidad de información muestral disponible. En todos los casos se observa un cierto efecto de suavizamiento en las estimaciones calculadas a partir de información muestral en conjuntos de 256 localizaciones, y se obtienen mejores resultados en cuanto a las características a pequeña escala del campo f cuando la información disponible aumenta a 512 localizaciones.

Análogamente a como se observó en el capítulo anterior, los resultados se ven afectados por pequeños errores numéricos derivados de la implementación de las convoluciones, que requieren el truncamiento en las colas y en las posibles singularidades de los núcleos. Las bases de wavelets consideradas han sido, como en el estudio realizado en el capítulo anterior, las Daubechies

db1, db3, db5 y db7. En general se obtienen resultados similares con las distintas bases de wavelets, aunque las estimaciones calculadas en términos de la base de wavelet db7 presentan un menor error cuadrático medio.

En el Estudio 1 se ha considerado que los campos aleatorios f , g y N satisfacen las condiciones de Teorema 10. Las simulaciones obtenidas muestran la influencia de la diferencia entre el orden de regularidad del ruido de observación, $-\nu$, y el orden de regularidad del campo de salida, $-\alpha$, con $-\alpha < -\nu$, sobre las estimaciones. Estos resultados ilustran el hecho de que el grado de dependencia continua de la solución al problema de estimación con respecto a los datos aumenta a medida que la distancia entre los órdenes de regularidad de g y N crece, debido a que, en este caso, el orden de la norma del operador R_Z^{-1} decrece, como se deduce de la ecuación (3.14). En los ejemplos considerados, este efecto aparece según el ruido se hace más regular, es decir, cuando se introduce menos perturbación en la información muestral y, en consecuencia, los resultados obtenidos son mejores. Ver Figuras 3.1 - 3.5.

Los errores cuadráticos medios asociados se recogen en la Tabla 3.1.

El Estudio 2 sitúa a los campos aleatorios f , g y N en las condiciones de la Nota 12, siendo $-\beta < -\nu < -\alpha$. En este caso las estimaciones son más estables debido a que la norma del operador R_N permite acotar inferiormente la norma del operador R_Z^{-1} asociado al campo de observación Z . En los resultados se aprecia cómo a medida que aumenta la distancia entre los órdenes de regularidad de N y g las estimaciones mejoran presentando menor error cuadrático medio (ver Tabla 3.2 y Figuras 3.6 - 3.9), a pesar de que la irregularidad del ruido de observación sea mayor.

El Estudio 3 considera un caso mixto y compara las estimaciones obtenidas a partir de observaciones afectadas por ruido aditivo definido, respectivamente, por un ruido blanco y campos aleatorios con órdenes de regularidad 0.7 y 0.9 que presentan la misma distancia al orden de regularidad 0.8 del campo g . En este caso, los resultados obtenidos con la perturbación debida a un ruido blanco son algo mejores (ver Figuras 3.10 - 3.15). En la Tabla 3.3 se recogen los errores cuadráticos medios asociados.

Parámetros del modelo			Tamaño muestral	Base de wavelets			
$\beta,$	$\alpha,$	ν	n	db1	db3	db5	db7
-0.60,	-0.75	-0.80	256	0.0043	0.0038	0.0032	0.0027
			512	0.0042	0.0037	0.0031	0.0024
-0.60,	-0.75	-0.875	256	0.0043	0.0038	0.0031	0.0026
			512	0.0041	0.0036	0.0030	0.0023
-0.60,	-0.75	-0.95	256	0.0043	0.0037	0.0031	0.0026
			512	0.0040	0.0036	0.0029	0.0022

Tabla 3.1: Errores cuadráticos medios obtenidos en el Estudio 1.

3.6 Conclusión

Se ha considerado el problema de extrapolación funcional asociado a un sistema definido por una ecuación integral y observación afectada por un ruido

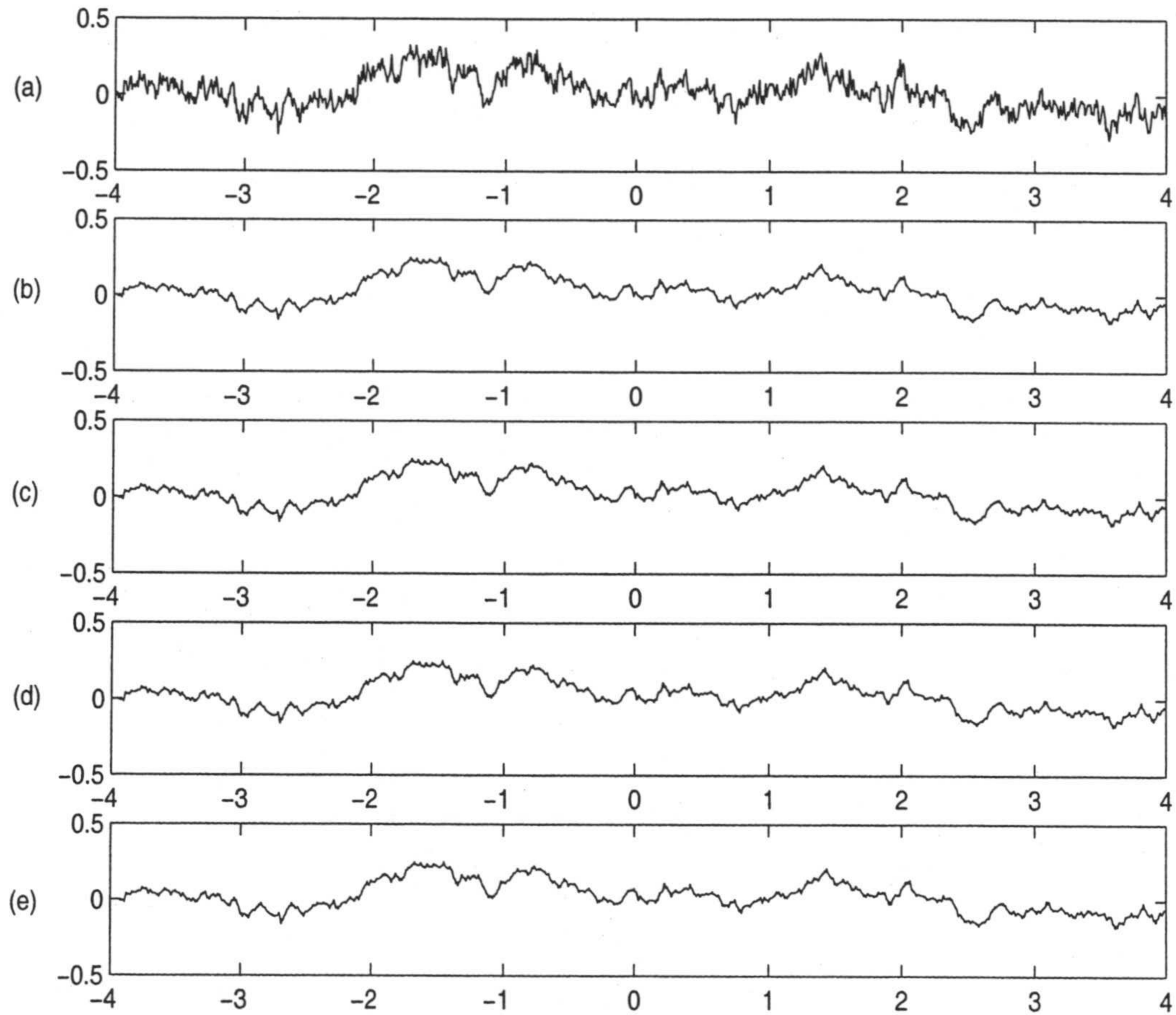


Figura 3.1: *Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $\nu = -0.8$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).*

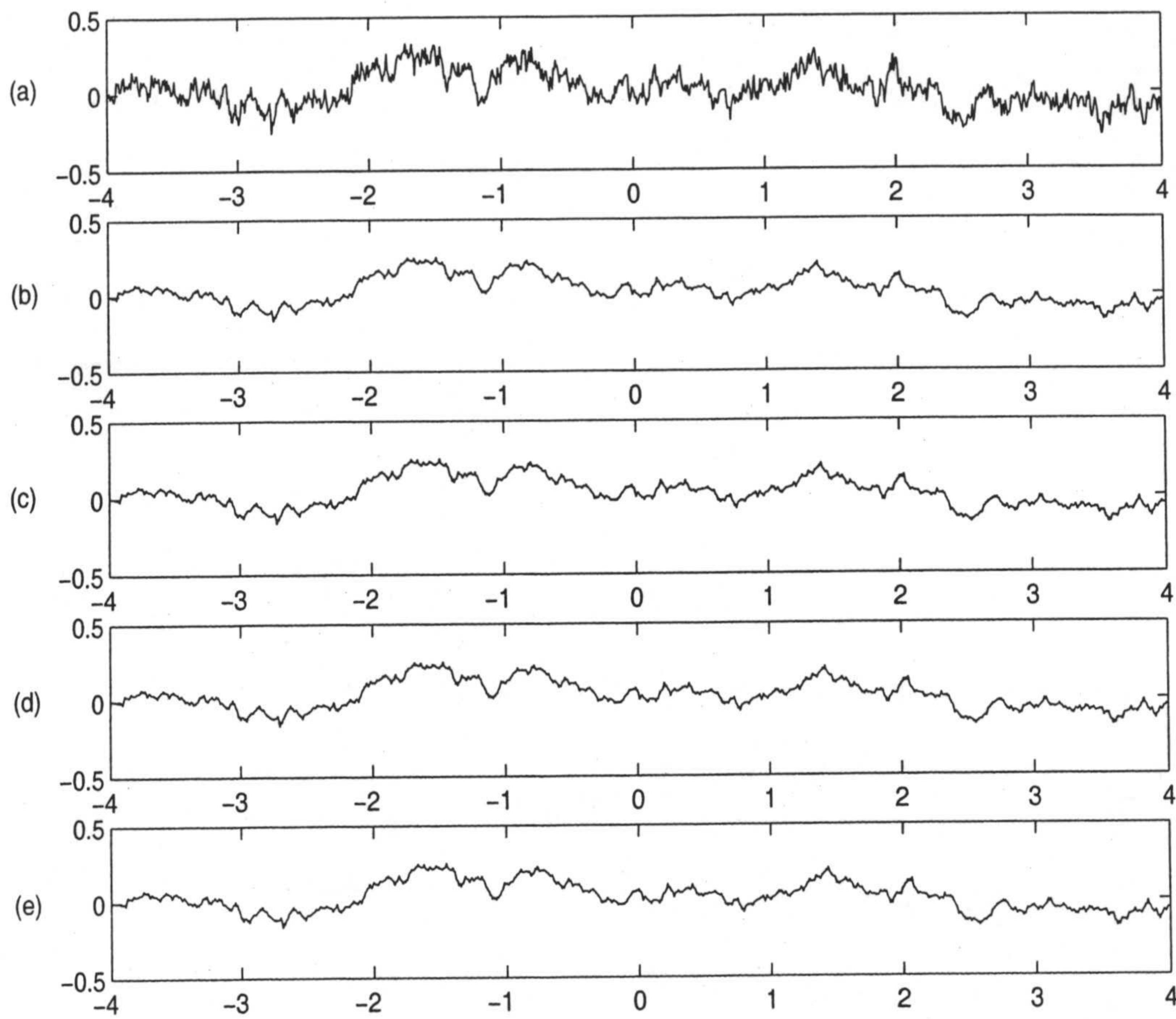


Figura 3.2: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $\nu = -0.875$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).

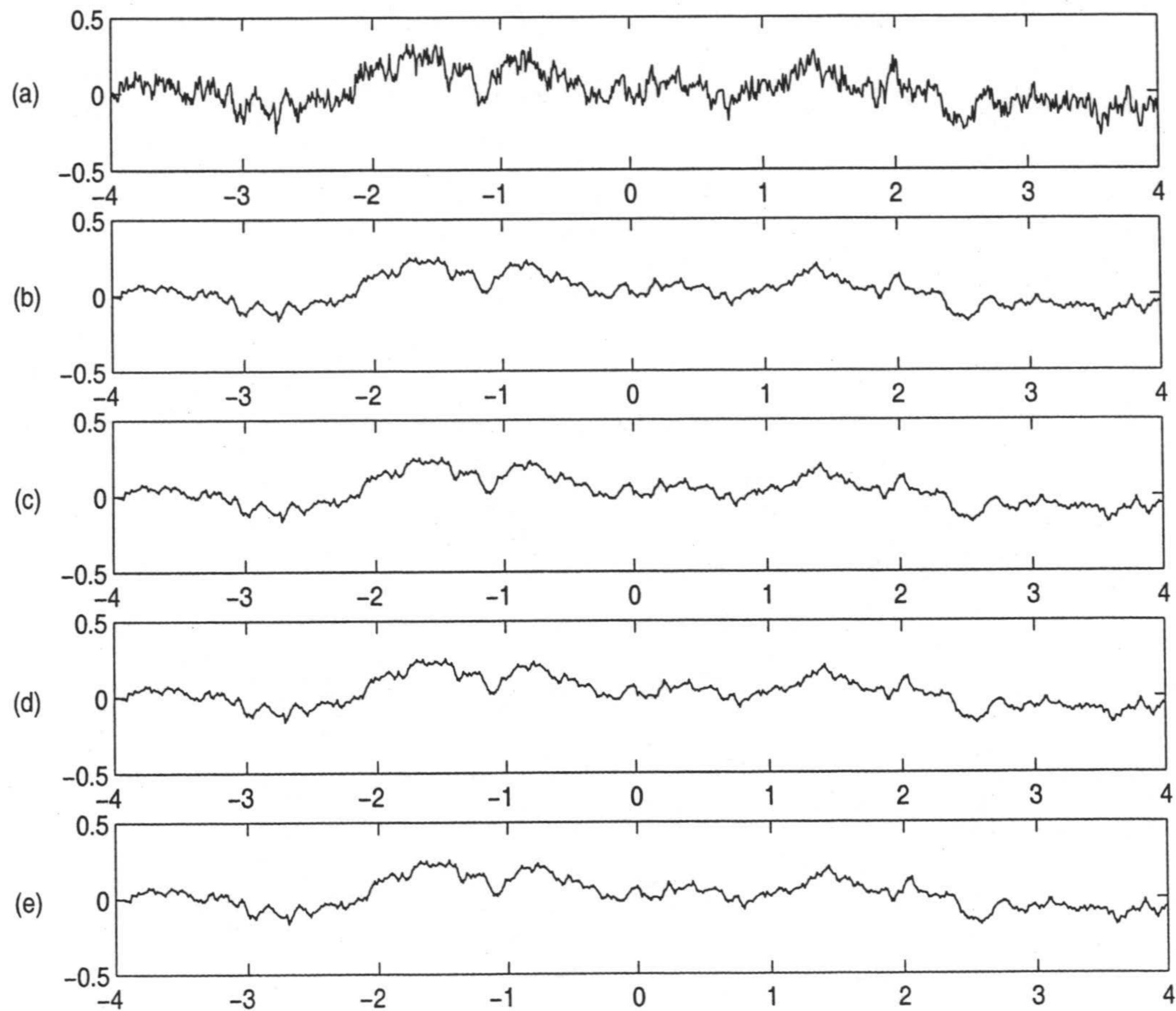


Figura 3.3: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $\nu = -0.95$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).

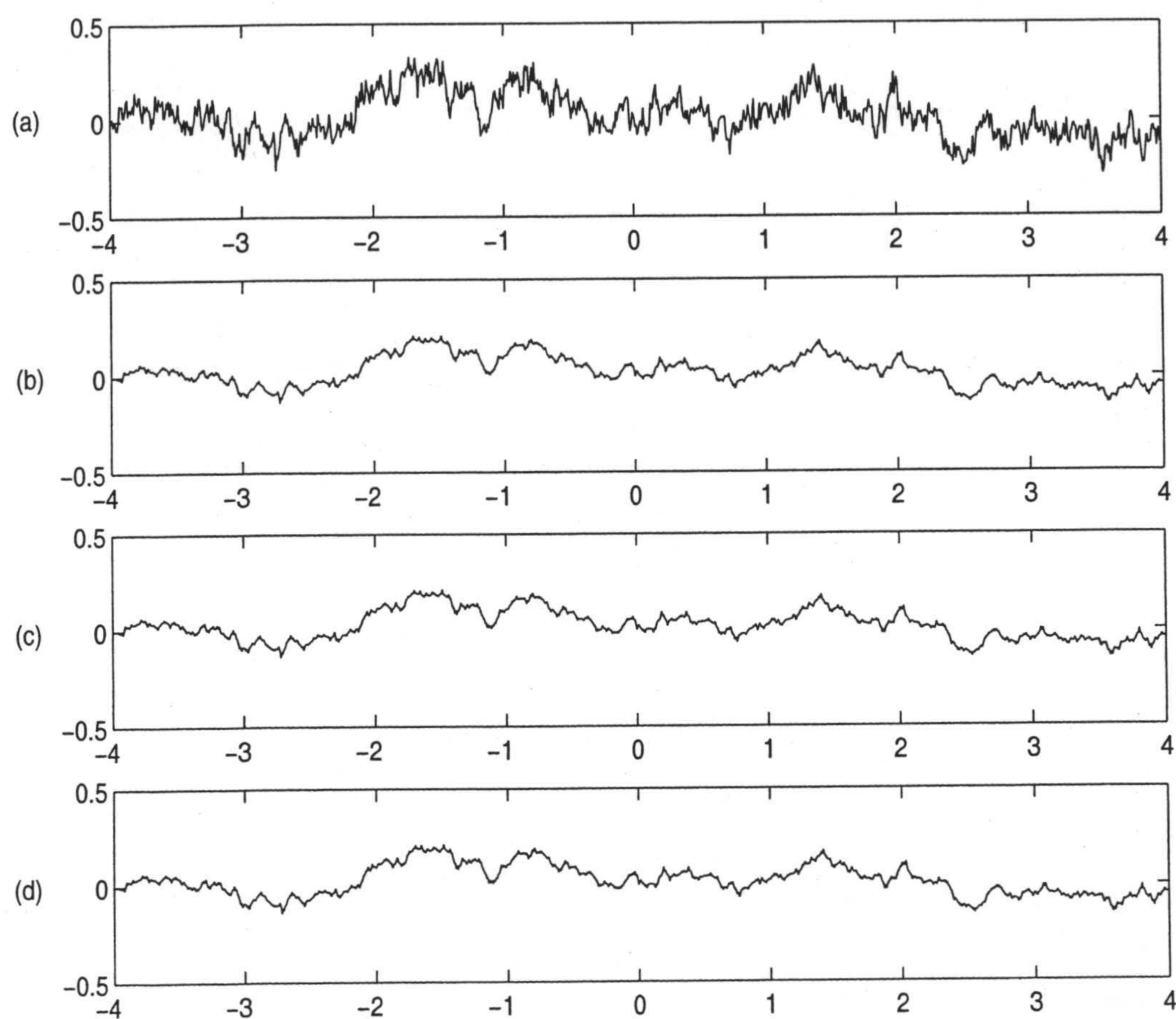


Figura 3.4: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando *db3*, para $\nu = -0.8$ (b), $\nu = -0.875$ (c), y $\nu = -0.95$ (d).

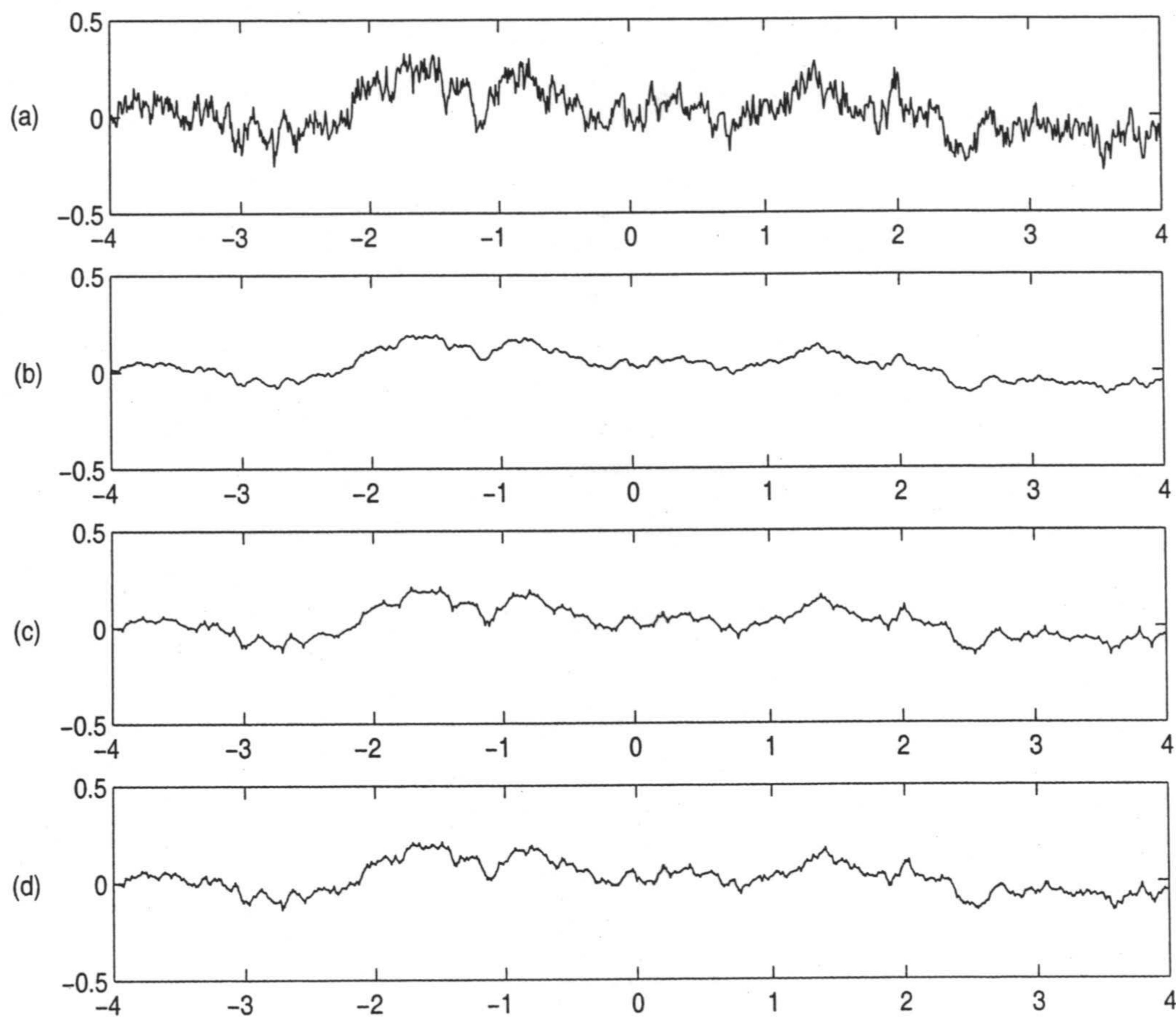


Figura 3.5: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $\nu = -0.95$: Entrada (a); observaciones (b); estimaciones funcionales para $n = 256$ (c) y para $n = 512$ (d), con db3.

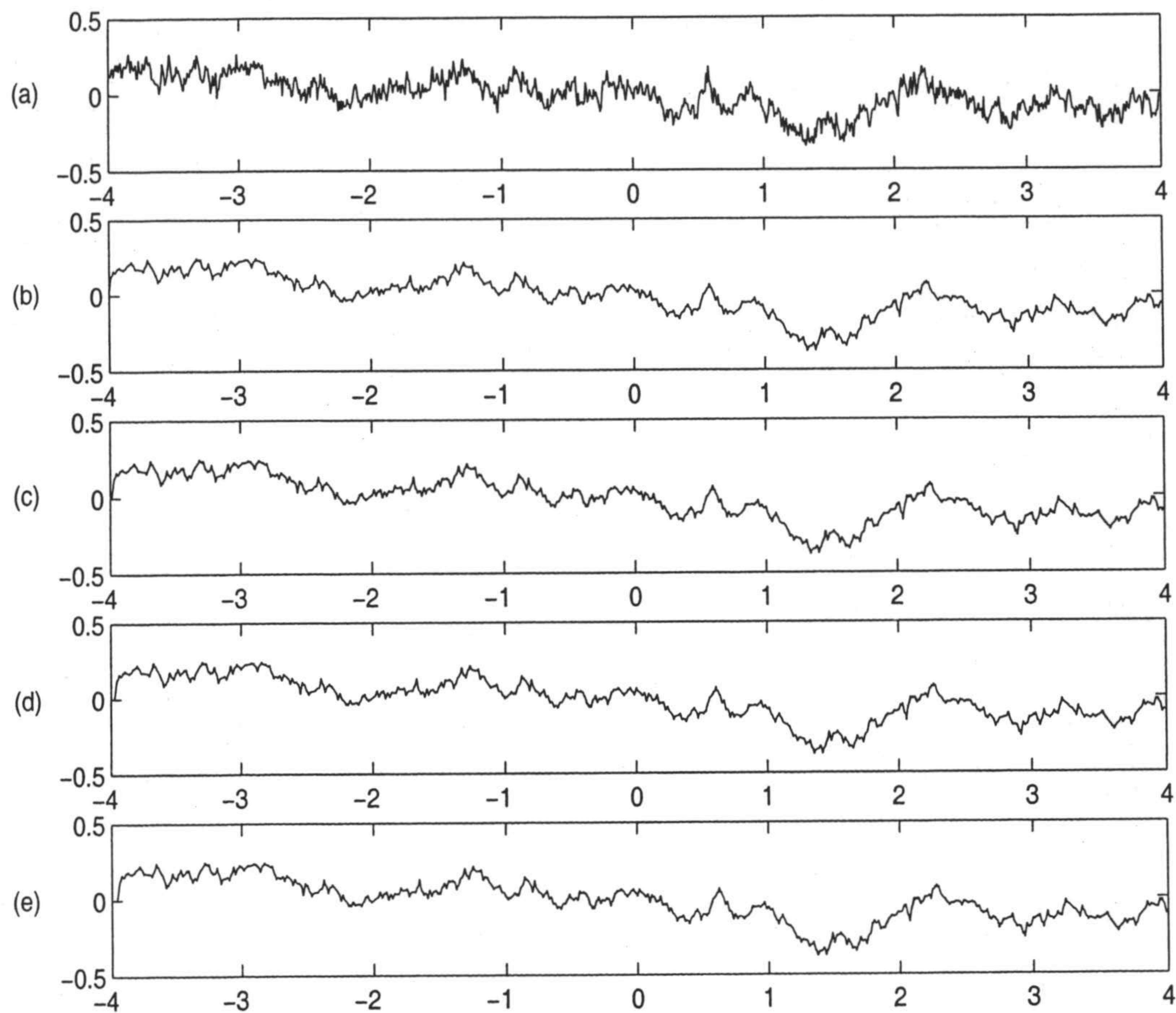


Figura 3.6: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.85$, $\nu = -0.7$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).

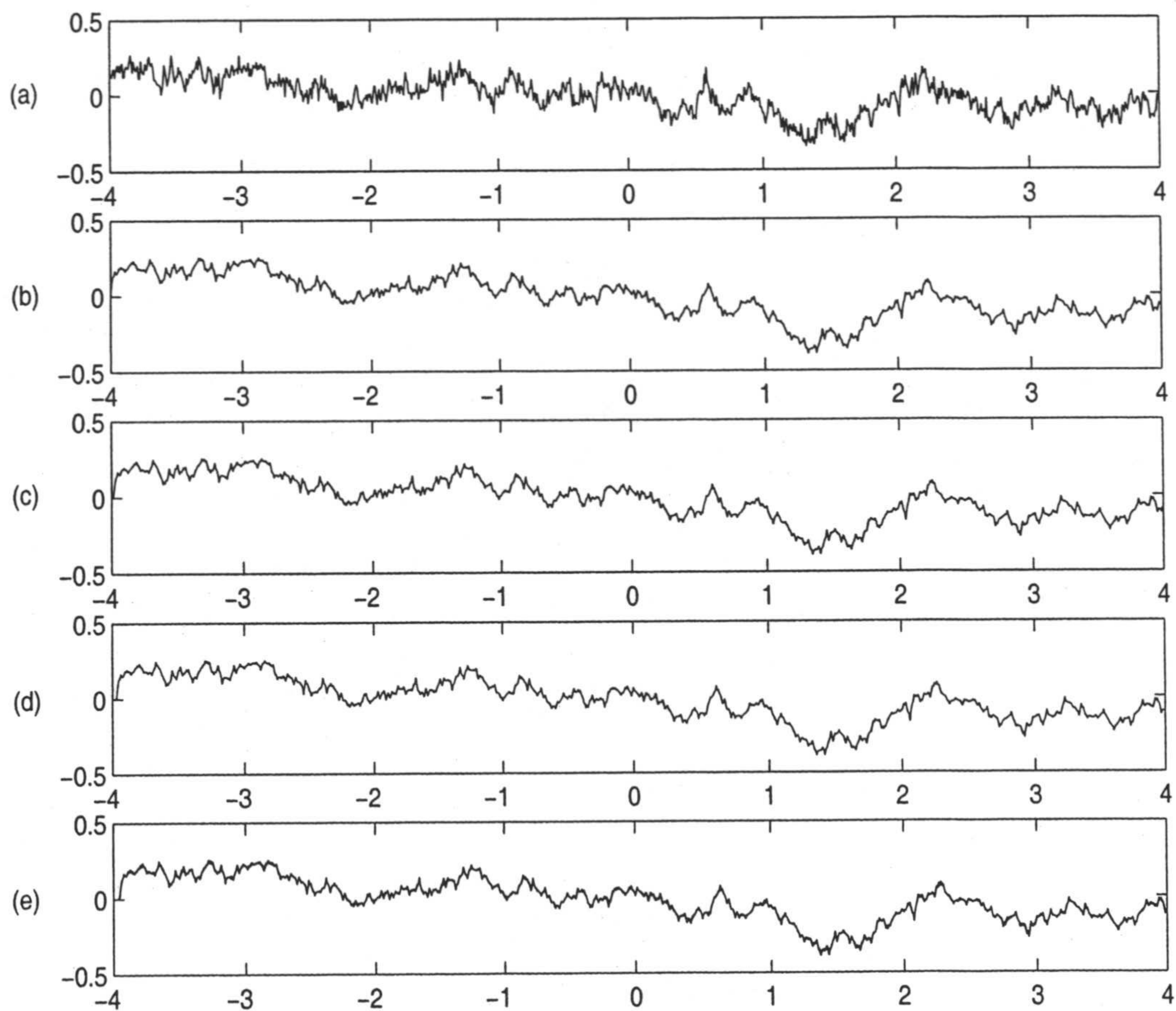


Figura 3.7: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.85$, $\nu = -0.8$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).

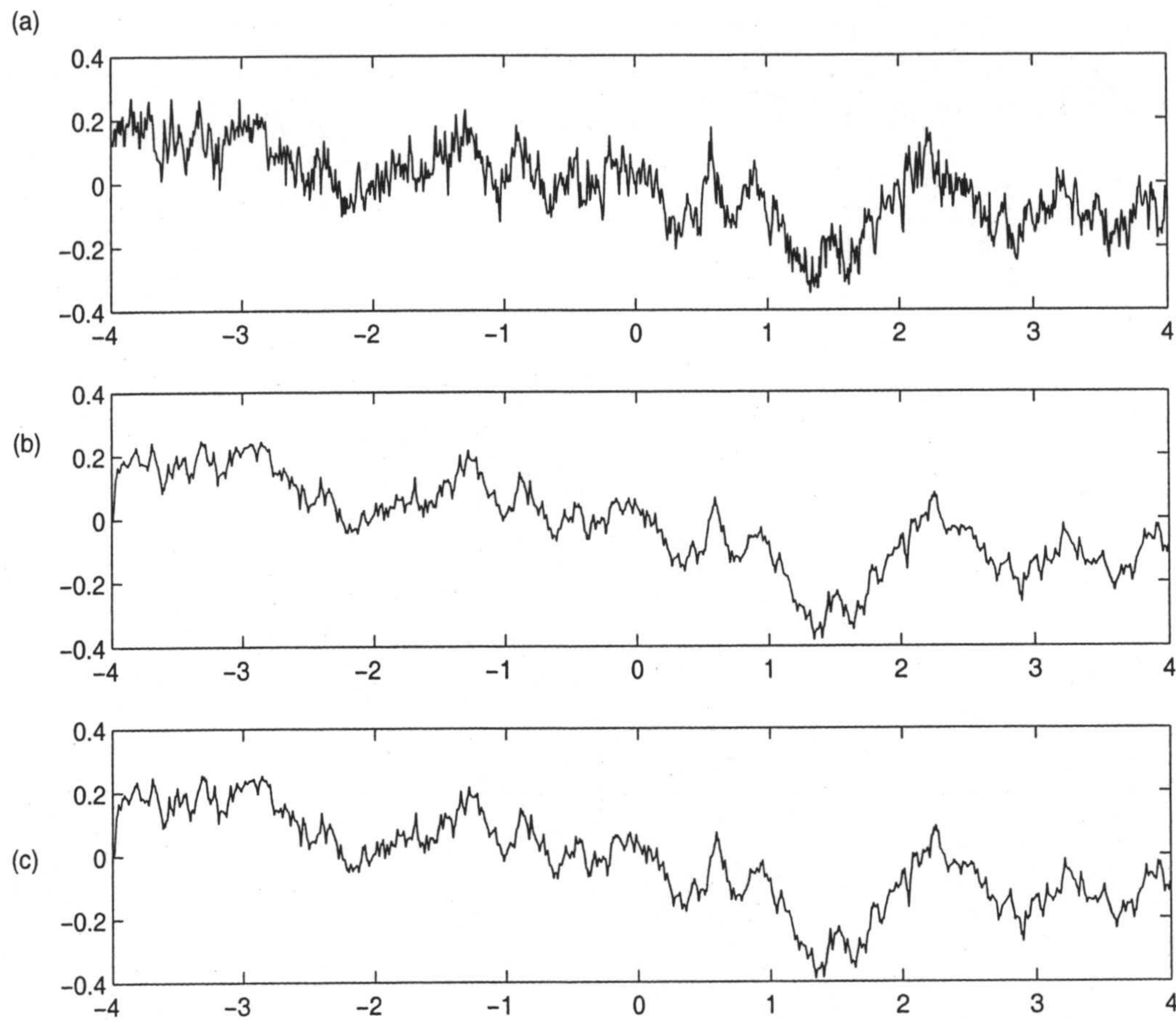
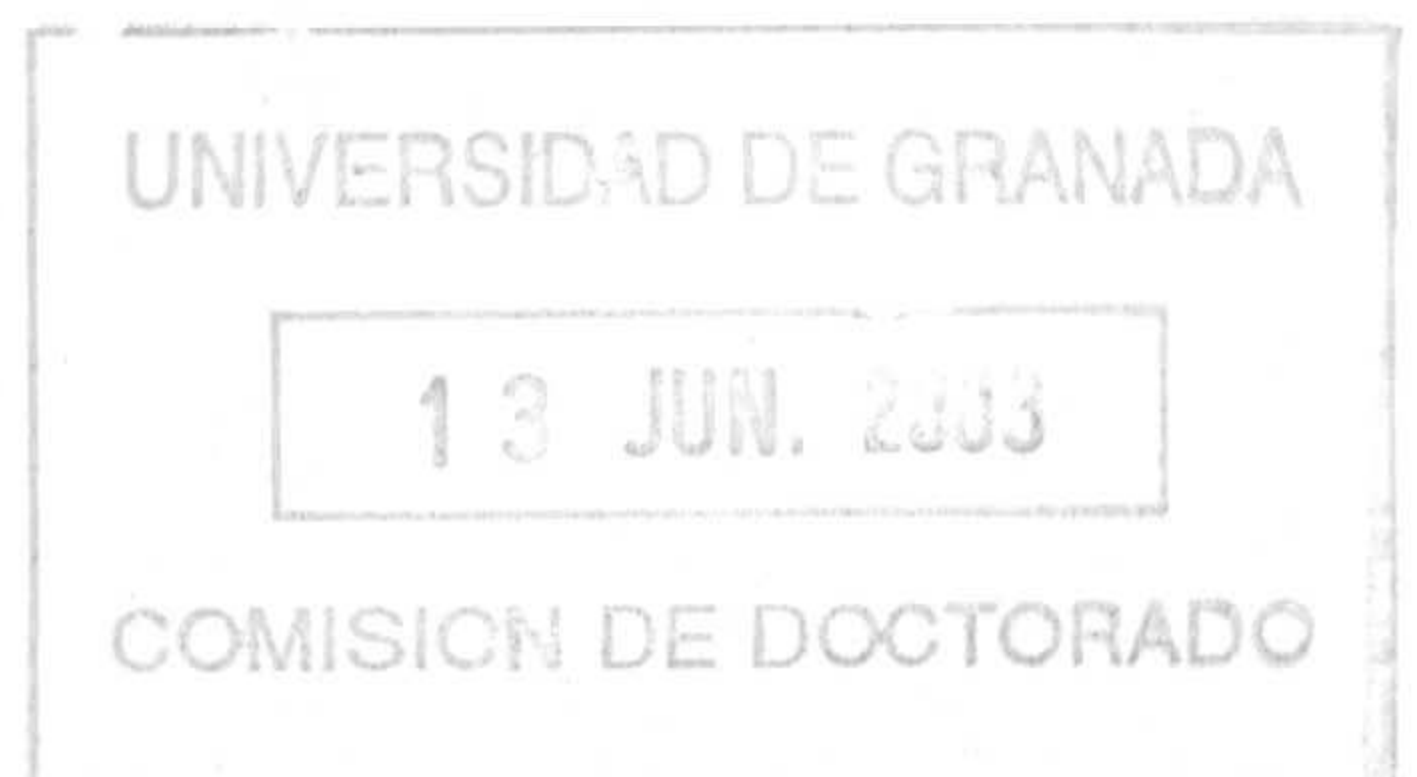


Figura 3.8: *Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.85$, $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db3, para $\nu = -0.7$ (b), $\nu = -0.8$ (c).*



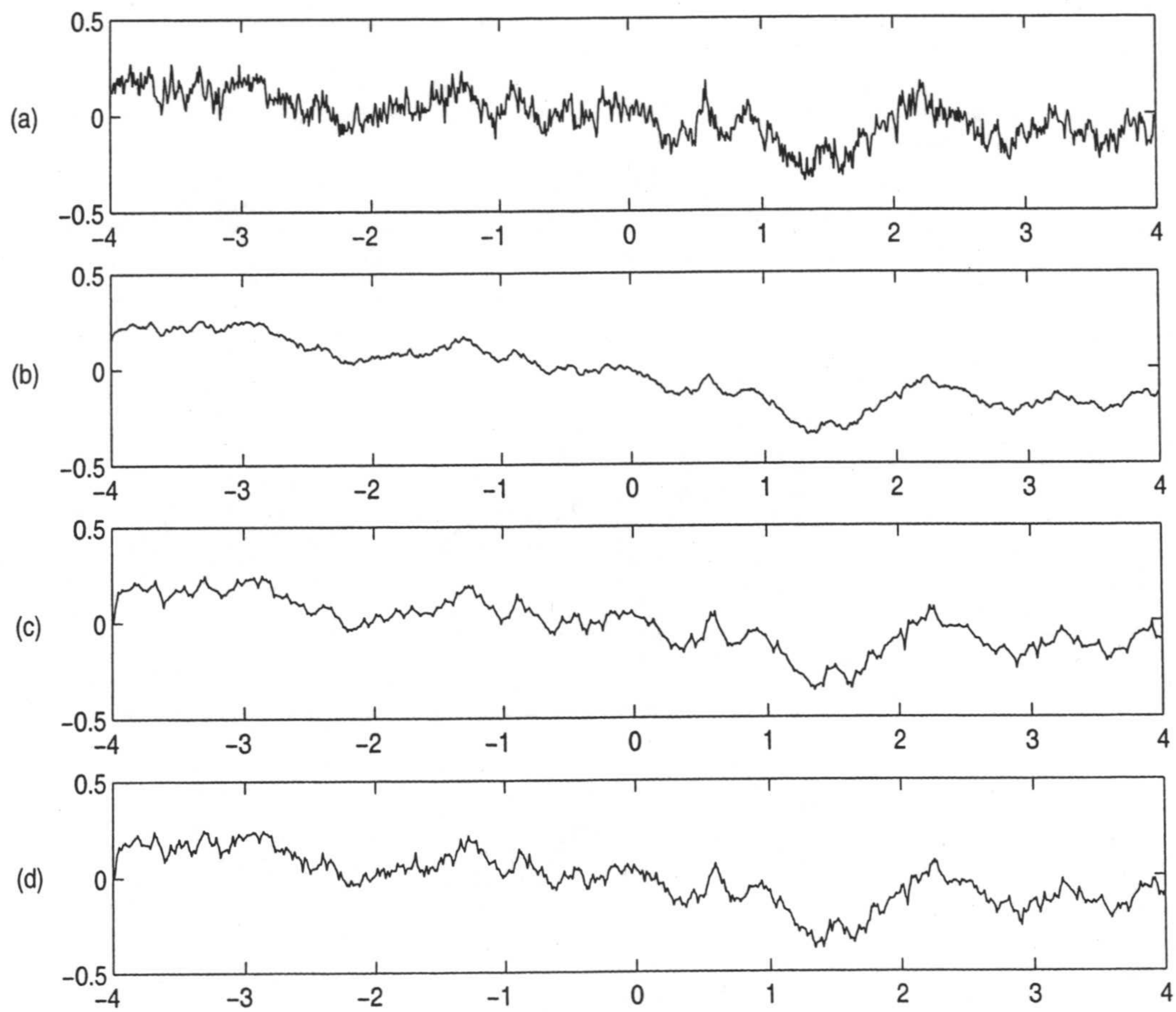


Figura 3.9: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.85$, $\nu = -0.7$: Entrada (a); observaciones (b); estimaciones funcionales para $n = 256$ (c) y para $n = 512$ (d), con $db3$.

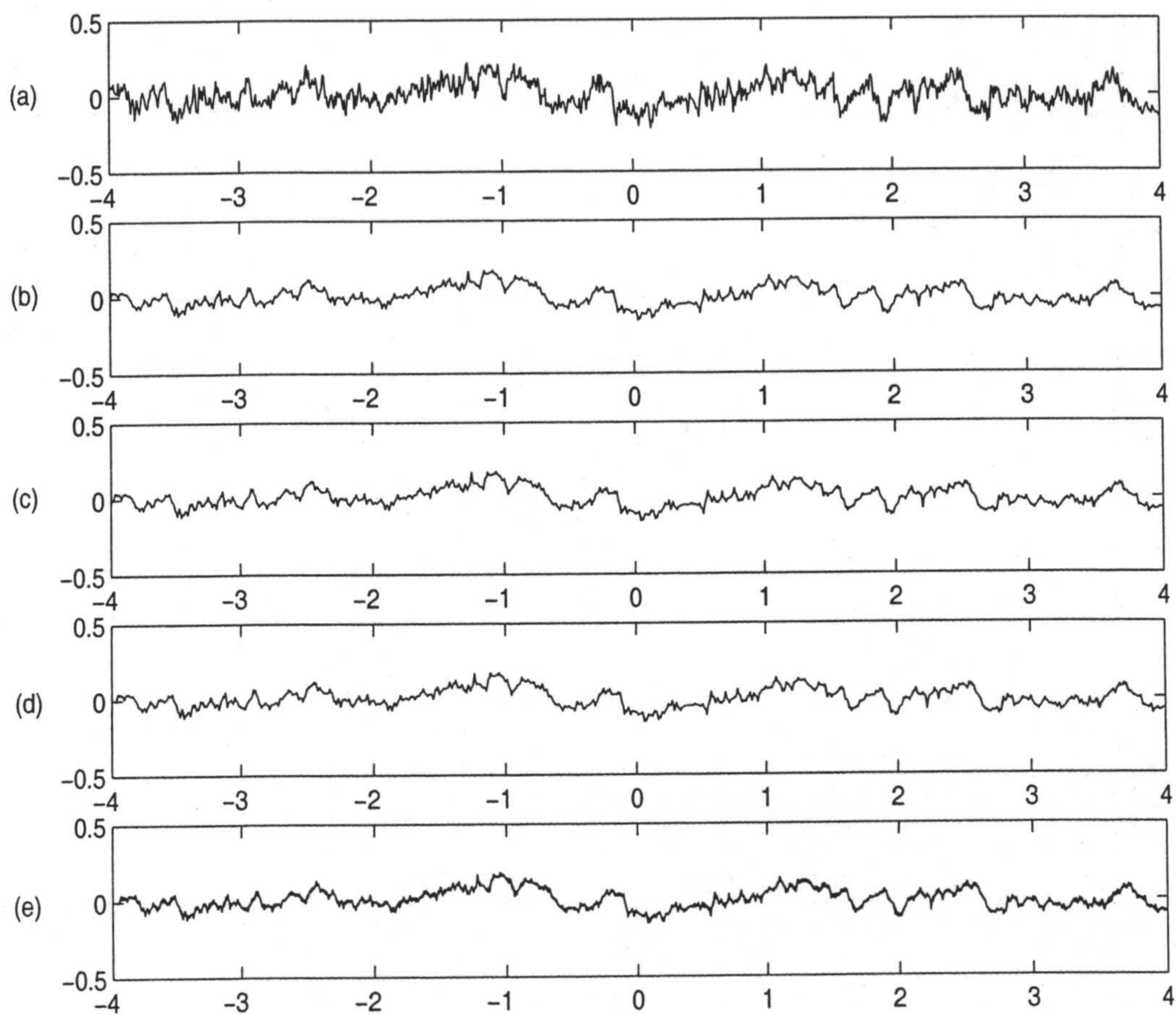


Figura 3.10: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, con ruido blanco $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).

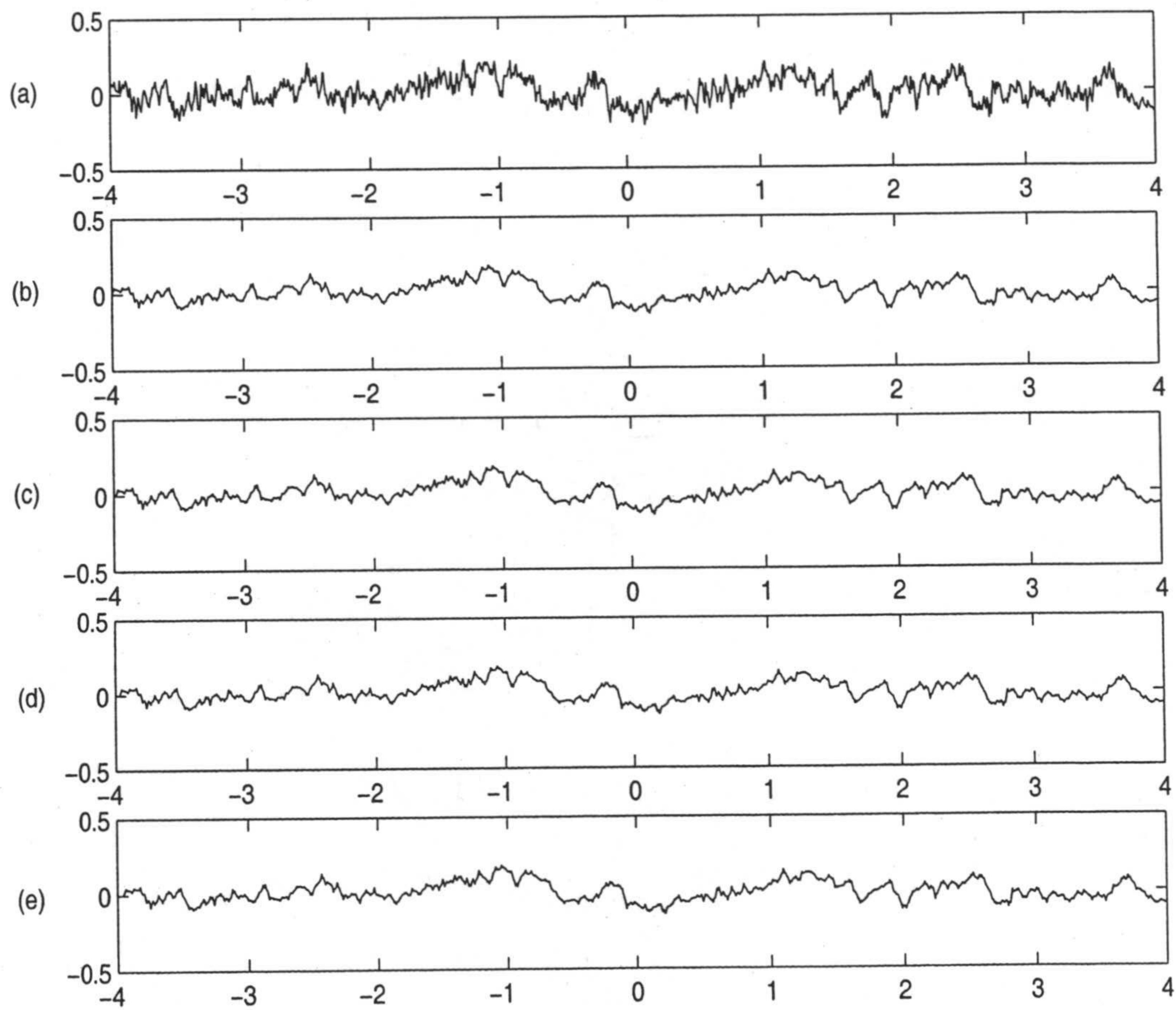


Figura 3.11: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, $\nu = -0.9$
 $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c),
db5 (d), y db7 (e).

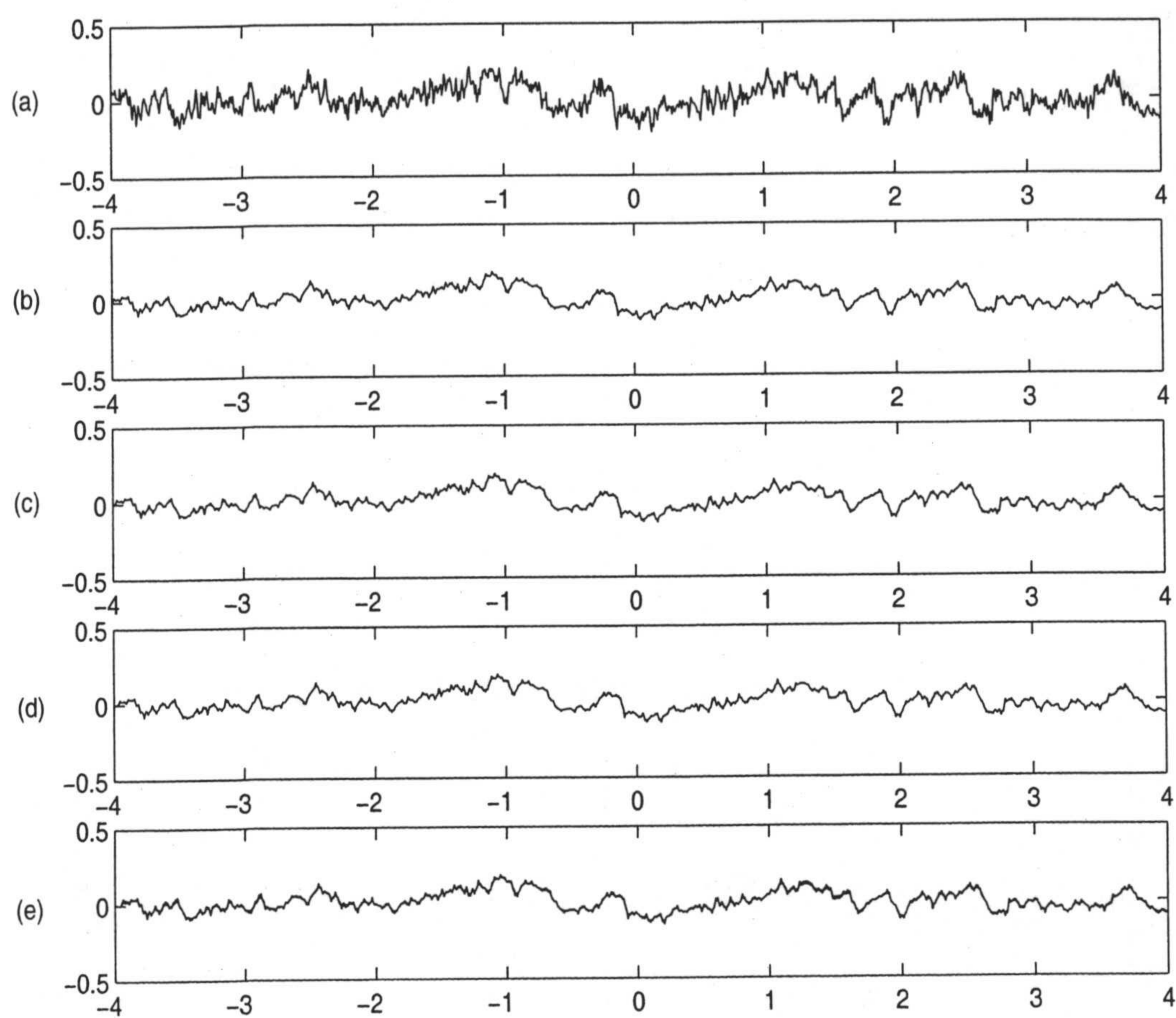


Figura 3.12: *Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, $\nu = -0.7$ $n = 512$: Entrada (a); estimaciones funcionales utilizando db1 (b), db3 (c), db5 (d), y db7 (e).*

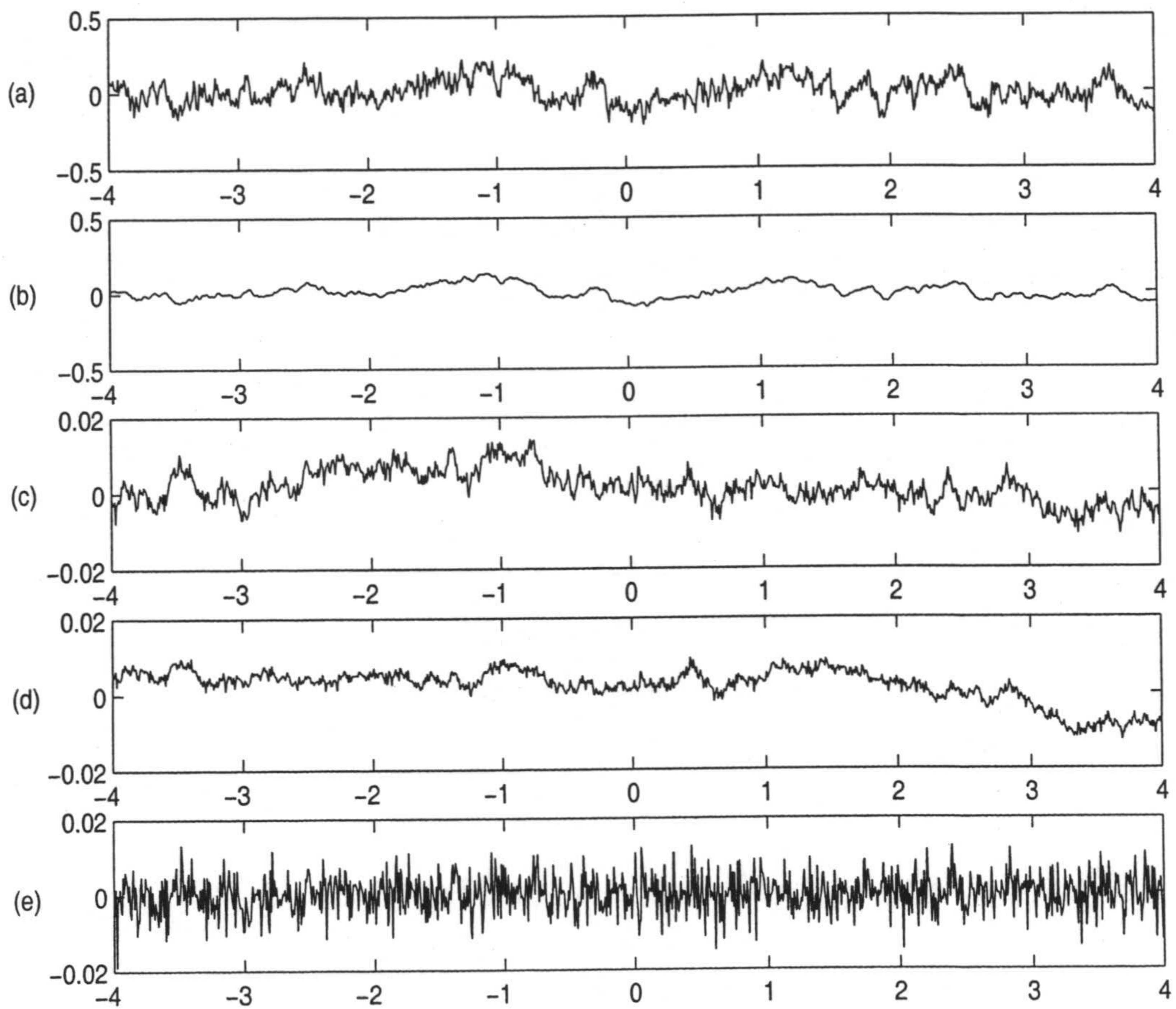


Figura 3.13: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, $n = 512$: Entrada (a); salida (b); ruidos de observación para $\nu = -0.7$ (c), $\nu = -0.9$ (d), y ruido blanco (e).

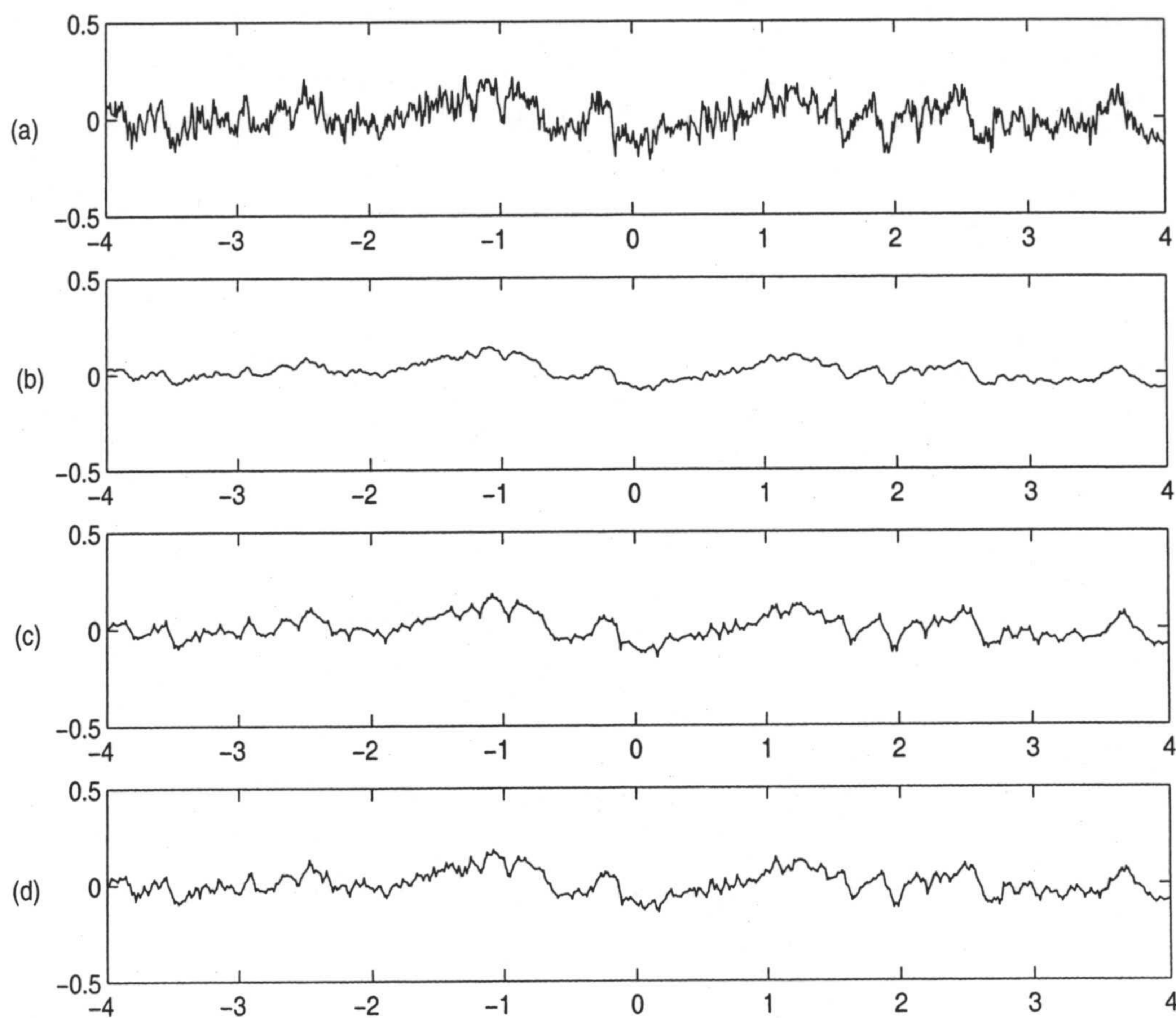


Figura 3.14: *Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.8$, $\nu = -0.9$: Entrada (a); observaciones (b); estimaciones funcionales para $n = 256$ (c) y para $n = 512$ (d), con db3.*

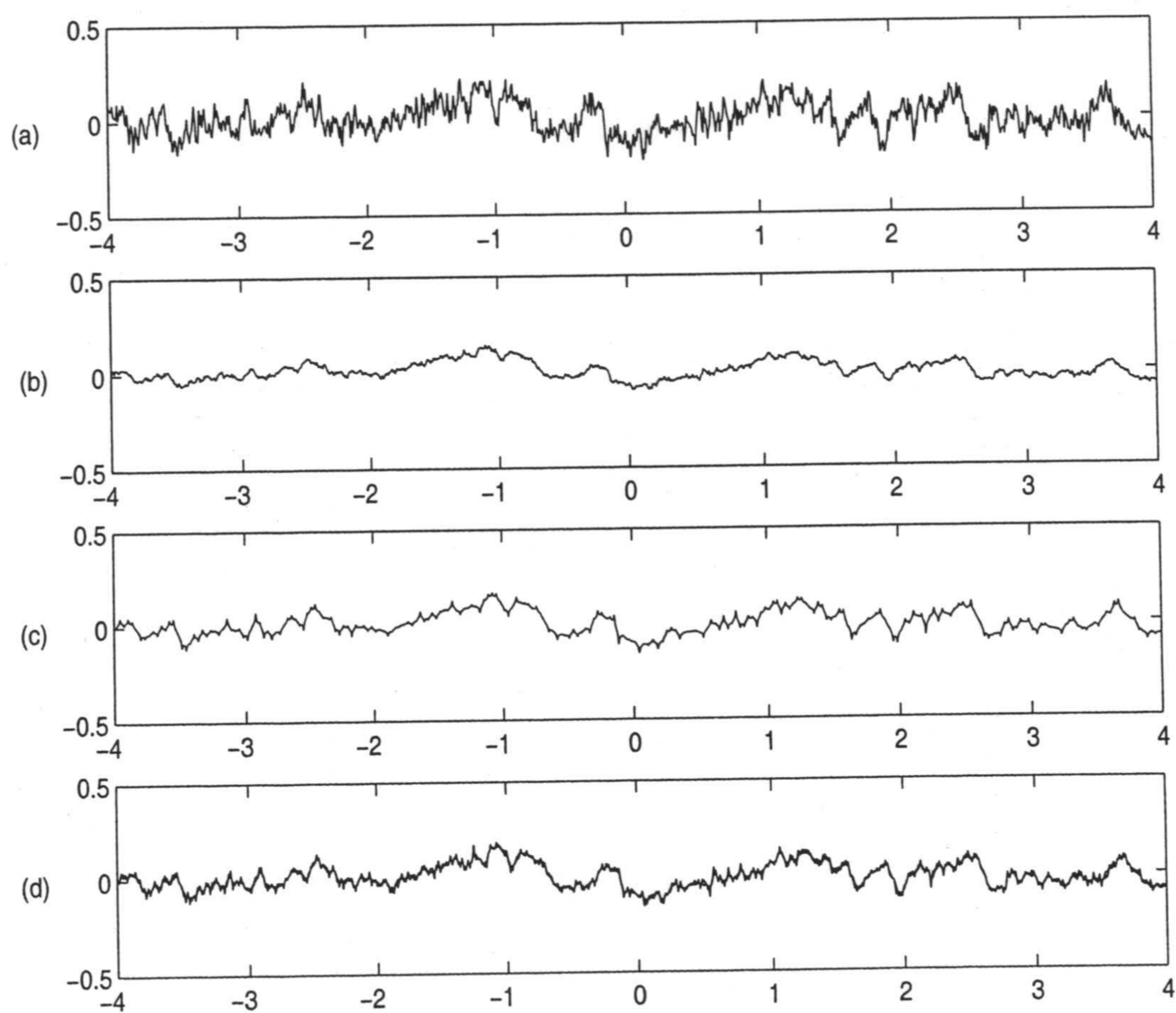


Figura 3.15: Problema de extrapolación, para $\beta = -0.6$, $\alpha = -0.75$, y ruido blanco: Entrada (a); observaciones (b); estimaciones funcionales para $n = 256$ (c) y para $n = 512$ (d), con $db3$.

Parámetros del modelo			Tamaño muestral	Base de wavelets			
$\beta,$	$\alpha,$	ν	n	db1	db3	db5	db7
-0.60,	-0.85	-0.7	256	0.0049	0.0043	0.0035	0.0023
			512	0.0046	0.0040	0.0032	0.0024
-0.60,	-0.85	-0.8	256	0.0052	0.0045	0.0036	0.0024
			512	0.0049	0.0042	0.0033	0.0025

Tabla 3.2: Errores cuadráticos medios obtenidos en el Estudio 2.

aditivo, para una clase de campos aleatorios con norma del espacio de Hilbert de núcleo reproductor equivalente a la norma de un espacio de Sobolev fraccionario de orden apropiado. La metodología propuesta está basada en las expansiones mediante wavelets de los campos involucrados. Asimismo se estudian condiciones sobre el ruido aditivo de observación para obtener una solución estable del problema. En particular, en el caso en que el orden mínimo de singularidad fraccionario del campo aleatorio de entrada es mayor que $n/2$, dichas expansiones se pueden interpretar en sentido fuerte. Mediante el truncamiento de los desarrollos anteriores a niveles de resolución específicos se deriva una aproximación finito-dimensional del problema de estimación considerado.

Parámetros del modelo			Tamaño muestral	Base de wavelets			
$\beta,$	$\alpha,$	ν	n	db1	db3	db5	db7
-0.60,	-0.80	-0.70	256	0.0040	0.0033	0.0025	0.0017
			512	0.0038	0.0031	0.0024	0.0015
-0.60,	-0.80	-0.90	256	0.0039	0.0033	0.0025	0.0016
			512	0.0038	0.0031	0.0024	0.0014
-0.60,	-0.80	R.B.	256	0.0040	0.0033	0.0025	0.0017
			512	0.0038	0.0031	0.0024	0.0015

Tabla 3.3: Errores cuadráticos medios obtenidos en el Estudio 3.

Capítulo 4

Procesos relacionados con la ecuación de Black-Scholes

4.1 Introducción

En los últimos años se han desarrollado diversas metodologías y enfoques con el propósito de representar el comportamiento estocástico del proceso de precios. La misión de las opciones como instrumentos financieros ha sido proteger a los inversores de la aleatoriedad del mercado. Así, desde los años 70, se vienen desarrollando estudios teóricos enfocados a liberar de riesgo estos instrumentos; por ejemplo, Black-Scholes (1973) y Merton (1973), cuyos métodos han demostrado su eficacia para modelizar el comportamiento de las opciones de mercado y han sido punto de referencia para estudios posteriores. Los principios fundamentales que gobiernan los sistemas económicos y financieros aún no están totalmente descubiertos, por lo que la comunidad científica ha comenzado a aplicar conceptos y métodos de la física cuántica

y estadística. Por ejemplo, la ecuación de Black-Scholes basada en condiciones ideales de mercado simplifica los cálculos analíticos, pero los estudios empíricos muestran los efectos de condiciones no ideales y, en particular, la distribución del proceso de respuesta presenta colas pesadas, lo que explica el interés por generalizar y extender los resultados clásicos. Así, en las últimas décadas, el modelo definido por la ecuación de Black-Scholes ha sido ampliamente estudiado por diversos autores. En la literatura reciente, podemos encontrar extensiones de este modelo que involucran, entre otros aspectos, volatilidad estocástica (Hartvig, Jensen y Pedersen, 2001), factores estocásticos en la definición de la deriva (*drift*) y la volatilidad (Zariphopoulou, 2001), volatilidad multifractal (Calvet y Fisher, 2001), actividad fractal y multifractal en el tiempo (Mandelbrot, Fisher y Calvet, 1997 y Heyde, 1999), etc.

En dichas extensiones se pretende obtener modelos estocásticos que representen adecuadamente comportamientos fractales, dependencias de largo rango, intermitencias, etc., observados en series financieras. Mandelbrot, Fisher y Calvet (1997), proponen un modelo para el precio de un valor a riesgo en términos de movimiento browniano fraccionario sobre tiempo multifractal con incrementos estacionarios. El principal inconveniente de este modelo, criticado por Heyde (1999), radica en que para un índice de Hurst $H \neq 1/2$ no se satisfacen las condiciones de semimartingala, esenciales en la aplicación de las herramientas de cálculo estocástico, que conduce a situaciones libre de riesgo, lo que provoca el rechazo de este modelo en ciertas aplicaciones. Como alternativa, Heyde presenta un modelo basado en movimiento browniano geométrico con actividad en tiempo fractal, que capta el compor-

tamiento real del proceso y permite un estudio detallado sin enturbiar con posibles dependencias de largo rango. Fisher, Calvet y Mandelbrot (1997) desarrollan estudios prácticos sobre el comportamiento de series de precios en el contexto de mercado de índices de cambio, obteniendo estimaciones del índice de Hurst del orden de 0.53, para el movimiento browniano fraccionario, que siendo cercano al 0.5 parece confirmar, en cierto sentido, que la representación del proceso de respuestas en términos del movimiento browniano es adecuada para modelizar situaciones prácticas. Asimismo, Calvet y Fisher (2001) derivan un modelo para el log-precio basado en movimiento browniano compuesto con una medida aleatoria multifractal que representa la actividad financiera. Laskin (2000) describe la dinámica estocástica del mercado financiero mediante una ecuación diferencial fraccionaria estocástica de Langevin. Finalmente, Stanislavsky (2003) presenta una extensión de la ecuación clásica de Black-Scholes en la que el tiempo estocástico se describe mediante un paseo aleatorio en tiempo continuo introduciendo un parámetro que permite controlar la contribución de los efectos de memoria larga en el modelo.

En este capítulo se considera un modelo diferencial de orden fraccionario para el log-precio con actividad en tiempo fractal. En función del orden fraccionario de derivación en el modelo considerado, el proceso generador viene dado por movimiento browniano fraccionario o ruido blanco integrado fraccionariamente (Triebel, 1997 y Samorodnitsky y Taqqu, 1994). Así, el correspondiente proceso de respuestas presenta características en concordancia con los comportamientos mencionados anteriormente.

Se estudian los problemas de predicción y filtrado lineal mínimo-cuadrático

para la derivada fraccionaria del log-precio, dada en términos de movimiento browniano fraccionario o ruido blanco integrado fraccionariamente en tiempo fractal (ver Fernandez-Pascual, Ruiz-Medina y Angulo, 2003b). La metodología propuesta está basada en la transformada wavelet de procesos fractales en un contexto generalizado, que permite resolver los problemas considerados de forma estable, en una situación no libre de riesgo, donde las herramientas del cálculo estocástico no pueden aplicarse. Específicamente, se aplica el Teorema de la Proyección Ortogonal, en términos de funciones *vaguelettes* con órdenes de regularidad apropiados para obtener la inversión estable de las ecuaciones de Wiener-Hopf asociadas y se realiza un estudio de simulación para ilustrar los resultados derivados.

4.2 Antecedentes

Para derivar la solución de los problemas anteriormente mencionados, se introducen a continuación, los elementos básicos para la definición de d -conjuntos fractales, espacios de Sobolev fraccionarios sobre dominios fractales y la traza de un campo aleatorio generalizado sobre un d -conjunto fractal compacto, para definir posteriormente una clase de campos aleatorios con órdenes de regularidad fraccionarios y dominios fractales compactos.

Definición 5 (Triebel, 1997, pp. 1-5) *Sea Γ un conjunto de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$). Se dice que Γ es un d -conjunto fractal, con $0 \leq d \leq n$, si existe una medida Borel μ_Γ en \mathbb{R}^n verificando las siguientes dos propiedades:*

(i) $\text{supp } \mu_\Gamma = \Gamma$;

(ii) existen dos constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$ y todo

r con $0 < r < 1$,

$$c_1 r^d \leq \mu_\Gamma (B(\gamma, r) \cap \Gamma) \leq c_2 r^d,$$

donde $B(\gamma, r)$ es la bola cerrada de centro γ y radio r en \mathbb{R}^n .

Los espacios de Sobolev fraccionarios sobre dominios fractales se introducen como espacios traza de espacios de Sobolev fraccionarios sobre \mathbb{R}^n (ver Apéndice A) cuando los dominios bajo consideración satisfacen la siguiente propiedad de extensión:

Definición 6 *Un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que satisface una propiedad de extensión si existe un operador extensión acotado $E : H^s(S) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, verificando que $Ef = f$ en S .*

La definición de espacios de Sobolev fraccionarios a través de operadores traza permite conectar la geometría fractal con las propiedades de regularidad. Es decir, las propiedades de regularidad en sentido débil de las funciones definidas sobre conjuntos fractales vía operadores traza dependen de la dimensión de Hausdorff de sus dominios fractales y del orden de regularidad fraccionario de las funciones cuyas trazas les definen.

A continuación se introducen las definiciones de distribuciones *tempered* con soporte fractal compacto y espacios de Sobolev fraccionarios sobre conjuntos fractales compactos.

Definición 7 *Se define $\mathcal{S}'^\Gamma(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de distribuciones tempered que satisface*

$$\mathcal{S}'^\Gamma(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : f(\varphi) = 0 \text{ si } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \text{tr}_\Gamma(\varphi) = 0\}.$$

Nos referiremos a este espacio como el espacio de distribuciones tempered con soporte fractal compacto Γ . Dicho espacio define el espacio dual del espacio $\mathcal{S}(\Gamma)$ constituido por las trazas puntuales sobre Γ de funciones del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 8 (Triebel, 1997, pp. 192-193) Sea Γ un d -conjunto fractal compacto en \mathbb{R}^n , con $0 < d < n$, con medida fractal asociada μ_Γ (ver Definición 5). Entonces, se define el espacio de Sobolev $H^s(\Gamma)$ como la traza sobre Γ del espacio de Sobolev fraccionario $H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Es decir,

$$H^s(\Gamma) = \text{tr}_\Gamma \left(H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n) \right), \quad s > 0,$$

con la norma

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} = \inf \|\phi\|_{H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n)},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones $\phi \in H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n)$ tales que $\text{tr}_\Gamma(\phi) = \varphi$.

El espacio dual de $H^s(\Gamma)$ es $H^{-(s+(n-d)/2),\Gamma}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'^\Gamma(\mathbb{R}^n)$.

Asimismo, se obtiene la siguiente descomposición ortogonal de $H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n)$ (ver Triebel, 1997, p. 193):

$$H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n) : \text{tr}_\Gamma(\phi) = 0 \right\} \oplus H^s(\Gamma).$$

Definición 9 (Triebel, 1997, pp. 125, 147) Sea Γ un d -conjunto fractal compacto. Se define $H^{s,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de distribuciones tempered en $H^s(\mathbb{R}^n)$ con soporte contenido en Γ . Es decir,

$$H^{s,\Gamma}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in H^s(\mathbb{R}^n) : f(\varphi) = 0 \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{y } \text{tr}_\Gamma(\varphi) = 0 \}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se define, entonces, la dimensión en distribución de Γ como

$$\dim_D \Gamma = \sup \left\{ d : H^{-\frac{n-d}{2}, \Gamma}(\mathbb{R}^n) \text{ es no-trivial} \right\},$$

que coincide con la dimensión de Hausdorff de Γ .

Nótese que para el operador traza considerado en la Definición 8 existe un operador extensión acotado (no-lineal) de $H^s(\Gamma)$ en $H^{s+\frac{n-d}{2}}(\mathbb{R}^n)$ (ver Triebel, 1997, pp. 159-168).

Las Definiciones 10 y 11 introducen, en sentido débil, una clase de campos aleatorios con órdenes de regularidad fraccionarios y dominios fractales compactos.

Definición 10 Sea X_α un campo aleatorio α -generalizado. Para $\alpha > \frac{n-d}{2}$, el campo aleatorio generalizado X_α^Γ sobre $H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$X_\alpha^\Gamma(f) = X_\alpha(f), \quad \forall f \in H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n),$$

se denomina la traza de X_α sobre el d -conjunto fractal compacto Γ , $0 < d < n$.

Las propiedades de segundo orden de X_α^Γ vienen caracterizadas en términos de los siguientes espacios de Hilbert: El espacio de Hilbert $H(X_\alpha^\Gamma)$, definido mediante

$$H(X_\alpha^\Gamma) = \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \{X_\alpha^\Gamma(f) : f \in H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n)\}$$

y el espacio de Hilbert de núcleo reproductor $\mathcal{H}(X_\alpha^\Gamma)$ de funciones $\phi \in H^{\alpha-\frac{n-d}{2}}(\Gamma)$ tales que, para cada $f \in H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n)$,

$$\phi(f) = f(\phi) = E [X X_\alpha^\Gamma(f)],$$

para $X \in H(X_\alpha^\Gamma)$. Este espacio es isométrico al espacio $H(X_\alpha^\Gamma)$.

Definición 11 Para $\alpha > \frac{n-d}{2}$, se dice que el campo aleatorio generalizado $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma : H^{\alpha-\frac{n-d}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con soporte contenido en el d -conjunto fractal compacto Γ , es el campo aleatorio dual fractal (o simplemente el dual fractal) de X_α^Γ si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma$ es continuo en media-cuadrática;
- (ii) $H(X_\alpha^\Gamma) = H(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma)$;
- (iii) $\langle X_\alpha^\Gamma(f), \widetilde{X}_\alpha^\Gamma(\phi) \rangle_{H(X_\alpha^\Gamma)} = \int_\Gamma f(\gamma)\phi(\gamma)\mu_\Gamma(d\gamma)$, para $f \in H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in H^{\alpha-\frac{n-d}{2}}(\Gamma)$, siendo μ_Γ la medida fractal asociada con Γ introducida en la Definición 5.

Los espacios $H(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma)$ y $\mathcal{H}(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma)$, asociados con el dual fractal $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma$, se definen mediante:

$$\begin{aligned} H(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma) &= \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \left\{ \widetilde{X}_\alpha(\phi) : \phi \in H^s(\Gamma) \right\}, \\ \mathcal{H}(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma) &= \overline{\text{sp}}^{\mathcal{L}^2(\Omega)} \\ &\left\{ f \in H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n) : f(\phi) = EY \widetilde{X}_\alpha(\phi), \forall \phi \in H^s(\Gamma), \text{ para } Y \in H(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma) \right\}, \end{aligned}$$

donde, como antes, $s = \alpha - \frac{n-d}{2}$.

Bajo la condición de dualidad dada en la Definición 11, la representación abstracta de X_α^Γ , en términos de ruido blanco sobre $L^2(\Gamma)$ se puede obtener a partir del operador J_Γ que identifica los espacios $\mathcal{H}(X_\alpha^\Gamma)$ y $H^{\alpha-\frac{n-d}{2}}(\Gamma)$, y del operador \widetilde{J}_Γ que identifica los espacios $\mathcal{H}(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma)$ y $H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n)$ (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002): para $s = \alpha - \frac{n-d}{2}$,

$$J_\Gamma : H(X_\alpha^\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}(X_\alpha^\Gamma) \subseteq H^s(\Gamma), \quad (4.1)$$

$$\widetilde{J}_\Gamma : H(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}(\widetilde{X}_\alpha^\Gamma) \subseteq H^{-\alpha, \Gamma}(\mathbb{R}^n), \quad (4.2)$$

siendo

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow J_\Gamma[X] = \varphi_X \quad \text{con} \quad \varphi_X(f) = EXX_\alpha^\Gamma(f), \quad f \in H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n), \\ Y &\longrightarrow \tilde{J}_\Gamma[Y] = g_Y \quad \text{con} \quad g_Y(\phi) = EY\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\phi), \quad \phi \in H^s(\Gamma). \end{aligned}$$

Dichos isomorfismos definen asimismo la factorización del operador de covarianza de X_α^Γ

Proposición 7 (Ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002). La representación abstracta de X_α^Γ viene dada por

$$X_\alpha^\Gamma(L_\Gamma f) \underset{\text{m.c.}}{=} \varepsilon_\Gamma \left[(I - \Delta)_\Gamma^{-s/2} f \right], \quad \forall f \in H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n), \quad (4.3)$$

donde $L_\Gamma = \tilde{I}_\Gamma \tilde{J}_\Gamma \mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I} : H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H(X_\alpha^\Gamma)$ el isomorfismo isométrico dado por

$$g_k \xrightarrow{\mathcal{I}} X_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

para bases ortonormales $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$ y $H(X_\alpha^\Gamma)$, respectivamente. Aquí,

$$\langle \varepsilon_\Gamma(f), \varepsilon_\Gamma(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall f, g \in L^2(\Gamma),$$

y $(I - \Delta)_\Gamma^{-s/2}$ representa el operador integral $(I - \Delta)^{-s/2}$ sobre $H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Asimismo, de la condición de dualidad se prueba que los espacios $H^s(\Gamma)$ y $\mathcal{H}(X_\alpha^\Gamma)$, así como los espacios $H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha^\Gamma)$ poseen normas equivalentes (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002). El producto interno en $\mathcal{H}(X_\alpha^\Gamma)$ viene dado por la función de covarianza del campo aleatorio dual fractal \tilde{X}_α^Γ ,

y el producto interno en el espacio $\mathcal{H}(\tilde{X}_\alpha^\Gamma)$ viene dado por la traza sobre Γ de la función de covarianza del campo aleatorio generalizado X_α . Los operadores de covarianza $R_{X_\alpha^\Gamma}$ y $R_{\tilde{X}_\alpha^\Gamma}$ definen pues isomorfismos entre los espacios $H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$ y $H^s(\Gamma)$, y entre $H^s(\Gamma)$ y $H^{-\alpha,\Gamma}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Se tiene entonces, que el operador $R_{X_\alpha^\Gamma}$ es compacto sobre $L^2(\Gamma)$.

La condición

$$\text{supp} \left(R_{\tilde{X}_\alpha^\Gamma}(\phi) \right) \subseteq \text{supp}(\phi), \quad \forall \phi \in H^s(\Gamma), \quad (4.4)$$

permite definir la representación abstracta (4.3) de X_α^Γ en términos de operadores diferenciales fraccionarios como sigue:

$$[I_\Gamma J_\Gamma]^{-1} = \sum_{|\beta| \leq [s]^-} a_\beta^\Gamma(\cdot) (-\Delta)_\Gamma^{\{s\}_+/2} D_\Gamma^\beta, \quad (4.5)$$

donde ' denota el operador adjunto y A_Γ para un operador diferencial A , representa el operador A sobre Γ , es decir, A definido sobre un subespacio denso de $L^2(\Gamma)$ constituido por funciones con órdenes de regularidad apropiados. Aquí, $s = \alpha - (n - d)/2$ siendo $[s]^-$ la parte entera de s y $\{s\}_+ = s - [s]^-$. Asimismo, las funciones $\{a_\beta : |\beta| \leq [s]^- \}$ son distribuciones con soporte fractal compacto Γ (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002).

Para $s > d/2$ se tiene que X_α^Γ define un campo aleatorio ordinario en media cuadrática de forma única satisfaciendo la ecuación abstracta (4.3) (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002).

4.3 Ecuación fraccionaria de Black-Scholes sobre tiempo fractal

Consideramos el siguiente modelo fraccionario para el log-precio $X(t) = \log P_t$, con actividad en tiempo fractal:

$$\mathcal{R}(t) = D_t^\alpha X_t = \sigma_t D_t^\alpha B(\lambda(t)) \simeq \sigma_t B_H(t), \quad t > 0, \quad (4.6)$$

donde D_t^α denota la derivada de Riemann-Liouville de orden fraccionario α con extremo inferior el 0 y la función λ representa la actividad en tiempo fractal. El coeficiente σ_t representa la volatilidad cambiante en el tiempo y puede ser una función fractal. El proceso B es el movimiento browniano clásico y el proceso B_H representa el movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst $H = d(s)/2 - \alpha$, si $d(s)/2 - \alpha \in (0, 1)$, y ruido blanco integrado fraccionariamente si $d(s)/2 - \alpha + 1/2 \in (0, 1/2)$ (con orden fraccionario de integración $d(s)/2 - \alpha + 1/2$).

Suponemos que λ pertenece al espacio de Hölder-Zygmund $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}_+)$, con $s \in (0, 1)$, y satisface las condiciones dadas en Triebel (1997, pp. 119-123), bajo las cuales la dimensión $d(s)$ de $\{\lambda(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ es fractal. Se supondrá que la función inversa λ^{-1} está acotada.

Entonces, el precio P_t se define como

$$P_t = K \exp \left\{ (-\Delta)_{\lambda(\mathbb{R}_+)}^{-\alpha/2} [\sigma_t D_t^\alpha B(\lambda(t))] \right\}, \quad K > 0, \quad (4.7)$$

donde $(-\Delta)_{\lambda(\mathbb{R}_+)}^{-\alpha/2}$ representa el potencial de Riesz de orden α sobre el conjunto fractal $\lambda(\mathbb{R}_+)$.

4.4 Expansión ortogonal mediante wavelets

El proceso $\mathcal{R}(t) = D_t^\alpha X_t$ definido en la ecuación (4.6) puede relacionarse, en sentido débil, con un proceso de ruido blanco gaussiano sobre tiempo fractal, en términos de un filtro lineal dado por un isomorfismo entre espacios apropiados (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002, y Sección 4.3). Este filtro admite una descomposición en términos de wavelets transformadas definidas a partir de un análisis multirresolución de $L^2(\Gamma)$ que proporciona la factorización de la covarianza y la expansión ortogonal del proceso \mathcal{R} según se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 12 *Sea \mathcal{R} el proceso dado en la ecuación (4.6). Entonces, \mathcal{R} admite la siguiente expansión ortogonal :*

$$\mathcal{R}(t) \stackrel{\text{m.c.}}{=} \sum_{k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}+)}} \mathcal{R}^k \varphi_k(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}+)}} \mathcal{R}^{j,\theta} \gamma_{j,\theta}(t), \quad (4.8)$$

donde

$$\left\{ \varphi_k = \mathcal{T}'_R(\phi_k) : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}+)} \right\} \cup \left\{ \gamma_{j,\theta} = \mathcal{T}'_R(\psi_{j,\theta}) : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}+)}, j \geq 0 \right\} \quad (4.9)$$

y

$$\left\{ \varphi^k = (\mathcal{T}_R^{-1})(\phi_k) : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}+)} \right\} \cup \left\{ \gamma^{j,\theta} = (\mathcal{T}_R^{-1})(\psi_{j,\theta}) : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}+)}, j \geq 0 \right\}, \quad (4.10)$$

constituyen bases duales de Riesz que diagonalizan la función de covarianza $B_{\mathcal{R}}$ de \mathcal{R} , siendo $R_{\mathcal{R},\beta} = \mathcal{T}'_R \mathcal{T}_R$ el operador de covarianza del campo aleatorio

generalizado \mathcal{R}_β con orden de regularidad $-\beta = 1/2 + d(s)/2 - \alpha$ asociado a \mathcal{R} . Aquí se considera que

$$\left\{ \phi_k : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)} \right\} \cup \left\{ \psi_{j,\theta} : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j \geq 0 \right\}$$

es una base ortonormal de funciones wavelets de $L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))$ obtenida a partir de un análisis multirresolución en tal espacio, donde $\Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$ representa el número de funciones de escalamiento a nivel 0 y $\Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$ es el número de funciones wavelet a nivel de resolución $j \geq 0$. Los coeficientes aleatorios

$$\mathcal{R}^k \stackrel{\text{m.c.}}{=} \int_{\lambda(\mathbb{R}_+)} \mathcal{R}(t) \varphi^k(t) dt, \quad k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)},$$

y

$$\mathcal{R}^{j,\theta} \stackrel{\text{m.c.}}{=} \int_{\lambda(\mathbb{R}_+)} \mathcal{R}(t) \gamma^{j,\theta}(t) dt, \quad \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j \geq 0,$$

tienen varianza uno y son incorrelados. En el caso en que $1/2 - \alpha > 0$, la representación ortogonal anterior se puede interpretar en sentido fuerte y define un desarrollo en serie de las trayectorias del proceso.

Demostración El proceso $B_t(\lambda(\cdot))$ tiene en media cuadrática orden de regularidad fraccionario $1 - (\frac{1-d(s)}{2}) = 1/2 + d(s)/2$, debido a que su espacio de Hilbert de núcleo reproductor coincide con el espacio de Sobolev fraccionario $H^{1/2+d(s)/2}(\lambda(\mathbb{R}_+))$, (ver Definiciones 8 y 10). El operador de covarianza $R_{B_t(\lambda(\cdot))}$ del campo aleatorio generalizado definido por $B_t(\lambda(\cdot))$ viene dado por

$$R_{B_t(\lambda(\cdot))} = (-\Delta)_{(\lambda(\mathbb{R}_+))}^{-\left(\frac{1+d(s)}{2}\right)},$$

donde $(-\Delta)_{(\lambda(\mathbb{R}_+))}^{-\left(\frac{1+d(s)}{2}\right)}$ representa el operador inverso del operador definido por la potencia fraccionaria $1/2 + d(s)/2$ del operador de Laplace negativo sobre $\lambda(\mathbb{R}_+)$ (ver Triebel, 1997). Además, $R_{B_t(\lambda(\cdot))}$ define un isomorfismo de

$H^{-1,\lambda(\mathbb{R}_+)}(\mathbb{R}_+)$ en $H^{1/2+d(s)/2}(\lambda(\mathbb{R}_+))$, puesto que $B_t(\lambda(\cdot))$ define un campo aleatorio generalizado satisfaciendo la condición de dualidad dada en la Definición 11.

El proceso $\mathcal{R} = D_t^\alpha B(\lambda(\cdot))$ tiene en media cuadrática orden de regularidad $-\beta = 1/2 + d(s)/2 - \alpha$ y su operador de covarianza $R_{D_t^\alpha B_t(\lambda(\cdot))}$ define un isomorfismo de $H^{-(1-\alpha),\lambda(\mathbb{R}_+)}(\mathbb{R}_+)$ en $H^{1/2+d(s)/2-\alpha}(\lambda(\mathbb{R}_+))$, puesto que

$$R_{\mathcal{R}_\beta} = (-\Delta)^\alpha R_{B_t(\lambda(\cdot))}.$$

El operador de covarianza $R_{\mathcal{R}_\beta}$ admite entonces la siguiente factorización

$$R_{\mathcal{R}_\beta} = \mathcal{T}'_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_{\mathcal{R}},$$

donde $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ define un isomorfismo de $H^{-(1-\alpha),\lambda(\mathbb{R}_+)}(\mathbb{R}_+)$ en $L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))$, (ver Ruiz-Medina, Angulo y Anh, 2002).

La definición de los sistemas de bases de Riesz duales (4.9) y (4.10) se define entonces propiamente dado que $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}^{-1}$ son acotados.

Los coeficientes aleatorios

$$\left\{ \mathcal{R}^k : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)} \right\}$$

y

$$\left\{ \mathcal{R}^{j,\theta} : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j \geq 0 \right\}$$

son incorrelados según se comprueba a partir de

$$\begin{aligned} E[\mathcal{R}^k \mathcal{R}^l] &= E[\mathcal{R}(\varphi^k) \mathcal{R}(\varphi^l)] \\ &= R_{\mathcal{R}}(\varphi^k)(\varphi^l) = \mathcal{T}'_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_{\mathcal{R}}^{-1}(\phi_k))(\mathcal{T}_{\mathcal{R}}^{-1}(\phi_l)) \\ &= \langle \mathcal{T}_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_{\mathcal{R}}^{-1}(\phi_k), \mathcal{T}_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_{\mathcal{R}}^{-1}(\phi_l) \rangle_{L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))} = \langle \phi_k, \phi_l \rangle_{L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))} = \delta_{k,l}, \end{aligned}$$

y análogamente,

$$E[\mathcal{R}^k \mathcal{R}^{j:\theta}] = \langle \phi_k, \psi_{j:\theta} \rangle_{L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))} = 0,$$

$$E[\mathcal{R}^{j:\theta} \mathcal{R}^{p:\tilde{\theta}}] = \langle \psi_{j:\theta}, \psi_{p:\tilde{\theta}} \rangle_{L^2(\lambda(\mathbb{R}_+))} = \delta_{j,p} \delta_{\theta,\tilde{\theta}},$$

para todo $k, l \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$ y $\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$, $j \geq 0$, $\tilde{\theta} \in \Theta_p^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$, $p \geq 0$.

A partir de los Teoremas de Inyección entre espacios de Besov sobre dominios fractales (ver Apéndice A), para $1/2 - \alpha > 0$, \mathcal{R}_β es continuo en media cuadrática, puesto que $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\beta)$ está incluido en $\mathcal{C}^{1/2-\alpha}(\lambda(\mathbb{R}_+))$, y la expansión ortogonal (4.8) se da en sentido fuerte y muestralmente (ver Adler, 1981, y Rozanov, 1996). ■

4.5 Los problemas de extrapolación y filtrado

En esta sección se consideran los siguientes problemas:

- (i) **Problema de Extrapolación.** Estimación lineal mínimo-cuadrática de los valores de \mathcal{R} en $S_+ \subseteq \lambda(\mathbb{R}_+)$ a partir de la observación de los valores de $\mathcal{R}(t)$ en $S_- \subset S_+$.
- (ii) **Problema de Filtrado.** Estimación lineal mínimo-cuadrática de los valores de \mathcal{R} en un conjunto $S \subseteq \lambda(\mathbb{R}_+)$ a partir de la observación de sus valores con un ruido aditivo incorrelado \mathcal{N} en un conjunto $S_{OB} \subseteq \lambda(\mathbb{R}_+)$.

Derivamos una solución funcional a los problemas (i) y (ii) basada en la expansión ortogonal (4.8) derivada en el Teorema 12. Específicamente,

la expansión ortogonal del proceso \mathcal{R} , en el problema (i), y las expansiones ortogonales de los procesos \mathcal{R} y $\mathcal{R}^{OB} = \mathcal{R} + \mathcal{N}$, en el problema (ii), conducen a una discretización estable de tales problemas que permite el cálculo de sus soluciones.

4.5.1 Problema de extrapolación

Se considera el caso en que el conjunto fractal S_- está constituido por un número finito de instantes del tiempo y S_+ es un subconjunto arbitrario de $\lambda(\mathbb{R}_+)$ que contiene a S_- .

Denotamos por

$$\begin{aligned} h^{FP}(t^*, t_h) &= \sum_{k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)}} \varphi_k(t^*) \varphi_k(t_h) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}} \gamma_{j:\theta}(t^*) \gamma_{j:\theta}(t_h) \\ h^{PP}(t_h, t_i) &= \sum_{k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)}} \varphi_k(t_h) \varphi_k(t_i) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}} \gamma_{j:\theta}(t_h) \gamma_{j:\theta}(t_i), \end{aligned} \quad (4.11)$$

para $t_h, t_i \in S_-$, con $h, i = 1, \dots, n$, y $t^* \in S_+$, las respectivas expansiones en serie inducidas a partir de la expansión ortogonal (4.8), para la función de covarianza cruzada entre los valores de \mathcal{R} en S_+ y los valores de \mathcal{R} en S_- y para la función de covarianza en los correspondientes valores observados de \mathcal{R} en S_- , para $1/2 - \alpha > 0$.

Teorema 13 *Sea \mathcal{R} el proceso definido en la ecuación (4.6). Entonces, para $1/2 - \alpha > 0$ la solución al problema de extrapolación lineal mínimo-cuadrático*

(i) asociado con \mathcal{R} viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(t^*) &= \mathcal{L}[\mathcal{R}(t_1) \dots \mathcal{R}(t_n)]^T \\ &= [h^{FP}(t^*, t_1) \dots h^{FP}(t^*, t_n)] \begin{bmatrix} h^{PP}(t_1, t_1) & \dots & h^{PP}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{PP}(t_n, t_1) & \dots & h^{PP}(t_n, t_n) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times [\mathcal{R}(t_1) \dots \mathcal{R}(t_n)]^T, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde T denota la transposición de vectores.

Demostración Aplicando el Teorema de la Proyección Ortogonal en un contexto generalizado, se obtiene la siguiente ecuación para los operadores de covarianza:

$$R_{\mathcal{R}_\beta^{S+} \mathcal{R}_\beta^{S-}} = R_{\hat{\mathcal{R}}_\beta \mathcal{R}_\beta^{S-}}. \quad (4.13)$$

A partir de la ecuaciones (4.13) y (4.11), se deriva la ecuación (4.12), que proporciona una definición estable de la solución al problema (i), puesto que

$$\begin{bmatrix} h^{PP}(t_1, t_1) & \dots & h^{PP}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{PP}(t_n, t_1) & \dots & h^{PP}(t_n, t_n) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} h^{DD}(t_1, t_1) & \dots & h^{DD}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{DD}(t_n, t_1) & \dots & h^{DD}(t_n, t_n) \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

siendo

$$h^{DD}(t_h, t_i) = \sum_{k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}+)}} \varphi^k(t_h) \varphi^k(t_i) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}+)}} \gamma^{j:\theta}(t_h) \gamma^{j:\theta}(t_i), \quad h, i = 1, \dots, n,$$

y

$$\left\{ \varphi^k = (\mathcal{T}_\mathcal{R}^{-1})'(\phi_k) : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}+)} \right\} \cup \left\{ \gamma^{j,\theta} = (\mathcal{T}_\mathcal{R}^{-1})'(\psi_{j,\theta}) : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}+)}, j \geq 0 \right\},$$

con $R_{\mathcal{R}_\beta} = \mathcal{T}_\mathcal{R}' \mathcal{T}_\mathcal{R}$. ■

4.5.2 Problema de filtrado

Consideramos un modelo de observación definido por

$$\mathcal{R}^{\text{OB}}(t) = \mathcal{R}(t) + \mathcal{N}(t), \quad t \in S_{\text{OB}}, \quad (4.15)$$

donde \mathcal{N} denota el ruido de observación con orden de regularidad $-\nu$, que suponemos incorrelado con \mathcal{R} . En el siguiente resultado estudiamos condiciones sobre el ruido de observación \mathcal{N} para obtener una definición funcional estable de \mathcal{R} sobre S , dados los valores de \mathcal{R}^{OB} sobre S_{OB} . Se denota por $-\vartheta$ al orden de regularidad en media-cuadrática de \mathcal{R}^{OB} .

Teorema 14 *Sea \mathcal{R}^{OB} el proceso definido en la ecuación (4.15), siendo $-\vartheta > d(s)/2$. Supongamos que el operador de covarianza $R_{\mathcal{N}_\nu}$, del campo aleatorio generalizado N_ν asociado a N , satisface*

$$\|R_{\mathcal{N}_\nu}\| \leq \|R_{\mathcal{R}_\beta}^{-1}\|^{-1}, \quad (4.16)$$

donde $R_{\mathcal{R}_\beta}$ es el operador de covarianza definido por la función de covarianza $B_{\mathcal{R}_\beta}$ de \mathcal{R}_β , es decir, el operador de covarianza del campo aleatorio generalizado \mathcal{R}_β definido por \mathcal{R} . Entonces, el estimador funcional lineal mínimo-cuadrático de \mathcal{R} , basado en las observaciones dadas por la ecuación (??), se define como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(t^*) &= \mathcal{L} [\mathcal{R}^{\text{OB}}(t_1) \dots \mathcal{R}^{\text{OB}}(t_n)]^T \\ &= [h^{FO}(t^*, t_1) \dots h^{FO}(t^*, t_n)] \begin{bmatrix} h^{OO}(t_1, t_1) & \dots & h^{OO}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{OO}(t_n, t_1) & \dots & h^{OO}(t_n, t_n) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$$\times [\mathcal{R}^{\text{OB}}(t_1) \dots \mathcal{R}^{\text{OB}}(t_n)]^T, \quad (4.17)$$

para $t^* \in S$ y $S_{\text{OB}} = \{t_1 \dots t_n\}$, donde $\hat{\mathcal{R}}$ depende de forma continua de los datos. Aquí, h^{FO} y h^{OO} se definen de forma similar a h^{FP} y h^{PP} en la ecuación (4.11), considerando las expansiones ortogonales de \mathcal{R} y \mathcal{R}^{OB} .

Demostración Bajo la condición dada en la ecuación (4.16), el operador de covarianza del campo aleatorio generalizado definido por el proceso de observación \mathcal{R}^{OB} admite un inverso acotado (ver Apéndice B sobre Perturbación de operadores lineales). Entonces, el espacio de Hilbert de núcleo reproductor del proceso $\mathcal{R}_\vartheta^{\text{OB}}$ es isomorfo al espacio de Sobolev fraccionario $H^\vartheta(\lambda(\mathbb{R}_+))$ de orden ϑ sobre $\lambda(\mathbb{R}_+)$.

La definición de $\hat{\mathcal{R}}(\cdot)$ se deriva de forma similar al Teorema 11 puesto que \mathcal{R}^{OB} satisface las condiciones del Teorema 12 con $-\vartheta > d(s)/2$. ■

4.6 Aproximación finito-dimensional

El truncamiento a escala M de las expansiones ortogonales de los procesos involucrados en los problemas de extrapolación y filtrado conduce a una aproximación finito-dimensional de sus soluciones. Específicamente, en el problema de extrapolación se obtiene la siguiente aproximación matricial de

la ecuación (4.12):

$$\hat{\mathcal{R}}(t^*) \approx \left[(\underline{\phi}(t^*))^T, (\underline{\psi}(t^*))^T \right] B B^T \begin{bmatrix} \underline{\phi}(t_1) & \dots & \underline{\phi}(t_n) \\ \underline{\psi}(t_1) & \dots & \underline{\psi}(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\mathcal{R}}(t_1, t_1) & \dots & B_{\mathcal{R}}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\mathcal{R}}(t_n, t_1) & \dots & B_{\mathcal{R}}(t_n, t_n) \end{bmatrix}^{-1} [\mathcal{R}(t_1) \dots \mathcal{R}(t_n)]^T, \quad (4.18)$$

donde $\underline{\phi}(t)$ es el vector constituido por los valores de las funciones de escalamiento ϕ_k , $k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$, en tiempo $t \in \lambda(\mathbb{R}_+)$, $\underline{\psi}(t)$ es el vector formado por los valores de las funciones wavelet $\psi_{j;\theta}$, $\theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}$, $j = 0, \dots, M$, en tiempo $t \in \lambda(\mathbb{R}_+)$, y 'T' representa, como antes, la transposición de vectores y matrices.

Los elementos de la matriz B son las coordenadas de las funciones wavelets transformadas asociadas a la covarianza,

$$\left\{ \varphi_k : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)} \right\} \cup \left\{ \gamma_{j,\theta} : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j = 0, \dots, M \right\}$$

con respecto a la base finito-dimensional

$$\left\{ \phi_k : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)} \right\} \cup \left\{ \psi_{j,\theta} : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j = 0, \dots, M \right\}$$

de funciones de escalamiento y wavelets consideradas.

La aproximación finito-dimensional de la fórmula de filtrado (4.17) se obtiene de forma similar a partir del truncamiento de las expansiones ortogonales mediante wavelets de \mathcal{R} y \mathcal{R}^{OB} , y viene dada por

$$\hat{\mathcal{R}}(t^*) \approx \left[(\underline{\phi}(t^*))^T, (\underline{\psi}(t^*))^T \right] BC^T \begin{bmatrix} \underline{\phi}(t_1) & \dots & \underline{\phi}(t_n) \\ \underline{\psi}(t_1) & \dots & \underline{\psi}(t_n) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{\mathcal{R}^{OB}}(t_1, t_1) & \dots & B_{\mathcal{R}^{OB}}(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\mathcal{R}^{OB}}(t_n, t_1) & \dots & B_{\mathcal{R}^{OB}}(t_n, t_n) \end{bmatrix}^{-1} [\mathcal{R}^{OB}(t_1) \dots \mathcal{R}^{OB}(t_n)]^T, \quad (4.19)$$

donde B , $\underline{\phi}(t)$ y $\underline{\psi}(t)$, para cada $t \in \lambda(\mathbb{R}_+)$, se definen como en la ecuación (4.18), y C es la matriz cuyos elementos son las coordenadas de un subconjunto finito de funciones wavelets transformadas del desarrollo ortogonal de \mathcal{R}_α^{OB} con respecto a la base finito-dimensional

$$\left\{ \phi_k : k \in \Gamma_0^{\lambda(\mathbb{R}_+)} \right\} \cup \left\{ \psi_{j,\theta} : \theta \in \Theta_j^{\lambda(\mathbb{R}_+)}, j = 0, \dots, M \right\}$$

de funciones de escalamiento y wavelets consideradas.

4.7 Simulaciones

En este apartado, se consideran las aproximaciones finito-dimensionales derivadas en la sección anterior para implementar las fórmulas de extrapolación y filtrado en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Se define el log-precio por la ecuación (4.6) con orden fraccionario de derivación $\alpha = 0.25$, volatilidad $\sigma_t = 8^{0.15}$ y tiempo fractal $\theta(t) = t^{0.8}$. Filtramos los valores de \mathcal{R} en 512 puntos del intervalo de tiempo $[0, 8]$, donde son observados con un ruido aditivo incorrelado \mathcal{N} .

El proceso \mathcal{N} es un movimiento browniano fraccionario con índice de Hurst $H = 0.35$. Los resultados se muestran en la Figura 4.1, donde la señal original aparece en línea discontinua y la señal estimada en línea continua.

Ejemplo 2. En este caso, el orden de derivación fraccionario en la ecuación (4.6) es $\alpha = 0.3$ y el tiempo fractal es $\theta(t) = t^{0.7}$. La volatilidad es una función fractal del tiempo dada por $\sigma_t = t^{0.1}$. Consideramos la observación de \mathcal{R} en 512 puntos del intervalo $[0, 8]$. En la Figura 4.2 se muestra la estimación de \mathcal{R} en 1024 puntos, donde, como antes, se superponen la señal original y la estimada.

Ejemplo 3. Se considera un orden de derivación fraccionario $\alpha = 0.5$ de movimiento browniano compuesto con la función $\theta(t) = t^\beta$, con $\beta = 0.9$. Entonces, el proceso de respuestas se comporta como un ruido blanco integrado fraccionalmente con orden fraccionario de integración 0.45. Las soluciones a los problemas de extrapolación y filtrado asociados con \mathcal{R}_α se muestran en las Figuras 4.3 y 4.4, respectivamente.

4.8 Conclusión

En este capítulo se estudian los problemas de extrapolación y filtrado asociados a un proceso \mathcal{R} relacionado con el log-precio mediante integración fraccional. Este proceso presenta dependencias de largo rango y comportamientos fractales en sentido mínimo-cuadrático, presentes en series financieras. La metodología que proponemos está basada en la transformada wavelet de la

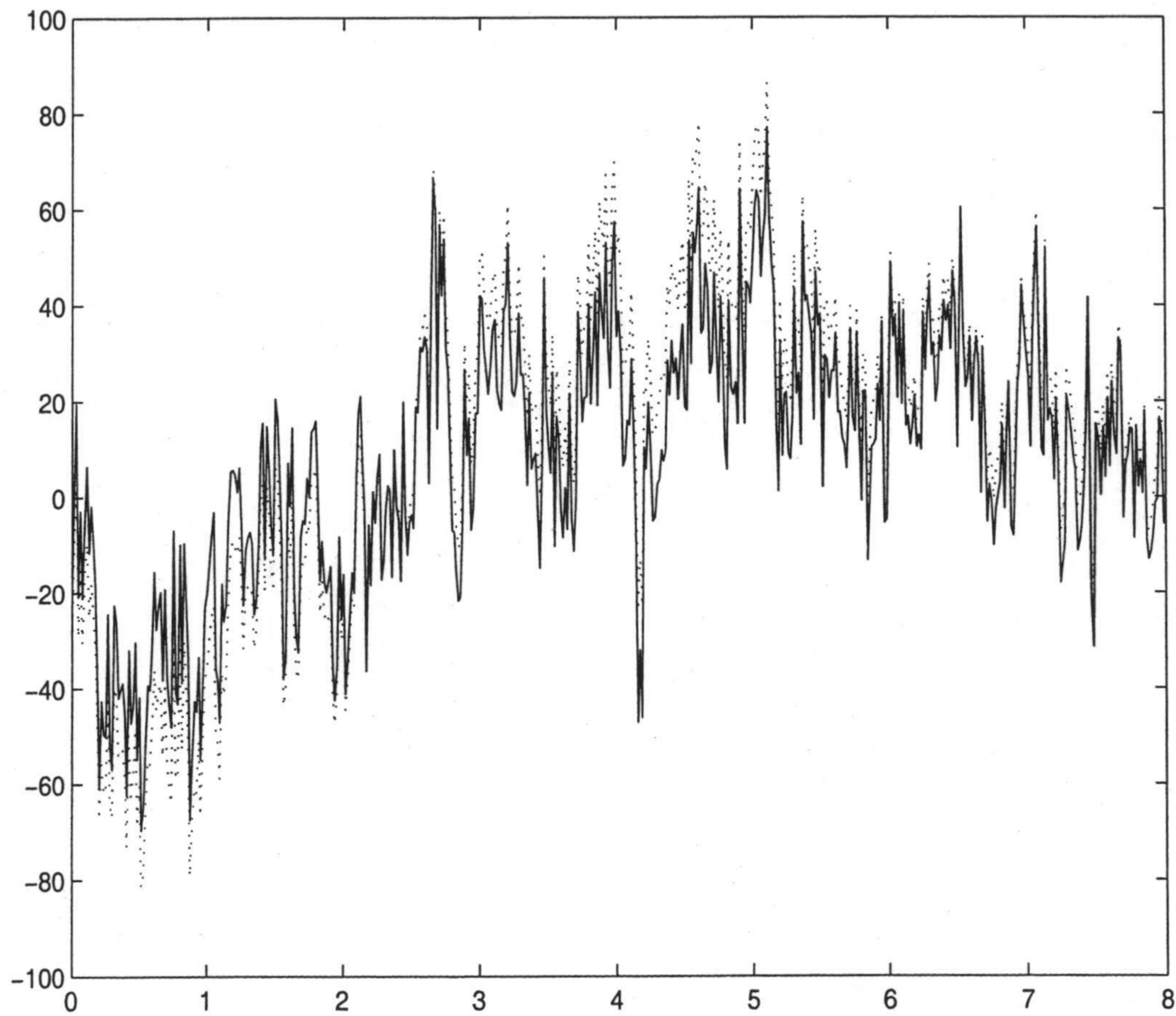


Figura 4.1: *Problema de estimación.* Parámetros $\alpha = 0.25$, $\sigma_t = 8^{0.15}$,
 $\theta(t) = t^{0.8}$

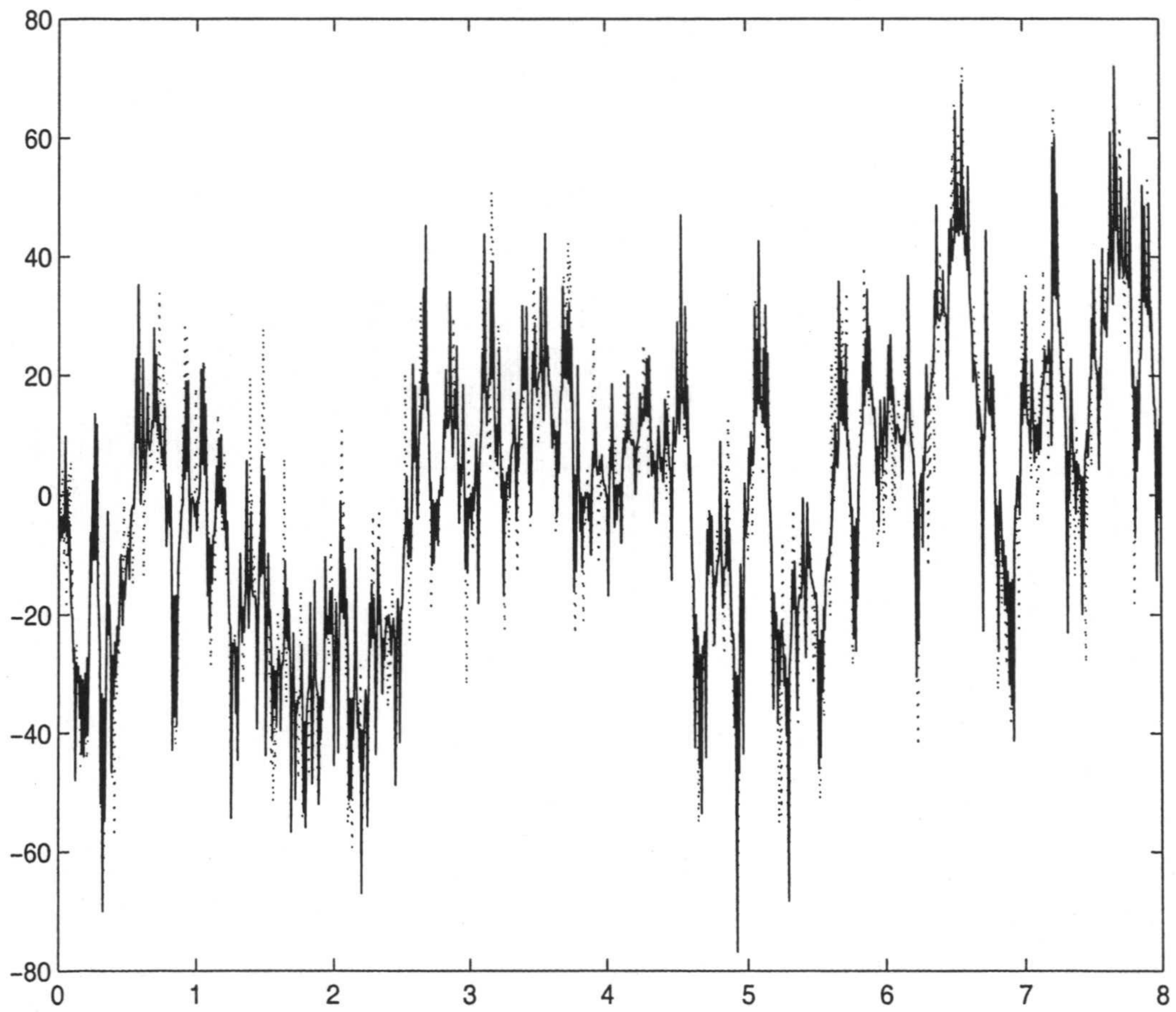


Figura 4.2: *Problema de extrapolación.* Parámetros $\alpha = 0.3$, $\sigma_t = t^{0.1}$, $\theta(t) = t^{0.7}$

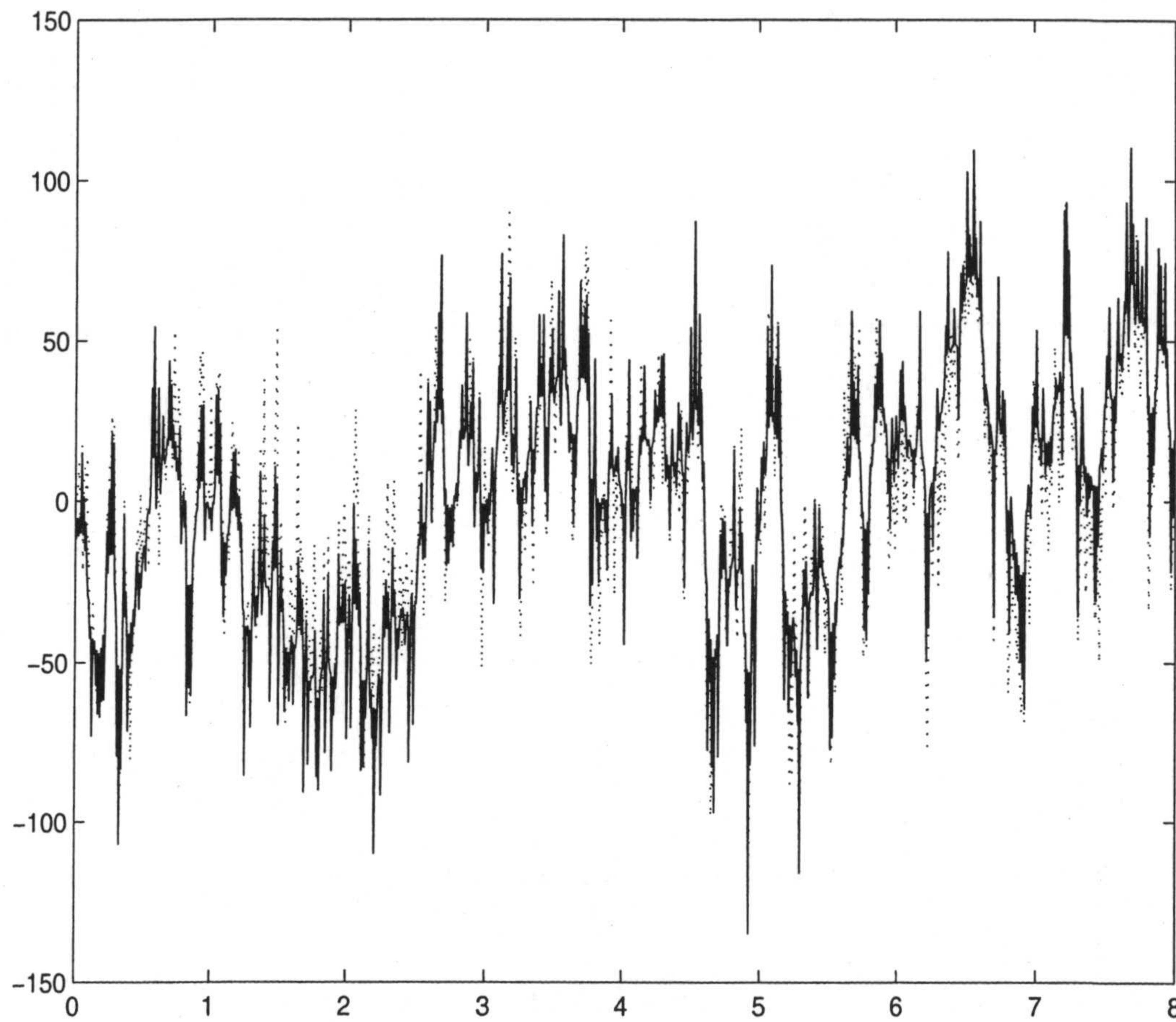


Figura 4.3: *Problema de extrapolación.* Parámetros $\alpha = 0.5$, $\sigma_t = 1$, $\theta(t) = t^{0.9}$

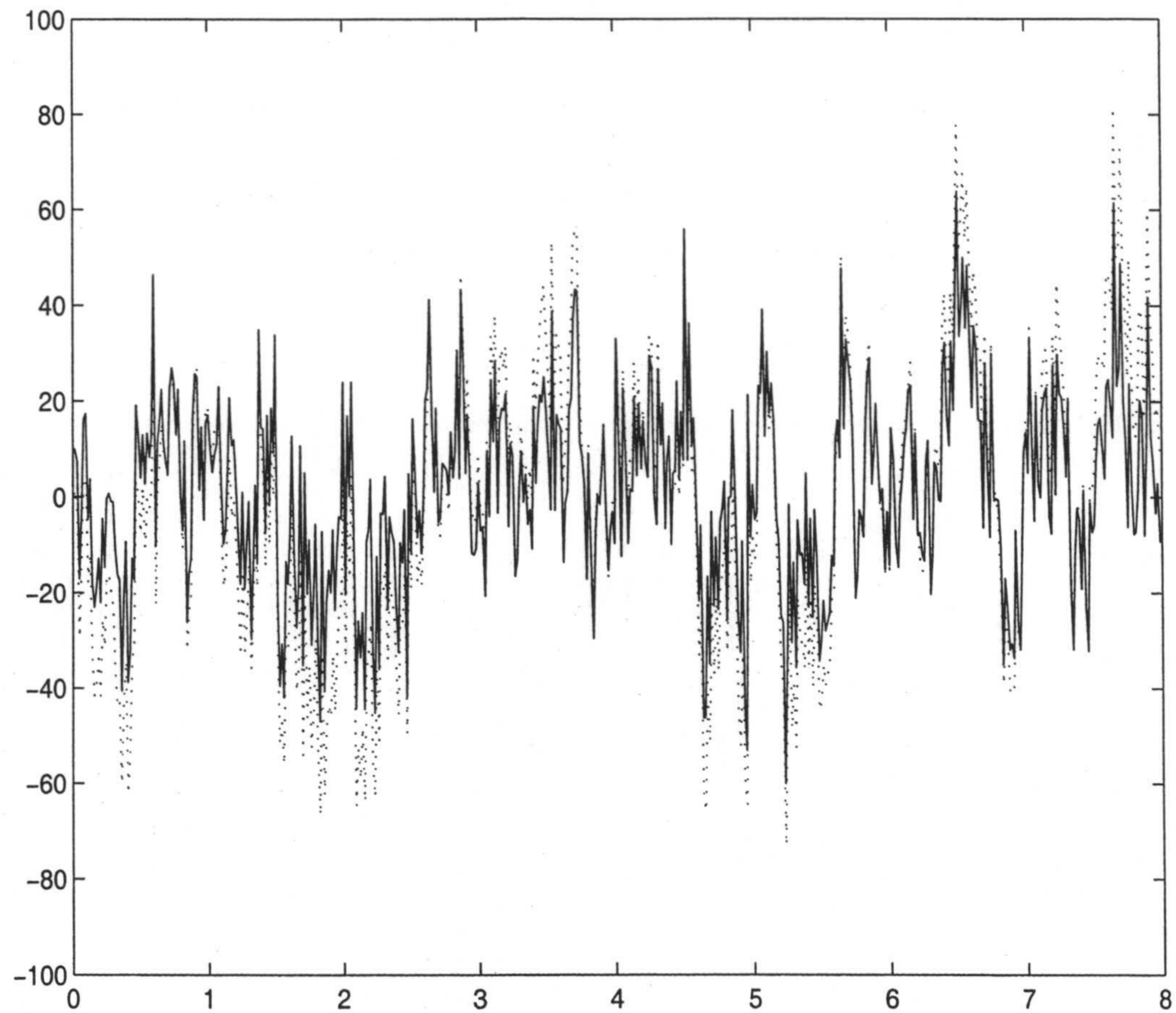


Figura 4.4: *Problema de estimación.* Parámetros $\alpha = 0.5$, $\sigma_t = 1$, $\theta(t) = t^{0.9}$

función de covarianza definida sobre un conjunto fractal. Dicha transformada se considera en un contexto generalizado. Se obtiene entonces mediante factorización de los operadores de covarianza asociados, en términos de dichas transformadas, la resolución estable de los problemas de extrapolación y filtrado.

En la práctica, se observa \mathcal{R} y se resuelve el problema de estimación y filtrado para \mathcal{R} en términos de la transformada wavelet generalizada discre-

ta de los datos (ver ecuaciones (4.18) y (4.19)). La interpretación de los resultados en una situación clásica libre de riesgo puede obtenerse mediante integración fraccionaria de \mathcal{R} . Es decir, el proceso ajustado de riesgo puede obtenerse a partir de las siguientes identidades:

$$\log P(t) = \int_{\lambda(\mathbb{R}_+)} |t - s|^{-1+\alpha} \mathcal{R}(s) ds \quad (4.20)$$

$$\log P(t) = \mathcal{F}^{-1} [|\lambda|^{-\alpha} \mathcal{F}(\mathcal{R})(\lambda)] (t), \quad (4.21)$$

para cada $t \in \lambda(\mathbb{R}_+)$, donde \mathcal{F}^{-1} denota la transformada de Fourier inversa y $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es el proceso espectral generalizado asociado con \mathcal{R} (ver Wong y Hajek, 1985). En la práctica $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ se aproxima mediante la transformada de Fourier discreta de los datos.

Líneas abiertas

En este apartado se describen brevemente los puntos fundamentales a desarrollar en la investigación futura en relación con extensiones y nuevos aspectos en conexión con los contenidos considerados en esta tesis. Dichas extensiones se relacionan fundamentalmente con la derivación de resultados sobre estimación de campos aleatorios en los contextos espacio-temporal y multivariante. Específicamente, se plantean los objetivos comentados a continuación.

El primer objetivo consiste en el estudio de los problemas de reconstrucción, extrapolación y filtrado mínimo-cuadráticos asociados a una clase de procesos espacio-temporales con modelos de espacio de estados definidos en términos de ecuaciones en diferencias finitas en el tiempo (tipo ARMA o ARIMA) e integrales en el espacio. La resolución de estos problemas se planteará en términos de técnicas de fusión de estimadores lineales mínimo-cuadráticos espaciales, como extensión de los resultados obtenidos en Ruiz-Medina y Angulo (2002) para procesos espacio-temporales con modelos autorregresivos de interacción espacio-temporal. Se trata asimismo de derivar aproximaciones finito-dimensionales basadas en el desarrollo ortogonal de los procesos involucrados en términos de wavelets espaciales transformadas adaptadas de acuerdo a la dinámica del modelo.

Como segundo objetivo se plantea la extensión de los resultados obtenidos al caso espacio-temporal sobre espacio y tiempo continuos, considerando la correspondiente versión espacio-temporal de la ecuación de Wiener-Hopf, cuya regularización se obtendría mediante el truncamiento de los desarrollos wavelets espacio-temporales definidos a partir de un análisis multirresolución de $L^2(S \times \mathbb{R}^n)$, con $S \subseteq \mathbb{R}_+$.

En tercer lugar, se considera la aplicación a la resolución de problemas de reconstrucción, extrapolación y filtrado asociados a modelos de ecuaciones de evolución que representen fenómenos con características fractales en el espacio y/o en el tiempo.

Por último, consideramos la posible extensión de los resultados al caso espacio-temporal, continuo en tiempo y espacio y multivariante, mediante la teoría de operadores lineales matriciales, resolviendo los problemas de estimación mediante la aproximación finito-dimensional de las expansiones en términos de wavelets espacio-temporales multidimensionales de los procesos involucrados .

Apéndice A

A.1 Espacios de Sobolev

A continuación se presentan las definiciones y resultados fundamentales sobre espacios de Sobolev de orden entero y orden fraccionario (ver, por ejemplo, Triebel, 1978; Dautray y Lions, 1985).

Los espacios de Sobolev se construyen como subespacios de las distribuciones *tempered* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Los duales de estos espacios son, respectivamente, el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ constituido por funciones C^∞ con decaimiento rápido en el infinito y el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en \mathbb{R}^n . La relación entre ellos viene dada por las siguientes inclusiones:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.1})$$

Análogamente, $\mathcal{D}(S)$ representa el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en $S \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathcal{D}'(S)$ el espacio de distribuciones sobre S . Las siguientes definiciones introducen algunos conceptos básicos relacionados con estos espacios de funciones.

Definición 12 (Dautray y Lions, 1985, pp. 474-475)

Restricción de una distribución a un conjunto abierto.

Se consideran dos conjuntos abiertos S y S' de \mathbb{R}^n , con $S \subset S'$, y sea F una distribución sobre S' . La restricción F_S de F a S se define sobre el conjunto de funciones $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ como sigue:

$$\langle F_S, \varphi \rangle = \langle F, \tilde{\varphi} \rangle, \quad (\text{A.2})$$

donde $\tilde{\varphi}$ es la extensión por 0 de φ a S' .

Soporte de una distribución.

Sea F una distribución sobre S , con $S \subseteq \mathbb{R}^n$. El soporte de F , denotado por $\text{supp } F$, es el complemento del mayor conjunto abierto T de S tal que la restricción de F a T es vacía.

Definición 13 Los espacios de Sobolev $H_p^m(\mathbb{R}^n)$ de orden entero, $m \in \mathbb{N}$, sobre L_p , se definen como subespacios de distribuciones dados por las siguientes condiciones:

$$H_p^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : D^k u \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad |k| \leq m, k \in \mathbb{N}^n\}.$$

Nótese que para $m = 0$, $H_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$.

En el caso $p = 2$, denotando $H^m(\mathbb{R}^n) \equiv H_2^m(\mathbb{R}^n)$, se define el producto interno mediante

$$(u, v)_m = \sum_{|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^k u(\mathbf{x}) D^k v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

con la norma asociada

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^k u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

La siguiente proposición proporciona una definición equivalente de los subespacios de distribuciones introducidos en la Definición 13 en términos de la transformada de Fourier. Denotaremos por \hat{u} la transformada de Fourier; si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, \hat{u} se define por dualidad (ver Dautray y Lions, 1985).

Proposición 8 (Dautray y Lions, 1985). Sea m un entero positivo o cero.

Entonces,

(i) $H^m(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide con el subespacio de distribuciones 'tempered' u tales que

$$(1 + |\mathbf{x}|^2)^{m/2} \hat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad (\text{A.3})$$

(iii) La norma $\|u\|_m$ dada en la Definición 13 es equivalente a

$$\|u\|_m = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^m |\hat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.4})$$

(iv) el producto interno asociado con la norma dada en la Definición 13 admite la siguiente expresión equivalente:

$$(u, v)_m = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^m \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) \hat{v}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (\text{A.5})$$

De la proposición anterior se deduce que los espacios introducidos en la Definición 13 y en la Proposición 8 son espacios de Hilbert que representan el mismo espacio de funciones con normas equivalentes. A continuación se introducen los espacios de Sobolev fraccionarios vía la transformada de Fourier.

Definición 14 Para $s \in \mathbb{R}$, $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de distribuciones 'tempered' u tales que

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En el caso en que $p = 2$, se considera el siguiente producto interno:

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi, \quad (\text{A.6})$$

con norma asociada

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Como consecuencia de la Proposición 8, el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s = m \in \mathbb{N}$, coincide con el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ introducido en la Definición 13.

Nota 14 Para $s_1 \geq s_2 \geq 0$, se verifican las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^0(\mathbb{R}^n) \\ &\equiv L_2(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{-s_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{-s_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

En la definición anterior, para órdenes $s < 0$, $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$ define la transformada de Fourier del núcleo I_α del operador integral de Bessel

$\mathcal{I}_s = (I - \Delta)^{s/2}$ de orden s , donde I denota el operador identidad y $-\Delta$ el operador de Laplace negativo (ver Stein, 1970). Dicho núcleo viene dado por

$$I_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-\pi|\mathbf{x}|^2/\delta} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(-n+\alpha)/2} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Los operadores de Bessel y sus inversos definen pues las propiedades de regularidad de las funciones en espacios de Sobolev fraccionarios. Se describen a continuación algunas propiedades fundamentales de dichos operadores.

Proposición 9 (Stein, 1970). Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $I_\alpha(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su transformada de Fourier es,

$$\widehat{I}_\alpha(\mathbf{x}) = (1 + 4\pi^2 |\mathbf{x}|^2)^{-\alpha/2}.$$

Para $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$,

(i) $\mathcal{I}_\alpha(f) = I_\alpha * f$ y $I_\alpha * I_\beta = I_{\alpha+\beta}$, donde $*$ denota la convolución.

(ii) $\mathcal{I}_\alpha \cdot \mathcal{I}_\beta = \mathcal{I}_{\alpha+\beta}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

(iii) El inverso del operador \mathcal{I}_α es el operador $\mathcal{I}_{-\alpha} = (I - \Delta)^{\alpha/2}$, para $\alpha \geq 0$.

Los siguientes espacios, denominados *espacios de potenciales* se definen en términos de potenciales de Bessel:

$$\mathcal{L}_p^\alpha = \mathcal{I}_\alpha(L_p(\mathbb{R}^n)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Estos espacios coinciden con los espacios $\{H_p^s(\mathbb{R}^n) : s \in \mathbb{R}_+\}$ dados en la Definición 13 y en la Proposición 8 (ver Stein, 1970). Los espacios de potenciales son subespacios de $L_p(\mathbb{R}^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

La siguiente proposición recoge algunas propiedades de espacios de potenciales.

Proposición 10 (Stein, 1970). *A partir de la definición de operadores de Bessel, se tienen los siguientes resultados:*

(i) $\mathcal{L}_p^\beta \subseteq \mathcal{L}_p^\alpha$ y $\|f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\beta}$ si $\beta > \alpha$.

(ii) \mathcal{I}_β es un isomorfismo de \mathcal{L}_p^α en $\mathcal{L}_p^{\beta+\alpha}$ si $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

En ocasiones se está interesado en el estudio de espacios de funciones definidas sobre dominios acotados que verifiquen ciertas condiciones de regularidad. En las siguientes definiciones se introducen espacios de Sobolev fraccionarios cuyas funciones poseen soporte contenido en un dominio acotado, o bien, se definen sobre dicho dominio mediante restricción de funciones definidas sobre \mathbb{R}^n .

Definición 15 (Dautray y Lions, 1985, p. 118). *Sea S un dominio abierto acotado con frontera C^∞ de \mathbb{R}^n . Para $s \in \mathbb{R}$, y $1 < p < \infty$, se definen los siguientes espacios:*

$$\overline{H}_p^s(S) = \{u \in H_p^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } u \subseteq \overline{S}\}. \quad (\text{A.8})$$

Considerando de nuevo el caso $p = 2$, se tiene

$$\overline{H}^s(S) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } u \subseteq \overline{S}\}.$$

Definición 16 (Dautray y Lions, 1985, p. 118). *Sea S un dominio abierto y acotado de \mathbb{R}^n con frontera C^∞ . Para $s \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes espacios:*

$$H^s(S) = \{f \in \mathcal{D}'(S) : \exists F \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } f = F_S\},$$

donde F_S denota la restricción de F a S . $H^s(S)$ es un espacio de Hilbert con la norma cociente

$$\|f\|_{H^s(S)} = \inf_{\{F; F_S=f\}} \|F\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Los espacios introducidos en las Definiciones 15 y 16 están relacionados por dualidad (ver Triebel, 1978, p. 332). Específicamente,

$$[\overline{H^s(S)}]^* = H^{-s}(S), \quad s \in \mathbb{R},$$

y

$$[H^{-s}(S)]^* = \left[[\overline{H^s(S)}]^* \right]^* = \overline{H^s(S)},$$

donde H^* denota el espacio de Hilbert dual de H .

Nota 15 Nótese que

$$\overline{H^s(S)} = \overline{\mathcal{D}(S)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}} \subseteq \overline{\mathcal{D}(S)}^{\|\cdot\|_{H^s(S)}} = H^0(S) \subset H^s(S).$$

El espacio cociente $H^s(S)$, $s \in \mathbb{R}$, se puede identificar con el subespacio de $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido por el complemento ortogonal en $H^s(\mathbb{R}^n)$ de la clase de distribuciones $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ cuya restricción a S , u_S , es la distribución nula en $\mathcal{D}'(S)$. Por esta razón, se considera $H^s(S)$ como un subespacio de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Para $s_1 \geq s_2 \geq 0$, se satisfacen las siguientes inclusiones entre espacios de Sobolev definidos sobre un dominio abierto y acotado $S \in \mathbb{R}^n$ con frontera C^∞ :

$$\mathcal{D}(S) \subseteq \overline{H^{s_1}}(S) \subseteq \overline{H^{s_2}}(S) \subseteq L_2(S) \subseteq H^{-s_2}(S) \subseteq H^{-s_1}(S) \subseteq \mathcal{D}'(S). \quad (\text{A.9})$$

A.1.1 Teoremas de Inyección

En esta sección se estudian las propiedades espectrales de los operadores de inclusión que relacionan espacios de Sobolev de órdenes superiores con espacios de Sobolev de órdenes inferiores. Asimismo se estudian las propiedades espectrales de los operadores de inclusión entre espacios de Sobolev fraccionarios y espacios de Hölder-Zygmund. Estos operadores serán fundamentales en la interpretación en sentido fuerte de propiedades de regularidad definidas en sentido débil para funciones en espacios de Sobolev fraccionarios.

Teorema 15 Sean $H^{s_1}(S)$ y $H^{s_2}(S)$ dos espacios de Sobolev fraccionarios sobre un dominio acotado $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, el operador de inclusión

$$id : H^{s_1}(S) \longrightarrow H^{s_2}(S)$$

es compacto para $s_2 \leq s_1$.

Los números de entropía asociados a id satisfacen

$$e_k(id : H^{s_1}(S) \longrightarrow H^{s_2}(S)) \sim k^{\frac{s_1-s_2}{n}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.10})$$

es decir, existen dos constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que

$$c_1 k^{\frac{s_1-s_2}{n}} \leq e_k(id) \leq c_2 k^{\frac{s_1-s_2}{n}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.11})$$

Definición 17 (Triebel, 1978, p. 200) Sea $C^t(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Hölder-Zygmund de orden t , definido como el espacio de funciones sobre \mathbb{R}^n con

derivadas continuas hasta orden $[t]^-$, con la norma

$$\sum_{|\beta| \leq [t]^-} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |D^\beta \phi(\mathbf{x})| + \sum_{|\beta| = [t]^-} \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|D^\beta \phi(\mathbf{x}) - D^\beta \phi(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\{t\}}} < \infty, \quad (\text{A.12})$$

donde $t = [t]^- + \{t\}$ y $[t]^-$ denota la parte entera.

En el siguiente resultado se define el orden de los espacios de Sobolev fraccionarios cuyas funciones son continuas y cuyas propiedades de regularidad se interpretan en sentido fuerte.

Teorema 16 Para $s > n/2$, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^{s-n/2}(\mathbb{R}^n)$ y la distribución delta de Dirac pertenece al espacio dual $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

A.1.2 Teoremas de Inyección sobre dominios fractales

El siguiente teorema recoge las propiedades espectrales de los operadores de inclusión que relacionan entre sí espacios de Sobolev fraccionarios, así como las de los operadores que relacionan espacios de Sobolev fraccionarios con espacios de Hölder-Zygmund sobre dominios fractales, caracterizadas en términos de números de entropía (ver Triebel, 1997, pp. 162-170). Estos operadores serán fundamentales en la derivación e interpretación en sentido fuerte de los resultados obtenidos en el Capítulo 4.

Teorema 17 Sea Γ un d -conjunto fractal compacto en \mathbb{R}^n , con $0 < d < n$.

Para $0 \leq s_2 < s_1 < \infty$,

(i) el operador de inclusión $id : H^{s_1}(\Gamma) \rightarrow H^{s_2}(\Gamma)$ es compacto y existe una constante positiva c tal que para los números de entropía asociados a id , se

tiene la siguiente desigualdad:

$$e_k(id : H^{s_1}(\Gamma) \longrightarrow H^{s_2}(\Gamma)) \leq ck^{-\frac{s_1-s_2}{d}}, \quad k \in \mathbb{N};$$

(ii) si $s_1 - s_2 - d/2 > 0$, entonces, el operador de inclusión $id : H^{s_1}(\Gamma) \longrightarrow C^{s_2}(\Gamma)$ es compacto y existe una constante positiva \tilde{c} tal que, para los números de entropía asociados, se tiene la siguiente desigualdad:

$$e_k(id : H^{s_1}(\Gamma) \longrightarrow C^{s_2}(\Gamma)) \leq \tilde{c}k^{-\frac{s_1-s_2}{d}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

donde $C^{s_2}(\Gamma) = B_{\infty, \infty}^{s_2}(\Gamma)$ representa el espacio de Hölder-Zygmund de orden fraccionario s_2 sobre Γ .

Apéndice B

B.1 Operadores lineales

Se considera la familia de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert H , es decir, la familia de operadores $T : H \rightarrow H$ satisfaciendo:

(i)

$$T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1T(\mathbf{x}_1) + c_2T(\mathbf{x}_2), \quad (\text{B.1})$$

para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$ y cualquier $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

(ii) existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|T(\mathbf{x})\| \leq c \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in H. \quad (\text{B.2})$$

La constante c define la norma de T , denotada por $\|T\|$.

A partir de la ecuación (B.2) se tiene que todo operador lineal y acotado es continuo sobre H .

Proposición 11 *Si T es un operador lineal y continuo sobre H , entonces existe un único operador lineal y continuo T' sobre H tal que $(T\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, T'\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, siendo $\|T'\| = \|T\|$.*

El operador T' definido en la Proposición 11 se denomina operador adjunto de T y verifica las siguientes propiedades:

- (i) $(\lambda T)' = \bar{\lambda} T'$.
- (ii) $(T' \mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, T \mathbf{x})$.
- (iii) $(T')' = T$.
- (iv) Si los operadores T_1, T_2 son lineales y continuos, entonces $(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$.
- (v) $\| T' T \| = \| T T' \| = \| T \|^2$.
- (vi) $(T_1 \circ T_2)' = T_2' \circ T_1'$.

Definición 18 Un operador T se denomina,

- (i) *isométrico*, si $T' T = Id$;
- (ii) *unitario*, si $T' T = T T' = Id$;
- (iii) *autoadjunto*, si $T' = T$;
- (iv) *de proyección*, si $T T = T$ y $T = T'$;
- (v) *normal*, si $(T' T = T T')$.

B.1.1 Propiedades espectrales de operadores autoadjuntos

Una familia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert separable H se denomina una *familia espectral* o *resolución de la identidad* si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $E_\lambda \cdot E_\mu = E_{\inf\{\lambda, \mu\}}$,
- (ii) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda+0} = E_\lambda$,
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = I$.

El siguiente resultado establece la representación espectral de un operador autoadjunto A sobre un espacio de Hilbert separable H , así como la representación espectral de ciertas funciones de tal operador:

Teorema 18 (Ver Dautray y Lions (1985, pp. 119 y 126)) Sea H un espacio de Hilbert separable.

(i) Existe una aplicación biyectiva $\hat{\sigma}$ definida sobre el conjunto de familias espectrales en H con valores en el conjunto de operadores autoadjuntos sobre H .

(ii) Sea A un operador autoadjunto una familia espectral asociada $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ (mediante la función $\hat{\sigma}^{-1}$). Se tiene entonces que el dominio A^n es

$$\mathcal{D}(A^n) = \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}, \quad n \geq 1, \quad (\text{B.3})$$

y, para $x \in \mathcal{D}(A^n)$, $y \in H$,

$$\langle A^n x, y \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d(E_\lambda x, y), \quad (\text{B.4})$$

$$\|A^n x\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} d(E_\lambda x, x). \quad (\text{B.5})$$

(iii) Si $P_n(\lambda)$ es un polinomio de grado n , entonces $P_n(A)$ se define como

$$\langle P_n(A)x, y \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^n), \quad \forall y \in H. \quad (\text{B.6})$$

(iv) Si f es una función continua en \mathbb{R} , entonces

$$\langle f(A)x, y \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f(A)), \quad \forall y \in H. \quad (\text{B.7})$$

Las integrales que aparecen en las ecuaciones (B.3) – (B.7) se interpretan como integrales impropias de Stieltjes respecto a operadores convergentes en sentido fuerte.

El siguiente Teorema proporciona las herramientas de cálculo para funciones de operadores autoadjuntos no necesariamente acotados.

Teorema 19 (Ver Dautray y Lions (1985, p. 140)). Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo separable H .

(i) Si \bar{f} es la función compleja conjugada de f , entonces

$$\mathcal{D}(\bar{f}(A)) = \mathcal{D}(f(A))$$

y, para todo $x, y \in \mathcal{D}(f(A))$,

$$\langle f(A)x, y \rangle_H = \langle x, \bar{f}(A)y \rangle_H.$$

(ii) Si $x \in \mathcal{D}(f(A))$, $y \in \mathcal{D}(g(A))$, entonces

$$\langle f(A)x, g(A)y \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\bar{g}(\lambda)d(E_\lambda x, y).$$

(iii) Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{D}(f(A))$,

$$(\alpha f)(A)x = \alpha f(A)x.$$

Para $x \in \mathcal{D}(f(A)) \cap \mathcal{D}(g(A))$, se tiene

$$(f + g)(A)x = f(A)x + g(A)x.$$

(iv) Si $x \in \mathcal{D}(f(A))$, entonces la condición $f(A)x \in \mathcal{D}(g(A))$ es equivalente a la condición $x \in \mathcal{D}[(g \circ f)(A)]$, siendo $(g \circ f)(\lambda) = g(\lambda)f(\lambda)$, y se tiene

$$[g(A)f(A)]x = (g \circ f)(A)x.$$

(v) Si $f \in \mathcal{M}_0$, siendo \mathcal{M}_0 la clase de funciones medibles con respecto a $d(E_\lambda x, x)$, para todo $x \in H$, y $D(f(A))$ es denso en H , entonces el adjunto $[f(A)]'$ de $f(A)$ satisface

$$[f(A)]' = \bar{f}(A);$$

y $f(A)$ es normal.

(vi) Si $f \neq 0$ c.s. con respecto a las medidas $\{\sigma_x\}_{x \in H}$, donde $\sigma_x = \sigma_{x,x}$ y $\sigma_{x,y} = d(E_\lambda x, y)$, entonces existe $[f(A)]^{-1}$ y

$$[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A).$$

Bajo ciertas condiciones, el operador de proyección E_λ de la familia espectral de un operador autoadjunto A sobre un espacio separable de Hilbert H de funciones se puede representar como un operador integral $E(\cdot, \cdot, \lambda)$, con núcleo definido por (ver Ramm, 1990, pp. 145-148):

$$E(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \xi) d\rho(\xi), \quad (\text{B.8})$$

donde Φ denota el núcleo espectral generalizado y $\rho(\cdot)$ la medida espectral asociada con A . Entonces, para una función medible Borel F , $F(A)$ se puede representar como un operador integral cuyo núcleo viene dado por

$$F(A)(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (\text{B.9})$$

Definición 19 (Triebel, 1997, pp. 191-193) Se considera el operador lineal acotado $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, donde \mathcal{A} y \mathcal{B} representan espacios de Banach. Entonces, los números de entropía $\{e_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de T vienen dados por

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : T(\mathcal{U}_{\mathcal{A}}) \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} (b_j + \varepsilon \mathcal{U}_{\mathcal{B}}) \right\}, \quad (\text{B.10})$$

para algún $b_1, \dots, b_{2^{k-1}} \in \mathcal{B}$, donde \mathcal{U}_H denota la bola unidad en el espacio de Hilbert H .

La desigualdad de Carl (ver Edmunds y Triebel, 1996) conecta las propiedades espectrales de un operador compacto T con las propiedades geométricas de dicho operador, en términos de los números de entropía asociados, y se tiene que $\{e_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ proporciona una secuencia de cotas superiores para los módulos de los autovalores $\{\lambda_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de T , es decir,

$$|\lambda_k(T)| \leq 2^{1/2} e_k(T), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.11})$$

donde $\{\lambda_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifican

$$|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \dots \rightarrow 0.$$

Definición 20 (Triebel, 1997, pp. 191-193) Sea T un operador lineal y acotado sobre $L^2(S)$. Entonces los números de aproximación $\{a_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ vienen dados por

$$a_k(T) = \inf \{ \|T - L\| : L \in \mathcal{L}(L^2(S)), \text{rang } L < k \}, \quad k \in \mathbb{N},$$

donde $\text{rang } L$ es la dimensión del rango de L , y $\mathcal{L}(L^2(S))$ denota el espacio de operadores lineales y acotados sobre $L^2(S)$.

En el caso en que el operador T sea un operador autoadjunto compacto y positivo sobre $L^2(S)$, su secuencia de autovalores $\{\lambda_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$ coincide con su secuencia de números de aproximación $\{a_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

B.1.2 Perturbación de operadores lineales

El siguiente resultado proporciona condiciones para la existencia de la norma acotada del inverso de un operador lineal definido mediante la suma de dos operadores lineales sobre espacios de Banach.

Lema 1 (*Pugachev y Sinitsyn, 1999*) Sean X e Y espacios de Banach. Se considera un operador lineal y acotado A de X en Y que admite un inverso acotado de Y en X . Sea B otro operador lineal de X en Y satisfaciendo

$$\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Entonces, el operador suma $A + B$ admite un inverso acotado $(A + B)^{-1}$ del espacio Y en X y se verifica

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq [\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|]^{-1}.$$

Apéndice C

C.1 Bases de Riesz y aproximación multirresolución

Definición 21 Sea $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable de un espacio de Hilbert H de funciones. Se dice que el sistema $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ constituye una base de Riesz de H si

(i) existen constantes $C' > C > 0$ tales que, para cada secuencia de escalares $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$,

$$C \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k e_k \right\|_H^2 \leq C' \sum_k |c_k|^2, \quad y \quad (\text{C.1})$$

(ii) el espacio vectorial de sumas finitas $\sum_k c_k e_k$ es denso en H .

Si $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Riesz de H , existe una única base de Riesz dual $\{e^k : k \in \mathbb{N}\} \subset H^*$ tal que

$$\phi_m(\phi^n) = \langle \phi_m, (\phi^n)^* \rangle_H = \delta_{m-n}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{C.2})$$

donde $*$ denota dualidad entre espacios de Hilbert. Toda función $f \in H$ se puede representar en sentido débil por

$$f(\psi) = \sum_k f(e^k) e_k(\psi) = \sum_k f^*(e_k) e^k(\psi^*), \quad (\text{C.3})$$

para todo $\psi \in H^*$. En el caso en que $H = L^2(S)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s > n/2$, la ecuación (C.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_m \langle f, \phi^m \rangle_{L^2(S)} \phi_m(\mathbf{x}) \\ &= \sum_m \langle f, \phi_m \rangle_{L^2(S)} \phi^m(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in T, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donde se ha considerado $\psi = \delta_{\mathbf{x}}$, la delta de Dirac en la localización $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

El siguiente concepto de aproximación multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$, como alternativa al análisis de Fourier, proporciona una descripción local y multiescalar de las funciones de este espacio (ver Meyer, 1992). Se trata entonces, de aproximar una función f por una secuencia de funciones f_j lo suficientemente regulares para quedar completamente determinadas al muestrearlas sobre una malla $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}^n$.

Definición 22 Una aproximación multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$ se define como una secuencia creciente de $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de subespacios lineales cerrados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $f(\mathbf{x}) \in V_j$, entonces $f(2\mathbf{x}) \in V_{j+1}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $j \in \mathbb{Z}$.
- (iii) Si $f(\mathbf{x}) \in V_0$, entonces $f(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \in V_0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$.
- (iv) Existe una función $g(\cdot) \in V_0$ tal que la secuencia

$$\{g(\mathbf{x} - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n\}$$

es una base de Riesz de V_0 .

Definición 23 Una aproximación multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es r -regular, con $r \in \mathbb{N}$, si la función $g(\mathbf{x})$ dada en la condición (iv) de la Definición 22 puede elegirse tal que

$$|\partial^\alpha g(\mathbf{x})| \leq C_m (1 + |\mathbf{x}|)^{-m},$$

para cada entero $m \in \mathbb{N}$ y cada vector de índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ verificando que $|\alpha| \leq r$.

La condición de r -regularidad asegura un rápido decrecimiento de la función g y sus derivadas hasta orden r , cuando $\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$, así como la regularidad de estas funciones.

C.2 Bases ortonormales de wavelets

A partir de una base de Riesz $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ se pueden construir bases ortonormales de un espacio de Hilbert H (ver, por ejemplo, Chui, 1992; Daubechies, 1992; Mallat, 1989a; Meyer, 1992). En particular, Meyer (1992) propone la construcción de una base ortonormal mediante un algoritmo de ortogonalización de una base de Riesz. Este método se basa en el cálculo de la matriz de Gramm $G = (g(j, k))_{j, k \in \mathbb{N}}$ definida positiva asociada a la base de Riesz $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, considerando $(g(j, k)) = \langle e_j, e_k \rangle$, y siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en H . A continuación se obtiene la matriz $G^{-1/2}$ cuyos elementos denotaremos por $\gamma(j, k)$, $j, k \in \mathbb{N}$. Entonces, los vectores definidos como

$f_j = \sum_0^\infty \gamma(j, k)e_k$ constituyen una base ortonormal del espacio de Hilbert H .

Un método alternativo para obtener una base ortonormal basado en la transformada de Fourier, descrito en Meyer (1992), parte de una aproximación multirresolución $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que existen dos constantes $c_2 > c_1 > 0$ verificando

$$c_1 \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{g}(\xi + 2\pi k)|^2 \right)^{1/2} \leq c_2; \quad (\text{C.5})$$

entonces, si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{g}(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{g}(\xi + 2\pi k)|^2 \right)^{-1/2}, \quad (\text{C.6})$$

se tiene que $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}^n\}$ es una base ortonormal de V_0 .

Finalmente, mediante un simple cambio de escala, las funciones

$$2^{nj/2} \phi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad (\text{C.7})$$

forman una base ortonormal de V_j .

El espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ se puede aproximar por una secuencia de subespacios cerrados anidados V_j que refleja la aproximación geométrica de \mathbb{R}^n mediante la secuencia anidada de mallas

$$\{\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}\},$$

cuya unión es densa en \mathbb{R}^n .

Sea $\Lambda = \Gamma_j - \{0\}$ y $\Lambda_j = \Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Los conjuntos Λ_j constituyen una partición de Λ ; de hecho, $\Lambda_j = 2^{-j}\Lambda_0$, con $\Lambda_0 = \mathbb{Z}^n + 1/2E$, y E representa

el conjunto de $2^n - 1$ vectores de dimensión n constituidos por ceros y unos, excluyendo la secuencia $(0, 0, \dots, 0)$. Puesto que $\Gamma_j \cap \Lambda_j = \emptyset$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, los conjuntos Λ_j servirán para muestrear el complemento ortogonal W_j de V_j en V_{j+1} , siendo

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Una base de V_{j+1} se construye a partir de una base ortonormal de V_j ,

$$\{\phi_{\theta}, \theta \in \Gamma_j\},$$

dada por (C.7), y una base ortonormal de funciones wavelets de W_j ,

$$\{\psi_{\lambda}, \lambda \in \Lambda_j\},$$

cuya localización, tamaño y regularidad vienen definidas por la posición geométrica de λ y por el entero j para el que $\lambda \in \Lambda_j$. En concreto,

- (i) $\{\psi_{\lambda}\}$ está centrada en λ ; es decir, en la escala 2^{-j} , $\{\psi_{\lambda}(\mathbf{x})\}$ decrece cuando \mathbf{x} se aleja de λ ;
- (ii) las derivadas de $\{\psi_{\lambda}\}$ hasta el orden r tienen la misma velocidad de decrecimiento;
- (iii) para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq r$ y $\lambda \in \Gamma$, se tiene $\int \mathbf{x}^{\alpha} \psi_{\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$;
- (iv) para $\lambda = 2^{-j}\mathbf{k} + 2^{-j-1}\mathbf{e}$, $j \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{e} \in E$, se tiene

$$\psi_{\lambda}(\mathbf{x}) = 2^{nj/2} \psi^{\mathbf{e}}(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}),$$

donde $\psi^{\mathbf{e}}$ denota las wavelets básicas $2^n - 1$ descritas en Meyer (1992);

- (v) la base ortonormal $\{\psi_{\lambda}(\mathbf{x}), \lambda \in \Lambda\}$ induce una descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^n)$, dada por

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m$$

(ver Meyer, 1992).

Asimismo, se han desarrollado diferentes técnicas para derivar bases ortonormales de wavelets a partir de un análisis multirresolución de $L^2(S)$ con $S \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado, (ver, por ejemplo, Cohen *et al.*, 1993; Daubechies, 1992; Meyer, 1992, para el caso unidimensional; Resnikoff y Wells, 1998, para el caso multidimensional).

Bibliografía

- Adams, R.A. (1975). *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- Adler, R.I. (1981). *The Geometry of Random Fields*, John Wiley.
- Alieva, T. y Agullo-López, F. (1998). Diffraction analysis of random fractal fields. *J. Opt. Soc. Amer.* **15**, 669-674.
- Anderson, L., Hall, N., Jawerth, B. y Peters, G. (1993). Wavelets on closed subsets of the real line. En *Recent Advances in Wavelets Analysis* (Schumaker, L.L. y Webb, G., Eds.), Academic Press.
- Angulo, J.M. y Ruiz-Medina, M.D. (1997). On the orthogonal representation of generalized random fields. *Statist. & Prob. Lett.* **31**, 145-153.
- Angulo, J.M. y Ruiz-Medina, M.D. (1998). A series expansion approach to the inverse problem. *J. Appl. Prob.* **35**, 371-382.
- Angulo, J.M. y Ruiz-Medina, M.D. (1999). Multiresolution approximation to the stochastic inverse problem. *Adv. App. Probab.* **31**, 1039-1057.
- Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. y Anh, V.V. (2000). Estimation and filtering of fractional generalized random fields. *J. Austral. Math. Soc.*

A 69, 1-26.

- Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. y Anh, V.V. (2003). Wavelet orthogonal approximation of fractional random fields on bounded domains (Somewhat).
- Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V. y Grecksch, W. (2000). Fractional diffusion and fractional heat equation. *Adv. Appl. Prob.* **32**, 1077-1099.
- Anh, V.V., Gras, F. y Tsui, H.T. (1996). Multifractal description of natural scenes. *Fractals* **4**, 35-43.
- Anh, V.V. y Heyde, C.C. (Eds.) (1999). Special Issue on Long-Range Dependence. *J. Stat. Plann. Infer.* **80**.
- Anh, V.V., Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. y Tieng, Q. (1998). Long-range dependence and second-order intermittency of two-dimensional turbulence. *Environ. Model. Soft.* **13**, 233-238.
- Anh, V.V., Angulo, J.M. y Ruiz-Medina, M.D. (1999). Possible long-range dependence in fractional random fields. *J. Stat. Plan. Infer.* **80**, 95-110.
- Anh, V.V., Grecksch, W., Angulo, J.M. y Ruiz-Medina, M.D. (2000). The Wiener-Hopf integral equation for fractional Riesz-Bessel motion. *J. Austral. Math. Soc.* **42**, 41-54.
- Anh, V.V., Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2000). Covariance factorization and abstract representation of generalized random fields. *Bull.*

Austral. Math. Soc. **62**, 319-334.

Anh, V.V., Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2001). Differential representation and Markov property of generalized random fields. *Stoch. Anal. Appl.* **19**, 481-498.

Anh, V.V. y Leonenko, N. (2002). Renormalization and homogenization of fractional diffusion equations with random data. *Prob. Th. Rel. Fields.* **124**, 381-408.

Arneodo, A., Bacry, E., Jaffard, S. y Muzy, J.F. (1999). Oscillating singularities and fractal functions. *Spline Functions and the Theory of Wavelets*. Proc. Lecture Notes **18** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 315-329.

Barabasi, A.L y Stanley, H.E. (1995). *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press.

Barlow, M.T. (1993a). Random walks, electrical resistance, and nested fractals. *Asymp. Prob. in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals*. *Pitman Res. Notes Math. Ser.* **283**, Longman Sci. Tech., 131-157.

Barlow, M.T. (1993b). Fractals and diffusion-limited aggregation. *Bull. Sci. Math.* **117**, 161-169.

Barlow, M.T. y Bass, R.F. (1992). Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet. *Prob. Th. Rel. Fields* **91**, 307-330.

- Barnsley, M.F. y Hurd, L.P. (1993). *Fractal Image Compression*, A.K. Peters.
- Benassi, A., Jaffard, S. y Roux, D. (1997). Elliptic Gaussian random processes. *Revista Matematica Iberoamericana* **13**, 19-90.
- Beran, J. (1992). Statistical models for data with long-range dependence. *Statist. Science* **7**, 404-427.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and Hall.
- Berizzi, E., Mese, E.D. y Pinelli, G. (1999). One-dimensional fractal model of the sea surface. *IEE Proc. Radar Sonar Nav.* **146**, 55-64.
- Berliner, L.M., Wikle, C.K. y Milliff, R.F. (1999). Multiresolution wavelet analyses in hierarchical Bayesian turbulence models. En *Bayesian inference in wavelet-based models*, (Muller, P. y Vidakovic, B., Eds.), Lecture Notes in Statistics 141, 341-359, Springer-Verlag.
- Bronshstein, I.N. y Semendyayer, K.A. (1985). *Handbook of Mathematics*, Verlag Harri Deutsch, Van Nostrand Reinhold Company.
- Caetano, A.M. (1998). Eigenvalue asymptotics of the Stokes operator for fractal domains. *Proc. London Math. Soc.* **76**, 579-602.
- Calvet, L. y Fisher, A. (2001). Forecasting multifractal volatility. *J. Econometrics* **105**, 27-58.
- Campi, S. (1980). An inverse problem related to the travel time of seismic waves. *Bolletino Un. Mat. Ital. B (5)*, **17**, 661-674.

- Carl, B. (1981). Entropy numbers, s -numbers and eigenvalue problems. *J. Funct. Anal.* **41**, 290-306.
- Carpinteri, A. y Cornetti, P. (2002). A fractional calculus approach to the description of stress and strain localizations in fractal media. *Chaos Solitons Fractals* **13**, 85-94.
- Chen, C., Han, B., Li, J., Shang, T., Zou, J. y Jiang, W. (2001). A new model on the diffusion of small molecule penetrants in dense polymer membranes. *J. Membrane Science* **187**, 109-118.
- Chou, K.F. y Lee, S. (2000). Effect of calcium chloride dihydrate on the optical properties and mass transport of methanol in poly(methyl methacrylate). *Polym. Engin. and Scien.* **40**, 1025-1035.
- Chou, K.C., Willsky, A.S. y Benveniste, A. (1994). Multiscale recursive estimation, data fusion, and regularization. *IEEE Trans. Auto. Control.* **39**, 464-477.
- Christakos, G. (1992). *Random Field Models in Earth Sciences*, Academic Press.
- Christakos, G. (2000). *Modern Spatiotemporal Geostatistics*, Oxford University Press.
- Christakos, G. y Hristopulos, D.T. (1998). *Spatiotemporal Environmental Health Modelling*, Kluwer Academic Publishers.
- Christakos, G., Bogaert, P. y Serre, M. (2002). *Temporal GIS. Advanced Functions for Field-Based Applications*, Springer.

- Chui, C.K. (1992). *An Introduction to Wavelets*, Academic Press.
- Chui, C.K. y Quak, E. (1992). Wavelets on a bounded interval. En *Numerical Methods of Approximation Theory*, Vol. 9 (Braess D. y Schumaker, L.L. Eds.), International Series of Numerical Mathematics, Vol. 105, Birkhäuser.
- Cohen, A., Dahmen, W. y Devore, R. (2000). Multiscale decomposition on bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **352**, 3651-3685.
- Cohen, A., Daubechies, I. y Vial, P. (1994). Wavelets and fast wavelet transforms on the interval. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1**, 54-81.
- Dahmen, W. Prössdorf, S. y Schneider, R. (1993). Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations, II. *Adv. Comput. Math.* **1**, 259-335.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM.
- Dautray, R. y Lions, J.L. (1985). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2, Functional and Variational Methods*, Springer-Verlag.
- Deng, H. y Peng, G. (1999). Eigenvalues for high order elliptic operators in fractal string. *Fractals* **7**, 267-275.
- De Villiers, G. (1992). Statistical inversion methods. En *Inverse Problems in Scattering and Imaging* (Bertero, M. y Pike, E.R., Eds.), pp. 371-392, Adam Hilger.

- Dietrich, C.D. y Newsam, G.N. (1989). A stability analysis of the geostatistical approach to aquifer transmissivity identification, *Stoch. Hydrol. Hydraul.* **3**, 293-316.
- Dobrushin, R.L. y Kusuoka, S. (1993). *Stat. Mech. and Fractals*. Lecture Notes in Math. 1567, Springer-Verlag.
- Donoghue, W.F. (1969). *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press.
- Donoho, D.L. (1995). Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *App. Comp. Harmonic Anal.* **2**, 101-126.
- Donoho, D.L. y Johnstone, I.M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika* **81**, 425-455.
- Donoho, D.L. y Johnstone, I.M. (1995). Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Amer. Statist. Assoc.* **90**, 1200-1224.
- Donoho, D.L. y Johnstone, I.M. (1998). Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Ann. Statist.* **26**, 879-921.
- Donoho, D.L., Johnstone, I.M., Kerkyacharian, G. y Picard, D. (1996). Density estimation by wavelet thresholding. *Ann. Statist.* **24**, 508-539.
- Edmunds, D.E. y Triebel, H. (1996). *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*, Cambridge Univ. Press.

- Edwards, R.E. (1965). *Functional Analysis*, Holt. Rinehart/Winston.
- Ekstrom, M. (1982). Realizable Wiener filtering in two dimensions. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, **30**, 31-40.
- Elliot, F., Horntrop, D.J. y Majda, A.J. (1997). Monte Carlo methods for turbulence tracers with long range and fractal random velocity fields. *Chaos* **7**, 39-48.
- Falconer, K. (1997). *Techniques in Fractal Geometry*, Wiley.
- Farge, M., Hunt, J. y Vassilicos, C. (Eds.) (1993). *Wavelets, Fractals and Fourier Transform: New Developments and New Applications*, Clarendon.
- Farge, M., Kevlahan, N., Perrier V., y Goirand, E. (1996). Wavelets and turbulence. *Proc. IEEE* **84**, 639-669.
- Fernandez-Pascual, R., Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2003a). Wavelet-based functional reconstruction and extrapolation of fractional random fields. *Test* (en prensa).
- Fernandez-Pascual, R., Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2003b). Multiscale estimation of processes related to the fractional Black-Scholes equation. *Computational Statistics* (en prensa).
- Fisher, A., Calvet, L. y Mandelbrot, B. (1997). Multifractality of the Deutschmark/US Dollar exchange rates. *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1165.

- Franklin, J.N. (1970). Well-posed stochastic extension of ill-posed linear problems. *J. Math. Anal. Appl.* **31**, 682-715.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*, Cambridge University Press.
- Gel'fand, I.M. y Vilenkin, N.Y. (1964). *Generalized Functions*, Vol. 4, Academic Press.
- Goldstein, S. (1987). Random walks and diffusion on fractals. En *Percolation Theory and Ergodic Theory of Infinite Particle Systems* (Kesten, H., Ed.), (IMA) Math. Appl. 8 Springer, 121-129.
- Hambly, B. y Jones, O.D. (2000). Modelling transport in disordered media via diffusion on fractals. *Math. Comput. Modelling* **31**, 129-142.
- Hartvig, N.V., Jensen, J.L. y Pedersen, J. (2001). A class of risk neutral densities with heavy tails. *Finance and Stochastics* **5**, 115-128.
- Harville, D.A. (1997). *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer.
- Haslett, J. (1989). Space-time modelling in meteorology: a review. *Bull. I.S.I.* **51**, 229-246.
- Haslett, J. y Raftery, A.E. (1989). Space-time modelling with long-memory dependence: assessing Ireland's wind power resource. *Appl. Stat.* **38**, 1-21.
- Heyde, C.C. (1999). A risky asset model with strong dependence through fractal activity time. *J. Appl. Prob.* **36**, 1234-1239.

- Hilfer, R. (Ed.) (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific.
- Huang, H.C. y Cressie, N. (1996). Spatio-temporal prediction of snow water equivalent using the Kalman filter. *Comput. Stat. Data Anal.* **22**, 159-175.
- Hutson, V. y Pym, J.S. (1980). *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press.
- Innacone, P.M. y Khokha, M. (Eds.) (1996). *Fractal Geometry in Biological Systems*, CRC Press.
- Jaffard, S. y Meyer, Y. (1989). Bases d'ondelettes dans des ouverts de \mathbb{R}^n . *J. Math. Pures Appl.* **68**, 95-108.
- Jawerth, B. y Sweldens, W. (1994). An overview of wavelet based multiresolution analysis. *SIAM Review* **36**, 377-412.
- Jonsson, A. (2000). Dirichlet forms and Brownian motion penetrating fractals. *Potential Anal.* **13**, 69-80.
- Kailath, T.A. (1974). A view of three decades of linear filtering theory. *IEEE Trans. Inform. Th.* **IT-20**, 145-181.
- Kato, T. (1995). *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag.
- Kitanidis, P.K. y Vomvoris, E.G. (1983). A geostatistical approach to the inverse problem for generalized random variables. *Inverse Problems* **5**, 599-612.

- Klingenhöfer, F. y Zähle, M. (1999). Ordinary differential equations with fractal noise. *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**, 1021-1028.
- Kusuoka, S.A. (1987). Diffusion process on a fractal. En *Symposium on Probabilistic Methods in Mathematical Physics, Taniguchi, Katata* (Ito, K. y Ikeda, N., Eds.), Academic Press, 251-274.
- Kusuoka, S.A. (1989). Dirichlet forms on fractals and products of random matrices. *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **25**, 659-680.
- Lapidus, M.L. (1994). Analysis on fractals, Laplacians on self-similar sets, noncommutative geometry and spectral dimensions. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **4**, 137-195.
- Laskin, N. (2000). Fractional market dynamics. *Physica* **287**, 482-492.
- Lehtinen, M.S., Päivärinta, L. y Somersalo, E. (1989). Linear inverse problems for generalized random variables. *Inverse Problems* **5**, 599-612.
- Leonenko, N.N. (1999). *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum*, Kluwer.
- Liptser, R.S., y Shiriyayev, A.N. (1984). *Theory of Martingales*, Springer-Verlag.
- Louis, A.K. (1992). Medical imaging: state of the art and future development. *Inverse Problems*, **8**, 709-738.
- Lubbig, H. (Ed.) (1995). *The Inverse Problem*, Akademie Verlag.

- Luettgen, M.R. y Willsky, A.S. (1994). Multiscale approaches to moving target detection in image sequences. *Optic. Engin.* **33**, 2248-2254.
- Mallat, S.G. (1989a)., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**, 69-87.
- Mallat, S.G. (1989b). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.* **11**, 674-693.
- Mallat, S.G. (1989c). Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig. Proc.* **37**, 2091-2110.
- Mandelbrot, B.B. y Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review* **10**, 422-437.
- Mandelbrot B.B. (1997). *Fractals and Scaling in Finance*, Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B.B., Fisher, A. y Calvet, L. (1997). A multifractal model of asset returns. *Cowles Foundation Discussion Paper*, 1164.
- Mardia, K.V., Goodall, C., Redfern, E.J. y Alonso, F.J. (1998). The Krige Kalman filter. *Test* **7**, 217-287.
- Massopust, P.R. (1994). *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*, Academic Press, Inc.
- Maz'ya, V. (1999). Approximate wavelets and the approximation of pseudodifferential operators. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **6**, 287-313.

- McKean, H.P. (1963). Brownian motion with a several dimension time. *Th. Prob. Appl.* **8**, 335-354.
- Merton, R.C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, 141-183.
- Metzler R. y Krafte J. (2000). The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach. *Physical Reports* **339(1)**, 1-72.
- Metzler, R., Barkai, E. y Klafter, J. (1999). Anomalous transport in disordered systems under the influence of external fields. *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **266**, 343-350.
- Meyer, Y. (1992). *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press.
- Miller, E.L. y Willsky, A.S. (1995). A multiscale approach to sensor fusion and the solution of linear inverse problems. *Appl. Comput. Harmonic Anal.* **2**, 127-147.
- Molchan, G.M. (1967). On some problems concerning Brownian motion in Lévy's sense. *Th. Prob. Appl.* **12**, 682-690.
- Mortola, S. y Peirone, R. (1996). Homogenization of quadratic forms on fractals. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **64**, 117-128.
- Oiwa, N.N. y Goldman, C. (2000). Phylogenetic study of the spatial distribution of protein-coding and control segments in DNA chains. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2396-2399.

- Park, H.W., Choe, J. y Kang, J.M. (2000). Pressure behavior of transport in fractal porous media using a fractional calculus approach. *Energy Sources* **22**, 881-890.
- Peters, E. (1994). *Fractal Market Analysis*, Wiley.
- Pitt, L.D. (1971). A Markov property for Gaussian processes with a multi-dimensional parameter. *Arch. Ration Mech. Anal.* **43**, 367-391.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press.
- Prenter, P.N. y Vogel, C.R. (1985). Stochastic inversion of linear first-kind integral equations I. Continuous theory and the stochastic generalized inverse. *J. Math. Anal. Appl.* **1**, 202-218.
- Ramm, A.G. (1980). *Theory and Applications of Some New Classes of Integral Equations*, Springer-Verlag.
- Ramm, A.G. (1990). *Random Fields Estimation Theory*, Longman.
- Resnikoff, H.L. y Wells R.O. (1998). *Wavelet Analysis. The Scalable Structure of Information*, Springer-Verlag.
- Rocco, A. y West, B. (1999). Fractional calculus and the evolution of fractal phenomena. *Physica* **265**, 535-546.
- Roazanov, Y.A. (1979). Stochastic Markovian fields. En *Developments in Statistics*, Vol. 2, (Krishnaiah, P.R., Ed.), Academic Press, 203-234.
- Roazanov, Y.A. (1982). *Markov Random Fields*, Springer-Verlag.

- Rozanov, Y.A. (1996). *Random Fields and Stochastic Partial Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers.
- Rozovskii, B.L. (1983). *Stochastic Evolution Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (1999). Stochastic multiresolution approach to the inverse problem for image sequences. En *Proceedings in Spatial Temporal Modelling and its Applications* (Mardia, K.V., Aykroyd, R.G. y Dryden, I.L., Eds.), pp. 57-60, Leeds University Press.
- Ruiz-Medina, M.D. y Angulo, J.M. (2002). Spatio-temporal filtering using wavelets. *Stoch. Environm. Res. Risk Assess.* **16**, 241-266.
- Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M y Anh, V.V. (2001). Scaling limit solution of a fractional Burgers equation. *Stoch. Proc. Appl.* **93**, 285-300.
- Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. y Anh, V.V. (2002). Stochastic fractional-order differential models on fractals. *Th. Prob. Math. Stat.* **67**, 130-146.
- Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. y Anh, V.V. (2003a). Fractional generalised random fields on bounded domains. *Stoch. Anal. Appl.* **21**, 465-492.
- Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. y Anh, V.V. (2003b). Fractional-order regularization and wavelet approximation to the inverse estimation problem for random fields. *J. Multiv. Anal.* **85**, 192-216.

- Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V. y Angulo, J.M. (2001). Stochastic fractional-order differential models with fractal boundary conditions. *Stat. Prob. Lett.* **54**, 47-60.
- Saied, E.A. (2000). Anomalous diffusion on fractal objects: additional analytic solutions. *Chaos Solitons Fractals* **11**, 1369-1376.
- Samorodnitsky, G. y Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall.
- Santosa, F. y Symes, W.W. (1998). Computation of Hessian for least-squares solutions of inverse problems of reflection seismology. *Inverse Problems* **4**, 211-233.
- Schwartz, L. (1966). *Théorie des Distributions*, Hermann.
- Shlesinger, M.F., Zaslavsky, G.M. y Frisch, U. (Eds.) (1995). *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Lecture Notes in Physics, Vol. 450, Springer.
- Singer, P. y Zajdler, P. (1999). Self-affine fractal functions and wavelet series. *J. Math. Anal. Appl.* **240**, 518-551.
- Stanislavsky, (2003). Black-Scholes model under subordination. *Physica* **318**, 469-474.
- Steeb, W.H. (1998). *Hilbert Spaces, Wavelets, Generalised Functions and Modern Quantum Mechanics*, Kluwer Academic Publishers.
- Stein, E.M. (1970). *Singular Integrals and Differential Properties of Functions*, Princeton University Press.

- Stroock, D.W., y Varadhan, S.R.S. (1979). *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag.
- Sun, N.Z. (1994). Inverse problems in groundwater modeling. En *Theory and applications of transport in porous media*, Kluwer Academic Publishers.
- Trampert, J., Leveque, J.J. y Cara, M. (1992). Inverse problems in seismology. En *Inverse Problems in Scattering and Imaging* (Bertero, M. y Pike, E.R., Eds.), 345-369, Adam Hilger.
- Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Publishing Co.
- Triebel, H. (1997). *Fractals and Spectra*, Birkhauser.
- Tzafestas, S.G. y Nightingale, J.M. (1968). Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed-parameter systems. *Proc. IEE* **115**, 1207-1212.
- Yamaguti, M., Hata, M. y Kigami, J. (1997). *Mathematics of Fractals* (Translation of Mathematical Monographs, 167). American Mathematical Society, Providence, RI.
- Weaver, J.B., Yansun, X., Healy, D.M. y Cromwell, L.D. (1991). Filtering noise from images with wavelet transform. *Magnetic Resonance in Medicine* **24**, 288-295.
- Wang, Z. (2000). Anomalous diffusion in fractal porous medium. *Appl. Math. Mech.* **21**, 1145-1152.

- Wikle, K. y Cressie, N. (1999). A dimension-reduction approach to space-time Kalman filtering. *Biometrika* **86**, 815-829.
- Wong, E. y Hajek, B. (1985). *Stochastic Processes in Engineering Systems*, Springer-Verlag.
- Wornell, G.W. (1990). A Karhunen-Loève-like expansion for $1/f$ processes via wavelets. *IEEE Trans. Inf. Th.* **36**, 859-861.
- Yanovsky, V.V., Chechkin, A.V., Schertzer, D. y Tur, A.V. (2000). Levy anomalous diffusion and fractional Fokker Planck equation. *Physica A. Statistical Mechanic and Applications* **282**, 13-34.
- Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*, Springer-Verlag.
- Zähle, M. (1998). Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I. *Prob. Th. Rel. Fields* **111**, 333-374.
- Zähle, M. (2001). Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus II. *Math. Nachr.* **225**, 145-183.
- Zariphopoulou, T. (1997). A solution to valuation with unhedgeable risks. *Finance and Stochastics* **5**, 61-82.
- Zhang, J. y Walter, G. (1994). A wavelet-based KL-like expansion for wide-sense stationary random processes. *IEEE Trans. Signal Proc.* **42**, 1737-1744.