

5/163

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias.
Fecha ...12/05/00...
ENTRADA NUM. ...1729...

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
DOCUMENTOS
Copia GRANADA

CURVAS CRÍTICAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS
Y LORENTZIANAS CON BORDE

Tesis doctoral

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 613375775
Nº Copia 215579116



Rossella Bartolo
Granada, 2000

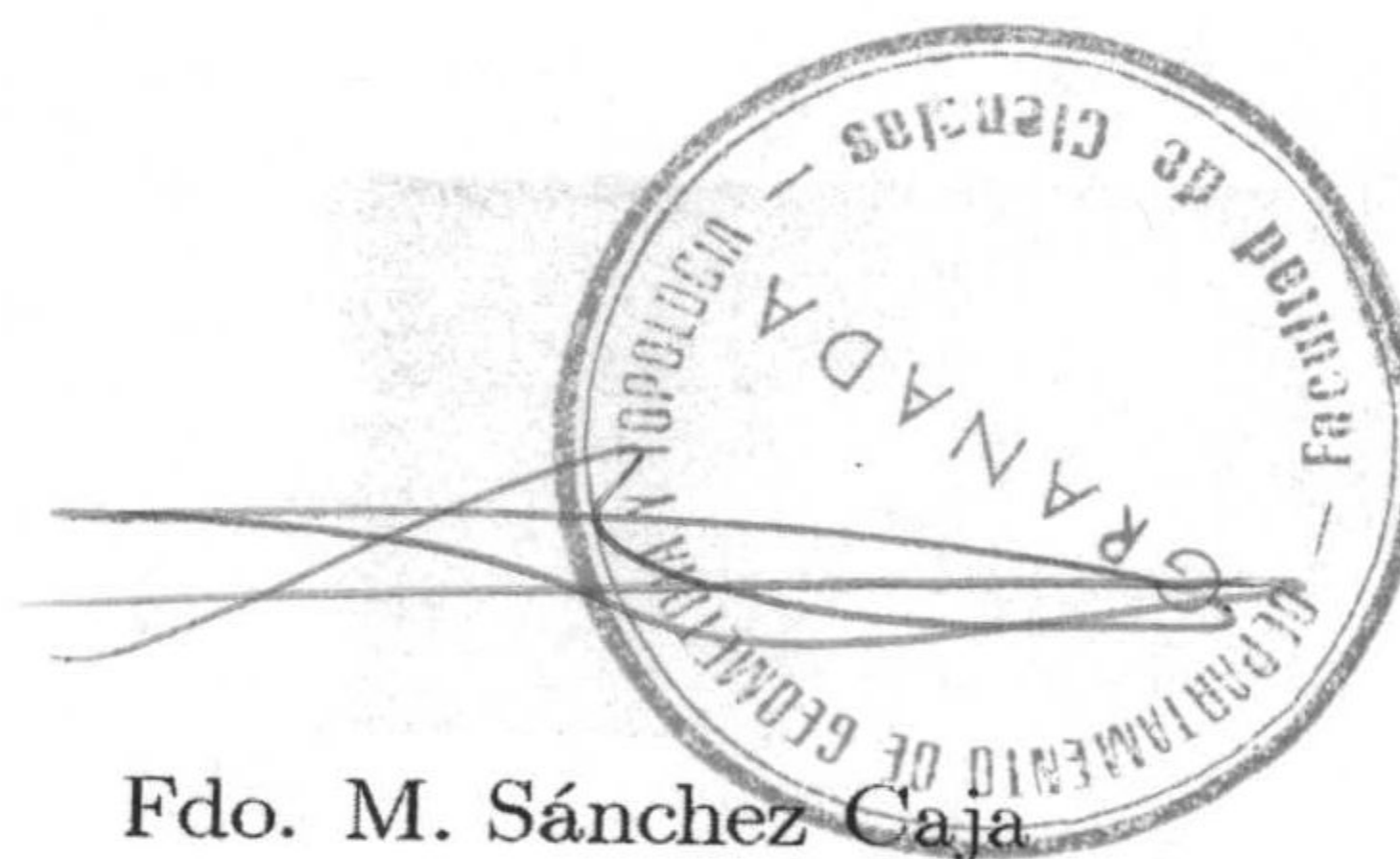


CURVAS CRÍTICAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS Y LORENTZIANAS CON BORDE

Rossella Bartolo

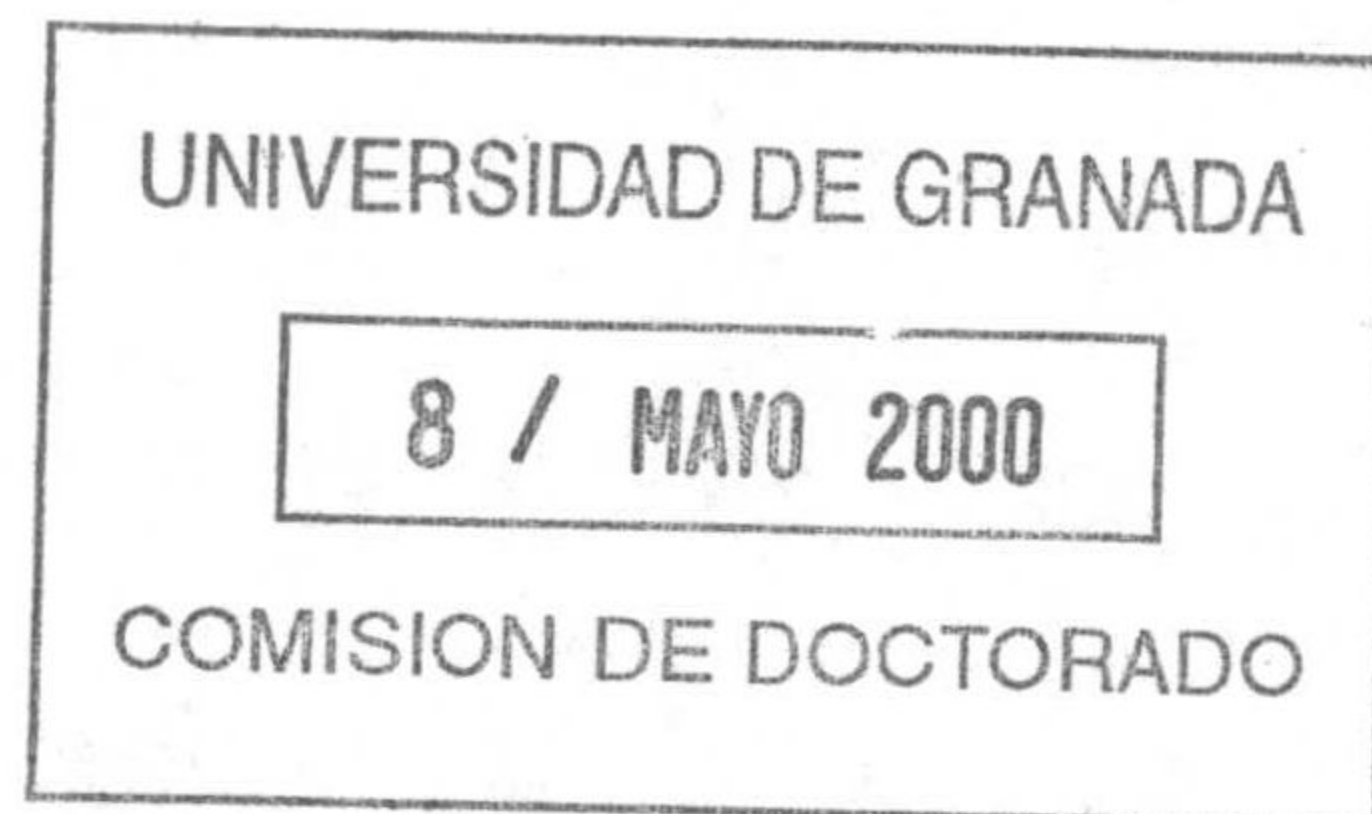
Tesis Doctoral realizada por D^a Rossella Bartolo, licenciada en Matemáticas por la Universidad de Bari, dentro del Programa de Doctorado "Matemáticas" de la Universidad de Granada, y presentada en el Departamento de Geometría y Topología de esta Universidad, bajo la dirección de los Profesores Dr. D. Donato Fortunato, Catedrático (*professore ordinario*) del Dipartimento Interuniversitario di Matematica dell' Università di Bari y Dr. D. Miguel Sánchez Caja, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

V^o. B^o. Los Directores



La Aspirante al Grado de Doctora

Fdo. Rossella Bartolo



Granada, 2000

Agradecimientos

Quiero agradecer de forma muy especial a los Profesores Donato Fortunato y Miguel Sánchez Caja todas las oportunidades, ayuda y explicaciones que me han ofrecido, sin las cuales no hubiese podido realizar este trabajo. También les quiero sinceramente agradecer el interés, la paciencia y apoyo que me han mostrado en todo momento.

Reconozco mi gratitud al Profesor Alfonso Romero Sarabia por su impagable hospitalidad y ayuda, sin la cual no hubiese podido asistir a los cursos de doctorado.

Asimismo, agradezco al Director y a todo los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada por su hospitalidad, paciencia y apoyo; a la Universidad de Bari, al C.N.R. y al Grupo de Investigación FQM 0203 financiado por la Junta de Andalucía por el apoyo económico de su becas.

Por último agradezco afectuosamente a Valeria por transformar el día a día en unos momentos muy agradables; a Ana, Mari Paz y todos los otros amigos españoles por hacer de mi estancia en Granada algo realmente inolvidable; a Enzo, Gary, Giuliano y Nicoletta por su cariñosa asistencia lingüística e informática; a mi madre, Delia, Beppe, Marcello, Davide y mis amigos de toda la vida por su afectuosa "afición"; a Black, Jane y Gigi por su paciencia.

Dedico esta tesis a la memoria de mi padre.

Índice General

I	Introducción	4
1	Resumen de los resultados	5
1.1	El caso riemanniano	5
1.2	El caso lorentziano	8
2	El entramado funcional	11
2.1	Variedades semi-riemannianas	11
2.2	La variedad de Sobolev $H^1(I, \mathcal{M})$	16
2.3	La condición de Palais-Smale y un teorema de mínimo	19
2.4	La categoría de Ljusternik-Schnirelman	20
2.5	Teoría de Morse y un teorema abstracto de puntos críticos	22
2.6	Problemas variacionales sobre variedades de Riemann	24
2.6.1	Geodésicas que unen dos puntos	25
2.6.2	Geodésicas cerradas	26
2.6.3	El teorema del índice	27
2.6.4	Trayectorias bajo un potencial	28
II	El caso riemanniano	30
3	Conexión geodésica	31
3.1	El borde	31
3.2	Exposición de los resultados	35
3.3	Demostración del Teorema 3.2.1. Consecuencias	38
3.4	Demostración de los Teoremas 3.2.2 y 3.2.6	41
3.5	Aplicaciones	54
4	Geodésicas cerradas y trayectorias periódicas	57
4.1	Preliminares	58
4.2	Resultados	59
4.3	Demostración del Teorema 4.2.1	61
4.4	Demostración del Corolario 4.2.3 y del Teorema 4.2.4	69

5	Teoría de Morse para trayectorias	72
5.1	Exposición de los resultados	72
5.2	Demostración del Teorema 5.1.2	74
 III El caso lorentziano		 84
6	El borde de un espacio-tiempo estacionario	85
6.1	Definiciones y ejemplos	85
6.2	El borde de una variedad lorentziana estática	91
6.3	Demostración de los Teoremas 6.2.1 y 6.2.3	93
6.4	Demostración del Teorema 6.2.6	97
6.5	Geodésicas con energía prefijada	98
6.6	Un resumen sobre la conexión geodésica	100
6.7	Apéndice	103
7	Trayectorias periódicas	108
7.1	Preliminares	108
7.2	Exposición de los resultados	109
7.3	Demostración del Teorema 7.2.1	112
7.4	Demostración del Teorema 7.2.2	118
7.5	Demostración del Teorema 7.2.4	122
7.6	Aplicación del Teorema 7.2.4	123
7.7	Apéndice	124
8	Trayectorias bajo un potencial vectorial	127
8.1	Exposición de los resultados	128
8.2	Entramado funcional	130
8.3	Demostración del Teorema 8.1.1	135
8.4	Demostración del Teorema 8.1.6	136
8.5	Demostración del Teorema 8.1.7	141
9	Bibliografía	143

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Resumen de los resultados

A lo largo de esta tesis daremos algunos resultados acerca de varios problemas globales sobre variedades de Riemann y de Lorentz con borde, obtenidos usando métodos variacionales.

En el Capítulo 2, que es introductorio, recordaremos algunas nociones básicas de las Geometrías de Riemann y de Lorentz, así como algunos resultados clásicos de la teoría de puntos críticos, a los cuales haremos referencia a lo largo de este capítulo.

La tesis se divide luego en dos partes, dedicadas, respectivamente, al estudio de los problemas sobre variedades de Riemann (Parte II) y de Lorentz (Parte III). Buena parte de estos problemas será analizada en ambos casos, mas la profunda distinción entre métricas definidas positivas y métricas de índice uno aconseja estudios separados, si bien subrayando, cuando es posible, las analogías existentes.

En las siguientes dos secciones de este capítulo resumiremos los principales resultados contenidos en estas dos partes de la tesis.

1.1 El caso riemanniano

Capítulo 3. Estudiaremos la *conexión geodésica* y la *convexidad* (i.e. conexión por geodésicas minimizantes) de un dominio abierto \mathcal{D} de una variedad de Riemann \mathcal{M} .

El teorema clásico de Hopf–Rinow afirma que la completitud métrica (o equivalentemente geodésica) de una variedad de Riemann es una condición suficiente para su convexidad. Este resultado también se puede obtener con sencillez usando la teoría de puntos críticos clásica. De hecho, las geodésicas que unen dos puntos de \mathcal{M} son los puntos críticos de la acción sobre una variedad de dimensión infinita apropiada, que es completa si \mathcal{M} lo es. Entonces, por el teorema de Weierstrass, las geodésicas minimizantes se obtienen como mínimos de esta acción. Además, también por la completitud de \mathcal{M} , la acción satisface la bien conocida condición de Palais–Smale (Definición 2.3.4), por lo que pueden aplicarse tanto la Teoría de Morse como la Teoría de Ljusternik–Schnirelman. En particular, gracias a un resultado de Faddell y Husseini [41], se obtiene como premio extra la existencia de infinitas geodésicas que conectan cualesquiera dos puntos, si \mathcal{M} no es contráctil en sí misma; se extiende así el teorema clásico de Serre

[107] a variedades completas.

Si se quiere estudiar la conexión geodésica de un dominio abierto \mathcal{D} de una variedad de Riemann \mathcal{M} , se necesitan hipótesis ajustadas de convexidad sobre la frontera $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} . Cuando \mathcal{M} es completa y $\partial\mathcal{D}$ es diferenciable, la hipótesis de convexidad es una extensión de la noción de convexidad para espacios euclídeos. Más aún, en este caso, la convexidad del borde es equivalente a la convexidad del dominio ([78], [104]).

Estudiaremos nosotros el caso en que \mathcal{M} no es completa o $\partial\mathcal{D}$ no es diferenciable, obteniendo tres resultados independientes:

- Primero probaremos, con métodos geométricos, la conexión geodésica de un dominio abierto \mathcal{D} con borde no (necesariamente) diferenciable cuando existe una sucesión de dominios abiertos con borde diferenciable y convexo que lo invade (Teorema 3.2.1). Nuestro resultado extiende los de Gordon [64].
- Las hipótesis anteriores no garantizan la convexidad de \mathcal{D} si \mathcal{M} no es completa, como mostraremos con un contraejemplo. No obstante, si \mathcal{M} es completa, demostraremos la convexidad de \mathcal{D} bajo hipótesis incluso más débiles sobre $\partial\mathcal{D}$ (Teorema 3.2.2). De hecho, aun cuando no se mantenga la condición de Palais–Smale, una técnica de penalización introducida en [28] nos permite hallar soluciones aproximadas del problema. Estas soluciones están uniformemente lejos del borde y, mediante un paso al límite, obtenemos una geodésica minimizante, como buscábamos.
- Con una técnica análoga también podemos demostrar la convexidad de dominios abiertos de una variedad no necesariamente completa \mathcal{M} , cuando se imponga una condición más fuerte sobre los bordes de los dominios que invaden \mathcal{D} (Teorema 3.2.6).

Nuestros resultados tienen una aplicación inmediata, via la métrica de Jacobi, al estudio de *trayectorias* para sistemas lagrangianos (Corolario 3.5.2).

Más aún, cuando \mathcal{D} es no contráctil, se obtienen resultados de multiplicidad para geodésicas y trayectorias usando la categoría de Ljusternik–Schnirelman.

Capítulo 4. Consideraremos aquí el problema de calcular una *geodésica cerrada* (no trivial) en una variedad de Riemann \mathcal{M} .

Con argumentos clásicos, se prueba la existencia de una geodésica cerrada sobre una variedad compacta \mathcal{M} (véase p.ej. [72]). Benci y Giannoni probaron en [30] la existencia de geodésicas cerradas sobre variedades completas (no necesariamente compactas), bajo hipótesis intrínsecas sobre la variedad, mediante un enfoque basado en Teoría de Morse.

Para el estudio de este problema sobre variedades no completas, se imponen hipótesis sobre los bordes más restrictivas que para la conexión geodésica. De hecho, en el caso de borde diferenciable, se ha encontrado una geodésica cerrada bajo las hipótesis de acotación y convexidad estricta (Definición 3.1.9) de $\partial\mathcal{D}$ (véanse [76], [37] y sus referencias).

Introduciremos nosotros la noción de *convexidad cerca del borde* (CCB) para variedades con bordes no regulares, que es más débil que las condiciones en las referencias

anteriores. Podemos expresar esta condición diciendo que existe una familia de hiper-superficies regulares y convexas que se aproximan uniformemente al borde obtenido mediante la completación por sucesiones de Cauchy. Fácilmente se comprueba que las variedades de Riemann para las que este borde es diferenciable, acotado y estrictamente convexo son CCB. Demostramos entonces la existencia de una geodésica cerrada, bajo las mismas hipótesis de [30], pero permitiendo que las variedades sean sólo CCB, Teorema 4.2.1.

Como consecuencia directa de este teorema, demostraremos sobre variedades CCB, via la métrica de Jacobi, un resultado de existencia para trayectorias periódicas con energía prefijada de sistemas lagrangianos (Corolario 4.2.3), mejorando el resultado en [82]. Más aún, nuestras técnicas permiten estudiar orbitas periódicas con periodo fijo de sistemas lagrangianos sobre variedades CCB (Teorema 4.2.4), extendiendo los resultados en [95], [3].

Para la prueba del Teorema 4.2.1, usamos una técnica de penalización que permite superar las dificultades debidas al borde y a la naturaleza periódica del problema. Con argumentos clásicos obtenemos soluciones aproximadas; luego, un control de sus índices de Morse permite encontrar una geodésica cerrada.

El problema de existencia de geodésicas cerradas queda así resuelto con razonable generalidad. Queda abierta para posterior investigación la cuestión de la multiplicidad. Recordemos que, bajo ciertas hipótesis, se ha demostrado la existencia de infinitas geodésicas cerradas geoméricamente distintas sobre algunas variedades compactas, [70], [72]. Sería interesante extender este tipo de resultados a variedades no compactas, posiblemente con borde.

Capítulo 5. Se trata aquí de la existencia, multiplicidad y teoría de Morse para trayectorias de sistemas lagrangianos que unen dos puntos fijos.

Cuando la variedad es completa y el potencial está acotado superiormente, puede aplicarse la teoría clásica de puntos críticos (véase p.ej. [66]).

Obtenemos nosotros la existencia de una trayectoria sobre un dominio abierto \mathcal{D} con borde diferenciable y convexo de una variedad completa, cuando el potencial tiene crecimiento subcuadrático (Teorema 5.1.1). De nuevo, usamos técnicas de penalización. Explotando la diferenciable del borde, consideramos el límite de las soluciones aproximantes, y probamos, gracias a la hipótesis de convexidad sobre $\partial\mathcal{D}$, que este límite no toca la frontera. Demostraremos también las relaciones de Morse para las soluciones de este problema cuando se toman dos puntos no conjugados de \mathcal{D} (Teorema 5.1.2), extendiendo los resultados en [53] para geodésicas.

Queda abierto extender estos resultados a potenciales más generales, cuyo crecimiento no sea subcuadrático.

1.2 El caso lorentziano

Capítulo 6. Se discute el problema de la conexión geodésica en variedades de Lorentz, haciéndose especial hincapié en el papel del borde, y dándose algunas aplicaciones.

Para variedades lorentzianas, el problema de la conexión geodésica es más intrincado que para las riemannianas. Recordemos que no se puede dar una distancia canónicamente asociada a la métrica y, más aún, el término “completitud” se entiende sólo en el sentido de completitud geodésica. En consecuencia, no existe un análogo del teorema de Hopf–Rinow.

Repasaremos en el Capítulo 6 los resultados principales obtenidos en el estudio de esta cuestión (véase p.ej. [21], [16], [29], [42]). En particular, se puede probar con ayuda de métodos variacionales la conexión geodésica de ciertas variedades producto, que constituyen una amplia clase de variedades lorentzianas e incluyen ejemplos físicos relevantes de espacio–tiempos. Las geodésicas que unen dos puntos (“eventos”) fijos de una variedad de Lorentz \mathcal{L} son puntos críticos de la acción sobre una variedad de dimensión infinita, formalmente análoga a la del caso riemanniano. Pero, debido a la indefinición de la métrica, este funcional acción es fuertemente indefinido (esto es, no está acotado ni inferiormente ni superiormente y el índice de Morse de sus puntos críticos es infinito). En el caso más general, se usa el teorema de silla de Rabinowitz [92], si bien para ello es necesario aproximar la acción por funcionales penalizados que satisfagan la condición de Palais–Smale y, más aún, llevar a cabo una aproximación finita dimensional tipo Galerkin. Hay que destacar que queda abierto el problema de aplicar los resultados de “linking” por Benci y Rabinowitz [32] dado que el gradiente de la acción no es una perturbación compacta de la identidad.

Sin embargo, cuando se consideran variedades lorentzianas estacionarias (estándar), es posible un enfoque diferente. De hecho, Benci, Fortunato y Giannoni [27] probaron un principio variacional por el cual la conexión geodésica es equivalente a la búsqueda de puntos críticos de un funcional que está acotado inferiormente. Entonces este problema pasa a ser análogo al del caso riemanniano. Bajo hipótesis convenientes de convexidad, la conexión geodésica también se ha probado para el caso de subconjuntos abiertos de variedades estacionarias ([25], [28], [51]), en particular para algunas regiones de los espacio–tiempos de Schwarzschild, Reissner–Nördstrom y Kerr.

En el Capítulo 6 estudiaremos las diferentes nociones de convexidad para un subconjunto abierto S de una variedad de Lorentz. Debido a la tripartición causal de los vectores tangentes, también se estudian las versiones causales de la convexidad. Nos centraremos principalmente en el caso de variedades estáticas, que son un caso particular de las estacionarias. En estas variedades se pueden dar resultados muy precisos gracias a un resultado de Sánchez [102], que proporciona una correspondencia entre geodésicas lorentzianas y soluciones de sistemas lagrangianos sobre variedades lorentzianas estáticas. Esta correspondencia nos permite caracterizar la convexidad de un subconjunto abierto S en términos de métricas de Jacobi (Teorema 6.2.1) gracias a lo cual:

- Extendemos a variedades lorentzianas estáticas una equivalencia, probada en el caso riemanniano en [47], entre dos diferentes nociones de convexidad causal para ∂S (Teorema 6.2.4); ello se extiende en gran parte al caso estacionario.
- Demostramos una condición necesaria y suficiente para la existencia de geodésicas de energía fija E que unen un evento y una recta de una variedad lorentziana

estática con borde (Teorema 6.5.1). Esto mejora resultados anteriores tanto en las hipótesis generales como en el rango de variabilidad para E (véase p.ej. [39], [48], [55]).

Capítulo 7. Se estudia una clase de geodésicas, las *trayectorias periódicas*, estrechamente relacionadas con las geodésicas cerradas.

En una variedad lorentziana que satisfaga la condición de cronología (véase p.ej. [15]), en particular en las estacionarias (estándar), las únicas geodésicas cerradas que pueden existir son espaciales. La existencia de tales geodésicas cerradas ha sido estudiada con métodos variacionales en variedades estacionarias con componente riemanniana compacta \mathcal{M} en [77] y con \mathcal{M} no necesariamente completa en [38].

Sin embargo, para variedades estacionarias (y también para variedades producto que dependen periódicamente de la variable temporal) tiene sentido considerar otra clase de geodésicas, introducidas por Benci y Fortunato [20], llamadas *trayectorias periódicas*, las cuales son realmente periódicas en la componente espacial y satisfacen una condición de Dirichlet en la temporal. Estas geodésicas pueden presentar cualquier carácter causal, y son, en el caso temporal o luminoso, las versiones relativistas de las trayectorias periódicas (bajo la fuerza gravitatoria) en Mecánica Newtoniana. La existencia y multiplicidad de trayectorias periódicas ha sido estudiada en [20], [27] para $\mathcal{M} = \mathbf{R}^N$, y, con diferentes técnicas, en [27], [67], [79], [102] para \mathcal{M} compacta.

En el Capítulo 7 estudiaremos esta clase de curvas. Señalemos que existen tres parámetros naturalmente asociados a las trayectorias periódicas: la energía (medida por observadores estacionarios), el periodo propio y el periodo universal. Estudiaremos primero la existencia de trayectorias periódicas con periodo universal fijo T (trayectorias T -periódicas) sobre variedades lorentzianas estacionarias, y después la existencia de trayectorias periódicas con energía fija sobre variedades estáticas. Estos casos complementan o extienden los resultados de las referencias supracitadas.

En primer lugar, obtenemos un resultado de existencia para trayectorias T -periódicas cuando la componente riemanniana es completa (Teorema 7.2.1), mejorando el resultado en [79]. Más aún, demostramos un resultado de existencia para trayectorias T -periódicas temporales sobre subconjuntos de variedades estacionarias con borde compacto estrictamente convexo, Teorema 7.2.2. En particular, el resultado se verifica para el espacio-tiempo de Kerr (Corolario 7.2.3).

Como en el caso de la conexión geodésica discutida en el Capítulo 6, se sabe que la búsqueda de trayectorias T -periódicas sobre variedades estacionarias es equivalente al estudio de los puntos críticos de un funcional “riemanniano” que está acotado inferiormente. Usamos entonces técnicas de penalización, que permiten superar los problemas de la no compacidad de la componente riemanniana \mathcal{M} y de la posible presencia del borde. Además, si la variedad es no contráctil, se obtiene la existencia de infinitas trayectorias T -periódicas, en contraste con el caso riemanniano.

Por otra parte, como aplicación de los resultados obtenidos para geodésicas cerradas en variedades riemannianas CCB, damos resultados de existencia y multiplicidad para trayectorias periódicas de energía fija sobre variedades estáticas con borde, Teorema

7.2.4. De hecho, usamos que, por el principio variacional en [102], este problema es equivalente al estudio de las orbitas periódicas de energía fija de un sistema lagrangiano.

Es de señalar que las hipótesis del Teorema 7.2.4 se expresan en términos de métricas de Jacobi de la parte riemanniana, en lugar de en términos de la métrica original. Ello se debe a que el resultado así obtenido es más general y, de hecho, resulta aplicable a los espacio-tiempos de Schwarzschild y Reissner-Nördstrom, cuyas partes espaciales no son CCB con respecto a la métrica original.

Capítulo 8. En este último capítulo se estudian problemas similares a los anteriores, pero sobre curvas críticas que generalizan las geodésicas y que también tienen interés físico.

Benci y Fortunato introdujeron en [24] un principio variacional que permite derivar ecuaciones fundamentales de la física clásica. Cuando se toman en consideración curvas temporales, los puntos críticos del funcional en [24] (el cual generaliza al funcional acción de las geodésicas, y no está acotado) se interpretan como las trayectorias de partículas relativistas sometidas a un campo electromagnético. En el Capítulo 8 estudiaremos el problema de la existencia de puntos críticos de este funcional sobre variedades lorentzianas estacionarias o *trayectorias bajo un potencial vectorial*, cuando el campo vectorial es independiente de la variable temporal. Resolveremos así problemas relativos a conectabilidad y trayectorias periódicas para este funcional, en variedades sin y con borde.

Probamos primero un resultado sobre la existencia de trayectorias bajo un potencial vectorial que unen dos eventos cualesquiera de una variedad estacionaria, cuando la componente riemanniana es completa (Teorema 8.1.1, Observación 8.1.3). De hecho, extendemos el principio variacional en [27] para superar el problema que surge de la indefinición de la métrica. Bajo hipótesis razonables sobre los coeficientes de la métrica y del campo vectorial, se puede usar la teoría clásica de puntos críticos. A continuación, con técnicas de penalización similares a la de Capítulo 5, extendemos este resultado a variedades estacionarias con borde (Observación 8.1.4).

Bajo hipótesis ajustadas en infinito, estudiamos también la existencia de trayectorias de periodo universal fijo bajo un potencial vectorial sobre variedades lorentzianas estáticas con componente riemanniana \mathcal{M} completa (Teorema 8.1.6). Para evitar complicaciones técnicas, no usamos un enfoque intrínseco, sino que, siguiendo [26], suponemos la existencia de una función sobre la parte espacial \mathcal{M} que sea convexa fuera de un subconjunto compacto. Podemos restringirnos entonces a una región acotada de \mathcal{M} , y obtener un resultado de multiplicidad de trayectorias T -periódicas, para T lo suficientemente grande, mediante la teoría de Ljusternik-Schnirelman. Finalmente, damos un resultado análogo para subconjuntos abiertos de variedades estáticas con borde compacto y estrictamente convexo (Teorema 8.1.7). La demostración se basa en técnicas de penalización similares a las usadas para la prueba del Teorema 7.2.2 (este resultado ha sido muy recientemente extendido al caso estacionario, [83]).

Capítulo 2

El entramado funcional

En este capítulo se introduce el ambiente funcional necesario para el resto de la memoria. Puesto que aplicaremos métodos variacionales y teoría de puntos críticos sobre variedades de dimensión infinita a algunos problemas de geometrías de Riemann y Lorentz, también recordamos en la Sección 2.1 algunas nociones básicas sobre la geometría semi-riemanniana. En la Sección 2.2 se describe la variedad de Hilbert $H^1(I, \mathcal{M})$, y luego en las Secciones 2.3, 2.4 y 2.5 se enuncian algunos teoremas abstractos de puntos críticos. Finalmente, en la Sección 2.6, definiremos algunos funcionales regulares sobre $H^1(I, \mathcal{M})$ y presentaremos los mayores problemas variacionales que serán el punto de inicio de esta tesis. Para más demostraciones y detalles remitimos a [78] y sus referencias.

2.1 Variedades semi-riemannianas

El par (\mathcal{N}, g) se llamará variedad semi-riemanniana si \mathcal{N} es una variedad conexa, regular (\mathcal{C}^∞ o, al menos, \mathcal{C}^3) con $\dim \mathcal{N} \geq 2$ y g es una *métrica semi-riemanniana* sobre \mathcal{N} , esto es, g es un campo de tensores simétrico, regular, dos veces covariante, tal que para cada $p \in \mathcal{N}$ la forma bilineal $g(p)[\cdot, \cdot]$ inducida sobre $T_p \mathcal{N}$ no sea degenerada. Como la variedad es conexa y g es regular, el número $\nu(g)$ de los valores propios negativos de $g(p)[\cdot, \cdot]$ es independiente de p y se le llamará el *índice* de la métrica g . Cuando $\nu(g) = 0$, (\mathcal{N}, g) es una variedad riemanniana, cuando $\nu(g) = 1$, (\mathcal{N}, g) es una variedad de Lorentz y a sus puntos se les llamarán *eventos*. La estructura de una métrica de Lorentz es más rica de una riemanniana; si (\mathcal{N}, g) es una variedad de Lorentz y $p \in \mathcal{N}$, un vector $v \in T_p \mathcal{N}$ es

$$\begin{cases} \textit{temporal} & \text{si } g(p)[v, v] < 0, \\ \textit{luminoso} & \text{si } g(p)[v, v] = 0, v \neq 0, \\ \textit{espacial} & \text{si } g(p)[v, v] > 0 \text{ ó } v = 0. \end{cases}$$

Tal tripartición se llama *carácter causal*, terminología esta que proviene de la Relatividad General. Los vectores luminosos de $T_p \mathcal{N}$ se agrupan en dos conos, y a una elección continua de uno de estos conos para cada $p \in \mathcal{N}$ se le llama orientación temporal; un

espacio-tiempo es una variedad de Lorentz dotada de una orientación temporal, véase [86], [94]. Los espacio-tiempos de dimensión cuatro son los modelos matemáticos de la Relatividad General.

Ejemplo 2.1.1 El ejemplo más sencillo de variedad semi-riemanniana es \mathbf{R}^N con el producto escalar canónico de índice ν , con $\nu \in \{0, \dots, N\}$

$$\langle v, w \rangle_{N,\nu} = v_1 w_1 + \dots + v_{N-\nu} w_{N-\nu} - \dots - v_N w_N \quad \forall y \in \mathbf{R}^N, v, w \in T_y \mathbf{R}^N \equiv \mathbf{R}^N.$$

El espacio-tiempo de Minkowski es $(\mathbf{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{4,1})$ el cual se toma como espacio modelo de la Relatividad Especial, que describe situaciones en las cuales los efectos gravitacionales son irrelevantes.

Toda métrica semi-riemanniana g tiene naturalmente asociada su conexión de Levi-Civita $D^g = D$ (caracterizada por ser simétrica y paralelizar g), véase p.ej. [86, Chapter 3 Theorem 11]. Recordemos que una *geodésica* es una curva regular $\gamma : J \rightarrow (\mathcal{N}, g)$ tal que

$$D_s \dot{\gamma} = 0 \tag{2.1}$$

donde J es un intervalo real y $D_s \dot{\gamma}$ es la derivada covariante de $\dot{\gamma}$ a lo largo de γ inducida por D . Las geodésicas son las generalizaciones de las rectas de los espacios euclídeos a las variedades semi-riemannianas. Es bien conocido que una reparametrización de una geodésica es también una geodésica si y sólo si el cambio de variable es afín, y que las geodésicas son invariantes por isometrías (esto es, difeomorfismos que preservan el tensor métrico). Veremos en la Sección 2.6 que (2.1) es la ecuación de Euler-Lagrange para la acción. Las geodésicas satisfacen una ley de conservación: para cada geodésica γ existe una constante real E_γ tal que

$$E_\gamma = g(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] \quad \forall s \in J. \tag{2.2}$$

Claramente, si g es una métrica riemanniana, E_γ es positiva; si g es una métrica lorentziana, γ se dice *temporal*, *luminosa* o *espacial* dependiendo del carácter causal de $\dot{\gamma}$ y esta clasificación se llama carácter causal de la geodésica. En espacio-tiempos, las geodésicas temporales representan trayectorias de partículas en caída libre sobre las cuales actúa sólo el campo gravitacional; las geodésicas luminosas representan trayectorias de rayos de luz. Por la interpretación de las geodésicas espaciales nos remitimos a [22]; baste aquí con comentar que resultan útiles en el estudio de la geometría global de una variedad lorentziana, como veremos en la Sección 6.6. De la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales en forma normal, es bien conocido el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2 *Sea (\mathcal{N}, g) una variedad semi-riemanniana. Para cada $p \in \mathcal{N}$ y $v \in T_p \mathcal{N}$ existe un intervalo real abierto J que contiene el origen, y una geodésica γ definida en J tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Además esta geodésica puede ser extendida a una única geodésica maximal.*

La teoría local sobre la existencia de las geodésicas no es suficiente para solucionar problemas globales como la completitud o la conexión geodésica, luego técnicas globales como el Cálculo de Variaciones, que ha dado resultados para la conexión geodésica, son necesarias. Más precisamente podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 2.1.3 Una variedad semi-riemanniana (\mathcal{N}, g) es geodésicamente completa si cada geodésica maximal está definida en todo el eje real.

Definición 2.1.4 Una variedad semi-riemanniana (\mathcal{N}, g) es geodésicamente conexa si para cada par de su puntos existe una geodésica que los conecte.

Por supuesto, la conexión topológica de la variedad no puede garantizar la conexión geodésica. Trivialmente, \mathbf{R}^N con la métrica euclídea es tanto geodésicamente conexo como geodésicamente completo.

Sobre una variedad riemanniana (\mathcal{M}, h) puede definirse una distancia cuya topología asociada concuerda con la inicial; esta propiedad distingue profundamente las métricas riemannianas y lorentzianas.

Para cada curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow (\mathcal{M}, h)$ su longitud se define por

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{h(\gamma)[\dot{\gamma}, \dot{\gamma}]} ds \quad (2.3)$$

donde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Poniendo para cada $p, q \in \mathcal{M}$

$$\Omega_{p,q} = \left\{ \gamma : [a, b] \rightarrow (\mathcal{M}, h) \mid \gamma \text{ es } C^1 \text{ a trozos, } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \right\},$$

que no es vacío por ser \mathcal{M} conexa, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.5 Sea (\mathcal{M}, h) una variedad riemanniana. La distancia $d(p, q)$ entre los puntos $p, q \in \mathcal{M}$ es

$$d(p, q) = \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{p,q} \}. \quad (2.4)$$

Proposición 2.1.6 Sea (\mathcal{M}, h) una variedad riemanniana. La función

$$d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$$

definida por (2.4) verifica las propiedades de una distancia sobre \mathcal{M} , siendo su topología inducida igual a la inicial.

Una variedad riemanniana es *completa* si es un espacio métrico completo con respecto a la distancia inducida por la estructura riemanniana. Antes de recordar una parte del fundamental teorema de Hopf-Rinow, véase p.ej. [86, Chapter 5 Theorem 21], demos la siguiente definición de convexidad¹.

¹La palabra "convexa" se usa de maneras diferentes y no equivalentes en la literatura. A veces se reserva para aquellas variedades donde dos puntos cualesquiera pueden unirse por una *única* geodésica minimizante; para aquéllos que sigan esta convención, un nombre mejor para nuestra variedad podría ser *débilmente convexa*.

Definición 2.1.7 Una variedad riemanniana (M, h) es convexa si cada par p, q de su puntos puede unirse por una geodésica minimizante γ (no necesariamente única), esto es, que verifica $L(\gamma) = d(p, q)$.

Teorema 2.1.8 (Hopf–Rinow) Sea M una variedad riemanniana. Entonces son equivalentes:

(a) M es completa;

(b) M es geodésicamente completa.

Además, si ello se verifica, entonces M es convexa.

Nos remitimos a la Subsección 2.6.1, al Capítulo 3 y a la Sección 6.6 para ulteriores comentarios sobre este tema. Remarquemos aquí solamente que en el caso lorentziano, a causa de la indefinición de la métrica, no sólo no hay una distancia asociada análogamente sino que hay ejemplos de variedades de Lorentz que son geodésicamente completas pero no geodésicamente conexas, como el espacio-tiempo de anti-de Sitter bidimensional, (véase p.ej. [15]). Además la conexión geodésica falla también en algunas variedades lorentzianas compactas, véase p.ej. [97] y su referencias.

Vamos ahora a definir unos operadores diferenciales en cualquier variedad semi-riemanniana (\mathcal{N}, g) que usaremos más adelante, véase [86]. Sea $\mathcal{X}(\mathcal{N})$ el $C^\infty(\mathcal{N})$ -módulo de los campos de vectores regulares sobre \mathcal{N} .

Definición 2.1.9 Sea $F \in C^1(\mathcal{N}, \mathbf{R})$. El gradiente de F , denotado por ∇F , es el único campo de vectores sobre \mathcal{N} tal que

$$X(F) = g(\nabla F, X) \quad \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{N}).$$

Definición 2.1.10 Sea $F \in C^2(\mathcal{N}, \mathbf{R})$. El hessiano de F es la segunda derivada covariante de F , i.e. el campo de tensores regular y simétrico dos veces covariante $H_F = D(DF)$. Para cada $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$

$$H_F(X_1, X_2) = X_1(X_2(F)) - (D_{X_1}X_2)F = g(D_{X_1}(\nabla F), X_2).$$

La siguiente proposición concierne al comportamiento de funciones a lo largo de una curva, véase [78, Proposition 1.7.5].

Proposición 2.1.11 Sea (\mathcal{N}, g) una variedad semi-riemanniana, $F \in C^2(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ y $\gamma : J \rightarrow \mathcal{N}$ una curva regular. Poniendo $h(s) = F(\gamma(s))$ para cada $s \in J$, se tiene

$$h'(s) = g(\gamma(s))[\nabla F(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)]$$

y

$$h''(s) = H_F(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] + g(\gamma(s))[\nabla F(\gamma(s)), D_s \dot{\gamma}(s)]$$

para cada $s \in J$.

En particular, el hessiano de $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ en un punto $p \in \mathcal{N}$ es la forma bilineal simétrica

$$H_F(p) : T_p\mathcal{N} \times T_p\mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

tal que, para cada $v \in T_p\mathcal{N}$,

$$H_F(p)[v, v] = \left. \frac{d^2 F(\gamma(s))}{ds^2} \right|_{s=0}, \quad (2.5)$$

donde γ es la geodésica tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

Sea ahora $\mathcal{B} \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$. La derivada \mathcal{B}' de \mathcal{B} es el operador regular y lineal

$$\mathcal{B}' : \mathcal{X}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{N})$$

definido por

$$\mathcal{B}'(X) = D_X \mathcal{B} \quad \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{N}).$$

Para cada $p \in \mathcal{N}$, \mathcal{B}' define un operador lineal

$$\mathcal{B}'(p) : T_p\mathcal{N} \rightarrow T_p\mathcal{N}$$

llamado derivada de \mathcal{B} en p , tal que para cada $v \in T_p\mathcal{N}$

$$\mathcal{B}'(p)[v] = (D_X \mathcal{B})_p, \quad (2.6)$$

donde X es cualquier campo regular de vectores tal que $X(p) = v$. La segunda derivada \mathcal{B}'' de \mathcal{B} es el operador bilineal asociado a $D(D\mathcal{B})$, esto es

$$\mathcal{B}''(X_1, X_2) = D_{X_1} D_{X_2} \mathcal{B} - D_{D_{X_1} X_2} \mathcal{B}.$$

Para cada $v_1, v_2 \in T_p\mathcal{N}$ podemos poner

$$\mathcal{B}''(p)[v_1, v_2] = \mathcal{B}''(X_1, X_2)(p),$$

donde $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ son tales que $X_1(p) = v_1$, $X_2(p) = v_2$.

Usaremos también la notación $\nabla \mathcal{B} = \mathcal{B}'$ y llamaremos *gradiente* de \mathcal{B} a $\nabla \mathcal{B}$. Formalmente $\nabla \mathcal{B}(p)$ es un campo de endomorfismos, así podemos definir el endomorfismo adjunto $(\nabla \mathcal{B}(p))^T$ mediante la siguiente relación

$$g(\nabla \mathcal{B}(p)[v], w) = g(v, (\nabla \mathcal{B}(p))^T[w]). \quad (2.7)$$

Recordemos que el rotor curl de un campo de vectores regular \mathcal{B} sobre \mathcal{N} es definido por

$$\text{curl } \mathcal{B}(X, Y) = g(D_X \mathcal{B}, Y) - g(D_Y \mathcal{B}, X), \quad (2.8)$$

donde X, Y son campos de vectores regulares sobre \mathcal{N} .

2.2 La variedad de Sobolev $H^1(I, \mathcal{M})$

Recordemos que una subvariedad \mathcal{M} de una variedad $\tilde{\mathcal{N}}$ es un subespacio topológico con una estructura diferenciable, tal que el operador inclusión $j : \mathcal{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ es regular y para cada $p \in \mathcal{N}$ el operador diferencial $j'(p) : T_p\mathcal{N} \rightarrow T_p\tilde{\mathcal{N}}$ es inyectivo. Si en $\tilde{\mathcal{N}}$ hay definida una métrica riemanniana \tilde{h} , supondremos que \mathcal{N} está dotada de la métrica (necesariamente riemanniana) naturalmente inducida h ; si \tilde{h} fuera lorentziana, diremos que \mathcal{N} es una subvariedad lorentziana si h es no degenerada y de índice uno.

Ejemplo 2.2.1 Sea \mathcal{M} una subvariedad del espacio euclídeo $(\mathbf{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Para cada $p \in \mathcal{M}$ se define el operador de proyección ortogonal

$$P(p) : T_p\mathbf{R}^N \rightarrow T_p\mathcal{M}.$$

Es bien conocido que una curva regular $\gamma : J \rightarrow \mathcal{M}$ es una geodésica de la subvariedad \mathcal{M} si y sólo si

$$P(\gamma(s))[\ddot{\gamma}(s)] = 0 \quad \forall s \in J.$$

Desde ahora vamos a suponer que toda variedad riemanniana $(\mathcal{M}, h) \mathcal{C}^3$ es una subvariedad de $(\mathbf{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, para algún N suficientemente grande. De hecho, se tiene el siguiente teorema clásico, véase [84].

Teorema 2.2.2 Sea (\mathcal{M}, h) una variedad riemanniana \mathcal{C}^3 y $n = \dim \mathcal{M}$. Entonces existe un embebimiento isométrico

$$\Psi : (\mathcal{M}, h) \rightarrow (\mathbf{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

donde $N = \frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$.

Sean $I = [0, 1]$ y

$$L^2(I, \mathbf{R}^N) = \left\{ y : I \rightarrow \mathbf{R}^N \mid y \text{ es medible, } \int_0^1 |y|^2 ds < \infty \right\},$$

donde $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Es bien conocido que $L^2(I, \mathbf{R}^N)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(y, w)_2 = \int_0^1 \langle y, w \rangle ds$$

y la norma inducida

$$\|y\|_2^2 = \int_0^1 |y|^2 ds$$

para cada $y, w \in L^2(I, \mathbf{R}^N)$. Introducimos el espacio de Sobolev

$$H^1(I, \mathbf{R}^N) \equiv H^{1,2}(I, \mathbf{R}^N) = \left\{ y \in L^2(I, \mathbf{R}^N) \mid y \text{ es absolutamente continua, } \dot{y} \in L^2(I, \mathbf{R}^N) \right\}.$$

$H^1(I, \mathbf{R}^N)$ es también un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(y, w) = (y, w)_2 + (\dot{y}, \dot{w})_2$$

y la norma inducida

$$\|y\|^2 = \|y\|_2^2 + \|\dot{y}\|_2^2$$

para cada $y, w \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Además consideraremos el espacio

$$H^2(I, \mathbf{R}^N) = \left\{ y \in H^1(I, \mathbf{R}^N) \mid \dot{y} \text{ es absolutamente continua, } \ddot{y} \in L^2(I, \mathbf{R}^N) \right\}.$$

Será relevante el subespacio cerrado de $H^1(I, \mathbf{R}^N)$

$$H_0^{1,2}(I, \mathbf{R}^N) = \left\{ y \in H^1(I, \mathbf{R}^N) \mid y(0) = 0 = y(1) \right\}.$$

Sobre $H_0^{1,2}(I, \mathbf{R}^N)$ se tiene la desigualdad de Poincaré

$$\|y\|_2 \leq \|\dot{y}\|_2, \quad (2.9)$$

por la cual se sigue que la norma $\|\cdot\|_0$ sobre $H_0^{1,2}(I, \mathbf{R}^N)$ definida por

$$\|y\|_0 = \|\dot{y}\|_2$$

es equivalente a $\|\cdot\|$. Es conocido que el conjunto $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^N)$ de las curvas continuas sobre \mathbf{R}^N es un espacio de Banach con respecto a la norma de la convergencia uniforme

$$\|y\|_\infty = \sup \{|y(s)| \mid s \in I\}.$$

Usando el teorema de Ascoli–Arzelá se demuestra que $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ está embebida de forma compacta tanto en $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^N)$ como en $L^2(I, \mathbf{R}^N)$. En particular, cada sucesión acotada en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ tiene una parcial convergente uniformemente en $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^N)$. Siguiendo [88], como \mathcal{M} es una subvariedad de \mathbf{R}^N se puede definir

$$H^1(I, \mathcal{M}) = \left\{ y \in H^1(I, \mathbf{R}^N) \mid y(I) \subset \mathcal{M} \right\},$$

véase Teorema 2.2.2. $H^1(I, \mathcal{M})$ es una variedad de dimensión infinita modelada sobre un espacio de Hilbert $H^1(I, \mathbf{R}^n)$. Se puede demostrar que, para cada $y \in H^1(I, \mathcal{M})$, el espacio tangente a $H^1(I, \mathcal{M})$ viene dado por

$$T_y H^1(I, \mathcal{M}) = \left\{ v \in H^1(I, \mathbf{R}^N) \mid v(s) \in T_{y(s)} \mathcal{M} \text{ para cada } s \in I \right\}.$$

Dado que $H^1(I, \mathcal{M})$ es una subvariedad de $H^1(I, \mathbf{R}^N)$, consideraremos su fibrado tangente $TH^1(I, \mathcal{M})$ con la estructura riemanniana inducida de $H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Merece destacarse que esta estructura riemanniana no depende del embebimiento Ψ dado que depende de manera intrínseca de la métrica sobre \mathcal{M} .

Vamos ahora a introducir dos subvariedades de la variedad de dimensión infinita $H^1(I, \mathcal{M})$ que serán el ambiente de los problemas más importantes de esta memoria. Sean $p, q \in \mathcal{M}$. Poniendo

$$\Omega^1(\mathcal{M}) \equiv \Omega^1(\mathcal{M}, p, q) = \{y \in H^1(I, \mathcal{M}) \mid y(0) = p, y(1) = q\}$$

y

$$\Lambda^1(\mathcal{M}) = \{y \in H^1(I, \mathcal{M}) \mid y(0) = y(1)\}.$$

Una consecuencia del teorema de transversalidad es la proposición siguiente, véase p.ej. [78, Proposition 2.8.4].

Proposición 2.2.3 *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana. $\Omega^1(\mathcal{M})$ y $\Lambda^1(\mathcal{M})$ son subvariedades de $H^1(I, \mathcal{M})$; sus espacios tangentes a una curva y están dados respectivamente por*

$$T_y\Omega^1(\mathcal{M}) = \{v \in T_yH^1(I, \mathcal{M}) \mid v(0) = 0 = v(1)\}$$

y

$$T_y\Lambda^1(\mathcal{M}) = \{v \in T_yH^1(I, \mathcal{M}) \mid v(0) = v(1)\}.$$

Podemos demostrar, véase p.ej. [78, Proposition 2.9.1], que para cada $y \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$ existen $e^1, \dots, e^k \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$, con $k = \text{codim}\mathcal{M}$, tal que $\{e^1(s), \dots, e^k(s)\}$ es una base ortonormal de $T_{y(s)}\mathcal{M}^\perp$ para cada $s \in I$. Para cada $y \in H^1(I, \mathcal{M})$, vamos a considerar los operadores de proyección $P(y), Q(y)$ de $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ sobre $T_yH^1(I, \mathcal{M})$ y $T_yH^1(I, \mathcal{M})^\perp$ definidos respectivamente por

$$P(y)[v] = v - \sum_{i=1}^k \langle v, e^i \rangle e^i \quad (2.10)$$

$$Q(y)[v] = \sum_{i=1}^k \langle v, e^i \rangle e^i. \quad (2.11)$$

Como $P(y)$ y $Q(y)$ definen también los operadores de proyección sobre $L^2(I, \mathbf{R}^N)$, se puede dar la siguiente definición.

Definición 2.2.4 *Sean $y \in H^1(I, \mathcal{M})$ y $v \in T_yH^1(I, \mathcal{M})$. La derivada covariante de v a lo largo de y es $D_s v \in L^2(I, \mathbf{R}^N)$ definida por*

$$D_s v = P(y)[\dot{v}].$$

Nótese que si y y v son regulares, la definición precedente concuerda con la usual de derivada covariante sobre \mathcal{M} . Puesto que la convergencia en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ implica la uniforme, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5 *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana completa. Entonces $H^1(I, \mathcal{M})$, $\Omega^1(\mathcal{M})$ y $\Lambda^1(\mathcal{M})$ son subvariedades completas de $H^1(I, \mathbf{R}^N)$.*

2.3 La condición de Palais–Smale y un teorema de mínimo

Desde ahora \mathcal{H} denotará una variedad de Hilbert \mathcal{C}^2 con una métrica riemanniana. En los siguientes capítulos trataremos funcionales \mathcal{C}^2 acotados inferiormente, de manera que tenga sentido buscar un punto de mínimo, el cual es un punto crítico del funcional.

Definición 2.3.1 Sea $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$. La diferencial $F'(y)$ de F en $y \in \mathcal{H}$ es la forma lineal sobre $T_y\mathcal{H}$ definida por

$$F'(y)[v] = \left. \frac{dF(\gamma(s))}{ds} \right|_{s=0},$$

donde $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathcal{H}$ es una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = y, \dot{\gamma}(0) = v$.

Definición 2.3.2 Sea $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$; $y \in \mathcal{H}$ es un punto crítico de F si

$$F'(y) \equiv 0.$$

El conjunto de los puntos críticos de F se denotará por K_F . Si $y \in \mathcal{H}$ no es un punto crítico, se le llamará regular.

Definición 2.3.3 Sea $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$; $c \in \mathbf{R}$ es un valor crítico de F si

$$\{y \in K_F \mid F(y) = c\} \neq \emptyset.$$

Cuando \mathcal{H} no es compacta existe una hipótesis de compacidad que representa un papel fundamental en el estudio de los puntos críticos. Esta hipótesis (que no es la más general) fue introducida por R.S.Palais y S.Smale en un trabajo pionero de la teoría de Morse de dimensión infinita, véase [91].

Definición 2.3.4 Sea $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$. F satisface la condición de Palais–Smale (PS) si cada sucesión $\{y_m\}$ tal que

$$\{F(y_m)\} \text{ está acotada} \tag{2.12}$$

y

$$\nabla F(y_m) \rightarrow 0 \tag{2.13}$$

contiene una subsecuencia convergente, donde $\nabla F(y)$ denota el gradiente de F en el punto y con respecto a la métrica sobre \mathcal{H} .

A una sucesión que satisface (2.12)–(2.13) se le llama sucesión de Palais–Smale.

Póngase para cada $c \in \mathbf{R}$

$$F^c = \{y \in \mathcal{H} \mid F(y) \leq c\}; \tag{2.14}$$

a F^c se le llamará subnivel de F .

Usando el teorema de deformación, véase [92], el teorema siguiente se puede demostrar.

Teorema 2.3.5 *Sea $F \in C^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$ acotado inferiormente y que satisface (PS). Supongamos que \mathcal{H} es completa o que los subniveles de F son subespacios métricos completos de \mathcal{H} . Entonces F tiene un punto de mínimo.*

Como vamos a trabajar principalmente con funcionales definidos sobre $H^1(I, \mathcal{M})$ o sobre sus subvariedades $\Omega^1(\mathcal{M}), \Lambda^1(\mathcal{M})$, recordemos un resultado útil en estos casos para demostrar la condición (PS) (véase p.ej. [23, Proposition 2.9.1] para la demostración, basada sobre el uso de operadores de proyección).

Proposición 2.3.6 *Supongamos que \mathcal{M} es una subvariedad cerrada de \mathbf{R}^N . Sea $\{y_m\}$ una sucesión en $H^1(I, \mathcal{M})$ tal que*

$$y_m \rightarrow y \quad \text{débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (2.15)$$

Entonces:

- (i) $y \in H^1(I, \mathcal{M})$;
- (ii) existen dos sucesiones $\{\xi_m\}$ y $\{\nu_m\}$ en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ tales que

$$y_m(s) - y(s) = \xi_m(s) + \nu_m(s), \quad (2.16)$$

$$\xi_m(s) \in T_{y_m} H^1(I, \mathcal{M}), \quad (2.17)$$

$$\xi_m \rightarrow 0 \quad \text{débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N), \quad (2.18)$$

$$\nu_m \rightarrow 0 \quad \text{fuertemente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (2.19)$$

Tenemos también el resultado siguiente, véase [23, Lemma 2.2].

Proposición 2.3.7 *Supongamos que \mathcal{M} es una subvariedad cerrada de \mathbf{R}^N . Sean $\{y_m\}$ una sucesión en $H^1(I, \mathcal{M})$ y $y \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$ tales que se mantenga (2.15). Sea $v \in T_y H^1(I, \mathcal{M}) \subset T_y H^1(I, \mathbf{R}^N)$ y póngase, para cada $m \in \mathbf{N}$, $v_m = P(y_m)[v]$. Entonces $\{v_m\}$ tiene una subsucesión débilmente convergente a v en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$.*

2.4 La categoría de Ljusternik–Schnirelman

Para encontrar numerosos puntos críticos de funcionales definidos en una variedad, sus propiedades topológicas deben aprovecharse. En esta sección vamos brevemente a recordar los resultados principales de la teoría de los puntos críticos debida a L.A.Ljusternik y L.Schnirelman y desarrollada por estos autores sobre las variedades compactas de Hilbert, [74], y luego extendida por J.T.Schwartz a variedades arbitrarias de Hilbert, [105], y por R.S.Palais a variedades de Banach, [88].

Recordamos que un subespacio A de un espacio topológico (X, τ) se dice *contráctil* en X si existen un operador continuo $H : I \times A \rightarrow X$ y un $x_0 \in X$ tales que

$$H(0, x) = x, H(1, x) = x_0 \quad \forall x \in A.$$

Vamos ahora a definir un invariante topológico, llamado categoría de Ljusternik–Schnirelman, que da una acotación inferior sobre el conjunto de los puntos críticos de un funcional regular sobre una variedad.

Definición 2.4.1 Sea A un subespacio topológico de \mathcal{H} . La categoría de A en \mathcal{H} , denotada por $\text{cat}_{\mathcal{H}}A$, es el número mínimo de subconjuntos de A cerrados y contráctiles en \mathcal{H} que cubren A (posiblemente ∞). Escribiremos $\text{cat}\mathcal{H} = \text{cat}_{\mathcal{H}}\mathcal{H}$.

Se verifica el siguiente teorema de *min-max*, llamado así porque permite encontrar valores críticos caracterizados por una fórmula de *min-max*, véase [74].

Teorema 2.4.2 Sea $F \in C^1(\mathcal{H}, \mathbf{R})$ un funcional acotado inferiormente que satisface (PS), y supongamos que \mathcal{H} es completa o que los subniveles de F son subespacios métricos completos de \mathcal{H} . Póngase para cada $m \in \mathbf{N}$

$$\Gamma_m = \{A \subset \mathcal{H} \mid \text{cat}_{\mathcal{H}}A \geq m\} \quad (2.20)$$

$$c_m = \inf_{A \in \Gamma_m} \sup_{y \in A} F(y). \quad (2.21)$$

Si Γ_m no está vacío y $c_m \in \mathbf{R}$, entonces c_m es un valor crítico de F .

Aún más, usando el teorema de deformación de Palais y las propiedades de la categoría, puede demostrarse la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3 Bajo las hipótesis del Teorema 2.4.2

$$\text{cat}_{\mathcal{H}}(F^c) < \infty \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

El siguiente resultado fundamental es consecuencia del Teorema 2.4.2 y la Proposición 2.4.3.

Teorema 2.4.4 Bajo las hipótesis del Teorema 2.4.2, F tiene al menos $\text{cat}\mathcal{H}$ puntos críticos. Además, si $\text{cat}\mathcal{H} = \infty$, existe una sucesión $\{y_m\}$ de puntos críticos de F tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(y_m) = \infty.$$

Remitimos a [41] para la demostración del siguiente teorema, que claramente es independiente de la métrica riemanniana.

Teorema 2.4.5 (Fadell–Husseini) Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana no contráctil en sí misma. Entonces para cada $p, q \in \mathcal{M}$ existe una sucesión $\{C_m\}$ de subconjuntos compactos de $\Omega^1(\mathcal{M})$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{cat}_{\Omega^1(\mathcal{M})} C_m = \infty. \quad (2.22)$$

Finalmente, de los Teoremas 2.4.5 y 2.4.4 extraemos la siguiente conclusión.

Teorema 2.4.6 Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana completa no contráctil en sí misma y $F \in C^1(\Omega^1(\mathcal{M}), \mathbf{R})$ un funcional acotado inferiormente y que satisface (PS). Entonces existe una sucesión $\{y_m\}$ de puntos críticos de F tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(y_m) = \infty.$$

Observación 2.4.7 Remarquemos que el Teorema 2.4.5 se mantiene reemplazando $\Omega^1(\mathcal{M})$ por $\Lambda^1(\mathcal{M})$ bajo la hipótesis adicional de que el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$ sea finito o contenga infinitas clases de conjugación.

2.5 Teoría de Morse y un teorema abstracto de puntos críticos

En esta sección vamos brevemente a recordar algunas nociones para explicar los principales resultados de la teoría de Morse clásica. En la Subsección 2.6.3 se recordará una primera aplicación de esta teoría a geodésicas que unen dos puntos de una variedad riemanniana. La teoría de Morse puede también aplicarse al estudio de geodésicas cerradas (véase Subsección 2.6.2), véanse los resultados clásicos en [70], [72], y [30] donde se usan teoremas abstractos de puntos críticos, que nosotros recogemos en el Teorema 2.5.7, debido principalmente a C.Viterbo, [114]. Gracias a este teorema, es posible una aproximación por medio de la teoría de Morse a diferentes tipos de problemas, véanse los Capítulos 4 y 7. En (2.5) se definió el hessiano de una función regular sobre cualquier punto de una variedad semi-riemanniana de dimensión finita. Cuando se trabaja sobre los puntos críticos de una función regular sobre una variedad de Hilbert, la definición de hessiano es formalmente la misma, véase p.ej. [78].

Definición 2.5.1 Sean $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$, $\bar{y} \in K_F$ y

$$H_F(\bar{y}) : T_{\bar{y}}\mathcal{H} \times T_{\bar{y}}\mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R}$$

el Hessiano de F en \bar{y} . El índice (estricto) de Morse $m(\bar{y}, F)$ de F en \bar{y} es la dimensión (posiblemente ∞) de cualquier subespacio maximal de $T_{\bar{y}}\mathcal{H}$ donde la restricción del hessiano $H_F(\bar{y})$ sea definida negativa. Poniendo $n(\bar{y}, F) = \dim \ker H_F(\bar{y})$ el índice aumentado de Morse se define por $m^*(\bar{y}, F) = m(\bar{y}, F) + n(\bar{y}, F)$.

Definición 2.5.2 Sea $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$; $\bar{y} \in K_F$ se llama no degenerado si $n(\bar{y}, F) = 0$. Además F se llama función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Por el teorema de la función implícita es fácil demostrar que cada punto crítico no degenerado está aislado en K_F .

La teoría de Morse estudia las relaciones entre el conjunto K_F de una función de Morse y la topología de la variedad, véase [88], [81]. Es de señalar que se han obtenido algunas extensiones de la Teoría de Morse a funciones cuyos puntos críticos podrían ser degenerados, véase p.ej. [31].

Para cada $q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ sea $H_q(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ el q -ésimo grupo de homología singular con coeficientes en un cuerpo \mathcal{F} . Recordemos que tales grupos de homología singular son topológicamente invariantes y que son los mismos para espacios homotópicamente equivalentes, véase p.ej. [108].

Definición 2.5.3 La dimensión (posiblemente ∞) de $H_q(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ se llama q -ésimo número de Betti y se denotará por $\beta_q(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.

Definición 2.5.4 Sean $F \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$ y $K \subset K_F$. El polinomio de Morse de K es la serie formal definida por

$$i_\lambda(K, F) = \sum_{y \in K} \lambda^{m(y, F)},$$

con el convenio $\lambda^\infty = 0$.

El polinomio de Morse se reduce a un polinomio ordinario cuando K es finito, en particular cuando F es una función de Morse sobre una variedad compacta.

Definición 2.5.5 El polinomio de Poincaré de \mathcal{H} es la serie formal

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{H}) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \lambda^q.$$

Ahora damos una primera generalización de las relaciones de Morse, conseguida usando la condición (PS). Para generalizaciones más potentes, que incluyen debilitaciones sobre la regularidad de la variedad y de la función, referimos a [31].

Teorema 2.5.6 Sea $F \in C^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$ una función de Morse, acotada inferiormente, que satisface (PS), cuyos puntos críticos tengan índice de Morse finito. Supongamos que \mathcal{H} es completa o que los subniveles de F son espacios métricos completos de \mathcal{H} . Entonces existe una serie formal \mathcal{Q}_λ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ tal que

$$i_\lambda(K_F, F) = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{H}) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda.$$

Impondremos a continuación

$$H_q(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \neq \{0\} \tag{2.23}$$

y denotaremos

$$\Gamma_q = \{A \subset \mathcal{H} \mid i_*(H_q(A, \mathcal{F})) \neq \{0\}\}, \tag{2.24}$$

donde i_* es la función inducida en homología por la inclusión $i : A \rightarrow \mathcal{H}$. Nótese que si $F \in C^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$ y fijamos $y \in K_F$, por el teorema de Riesz $H_F(y)$ define el operador lineal

$$L_y : T_y \mathcal{H} \rightarrow T_y \mathcal{H}$$

con la relación

$$\langle L_y(v), w \rangle_y = H_F(y)[v, w].$$

Recordemos que un operador lineal se dice operador de Fredholm de índice 0 si su imagen es cerrada, la dimensiones de su núcleo y del núcleo de su traspuesta son finitas e iguales.

Teorema 2.5.7 Sea $F \in C^2(\mathcal{H}, \mathbf{R})$. Supongamos que

- (i) para cada punto crítico y de F , el hessiano $H_F(y)$ define un operador de Fredholm de índice 0;
- (ii) F está acotada inferiormente y satisface (PS);
- (iii) \mathcal{H} es completa o los subniveles de F son subespacios métricos completos de \mathcal{H} ;
- (iv) existen $q \in \mathbf{N}$ y un cuerpo \mathcal{F} tal que (2.23) se verifica.

Entonces existe un punto crítico \bar{y} de F correspondiente al valor crítico

$$c = \inf_{A \in \Gamma_q} \sup_{y \in A} F(y)$$

y que satisface

$$m(\bar{y}, F) \leq q \leq m^*(\bar{y}, F).$$

Observaciones 2.5.8 (1) Remarquemos que la hipótesis (i) del Teorema 2.5.7 se cumple si F es una función de Morse o si su hessiano es una perturbación compacta del operador identidad. Además, por (ii), $K_F \cap F^c$ (véase (2.14)) es compacto para cada $c \in \mathbf{R}$. La demostración puede verificarse usando los métodos de perturbación de Marino y Prodi, [75].

(2) El valor crítico c encontrado en el Teorema 2.5.7 es finito. En efecto, como la homología singular tiene un soporte compacto (véase p.ej. [108]) y se mantiene (2.23), existe un subconjunto compacto C de \mathcal{H} que pertenece a Γ_q , con lo que $c < \infty$. Obviamente por (ii) tampoco es posible $c = -\infty$.

(3) Remarquemos que, si F no es una función de Morse, el punto crítico encontrado en el Teorema 2.5.7 puede ser degenerado.

Observación 2.5.9 Sea $\Lambda(\mathcal{M})$ el espacio de los lazos libres sobre \mathcal{M} (definido formalmente como $\Lambda^1(\mathcal{M})$, pero permitiendo a cada elemento ser sólo continuo) con la topología compacta-abierta. Si \mathcal{M} es compacta, conexa, simplemente conexa y $\dim \mathcal{M} \geq 2$, se verifica para infinitos $q \in \mathbf{N}$

$$H_q(\Lambda(\mathcal{M}), \mathbf{Q}) \neq \{0\},$$

véase [113]. Nótese que al ser $\Lambda(\mathcal{M})$ y $\Lambda^1(\mathcal{M})$ homotópicamente equivalentes, tienen los mismos grupos de homología.

2.6 Problemas variacionales sobre variedades de Riemann

Usando los *operadores de dos parámetros* sobre una variedad, i.e. funciones regulares $\sigma : J_1 \times J_2 \rightarrow \mathcal{M}$, donde J_1, J_2 son intervalos reales, es posible estudiar la regularidad y calcular las diferenciales de algunos funcionales definidos sobre $H^1(I, \mathcal{M})$. En particular, estudiaremos la acción y recordaremos los resultados de la teoría de Morse para geodésicas sobre una variedad riemanniana. Aquí sólo se presentan los resultados, remitiendo a [78] por la demostración. Previamente recordaremos los siguientes conceptos.

Definición 2.6.1 *Un campo vectorial a lo largo de un operador de dos parámetros σ es una aplicación regular $X : J_1 \times J_2 \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que para cada $(r, s) \in J_1 \times J_2 : X(r, s) \in T_{\sigma(r,s)}\mathcal{M}$.*

De manera estándar se definen las derivadas parciales

$$\partial_r \sigma, \partial_s \sigma$$

(que son campos vectores a lo largo de σ) de un operador de dos parámetros. Recordemos que el tensor de curvatura de D es el operador $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal

$$R : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

tal que para cada $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$

$$R(X, Y, Z) = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z \quad (2.25)$$

y que R induce de manera estándar el operador

$$R_{p(\cdot, \cdot)} : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$$

para cada $p \in \mathcal{M}$. Además se verifica el Lema de Schwartz (gracias a la simetría de la conexión de Levi-Civita):

$$D_r\partial_s\sigma = D_s\partial_r\sigma.$$

Luego, si X es un campo vectorial a lo largo de σ ,

$$D_rD_sX = D_sD_rX + R(\partial_r\sigma, \partial_s\sigma, X).$$

Vamos a considerar la acción

$$f(y) = \int_0^1 \langle \dot{y}, \dot{y} \rangle ds \quad (2.26)$$

sobre $H^1(I, \mathcal{M})$. Este funcional es regular y se puede demostrar (véase [78, Proposition 2.10.6]) que, para cada $y \in H^1(I, \mathcal{M})$, $v \in T_yH^1(I, \mathcal{M})$,

$$f'(y)[v] = \int_0^1 \langle \dot{y}, \dot{v} \rangle ds = \int_0^1 \langle \dot{y}, D_s v \rangle ds, \quad (2.27)$$

véase Definición 2.2.4.

2.6.1 Geodésicas que unen dos puntos

Las geodésicas que unen dos puntos fijados p, q de una variedad riemanniana satisfacen un principio variacional. Considerada la restricción de (2.26) a $\Omega^1(\mathcal{M})$, la integración por partes y un argumento tipo “boot-strap”, demuestran que una curva $y \in \Omega^1(\mathcal{M})$ es un punto crítico de f si y sólo si es una geodésica que une p y q , véase [78, Proposition 2.11.2]. Con este principio variacional, el estudio de la conexión geodésica de una variedad riemanniana es equivalente a encontrar un punto crítico de la acción. Como f está acotado inferiormente y, cuando \mathcal{M} es completa, satisface (PS) (véase [78, Proposition 2.11.4]), del Teorema 2.3.5 se sigue una demostración variacional de la convexidad de \mathcal{M} (Teorema 2.1.8). Con el Teorema 2.4.6 es posible mejorar el teorema de Serre, véase [107], sobre la existencia de infinitas geodésicas que conecten p, q en \mathcal{M} compacta y simplemente conexa; de hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2 *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana completa no contráctil en sí misma. Entonces para cada $p, q \in \mathcal{M}$ existe una sucesión $\{y_m\}$ de geodésicas que los unen tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(y_m) = \infty.$$

Observación 2.6.3 El Teorema 2.6.2 puede considerarse como un resultado de multiplicidad en el sentido de que, como todas las geodésicas están parametrizadas en I y la acción es divergente, las geodésicas obtenidas tienen genéricamente distintas imágenes.

Observación 2.6.4 Hay que destacar que la convexidad de una variedad riemanniana completa sigue del teorema de Weierstrass (véase [109, Theorem 1.2]) para espacios reflexivos dado que f está acotado inferiormente, es coercivo (i.e. $f(y) \rightarrow \infty$ por $\|y\| \rightarrow \infty$) y débilmente semicontinuo inferiormente.

Observación 2.6.5 Teniendo en cuenta los Teoremas 2.1.8 y 2.6.2, nos queda por caracterizar la convexidad y la multiplicidad de las geodésicas que unen dos puntos para una variedad incompleta; esto lo haremos en el Capítulo 3. Por otra parte, el estudio de la conexión geodésica es mucho más difícil en el caso lorentziano. De hecho, la correspondiente acción (cuyo puntos críticos sobre la correspondientes variedades son también geodésicas que unen dos eventos fijados) es fuertemente indefinida. Especialmente no está acotada ni inferior ni superiormente, y sus puntos críticos son puntos de *silla* con índices de Morse infinitos, de modo que los métodos directos del Cálculo de Variaciones no pueden aplicarse. Remitimos a la Sección 6.6 para un desarrollo completo de este problema.

2.6.2 Geodésicas cerradas

Las geodésicas cerradas, o sea las geodésicas y tal que $y(0) = y(1)$ y $\dot{y}(0) = \dot{y}(1)$, satisfacen un principio variacional. De hecho, la búsqueda de geodésicas cerradas equivale a la de los puntos críticos de la acción sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$. Nótese que la acción, que está acotada inferiormente, satisface (PS) sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$ cuando \mathcal{M} es compacta, véase [72, Theorem 1.4.7] (remarquemos que, por la naturaleza periódica del problema, la demostración no se puede llevar a cabo sin la hipótesis de que \mathcal{M} sea acotada), luego por el Teorema 2.3.5 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6.6 *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Entonces existe una geodésica cerrada (no constante) sobre \mathcal{M} .*

Nótese que el punto crítico que encontramos no es una geodésica cerrada trivial (esto es una curva constante) porque podemos aplicar la teoría de la categoría de Ljusternik–Schnirelman (véase la Observación 2.4.7 y [77, Remark 1.8]). Alternativamente, si utilizamos Teoría de Morse, podemos usar el Teorema 2.5.7 y la Observación 2.5.9 (véase Capítulo 4). Es de destacar que este resultado fue demostrado por primera vez en [73] usando un procedimiento de acortamiento de curvas (cuando \mathcal{M} no es simplemente conexa, la existencia de una geodésica cerrada, obtenida con métodos geométricos simples, era ya conocida por Cartan y Hadamard).

Llamaremos a dos geodésicas cerradas geoméricamente distintas si tienen diferentes imágenes. La multiplicidad de geodésicas cerradas sobre variedades riemannianas compactas ha sido estudiada en [70], [72].

Observación 2.6.7 En el Capítulo 4 veremos que, bajo ciertas hipótesis la existencia de una geodésica cerrada ha sido también demostrada para variedades completas en algunas referencias [30] y estudiaremos el caso en que \mathcal{M} no es completa. Remitimos a Observación 7.1.5 para una discusión del mismo problema en variedades de Lorentz.

Además, remarquemos que sobre variedades lorentzianas podemos considerar otra categoría de curvas, llamadas *trayectorias t -periódicas*, que estudiaremos en el Capítulo 7.

2.6.3 El teorema del índice

Recordemos ahora brevemente la teoría de Morse para geodésicas sobre una variedad riemanniana, véanse [81], y Capítulo 4 para ulteriores aplicaciones. El hessiano $H_f(y)$ de la acción sobre una geodésica $y \in \Omega^1(\mathcal{M})$ es

$$H_f(y)[v_1, v_2] = \int_0^1 [\langle D_s v_1, D_s v_2 \rangle - \langle R_{(v_1, \dot{y})} \dot{y}, v_2 \rangle] ds, \quad (2.28)$$

donde $R_{(\cdot, \cdot)}$ es el tensor de curvatura de la métrica riemanniana y $v_1, v_2 \in T_y \Omega^1(\mathcal{M})$. De (2.28) se sigue para el índice de Morse que $m(y, f) < \infty$. Por otra parte con el Teorema 2.5.6 y los comentarios precedentes tenemos que, sobre una variedad riemanniana completa \mathcal{M} , si $p, q \in \mathcal{M}$ son tales que f es un funcional de Morse, existe una serie formal \mathcal{Q}_λ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ satisfaciendo

$$i_\lambda(K_f, f) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{M})) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda.$$

Remitimos a [53, Corollary 1.7] para el caso de que \mathcal{M} no sea completa. A cada geodésica y que une dos puntos dados de una variedad riemanniana se le puede asociar un nuevo índice, llamado *índice geométrico* y denotado por $\mu(y, f)$, véase Definición 2.6.10. Sea y una geodésica que une p y q ; para cada $s \in]0, 1[$ vamos a considerar el funcional

$$f_s(y) = \int_0^s \langle \dot{y}, \dot{y} \rangle dr$$

definido sobre la variedad $\Omega_s^1(\mathcal{M}) = \Omega^1(\mathcal{M}, p, y(s))$. Resulta claro que la restricción y_s de y a $[0, s]$ es un punto crítico de f_s , así $f_s''(y) = H_{f_s}(y_s)$.

Definición 2.6.8 *Un punto $y(s)$, $s \in]0, 1[$, se llama conjugado a p a lo largo de y si es un punto crítico degenerado de f_s , i.e. si existe un $v \in T_{y_s} \Omega_s^1(\mathcal{M})$ no nulo tal que para cada $w \in T_{y_s} \Omega_s^1(\mathcal{M})$*

$$f_s''(y_s)[v, w] = 0.$$

Al campo de vectores v se le llama campo vectorial tangente de Jacobi a lo largo de y_s .

El conjunto de campos vectoriales tangentes de Jacobi a lo largo de y_s es un espacio vectorial, denotado por $\ker f_s''(y_s)$. Por (2.28) se sigue que v es un campo vectorial tangente de Jacobi a lo largo de y_s si y sólo si es un campo de vectores regular a lo largo de y_s y soluciona el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} D_s^2 v + R(v, \dot{y})\dot{y} = 0 \\ v(0) = 0, v(s) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

donde D_s^2 es la segunda derivada covariante. La primera ecuación en (2.29) se llama *ecuación de Jacobi*.

Definición 2.6.9 Sea $y(s)$, con $s \in]0, 1[$, un punto conjugado de p a lo largo de y . La multiplicidad de $y(s)$ es la dimensión de $\ker f''_s(y_s)$.

Definición 2.6.10 El índice geométrico $\mu(y, f)$ de una geodésica y es el número de los puntos conjugados de p a lo largo de y calculados con sus multiplicidades.

El siguiente teorema del índice relaciona el índice geométrico con el de Morse es clásico.

Teorema 2.6.11 Sea y un punto crítico de f . Entonces el índice de Morse geométrico $\mu(y, f)$ es finito y es igual al índice de Morse, o sea

$$m(y, f) = \mu(y, f).$$

Observación 2.6.12 De (2.28), (2.29) se sigue que una geodésica que une p y q es un punto crítico no degenerado de la acción f si y sólo si q es no conjugado a p a lo largo de y .

Definición 2.6.13 Dos puntos p y q son no conjugados si y sólo si son no conjugados a lo largo de todas las geodésicas que los unen.

Observación 2.6.14 Por la Observación 2.6.12 resulta que p y q son no conjugados si y sólo si la acción f es una función de Morse. Usando el teorema de Sard se demuestra que cada par de puntos de \mathcal{M} es no conjugado, salvo un subconjunto de medida cero, véase [81].

Observación 2.6.15 En el caso lorentziano, si la geodésica y es temporal entonces las definiciones de no conjugación, $m(y, f)$ y $\mu(y, f)$ se pueden hacer en una manera formalmente análoga, y se tiene el análogo del Teorema 2.6.11, véase [15, Theorem 10.27]. Esto se puede extender cuando y es luminosa con algunas modificaciones naturales, véase [15, Theorem 10.77], pero para geodésicas espaciales el índice de Morse podría ser infinito. Así, salvo casos muy particulares, el funcional f no es una función de Morse sobre $\Omega^1(\mathcal{L})$. Luego los intentos para obtener un teorema del índice de Morse para ciertas clases de variedades de Lorentz usan funcionales diferentes de f (si bien muy relacionados con el), véase [111], [48], [61], [59], [43].

2.6.4 Trayectorias bajo un potencial

Ahora consideraremos sistemas de Lagrange. Sean p, q dos puntos de una variedad riemanniana \mathcal{M} , $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} D_t \dot{y} + \nabla_y V(y, t) = 0 \\ y(0) = p, y(1) = q \end{cases} \quad (2.30)$$

donde $\nabla_y V(y, t)$ es el gradiente riemanniano respecto a la variable y de V en $(y(t), t)$. Las soluciones y de (2.30) son las trayectorias que unen p, q bajo la acción del campo $-\nabla_y V(y, t)$. Cuando V depende sólo de y el problema es autónomo y tiene también sentido buscar trayectorias de energía fija $E (= \frac{1}{2} \langle \dot{y}, \dot{y} \rangle + V(y))$.

Se puede demostrar que estas trayectorias satisfacen un principio variacional; precisamente una curva $y \in \Omega^1(\mathcal{M})$ es una trayectoria si y sólo si es un punto crítico del funcional

$$\mathcal{I}(y) = f(y) - l(y) \quad (2.31)$$

donde l es el *funcional potencial*

$$l(y) = \int_0^1 V(y, t) dt, \quad (2.32)$$

véase [66, Proposition 4.2.2]. Nótese que también l es regular y que, para cada $y \in H^1(I, \mathcal{M})$, $v \in T_y H^1(I, \mathcal{M})$,

$$l'(y)[v] = \int_0^1 \langle \nabla_y V(y, t), v \rangle dt, \quad (2.33)$$

véase [66, Proposition 1.11.7]. Si V está acotado inferiormente, el funcional \mathcal{I} está acotado inferiormente y satisface (PS), véase [65], [66, Proposition 4.2.2]. Así, del Teorema 2.3.5 se sigue el siguiente teorema.

Teorema 2.6.16 *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana completa y sea $V \in C^1(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ acotado inferiormente. Entonces para cada $p, q \in \mathcal{M}$ existe una trayectoria que une p, q .*

Observación 2.6.17 Si \mathcal{M} es una variedad riemanniana completa y no contráctil en sí misma, podemos extender el Teorema 2.6.2 a trayectorias bajo un potencial. Más aún, el Teorema 2.6.16 ha sido extendido en [13], bajo ciertas hipótesis, a variedades no completas cuando V tiene un crecimiento subcuadrático (Teorema 5.1.1), véase también el Corolario 3.5.2 por el caso cuando (2.30) es un sistema autónomo.

Nótese que la noción de punto conjugado dada para f se puede extender ahora de manera natural, véase también el Capítulo 5. De hecho, si $y \in \Omega^1(\mathcal{M})$ es un punto crítico de \mathcal{I} , el hessiano de \mathcal{I} en y es

$$H_{\mathcal{I}}(y)[v, v] = \int_0^1 \langle D_t v, D_t v \rangle dt - \int_0^1 \langle R_{(v, \dot{y})} \dot{y}, v \rangle dt - \int_0^1 H_V(y, t)[v, v] dt, \quad (2.34)$$

para cada $v \in T_x \Omega^1(\mathcal{M})$, donde $H_V(y, t)$ es el hessiano de V en $(y(t), t)$. De (2.34) se sigue que el operador lineal sobre $T_y \Omega^1(\mathcal{M})$ asociado a $\mathcal{I}(y)$ es un operador de Fredholm de índice 0 y $m(y, \mathcal{I}) < \infty$, véase [66, Proposition 5.4.9].

Con la misma notación de antes, solo que reemplazando f_s por \mathcal{I}_t y el sistema (2.29) por

$$\begin{cases} D_t^2 v + R_{(v, \dot{y})} \dot{y} + H_V(y, t)v = 0 \\ v(0) = 0, v(t) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

es posible extender la noción de punto conjugado a lo largo de una geodésica, y de índice geométrico. También el Teorema 2.6.11 se mantiene. Remitimos al Capítulo 5 para el estudio de una teoría de Morse para el funcional \mathcal{I} cuando la variedad no es completa.

Observación 2.6.18 En el Capítulo 8 estudiaremos otro tipo de partículas aceleradas, precisamente trayectorias cuya aceleración deriva de un potencial vectorial.

Parte II

El caso riemanniano

Capítulo 3

Conexión geodésica

En este capítulo discutiremos el problema de la conexión geodésica de subconjuntos de variedades riemannianas, véase la Observación 2.6.5. En particular, bajo hipótesis ajustadas, demostraremos la conexión geodésica de un dominio abierto (i.e. subconjunto abierto y conexo) \mathcal{D} de una variedad de Riemann \mathcal{M} ; además, en los casos más importantes demostraremos que \mathcal{D} es convexo, véase la Definición 2.1.7. Como fue subrayado por Gordon [64], este problema no sólo es importante en sí mismo, sino también por su relación, via la métrica de Jacobi, con el problema de conectar dos puntos mediante una trayectoria de energía fija de un sistema lagrangiano (véase también la Subsección 2.6.4). Hasta ahora este problema ha sido estudiado usando diferentes técnicas y bajo diferentes hipótesis que permiten controlar la falta de completitud de \mathcal{D} . En particular, la conexión geodésica se puede demostrar con métodos variacionales. En este caso, la hipótesis precisa para conseguir existencia y, a veces, multiplicidad de geodésicas que unen dos puntos fijos, es una hipótesis de convexidad sobre el borde de \mathcal{D} (véase p.ej. [25] y [96]); aquí trabajaremos bajo hipótesis más débiles. Más precisamente, en la Sección 3.1 analizaremos la noción de convexidad para la frontera de un dominio abierto de una variedad de Riemann, en la Sección 3.2 enunciaremos los resultados principales y los demostraremos en las Secciones 3.3 y 3.4. Por último, en la Sección 3.5 aduciremos algunos ejemplos y una aplicación a trayectorias de sistemas lagrangianos.

3.1 El borde

Nuestro estudio necesita una discusión acerca de las diferentes nociones de convexidad para los (eventualmente singulares) puntos del borde de un dominio abierto \mathcal{D} . Merece resaltarse que para los principales resultados de este capítulo necesitaremos sólo diferenciabilidad \mathcal{C}^3 (véase los Teoremas 3.2.2, 3.2.6 y \mathcal{C}^2 para el Teorema 3.2.1), pero en nuestras referencias la hipótesis más alta de diferenciabilidad es \mathcal{C}^4 ; así, preferimos enunciar los resultados bajo esta hipótesis. En primer lugar, recordemos que si una variedad de Riemann \mathcal{M} es completa entonces es convexa (Teorema 2.1.8). Examinemos ahora el caso de que el borde $\partial\mathcal{D}$ de un dominio abierto \mathcal{D} de \mathcal{M} sea diferenciable, o

sea, $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ sea una variedad riemanniana con borde. Recordemos las siguientes dos nociones naturales de convexidad alrededor de un punto del borde.

Definición 3.1.1 (Convexidad infinitesimal) $\partial\mathcal{D}$ es infinitesimalmente convexa en $p \in \partial\mathcal{D}$ si la segunda forma fundamental σ_p , con respecto a la normal interior, está semidefinida positiva.

Definición 3.1.2 (Convexidad local) $\partial\mathcal{D}$ es localmente convexa en $p \in \partial\mathcal{D}$ si existe un entorno $\bar{U} \subset \bar{\mathcal{D}}$ de p tal que

$$\exp_p(T_p\partial\mathcal{D}) \cap (\bar{U} \cap \mathcal{D}) = \emptyset.$$

No es difícil comprobar que la convexidad local en un punto implica la convexidad infinitesimal, pero el recíproco no es cierto. Sin embargo, si la convexidad infinitesimal es supuesta en un entorno de un punto, entonces las dos nociones de convexidad son equivalentes, como demostró Bishop [34]. Para aplicar los métodos variacionales al estudio de la conexión geodésica, es útil una caracterización de la convexidad infinitesimal. Puesto que, por la diferenciabilidad del borde, para cada $p \in \partial\mathcal{D}$ existen un entorno $U \subset \mathcal{M}$ de p y una función diferenciable (con la misma regularidad de $\partial\mathcal{D}$) $\phi : U \cap \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$\begin{cases} \phi^{-1}(0) = U \cap \partial\mathcal{D} \\ \phi > 0 \\ \nabla\phi(q) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sobre } U \cap \mathcal{D} \\ \\ \forall q \in U \cap \partial\mathcal{D}, \end{array} \quad (3.1)$$

es simple comprobar que $\partial\mathcal{D}$ es infinitesimalmente convexa en $p \in \partial\mathcal{D}$ si y sólo si para una (y entonces para todas) función ϕ que satisface (3.1) tenemos

$$H_\phi(p)[v, v] \leq 0 \quad \forall v \in T_p\partial\mathcal{D}.$$

En virtud de la siguiente proposición, se puede encontrar la función ϕ en (3.1) sobre todo $\bar{\mathcal{D}}$.

Proposición 3.1.3 Sean $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad diferenciable, y \mathcal{D} un subconjunto abierto de \mathcal{M} tal que $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ es una variedad diferenciable con borde. Entonces existe una función diferenciable $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\partial\mathcal{D} = \phi^{-1}(0)$, $\phi > 0$ sobre \mathcal{D} y 0 es un valor regular de ϕ .

Demostración: Para cada $p \in \partial\mathcal{D}$ tomemos una carta de \mathcal{M} , $(U, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ centrada en p tal que:

$$(x^n)^{-1}(0) = \partial\mathcal{D} \cap U, \quad x^n(\mathcal{D} \cap U) > 0, \quad x^n(\mathcal{M} - (\bar{\mathcal{D}} \cap U)) < 0.$$

Consideramos un recubrimiento abierto de \mathcal{M} obtenido con estos U más $U_0 := \mathcal{D}$, $U_\infty := \mathcal{M} \setminus \bar{\mathcal{D}}$ y tomemos una partición de la unidad μ_i , $\text{sop}\mu_i \subset U_i$, $i \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$. Ahora, elijamos:

$$\phi = \sum_{m \in \mathbf{N}} \mu_m x_m^n + \mu_0 - \mu_\infty.$$

Claramente, $\phi^{-1}(0) = \partial\mathcal{D}$ y, para cada $p \in \partial\mathcal{D}$, si $v \in T_p\mathcal{M}$ es un vector tangente que apunta hacia \mathcal{D} resulta:

$$d\phi(p)[v] = \sum_{m \in \mathbf{N}} (d\mu_m(p)[v]x_m^n(p) + \mu_m(p)dx_m^n(p)[v]) > 0. \quad \square$$

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.4 (Convexidad global, punto de vista variacional) $\partial\mathcal{D}$ es convexa si y sólo si es infinitesimalmente convexa en cada $p \in \partial\mathcal{D}$ o, equivalentemente, si para una, y por tanto para todas, función ϕ sobre $\overline{\mathcal{D}}$ tal que

$$\begin{cases} \phi^{-1}(0) = \partial\mathcal{D} \\ \phi > 0 & \text{sobre } \mathcal{D} \\ \nabla\phi(q) \neq 0 & \forall q \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (3.2)$$

resulta

$$H_\phi(q)[v, v] \leq 0 \quad \forall q \in \partial\mathcal{D}, v \in T_q\partial\mathcal{D}. \quad (3.3)$$

Más aún, podemos dar la siguiente definición que generaliza a las variedades de Riemann la noción usual de convexidad dada en espacios euclídeos.

Definición 3.1.5 (Convexidad global, punto de vista geométrico) $\partial\mathcal{D}$ es convexa si para cada $p, q \in \mathcal{D}$ la imagen de cada geodésica $\gamma : I \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ verifica

$$\gamma(I) \subset \mathcal{D}. \quad (3.4)$$

Observación 3.1.6 Es sencillo comprobar que si $\partial\mathcal{D}$ es convexa según la Definición 3.1.5, entonces (3.3) se mantiene, véase p.ej. [78, Proposition 4.1.3]. Además, si \mathcal{M} es completa y $\partial\mathcal{D}$ es una subvariedad \mathcal{C}^3 , (3.3) implica la noción geométrica de convexidad, véase [47, Theorem 2.1]. Destacamos que el mismo resultado ha sido demostrado con técnicas diferentes y bajo hipótesis más fuertes sobre la diferenciabilidad en [34]; un primer resultado en esta dirección fue dado, cuando \mathcal{M} tiene curvatura constante, en [40].

Nótese que si \mathcal{M} es completa tal es $\overline{\mathcal{D}}$ y, aunque el recíproco no sea cierto, no hay pérdida de generalidad en asumirlo, dado que la métrica riemanniana se puede modificar fuera de $\overline{\mathcal{D}}$ para lograr completitud. Para probar esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.1.7 Sea \mathcal{D} un dominio abierto de una variedad de Riemann $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Supóngase que $\overline{\mathcal{D}}$ es completo. Entonces existe un subconjunto abierto $U \subset \mathcal{M}$ tal que:

- (i) $\overline{\mathcal{D}} \subset U$;
- (ii) el cierre \overline{U} de U es completo.

Demostración: Fijemos un punto $p_0 \in \partial\mathcal{D}$ y para cada $j \in \mathbf{N}$ sea K_j una bola cerrada de $\partial\mathcal{D}$ centrada en p_0 y de radio j menos la bola abierta de radio $j-1$. Ahora, recubrimos cada K_j con un conjunto finito de bolas en \mathcal{M} , digamos

$$B_{j,k_j}, k_j \in \{1, \dots, i_j\}$$

con radio menor que $1/j$ y cierre compacto en \mathcal{M} . Tomemos U como la unión de todas estas B_{j,k_j} para cada $k_j \in \{1, \dots, i_j\}, j \in \mathbf{N}$ y \mathcal{D} , que claramente satisface (i). Para comprobar que \bar{U} es completa, consideramos una sucesión de Cauchy $\{p_m\} \subset \bar{U}$. Salvo una parcial, podemos suponer $p_m \notin \mathcal{D}$ y $p_m \notin \partial U$ (en caso contrario, construimos una nueva sucesión de Cauchy $\{q_m\}$ con $d(p_m, q_m) < 1/m$ y $q_m \in U$, que será convergente si y sólo si lo es $\{p_m\}$). Además, cada p_m está contenido en la unión $B_{j,k_j}, k_j \in \{1, \dots, i_j\}$, para algunos $j \equiv j_m$ y podemos suponer $j_m \rightarrow \infty$ (en caso contrario, la sucesión de Cauchy estaría en un subconjunto de \bar{U} con cierre compacto) y $m \leq j_m$. Para cada p_m , tomemos $p'_m \in K_{j_m} (\subset \partial\mathcal{D})$ tal que

$$d(p_m, p'_m) = d(p_m, K_{j_m}).$$

Es sencillo comprobar que $\{p'_m\}$ es una sucesión de Cauchy, así que es convergente por la completitud de $\partial\mathcal{D}$; pero como $d(p_m, p'_m) \rightarrow 0$ también lo es la sucesión $\{p_m\}$. \square

Proposición 3.1.8 *Sea \mathcal{D} un dominio abierto de una variedad de Riemann $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Supóngase que $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}$ es completo. Entonces existe una métrica riemanniana completa h sobre \mathcal{M} que coincide con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathcal{D} .*

Demostración: Sea $\mu : \mathcal{M} \rightarrow I$ tal que $\mu(\mathcal{D}) = 0, \mu(\mathcal{M} \setminus U) = 1$, donde U es como en el Lema 3.1.7. Tomemos

$$h = \langle \cdot, \cdot \rangle + \mu \cdot h_R$$

donde h_R es una métrica cualquiera auxiliar completa sobre \mathcal{M} , (resulta claro que una tal h_R existe, véase p.ej. [85]). Tenemos sólo que comprobar la completitud de h . Si d_h es la distancia asociada a h entonces $d_h \geq d$; así, si $\{p_m\}$ es una sucesión de Cauchy para d_h entonces es una sucesión de Cauchy para d y, salvo parciales, tenemos los siguientes dos casos:

- $\{p_m\} \subset \bar{U}$. Entonces converge por la completitud de d en \bar{U} .
- $\{p_m\} \subset \mathcal{M} \setminus U$. Entonces converge debido a la completitud de la distancia d_R asociada a h_R y $d_h \geq d_R$ sobre $\mathcal{M} \setminus U$. \square

Todas las premisas anteriores facilitan maneras diferentes para probar que, cuando \mathcal{M} es completa:

\mathcal{D} es convexo si y sólo si $\partial\mathcal{D}$ es convexa¹.

¹Remarquemos que decir \mathcal{D} convexo significa que cada par de su puntos puede ser unido en \mathcal{D} por una geodésica que minimiza la longitud en \mathcal{D} .

De hecho, una técnica variacional basada sobre el uso de la acción (2.26) y argumentos de penalización permiten demostrar que, si $\partial\mathcal{D}$ es convexa, entonces \mathcal{D} es convexo, véase [78, Corollary 4.4.7]. Por otra parte, usando la Definición 3.1.5 es sencillo ver que si $\partial\mathcal{D}$ no es convexa tampoco es convexo \mathcal{D} . Si $\overline{\mathcal{D}}$ no fuera completo ni, por tanto, lo fuera \mathcal{M} , la convexidad de $\partial\mathcal{D}$ no implicaría la convexidad de \mathcal{D} .

También recordemos las siguientes definiciones.

Definición 3.1.9 $\partial\mathcal{D}$ es (variacionalmente) estrictamente convexa si y sólo si para una y por tanto para toda función ϕ sobre $\overline{\mathcal{D}}$ como en (3.2) tenemos

$$H_\phi(q)[v, v] < 0 \quad \forall q \in \partial\mathcal{D}, v \in T_q\partial\mathcal{D}. \quad (3.5)$$

Definición 3.1.10 $\partial\mathcal{D}$ es (geométricamente) estrictamente convexa si cada geodésica $\gamma: I \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ verifica

$$\gamma(]0, 1[) \subset \mathcal{D}.$$

Se puede comprobar que la estricta convexidad variacional (Definición 3.1.9) implica la estricta convexidad geométrica (Definición 3.1.10), véase [78, 4.1.3], sin embargo el recíproco no es cierto, de hecho es suficiente considerar el siguiente contraejemplo. Sean $\mathcal{M} = \mathbf{R}^2$ con la métrica euclídea y $\phi(x, y) = y - x^4$. Entonces llamando \mathcal{D} al subconjunto sobre el cual ϕ es estrictamente positiva, resulta que $\partial\mathcal{D}$ es estrictamente convexa según la Definición 3.1.10, pero el hessiano de ϕ es igual a cero en $(0, 0)$.

3.2 Exposición de los resultados

Ahora veremos el caso general en que $\partial\mathcal{D}$ no es diferenciable o $\overline{\mathcal{D}}$ no es completa. Usando los resultados de la Sección 3.1, resulta claro que si hubiese una sucesión

$$\{\overline{\mathcal{D}}_m\}$$

de subvariedades completas con borde diferenciable y convexo tal que

$$\overline{\mathcal{D}}_m \subset \overline{\mathcal{D}}_{m+1} \quad \text{y} \quad \mathcal{D} = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \overline{\mathcal{D}}_m, \quad (3.6)$$

entonces \mathcal{D} sería geodésicamente conexo. Como primera cuestión podemos preguntarnos si \mathcal{D} tiene que ser convexo. Contestaremos a esta pregunta probando que si $\overline{\mathcal{D}}$ es completo entonces \mathcal{D} es convexo. Más precisamente, sean $\overline{\mathcal{D}}^c$ la completación canónica de Cauchy de \mathcal{D} , y $\partial_c\mathcal{D}$ los correspondientes puntos del borde, $\overline{\mathcal{D}}^c = \mathcal{D} \cup \partial_c\mathcal{D}$; $\overline{\mathcal{D}}^c$ como espacio métrico es siempre completo, pero los puntos del borde $\partial_c\mathcal{D}$ no son necesariamente diferenciables y, si lo son, la métrica podría ser no extendible o degenerada allí. Nótese que cada punto de $\partial\mathcal{D}$ naturalmente determina uno o más puntos en $\partial_c\mathcal{D}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ es completa si y sólo si todos los puntos en $\partial_c\mathcal{D}$ son de este tipo (y en este caso podemos suponer que \mathcal{M} sea completa). Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 [9] *Sea $\overline{\phi}: \overline{\mathcal{D}}^c \rightarrow [0, \infty]$ una función continua tal que:*

- (i) $\bar{\phi}^{-1}(0) = \partial_c \mathcal{D}$;
- (ii) existe una sucesión infinitesimal $\{a_m\}$ tal que, para cada $m \in \mathbf{N}$, $\bar{\phi}^{-1}(]a_m, \infty])$ es una subvariedad de Riemann con borde diferenciable y convexo $\bar{\phi}^{-1}(a_m)$.

Entonces \mathcal{D} es geodésicamente convexo. Más aún, si \mathcal{M} es completa, entonces \mathcal{D} es convexo.

Remarquemos que para obtener convexidad, la hipótesis de completitud sobre \mathcal{M} no se puede suprimir, como mostraremos con un contraejemplo.

Este resultado será demostrado en la Sección 3.3 usando métodos geométricos, y permite generalizar los resultados por Gordon en [64] verificando que sus hipótesis implican las del Teorema 3.2.1, véase Teorema 3.3.1.

Nuestro principal objetivo se alcanzará en la Sección 3.4, donde usaremos métodos variacionales (bajo la hipótesis natural de completitud para \mathcal{M}) para demostrar que \mathcal{D} es convexo cuando existe una oportuna sucesión $\{\mathcal{D}_m\}$ de dominios abiertos que ocupan \mathcal{D} como en (3.6). Más precisamente, es válido el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 [9] Sean \mathcal{M} una variedad de Riemann completa y \mathcal{D} un dominio abierto de \mathcal{M} . Supóngase que existe una función ϕ no negativa \mathcal{C}^3 sobre \mathcal{D} tal que

- (i) $\lim_{x \rightarrow \partial \mathcal{D}} \phi(x) = 0$;
- (ii) cada $y \in \partial \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \mathcal{M}$ y constantes $a, b > 0$ tales que

$$a \leq |\nabla \phi(x)| \leq b \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap U;$$

- (iii) la primera y la segunda derivadas del flujo normalizado (3.39) de $\nabla \phi$ están localmente acotadas cerca de $\partial \mathcal{D}$, esto es: cada $y \in \partial \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \mathcal{M}$ tal que el flujo local inducido sobre $\mathcal{D} \cap U$ tiene primera y segunda derivadas con normas acotadas;
- (iv) existen una sucesión infinitesimal y decreciente $\{a_m\}$ tal que cada $y \in \partial \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \mathcal{M}$ y una constante $M \in \mathbf{R}$ que satisfacen para cada $m \in \mathbf{N}$:

$$H_\phi(x)[v, v] \leq M \langle v, v \rangle \phi(x) \quad \forall x \in \phi^{-1}(a_m) \cap U, v \in T_x \phi^{-1}(a_m). \quad (3.7)$$

Entonces \mathcal{D} es convexo. Más aún, si \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo, entonces para cada $p, q \in \mathcal{D}$ hay una sucesión $\{x_m\}$ de geodésicas en \mathcal{D} que los unen tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = \infty, \quad (3.8)$$

donde f denota la acción, véase (2.26).

Observación 3.2.3 Nótese que cuando \mathcal{D} tiene topología no trivial, encontramos infinitas geodésicas en el sentido especificado en la Observación 2.6.3.

Observación 3.2.4 A continuación, un dominio abierto \mathcal{D} con borde convexo $\partial \mathcal{D}$ de una variedad riemanniana \mathcal{M} será un dominio abierto \mathcal{D} que admite una función ϕ

positiva \mathcal{C}^3 tal que se mantengan (i)–(iv). Cuando \mathcal{D} es un dominio abierto de una variedad completa con borde diferenciable, la función ϕ en la Proposición 3.1.3 siempre satisface las condiciones (i)–(iii) y satisface la condición (iv) si y sólo si su borde es convexo. Esto es: en este caso la noción de convexidad para $\partial\mathcal{D}$ es la misma de la Definición 3.1.4 (y de la equivalente noción geométrica de la Definición 3.1.5.)

Observaciones 3.2.5 Examinamos el papel de cada hipótesis del Teorema 3.2.2.

(1) Hipótesis (i), (iv): implican primero que, para $\mathcal{D}_m = \phi^{-1}(]a_m, \infty[)$, la condición (3.6) se satisface, y, segundo, la posible pérdida de convexidad de los bordes $\partial\mathcal{D}_m$ está (localmente) acotada por (3.7).

(2) Hipótesis (ii): por el Teorema 3.2.1, si (iv) se satisface con $M \leq 0$ entonces (ii) puede reemplazarse sólo con:

$$|\nabla\phi(x)| \neq 0, \forall x \in \phi^{-1}(a_m), \forall m \in \mathbf{N}.$$

Pero cuando $M > 0$ la hipótesis (ii) tiene que imponerse para que (iv) tenga sentido. La razón es que el miembro izquierdo en (3.7) describe el perfil de $\phi^{-1}(a_m)$, pero el valor de ϕ en el miembro derecho puede alterarse de manera arbitraria si no se impone acotación del gradiente.

Más precisamente, consideremos una función cualquiera regular $\varphi :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = 0$ y tal que su derivada satisface $\dot{\varphi} > 0$. Entonces $\phi^* = \varphi \circ \phi$ también satisface (i), y

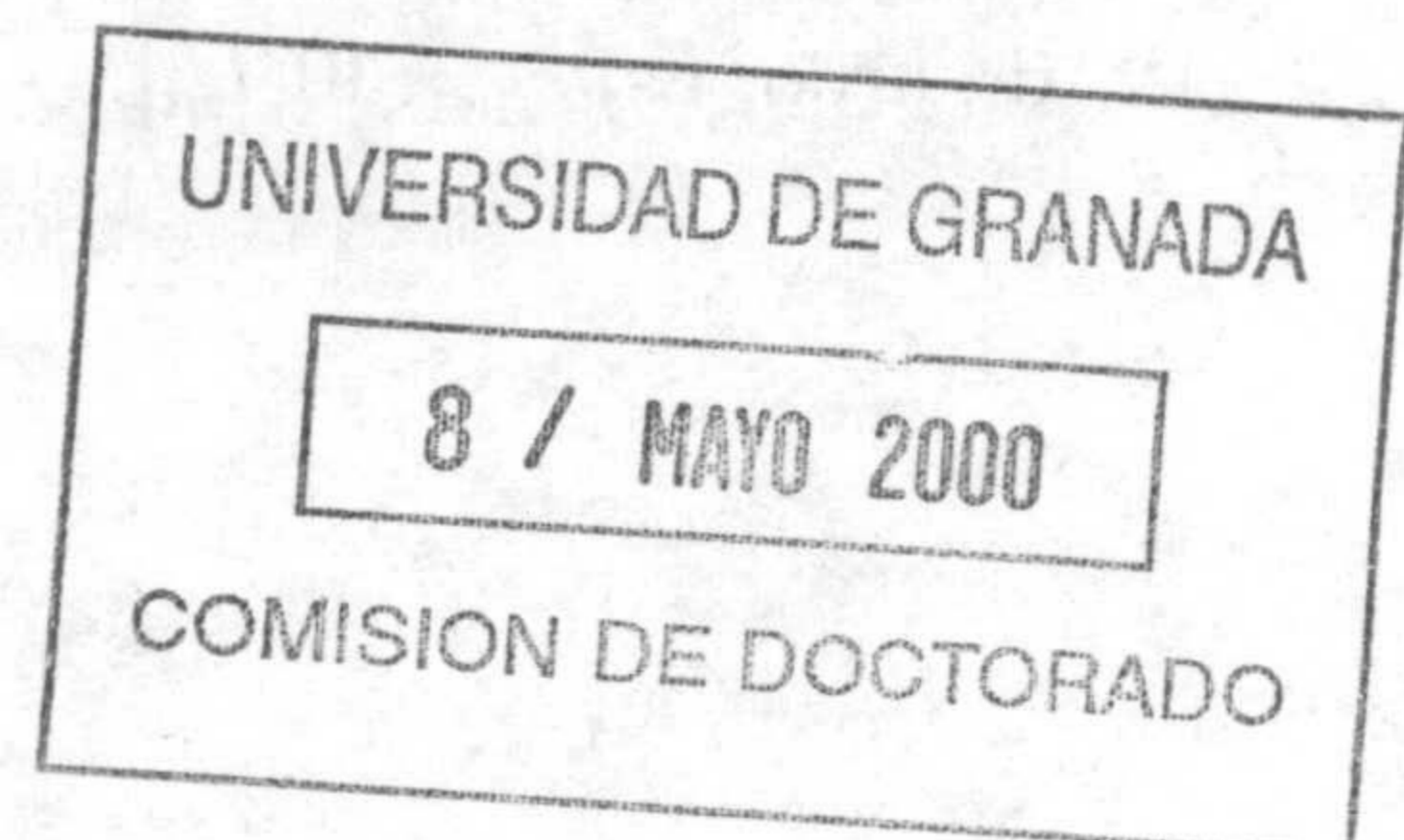
$$H_{\phi^*}(x)[v, v] = \dot{\varphi}(\phi(x))H_{\phi}(x)[v, v] \quad \forall x \in \phi^{*-1}(a_m^*), v \in T_x\phi^{*-1}(a_m^*),$$

donde $a_m^* = \varphi(a_m)$, $m \in \mathbf{N}$. Cuando ϕ satisface (ii) entonces ϕ^* satisface (ii) si y sólo si $a^* \leq \dot{\varphi} \leq b^*$, cerca de 0, para algunos $a^*, b^* > 0$. En este caso, ϕ satisface (iv) si y sólo si lo satisface ϕ^* . Pero si (ii) no fuera impuesta, sería posible que una de las funciones satisficiera (iv) y la otra no². Esto demuestra que (iv) no es razonable en sí como medida de la pérdida de convexidad de las hipersuperficies $\phi^{-1}(a_m) = \phi^{*-1}(a_m^*)$, siendo la hipótesis (ii) natural.

(3) Hipótesis (iii): las acotaciones sobre el flujo normalizado (i.e. el flujo de $\nabla\phi/|\nabla\phi|^2$) son técnicas, y expresan el único control que imponemos sobre las hipersuperficies intermedias entre dos consecutivas $\phi^{-1}(a_m)$. Nótese que si (iii) no fuera impuesta entonces podrían existir hipersuperficies arbitrariamente cerca de $\partial\mathcal{D}$ “muy distorsionadas” por el flujo.

La condición técnica (iii) y también la completitud de la variedad ambiente \mathcal{M} pueden ser debilitadas si (iv) se impone sobre todos los puntos y las direcciones suficientemente próximas al borde. Así, una consecuencia directa de la técnica en la demostración del Teorema 3.2.2 es el siguiente resultado (compárese con [96]):

²De hecho, supóngase que ϕ satisface (iv), pero existe una sucesión infinitesimal $\{a_m\}$ tal que $H_{\phi}(x_m)[v_m, v_m] > 0$ para ciertos x_m en cada $\phi^{-1}(a_m)$, y vectores unitarios $v_m \in T_{x_m}\phi^{-1}(a_m)$. Tómese entonces $\{k_m\}$ tal que $k_m > 0$ y $\{k_m H_{\phi}(x_m)[v_m, v_m]\}$ no es infinitesimal. Claramente, cada φ como arriba tal que $\dot{\varphi}(a_m) = k_m$ nos da el ejemplo.



Teorema 3.2.6 [9] Sean \mathcal{M} una variedad de Riemann, $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ un dominio abierto, y $\overline{\mathcal{D}}^c = \mathcal{D} \cup \partial_c \mathcal{D}$ su completación canónica de Cauchy. Supóngase que existe una función ϕ positiva C^3 sobre \mathcal{D} tal que

- (i) $\lim_{x \rightarrow \partial_c \mathcal{D}} \phi(x) = 0$;
(ii) cada $y \in \partial_c \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \overline{\mathcal{D}}^c$ y constantes $a, b > 0$ tales que

$$a \leq |\nabla \phi(x)| \leq b \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap U;$$

- (iii) cada $y \in \partial_c \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \overline{\mathcal{D}}^c$ y una constante $M \in \mathbf{R}$ tal que la desigualdad (3.7) se verifica para cada $x \in \mathcal{D} \cap U$ y para cada $v \in T_x \mathcal{M}$.

Entonces \mathcal{D} es convexo. Más aún, si \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo, para cada $p, q \in \mathcal{D}$ existe una sucesión $\{x_m\}$ de geodésicas en \mathcal{D} que los unen tal que se mantiene (3.8).

Observación 3.2.7 Nótese que cuando $\partial_c \mathcal{D}$ es convexa en el sentido de la Definición 3.1.4 la función ϕ en (3.2) no necesariamente satisface (iii) porque esta condición es ahora impuesta sobre todo los vector tangente v . Sin embargo, cuando la Definición 3.1.4 es aplicable, es independiente de la ϕ elegida; así, variando ϕ , se pueden considerar todos los vectores tangentes v como tangentes a hipersuperficies de nivel. Así, podemos concluir que las hipótesis en los Teoremas 3.2.2 y 3.2.6 implican, para cada punto del borde, condiciones locales que extienden las para bordes diferenciables.

En la Sección 3.4 se demostrará el Teorema 3.2.2. Por eso, penalizaremos la acción f con un término dependiente de un parámetro positivo ϵ y estudiaremos la ecuación de Euler-Lagrange asociada a los funcionales penalizados f_ϵ . El punto crucial es comprobar que un punto crítico de f_ϵ en un subnivel de f_ϵ está uniformemente lejos (con respecto a ϵ) de $\partial \mathcal{D}$. En la demostración “proyectaremos” puntos críticos de los funcionales penalizados (usando el flujo normalizado de $\nabla \phi$) sobre las hipersuperficies $\phi^{-1}(a_m)$ para m suficientemente grande. Esto permite encontrar, por medio de un paso al límite, puntos críticos de f (i.e. geodésicas) que no tocan $\partial \mathcal{D}$.

3.3 Demostración del Teorema 3.2.1. Consecuencias

Demostración del Teorema 3.2.1:

Dados $p, q \in \mathcal{D}$ escogemos $a_m < \min\{\bar{\phi}(p), \bar{\phi}(q)\}$. Por (i), la completitud de $\overline{\mathcal{D}}^c$ y la continuidad de $\bar{\phi}$ en $\partial_c \mathcal{D}$, la variedad $\overline{\mathcal{D}}_m = \bar{\phi}^{-1}([a_m, \infty])$ es completa. Luego p y q pertenecen al interior de $\bar{\phi}^{-1}([a_m, \infty])$, que es intrínsecamente convexo, y pueden ser unidos por una geodésica (que minimiza en $\mathcal{D}_m = \bar{\phi}^{-1}([a_m, \infty])$). Demostremos ahora que si \mathcal{M} es completo entonces \mathcal{D} es convexo. Sea $m_0 \in \mathbf{N}$ el primer entero positivo tal que $a_{m_0} < \min\{\bar{\phi}(p), \bar{\phi}(q)\}$. Como antes, para cada $m \geq m_0$ existe una geodésica minimizante γ_m en \mathcal{D}_m que une p y q . Consideremos γ_m parametrizada por la longitud de arco, así $\gamma_m : [0, l_m] \rightarrow \mathcal{D}_m$, $\langle \dot{\gamma}_m(s), \dot{\gamma}_m(s) \rangle = 1$, para cada s . Nótese que, salvo una

parcial, $\{\dot{\gamma}_m(0)\}$ converge hacia v , con v vector unitario, y que $\{l_m\}$ es una sucesión decreciente convergente a la distancia l entre p y q . Con argumentos estándar, véase e.g. [93, Proposition 2.1], la geodésica $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathcal{M}$ con $\dot{\gamma}(0) = v$ tiene imagen en $\bar{\mathcal{D}}$, une p y q , y satisface

$$\gamma_m \rightarrow \gamma \quad \text{uniformemente en } [0, l].$$

Si, para infinitos $m \in \mathbf{N}$, $\gamma \equiv \gamma_m$ la demostración se concluye. Así, supongamos que $\dot{\gamma}_m(0) \neq v$ para infinitos m y que $\{l_m\}$ sea estrictamente decreciente: nótese que, necesariamente, p y q son conjugados a lo largo de γ . Sea U un entorno estrellado de q , con $U \subset \mathcal{D}_{m_0}$; probaremos que, para pequeños δ , $q_\delta = \gamma(l - \delta) \in U$ es siempre conjugado a p a lo largo de γ llegando a una contradicción. Como $p, q_\delta \in \mathcal{D}_m$ para cada $m \geq m_0$, razonando como antes, encontraremos una sucesión de geodésicas minimizantes parametrizadas por la longitud de arco $\bar{\gamma}_m : [0, \bar{l}_m] \rightarrow \mathcal{D}_m$ que unen p y q_δ , una parcial de $\{\dot{\bar{\gamma}}_m(0)\}$ convergente a \bar{v} , con \bar{v} vector unitario (que podemos suponer diferente de v , porque en caso contrario q_δ sería también conjugado y la prueba se completaría) y $\bar{\gamma} : [0, \bar{l}] \rightarrow \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ con $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \bar{v}$. Otra vez $\{\bar{l}_m\}$ es decreciente y converge hacia la distancia \bar{l} entre p y q_δ . Afirmamos que $\bar{l} \leq l - \delta$; en caso contrario, modificando ligeramente las curvas γ_m , podríamos encontrar una curva que une p y q_δ contenida en \mathcal{D}_m para m grande, con longitud menor que \bar{l} , lo cual es una contradicción. Ahora podemos definir la curva unión de $\bar{\gamma}$ sobre $[0, \bar{l}]$ y γ restringida a $[l - \delta, l]$, que une p y q y con longitud menor o igual a l . Dado que esa curva unión no es diferenciable en \bar{l} , la podemos modificar ligeramente para obtener una curva $\hat{\gamma}$ con longitud menor que l , y que coincide con $\bar{\gamma}$ fuera de U . Finalmente, podemos encontrar para m grande una curva que une p y q , con longitud menor de l y que coincide con algunas $\bar{\gamma}_m$ fuera de U , llegando a un absurdo con la minimalidad de γ_m dado que $U \subset \mathcal{D}_m$. \square

Al término de esta sección daremos un contraejemplo para el caso de que \mathcal{M} no sea completa.

La posibilidad de extender los resultados de Gordon usando métodos variacionales ya había sido apuntada en [78, Chapter 4], [96]. Sin embargo, nuestro punto de vista es bastante diferente, y la extensión que obtenemos es, en cualquier caso, simple y más fuerte. De hecho, en los resultados de Gordon se hace una hipótesis de convexidad sobre toda la variedad; en las referencias anteriores se afirma que esta hipótesis global tiene que implicar una propiedad de convexidad cerca del borde, la cual debería ser bastante de un punto de vista variacional; finalmente, comprobaremos que la hipótesis global implica una propiedad de convexidad para una sucesión de hipersuperficies cerca del borde, lo cual es bastante desde cualquiera de los puntos de vista indicados en las Secciones 3.1 and 3.2.

Recordemos que a una aplicación H entre variedades se le llama *propia* si $H^{-1}(C)$ es compacto siempre que lo sea C . En particular, si $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ es propia, necesariamente $|H(p)|$ diverge cuando p tiende hacia $\partial_c \mathcal{D}$. Más aún a una función (con valores reales, C^2) se le llama *convexa* cuando su hessiano está semidefinido positivo. El resultado de Gordon [64, Theorem 1] dice:

Teorema 3.3.1 *Si un dominio abierto \mathcal{D} de una variedad de Riemann \mathcal{M} soporta una función propia, positiva y convexa H , entonces \mathcal{D} es geodésicamente conexo.*

Redemostraremos este resultado, comprobando que sus hipótesis implican la del Teorema 3.2.1. Hay un segundo teorema en el trabajo de Gordon, que se puede redemostrar de manera análoga. Señalemos que el Teorema 3.2.1 puede también enunciarse suponiendo que $\bar{\phi}^{-1}(\infty) = \partial_c \mathcal{D}$ y $\{a_m\}$ diverge hacia ∞ .

Demostración del Teorema 3.3.1:

Por el teorema de Sard, casi todos los valores de H son regulares. Así, siendo H propia (y positiva), existe una sucesión de valores regulares $\{a_m\}$ contenida en la imagen de H y divergente. Además, $H^{-1}([0, a_m])$ es una variedad de Riemann compacta con borde $H^{-1}(a_m)$. De la Definición 3.1.4, este borde es convexo (póngase $\phi = H(a_m) - H$). Así, extendiendo continuamente H a una función $\bar{H} : \bar{\mathcal{D}}^c \rightarrow [0, \infty]$, el Teorema 3.2.1 puede usarse en la versión supracitada. \square

Un contraejemplo. El siguiente contraejemplo muestra que el resultado en el Teorema 3.2.1 sobre la conexión geodésica no puede mejorarse para obtener convexidad, cuando \mathcal{M} no es completa.

Consideremos dos hemisferios abiertos H_0, H_1 en \mathbf{R}^3 y sean x_0, x_1 sus polos norte (véase Fig. 1).

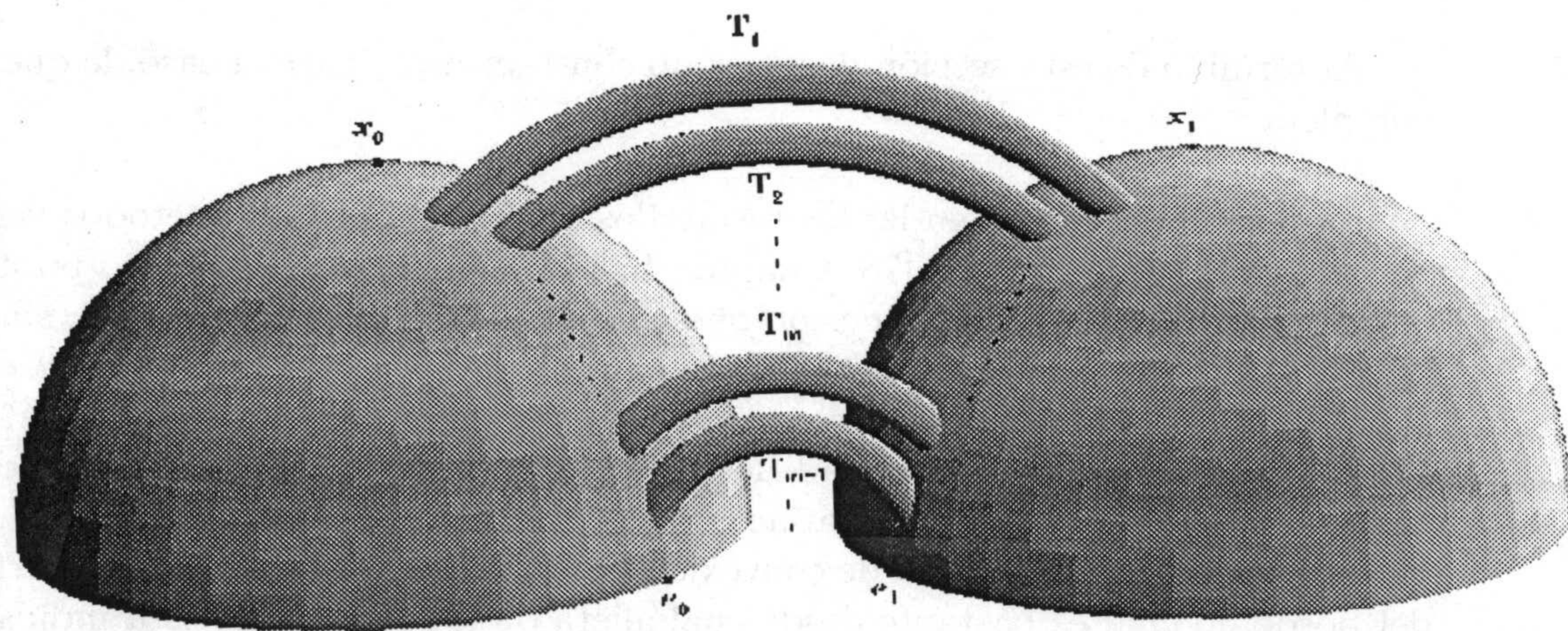


Figura 3.1: Los dos hemisferios H_0, H_1 están conectados por una sucesión de tubos inmersos (T_m) tales que la longitud de una curva minimizante γ_m que los une a través de T_m es más larga que la longitud de la correspondiente γ_{m+1} a través de T_{m+1} .

Póngase una sucesión de tubos inmersos $\{T_m\}$ que unen H_0 y H_1 de longitud no creciente y tales que cada curva que une x_0 y x_1 a través de T_m es más larga que una

curva minimizante que los une a través de T_{m+1} . Podemos también suponer que la anchura de estos tubos decrezca hacia cero, y sus bocas en cada hemisferio vayan hacia un punto $e_i, i = 0, 1$ sobre el ecuador, estando todos sus centros en el mismo meridiano (la forma de los hemisferios resultantes se muestra en Fig. 2). Sea \mathcal{M} esta variedad inmersa en \mathbf{R}^3 , y $\mathcal{D} = \mathcal{M}$.

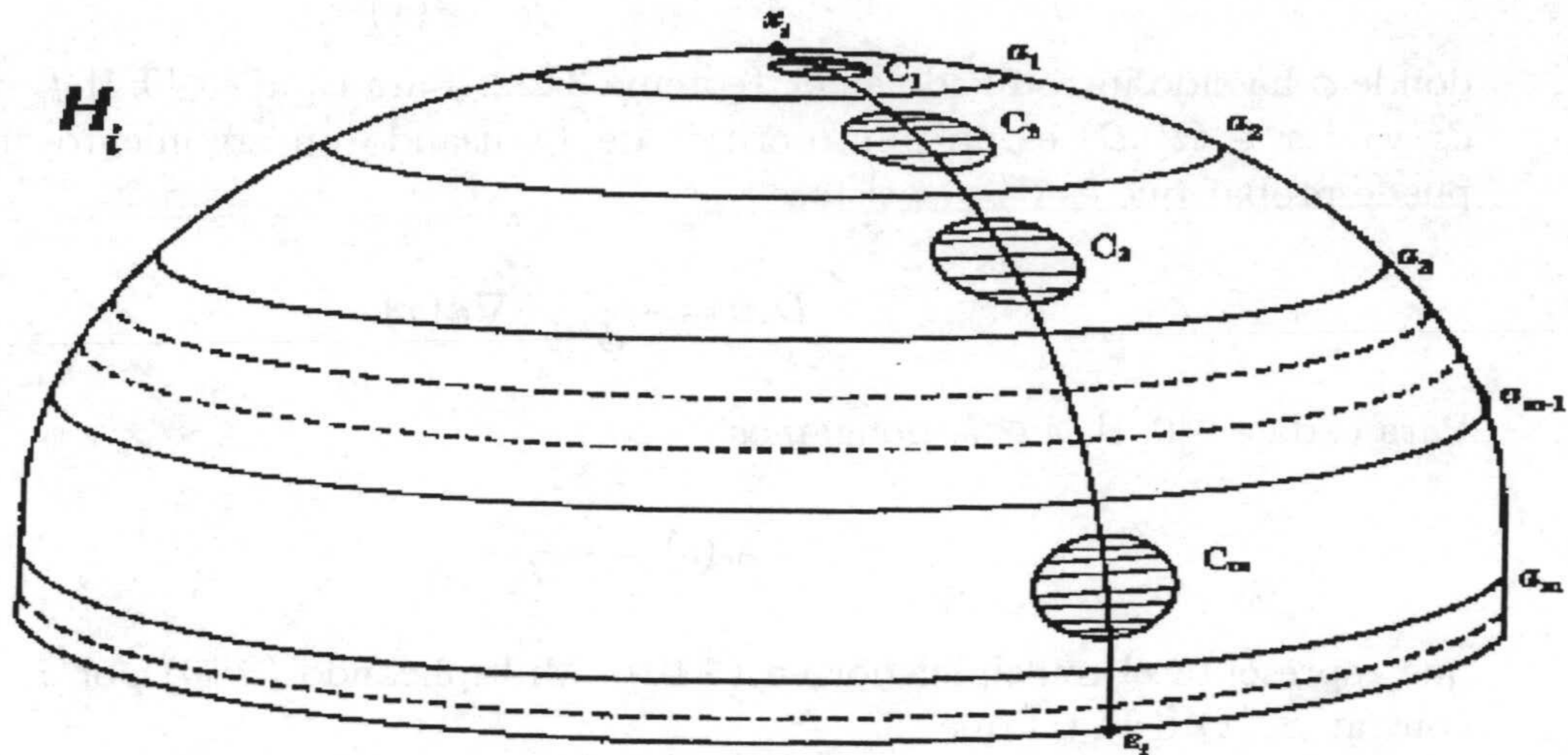


Figura 3.2: Los círculos rayados C_m han sido suprimidos para pegar los tubos T_m . Los centros de las bocas de estos tubos están en un meridiano Υ y convergen hacia un punto ecuatorial e_i ($i = 0, 1$). Cada paralelo con altitud a_m es igual a la componente conexas de la frontera $\partial\mathcal{D}_m \cap H_i$, que es claramente convexa.

Observemos que $\partial_c\mathcal{D}$ puede ser identificado de manera canónica con los ecuadores, y sea $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ la función altitud con $\lim_{p \rightarrow \partial_c\mathcal{D}} \phi(p) = 0$. Claramente, se puede tomar una sucesión infinitesimal $\{a_m\}$ tal que $\overline{\mathcal{D}}_m = \phi^{-1}([a_m, \infty[)$ es una variedad de Riemann completa con borde convexo $\partial\mathcal{D}_m = \phi^{-1}(a_m)$, que contiene al tubo T_m pero no a T_{m+1} , y que satisface (3.6). Así, en cada subvariedad convexa $\mathcal{D}_m = \phi^{-1}([a_m, \infty[)$ existe una geodésica minimizante γ_m que une x_0, x_1 , y, por la condición sobre la longitud de los tubos, tenemos la desigualdad para la longitud de las geodésicas

$$L(\gamma_{m+1}) < L(\gamma_m),$$

véase (2.3). Así, si hubiese una geodésica minimizante γ entre x_0, x_1 en \mathcal{D} , necesariamente estaría incluida en algún \mathcal{D}_m y $L(\gamma_{m+1}) < L(\gamma)$, que es una contradicción.

3.4 Demostración de los Teoremas 3.2.2 y 3.2.6

Dado que estamos buscando geodésicas que unen dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathcal{D}$, tenemos que buscar los puntos críticos de (2.26) sobre $\Omega^1(\mathcal{D})$, que es una subvariedad

abierta de $\Omega^1(\mathcal{M})$, véase la Sección 2.2. En nuestro caso hay sucesiones de Palais–Smale que podrían converger hacia una curva que “toca” el borde $\partial\mathcal{D}$, por ello penalizamos la acción f oportunamente, siguiendo [28]. Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, consideramos sobre $\Omega^1(\mathcal{D})$ el funcional

$$f_\epsilon(x) = f(x) + \int_0^1 \frac{\epsilon}{\phi^2(x)} ds \quad (3.9)$$

donde ϕ ha sido introducido en el Teorema 3.2.2. Para cada $\epsilon \in]0, 1]$ f_ϵ es un funcional \mathcal{C}^2 y, si $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$ es un punto crítico de f_ϵ , usando un argumento “boot–strap” se puede probar que es \mathcal{C}^2 y satisface

$$D_s \dot{x} = -\frac{2\epsilon}{\phi^3(x)} \nabla \phi(x). \quad (3.10)$$

Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $s \in I$, pongamos

$$\lambda_\epsilon(s) = \frac{2\epsilon}{\phi^3(x(s))} \quad (3.11)$$

que representa el multiplicador en (3.10). Multiplicando (3.10) por \dot{x} , es sencillo encontrar $E_\epsilon(x) \in \mathbf{R}$ tal que

$$E_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) \rangle - \frac{\epsilon}{\phi^2(x(s))} \quad \forall s \in I. \quad (3.12)$$

Para probar que los funcionales penalizados satisfacen (PS) recordemos el siguiente lema, cuya demostración está esencialmente contenida en [28, Lemma 2.3].

Lema 3.4.1 Sean \mathcal{M} una variedad de Riemann y \mathcal{D} un dominio abierto de \mathcal{M} . Supóngase que existe una función ϕ no negativa \mathcal{C}^1 sobre \mathcal{D} tal que

- (i) $\lim_{x \rightarrow \partial\mathcal{D}} \phi(x) = 0$;
- (ii) cada $y \in \partial\mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \mathcal{M}$ y una constante $b > 0$ tal que

$$|\nabla \phi(x)| \leq b \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap U.$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión en $\Omega^1(\mathcal{D})$ tal que

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} \|\dot{x}_m\|_2 < \infty \quad (3.13)$$

y supongamos que $\{s_m\}$ sea una sucesión en I tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m(s_m)) = 0. \quad (3.14)$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{\phi^2(x_m)} ds = \infty. \quad (3.15)$$

Demostración: De (3.13) y (2.9) se tiene

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} \|x_m\|_\infty < \infty,$$

véase la Sección 2.2, así el suconjunto acotado de \mathcal{D}

$$C = \{x_m(s) \mid s \in I, m \in \mathbf{N}\}$$

tiene cierre compacto en $\overline{\mathcal{D}}^c$ y de (ii) tenemos

$$|\nabla\phi(x_m(s))| \leq C_1 \quad \forall s \in I, m \in \mathbf{N} \quad (3.16)$$

para una constante adecuada C_1 . Para cada $m \in \mathbf{N}$, integrando sobre $[s_m, s]$, por la desigualdad de Schwartz, (3.16), la desigualdad de Hölder y (3.13) tenemos

$$\begin{aligned} \phi(x_m(s)) - \phi(x_m(s_m)) &= \\ \int_{s_m}^s \langle \nabla\phi(x_m), \dot{x}_m \rangle dr &\leq C_1 \int_{s_m}^s |\dot{x}_m| dr \leq C_2 \sqrt{s - s_m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

para una adecuada $C_2 > 0$. Nótese que $\phi(x_m(1)) = \phi(q) > 0$ para cada $m \in \mathbf{N}$. De (3.14), para m suficientemente grande,

$$\phi(x_m(1)) - \phi(x_m(s_m)) \geq \frac{\phi(q)}{2} =: \mu$$

y existe $r_m \in]s_m, 1]$ tal que

$$\phi(x_m(r_m)) - \phi(x_m(s_m)) \geq \mu.$$

Esta desigualdad y (3.17) aplicada a $s = r_m$ implican

$$r_m - s_m \geq \left(\frac{\mu}{C_2}\right)^2. \quad (3.18)$$

De nuevo de (3.17) tenemos

$$\phi(x_m(s)) \leq \phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{s - s_m}$$

luego

$$\int_0^1 \frac{1}{\phi^2(x_m)} ds \geq \int_{s_m}^{r_m} \frac{1}{(\phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{r - s_m})^2} dr. \quad (3.19)$$

Argumentos estándar muestran que

$$\begin{aligned} \int_{s_m}^{r_m} \frac{1}{(\phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{r - s_m})^2} dr &= \frac{2}{C_2^2} \log \left| \frac{\phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{r_m - s_m}}{\phi(x_m(s_m))} \right| + \\ &\frac{2}{C_2^2} \frac{\phi(x_m(s_m))}{\phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{r_m - s_m}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

y por (3.14), (3.18) se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{s_m}^{r_m} \frac{1}{(\phi(x_m(s_m)) + C_2 \sqrt{r - s_m})^2} dr = \infty,$$

así, la demostración se completa por (3.19). \square

Proposición 3.4.2 Sea f_ϵ como en (3.9). Entonces

- (i) para cada $\epsilon \in]0, 1]$ y para cada $c \in \mathbf{R}$ los subniveles f_ϵ^c son subespacios métricos completos de $\Omega^1(\mathcal{D})$;
- (ii) para cada $\epsilon \in]0, 1]$ f_ϵ satisface (PS).

Demostración: (i) Fijamos $\epsilon \in]0, 1]$ y $c \in \mathbf{R}$. Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy en f_ϵ^c ; entonces es una sucesión de Cauchy también en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ y converge hacia una curva x en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Como

$$f_\epsilon(x_m) \leq c \quad \forall m \in \mathbf{N},$$

resulta

$$\|\dot{x}_m\|_2 \leq c \quad \text{and} \quad \int_0^1 \frac{\epsilon}{\phi^2(x_m)} ds \leq c \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Así, por reducción al absurdo, del Lema 3.4.1 se sigue

$$d = \inf \{ \phi(x_m(s)) \mid s \in I, m \in \mathbf{N} \} > 0. \quad (3.21)$$

Dado que la convergencia también es uniforme, $\phi(x(s)) \geq d$ para cada $s \in I$, luego $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$. Finalmente, por la continuidad de f_ϵ , (i) queda probada.

(ii) Sea ahora $\{x_m\}$ una sucesión de (PS); en particular

$$\{\|\dot{x}_m\|_2\} \quad \text{está acotada} \quad (3.22)$$

y así, por la desigualdad de Poincaré (2.9),

$$\{\|x_m\|_2\} \quad \text{está acotada.} \quad (3.23)$$

Por (3.22) y (3.23)

$$\{\|x_m\|\} \quad \text{está acotada}$$

luego, salvo una parcial,

$$x_m \rightarrow x \quad \text{débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (3.24)$$

Como $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ está embebido de manera compacta en $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^N)$, (3.24) implica

$$x_m \rightarrow x \quad \text{fuertemente en } \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^N), \quad (3.25)$$

véase la Sección 2.2. Razonando como en la prueba de (i), tenemos que $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$. Demostremos que

$$x_m \rightarrow x \quad \text{fuertemente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (3.26)$$

Por (3.24), la Proposición 2.3.6, (2.13), (2.27) y (2.33), denotando por $o(1)$ una sucesión infinitesimal, resulta

$$o(1) = f'_\epsilon(x_m)[\xi_m] = \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{\xi}_m \rangle ds - 2\epsilon \int_0^1 \frac{\langle \nabla \phi(x_m), \xi_m \rangle}{\phi^3(x_m)} ds \quad (3.27)$$

donde $\{\xi_m\}$ es como en (2.17). Puesto que la sucesión $\left\{\frac{\nabla\phi(x_m)}{\phi^3(x_m)}\right\}$ está uniformemente acotada por (3.21) y (3.25) y por (2.18)

$$\xi_m \rightarrow 0 \text{ uniformemente}$$

resulta

$$o(1) = \int_0^1 \frac{\langle \nabla\phi(x_m), \xi_m \rangle}{\phi^3(x_m)} ds.$$

Así (3.27) nos da

$$o(1) = \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{\xi}_m \rangle ds,$$

o sea, por (2.16),

$$o(1) = \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m - \dot{x} - \dot{\nu}_m \rangle ds.$$

De (2.19) se obtiene

$$\nu_m \rightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^2(I, \mathbf{R}^N)$$

luego

$$o(1) = \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m - \dot{x} \rangle ds = \int_0^1 \langle \dot{x}_m - \dot{x}, \dot{x}_m - \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x}_m - \dot{x} \rangle ds. \quad (3.28)$$

Finalmente como

$$\dot{x}_m \rightarrow \dot{x} \text{ débilmente en } L^2(I, \mathbf{R}^N)$$

por (3.28) tenemos

$$o(1) = \int_0^1 |\dot{x}_m - \dot{x}|^2 ds$$

luego

$$\dot{x}_m \rightarrow \dot{x} \text{ fuertemente en } L^2(I, \mathbf{R}^N). \quad (3.29)$$

Finalmente por (3.25)

$$x_m \rightarrow x \text{ fuertemente en } L^2(I, \mathbf{R}^N), \quad (3.30)$$

y (3.29), (3.30) implican (3.26). \square

Observación 3.4.3 Por la Proposición 3.4.2 y el Teorema 2.3.5, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, f_ϵ tiene un mínimo $x_\epsilon \in \Omega^1(\mathcal{D})$; es sencillo ver que existe un $K > 0$ tal que

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1],$$

(de hecho, por la forma de la penalización $f_\epsilon(x_\epsilon) \leq f_\epsilon(x_1) \leq f_1(x_1)$). Más aún, de (3.12) tenemos

$$E_\epsilon(x_\epsilon) = f_\epsilon(x_\epsilon) - 2 \int_0^1 \frac{\epsilon}{\phi^2(x_\epsilon(s))} ds \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1]$$

así

$$\frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(s), \dot{x}_\epsilon(s) \rangle \leq K + \frac{\epsilon}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \quad \forall \epsilon \in]0, 1], s \in I. \quad (3.31)$$

Observación 3.4.4 A continuación, necesitaremos relacionar el hessiano de una $\hat{\Psi} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ con el de su restricción Ψ sobre \mathcal{M} . Para cada $y \in \mathcal{M}$ consideramos las proyecciones $P(y)$ and $Q(y)$ respectivamente sobre $T_y\mathcal{M}$ y $T_y\mathcal{M}^\perp$, véase (2.10) y (2.11). Como \mathcal{M} es una subvariedad \mathcal{C}^3 de \mathbf{R}^N , existen $A_j^i \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tales que, para cada $y \in \mathcal{M}$, $v = (v^1, \dots, v^N) \in \mathbf{R}^N$

$$Q(y)[v] = \sum_{i,j=1}^N A_j^i(y) v^j e_i,$$

donde e_1, \dots, e_N es la base canónica de \mathbf{R}^N . Extendemos localmente la funciones A_j^i a funciones \mathcal{C}^2 (también denotadas por A_j^i) sobre \mathbf{R}^N . Para cada $y \in \mathbf{R}^N$, definimos la diferencial $dQ(y): \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ como

$$dQ(y)[v, w] = \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial A_j^i(y)}{\partial x_k} v^k w^j e_i \quad \forall v, w \in \mathbf{R}^N.$$

Si bien dQ podría depender de las extensiones de las funciones A_j^i , la restricción $dQ(y)$ sobre $T_y\mathcal{M} \times T_y\mathcal{M}$ está bien definida para cada $y \in \mathcal{M}$. Se puede probar, véase p.ej. [47, Lemma 8] que para cada $y \in \mathcal{M}$, $v \in T_y\mathcal{M}$:

$$H_\Psi(y)[v, v] = d^2\hat{\Psi}(y)[v, v] - d\hat{\Psi}(y)[dQ(y)[v, v]],$$

donde d y d^2 son la diferencial y la segunda diferencial sobre \mathbf{R}^N .

En seguida probaremos una estimación a priori para algunas familias de puntos críticos de los funcionales penalizados.

Lema 3.4.5 Sea $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ una familia en $\Omega^1(\mathcal{D})$ tal que, para cada $\epsilon \in]0,1]$, x_ϵ es un punto crítico de f_ϵ , y sea $K \in \mathbf{R}$ tal que

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0,1]. \quad (3.32)$$

Entonces $(\lambda_\epsilon(s) = \frac{2\epsilon}{\phi^3(x_\epsilon(s))})_{\epsilon \in]0,1]}$ está acotada en $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

Demostración: Sea $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ una familia de puntos críticos de f_ϵ que satisface (3.32) y pongamos para cada $\epsilon \in]0,1]$, $s \in \mathbf{N}$ $u_\epsilon(s) = \phi(x_\epsilon(s))$ y $u_\epsilon(s_\epsilon) = \min_{s \in I} u_\epsilon(s)$. Basta comprobar el lema cuando

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{\epsilon_m}(s_{\epsilon_m}) = 0 \quad (3.33)$$

donde $\{\epsilon_m\}$ es una sucesión infinitesimal y no decreciente en $]0,1]$, dado que

$$\lambda_{\epsilon_m}(s) \leq \lambda_{\epsilon_m}(s_{\epsilon_m}) \quad \forall s \in I.$$

Por simplicidad, en lo que sigue escribiremos para cada $m \in \mathbf{N}$ $u_{\epsilon_m} \equiv u_m$, $s_{\epsilon_m} \equiv s_m$, $x_{\epsilon_m} \equiv x_m$, $\lambda_{\epsilon_m} \equiv \lambda_m$. Por (3.32) y (2.9) existe $x \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$ tal que

$$x_m \rightarrow x \quad \text{uniformemente}, \quad (3.34)$$

véase también la demostración de la Proposición 3.4.2. Además, salvo una parcial,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s_0 \quad (3.35)$$

y como

$$|x_m(s_m) - x(s_0)| \leq \|x_m - x\|_\infty + |x(s_m) - x(s_0)| \quad (3.36)$$

por (3.34), (3.35), la continuidad de x y (3.33) obtenemos que $\{x_m(s_m)\}$ converge a $x(s_0) = y \in \partial\mathcal{D}$. Resulta pues

$$\phi(x_m(s_m)) \rightarrow \phi(x(s_0)) = 0$$

luego $s_0 \in]0, 1[$, dado que $\phi(p), \phi(q) > 0$. Sea U un entorno de y tal que se verifiquen (ii)–(iv) del Teorema 3.2.2. Nótese que por (3.32), véase también (3.17), para cada $s \in I$

$$u_m(s) \leq u_m(s_m) + C\sqrt{|s - s_m|} \leq u_m(s_m) + C\sqrt{|s - s_0| + |s_0 - s_m|}$$

para alguna $C > 0$ apropiada. Así de (3.33) y (3.35) se sigue que existe $\mu > 0$ tal que

$$x_m(s) \in U \cap \mathcal{D}, \quad (3.37)$$

para cada $s \in J = [s_0 - \mu, s_0 + \mu]$ y m suficientemente grande. Por la Proposición 2.1.11, (3.10), (3.11), (3.33) y (ii) del Teorema 3.2.2, tenemos por m grande

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m(s_m) &= H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - \lambda_m(s_m)|\nabla\phi(x_m(s_m))|^2 \leq \\ &H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - a^2\lambda_m(s_m). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nuestro objetivo es ahora proyectar las curvas x_m para m grande y $s \in J$ sobre las hipersuperficies casi-convexas $\phi^{-1}(a_m)$. Para esto consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\frac{\nabla\phi(\eta)}{|\nabla\phi(\eta)|^2} \\ \eta(0) = x \in U \cap \mathcal{D} \end{cases} \quad (3.39)$$

y llamemos $\eta(s, x) : \mathcal{U} \subset \mathbf{R} \times \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ al flujo asociado al problema de Cauchy (3.39), donde \mathcal{U} es el dominio maximal donde el flujo puede ser definido. Como

$$\frac{d}{ds}(\phi(\eta(s, x))) = -1$$

resulta

$$\phi(\eta(s, x)) = -s + \phi(x);$$

ahora nótese que por las hipótesis del Teorema 3.2.2 y (3.33), para cada $m \in \mathbf{N}$ existe $k_m \in \mathbf{N}$ tal que

$$a_{k_m} \leq \phi(x_m(s_m)) \leq \phi(x_m(s)) \quad \forall s \in I,$$

de modo que $\eta(s, x) \in \phi^{-1}(a_{k_m})$ si y sólo si $s = \phi(x) - a_{k_m}$. Escribamos para cada $s \in J$

$$\tau_m(s) = \phi(x_m(s)) - a_{k_m} \quad (3.40)$$

$$y_m(s) = \eta(\tau_m(s), x_m(s)). \quad (3.41)$$

Nótese que por (3.36), (3.37) y (iii) del Teorema 3.2.2, si m es suficientemente grande y μ es elegido convenientemente

$$(\tau_m(s), x_m(s)) \in \mathcal{U} \quad y_m(s) \in U \quad \forall s \in J. \quad (3.42)$$

Entonces, para m grande, podemos definir la proyección $\Pi_m : U \cap \mathcal{D} \rightarrow \phi^{-1}(a_{k_m})$ como

$$\Pi_m(x_m(s)) = y_m(s) \quad \forall s \in J.$$

Como para cada $s \in J$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(s) &= \eta_s(\tau_m(s), x_m(s)) \langle \nabla \phi(x_m(s)), \dot{x}_m(s) \rangle + \eta_x(\tau_m(s), x_m(s)) [\dot{x}_m(s)] = \\ &= \frac{\nabla \phi(y_m(s))}{|\nabla \phi(y_m(s))|^2} \dot{u}_m(s) + \eta_x(\tau_m(s), x_m(s)) [\dot{x}_m(s)] \end{aligned}$$

y, por la definición de Π_m , $\langle \dot{y}_m(s), \nabla \phi(y_m(s)) \rangle = 0$, resulta:

$$\langle \eta_x(\tau_m(s), x_m(s)) [\dot{x}_m(s)], \nabla \phi(y_m(s)) \rangle = \dot{u}_m(s).$$

Así, por la hipótesis (iii) del Teorema 3.2.2 tenemos para cada $s \in J$

$$\begin{aligned} |\dot{y}_m(s)|^2 &= |\eta_x(\tau_m(s), x_m(s)) [\dot{x}_m(s)]|^2 - \frac{\dot{u}_m^2(s)}{|\nabla \phi(y_m(s))|^2} \leq \\ &= C |\dot{x}_m(s)|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dado que s_m es un mínimo para u_m , de (3.38) y (iv) del Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} a^2 \lambda_m(s_m) &\leq H_\phi(x_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - \\ &= H_\phi(y_m(s_m)) [\dot{y}_m(s_m), \dot{y}_m(s_m)] + M \langle \dot{y}_m(s_m), \dot{y}_m(s_m) \rangle a_{k_m}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ahora, siguiendo la Observación 3.4.4, puesto que para cada $x \in \mathcal{D}$, $v, w \in \mathbf{R}^N$

$$L(x)[v, w] = d^2 \phi(x)[v, w] - d\phi(x)[dQ(x)[v, w]], \quad (3.45)$$

se deduce:

$$\begin{aligned} &H_\phi(x_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - H_\phi(y_m(s_m)) [\dot{y}_m(s_m), \dot{y}_m(s_m)] = \\ &L(x_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m)) [\dot{y}_m(s_m), \dot{y}_m(s_m)] = \\ &L(x_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] + \\ &L(y_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m)) [\dot{y}_m(s_m), \dot{y}_m(s_m)] = \\ &L(x_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] + \\ &L(y_m(s_m)) [\dot{x}_m(s_m) + \dot{y}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m) - \dot{y}_m(s_m)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A continuación denotaremos por M_1, \dots, M_7 constantes positivas adecuadas. Para manejar el miembro derecho de (3.46), obsérvese que, como L es una forma bilineal, para cada $v \in \mathbf{R}^N$ fijo

$$\sigma(x) = L(x)[v, v] = \sum_{i,j=1}^N L_{i,j} v_i v_j,$$

con $L_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$. Dado que $\phi \in \mathcal{C}^3$, $\eta \in \mathcal{C}^2$, usando el teorema del valor medio, para cada $x, y \in \mathbf{R}^N$

$$\sigma(x) - \sigma(y) = \langle \nabla \sigma(sy + (1-s)x), x - y \rangle \quad s \in]0, 1[.$$

Luego en particular, por la acotación de $\{\|x_m\|_\infty\}$ y $\{\|y_m\|_\infty\}$, tenemos por (iii) del Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} L(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] &\leq \\ M_1 |\dot{x}_m(s_m)|^2 |x_m(s_m) - y_m(s_m)|. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nótese que por (3.39), (3.41), la acotación de $\{\|x_m\|_\infty\}$, el teorema del valor medio, y (iii) del Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} |x_m(s_m) - y_m(s_m)| &= |\eta(0, x_m(s_m)) - \eta(\tau_m(s_m), x_m(s_m))| \leq \\ M_2 |\tau_m(s_m)| &= M_2 |u_m(s_m) - a_{k_m}|. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Así por (3.47), (3.48) y (3.33) resulta

$$\begin{aligned} L(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] - L(y_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] &\leq \\ M_3 |\dot{x}_m(s_m)|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Además de la acotación de $\{\|y_m\|_\infty\}$ y (3.43) se obtiene

$$\begin{aligned} L(y_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m) + \dot{y}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m) - \dot{y}_m(s_m)] &\leq \\ M_4 |\dot{x}_m(s_m)|^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Luego por (3.44), (3.46), (3.49), (3.50), (3.43), tenemos

$$a^2 \lambda_m(s_m) \leq M_5 |\dot{x}_m(s_m)|^2.$$

Así, (3.31) implica

$$\frac{\epsilon_m}{\phi^3(x_m(s_m))} \leq M_6 + M_7 \frac{\epsilon_m}{\phi^2(x_m(s_m))}. \quad (3.51)$$

Por (3.33), para un $\delta \in]0, 1[$ y m suficientemente grande

$$\phi(x_m(s_m)) \leq \frac{\delta}{M_7}$$

así por (3.51)

$$\lambda_m(s_m) \leq M_6 + \delta \lambda_m(s_m)$$

y la demostración queda completa. \square

Observación 3.4.6 Remarquemos que en la demostración anterior hemos usado la hipótesis de que \mathcal{D} es un dominio abierto de una variedad de Riemann; de hecho, bajo esta hipótesis la función en (3.45) está bien definida sobre el borde de \mathcal{D} , lo que permite su acotación.

Proposición 3.4.7 Sea $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ una familia en $\Omega^1(\mathcal{D})$ tal que, para cada $\epsilon \in]0,1]$, x_ϵ es un punto crítico de f_ϵ y sea $K \in \mathbf{R}$ tal que se verifica (3.32). Entonces existe una constante positiva β tal que

$$\phi(x_\epsilon(s)) \geq \beta \quad \forall s \in I, \epsilon \in]0,1]. \quad (3.52)$$

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que existen una sucesión infinitesimal y no creciente $\{\epsilon_m\}$ en $]0,1]$ y una sucesión $\{x_{\epsilon_m}\}$ de puntos críticos de f_{ϵ_m} que satisfacen (3.32) y tal que

$$\min_{s \in I} \phi(x_{\epsilon_m}(s)) \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

Definimos x_m, u_m, s_m, s_0, J y a_{k_m} como en el Lema 3.4.5; ya que para $s \in J$ y $m \in \mathbf{N}$ grande $y_m(s) \in U$, véase (3.42), (donde y_m está definida por (3.40) y (3.41)), por (iv) del Teorema 3.2.2 tenemos, como en (3.38),

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m(s) &\leq H_\phi(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - H_\phi(y_m(s))[\dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s)] + \\ &\quad M\phi(y_m(s))\langle \dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s) \rangle - \lambda_m(s)|\nabla\phi(x_m(s))|^2 \leq \\ &\quad H_\phi(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - H_\phi(y_m(s))[\dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s)] + \\ &\quad M\phi(y_m(s))\langle \dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s) \rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A continuación siempre supondremos que $s \in J$ y que $m \in \mathbf{N}$ sea suficientemente grande, y denotaremos por C_1, \dots, C_{12} constantes positivas adecuadas. Ahora por (3.45)

$$\begin{aligned} H_\phi(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - H_\phi(y_m(s))[\dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s)] &= \\ L(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - L(y_m(s))[\dot{y}_m(s), \dot{y}_m(s)] &= \\ L(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - L(y_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] + \\ L(y_m(s))[\dot{x}_m(s) + \dot{y}_m(s), \dot{x}_m(s) - \dot{y}_m(s)]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como en la demostración del Lema 3.4.5, dado que $\phi \in \mathcal{C}^3$, $\eta \in \mathcal{C}^2$, resulta, usando el teorema del valor medio, la acotación de $\{\|x_m\|_\infty\}$ y $\{\|y_m\|_\infty\}$ y (iii) del Teorema 3.2.2,

$$\begin{aligned} L(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] - L(y_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] &\leq \\ C_1|\dot{x}_m(s)|^2 u_m(s). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dado que $\eta_x(0, x)[v] = v$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(s) - \dot{y}_m(s) &= \eta_x(0, x_m(s))[\dot{x}_m(s)] - \\ \eta_x(\tau_m(s), x_m(s))[\dot{x}_m(s)] - \eta_s(\tau_m(s), x_m(s))\dot{u}_m(s), \end{aligned} \quad (3.57)$$

así por (3.57), el teorema del valor medio y (iii) del Teorema 3.2.2

$$\begin{aligned} L(y_m(s))[\dot{x}_m(s) + \dot{y}_m(s), \dot{x}_m(s) - \dot{y}_m(s)] &= \\ L(y_m(s))[\dot{x}_m(s) + \dot{y}_m(s), \eta_x(0, x_m(s))[\dot{x}_m(s)] - \eta_x(\tau_m(s), x_m(s))[\dot{x}_m(s)]] - \\ L(y_m(s))[\dot{x}_m(s) + \dot{y}_m(s), \eta_s(\tau_m(s), x_m(s))\dot{u}_m(s)] &\leq \\ C_2|\dot{x}_m(s)|^2 u_m(s) + B_m(s)\dot{u}_m(s) \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde

$$B_m(s) = -L(y_m(s))[\dot{x}_m(s) + \dot{y}_m(s), \eta_s(\tau_m(s), x_m(s))]$$

es una función C^1 . Por (3.31), (3.37) y el Lema 3.4.5 se tiene

$$\langle \dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s) \rangle \leq 2K + \lambda_m(s)\phi(x_m(s)) \leq C_3, \quad (3.59)$$

luego por (3.54), (3.56), (3.58) y (3.43) se deduce

$$\ddot{u}_m(s) \leq C_4 u_m(s) + B_m(s)\dot{u}_m(s). \quad (3.60)$$

Nótese que por (3.59) y (iii) del Teorema 3.2.2

$$|B_m(s)| \leq C_5 \quad (3.61)$$

y que (3.10), el Lema 3.4.5, y (ii) del Teorema 3.2.2 implican

$$|D_s \dot{x}_m(s)| \leq C_6. \quad (3.62)$$

Obsérvese que $\dot{x}_m(s) \in T_{x_m(s)}\mathcal{M}$ luego $Q(x_m(s))[\dot{x}_m(s)] = 0$ (donde Q es como en (2.11)) y

$$dQ(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] + Q(x_m(s))\ddot{x}_m = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x}_m(s) &= P(x_m(s))\ddot{x}_m(s) + Q(x_m(s))\ddot{x}_m(s) \\ &= D_s \dot{x}_m(s) - dQ(x_m(s))[\dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s)] \end{aligned}$$

(donde P es como en (2.10)) y también tenemos por (3.59) y (3.62) (véase también la Observación 3.4.8)

$$|\ddot{x}_m| \leq C_7. \quad (3.63)$$

Más aún, usando (iii) del Teorema 3.2.2, argumentos estándar muestran que

$$|\dot{B}_m(s)| \leq C_8. \quad (3.64)$$

Ahora bien, como $\dot{u}_m(s_m) = 0$, por (3.60), integrando por partes y usando (3.61), (3.64), resulta para $s > s_m$

$$\begin{aligned} \dot{u}_m(s) &= \int_{s_m}^s \ddot{u}_m d\tau \leq C_4 \int_{s_m}^s u_m d\tau + \int_{s_m}^s B_m \dot{u}_m d\tau = \\ &C_4 \int_{s_m}^s u_m d\tau + B_m(s)u_m(s) - B_m(s_m)u_m(s_m) - \int_{s_m}^s \dot{B}_m u_m d\tau \leq \\ &C_9 \int_{s_m}^s u_m d\tau + C_5 u_m(s) + C_5 u_m(s_m). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Luego integrando de nuevo sobre $[s_m, s]$ tenemos por (3.65)

$$\begin{aligned} u_m(s) &\leq u_m(s_m) + C_9 \int_{s_m}^s \left(\int_{s_m}^{\tau} u_m dr \right) d\tau + C_5 \int_{s_m}^s u_m d\tau + C_5 u_m(s_m) = \\ u_m(s) &\leq u_m(s_m) + C_9 \int_{s_m}^s (s-r) u_m dr + C_5 \int_{s_m}^s u_m d\tau + C_5 u_m(s_m) \leq \\ &C_{10} u_m(s_m) + C_{11} \int_{s_m}^s u_m d\tau. \end{aligned}$$

Del lema de Gronwall se obtiene

$$u_m(s) \leq C_{10} u_m(s_m) \exp(C_{11}(s - s_m)) \leq C_{12} u_m(s_m)$$

luego, por (3.53),

$$u_m \rightarrow 0 \text{ uniformemente en } [s_m, s].$$

Nótese ahora que por (3.35) se tiene que, para m grande, $[s_0 + \mu/2, s_0 + \mu] \subset [s_m, s]$. Entonces

$$u_m \rightarrow 0 \text{ uniformemente en } \left[s_0 + \frac{\mu}{2}, s_0 + \mu \right]$$

y razonando en la misma manera, llegamos a una contradicción porque $u_m(1) = \phi(q) > 0$. \square

Observación 3.4.8 Remarquemos que en (3.63) y (3.61) usamos la hipótesis de que \mathcal{D} es un dominio abierto de una variedad de Riemann (compárese con la Observación 3.4.4).

Demostración del Teorema 3.2.2:

Por la Observación 3.4.3 y la Proposición 3.4.7, encontramos una familia $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ de puntos críticos de f_ϵ tal que se cumple (3.52). Por (3.32) y (2.9), $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ está acotada en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$, así que existe una parcial $\{x_{\epsilon_m}\}$ tal que

$$x_{\epsilon_m} \rightarrow x \text{ débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N), \quad (3.66)$$

donde $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$ dado que la convergencia es también uniforme, y se mantiene (3.52). Ahora es sencillo comprobar que f alcanza su mínimo valor en x . En efecto, por (3.66), (3.9) y (3.52), como f es débilmente semicontinua inferiormente,

$$f(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) \leq f(y)$$

para cada $y \in \Omega^1(\mathcal{D})$, así pues, \mathcal{D} es convexo.

Ahora supongamos que \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo. Claramente no podemos aplicar directamente el Teorema 2.4.6 debido a la presencia del borde, sin embargo podemos razonar como en [28, Theorem 1.9]. Póngase para cada $c \in \mathbf{R}$

$$f_c = \{x \in \Omega^1(\mathcal{D}) \mid f(x) \geq c\} \quad f_{\epsilon,c} = \{x \in \Omega^1(\mathcal{D}) \mid f_\epsilon(x) \geq c\}.$$

Se puede comprobar que incluso si f no satisficiera la condición (PS),

$$\text{cat}_{\Omega^1(\mathcal{D})} f^c < \infty, \quad (3.67)$$

véase [28, Lemma 4.3]. Consideremos $\{C_m\}$ como en el Teorema 2.4.5; entonces para cada $m \in \mathbf{N}$, Γ_m no es vacío, véase (2.20). Por (2.22) y (3.67) existe $m = m(c) \in \mathbf{N}$ tal que, para cada $A \in \Gamma_m$

$$A \cap f_c \neq \emptyset$$

y dado que $f_c \subset f_{\epsilon,c}$, para cada $A \in \Gamma_m$ resulta

$$A \cap f_{\epsilon,c} \neq \emptyset \quad \forall \epsilon \in]0, 1].$$

Además, por la Proposición 3.4.2 y el Teorema 2.4.2, para cada $m \in \mathbf{N}$, $\epsilon \in]0, 1]$, los valores

$$c_{\epsilon,m} = \inf_{A \in \Gamma_m} \sup_{x \in A} f_{\epsilon}(x)$$

están bien definidos y son valores críticos de f_{ϵ} . Así obtenemos

$$c \leq c_{\epsilon,m} \quad \forall \epsilon \in]0, 1].$$

Sea ahora C un subconjunto compacto de Γ_m , véase las Observaciones 2.5.8(2); luego

$$c \leq c_{\epsilon,m} \leq \max f_{\epsilon}(C) \leq \max f_1(C) \quad \forall \epsilon \in]0, 1]. \quad (3.68)$$

Razonando como en la primera parte de la demostración, obtenemos la existencia de un punto crítico de f . Además de (3.68) se sigue, véase [28, Theorem 1.9],

$$f(x) \geq c,$$

así, siendo c arbitrario, se deduce la tesis. \square

Demostración del Teorema 3.2.6:

La única diferencia con la demostración del Teorema 3.2.2 atañe a las estimaciones a priori de la Proposición 3.4.7 que aquí son más sencillas dado que no necesitan una proyección. De hecho, definiendo x_m, u_m, s_m, J como en la Proposición 3.4.7, tenemos por (ii) y (iii) del Teorema 3.2.6

$$\ddot{u}_m(s) \leq M\phi(x_m(s))\langle \dot{x}_m(s), \dot{x}_m(s) \rangle - \frac{2\epsilon_m a^2}{\phi^3(x_m(s))},$$

para m grande. Dado que se cumple (3.31), tenemos

$$\ddot{u}_m(s) \leq M_1 u_m(s) + M_2 \frac{\epsilon_m}{u_m(s)} - M_3 \frac{\epsilon_m}{u_m^3(s)}$$

para $M_1, M_2, M_3 > 0$, así que, si δ es bastante pequeño

$$\ddot{u}_m(s) \leq M_1 u_m(s).$$

Entonces, por el Lema de Gronwall, llegamos a una contradicción. \square

3.5 Aplicaciones

(a) **Algunos ejemplos.** (1) Primero, probaremos que los Teoremas 3.2.2, y 3.2.6 pueden aplicarse a ejemplos para los cuales no son aplicables ni las consideraciones elementales para el borde diferenciable ni el Teorema 3.2.1. Sea $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un cilindro C en \mathbf{R}^3 y sea H una hélice en C . Pongamos $\mathcal{D} = C \setminus H$ y tomemos ϕ igual a la distancia a H sobre una cinta S en torno a H . Señalemos que \mathcal{D} no puede ser considerado como una variedad con borde $\partial\mathcal{D} = H$. Claramente, los Teoremas 3.2.2 y 3.2.6 son aplicables y, además, podemos perturbar la métrica para que la constante M en (3.7) sea positiva (por ejemplo, cambiando conformemente la métrica simétricamente en torno a H sobre S , véase la formula (3.71)); así, el Teorema 3.2.1 podría no ser ya aplicable.

A continuación daremos un ejemplo en el cual los Teoremas 3.2.2 y 3.2.6 no son aplicables, y uno en el cual el Teorema 3.2.6 es aplicable pero no lo es el Teorema 3.2.2.

(2) El ejemplo que sigue muestra que el Teorema 3.2.1 podría ser aplicable cuando no lo son los Teoremas 3.2.2, 3.2.6, incluso cuando la condición para el hessiano en el Teorema 3.2.6 se satisface. Consideremos $\mathcal{D} =]0, \infty[\times]0, \infty[$, y $\mathcal{M} = \mathbf{R}^2$ con la métrica euclídea usual (esta métrica podría ser perturbada como sugerimos en el último ejemplo para no hacerlo trivial; nótese que las condiciones (ii), (iii) en el Teorema 3.2.2 y (ii) en el Teorema 3.2.6 son independientes de la métrica sobre \mathcal{M}). Si $\phi(x, y) = \sqrt{xy}$, entonces

$$|\nabla\phi(x, y)|^2 = \frac{x^2 + y^2}{4xy} > \frac{1}{4},$$

así que la primera desigualdad en (ii) de los Teoremas 3.2.2, 3.2.6 se verifica, pero no la segunda. Por otra parte, si elegimos $\hat{\phi}(x, y) = xy$ entonces

$$|\nabla\hat{\phi}(x, y)|^2 = x^2 + y^2,$$

que satisface la acotación superior alrededor de cada punto, pero no la inferior (compárese con la Observación 3.2.5(2)). Sin embargo, se verifica directamente que el Teorema 3.2.1 es aplicable tanto para ϕ como para $\hat{\phi}$.

(3) Está claro que la condición (iii) del Teorema 3.2.6 sobre todos los vectores tangentes v podría no mantenerse bajo la correspondiente hipótesis (iv) del Teorema 3.2.2. El ejemplo siguiente muestra que el Teorema 3.2.6 podría ser aplicable cuando no lo es el Teorema 3.2.2, a causa de la hipótesis (iii) de este teorema y al requisito de que \mathcal{D} sea un subconjunto de una variedad completa. Consideremos $\mathcal{D} = \mathcal{M} = \mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}$ con la métrica riemanniana dada en coordenadas polares r, θ por

$$dx^2 = dr^2 + \frac{1}{r^2}d\theta^2.$$

Elegida $\phi(r, \theta) = r$, resulta $\nabla\phi = \partial_r$, luego $|\nabla\phi(r, \theta)| = 1$. Cálculos estándar muestran que el flujo (normalizado) de $\nabla\phi$ es $\eta(s, (r, \theta)) = (r - s, \theta)$, y que la norma de la

derivada parcial $\eta_{(r,\theta)}$ no está acotada, así que no podemos aplicar el Teorema 3.2.2. Más aún, nótese que \mathcal{M} no es completa y su curvatura a lo largo de geodésicas radiales incompletas diverge, luego \mathcal{D} no es isométrico a un dominio de una variedad de Riemann completa ($\partial_c \mathcal{D}$ es topológicamente una circunferencia). De cualquier modo, es sencillo verificar que el Teorema 3.2.6 es aplicable.

(b) Trayectorias de sistemas lagrangianos. El interés en el estudio de la conexión geodésica de una variedad de Riemann completa está relacionado con la existencia de las trayectorias de un sistema lagrangiano que unen dos puntos fijos. Más precisamente, consideremos un potencial $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ acotado superiormente en un dominio \mathcal{D} y el sistema

$$\begin{cases} D_s \dot{x} + \nabla V(x) = 0 \\ x(0) = p, x(1) = q. \end{cases} \quad (3.69)$$

Cada solución $x : I \rightarrow \mathcal{D}$ de (3.69) tiene energía constante (véase también la Subsección 2.6.4), esto es: existe $E(x) \in \mathbf{R}$ tal que

$$E(x) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + V(x) \quad \forall s \in I.$$

Fijemos $E > \sup_{\mathcal{D}} V$ y consideremos la métrica de Jacobi

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_E = (E - V(x)) \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{sobre } \overline{\mathcal{D}}. \quad (3.70)$$

Dado que $\overline{\mathcal{D}}$ es completa para $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es también completa para $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y luego podemos extender $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a una métrica riemanniana completa sobre toda la variedad \mathcal{M} , véase la Proposición 3.1.8. Gracias al siguiente principio de Maupertius–Jacobi, véase [63], las soluciones de (3.69) con energía E , $E > \sup_{\mathcal{D}} V$, son pregeodésicas sobre \mathcal{D} respecto a la métrica de Riemann $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y viceversa.

Proposición 3.5.1 *Sea $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ acotado superiormente sobre \mathcal{D} y fijemos $E \in \mathbf{R}$, con $E > \sup_{\mathcal{D}} V$. Entonces, cada geodésica para la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ que une $p, q \in \mathcal{D}$, es, salvo una reparametrización, una solución de (3.69) cuya energía es E , y viceversa.*

Sea ϕ una función que satisface las condiciones (i), (ii), (iii) del Teorema 3.2.2, que son independientes de la métrica. Si la hipótesis (iv) se satisface respecto a la métrica (3.70), queda verificada la existencia de al menos una solución de (3.69) con energía E . Nótese que el hessiano de ϕ respecto a las dos métricas está relacionado por la siguiente fórmula, véase [33, p. 5]:

$$\begin{aligned} H_\phi^E(x)[v, v] = \\ H_\phi(x)[v, v] + \langle \nabla \phi(x), \nabla u(x) \rangle \langle v, v \rangle - 2 \langle \nabla u(x), v \rangle \langle \nabla \phi(x), v \rangle \end{aligned} \quad (3.71)$$

para cada $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x \mathcal{M}$ donde

$$u(x) = \frac{1}{2} \log(E - V(x)). \quad (3.72)$$

Luego, si (iv) del Teorema 3.2.2 se verifica respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, también queda satisfecha para $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ cuando para cada $x \in \partial\mathcal{D}$ existen un entorno U y una $M' > 0$ tal que

$$\langle \nabla\phi(x), \nabla V(x) \rangle \geq -M'\phi(x) \quad \forall x \in \phi^{-1}(a_m) \cap U \quad (3.73)$$

Resumiendo, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 3.5.2 [9] *Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann completa y supongamos que existe una función positiva y C^4 ϕ sobre \mathcal{D} que satisface (i)–(iv) del Teorema 3.2.2. Entonces, si $V \in C^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ está acotado superiormente sobre \mathcal{D} y se mantiene (3.73), para cada $E > \sup_{\mathcal{D}} V$ existe una solución con energía E de (3.69). Más aún, si \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo, entonces para cada $E > \sup V$ existen infinitas soluciones de (3.69) con energía E .*

Para aclarar el significado de (3.73) podemos pensar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.3 *Sea $\mathcal{D} =]0, \infty[\times \mathbf{R}$, $\mathcal{M} = \mathbf{R}^2$ con la métrica euclídea y supongamos que el potencial depende de una variable, digamos $V(x, y) = V(x)$. Si V es creciente, se cumple (3.73) dado que $\phi(x, y) = x$, por lo que las soluciones de (3.69) están lejos del borde de \mathcal{D} .*

Capítulo 4

Geodésicas cerradas y trayectorias periódicas

Como hemos anunciado en la Observación 2.6.7, en este capítulo estudiaremos la existencia de geodésicas cerradas sobre una variedad riemanniana (posiblemente no compacta o no completa) \mathcal{M} que es convexa cerca de sus puntos de borde (singular), extendiendo el resultado en [30] (donde se consideran variedades no compactas) y un resultado en [37] (véase a la Observación 4.2.2).

Nuestras técnicas también funcionan para el problema de la existencia de soluciones periódicas de

$$D_t \dot{x} + \nabla_x V(x, t) = 0 \quad (4.1)$$

donde $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ (véase también Subsección 2.6.4). Este problema ha sido estudiado desde dos puntos de vista diferentes:

- *problema de periodo fijo* (cuando se supone que V es a -periódico en t), esto es: dado $a > 0$, encontrar soluciones periódicas de (4.1) que tienen periodo a ;
- *problema de energía fija* (cuando V no depende de la variable temporal), esto es: dada $E \in \mathbf{R}$, encontrar soluciones periódicas de (4.1) con energía E .

Para el problema de periodo fijo, se han obtenido resultados bajo diferentes hipótesis y con distintas técnicas en [18] cuando \mathcal{M} es compacta y en [95], [3] en el caso general de un dominio abierto \mathcal{D} con borde $\partial_c \mathcal{D}$ que satisface (i)–(iii) del Teorema 3.2.6. El problema de energía fija ha sido estudiado en [82] sobre variedades con borde usando un enfoque basado sobre el uso de un funcional introducido por Van Groesen en [112].

Estudiaremos estos dos problemas sobre variedades que son convexas cerca de sus puntos de borde. Una consecuencia ulterior de los resultados de este capítulo se verá en el Capítulo 7. En la Sección 4.1 discutiremos la noción de variedad convexa cerca de sus puntos de borde, en la Sección 4.2 expondremos los resultados, luego en la Sección 4.3 y en la Sección 4.4 daremos, respectivamente, la demostración del resultado principal y de su aplicaciones a la trayectorias periódicas.

4.1 Preliminares

Sean \mathcal{M} una variedad de Riemannian y $\overline{\mathcal{M}}^c$ su completación canónica de Cauchy. Consideraremos el caso general de que $\partial_c \mathcal{M}$ es sólo un subconjunto de $\overline{\mathcal{M}}^c$.

Definición 4.1.1 *Le variedad de Riemann \mathcal{M} es convexa cerca de su borde (CCB) si existen $\delta, b > 0$ y una función no negativa $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{M}}^c, \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ que satisfacen:*

- (i) $\phi^{-1}(0) = \partial_c \mathcal{M}$;
- (ii) $0 < |\nabla \phi(x)| \leq b$ para cada $x \in \mathcal{M}$ con $0 < \phi(x) < \delta$;
- (iii) la desigualdad (3.3) se mantiene para cada $x \in \mathcal{M}$ con $0 < \phi(x) < \delta$ y para cada $v \in T_x \mathcal{M}$ tal que $\phi'(x)[v] = 0$.

Observaciones 4.1.2 (1) Es posible expresar la Definición 4.1.1 sin mencionar $\partial_c \mathcal{M}$ y $\overline{\mathcal{M}}^c$. Simplemente, supóngase que ϕ es una función \mathcal{C}^2 positiva sobre \mathcal{M} , y reemplácese (i) por:

(i') Para cada curva $\gamma : [0, 1[\rightarrow \mathcal{M}$ de velocidad constante que no puede extenderse continuamente a 1, se tiene: $\lim_{t \rightarrow 1} \phi(\gamma(t)) = 0$.

La condición (i') es también equivalente a la siguiente, que ha sido largamente usada en las referencias antes mencionadas:

(i'') Para cada $\eta > 0$ el conjunto $\{x \in \mathcal{M} \mid \phi(x) \geq \eta\}$ es completo.

Sin embargo, nuestras hipótesis para CCB son más débiles que las anteriores hipótesis de convexidad impuestas para obtener geodésicas cerradas (comparar con [37]) y trayectorias periódicas (comparar con [95], [82], [3]), véase la Observación 4.2.2.

(2) La condición (ii) garantiza que los subconjuntos de nivel $\phi^{-1}(\rho)$ de ϕ son hipersuperficies regulares para ρ pequeño, $0 < \rho < \delta$, y estas hipersuperficies no se separan mucho; por (iii) cada hipersuperficie es el borde convexo de $\phi^{-1}([\rho, \infty[)$.

Observación 4.1.3 Supóngase que $\overline{\mathcal{M}}$ es una variedad con borde diferenciable. Si \mathcal{M} tiene borde convexo, éste no es necesariamente CCB. Por ejemplo, $\mathcal{M} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ conforme a la euclídea

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_R = \exp 2u \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

con $u(x, y) = -x + \frac{1}{2}x^2y$, tiene borde estrictamente convexo $\partial \mathcal{M} = \{0\} \times \mathbf{R}$ para $\phi(x, y) = x$, véase la Definición 3.1.9, pero no es CCB. De hecho, de (3.71), resulta para cada $p \in \overline{\mathcal{M}}, v \in T_p \overline{\mathcal{M}}$ tal que $\langle v, v \rangle = 1$ y $\phi'(p)[v] = 0$,

$$\begin{aligned} H_\phi^R(p)[v, v] &= H_\phi(p)[v, v] + \langle \nabla \phi(p), \nabla u(p) \rangle = \\ &= H_\phi(p)[v, v] + (xy - 1) \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial \phi}{\partial y}(p), \end{aligned}$$

entonces para nuestra elección de ϕ tenemos sobre $\partial \mathcal{M}$

$$H_\phi^R(p)[v, v] = -1,$$

así $\partial \mathcal{M}$ es (estrictamente) convexa, mientras que las hipersuperficies $\phi^{-1}(\delta)$ no lo son. Sin embargo, si $\partial \mathcal{M}$ es compacta y variacionalmente estrictamente convexa (véase la Definición 3.1.9), se puede comprobar que \mathcal{M} es CCB.

4.2 Resultados

Antes de enunciar el resultado principal de este capítulo, ponemos para cada $x \in \mathcal{M}$

$$K(x) = \sup \{K(\pi) \mid \pi \subset T_x \mathcal{M}\}, \quad (4.2)$$

donde $K(\pi)$ es la curvatura seccional del plano 2-dimensional π .

Teorema 4.2.1 [8] *Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann CCB. Supóngase que, para algún $x_0 \in \mathcal{M}$,*

(i)

$$\limsup_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} K(x) \leq 0;$$

(ii) *existen un cuerpo \mathcal{F} y $q \in \mathbf{N}$, $q > 2 \dim \mathcal{M}$ tal que*

$$H_q(\Lambda(\mathcal{M}), \mathcal{F}) \neq \{0\} \quad (4.3)$$

(véase la Observación 2.5.9).

Entonces existe una geodésica cerrada no trivial sobre \mathcal{M} .

Nótese que si la variedad está acotada, todas las hipótesis en infinito pueden suprimirse. La demostración del Teorema 4.2.1 será desarrollada usando métodos variacionales. De hecho, recordemos que las geodésicas cerradas son los puntos críticos de la acción sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$, véase la Subsección 2.6.2.

Observación 4.2.2 La existencia de geodésicas cerradas ha sido también demostrada en [37] bajo hipótesis diferentes de las nuestras. De hecho en [37] se imponen las siguientes hipótesis (usando nuestra Definición 4.1.1):

($\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle$) es una variedad de Riemann CCB no contráctil en sí misma con borde de Cauchy compacto, $\pi_1(\mathcal{M})$ es finito o contiene infinitas clases de conjugación, \mathcal{M} admite una función \mathcal{C}^2 , U , (estrictamente) convexa fuera de un subconjunto compacto de \mathcal{M} y tal que la preimagen de cada subconjunto compacto está acotada.

Estas hipótesis implican (véase [11]) la existencia de una sucesión $\{u_m\}$ de valores regulares de U tal que para cada $m \in \mathbf{N}$ el subconjunto abierto $U^{-1}(]0, u_m[)$ es una variedad de Riemann acotada y CCB. Así, por el Teorema 4.2.1, existen geodésicas cerradas bajo hipótesis de topología no trivial (y ninguna hipótesis sobre la curvatura).

Más aún en [11] se muestra un ejemplo de una variedad riemanniana con borde de Cauchy compacto y que satisface (i) del Teorema 4.2.1 que no tiene borde CCB y que tampoco tiene geodésicas cerradas no triviales. Así, al menos cuando el borde de Cauchy es compacto, nuestra hipótesis CCB es la mejor que podemos imponer para obtener geodésicas cerradas.

Demostraremos nuestro resultado usando (i)–(ii) del Teorema 4.2.1, que se introdujeron por primera vez en [30] para el estudio de geodésicas cerradas sobre variedades de Riemann no compactas (sin borde de Cauchy); estas hipótesis, que son intrínsecas porque involucran sólo la métrica de la variedad, permiten de obtener la existencia de una geodésica cerrada estimando el índice de Morse de algunos puntos críticos.

Sea ahora $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ y consideremos el siguiente sistema lagrangiano sobre \mathcal{M} :

$$\begin{cases} D_t \dot{x} + \nabla V(x) = 0 \\ x(0) = x(a) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(a) \end{cases} \quad (4.4)$$

para $a \in \mathbf{R}$. A una solución $x : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$ de (4.4), o *trayectoria periódica* (de periodo a), se le llama no trivial si no es constante. A dos trayectorias periódicas se les llama geoméricamente distintas si sus imágenes son diferentes. Claramente como (4.4) es un sistema autónomo, si x es una solución, la energía

$$E(x) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + V(x) \quad (4.5)$$

es constante sobre $[0, a]$.

Corolario 4.2.3 [8] *Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann CCB. Supóngase que $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ está acotado superiormente y que para algún $x_0 \in \mathcal{M}$ las hipótesis (i)–(ii) del Teorema 4.2.1 se verifican junto a las siguientes*

(i)

$$\limsup_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} H_V(x)[v, v] \leq 0,$$

donde para cada $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x \mathcal{M}$ es un vector unitario;

(ii) existe $\nu > 0$ tal que, para cada $x \in \mathcal{M}$ con $\phi(x) < \nu$:

$$\langle \nabla \phi(x), \nabla V(x) \rangle \geq 0. \quad (4.6)$$

Entonces para cada $E \in \mathbf{R}$ con $E > \sup V$ existe una solución periódica no trivial de (4.4) sobre \mathcal{M} con energía E .

Finalmente, sea $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ a -periódico en $t \in \mathbf{R}$ y consideremos el siguiente sistema lagrangiano sobre \mathcal{M} :

$$\begin{cases} D_t \dot{x} + \nabla V_x(x, t) = 0 \\ x(0) = x(a) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(a) \end{cases} \quad (4.7)$$

para $a \in \mathbf{R}$. De nuevo, a una solución $x : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$ de (4.4), o *trayectoria periódica* (de periodo a), se le llama no trivial si es no constante. Es válido el siguiente teorema, cuya prueba resulta bastante similar a la del Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.4 *Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann CCB. Supóngase que $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ está acotado superiormente, que es a -periódico en t , y que para algún $x_0 \in \mathcal{M}$ la hipótesis (i) del Teorema 4.2.1 se mantiene. Supongamos además que*

(i) para cada $t \in \mathbf{R}$

$$\limsup_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} H_V(x, t)[v, v] \leq 0,$$

donde para cada $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x \mathcal{M}$ es un vector unitario;

(ii) existe $\nu > 0$ tal que, para cada $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathcal{M}$ con $\phi(x) < \nu$:

$$\langle \nabla \phi(x), \nabla_x V(x, t) \rangle \geq 0; \quad (4.8)$$

(iii) existen un cuerpo \mathcal{F} e infinitos $q \in \mathbf{N}$ tales que

$$H_q(\Lambda(\mathcal{M}), \mathcal{F}) \neq \{0\}. \quad (4.9)$$

Entonces existe una solución no trivial de (4.7) sobre \mathcal{M} .

Observación 4.2.5 Remarquemos que, cuando trabajamos con sistemas no autónomos, genéricamente no tiene por qué haber trayectorias constantes. En la demostración del Teorema 4.2.4 resultará claro que para evitarlas sólo necesitaremos que (4.9) se mantenga para un $q \in \mathbf{N}$ suficientemente grande (esta hipótesis debería ser comparada con la hipótesis (V_4) en [95, Theorem 0.2]). Más aún, llamemos no equivalentes a dos trayectorias periódicas si tienen diferentes longitudes. De (iii) obtenemos la existencia de infinitas trayectorias no equivalentes y no triviales.

4.3 Demostración del Teorema 4.2.1

Para encontrar puntos críticos de la acción f sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$ (véase la Sección 2.2) aplicaremos el Teorema 2.5.7. Como \mathcal{M} podría ser no compacta, tiene borde y nuestro problema tiene una naturaleza periódica, en nuestro caso hay sucesiones de Palais–Smale que no están acotadas en $\Lambda^1(\mathcal{M})$, y hay sucesiones de Palais–Smale que podrían converger hacia una curva que “toca” el borde $\partial_c \mathcal{M}$; así penalizaremos oportunamente el funcional f , siguiendo [26] y [30]. Esta penalización permite encontrar puntos críticos de f : de hecho, aplicaremos el Teorema 2.5.7 a los funcionales penalizados, y luego, gracias a unas estimaciones a priori, encontraremos puntos críticos de f , o sea, geodésicas cerradas.

Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, consideremos una función creciente y no negativa $\psi_\epsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tal que

$$\begin{cases} \psi_\epsilon(s) = 0 & \text{si } s \leq 1/\epsilon \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_\epsilon(s) = \infty \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\psi'_\epsilon(s) > 0 \quad \text{si } s > \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.11)$$

y

$$\psi_\epsilon(s) \geq a_\epsilon s - b_\epsilon \quad (4.12)$$

para algunas $a_\epsilon > 0, b_\epsilon \geq 0$. Pongamos

$$U_\epsilon(x) = \psi_\epsilon\left(\frac{1}{\phi^2(x)}\right), \quad (4.13)$$

donde ϕ es como en la Definición 4.1.1. Sea ahora $W \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ una función no negativa tal que

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} W(x) = \infty \quad (4.14)$$

y pongamos para cada $\epsilon \in]0, 1]$

$$W_\epsilon(x) = \psi_\epsilon(W(x)). \quad (4.15)$$

Consideremos sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$ la estructura riemanniana

$$\langle v, v \rangle_x = \int_0^1 \langle D_s v, D_s v \rangle ds + \langle v(0), v(0) \rangle \quad (4.16)$$

para cada $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, $v \in T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$ (de hecho, si $v \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ es tal que $\langle v, v \rangle_x = 0$, se deduce que $v(s) = 0$ sobre todo I) y consideremos sobre $\Lambda^1(\mathcal{M})$ los funcionales penalizados

$$f_\epsilon(x) = f(x) + \int_0^1 U_\epsilon(x) ds + W_\epsilon(x(0)). \quad (4.17)$$

Para aplicar el Teorema 2.5.7 a los funcionales penalizados (4.17), tenemos que probar algunos lemas.

Lema 4.3.1 *Para cada $\epsilon \in]0, 1]$ sea x_ϵ un punto crítico de f_ϵ . Entonces, $H_{f_\epsilon}(x_\epsilon)$ define un operador de Fredholm de índice 0.*

Demostración: Fijemos $\epsilon \in]0, 1]$ y consideremos un punto crítico $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ de f_ϵ . Para cada $v \in T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$ resulta

$$H_{f_\epsilon}(x)[v, v] = H_f(x)[v, v] + \int_0^1 H_{U_\epsilon}(x)[v, v] ds + H_{W_\epsilon}(x(0))[v(0), v(0)], \quad (4.18)$$

donde $H_{U_\epsilon}(x)$ y $H_{W_\epsilon}(x)$ denotan, respectivamente, el hessiano de U_ϵ en x y el hessiano de W_ϵ en $x(0)$ y, véase [30, Lemma 4.3],

$$H_f(x)[v, v] = \int_0^1 \left[\langle D_s v, D_s v \rangle - \langle R_{(v, \dot{x})} \dot{x}, v \rangle \right] ds \quad (4.19)$$

donde $R_{(\cdot, \cdot)}$ es el tensor de curvatura seccional de la métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. - De (4.18) y (4.19) se tiene que $H_{f_\epsilon}(x)$ es una perturbación compacta del producto escalar (4.16) sobre $T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$, porque $H^1(S^1, \mathbf{R}^N)$ está compactamente embebido en $L^2(S^1, \mathbf{R}^N)$, con $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, así $H_{f_\epsilon}(x)$ define un operador de Fredholm de índice 0. \square

A continuación demostraremos el análogo del Lema 3.4.1 cuando \mathcal{M} es una variedad de Riemann CCB y $\Omega^1(\mathcal{D})$ está remplazado por $\Lambda^1(\mathcal{M})$. Por esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.3.2 *Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann CCB. Entonces existe $\bar{\phi} \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{M}}^c, \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ verificando (i)–(iii) de la Definición 4.1.1 y tal que $|\nabla \bar{\phi}(x)| \leq B$ para alguna $B > 0$ y para cada $x \in \mathcal{M}$.*

Demostración: Sea $\hat{\mu}_1 : [0, \infty[\rightarrow I$ una función creciente y diferenciable tal que $\hat{\mu}_1([0, \delta/3]) = 1$, $\hat{\mu}_1([\delta/3, 2\delta/3]) > 0$, $\hat{\mu}_1([2\delta/3, \infty]) = 0$ y pongamos $\hat{\mu}_2 := 1 - \hat{\mu}_1$. Definimos para cada $x \in \mathcal{M}$ $\mu_i(x) = \hat{\mu}_i(\phi(x))$, $i \in \{1, 2\}$ y

$$\bar{\phi}(x) = \mu_1(x)\phi(x) + \mu_2(x).$$

Como por construcción

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad \text{con} \quad 0 < \phi(x) < \delta/3,$$

$\bar{\phi}$ satisface (i)–(iii) de la Definición 4.1.1 (por $\delta < 3$). Además, dado que para cada $x \in \mathcal{M}$

$$\nabla \bar{\phi}(x) = \phi(x) \nabla \mu_1(x) + \mu_1(x) \nabla \phi(x) + \nabla \mu_2(x)$$

por la acotación de $\hat{\mu}_i, i \in \{1, 2\}$, se tiene la existencia de $B_1 > 0$ tal que

$$|\nabla \bar{\phi}(x)| \leq B_1 \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad \text{con} \quad \delta/3 \leq \phi(x) < 2\delta/3,$$

y puesto $B = \max\{b, B_1\}$ queda demostrado el lema (para $\phi(x) \geq 2\delta/3$ resulta $\nabla \bar{\phi}(x) = 0$). \square

Lema 4.3.3 Sea \mathcal{M} una variedad de Riemann y supongamos que existen $\delta, b > 0$ y una función no negativa $\phi \in C^0(\overline{\mathcal{M}}^c, \mathbf{R}) \cap C^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ tal que:

- (i) $\phi^{-1}(0) = \partial_c \mathcal{M}$;
- (ii) $0 < |\nabla \phi(x)| \leq b$ para cada $x \in \mathcal{M}$ con $0 < \phi(x) < \delta$.

Sea $\{x_m\}$ una sucesión en $\Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que

$$\sup_{m \in \mathbf{N}} \|\dot{x}_m\|_2 < \infty \quad (4.20)$$

y supongamos que $\{s_m\}$ es una sucesión en I tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m(s_m)) = 0. \quad (4.21)$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 U_\epsilon(x_m) ds = \infty. \quad (4.22)$$

Demostración: Por (4.12) es suficiente probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{\phi^2(x_m)} ds = \infty. \quad (4.23)$$

Sea $\bar{\phi}$ como en el Lema 4.3.2; luego en particular

$$|\nabla \bar{\phi}(x_m(s))| \leq B \quad \forall s \in I, m \in \mathbf{N}. \quad (4.24)$$

Si hubiese $\eta > 0$ tal que $1 - s_m > \eta$ para cada $m \in \mathbf{N}$, por (4.24) y (4.20) tendríamos para $s \in [s_m, 1]$, como en (3.17),

$$\bar{\phi}(x_m(s)) \leq \bar{\phi}(x_m(s_m)) + C_1 \sqrt{s - s_m} \quad (4.25)$$

para alguna $C_1 > 0$. Como

$$\bar{\phi}^2(x_m(s)) \leq 2 \left[\bar{\phi}^2(x_m(s_m)) + C_1^2 (s - s_m) \right]$$

tenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\bar{\phi}^2(x_m)} ds \geq \frac{1}{2} \int_{s_m}^1 \frac{1}{\bar{\phi}^2(x_m(s_m)) + C_1^2(s - s_m)} ds,$$

y argumentos estándar muestran que por (4.21), se mantiene (4.23). Si para cada $m \in \mathbf{N}$ hubiese $k_m \in \mathbf{N}$ tal que $1 - s_{k_m} \leq 1/m$, por (4.24) tendríamos para cada $m \in \mathbf{N}$, $s \in [0, s_{k_m}]$

$$\bar{\phi}(x_{k_m}(s)) \leq \bar{\phi}(x_{k_m}(s_{k_m})) + C_1 \sqrt{s_{k_m} - s}$$

para alguna $C_1 > 0$ y, realizando los razonamientos análogos, el lema queda demostrado. \square

En virtud del lema que acabamos de demostrar tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.4 *Sea f_ϵ como en (4.17). Entonces,*

- (i) *para cada $\epsilon \in]0, 1]$ y para cada $c \in \mathbf{R}$ los subniveles f_ϵ^c son subespacios métricos completos de $\Lambda^1(\mathcal{M})$;*
- (ii) *para cada $\epsilon \in]0, 1]$, f_ϵ satisface la condición (PS).*

Demostración: (i) Fijemos $\epsilon \in]0, 1]$ y $c \in \mathbf{R}$. Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy en f_ϵ^c , luego convergente hacia una curva $x \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Como

$$f_\epsilon(x_m) \leq c \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad (4.26)$$

se mantienen (4.20) y

$$\int_0^1 U_\epsilon(x_m) ds \leq c \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Entonces por el Lema 4.3.3 se tiene

$$d = \inf \{ \phi(x_m(s)) \mid s \in I, m \in \mathbf{N} \} > 0$$

y podemos acabar la demostración razonando como en la demostración de (i) de la Proposición 3.4.2.

(ii) Sea $\{x_m\}$ una sucesión (PS); en particular se mantiene (4.20). Más aún de (4.26) y (4.14) se sigue

$$\sup \{ d(x_m(s), x_0) \mid s \in I, m \in \mathbf{N} \} < \infty. \quad (4.27)$$

Entonces,

$$\{\|x_m\|_2\} \quad \text{está acotada;}$$

así, por (4.20), tenemos que

$$\{\|x_m\|\} \quad \text{está acotada}$$

y, salvo parciales, existe $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que

$$x_m \rightarrow x \text{ débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (4.28)$$

Realizando los razonamientos análogos a los de la demostración de (ii) de la Proposición 3.4.2, se demuestra que esta convergencia es fuerte. \square

Claramente, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, f_ϵ está acotado por abajo, así por el Lema 4.3.1, la Proposición 4.3.4 y la Observación 2.5.9, podemos aplicar el Teorema 2.5.7 para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.3.5 *Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, existe un punto crítico $x_{\epsilon, q}$ de f_ϵ correspondiente al valor crítico*

$$c_{\epsilon, q} = \inf_{A \in \Gamma_q} \sup_{x \in A} f_\epsilon(x) \quad (4.29)$$

y tal que

$$m(x_{\epsilon, q}, f_\epsilon) \leq q \leq m^*(x_{\epsilon, q}, f_\epsilon), \quad (4.30)$$

(véase la Definición 2.5.1) donde q es como en (ii) del Teorema 4.2.1.

A continuación demostraremos que, para ϵ lo suficientemente pequeño, los puntos críticos encontrados en la Proposición 4.3.5 son puntos críticos de f . Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.3.6 *Para cada $\epsilon \in]0, 1]$ sea x_ϵ un punto crítico de f_ϵ . Entonces existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que*

$$H_{f_\epsilon}(x_\epsilon)[v, v] = H_f(x_\epsilon)[v, v]$$

para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ y para cada $v \in T_{x_\epsilon} \Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que $v(0) = 0$.

Demostración: Es suficiente demostrar que existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$

$$\min_{s \in I} \phi(x_\epsilon(s)) \geq \sqrt{\epsilon}. \quad (4.31)$$

De hecho, si se verifica (4.31), por (4.10) tenemos

$$\psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \right) = \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \right) = \psi''_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \right) = 0 \quad (4.32)$$

para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, $s \in I$, así resulta $H_{U_\epsilon}(x_\epsilon(s)) \equiv 0$. Luego, si $v(0) = 0$, por (4.18) queda demostrado el teorema. Probemos (4.31). Supongamos, por reducción al absurdo, que existen una sucesión decreciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ y una sucesión $\{x_m\}$ de puntos críticos de $f_{\epsilon_m} \equiv f_m$ satisfaciendo

$$\phi(x_m(s_m)) = \min_{s \in I} \phi(x_m(s)) < \sqrt{\epsilon_m}. \quad (4.33)$$

Para cada $s \in I$ y $m \in \mathbf{N}$, x_m satisface la ecuación

$$D_s \dot{x}_m = -\frac{2}{\phi^3(x_m)} \psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m)} \right) \nabla \phi(x_m), \quad (4.34)$$

donde $\psi_m \equiv \psi_{\epsilon_m}$. Puesto $u_m(s) = \phi(x_m(s))$, diferenciando dos veces, por la Proposición 2.1.11 y (4.34), tenemos para cada $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m(s_m) = & H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] + \langle \nabla \phi(x_m(s_m)), D_s \dot{x}_m(s_m) \rangle = \\ & H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}(s_m), \dot{x}(s_m)] - \\ & 2\psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s_m))} \right) \frac{\langle \nabla \phi(x_m(s_m)), \nabla \phi(x_m(s_m)) \rangle}{\phi^3(x_m(s_m))}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por (4.33), para m suficientemente grande

$$u_m(s_m) < \delta \quad (4.36)$$

donde δ es como en la Definición 4.1.1. Ahora (4.35), (4.36), y (iii) de la Definición 4.1.1 nos dan

$$\ddot{u}_m(s_m) \leq -2\psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s_m))} \right) \frac{\langle \nabla \phi(x_m(s_m)), \nabla \phi(x_m(s_m)) \rangle}{\phi^3(x_m(s_m))}. \quad (4.37)$$

Finalmente por (4.33) y (4.11)

$$\psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s_m))} \right) > 0,$$

así por (4.37) y (ii) de la Definición 4.1.1

$$\ddot{u}_m(s_m) < 0$$

y esta es una contradicción porque s_m es un punto de mínimo para u_m . \square

Proposición 4.3.7 *Sea $x_\epsilon \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ un punto crítico de f_ϵ satisfaciendo (4.29) y (4.30). Entonces existe $\bar{\epsilon} \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$, x_ϵ es un punto crítico no constante de f .*

Pongamos para cada punto crítico x_ϵ de f_ϵ satisfaciendo (4.29) y (4.30)

$$Z_\epsilon = \left\{ v \in T_{x_\epsilon} \Lambda^1(\mathcal{M}) \mid v(0) = 0 \right\}. \quad (4.38)$$

Por (4.16) tenemos:

$$Z_\epsilon^\perp = \left\{ v \in T_{x_\epsilon} \Lambda^1(\mathcal{M}) \mid D_s D_s v = 0, \text{ para cada } s \in I \right\}.$$

Subrayemos que el espacio de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$D_s D_s v = 0$$

tiene dimension $2n$, donde $\dim \mathcal{M} = n$, luego

$$\dim Z_\epsilon^\perp \leq 2n. \quad (4.39)$$

Antes que nada probaremos que

$$\text{para cada } \epsilon \in]0, \epsilon_0] \text{ } x_\epsilon \text{ no es una curva constante,} \quad (4.40)$$

donde ϵ_0 es el hallado en el Lema 4.3.6. De hecho, por (4.18) y (4.19), si por reducción al absurdo x_ϵ fuera una curva constante, tendríamos para cada $v \in T_{x_\epsilon} \Lambda^1(\mathcal{M})$

$$H_{f_\epsilon}(x_\epsilon)[v, v] = \int_0^1 \langle D_s v, D_s v \rangle ds + \int_0^1 H_{U_\epsilon}(x_\epsilon)[v, v] ds + H_{W_\epsilon}(x_\epsilon(0))[v(0), v(0)],$$

luego por (4.38) y el Lema 4.3.6, para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, resultaría

$$H_{f_\epsilon}(x_\epsilon)[v, v] > 0 \quad \forall v \in Z_\epsilon \setminus \{0\}. \quad (4.41)$$

De (4.41) y (4.39) se sigue

$$m^*(x_\epsilon, f_\epsilon) \leq \dim Z_\epsilon^\perp \leq 2n,$$

y esto es en contradicción con (4.30) dado que $q > 2n$, así (4.40) queda demostrada. Ahora es suficiente probar la existencia de un $\epsilon_1 \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$

$$\sup_{s \in I} d(x_\epsilon(s), x_0) \leq M, \quad (4.42)$$

siendo M una oportuna constante positiva. De hecho, si se mantiene (4.42), por (4.10), (4.14) y (4.15), se sigue para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$, $v \in T_{x_\epsilon} \Lambda^1(\mathcal{M})$

$$W'_\epsilon(x_\epsilon(0))[v(0)] = 0.$$

Razonando como en el Lema 4.3.6, encontramos $\epsilon_2 \in]0, 1]$ tal que

$$\psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \right) = 0 \quad \forall \epsilon \in]0, \epsilon_2], s \in I.$$

Esto y (4.40) implican que x_ϵ es un punto crítico no constante de f para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$, donde $\bar{\epsilon} = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$. Para demostrar (4.42), supongamos por reducción al absurdo que existe una sucesión decreciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ y una sucesión de puntos críticos $\{x_m\}$ de $f_{\epsilon_m} \equiv f_m$, satisfaciendo (4.29) y (4.30), tal que

$$\sup \{d(x_m(s), x_0) \mid s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (4.43)$$

Existe un subconjunto compacto $C \in \Gamma_q$, véase la Observación 2.5.8(2), tal que por (4.29)

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq \sup f_\epsilon(C) \leq \sup f_1(C) \quad \forall \epsilon \in]0, 1]. \quad (4.44)$$

Por (4.44) y las hipótesis impuestas, existe $B \in \mathbf{R}$ tal que

$$\int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds \leq B \quad \forall m \in \mathbf{N}. \quad (4.45)$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

8 / MAYO 2000

COMISION DE DOCTORADO

Así por (4.43) y (4.5)

$$\inf \{d(x_m(s), x_0) \mid s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (4.46)$$

Por (i) del Teorema 4.2.1 existe una sucesión de números reales positivos $\{\delta_m\}$ tal que para cada $v \in Z_m \equiv Z_{\epsilon_m}$

$$\frac{\langle R_{(\dot{x}_m, v)} \dot{x}_m, v \rangle}{\langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle \langle v, v \rangle - \langle \dot{x}_m, v \rangle^2} \leq \delta_m \quad (4.47)$$

sobre I , véase también [86, p.77]. Luego, por (4.47) y el Lema 4.3.6, para cada $v \in Z_m$, con m suficientemente grande

$$\begin{aligned} H_{f_m}(x_m)[v, v] &\geq \\ &\int_0^1 \langle D_s v, D_s v \rangle ds - \delta_m \int_0^1 \left(\langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle \langle v, v \rangle - \langle \dot{x}_m, v \rangle^2 \right) ds \geq \\ &\int_0^1 \langle D_s v, D_s v \rangle ds - \delta_m \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle \langle v, v \rangle ds \end{aligned}$$

Por la siguiente desigualdad de Poincaré

$$\int_0^1 \langle D_s v, D_s v \rangle ds \geq \frac{1}{4} \int_0^1 \langle v, v \rangle ds, \quad (4.48)$$

(4.48) y (4.47), tenemos

$$H_{f_m}(x_m)[v, v] \geq \left(\frac{1}{4} - B\delta_m \right) \int_0^1 \langle v, v \rangle ds. \quad (4.49)$$

Finalmente, por (4.49), si m es lo bastante grande

$$H_{f_m}(x_m)[v, v] > 0 \quad \forall v \in Z_m \setminus \{0\},$$

y así

$$m^*(x_m, f_m) \leq \dim Z_m^\perp \leq 2n,$$

lo cual está en contradicción con (4.30), porque $q > 2n$. \square

Demostración del Teorema 4.2.1:

Sea $q \in \mathbf{N}$ como en (4.3). Por la Proposición 4.3.5, para cada $\epsilon \in]0, 1]$ existe un punto crítico $x_{\epsilon, q}$ de f_ϵ tal que se verifican (4.29) y (4.30). Además, por la Proposición 4.3.7, para cada ϵ suficientemente pequeño, $x_{\epsilon, q}$ es un punto crítico no trivial de f , o sea una geodésica cerrada no constante sobre \mathcal{M} . \square

4.4 Demostración del Corolario 4.2.3 y del Teorema 4.2.4

Recordemos el siguiente principio de Maupertius–Jacobi cuya demostración puede encontrarse p. ej. en [17].

Proposición 4.4.1 *Sea $V \in C^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ acotado superiormente y fijemos $E \in \mathbf{R}$, con $E > \sup V$. Entonces, cada geodésica cerrada por la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ definida en (3.70), es, salvo una reparametrización, una solución de (4.4) cuya energía es E , y viceversa.*

Demostración del Corolario 4.2.3:

Dado que \mathcal{M} es CCB respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la hipótesis (ii) del Corolario 4.2.3 y (3.71) garantizan que \mathcal{M} es CCB respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ para cada $E > \sup V$. Además, denotando por $K_E(\pi)$ la curvatura seccional de cada plano π tangente a $x \in \mathcal{M}$ y por $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de π , resulta para cada $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x \mathcal{M}$:

$$e^{2u(x)} K_E(\pi) = K(\pi) + \sum_{i=1}^2 \left(\langle \nabla u(x), e_i \rangle^2 - H_u(x)[e_i, e_i] \right) - |\nabla u(x)|^2 \quad (4.50)$$

donde u es como en (3.72). Entonces, por (i) del Teorema 4.2.1 y (i) del Corolario 4.2.3 se tiene

$$\limsup_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} K_E(x) \leq 0.$$

Así, la demostración se completa por el Teorema 4.2.1 y la Proposición 4.4.1. \square

A continuación demostraremos el Teorema 4.2.4.

Las soluciones de (4.7) son los puntos críticos del funcional \mathcal{I} de (2.31). Debido a la presencia del borde y a la periodicidad del problema, para cada $\epsilon \in]0, 1]$ introducimos los funcionales

$$\mathcal{I}_\epsilon(x) = \mathcal{I}(x) + \int_0^a U_\epsilon(x) dt + W_\epsilon(x(0)),$$

donde U_ϵ y W_ϵ son como en la Sección 4.3, sobre

$$\Lambda_a^1(\mathcal{M}) = \left\{ y \in H^1([0, a], \mathcal{M}) \mid y(0) = y(a) \right\},$$

véase también la Sección 2.2. Se mantienen los análogos del Lema 4.3.1 y de la Proposición 4.3.4 (con ligeras modificaciones en las demostraciones), así, véase la Proposición 4.3.4, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $q \in \mathbf{N}$ tal que se verifica (4.9), existe un punto crítico $x_{\epsilon, q}$ de \mathcal{I}_ϵ correspondiente al valor crítico

$$c_{\epsilon, q} = \inf_{A \in \Gamma_q} \sup_{x \in A} \mathcal{I}_\epsilon(x) \quad (4.51)$$

y es tal que

$$m(x_{\epsilon, q}, \mathcal{I}_\epsilon) \leq q \leq m^*(x_{\epsilon, q}, \mathcal{I}_\epsilon). \quad (4.52)$$

También el Lema 4.3.6 se puede demostrar (con f, f_ϵ remplazados por $\mathcal{I}, \mathcal{I}_\epsilon$): la única diferencia es que la ecuación (4.34) es ahora

$$D_t \dot{x}_m + \nabla V_x(x_m, t) = -\frac{2}{\phi^3(x_m)} \psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m)} \right) \nabla \phi(x_m), \quad (4.53)$$

así que tenemos (con las mismas notaciones de la demostración del Lema 4.3.6)

$$\begin{aligned} \ddot{u}_m(s_m) = & H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}_m(s_m), \dot{x}_m(s_m)] + \langle \nabla \phi(x_m(s_m)), D_t \dot{x}_m(s_m) \rangle = \\ & H_\phi(x_m(s_m))[\dot{x}(s_m), \dot{x}(s_m)] - \langle \nabla \phi(x_m(s_m)), \nabla V_x(x_m(s_m), s_m) \rangle - \\ & 2\psi'_m \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s_m))} \right) \frac{\langle \nabla \phi(x_m(s_m)), \nabla \phi(x_m(s_m)) \rangle}{\phi^3(x_m(s_m))}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Por (4.33), si m es suficientemente grande resulta

$$u_m(s_m) < \min\{\delta, \nu\}$$

donde δ es como en la Definición 4.1.1 y ν es como en (ii) del Teorema 4.2.4, luego por (iii) de la Definición 4.1.1 y (4.8), tenemos de nuevo

$$\ddot{u}_m(s_m) < 0.$$

El lema siguiente (véase [3, Proposition 4.2] para la demostración) nos permite evitar las trayectorias constantes.

Lema 4.4.2 *Existe $\bar{q} \in \mathbf{N}$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ (donde ϵ_0 es el hallado en el Lema 4.3.6) y para cada punto crítico x_ϵ de \mathcal{I}_ϵ con*

$$m^*(x_\epsilon, \mathcal{I}_\epsilon) > \bar{q},$$

x_ϵ es no constante.

Demostración del Teorema 4.2.4:

Sea $Q = \max\{\bar{q}, 2n\}$, donde \bar{q} es el encontrado en el Lema 4.4.2 y $\dim \mathcal{M} = n$. Si $q \in \mathbf{N}$ es mayor que Q y es tal que se verifica (4.9), para cada $\epsilon \in]0, 1]$ existe un punto crítico x_ϵ de \mathcal{I}_ϵ (que es no constante por el Lema 4.4.2) tal que se mantienen (4.51) y (4.52). Para demostrar el Teorema 4.2.4 tenemos que probar que existe $\bar{\epsilon} \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$, x_ϵ es un punto crítico de \mathcal{I} . La única diferencia respecto a la segunda parte de la demostración de la Proposición 4.3.7 es la siguiente: por (i) del Teorema 4.2.1 y (i) del Teorema 4.2.4 existen dos sucesiones infinitesimales de números reales positivos $\{\delta_m\}$ y $\{\eta_m\}$ tales que para cada $v \in Z_m \equiv Z_{\epsilon_m}$

$$\begin{cases} \frac{\langle R_{(\dot{x}_m, v)} \dot{x}_m, v \rangle}{\langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle \langle v, v \rangle - \langle \dot{x}_m, v \rangle^2} \leq \delta_m \\ H_V(x_m, t)[v, v] \leq \eta_m \langle v, v \rangle \end{cases} \quad (4.55)$$

sobre $[0, a]$. Entonces para cada $v \in Z_m$, con m lo bastante grande

$$H_{I_m}(x_m)[v, v] \geq \int_0^a \langle D_t v, D_t v \rangle dt - \delta_m \int_0^a \left(\langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle \langle v, v \rangle - \langle \dot{x}_m, v \rangle^2 \right) dt - \eta_m \int_0^a \langle v, v \rangle dt$$

y por (4.48) se tiene

$$H_{I_m}(x_m)[v, v] \geq \left(\frac{1}{4a^2} - 4aB\delta_m - \eta_m \right) \int_0^a \langle v, v \rangle dt,$$

así para m grande llegamos a una contradicción dado que $q > 2n$. \square

Capítulo 5

Teoría de Morse para trayectorias

En este capítulo demostraremos la existencia de soluciones para un sistema lagrangiano (no necesariamente autónomo) que unen dos puntos de un dominio abierto \mathcal{D} con borde convexo de una variedad de Riemann; por simplicidad supondremos que el borde sea diferenciable (véase la Observación 3.2.4). Además presentaremos un resultado que relaciona el conjunto de las órbitas del sistema lagrangiano que unen dos puntos de \mathcal{D} con la estructura topológica del subconjunto abierto. Estas relaciones se obtienen desarrollando una teoría de Morse para la acción \mathcal{I} del sistema lagrangiano (véase (2.31) y la Subsección 2.6.4). Ya sabemos que debido a la presencia del borde la acción no satisface la condición (PS), luego aquélla será perturbada por medio de una familia de funcionales que satisfacen esta condición. Las relaciones de Morse para \mathcal{I} serán obtenidas luego como límite de las relaciones de Morse de los funcionales perturbados. Finalmente se dará una relación entre el índice de Morse y la acción de las órbitas. En la Sección 5.1 presentaremos los resultados principales y en la Sección 5.2 bosquejaremos sus demostraciones, remitiendo a [13] para los detalles.

5.1 Exposición de los resultados

Sean \mathcal{M} una variedad de Riemann, \mathcal{D} un dominio abierto de \mathcal{M} tal que $\overline{\mathcal{D}}$ es una variedad completa (véase la Proposición 3.1.8) con borde diferenciable y convexo, p y q dos puntos fijos de \mathcal{D} , $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, y consideremos el sistema lagrangiano de segundo orden (2.30). Buscaremos las soluciones de (2.30) (esto es puntos críticos de \mathcal{I}) con imágenes en \mathcal{D} . De (2.34) y (2.35) se sigue que una trayectoria x que une p y q es un punto crítico no degenerado de la acción \mathcal{I} si y sólo si q es no conjugado a p a lo largo de x . Luego p y q son no conjugados si y sólo si \mathcal{I} es una función de Morse y, como para el problema geodésico, se puede demostrar que cada par de puntos de \mathcal{D} es no conjugado, salvo un subconjunto de medida cero.

Denotaremos por $\Omega(\mathcal{D})$ el espacio de las curvas continuas que unen p y q en \mathcal{D} con la topología uniforme y usaremos las notaciones de las Subsecciones 2.6.3 y 2.6.4. Los resultados principales son los siguientes.

Teorema 5.1.1 [13] *Sean \mathcal{M} una variedad de Riemann completa, \mathcal{D} un dominio*

abierto de \mathcal{M} con borde diferenciable y convexo $\partial\mathcal{D}$ y sea $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. Supóngase que:

(i)

$$V(x, t) \leq ad^p(x, x_0) - b$$

para cada $x \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbf{R}$, para algún $x_0 \in \mathcal{D}$, $p \in [0, 2[$, donde d es la distancia inducida por la estructura riemanniana y $a > 0, b \in \mathbf{R}$;

(ii)

$$\langle \nabla\phi(x), \nabla_x V(x, t) \rangle \geq 0$$

para cada $x \in \partial\mathcal{D}$, $t \in \mathbf{R}$, donde ϕ es cómo en (3.2).

Entonces para cada $p, q \in \mathcal{D}$ existe una trayectoria que los une.

Teorema 5.1.2 [13] Si se mantienen las hipótesis del Teorema 5.1.1 y $p, q \in \mathcal{D}$ son dos puntos no conjugados, entonces para cada cuerpo \mathcal{F} existe una serie formal \mathcal{Q}_λ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ tal que

$$\sum_{x \in K_{\mathcal{I}}} \lambda^{\mu(x, \mathcal{I})} = \mathcal{P}_\lambda(\Omega(\mathcal{D})) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda.$$

Observación 5.1.3 La hipótesis (i) significa que el potencial $V(x, t)$ es *subcuadrático* sobre \mathcal{D} y esto implica que la acción \mathcal{I} está acotada inferiormente. De hecho, por la desigualdad de Poincaré (2.9), se sigue (véase p.ej. [78, Proposition 2.7.5]) que existen $m_1 > 0, m_2 \geq 0$ dependientes sólo de $p, q \in \mathcal{D}$ tales que

$$\|x\|_2^2 \leq m_1 \|\dot{x}\|_2^2 + m_2 \quad \forall x \in \Omega^1(\mathcal{D}).$$

Así, por (i) del Teorema 5.1.1 tenemos ($\|x\|_\infty \leq 2\|x\|$, véase p.ej. [78, Proposition 2.7.7])

$$\mathcal{I}(x) \geq \frac{1}{2(1 + m_1)} \|x\|^2 - 2^p a \|x\|^p + m_3$$

para alguna constante m_3 , y de la hipótesis $p < 2$ se sigue que \mathcal{I} está acotado inferiormente. Remarquemos que si $p = 2$ el funcional estaría acotado inferiormente bajo la hipótesis adicional $a < 1/4$.

La acción de las soluciones de (2.30) está relacionada con su índice geométrico $\mu(x, \mathcal{I})$, de hecho es válido el siguiente resultado.

Teorema 5.1.4 Bajo las hipótesis del Teorema 5.1.2, sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos críticos de \mathcal{I} tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(x_m, \mathcal{I}) = \infty.$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{I}(x_m) = \infty.$$

Ejemplo 5.1.5 Merece comentarse que el Teorema 5.1.2 relaciona el conjunto de las soluciones de (2.30) con la topología de $\Omega(\mathcal{D})$, por lo que se puede obtener multiplicidad hasta cuando la topología de la variedad \mathcal{M} no es “rica”. Aducimos un ejemplo: consideremos $\mathcal{M} = \mathbf{R}^N$ y un sistema lagrangiano del segundo orden sobre \mathcal{M} , cuya lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \lambda(x) \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - V(x, t),$$

siendo $\lambda(x)$ una función regular positiva. Sean $0 < r_1 < r_2$ y pongamos

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid r_1 < |x| < r_2\}.$$

Supongamos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x V(x, t), x \rangle &\geq 0, & \forall t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^N, |x| = r_1 \\ \langle \nabla_x V(x, t), x \rangle &\leq 0, & \forall t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^N, |x| = r_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

y

$$\begin{aligned} 2\lambda(x) + \langle \nabla \lambda(x), x \rangle &\leq 0, & \forall x \in \mathbf{R}^N, |x| = r_1 \\ 2\lambda(x) + \langle \nabla \lambda(x), x \rangle &\geq 0, & \forall x \in \mathbf{R}^N, |x| = r_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Entonces para cada par de puntos no conjugados p, q en \mathcal{D} existe una sucesión $\{x_m\}$ de soluciones de (2.30) tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{I}(x_m) = \infty. \quad (5.3)$$

De hecho, por (5.1) se tiene (ii) del Teorema 5.1.2, mientras que (5.2) es equivalente a la convexidad de $\partial\mathcal{D}$. Además \mathcal{D} es homotópicamente equivalente a la esfera unitaria $(N-1)$ -dimensional S^{N-1} , luego existen infinitos $q \in \mathbf{N}$ tales que $H_q(\Omega(S^{N-1}), \mathbf{R}) \neq \{0\}$, véase [113]. Entonces (5.3) se sigue de los Teoremas 5.1.2 y 5.1.4.

5.2 Demostración del Teorema 5.1.2

Ya hemos remarcado que, debido a la presencia del borde, el funcional \mathcal{I} tiene que ser penalizado. Así, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, consideraremos sobre $\Omega^1(\mathcal{D})$ los funcionales

$$\mathcal{I}_\epsilon(x) = \mathcal{I}(x) + \int_0^1 U_\epsilon(x) dt, \quad (5.4)$$

con U_ϵ como en (4.13), siendo ϕ como en (3.2) y $(\psi_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1]}$ una familia de funciones como en (4.10), satisfaciendo (4.11),

$$\psi_\epsilon(s) \leq \psi_{\epsilon'}(s) \quad \forall \epsilon \leq \epsilon' \quad (5.5)$$

y (4.12) para algunos números positivos a_ϵ, b_ϵ . Estudiaremos algunas propiedades de esta familia de funcionales penalizados. Claramente, si $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$ es un punto crítico de \mathcal{I}_ϵ , entonces es regular y para cada $t \in I$ satisface la ecuación (4.53). Además se mantiene el Lema 3.4.1 cuando \mathcal{D} tiene borde diferenciable (0 es un valor regular para ϕ); así, se puede demostrar la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1 Sea \mathcal{I}_ϵ como en (5.4). Entonces

- (i) para cada $\epsilon \in]0, 1[$ y $c \in \mathbf{R}$ los subniveles \mathcal{I}_ϵ^c son subespacios métricos completos de $\Omega^1(\mathcal{D})$;
- (ii) para cada $\epsilon \in]0, 1[$, \mathcal{I}_ϵ satisface la condición (PS).

Demostración: (i) A continuación denotaremos con c_1, \dots, c_6 constantes positivas convenientes. Podemos realizar los razonamientos análogos a los de la demostración de (i) de la Proposición 3.4.2, luego será suficiente demostrar que para cada $\epsilon \in]0, 1[$ y $c \in \mathbf{R}$ fijos, si $\{x_m\}$ es una sucesión en \mathcal{I}_ϵ^c entonces

$$d = \inf \{ \phi(x_m(t)) \mid t \in I, m \in \mathbf{N} \} > 0. \quad (5.6)$$

De hecho, dado que

$$\mathcal{I}_\epsilon(x_m) \leq c \quad \forall m \in \mathbf{N},$$

por (5.4) se sigue

$$\frac{1}{2} \|\dot{x}_m\|_2^2 \leq c + \int_0^1 V(x_m, t) dt. \quad (5.7)$$

Por (5.7), (i) del Teorema 5.1.2, (2.9) y argumentos estándar resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\dot{x}_m\|_2^2 &\leq c_1 + \int_0^1 a d^p(x_m, x_0) dt \leq c_1 + a \|x_m\|_\infty^p \leq \\ c_1 + c_2 \|x_m\|^p &= c_1 + c_2 (\|x_m\|_2 + \|\dot{x}_m\|_2)^p \leq c_1 + 2^p c_2 \|x_m\|_2^p + 2^p c_2 \|\dot{x}_m\|_2^p \leq \\ c_1 + 2^p c_3 \|\dot{x}_m\|_2^p + 2^p c_2 \|\dot{x}_m\|_2^p + c_4 &= c_5 \|\dot{x}_m\|_2^p + c_6 \end{aligned} \quad (5.8)$$

así $\{\|\dot{x}_m\|_2\}$ está acotada porque $p < 2$ y (5.6) se sigue del Lema 3.4.1.

(ii) Razonemos de nuevo como en la demostración de (ii) de la Proposición 3.4.2: nótese que $\{\nabla_x V(x_m, t)\}$ y $\left\{ \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_m)} \right) \frac{\nabla \phi(x_m)}{\phi^3(x_m)} \right\}$ están uniformemente acotadas. \square

Demostremos algunas estimaciones a priori sobre los puntos críticos de los funcionales \mathcal{I}_ϵ .

Proposición 5.2.2 Sea $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1[}$ una familia en $\Omega^1(\mathcal{D})$ tal que para cada $\epsilon \in]0, 1[$ x_ϵ es un punto crítico de \mathcal{I}_ϵ y sea $K \in \mathbf{R}$ tal que

$$\mathcal{I}_\epsilon(x_\epsilon) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1[. \quad (5.9)$$

Entonces existe una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1[$ tal que la sucesión $\{x_{\epsilon_m}\}$ converge fuertemente en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ hacia una curva $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$. Además, x es un punto crítico de \mathcal{I} y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(x_{\epsilon_m}, \mathcal{I}_{\epsilon_m}) = m(x, \mathcal{I}).$$

Demostración: Consideremos una familia $(x_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ in $\Omega^1(\mathcal{D})$ tal que para cada $\epsilon \in]0,1]$ x_ϵ es un punto crítico de \mathcal{I}_ϵ y se verifica (5.9).

Paso 1: Los mismos razonamientos usados en la demostración de (i) de la Proposición 5.2.1 muestran que

$$\sup_{\epsilon \in]0,1]} \|\dot{x}_\epsilon\|_2 < \infty. \quad (5.10)$$

Paso 2: A continuación denotaremos por a_1, \dots, a_3 constantes positivas oportunas. Por (5.10) y (2.9) se sigue

$$\sup_{\epsilon \in]0,1]} \left\| \frac{\partial V}{\partial t}(x_\epsilon(\cdot), \cdot) \right\|_\infty = a_1. \quad (5.11)$$

Para cada $t \in I$

$$\frac{dV}{dt}(x_\epsilon(t), t) = \langle \nabla_x V(x_\epsilon(t), t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(x_\epsilon(t), t),$$

luego por (4.53) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle \right) &= \langle D_t \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle = \\ &= -\langle \nabla_x V(x_\epsilon(t), t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle - \frac{2}{\phi^3(x_\epsilon(t))} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(t))} \right) \langle \nabla \phi(x_\epsilon(t)), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(x_\epsilon(t), t) - \frac{dV}{dt}(x_\epsilon(t), t) + \frac{d}{dt} \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(t))} \right). \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0, t]$, $t \in I$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(0), \dot{x}_\epsilon(0) \rangle + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial r}(x_\epsilon(r), r) dr - \\ &= V(x_\epsilon(t), t) + V(q, 0) + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(t))} \right) - \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(q)} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(0), \dot{x}_\epsilon(0) \rangle &\leq \frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle + \int_0^t \left| \frac{\partial V}{\partial r}(x_\epsilon(r), r) \right| dr + \\ &= V(x_\epsilon(t), t) - V(q, 0) + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(q)} \right) \leq \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle + a_2 + V(x_\epsilon(t), t) + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(q)} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Por (i) del Teorema 5.1.2 y (5.10) se sigue

$$\sup_{\epsilon \in]0,1]} \|V(x_\epsilon(\cdot), \cdot)\|_\infty = a_3$$

así por (5.13) y (5.5) se sigue la existencia de $L > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \langle \dot{x}_\epsilon(t), \dot{x}_\epsilon(t) \rangle \leq L + U_\epsilon(x_\epsilon(t)) \quad \forall t \in I, \epsilon \in]0, 1]. \quad (5.14)$$

Paso 3: Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $t \in I$, sea

$$\mu_\epsilon(t) = \frac{2}{\phi^3(x_\epsilon(t))} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(t))} \right)$$

el multiplicador en (4.53). Argumentos más simples de los que usaremos en la demostración del Teorema 6.7.1 permiten encontrar $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que la familia $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in]0, \epsilon_0]}$ está acotada en $C^0(I, \mathbf{R})$, véase también [13, Lemma 3.4]. Además se puede probar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon)} \right) dt = 0$$

véase [51, Remark 4.5].

Paso 4: De (5.9), (2.9) y argumentos estándar se sigue que existen una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ en $]0, 1]$ y $x \in H^1(I, \overline{\mathcal{D}})$ tal que $\{x_{\epsilon_m}\}$ converge fuertemente hacia x en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$.

Paso 5: Por el Paso 3 se sigue que $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in]0, \epsilon_0]}$ está acotada en $L^2(I, \mathbf{R})$; así, existe $\mu \in L^2(I, \mathbf{R})$ tal que

$$\mu_{\epsilon_m} \rightarrow \mu \quad \text{débilmente en } L^2(I, \mathbf{R}).$$

Puesto que el conjunto de las funciones positivas casi por doquier es débilmente cerrado en $L^2(I, \mathbf{R})$, μ es positiva casi por doquier.

Paso 6: Sea $v \in T_x \Omega^1(\mathcal{M})$, donde x es como en el Paso 4; por la Proposición 2.3.7 tenemos la existencia de una sucesión $\{v_m\}$ débilmente convergente hacia v in $H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Así, por

$$\mathcal{I}'_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m})[v_{\epsilon_m}] = 0$$

y tomando el límite, obtenemos

$$\int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{v} \rangle dt - \int_0^1 \langle \nabla_x V(x, t), v \rangle dt = \int_0^1 \mu(t) \langle \nabla \phi(x), v \rangle dt. \quad (5.15)$$

Paso 7: Denotemos por $H^2(I, \mathcal{M})$ el subconjunto de las curvas $H^2(I, \mathbf{R}^N)$ con imagen en \mathcal{M} , véase la Sección 2.2. Integrando (5.15) por partes, tenemos que $x \in H^2(I, \overline{\mathcal{D}})$ es una solución débil de

$$D_t \dot{x} + \nabla_x V(x, t) = -\mu(t) \nabla \phi(x). \quad (5.16)$$

Paso 8: Si $\bar{t} \in I$ es tal que $x(\bar{t}) \in \mathcal{D}$, entonces existe un entorno cerrado J de \bar{t} tal que $\mu(t) = 0$ para todo $t \in J$, véase el Teorema 6.7.1.

Paso 9: Probaremos ahora que $\mu(t) = 0$ casi por doquier. De hecho, si $x(t) \in \mathcal{D}$, por el Paso 8, $\mu(t) = 0$; si $\bar{t} \in]0, 1[$ es tal que $x(\bar{t}) \in \partial \mathcal{D}$ y existe $\ddot{x}(\bar{t})$, como \bar{t} es un punto de mínimo de $u(t) = \phi(x(t))$, obtenemos, diferenciando dos veces, por (3.3) y (5.16):

$$0 \leq \ddot{u}(\bar{t}) \leq -\mu(\bar{t}) \langle \nabla \phi(x(\bar{t})), \nabla \phi(x(\bar{t})) \rangle,$$

así por (ii) del Teorema 5.1.2 $\mu(\bar{t}) = 0$.

Paso 10: Por (5.16) y el Paso 9 resulta que x es C^2 y satisface (2.30). Tenemos que probar que su imagen está contenida en \mathcal{D} . Para esto podemos usar argumentos más simples ($\partial\mathcal{D}$ es diferenciable) de los usados en la demostración del Lema 3.4.5. Sea

$$C = \{t \in I \mid x(t) \in \partial\mathcal{D}\}$$

y supongamos que C sea no vacío. Claramente C es compacto, y sea $t_M \in]0, 1[$ ($x(1) = q \in \mathcal{D}$) su máximo. Usando el Lema de Gronwall podemos probar que existe $\sigma > 0$ tal que $[t_M, t_M + \sigma] \subset C$, llegando a una contradicción. De hecho, fijado $\delta > 0$, puesto que $x(t_M) \in \partial\mathcal{D}$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$\phi(x(t)) < \delta \quad \forall t \in [t_M, t_M + \sigma]$$

y razonando como en la demostración del Lema 3.4.5 podemos considerar la proyección $y(t) : [t_M, t_M + \sigma] \rightarrow \partial\mathcal{D}$ de x sobre $\partial\mathcal{D}$. Por (3.3) resulta

$$H_\phi(y(t))[\dot{y}(t), \dot{y}(t)] \leq 0 \quad \forall t \in [t_M, t_M + \sigma].$$

Consideremos $u(t)$ como en el Paso 9, entonces para cada $t \in [t_M, t_M + \sigma]$ se tiene

$$\ddot{u}(t) \leq H_\phi(x(t))[\dot{x}(t), \dot{x}(t)] - \langle \nabla_x V(x(t)), \nabla\phi(x(t)) \rangle. \quad (5.17)$$

Argumentos más sencillos de los usados en la demostración del Lemma 3.4.5 muestran que

$$H_\phi(x(t))[\dot{x}(t), \dot{x}(t)] \leq M_1 u(t) + k(t)\dot{u}(t)$$

donde $M_1 > 0$,

$$k(t) = -L(y(t))[\dot{x}(t) + \dot{y}(t), \eta_t(\phi(x(t)), x(t))],$$

L es como en (3.45) y η es como en (3.39). Más aún, por (i) del Teorema 5.1.2 y argumentos estándares resulta

$$\begin{aligned} & -\langle \nabla\phi(x(t)), \nabla_x V(x(t), t) \rangle \leq \\ & -\langle \nabla\phi(x(t)), \nabla_x V(x(t), t) \rangle + \langle \nabla\phi(y(t)), \nabla_x V(y(t), t) \rangle = \\ & -\langle \nabla\phi(x(t)), \nabla_x V(x(t), t) \rangle + \langle \nabla\phi(x(t)), \nabla_x V(y(t), t) \rangle - \\ & \langle \nabla\phi(x(t)), \nabla_x V(y(t), t) \rangle + \langle \nabla\phi(y(t)), \nabla_x V(y(t), t) \rangle \leq \\ & \leq M_2 |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

para una $M_2 > 0$. Entonces, para una $M_3 > 0$, por (5.17) tenemos

$$\ddot{u}(t) \leq M_3 u(t) + k(t)\dot{u}(t) \quad \forall t \in [t_M, t_M + \sigma]$$

y por el lema de Gronwall se sigue $u(t) = 0$ sobre $[t_M, t_M + \sigma]$, que es absurdo.

Paso 11: Por el Paso 10, $d = \inf\{\phi(x(t)) \mid t \in I\} > 0$, y por el Paso 4 existe $\nu_1 \in \mathbf{N}$ tal que

$$c = \inf\{\phi(x_{\epsilon_m}(t)) \mid t \in I, m \geq \nu_1\} > 0.$$

Luego escogiendo $\nu \geq \nu_1$ tal que $\epsilon_m \leq c^2$ para cada $m \geq \nu$ y $t \in I$, se verifica (4.32), luego x_{ϵ_m} es un punto crítico de \mathcal{I} . Entonces, para cada $m \geq \nu$, $m(x_{\epsilon_m}, \mathcal{I}_{\epsilon_m}) = m(x, \mathcal{I})$, y queda demostrada la proposición. \square

Demostración del Teorema 5.1.1:

Para cada $c \in]0, 1]$, \mathcal{I}_c está acotado inferiormente, luego por la Proposición 5.2.1 y el Teorema 2.3.5, alcanza su mínimo en una curva $x_c \in \Omega^1(\mathcal{D})$. Entonces existe un $K > 0$ satisfaciendo (5.9) y por la Proposición 5.2.2 obtenemos la existencia de un punto crítico de \mathcal{I} . \square

A continuación presentaremos algunas propiedades de los puntos críticos del funcional \mathcal{I} .

Proposición 5.2.3 *Sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos críticos de \mathcal{I} y sea $K \in \mathbf{R}$ tal que*

$$\mathcal{I}(x_m) \leq K \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Entonces $\{x_m\}$ contiene una parcial convergente hacia un punto crítico de \mathcal{I} .

Demostración: Con argumentos estándares obtenemos que la sucesión $\{x_m\}$ contiene una parcial débilmente convergente en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ hacia una curva x que tiene imagen en $\overline{\mathcal{D}}$ y que la convergencia es fuerte en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$. Además, razonando como en la demostración de la Proposición 5.2.2, resulta que x satisface (5.16), con $\mu \equiv 0$, luego x es \mathcal{C}^2 y soluciona (2.30) en $\overline{\mathcal{D}}$. Finalmente, razonando como en la demostración de la Proposición 5.2.2, tenemos que $x(I) \subset \mathcal{D}$ y, por (5.16), x es un punto crítico de \mathcal{I} . \square

Por la Proposición 5.2.2 tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.2.4 *Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces existe $\bar{\epsilon}(c) \in]0, 1]$ tal que c es un valor regular de \mathcal{I}_ϵ para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}(c)]$.*

Demostración: Si por reducción al absurdo, hubiera una sucesión no creciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ y una sucesión $\{x_{\epsilon_m}\}$ tal que x_{ϵ_m} es un punto crítico de \mathcal{I}_{ϵ_m} y $\mathcal{I}_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) = c$, por la Proposición 5.2.2 $\{x_{\epsilon_m}\}$ convergería hacia un punto crítico x de \mathcal{I} con $\mathcal{I}(x) = c$, lo cual es una contradicción. \square

Hasta ahora no hemos necesitado la no conjugación de los puntos p y q . En la proposición siguiente la no conjugación es fundamental.

Proposición 5.2.5 *Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces el conjunto*

$$K(\mathcal{I}, c) = K_{\mathcal{I}} \cap \mathcal{I}^c$$

es finito.

Demostración: Supongamos que existe una sucesión $\{x_m\}$ de puntos críticos diferentes de \mathcal{I} con $\mathcal{I}(x_m) \leq c$. Por la Proposición 5.2.3 ésta converge a un punto crítico x de \mathcal{I} , pero ello es absurdo, porque \mathcal{I} es una función de Morse, luego sus puntos críticos tienen que ser aislados. \square

Proposición 5.2.6 Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces existe $\epsilon_0(c) \in]0, 1]$ tal que c es un valor regular de \mathcal{I}_ϵ para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0(c)]$. Además puesto

$$K(\mathcal{I}_\epsilon, c) = K_{\mathcal{I}_\epsilon} \cap \mathcal{I}_\epsilon^c,$$

para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0(c)]$, resulta

$$K(\mathcal{I}_\epsilon, c) = K(\mathcal{I}, c) \quad (5.18)$$

y para cada $x \in K(\mathcal{I}, c)$

$$m(x, \mathcal{I}) = m(x, \mathcal{I}_\epsilon). \quad (5.19)$$

Demostración: Por la Proposición 5.2.5, $K(\mathcal{I}, c)$ es un conjunto finito, luego

$$d = \inf \{ \phi(x(t)) \mid t \in I, x \in K(\mathcal{I}, c) \} > 0. \quad (5.20)$$

Entonces, por (4.10), para cada ϵ tal que $\epsilon < d^2$, $K(\mathcal{I}, c) \subset K(\mathcal{I}_\epsilon, c)$. Por otra parte, para ϵ suficientemente pequeño, $K(\mathcal{I}_\epsilon, c) \subset K(\mathcal{I}, c)$. De hecho, si por reducción al absurdo hubiera una sucesión no creciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ y $\{x_{\epsilon_m}\}$ tal que x_{ϵ_m} es un punto crítico de \mathcal{I}_{ϵ_m} , $\mathcal{I}_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) \leq c$, y $x_{\epsilon_m} \notin K(\mathcal{I}, c)$, entonces, para m suficientemente grande sería $x_{\epsilon_m} \in K(\mathcal{I}, c)$, lo cual es una contradicción. \square

Un *par topológico* es una pareja (X, Y) tal que X es un espacio topológico y Y es un subespacio de X . Para cada cuerpo \mathcal{F} y $q \in \mathbf{N}$, el q -ésimo grupo de homología relativa $H_q(X, Y; \mathcal{F})$ con coeficientes en \mathcal{F} está definido, véase [108]. Siendo \mathcal{F} un cuerpo, $H_q(X, Y; \mathcal{F})$ es un espacio vectorial y a su dimensión $\beta_q(X, Y; \mathcal{F})$ se le llama q -ésimo número de Betti del par (X, Y) . Finalmente, la serie de Poincaré del par (X, Y) con coeficientes en \mathcal{F} es definido por

$$\mathcal{P}_\lambda(X, Y; \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q(X, Y; \mathcal{F}) \lambda^q.$$

Lema 5.2.7 Sean c un valor regular de \mathcal{I} y $\epsilon \in]0, \epsilon_0(c)]$, donde ϵ_0 se halló en la Proposición 5.2.6. Entonces para cada cuerpo \mathcal{F} existe un polinomio $\mathcal{Q}_{\epsilon, c}(\lambda)$ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\sum_{x \in K(\mathcal{I}, c)} \lambda^{m(x, \mathcal{I})} = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}_\epsilon^c; \mathcal{F}) + (1 + \lambda) \mathcal{Q}_{\epsilon, c}(\lambda). \quad (5.21)$$

Demostración: Sea $\epsilon_0(c)$ cómo en la Proposición 5.2.6, así que c es un valor regular por \mathcal{I}_ϵ para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0(c)]$ y $K(\mathcal{I}_\epsilon, c) = K(\mathcal{I}, c)$. Puesto que $K(\mathcal{I}_\epsilon, c)$ consiste de puntos críticos no degenerados, por el Teorema 2.5.6 existe un polinomio $\mathcal{Q}_{\epsilon, c}(\lambda)$ con coeficientes en \mathbf{N} tal que

$$\sum_{x \in K(\mathcal{I}_\epsilon, c)} \lambda^{m(x, \mathcal{I}_\epsilon)} = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}_\epsilon^c; \mathcal{F}) + (1 + \lambda) \mathcal{Q}_{\epsilon, c}(\lambda).$$

Entonces por (5.18) y (5.19), sigue (5.21). \square

Recordemos ahora la noción de retracto débil de deformación de un par topológico.

Definición 5.2.8 Sea (X, Y) un par topológico; entonces Y es un retractor débil de deformación de X si existe una aplicación continua $H : I \times X \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} H(0, x) = x & \forall x \in X; \\ H(t, y) \in Y & \forall y \in Y, t \in I; \\ H(1, x) \in Y & \forall x \in X. \end{cases} \quad (5.22)$$

Se puede demostrar, véase p.ej. [53, Lemma 4.6], que si (X, Y) es un par topológico e Y es un retractor débil de deformación de X , entonces para cada cuerpo \mathcal{F} ,

$$\mathcal{P}_\lambda(X, Y; \mathcal{F}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_\lambda(X; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(Y; \mathcal{F}). \quad (5.23)$$

Además, si (X, A) y (Y, B) son dos pares topológicos tales que $B \subset A$, $Y \subset X$ y B (respectivamente Y) es un retractor débil de deformación de A (respectivamente X), entonces

$$\mathcal{P}_\lambda(X, A; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(Y, B; \mathcal{F}). \quad (5.24)$$

El siguiente lema será fundamental por la demostración del Teorema 5.1.2; para su prueba remitimos a [53, Lemma 4.5] y [13, Lemma 5.3].

Lema 5.2.9 Para cada $\delta > 0$, sean

$$\mathcal{D}_\delta = \{x \in \mathcal{D} \mid \phi(x) \geq \delta\} \quad (5.25)$$

y

$$\Omega_\delta^1 = \{x \in \Omega^1(\mathcal{D}) \mid \phi(x(t)) \geq \delta, \forall t \in I\}. \quad (5.26)$$

Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces existen $\epsilon_1(c) \in]0, 1]$ y $\delta(c) > 0$, tales que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_1(c)]$ y $\delta \in]0, \delta_1(c)]$

- (i) $\Omega_{\delta/2}^1 \cap \mathcal{I}^c$ es un retractor de deformación débil de \mathcal{I}^c ;
- (ii) $\Omega_{\delta/2}^1 \cap \mathcal{I}_\epsilon^c$ es un retractor de deformación débil de \mathcal{I}_ϵ^c .

Ahora, fijemos $\delta \in]0, \delta_1(c)]$ y sea $\epsilon \in]0, \epsilon_1(c)]$ tal que $\epsilon \leq \delta^2/4$. Debido a la forma de las funciones penalizantes ψ_ϵ , $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_\epsilon(x)$ para cada $x \in \Omega_{\delta/2}^1$, luego

$$\Omega_{\delta/2}^1 \cap \mathcal{I}^c = \Omega_{\delta/2}^1 \cap \mathcal{I}_\epsilon^c.$$

Entonces, por el Lema 5.2.9 y (5.24) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.2.10 Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces existe $\epsilon(c) \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon(c)]$ y para cada cuerpo \mathcal{F}

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}_\epsilon^c; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}^c; \mathcal{F}). \quad (5.27)$$

Además, argumentos similares a los de la demostración del Lema 5.2.9 permiten comprobar el siguiente teorema.

Proposición 5.2.11 *Sea $c_1 < c_2$ dos valores regulares de \mathcal{I} . Entonces existe $\epsilon(c_1, c_2) \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon(c_1, c_2)]$ y para cada cuerpo \mathcal{F}*

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}_\epsilon^{c_2}, \mathcal{I}_\epsilon^{c_1}; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}^{c_2}, \mathcal{I}^{c_1}; \mathcal{F}). \quad (5.28)$$

Las relaciones de Morse para el funcional \mathcal{I} sobre sus subniveles son un corolario del Lema 5.2.7 y la Proposición 5.2.10.

Corolario 5.2.12 *Sea c un valor regular de \mathcal{I} . Entonces para cada cuerpo \mathcal{F} existe un polinomio $\mathcal{Q}_c(\lambda)$ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0\}$ tal que*

$$\sum_{x \in K(\mathcal{I}, c)} \lambda^{m(x, \mathcal{I})} = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}^c; \mathcal{F}) + (1 + \lambda) \mathcal{Q}_c(\lambda). \quad (5.29)$$

Demostración del Teorema 5.1.2:

Sea $\{c_h\}$ una sucesión de valores regulares de \mathcal{I} tal que $c_h \rightarrow \infty$. Por la sucesión exacta de la homología del par topológico $(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h})$, véase p.ej. [19], existe una serie formal $\mathcal{Q}_{h,2}(\lambda)$, con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$, tal que

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) + \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{F}) + (1 + \lambda) \mathcal{Q}_{h,2}(\lambda). \quad (5.30)$$

Por (5.29) y (5.30) existe una serie formal $\mathcal{Q}_h(\lambda)$ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$, tal que

$$\sum_{x \in K(\mathcal{I}, c_h)} \lambda^{m(x, \mathcal{I})} + \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{D}); \mathcal{F}) + (1 + \lambda) \mathcal{Q}_h(\lambda). \quad (5.31)$$

Sea $n(q, h)$ el número de puntos críticos de \mathcal{I} de índice q contenidos en \mathcal{I}^{c_h} . La sucesión $\{n(q, h)\}$ es no decreciente y converge al número $n(q)$ de puntos críticos de \mathcal{I} con índice de Morse q . Siendo $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ compacto (respecto a la convergencia usual), usando un argumento de diagonalización existe una sucesión de enteros k_h tal que para cada $q \in \mathbf{N}$ la sucesión de los coeficientes \mathcal{Q}_{q, k_h} de la serie formal en (5.31) converge a $\mathcal{Q}_q \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$. Por simplicidad supongamos que $k_h \equiv h$ y pongamos

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathcal{Q}_q \lambda^q.$$

Hay dos casos:

- (1) si $n(q) = \infty$, por (5.31), ó $\beta_q(\Omega^1(\mathcal{D}); \mathcal{F}) = \dim H_q(\Omega^1(\mathcal{D}); \mathcal{F})$, ó \mathcal{Q}_{q-1} ó \mathcal{Q}_q deben ser ∞ . En cualquier caso,

$$n(q) = \beta_q(\Omega^1(\mathcal{D}); \mathcal{F}) + \mathcal{Q}_{q-1} + \mathcal{Q}_q, \quad (5.32)$$

- (2) $n(q) < \infty$.

Sea

$$b = \max \{ \mathcal{I}(x) \mid \mathcal{I}'(x) = 0, m(x, f) = q \}. \quad (5.33)$$

Por (5.31), para probar que se verifica (5.32) por el coeficiente q , basta con mostrar que para cada $h \in \mathbf{N}$ tal que $c_h > b$

$$\beta_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) = 0. \quad (5.34)$$

Supongamos por reducción al absurdo que no se verifica (5.34) para ciertos $h \in \mathbf{N}$ con $c_h > b$. Sea α un elemento no trivial de $H_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F})$ y sea K_α su soporte. Puesto que la homología singular tiene un soporte compacto, K_α es un subconjunto compacto de $\Omega^1(\mathcal{D})$. Sea

$$b_1 = \sup \{ \mathcal{I}(x) \mid x \in K_\alpha \} \geq c_h$$

y sea c un valor regular de \mathcal{I} tal que $c > b_1$. Consideremos la terna topológica $(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h})$ (esto es $\mathcal{I}^{c_h} \subset \mathcal{I}^c \subset \Omega^1(\mathcal{D})$) y las inclusiones de pares topológicos

$$\begin{aligned} j^1 &: (\mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h}) \rightarrow (\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}) \\ j^2 &: (\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}) \rightarrow (\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^c) \\ j^3 &= j^2 \circ j^1 : (\mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h}) \rightarrow (\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^c). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Consideremos la sucesión exacta de la terna $(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h})$, véase p.ej. [19],

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q(\mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) \xrightarrow{j_q^1} H_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) \\ \xrightarrow{j_q^2} H_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^c; \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dado que $\alpha \in H_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F})$ y su soporte está contenido en \mathcal{I}^c , $j_q^2(\alpha) = 0$. Por la exactitud de (5.36), existe $\gamma \in H_q(\mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F})$ tal que $j_q^1(\gamma) = \alpha$. En particular $H_q(\mathcal{I}^c, \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) \neq \{0\}$. Puesto que c y c_h son valores regulares para \mathcal{I} , por la Proposición 5.2.11 existe $\epsilon(c, c_h) \in]0, 1]$, tal que $H_q(\mathcal{I}_\epsilon, \mathcal{I}_\epsilon^{c_h}; \mathcal{F}) \neq \{0\}$. Como \mathcal{I}_ϵ satisface la condición (PS), por la teoría de Morse clásica, véase el Teorema 2.5.7, existe un punto crítico x_ϵ of \mathcal{I}_ϵ , tal que

$$c_h \leq \mathcal{I}_\epsilon(x_\epsilon) \leq c \quad m(x_\epsilon, \mathcal{I}_\epsilon) = q. \quad (5.37)$$

Finalmente, por la Proposición 5.2.2 obtuvimos un punto crítico x de \mathcal{I} tal que

$$b < c_h \leq \mathcal{I}(x) \leq c \quad m(x, \mathcal{I}) = q,$$

lo cual contradice a la definición de b . Luego $H_q(\Omega^1(\mathcal{D}), \mathcal{I}^{c_h}; \mathcal{F}) = \{0\}$ para h lo bastante grande, y se verifica (5.32) para cada q . Así hemos demostrado la existencia de una serie formal \mathcal{Q}_λ con coeficientes en $\mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ tal que

$$\sum_{x \in K_{\mathcal{I}}} \lambda^{m(x, \mathcal{I})} = \mathcal{P}_\lambda(\Omega^1(\mathcal{D}); \mathcal{F}) + (1 + \lambda)\mathcal{Q}_\lambda.$$

Ahora, por el Teorema 2.6.11 y dado que $\Omega^1(\mathcal{D})$ es homotópicamente equivalente al espacio de las curvas continuas que unen p y q , queda demostrado el teorema. \square

El Teorema 5.1.4 es sólo una consecuencia de la Proposición 5.2.5.

Parte III

El caso lorentziano

Capítulo 6

El borde de un espacio–tiempo estacionario

En la Sección 6.1 presentaremos la clase de las variedades lorentzianas estacionarias que serán el ambiente de los capítulos restantes y algunos ejemplos físicos de interés. En la Sección 6.2, siguiendo las ideas en [102], caracterizaremos la convexidad de la frontera de una variedad lorentziana estática \mathcal{S} en términos de métricas de Jacobi, véase (3.70), y mostraremos algunas consecuencias de este resultado, que serán demostradas en la Sección 6.3. En particular probaremos la equivalencia entre las definiciones variacional y geométrica de convexidad para el borde de \mathcal{S} , incluso si la variedad es estacionaria. Una ulterior consecuencia de esta caracterización es un resultado muy preciso sobre la existencia de geodésicas que unen un punto y una recta sobre \mathcal{S} , véase la Sección 6.5 (en la Sección 6.7 discutiremos un enfoque alternativo). Finalmente en la Sección 6.6 recordaremos algunos resultados obtenidos en el estudio de la conexión geodésica de algunas clases de variedades lorentzianas, posiblemente con borde, bajo hipótesis ajustadas de convexidad.

6.1 Definiciones y ejemplos

Sea (\mathcal{L}, g) una variedad Lorentziana, véase la Sección 2.1. Denotada como hasta ahora por D la conexión de Levi–Civita de g , a un campo vectorial K sobre \mathcal{L} se le llama *Killing* si se mantiene una de las siguientes aserciones, véase [86, Chapter 9, Propositions 23, 25]:

- su flujos locales consisten en isometrías;
- la derivada de g en su dirección es 0;
- $g(D_X K, Y) = -g(D_Y K, X)$ por todo $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{L})$.

Es sencillo comprobar que si K es un campo vectorial de Killing y γ es una geodésica, entonces $g(\dot{\gamma}, K)$ es constante. La existencia de un campo vectorial de Killing temporal proporciona interesante información sobre la estructura de una variedad, véase [97].

Además, los observadores que viajan por curvas integrales de campos vectoriales temporales de Killing perciben una métrica constante. De entre los ejemplos de variedades que los presentan, destacan espacios-tiempos relativistas bien conocidos, como los de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr exteriores, que serán examinados al final de esta sección.

Definición 6.1.1 *A una variedad lorentziana (\mathcal{L}, g) se le llama estacionaria si admite un campo vectorial temporal de Killing K ; se le llama estacionaria estándar si \mathcal{L} es una variedad producto*

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}, \quad \mathcal{M} \text{ cualquier variedad conexa}$$

y g se puede escribir como

$$g = -(\beta \circ \pi_S)\pi_{\mathbf{R}}^*(dt^2) + \pi_{\mathcal{M}}^*h + (\pi_{\mathcal{M}}^*\omega) \circ (\pi_{\mathbf{R}}^*dt) + (\pi_{\mathbf{R}}^*dt) \circ \pi_{\mathcal{M}}^*\omega, \quad (6.1)$$

donde $\pi_{\mathbf{R}}$ y $\pi_{\mathcal{M}}$ son respectivamente las proyecciones naturales sobre \mathbf{R} y \mathcal{M} , dt^2 denota la métrica usual sobre \mathbf{R} y h, β, ω son, respectivamente, una métrica riemanniana, una función positiva y una 1-forma sobre \mathcal{M} .

Cuando K es irrotacional (esto es, su distribución ortogonal es involutiva) a la variedad estacionaria se le llama estática, y cuando ω es nula sobre \mathcal{M} , a la variedad estacionaria estándar se le llama estática estándar.

Localmente, cada variedad lorentziana estacionaria aparece como a la correspondiente estándar, con $K = \partial_t$. Las proyecciones naturales en (6.1) serán omitidas sin posibilidad de confusión.

Si δ es el campo vectorial h -asociado a ω , denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ la métrica g y por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica riemanniana sobre \mathcal{M} , la métrica (6.1) se puede escribir como

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle_L = \langle \xi, \xi' \rangle + \langle \delta(x), \xi \rangle \tau' + \langle \delta(x), \xi' \rangle \tau - \beta(x) \tau \tau' \quad (6.2)$$

para cada $z = (x, t) \in \mathcal{L}$ y para cada $\zeta = (\xi, \tau), \zeta' = (\xi', \tau') \in T_z \mathcal{L} = T_x \mathcal{M} \times \mathbf{R}$.

Cuando $\delta \equiv 0$ resulta

$$\langle \zeta, \zeta' \rangle_L = \langle \xi, \xi' \rangle - \beta(x) \tau \tau'. \quad (6.3)$$

Nótese que tanto (6.2) como (6.3) son independientes de la variable temporal; además a \mathcal{M} se le puede considerar como espacio (los vectores de $T\mathcal{M}$ son espaciales) y a \mathbf{R} como tiempo (los vectores de $T\mathbf{R}$ son temporales). Sólo trabajaremos con variedades estacionarias estándar y estandar estáticas por lo que en adelante omitiremos la palabra estándar.

En particular, consideraremos variedades lorentzianas estacionarias no completas con bordes satisfaciendo algunas hipótesis de convexidad, compárese con las Secciones 3.1 y 3.2.

En primer lugar nótese que no tiene sentido hablar de la completación de Cauchy de variedades lorentzianas. Ya hemos destacado en la Sección 2.1 que en el caso lorentziano la conexión geodésica y la completitud geodésica son conceptos independientes, más aún si \mathcal{L} es geodésicamente conexa, un subconjunto abierto \mathcal{S} de \mathcal{L} no necesariamente hereda

la conexión geodésica, incluso si \mathcal{S} parece tener un “buen” borde, así para obtener resultados, se necesitan ulteriores hipótesis, véase la Sección 6.6. A continuación \mathcal{S} denotará un dominio abierto de una variedad lorentziana (\mathcal{L}, g) , $\partial\mathcal{S}$ su frontera topológica y $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$.

Supondremos, por simplicidad, que $\partial\mathcal{S}$ es diferenciable. Entonces para cada $z \in \partial\mathcal{S}$ existen un entorno $V \subset \mathcal{L}$ de z y una función diferenciable $\Phi : V \cap \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Phi^{-1}(0) = V \cap \partial\mathcal{S} \\ \Phi > 0 & \text{sobre } V \cap \mathcal{S} \\ \nabla^L \Phi(w) \neq 0 & \forall w \in V \cap \partial\mathcal{S}, \end{cases} \quad (6.4)$$

donde $\nabla^L \Phi$ denota el gradiente lorentziano de Φ . Para variedades lorentzianas el concepto de convexidad infinitesimal, véase la Definición 3.1.1, es más sutil (si el borde es una superficie degenerada, no está definida la segunda forma fundamental), pero todavía podemos decir que $\partial\mathcal{S}$ es infinitesimalmente convexa en $z \in \partial\mathcal{S}$ si y sólo si para una (y entonces para toda) función Φ satisfaciendo (6.4) tenemos

$$H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] \leq 0 \quad \forall \zeta \in T_z \partial\mathcal{S}, \quad (6.5)$$

donde $H_{\Phi}^L(z)$ denota el hessiano lorentziano de Φ en el punto z . Se puede suponer la función Φ en (6.4) definida sobre todo $\bar{\mathcal{S}}$ (véase la Proposición 3.1.3) y, así, llegamos a la siguiente definición.

Definición 6.1.2 (Convexidad global, punto de vista variacional) *A $\partial\mathcal{S}$ se le llama convexa si y sólo si es infinitesimalmente convexa en cada $z \in \mathcal{S}$ o, equivalentemente, si para una, y entonces para toda, función positiva Φ sobre $\bar{\mathcal{S}}$ tal que*

$$\begin{cases} \Phi^{-1}(0) = \partial\mathcal{S} \\ \Phi > 0 & \text{sobre } \mathcal{S} \\ \nabla^L \Phi(w) \neq 0 & \forall w \in \partial\mathcal{S} \end{cases} \quad (6.6)$$

resulta

$$H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] \leq 0 \quad \forall z \in \partial\mathcal{S}, \zeta \in T_z \partial\mathcal{S}. \quad (6.7)$$

Además podemos dar la siguiente definición.

Definición 6.1.3 (Convexidad global, punto de vista geométrico) *A $\partial\mathcal{S}$ se le llama convexa si para cada $z, w \in \mathcal{S}$ la imagen de cada geodésica $\gamma : I \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ tal que $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ satisface*

$$\gamma(I) \subset \mathcal{S}. \quad (6.8)$$

Daremos la definición de *convexidad causal*.

Definición 6.1.4 *A $\partial\mathcal{S}$ se le llama variacionalmente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) si y sólo si para una, y entonces para toda, función positiva Φ sobre $\bar{\mathcal{S}}$ como en (6.6), se verifica (6.7) sobre vectores temporales (respectivamente luminosos, espaciales).*

Definición 6.1.5 *A $\partial\mathcal{S}$ se le llama geoméricamente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) si la Definición 6.1.3 se verifica para cada geodésica temporal (respectivamente luminosa, espacial).*

Recordemos también las siguientes definiciones.

Definición 6.1.6 *$\partial\mathcal{S}$ es (variacionalmente) estrictamente convexo si y sólo si para una, y entonces para toda, función positiva Φ sobre $\bar{\mathcal{S}}$ como en (6.6) tenemos*

$$H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] < 0 \quad \forall z \in \partial\mathcal{S}, \zeta \in T_z\partial\mathcal{S}. \quad (6.9)$$

Definición 6.1.7 *$\partial\mathcal{S}$ es (geoméricamente) estrictamente convexo si cada geodésica $\gamma: I \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$ satisface*

$$\gamma(]0, 1[) \subset \mathcal{S}.$$

Definición 6.1.8 *$\partial\mathcal{S}$ es (variacionalmente) estrictamente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) si y sólo si para una, y entonces para toda, función positiva Φ sobre $\bar{\mathcal{S}}$ como en (6.6), se mantiene (6.9) sobre vectores tangentes temporales (respectivamente luminosos, espaciales).*

Definición 6.1.9 *$\partial\mathcal{S}$ es (geoméricamente) estrictamente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) si la Definición 6.1.7 se mantiene para cada geodésica temporal (respectivamente luminosa, espacial).*

Observación 6.1.10 Como en el caso riemanniano, véase la Observación 3.1.6, se puede probar que si $\partial\mathcal{S}$ es convexa según la Definición 6.1.3, entonces se verifica (6.7). Además, si $\partial\mathcal{S}$ es geoméricamente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) se mantiene (6.7) sobre la frontera para cada vector tangente temporal (respectivamente luminoso, espacial). Cuando $\partial\mathcal{S}$ es variacionalmente estrictamente convexo según la Definición 6.1.7, entonces es geoméricamente convexo según la Definición 6.1.3, véase [78, Proposition 4.1.3], también para cada carácter causal, véase [78, Proposition 4.1.4]. En la Sección 6.2 estableceremos en ciertos casos la equivalencia entre las Definiciones 6.1.2 y 6.1.3 por la frontera de una variedad lorentziana estacionarias (incluso para cada caso causal cuando la variedad es estática).

Observación 6.1.11 Se puede probar que si $\partial\mathcal{S}$ es variacionalmente estrictamente convexa, entonces $\partial\mathcal{S}$ es geoméricamente estrictamente convexa y esto sigue manteniéndose en cada caso causal. El recíproco no es cierto; en los Capítulos 7 y 8 para usar nuestras técnicas supondremos que $\partial\mathcal{S}$ es variacionalmente estrictamente convexa.

A continuación, usaremos la siguiente definición.

Definición 6.1.12 *A una variedad $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, con $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$, se le llama una variedad lorentziana estacionaria con borde diferenciable $\partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{D} \times \mathbf{R}$ si existe una variedad lorentziana estacionaria (\mathcal{L}, g) , con $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$, tal que \mathcal{D} es un dominio abierto de \mathcal{M} , g restringida a \mathcal{S} es $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y $\bar{\mathcal{D}}$ es una variedad completa con borde diferenciable.*

Remarquemos que si \mathcal{S} es una variedad lorentziana estacionaria con borde convexo, siendo $\partial\mathcal{D}$ is diferenciable, existe una función diferenciable $\phi : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{R}$ satisfaciendo (3.2). Además se puede escoger Φ de manera que, para cada $z = (x, t) \in \mathcal{L}$:

$$\Phi(z) = \Phi(x, t) = \phi(x) \quad (6.10)$$

y entonces

$$\nabla^L \Phi(z) = (\nabla \phi(x), 0). \quad (6.11)$$

Ejemplos 6.1.13 Presentemos ahora algunos ejemplos de espacio-tiempos físicos de interés. Es bien conocido que las soluciones canónicas de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell correspondientes al campo gravitacional exterior producido por un cuerpo con simetría esférica no rotante, y por un cuerpo con simetría esférica no rotante cargado eléctricamente son, respectivamente, la métrica de Schwarzschild y la de Reissner-Nordström.

El espacio-tiempo de Schwarzschild representa un modelo realista que puede ser aplicado a las regiones cercanas a un objeto astronómico aproximadamente estático y con simetría esférica. Por ejemplo, proporciona un modelo para el sistema solar mejor que cualquier modelo newtoniano. Usando las coordenadas esféricas $r \in]0, \infty[$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$, el espacio-tiempo de Schwarzschild es la variedad lorentziana estática $\mathcal{S}_S = \mathcal{D}_S \times \mathbf{R}$, con

$$\mathcal{D}_S = \{(r, \theta, \varphi) \mid r > 2m\} \subset \mathbf{R}^3,$$

equipado con la métrica

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\beta(r)} + r^2 d\Omega^2 - \beta(r) dt^2, \quad (6.12)$$

donde $d\Omega^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$ es la métrica estándar de la 2-esfera unitaria S^2 en \mathbf{R}^3 , $m > 0$ es la masa del cuerpo y

$$\beta(r) = 1 - \frac{2m}{r}.$$

Teniendo en cuenta el radio del cuerpo, hay dos posibilidades:

- (1) $r^* > 2m$: en este caso (6.12) está bien definida fuera del cuerpo. De hecho, si ponemos

$$\mathcal{D}_S^* = \{(r, \theta, \varphi) \mid r > r^*\}, \quad (6.13)$$

(6.12) está definida sobre $\mathcal{D}_S^* \times \mathbf{R}$, que es una subvariedad regular de $\mathcal{D}_S \times \mathbf{R}$. En este caso el cuerpo representa una estrella;

- (2) $r^* \leq 2m$: la métrica es singular sobre $\partial\mathcal{D}_S$, si bien esta singularidad no es intrínseca; en verdad es una consecuencia de la elección de las coordenadas estáticas, véase [71, p. 149]. Este es el caso de una *agujero negro*: la masa del cuerpo está tan concentrada que un objeto que alcanza la singularidad no puede evitar su atracción gravitacional.

En el caso (1) $\mathcal{D}_S^* \times \mathbf{R}$ tiene borde estrictamente temporal-convexo y luz-convexo si $r^* \in]2m, 3m[$, como se comprueba en [25]. De hecho, si $\gamma(s) = (r(s), \theta(s), \varphi(s), t(s))$, $s \in I$ es una geodésica temporal (respectivamente luminosa) sobre $\mathcal{D}_S^* \times \mathbf{R}$, satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -\frac{\beta'(r)}{\beta^2(r)}\dot{r}^2 - 2\frac{d}{ds}\frac{\dot{r}}{\beta(r)} + 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \beta'(r)\dot{t}^2 = 0 \\ -2\frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) + 2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \\ r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = l \\ \beta(r)\dot{t} = k \end{cases} \quad (6.14)$$

para algunas $l, k \in \mathbf{R}$. Salvo una rotación podemos suponer $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$, luego

$$\gamma(s) = (r(s), \pi/2, \varphi(s), t(s)) \quad \forall s \in I$$

y soluciona

$$\begin{cases} -\frac{\beta'(r)}{\beta^2(r)}\dot{r}^2 - \frac{2}{\beta(r)}\ddot{r} + 2r\dot{\varphi}^2 - \beta'(r)\dot{t}^2 = 0 \\ r^2\dot{\varphi} = l \\ \beta(r)\dot{t} = k. \end{cases} \quad (6.15)$$

Además existe $E_\gamma < 0$ (respectively $E_\gamma = 0$) tal que

$$E_\gamma = \frac{\dot{r}^2}{\beta(r)} + \dot{\varphi}^2 - \beta'(r)\dot{t}^2 \quad \text{on } I.$$

Sea $r^* \in]2m, 3m[$, $\Phi(r, \theta, \varphi, t) = r - r^*$ y consideremos $z = (r^*, \pi/2, \bar{\varphi}, \bar{t}) \in \partial(\mathcal{D}_S^* \times \mathbf{R})$, $\zeta = (0, 0, \dot{\bar{\varphi}}, \dot{\bar{t}}) \in T_z\partial(\mathcal{D}_S^* \times \mathbf{R})$. Es suficiente probar que

$$H_\Phi^L(z)[\zeta, \zeta] < 0. \quad (6.16)$$

Sea $\bar{\gamma}(s) = (r(s), \pi/2, \varphi(s), t(s))$ la geodésica tal que $\bar{\gamma}(0) = z$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \zeta$ y pongamos

$$\Phi(\bar{\gamma}(s)) = r(s) - r^*.$$

Cálculos estándar muestran que

$$H_\Phi^L(z)[\zeta, \zeta] = \frac{\beta(r^*)}{r^*}E_{\bar{\gamma}} + \beta(r^*)\dot{t}^2 \left[\frac{\beta(r^*)}{r^*} - \frac{\beta'(r^*)}{2} \right] = \frac{\beta(r^*)}{r^*}E_{\bar{\gamma}} + \frac{r^* - 3m}{r^{*2}}$$

luego, dado que $r^* \in]2m, 3m[$ y $E_{\bar{\gamma}} \leq 0$, obtenemos (6.16). Remitimos a la Sección 6.6 para comentarios sobre el caso (2).

La métrica de Reissner-Nordström viene dada en coordenadas polares por (6.12) con

$$\beta(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (6.17)$$

donde $e \in \mathbf{R}$ representa la carga eléctrica del cuerpo (cuando $e = 0$ tenemos la métrica de Schwarzschild). Si $m^2 > e^2$ la ecuación $\beta(r) = 0$ tiene dos soluciones positivas

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Podemos considerar

$$\mathcal{D}_R = \{(r, \theta, \varphi) \mid r > r_+\} \subset \mathbf{R}^3; \quad (6.18)$$

la métrica está bien definida sobre $\mathcal{D}_R \times \mathbf{R}$. Si $r^* > r_+$, definiendo \mathcal{D}_R^* formalmente como en (6.13), se puede probar, véase [78], que $\mathcal{D}_R^* \times \mathbf{R}$ es una subvariedad diferenciable abierta de \mathcal{S}_R con borde estrictamente temporal-convexo y luz-convexo si $r^* \in]r_+, \frac{1}{2}(3m + \sqrt{9m^2 - 8e^2})[$. Remitimos a la Sección 6.6 para el caso $r^* < r_+$.

Presentemos ahora un ejemplo importante de variedad lorentziana estacionaria con borde. Consideremos el espacio-tiempo de Kerr que representa el campo estacionario con simetría axial asintóticamente llano fuera de un objeto rotante. Sea $m, a \in \mathbf{R}$ tal que m representa la masa del cuerpo y ma el momento angular medido desde el infinito. En las coordenadas (r, θ, φ, t) , la métrica de Kerr es la siguiente:

$$ds^2 = \lambda \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\lambda} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2, \quad (6.19)$$

donde $\lambda = \lambda(\theta, r) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2$, véanse [71] y [87] para los detalles físicos. Consideremos el caso $m^2 > a^2$. La ecuación $\Delta(r) = 0$ tiene dos soluciones

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Consideremos $\mathcal{S}_K = \mathcal{D}_K \times \mathbf{R}$, donde

$$\mathcal{D}_K = \{(r, \theta, \varphi) \mid r > m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}\} \subset \mathbf{R}^3,$$

con la métrica (6.19), a la cual se le llama espacio-tiempo de Kerr fuera de la superficie estacionaria límite. En [51] y [78, Proposition 7.2.1] se demuestra que si la superficie del cuerpo está muy próxima a la superficie estacionaria límite y el coeficiente de rotación a es pequeño, la frontera del cuerpo es estrictamente temporal-convexa y luz-convexa.

6.2 El borde de una variedad lorentziana estática

En esta sección caracterizaremos la convexidad de la frontera de una variedad lorentziana estática en términos de métricas de Jacobi, véanse los Teoremas 6.2.1 y 6.2.3. Como consecuencias directas, también conseguiremos:

- una sencilla caracterización de la convexidad del borde de una variedad lorentziana estática en términos de la convexidad de la frontera de su parte “espacial” y el gradiente de la función alabeo β (véase el Teorema 6.2.2);
- una demostración de la equivalencia entre las definiciones variacional y geométrica de la convexidad para el borde de una variedad lorentziana estática, véase la Observación 6.1.10.

Además, en la Sección 6.5 obtendremos un resultado preciso sobre la existencia de geodésicas que unen un punto y una recta en una variedad estática.

Fijada $E \in \mathbf{R}$, consideremos

$$V = -\frac{1}{\beta}, \quad (6.20)$$

donde β es como en (6.3), y consideremos la correspondiente (posiblemente degenerada) métrica de Jacobi como en (3.70). Cuando \mathcal{S} es una variedad lorentziana estática con borde diferenciable, fijadas una cualquiera $x \in \overline{\mathcal{D}}$ y $E > V(x)$, podemos encontrar un entorno U de x en $\overline{\mathcal{D}}$ donde está bien definida la métrica (3.70). Si escogemos

$$E > V(x) \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}} \quad (6.21)$$

(en particular cuando $E \geq 0$) la métrica de Jacobi está definida sobre todo $\overline{\mathcal{D}}$.

Nuestro resultado principal, que será probado en la Sección 6.3, es el siguiente.

Teorema 6.2.1 [10] *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estacionaria con borde diferenciable. Sea $z = (x, t) \in \partial\mathcal{S}$ y consideremos las funciones ϕ y Φ definidas en (3.2) y (6.6). Entonces, la desigualdad (6.5) para el hessiano lorentziano es equivalente a las desigualdades para el hessiano riemanniano (obtenidas usando las métricas (3.70)):*

$$H_{\phi}^E(x)[\xi, \xi] \leq 0 \quad \forall \xi \in T_x \partial\mathcal{D} \quad \forall E > -1/\beta(x). \quad (6.22)$$

Si consideramos el Teorema 6.2.1 en cada punto del borde, es válido el siguiente teorema.

Teorema 6.2.2 [10] *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estática con borde diferenciable y fijemos $z = (x, t) \in \partial\mathcal{S}$. Entonces, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

- se mantiene la desigualdad (6.5) (esto es el borde es convexo en z).
- se mantienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(x), \nabla\beta(x) \rangle &\geq 0 && \text{(esto es, } \nabla\beta \text{ no apunta fuera de } \partial\mathcal{D}) \\ H_{\phi}(x)[\xi, \xi] &\leq 0 \quad \forall \xi \in T_x \partial\mathcal{D} && \text{(esto es, } \partial\mathcal{D} \text{ es convexa para } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ en } x). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Obtenemos también versiones causales del Teorema 6.2.1.

Teorema 6.2.3 [10] *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estática con borde diferenciable. Sea $z = (x, t) \in \partial\mathcal{S}$. Entonces se verifica (6.5) para cada $\zeta \in T_z \partial\mathcal{S}$ temporal (respectivamente luminoso, espacial) si y sólo si se verifica (6.22) para cada $\xi \in T_x \partial\mathcal{D}$ y $E \in]-1/\beta(x), 0[$ (respectivamente $E = 0$, cualquiera $E > 0$).*

Además, en la Sección 6.3 demostraremos los siguientes resultados.

Teorema 6.2.4 [10] *Sea \mathcal{S} una variedad lorentziana estática con borde diferenciable, véase la Definición 6.1.12. Entonces $\partial\mathcal{S}$ es variacionalmente convexo si y sólo si es geoméricamente convexo.*

Teorema 6.2.5 [10] *Sea S una variedad lorentziana estática con borde diferenciable. Entonces ∂S es variacionalmente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo) si y sólo si es geoméricamente temporal-convexo (respectivamente luz-convexo, espacial-convexo).*

Finalmente en la Sección 6.4 demostraremos la siguiente extensión del Teorema 6.2.4 al caso estacionario.

Teorema 6.2.6 [10] *Sea S una variedad lorentziana estacionaria con borde diferenciable, véase la Definición 6.1.12. Entonces ∂S es variacionalmente convexo si y sólo si es geoméricamente convexo.*

En el caso estacionario también podemos enunciar el Teorema 6.2.5 para los casos espacial y temporal.

6.3 Demostración de los Teoremas 6.2.1 y 6.2.3

Si $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ es una variedad lorentziana estática, una curva regular $\gamma = (x, t)$ es una geodésica si y sólo si satisface el sistema de ecuaciones no lineales del segundo orden

$$\begin{cases} D_s \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{t}^2 \nabla \beta(x) = 0 \\ \frac{d}{ds} (\beta(x) \dot{t}) = 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

véase [86, Chapter 7, Proposition 38]. Por (6.24) se sigue que si $\gamma = (x, t)$ es una geodésica, existe $c \in \mathbf{R}$ independiente de s tal que

$$\beta(x) \dot{t} = c. \quad (6.25)$$

Cuando $c = 0$ entonces $\gamma(s) = (x(s), t_0)$, para algún $t_0 \in \mathbf{R}$, es esencialmente una geodésica sobre \mathcal{M} , en caso contrario, podemos fijar un valor de c y se tiene el siguiente resultado (véanse [102] y [8]).

Proposición 6.3.1 *Sea $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ una geodésica de S satisfaciendo (6.25) con $c = \sqrt{2}$. Entonces $x(s)$ es una pregeodésica (esto es, geodésica salvo reparameterización) para una métrica de Jacobi (3.70) con V como en (6.20), donde $E = E_\gamma$ es igual a la energía de γ , véase (2.2). Recíprocamente, si $\hat{x}(s)$ es una geodésica para una métrica de Jacobi (3.70) entonces admite una reparameterización $x(s)$ tal que $(x(s), t(s))$ es una geodésica de S , donde $t(s)$ es una solución de (6.25) con $c = \sqrt{2}$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos una correspondencia entre geodésicas sobre variedades lorentzianas estáticas y partículas bajo un potencial, luego por la Proposición 3.5.1 tendremos la prueba. Consideremos una solución x de (3.69) y definimos

$$t(s) = \sqrt{2} \int_0^s \frac{1}{\beta(x)} d\tau, \quad (6.26)$$

Entonces $\dot{t}\beta(x) = \sqrt{2}$, y x satisface la ecuación

$$D_s \dot{x} = -\nabla V(x) = -\frac{1}{\beta^2(x)} \nabla \beta(x) = -\frac{1}{2} \dot{t}^2 \nabla \beta(x)$$

o sea se verifica (6.24). Si evaluamos la energía lorentziana de $z = (x, t)$ resulta

$$\frac{1}{2} \langle \dot{z}, \dot{z} \rangle_L = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \frac{1}{2} \beta(x) \dot{t}^2 = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + V(x) = E$$

así la primera parte de la proposición queda demostrada. Consideremos ahora una geodésica $z = (x, t)$. Siendo $\dot{t}\beta(x) = \sqrt{2}$, es sencillo ver que x satisface (3.69). La energía es

$$E(x) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + V(x) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \beta(x) \frac{\dot{t}^2}{2} = E. \quad \square$$

Por (6.24), no es difícil probar que, para cada $z = (x, t) \in \partial\mathcal{S}$ y para cada $\zeta = (\xi, \tau) \in T_z \partial\mathcal{S}$,

$$H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] = H_{\phi}(x)[\xi, \xi] - \frac{1}{2} \tau^2 \langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle, \quad (6.27)$$

donde Φ es como en (6.6) y ϕ es como en (3.2).

Usando (3.71), tenemos, para cada $x \in \partial\mathcal{D}$, $E > -1/\beta(x)$ y $\xi \in T_x \partial\mathcal{D}$,

$$H_{\phi}^E(x)[\xi, \xi] = H_{\phi}(x)[\xi, \xi] + \langle \nabla \phi(x), \nabla u(x) \rangle \langle \xi, \xi \rangle \quad (6.28)$$

donde $H_{\phi}^E(x)$ es el hessiano de ϕ respecto a (3.70). Sustituyendo $u(x)$, véase (3.72), en (6.28), resulta

$$H_{\phi}^E(x)[\xi, \xi] = H_{\phi}(x)[\xi, \xi] - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(E + \frac{1}{\beta(x)}\right)} \frac{1}{\beta^2(x)} \langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle \langle \xi, \xi \rangle. \quad (6.29)$$

Ahora, podemos demostrar el resultado principal.

Demostración del Teorema 6.2.1:

Suponiendo que se mantenga (6.5), y evaluando (6.27) sobre los vectores $(0, 1), (\xi, 0) \in T_z \partial\mathcal{S}$, tenemos

$$\langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle \geq 0 \quad H_{\phi}(x)[\xi, \xi] \leq 0 \quad \forall \xi \in T_x \partial\mathcal{D}. \quad (6.30)$$

Así por (6.29), se verifica la desigualdad (6.22).

Ahora probemos que (6.22) implica (6.5). Por (6.27), sólo tenemos que probar que (6.22) implica las dos desigualdades (6.30). Por la primera, elegimos un cualquier $\xi \in T_x \partial\mathcal{D}$ tal que $\langle \xi, \xi \rangle = 1$, y una sucesión $\{E_m\}$ de números reales tal que

$$E_m > -\frac{1}{\beta(x)} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E_m = -\frac{1}{\beta(x)}.$$

Por (6.22), multiplicando (6.29) por $(E_m + 1/\beta(x))$, tenemos

$$\left(E_m + \frac{1}{\beta(x)}\right) H_\phi(x)[\xi, \xi] - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2(x)} \langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle \leq 0. \quad (6.31)$$

Luego, tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$, por (6.31) obtenemos la desigualdad deseada

$$\langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle \geq 0. \quad (6.32)$$

Por la segunda desigualdad (6.30), tomemos una sucesión $\{E_m\}$ de números reales tal que

$$E_m > -\frac{1}{\beta(x)} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E_m = \infty.$$

Para cada $\xi \in T_x \partial \mathcal{D}$, por (6.22) y (6.29),

$$H_\phi(x)[\xi, \xi] - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(E_m + \frac{1}{\beta(x)}\right) \beta^2(x)} \langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle \langle \xi, \xi \rangle \leq 0.$$

Luego, tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$, resulta

$$H_\phi(x)[\xi, \xi] \leq 0 \quad \forall \xi \in T_x \partial \mathcal{D} \quad (6.33)$$

como se quería. \square

La demostración del Teorema 6.2.3 es directa si se discuten, en la demostración anterior, los valores de E de acuerdo con (2.2).

Demostración del Teorema 6.2.4:

Supongamos que se verifique (6.5) para la función Φ globalmente definida por (6.6). Sea $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ $s \in [a, b]$ una geodésica en $\bar{\mathcal{S}}$ tal que $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathcal{S}$. Probemos que

$$\gamma([a, b]) \subset \mathcal{S}. \quad (6.34)$$

Consideremos la constante $c \in \mathbf{R}$ tal que se verifica (6.25). Si $c = 0$, entonces x es una geodésica en $\bar{\mathcal{D}}$. Dado que se mantiene (6.23), \mathcal{D} tiene borde variacionalmente convexo y, entonces, $x([a, b]) \subset \mathcal{D}$, véase la Observación 3.1.6; luego es válida (6.34). Si $c \neq 0$, y, por contradicción, hubiese un $s_0 \in]a, b[$ tal que $\gamma(s_0) \in \partial \mathcal{S}$, s_0 sería un punto de mínimo local para

$$u(s) = \Phi(\gamma(s)) = \phi(x(s)) \quad s \in [a, b],$$

entonces $u(s_0) = 0$ y $\dot{u}(s_0) = 0$, y podríamos razonar como en el Paso 10 de la Proposición 5.2.2. El conjunto

$$C = \{s \in [a, b] \mid u(s) = 0\}$$

es un subconjunto no vacío y compacto de $[a, b]$. Denotemos por s_M el máximo de C . Para llegar a una contradicción, es suficiente probar que $u(s) = 0$ en un entorno derecho

de s_M . Por esto, existe $\delta > 0$ tal que la proyección $y(s)$ de $x(s)$ sobre $\partial\mathcal{D}$, obtenida usando el flujo del campo vectorial $-\nabla\phi/|\nabla\phi|^2$, está bien definida en $[s_M, s_M + \delta]$. Poniendo

$$\sigma(s) = c \int_0^s \frac{1}{\beta(y)} d\tau$$

y $z(s) = (y(s), \sigma(s)) \in \partial\mathcal{S}$ tenemos por (6.5)

$$H_{\Phi}^L(z(s))[\dot{z}(s), \dot{z}(s)] \leq 0 \quad \forall s \in [s_M, s_M + \delta]. \quad (6.35)$$

Entonces por (6.35) y (6.27)

$$\begin{aligned} \ddot{u}(s) &= H_{\Phi}^L(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] \leq \\ &H_{\Phi}^L(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] - H_{\Phi}^L(z(s))[\dot{z}(s), \dot{z}(s)] = \\ &H_{\phi}(x(s))[\dot{x}(s), \dot{x}(s)] - H_{\phi}(y(s))[\dot{y}(s), \dot{y}(s)] + \\ &\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2(s)\langle\nabla\phi(y(s)), \nabla\beta(y(s))\rangle - \frac{1}{2}\dot{t}^2(s)\langle\nabla\phi(x(s)), \nabla\beta(x(s))\rangle. \end{aligned} \quad (6.36)$$

De nuevo como en la Proposición 5.2.2, existen M_1, M_2 tales que

$$H_{\phi}(x(s))[\dot{x}(s), \dot{x}(s)] - H_{\phi}(y(s))[\dot{y}(s), \dot{y}(s)] \leq M_1 u(s) + M_2 \dot{u}(s) \quad (6.37)$$

para cada $s \in [r_0, r_0 + \delta]$. Además como β y ϕ son \mathcal{C}^2 , existe $M_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2(s)\langle\nabla\phi(y(s)), \nabla\beta(y(s))\rangle - \frac{1}{2}\dot{t}^2(s)\langle\nabla\phi(x(s)), \nabla\beta(x(s))\rangle = \\ \frac{1}{2}c^2 \left[\frac{\langle\nabla\phi(y(s)), \nabla\beta(y(s))\rangle}{\beta^2(y(s))} - \frac{\langle\nabla\phi(x(s)), \nabla\beta(x(s))\rangle}{\beta^2(x(s))} \right] \leq \\ M_3 |y(s) - x(s)| \leq M_3 \rho(s). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Así por (6.36), (6.37) y (6.38)

$$\ddot{u}(s) \leq (M_1 + M_3)u(s) + M_2 \dot{u}(s) \quad \forall s \in [s_M, s_M + \delta]. \quad (6.39)$$

Por (6.39), $u(s_M) = 0$, $\dot{u}(s_M) = 0$ y el lema de Gronwall obtenemos $u(s) = 0$ en $[s_M, s_M + \delta]$. \square

Demostración del Teorema 6.2.5:

En los casos temporal y espacial podemos proceder como en el Teorema 6.2.4; sólo tenemos que observar que en la demostración anterior la curva proyectada $z(s)$ es temporal (o espacial) en un entorno de s_M . Por continuidad, es suficiente comprobar que $\dot{\gamma}(s_M) = \dot{z}(s_M)$. Denotemos por $\eta(s, x)$ al flujo de $-\nabla\phi/|\nabla\phi|^2$; entonces

$$y(s) = \eta(u(s), x(s))$$

y

$$\dot{y}(s) = \eta_x(u(s), x(s))[\dot{x}(s)] - \frac{\nabla\phi(y(s))}{|\nabla\phi(y(s))|^2} \dot{u}(s).$$

Siendo $u(s_M) = 0$, $\dot{u}(s_M) = 0$, claramente $\dot{y}(s_M) = \dot{x}(s_M)$, lo que implica la igualdad requerida. En el caso luminoso este enfoque no se mantiene pero sigue siendo válido el teorema. De hecho, recordemos que si $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ es una geodésica luminosa entonces $x(s)$ es una pregeodésica para la métrica de Jacobi (3.70) con $E = 0$; luego basta con probar que $\partial\mathcal{D}$ es geoméricamente convexo para esta métrica. Pero esto es obvio por el Teorema 6.2.3 y la equivalencia de la convexidad variacional y geométrica en el caso riemanniano. \square

Observación 6.3.2 En la demostración del teorema anterior hemos visto que nuestro primer razonamiento prueba el resultado para los casos temporal y espacial, pero no para el luminoso. Análogamente, el segundo razonamiento funciona en el caso luminoso y espacial, pero no en el temporal (la métrica de Jacobi podría degenerar).

6.4 Demostración del Teorema 6.2.6

En esta sección daremos las ideas principales de la demostración de la equivalencia entre la noción variacional y la geométrica de convexidad para la frontera de una variedad lorentziana estacionaria.

Demostración del Teorema 6.2.6:

Es sencillo verificar que en el caso estacionario las ecuaciones de las geodésicas vienen dadas por

$$\begin{cases} D_s \dot{x} - \dot{t} \operatorname{curl} \delta(x)[\dot{x}] + \ddot{t} \delta(x) + \frac{1}{2} \dot{t}^2 \nabla \beta(x) = 0 \\ \frac{d}{ds} (\beta(x) \dot{t} - \langle \delta(x), \dot{x} \rangle) = 0, \end{cases} \quad (6.40)$$

véase (2.8). Por (6.40) cada geodésica $\gamma(s) = (x(s), t(s)) \subset \mathcal{L}$ verifica

$$(I + A(x)) D_s \dot{x} = \dot{t} \operatorname{curl} \delta(x)[\dot{x}] - \frac{1}{2} \dot{t}^2 \nabla \beta(x) - \frac{\langle \delta'(x)[\dot{x}], \dot{x} \rangle}{\beta(x)} \delta(x) + \frac{\dot{t}}{\beta(x)} \langle \nabla \beta(x), \dot{x} \rangle \delta(x) \quad (6.41)$$

donde $A(x) : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{M}$ es el operador lineal definido por

$$A(x)[\xi] = \frac{\langle \delta(x), \xi \rangle}{\beta(x)} \delta(x).$$

Nótese que siendo $A(x)$ un operador no negativo autoadjunto, $I + A(x)$ es invertible para cada $x \in \mathcal{M}$. Denotando por $B(x)$ su inversa, por (6.41) para cada $z = (x, t) \in \mathcal{L}$ y $\zeta = (\xi, \tau) \in T_z \mathcal{L}$ resulta

$$\begin{aligned} H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] &= H_{\phi}(x)[\xi, \xi] + \tau \langle B(x)[\operatorname{curl} \delta(x)[\xi]], \nabla \phi(x) \rangle \\ &- \frac{1}{2} \tau^2 \langle B(x)[\nabla \beta(x)], \nabla \phi(x) \rangle - \frac{\langle \delta'(x)[\xi], \xi \rangle}{\beta(x)} \langle B(x)[\delta(x)], \nabla \phi(x) \rangle \\ &+ \frac{\tau}{\beta(x)} \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \langle B(x)[\delta(x)], \nabla \phi(x) \rangle \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde Φ, ϕ son como en (6.6) y (3.2). Consideremos una geodésica γ como en la demostración del Teorema 6.2.4. Por (6.24) existe $c \in \mathbf{R}$ tal que, para cada $s \in [a, b]$

$$\beta(x(s))\dot{t}(s) - \langle \delta(x(s)), \dot{x}(s) \rangle = c. \quad (6.43)$$

Por (6.42) y (6.43), para cada $s \in [a, b]$

$$\ddot{u}(s) = H_{\Phi}(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] = \mathcal{A}(x(s))[\dot{x}(s), \dot{x}(s)]$$

donde $\mathcal{A}(x) : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}$ es una forma bilineal. Definimos una curva proyectada $z = (y, \sigma) \subset \partial\mathcal{S}$, donde y es como en el Teorema 6.2.4 y

$$\sigma(s) = \int_0^s \frac{c + \langle \delta(y), \dot{y} \rangle}{\beta(y)} ds. \quad (6.44)$$

Así, por la convexidad y (6.44)

$$H_{\Phi}^L(z(s))[\dot{z}(s), \dot{z}(s)] = \mathcal{A}(y(s))[\dot{y}(s), \dot{y}(s)] \leq 0$$

para cada $s \in [s_M, s_M + \delta]$. Siendo $\partial\mathcal{D}$ diferenciable \mathcal{A} puede extenderse con regularidad a \mathbf{R}^N y la demostración se puede concluir razonando como en la Proposición 5.2.2. \square

Observación 6.4.1 Ya hemos remarcado que en los casos temporal y espacial el Teorema 6.2.5 se puede extender al caso estacionario. Sin embargo, nuestra demostración del Teorema 6.2.5 para el caso luminoso utiliza esencialmente las propiedades específicas de la frontera para una métrica estática; luego no sabemos si el resultado se puede extender en el caso estacionario a la convexidad luminosa (véase la Observación 6.3.2).

6.5 Geodésicas con energía prefijada

Una consecuencia directa del Teorema 6.2.1 es un resultado sobre la existencia de geodésicas con parametrización prefijada proporcional a la longitud de arco que unen un punto y una recta sobre variedades lorentzianas estáticas con borde diferenciable.

Más precisamente consideremos sobre $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ un punto $w = (p, 0)$ y una recta $l(s) = (q, s)$, $s \in \mathbf{R}$. Cada curva $\gamma = (x, t) : [0, a] \rightarrow \mathcal{S}$ que une w y l satisface $x(0) = p$, $t(0) = 0$, $x(a) = q$. Denotaremos por $\tau_{w,l}(\gamma)$ el *tiempo de llegada* dado por

$$\tau_{w,l}(\gamma) = t(a).$$

A lo largo de esta sección, consideraremos geodésicas en \mathcal{S} satisfaciendo (6.25) con

$$c = \sqrt{2}; \quad (6.45)$$

así, sus energías no pueden ser trivialmente alteradas por una reparameterización.

Recientemente, ha sido muy estudiada la conexión de un punto con una recta en variedades lorentzianas. En [39], [44] y [56] se han obtenidos resultados para variedades sin borde y energías negativas o nulas. En [48] y [55], han sido consideradas variedades

con borde convexo de nuevo para $E \leq 0$. En [7] se ha considerado un mayor rango de variabilidad para E y se ha obtenido un resultado para geodésicas sobre variedades con borde no diferenciable (véase la Sección 6.6 para la definición), véase la Sección 6.7. Finalmente en [57], [59] y [60] se ha asentado una teoría de Morse para este problema.

Nuestros resultados tienen una interpretación física cuando $E \leq 0$. De hecho, cuando $E = 0$, el punto w puede representar una fuente de luz y l la trayectoria de un observador. En este caso las geodésicas luminosas que unen w y l determinan las imágenes de la fuente vistas por el observador. Podemos también considerar l como la trayectoria universal de una fuente de luz; en este caso las geodésicas luminosas que unen w y l hacia el pasado de w corresponden a las imágenes de l vistas por un observador en w . Al curvarse la trayectoria de luz por la gravedad, en algunos casos aparecen imágenes múltiples, véase p.ej. [58]. Cuando $E < 0$, w representa una partícula material en caída libre y las geodésicas con E fijada que unen w y l sus trayectorias bajo la acción del campo gravitatorio.

Teorema 6.5.1 [10] *Sea $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ una variedad lorentziana estática con borde diferenciable, y fijemos $E \in \mathbf{R}$ satisfaciendo $E > \sup_{\mathcal{D}} V$, donde V es como en (6.20).*

- (i) $\partial\mathcal{D}$ es convexa respecto a la métrica de Jacobi $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ en (3.70) si y sólo si cada punto $w = (p, 0) \in \mathcal{S}$ y cada recta $l(s) = (q, s) \subset \mathcal{S}$, $s \in \mathbf{R}$ pueden unirse por medio de una geodésica $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ con energía E tal que $x(s)$ minimiza la longitud para $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ entre todas las curvas que unen p y q .
- (ii) Si \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo y $\partial\mathcal{D}$ es convexo respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ entonces existe una sucesión $\{\gamma_m\}$ de geodésicas con energía E que unen w y l . Además, si β está acotado por abajo, entonces se puede elegir la sucesión tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{w,l}(\gamma_m) = \infty \quad (6.46)$$

(Nota. Si $w \in l(\mathbf{R})$ admitimos la aplicación $\gamma : [0, 0] \rightarrow \mathcal{S}$, $\gamma(0) = w$ como geodésica de energía E .)

Demostración: (i) Por la Proposición 6.3.1, existe una tal geodésica que conecte w y l con energía E si y sólo si existe una $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ -geodésica minimizante que une p y q . Siendo $E > \sup_{\mathcal{D}} V$, tenemos que $\overline{\mathcal{D}}$ es una variedad riemanniana completa con borde diferenciable para esta métrica de Jacobi; así, la geodésica minimizante existe si y sólo si la frontera es $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ -convexa (véase la Sección 3.1).

(ii) La primera afirmación es debida a que la categoría de Ljusternik-Schnirelman del espacio las curvas que unen p y q es infinita, véase el Teorema 2.4.5. Para la última, recordemos que la sucesión de geodésicas $\{\gamma_m(s) = (x_m(s), t_m(s))\}$ se puede escoger de manera que cada $x_m : [0, a_m] \rightarrow \mathcal{D}$ es una reparametrización $x_m(s) = \hat{x}_m(r_m(s))$ de una $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ -geodésica unitaria $\hat{x}_m : [0, \hat{a}_m] \rightarrow \mathcal{D}$ con longitud divergente, esto es $\{\hat{a}_m\}$ diverge. Explícitamente,

$$\dot{r}_m(s) = E - V(x_m(s)).$$

Pero por esta reparametrización, (6.25) y nuestra normalización (6.45)

$$t_m(a_m) = \sqrt{2} \int_0^{a_m} \frac{1}{\beta(x_m(s))} ds = \sqrt{2} \int_0^{\hat{a}_m} \frac{1}{E\beta(\hat{x}_m(s)) + 1} ds,$$

así, $t_m(a_m) = \tau_{w,l}(\gamma_m)$ diverge, como se quería. Para una interpretación física de (6.46), véase p.ej. [78, Chapter 6]. \square

Observación 6.5.2 Por el Teorema 6.2.1, queda claro que la convexidad de $\partial\mathcal{D}$ respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ (usada en la Proposición 6.5.1) es una hipótesis más débil que la convexidad de $\partial\mathcal{S}$ respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ (usada en los artículos citados anteriormente). Nótese que hemos obtenido no sólo una condición suficiente sino también la necesaria para la existencia de geodésicas.

Remarquemos que nuestra técnicas funcionan también para energías estrictamente positivas, para las cuales el enfoque intrínseco usado en [48], [55] y [56] falla y que, si β está acotado superiormente, se pueden considerar energías negativas.

Finalmente, bajo una hipótesis de convexidad sobre la métrica original de \mathcal{D} se tiene el siguiente resultado; su prueba se sigue directamente de la Proposición 6.5.1 y de las demostraciones del Teorema 6.2.2, 6.2.1.

Teorema 6.5.3 *Sea $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ una variedad lorentziana estática con borde diferenciable. Supongamos que las dos desigualdades (6.23) se verifican, y fijemos $E \in \mathbf{R}$ con $E > \sup_{\mathcal{D}} V$.*

Entonces cada punto $w \in \mathcal{S}$ y cada recta $l(s) = (q, s) \subset \mathcal{S}$, $s \in \mathbf{R}$, se pueden unir por una geodésica con energía E .

Además, si \mathcal{D} no es contráctil en sí mismo existe una sucesión $\{\gamma_m\}$ de geodésicas con energía E que unen w y l . Si β está acotado superiormente, esta sucesión se puede elegir de manera que se mantiene (6.46).

Observación 6.5.4 Recordemos que todas las geodésicas obtenidas en el Teorema 6.5.3 satisfacen nuestra normalización (6.45). Así, geodésicas con diferentes energías son necesariamente geoméricamente distintas, con lo que se tiene un resultado de multiplicidad hasta cuando \mathcal{D} no es contráctil.

6.6 Un resumen sobre la conexión geodésica

En esta sección discutiremos el problema de la conexión geodésica en variedades lorentzianas (\mathcal{L}, g) . Fijemos dos eventos $z, w \in \mathcal{L}$ y consideremos la acción

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\gamma)[\dot{\gamma}, \dot{\gamma}] ds \quad (6.47)$$

sobre la variedad de Hilbert $\Omega^1(\mathcal{L}) \equiv \Omega^1(\mathcal{L}, z, w)$, véase la Sección 2.2. Cómo en el caso riemanniano, se puede probar que f es regular y que una curva $\gamma \in \Omega^1(\mathcal{L})$ es un punto crítico de f si y sólo si es una geodésica que une z y w . Así, el estudio de la conexión geodésica es equivalente a demostrar que f tiene un punto crítico en $\Omega^1(\mathcal{L})$. Como ya hemos remarcado, f no está acotado ni inferiormente ni superiormente y su puntos críticos son sillars, a causa de la indefinición de la métrica, luego no podemos usar los métodos directos del Cálculo de Variaciones. Sabemos que el espacio-tiempo

de Minkowski es geodésicamente conexo, contrariamente al de de Sitter; y, en general, encontrar condiciones suficientes que garanticen la conexión geodésica es difícil.

Bajo hipótesis analíticas razonables, los métodos variacionales permiten obtener la conexión geodésica para variedades lorentzianas \mathcal{L} dadas por una descomposición global $\mathcal{M} \times \mathbf{R}$. Esta clase es bastante amplia y en particular abarca los ejemplos físicos relevantes recordados en la Sección 6.1. De hecho, por un importante resultado de Geroch, véase [49], se asume que cada variedad lorentziana orientada temporalmente y *globalmente hiperbólica* (\mathcal{L}, g) , véase p.ej. [86] por la definición, es isométrica a una descomposición ortogonal, esto es $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ y g tiene la forma

$$g(z)[(\xi, \tau), (\xi', \tau')] = \langle \alpha(z)\xi, \xi' \rangle - \beta(z)\tau\tau'$$

para cada $z = (x, t) \in \mathcal{L}$, $(\xi, \tau), (\xi', \tau') \in T_z\mathcal{L}$, donde $\alpha(z)$ es un operador positivo sobre $T_x\mathcal{M}$ que depende continuamente de z y $\beta(z)$ es una función positiva sobre \mathcal{L} .

El estudio de la conexión geodésica con métodos variacionales fue desarrollado por primera vez en [21], [23] donde se analizaron variedades estacionarias $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ con \mathcal{M} compacta.

Este problema ha sido estudiado bajo la hipótesis de que β y δ , véase (6.2), estén acotados, en [25] para variedades lorentzianas estáticas con borde convexo, en [51] para variedades lorentzianas estacionarias con borde convexo y en [28] para variedades estáticas con borde convexo no regular, según una definición que podemos expresar como sigue.

Definición 6.6.1 Sean S un dominio abierto de una variedad $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$, y ∂S su frontera topológica. A S se le llama variedad lorentziana estática con borde convexo no regular, si

- (i) $S = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ es una variedad lorentziana estática;
- (ii) existe una función ϕ no negativa C^3 sobre \mathcal{D} satisfaciendo las hipótesis (i)–(ii) del Teorema 3.2.6;
- (iii) cada $y \in \partial_c \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \overline{\mathcal{D}}^c$ y una constante $M \in \mathbf{R}$ tal que la función $\Phi = \phi \circ \Pi$, donde Π es la proyección canónica de S sobre \mathcal{D} , satisface

$$H_{\Phi}^L(z)[\zeta, \zeta] \leq M|\langle \zeta, \zeta \rangle_L| \Phi(z) \quad \forall z = (x, t) \in S \quad t.q. \quad x \in \mathcal{D} \cap U, \zeta \in T_z S. \quad (6.48)$$

Realmente en [28] la conexión geodésica ha sido probada cuando las hipótesis sobre el gradiente y el hessiano de ϕ se satisfacen globalmente en un entorno de la frontera, pero retocando la demostración de [28, Theorem 1.8] y del Teorema 3.2.6, se mantiene el resultado bajo nuestras hipótesis locales.

Observación 6.6.2 Cuando S es un dominio abierto con borde convexo y diferenciable, las condiciones locales de la Definición 6.6.1 son una generalización de las hipótesis para fronteras diferenciables (véase la Observación 3.2.7). Nótese también que la misma demostración del Teorema 6.2.2 permite probar la siguiente proposición:

Sean S un dominio abierto de una variedad $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$, y ∂S su borde topológico. Supóngase que $S = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ es una variedad estática lorentziana y que

- (i) existe una función ϕ no negativa C^3 sobre \mathcal{D} tal que se verifica (i) del Teorema 3.2.6;
- (ii) cada $y \in \partial_c \mathcal{D}$ admite un entorno $U \subset \overline{\mathcal{D}}^c$ y una constante $M \in \mathbf{R}$ tal que la función $\Phi = \phi \circ \Pi$ satisface (6.48).

Entonces y admite un entorno $U \subset \overline{\mathcal{D}}^c$ y una constante $M \in \mathbf{R}$ tal que se verifican las dos siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi(x), \nabla \beta(x) \rangle &\geq -2M\phi(x)\beta(x); \\ H_\phi(x)[\xi, \xi] &\leq M\langle \xi, \xi \rangle \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap U, \xi \in T_x \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Luego, si \mathcal{S} es una variedad lorentziana estática con borde convexo no regular, \mathcal{D} es convexa dado que se mantienen todas las hipótesis del Teorema 3.2.6. En particular, obtenemos un resultado de existencia para geodésicas que unen un punto y una recta en esta clase de variedades lorentzianas, véase el Teorema 6.5.1 (en este caso sólo tenemos una condición suficiente, compárese con la Observación 6.5.2).

Podemos concluir la discusión sobre los espacio-tiempos presentada en los Ejemplos 6.1.13, de hecho: en el caso (2), \mathcal{S}_S tiene borde convexo según la Definición 6.6.1, véase [28, Proposition A.2] y si $r^* < r_+$, ha sido probado en [28] que \mathcal{S}_R tiene borde convexo, según la Definición 6.6.1, si $m^2 > \frac{9}{5}e^2$.

En todo los trabajos citados se obtiene también un resultado de multiplicidad para geodésicas espaciales cuando la topología de \mathcal{M} no es trivial. Vale notar que en el caso estacionario es posible demostrar un principio variacional, véanse [27, Theorem 2.1], [51, Theorem 2.2] y la Sección 7.3, que reduce la búsqueda de geodésicas que unen dos eventos a la de puntos críticos de un funcional dependiente sólo de la componente espacial y que está acotado inferiormente bajo las hipótesis supuestas.

Estos resultados no intrínsecos han sido extendidos bajo una condición de coercividad en [62] donde queda demostrado un principio variacional para geodésicas sobre variedades lorentzianas que admiten un campo vectorial temporal de Killing.

Por otra parte, en el caso general los coeficientes de la métrica de una descomposición ortogonal dependen de la coordenada temporal, así, en este caso no es posible reducir el estudio de la conexión geodésica al de un funcional acotado inferiormente. Sin embargo la teoría de los puntos críticos para funcionales indefinidos permite obtener resultados, véase [29], [52], [54]. En este caso, para lograr resultados de multiplicidad, se usa la categoría relativa.

Observación 6.6.3 Es bien conocido que es posible estudiar geodésicas causales por medio de la Teoría Causal, dado que estas geodésicas maximizan localmente la separación temporal. Recordemos que Avez y Seifert (véanse [2], [106]) probaron que cada par de puntos causalmente relacionados de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico se pueden unir por medio de una geodésica causal. Sin embargo, tales espacio-tiempos podrían no ser conexos geodésicamente; de hecho el espacio-tiempo de de Sitter (espacio modelo de curvatura constante positiva) es un ejemplo de espacio-tiempo globalmente hiperbólico no geodésicamente conexo. En [98] se demuestra un resultado de tipo Avez-Seifert para los espacio-tiempos *Robertson-Walker Generalizado (GRW)* y *Reissner-Nordström Intermedio* cuando la fibras son convexas. Estas técnicas también permiten

obtener resultados de conexión geodésica, lo cual se lleva a cabo explícitamente en [101] para los espacios-tiempos GRW. Ulteriores argumentos topológicos en [42] permiten establecer la conexión geodésica para una clase más extensa de espacios-tiempos multiwarped. Casos particulares han sido estudiados desde un punto de vista variacional en [52] y [50]. Para una detallada comparación entre la Teoría Causal y los métodos variacionales en el estudio de geodésicas que unen dos puntos remitimos a [100]. Para ulteriores resultados con otras técnicas remitimos también a [86], [16], [99] o al artículo recopilatorio [104].

6.7 Apéndice

Sin ninguna discusión sobre el borde de una variedad lorentziana estática, se puede obtener el siguiente resultado de existencia sobre geodésicas que unen un punto y una recta por medio de un diferente enfoque.

Teorema 6.7.1 *Sea \mathcal{S} una variedad lorentziana estática con borde diferenciable convexo tal que $\overline{\mathcal{D}}$ es completa. Supongamos que existen $b, \eta > 0$ tal que*

$$\eta \leq \beta(x) \leq b \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (6.50)$$

Entonces, para cada $E > \sup_{\mathcal{D}} V$, cada punto $w = (p, 0) \in \mathcal{S}$ y cada recta $l(s) = (q, s) \subset \mathcal{S}$, $s \in \mathbf{R}$ pueden unirse por medio de una geodésica $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ de energía E .

Aunque el enfoque en la Sección 6.5 sea el más preciso, a continuación esbozaremos la demostración del siguiente teorema (que se mantiene también en cada caso causal), dado que las técnicas que se usan serán útiles en el Capítulo 8, véase también el Capítulo 5.

Por la Proposición 6.3.1 nuestro problema se reduce a uno riemanniano y podemos usar un principio variacional introducido en [112]. De hecho, poniendo

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \int_0^1 (E - V(x)) ds \quad (6.51)$$

sobre $\Omega^1(\mathcal{D})$, se puede demostrar la siguiente proposición, véase también [8, Proposition 2.1].

Proposición 6.7.2 *Sean $V \in C^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ acotado inferiormente y $E \in \mathbf{R}$, $E > \sup V$.*

(i) *Sea $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$ un punto crítico de \mathcal{E} con $\mathcal{E}(x) > 0$. Entonces $y(s) = x(\omega s)$, $s \in [0, \frac{1}{\omega}]$, donde*

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 (E - V(x)) ds}{\frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds}, \quad (6.52)$$

es una solución de (3.69) con energía E .

(ii) Sea y una solución no constante de (3.69) con energía E . Entonces $x(s) = y(as)$, $s \in I$, es un punto crítico \mathcal{E} sobre $\Omega^1(\mathcal{D})$ con $\mathcal{E}(x) > 0$.

Para superar la falta de completitud de $\Omega^1(\mathcal{D})$, introducimos una familia de funcionales penalizados de manera que todos los puntos críticos son soluciones de energía E de ciertos sistemas lagrangianos perturbados:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\epsilon(x) = & \mathcal{E}(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \int_0^1 U_\epsilon(x) ds = \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \int_0^1 (E - V(x) + U_\epsilon(x)) ds, \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde las funciones U_ϵ son como en (4.13) con las ψ_ϵ funciones no negativas, crecientes \mathcal{C}^2 sobre \mathbf{R} tal que se mantengan (4.10), (4.11), (5.5) y (4.12).

Demostración del Teorema 6.7.1:

Siendo para cada $\epsilon \in]0, 1]$ E_ϵ acotado inferiormente, satisfaciendo (PS) y teniendo los subniveles completos (véase p.ej. la Proposición 5.2.1), E_ϵ alcanza su mínimo en una curva $x_\epsilon \in \Omega^1(\mathcal{D})$. Es sencillo encontrar $K \in \mathbf{R}$ tal que

$$\mathcal{E}_\epsilon(x_\epsilon) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1]. \quad (6.54)$$

A continuación probaremos que si se mantiene (6.54), entonces existe una sucesión decreciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ tal que $\{x_{\epsilon_m}\}$ converge fuertemente en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$ hacia una curva $x \in \Omega^1(\mathcal{D})$ que es un punto crítico de \mathcal{E} . Nótese que para cada $\epsilon \in]0, 1]$ x_ϵ satisface

$$A_\epsilon(x_\epsilon) D_s \dot{x}_\epsilon + B_\epsilon(x_\epsilon) \nabla V(x_\epsilon) = -B_\epsilon(x_\epsilon) \frac{2}{\phi^3(x_\epsilon)} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon)} \right) \nabla \phi(x_\epsilon) \quad (6.55)$$

donde

$$A_\epsilon(x_\epsilon) = \int_0^1 \left(E - V(x_\epsilon) + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon)} \right) \right) ds, \quad B_\epsilon(x_\epsilon) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}_\epsilon, \dot{x}_\epsilon \rangle ds$$

y pongamos para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $s \in I$

$$\lambda_\epsilon(s) = \frac{2}{\phi^3(x_\epsilon(s))} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(x_\epsilon(s))} \right). \quad (6.56)$$

Paso 1: Probemos la siguiente estimación sobre la familia $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon \in]0, 1]}$: existe un $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon \in]0, \epsilon_0]}$ está acotada en $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$. Pongamos para cada $\epsilon \in]0, 1]$ $u_\epsilon(s) = \phi(x_\epsilon(s))$, con lo que $u_\epsilon \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{R})$. Sea s_ϵ un punto de mínimo por u_ϵ . Dado que ψ_ϵ es convexa, ψ'_ϵ es creciente, luego resulta

$$\lambda_\epsilon(s) \leq \lambda_\epsilon(s_\epsilon) \quad \forall s \in I,$$

y basta con probar que $(\lambda_\epsilon(s_\epsilon))_{\epsilon \in]0,1]}$ está acotada y estudiar el caso en que

$$\inf_{\epsilon \in]0,1]} \phi(x_\epsilon(s_\epsilon)) = 0. \quad (6.57)$$

Sea $z_\epsilon(s) = (y_\epsilon(s), t_\epsilon(s))$, para $s \in \left[0, \frac{1}{\omega_\epsilon}\right]$, donde y_ϵ viene dado por la Proposición 6.7.2 y

$$t_\epsilon(s) = \sqrt{2} \int_0^s \frac{1}{\beta(y_\epsilon)} d\tau \quad (6.58)$$

y remarquemos que para cada $s \in \left[0, \frac{1}{\omega_\epsilon}\right]$, resulta

$$\frac{1}{2} \langle \dot{z}_\epsilon(s), \dot{z}_\epsilon(s) \rangle_L = E + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(y_\epsilon(s))} \right). \quad (6.59)$$

Como $y_\epsilon(s) = x_\epsilon(\omega_\epsilon s)$, donde

$$\omega_\epsilon^2(x_\epsilon) = \frac{A_\epsilon(x_\epsilon)}{B_\epsilon(x_\epsilon)}, \quad (6.60)$$

$\tau_\epsilon = s_\epsilon \frac{1}{\omega_\epsilon}$, es un punto de mínimo para $h_\epsilon(s) = \Phi(z_\epsilon(s)) = \phi(y_\epsilon(s))$ sobre $\left[0, \frac{1}{\omega_\epsilon}\right]$. Ahora pongamos, para cada $\epsilon \in]0, 1]$ y $s \in \left[0, \frac{1}{\omega_\epsilon}\right]$:

$$\mu_\epsilon(s) = \frac{2}{\phi^3(y_\epsilon(s))} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(y_\epsilon(s))} \right). \quad (6.61)$$

Es sencillo ver que z_ϵ satisface la ecuación

$$D_s \dot{z}_\epsilon = -\mu_\epsilon(s) \nabla^L \Phi(z_\epsilon)$$

y que $\lambda_\epsilon(s_\epsilon) = \mu_\epsilon(\tau_\epsilon)$ para cada $\epsilon \in]0, 1]$. Además, por (6.57),

$$\inf_{\epsilon \in]0,1]} \phi(y_\epsilon(\tau_\epsilon)) = 0. \quad (6.62)$$

Diferenciando dos veces h_ϵ , tenemos:

$$0 \leq \ddot{h}_\epsilon(\tau_\epsilon) = H_\Phi^L(z_\epsilon(\tau_\epsilon))[\dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon), \dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon)] - \mu_\epsilon(\tau_\epsilon) \langle \nabla^L \Phi(z_\epsilon(\tau_\epsilon)), \nabla^L \Phi(z_\epsilon(\tau_\epsilon)) \rangle_L. \quad (6.63)$$

Es sencillo probar que

$$(\|y_\epsilon\|_\infty)_{\epsilon \in]0,1]} \text{ está acotada.} \quad (6.64)$$

Ahora, sea para cada $\epsilon \in]0, 1]$

$$\tilde{y}_\epsilon(s) = \begin{cases} y_\epsilon(s) & \text{if } s \in \left[0, \frac{1}{\omega_\epsilon}\right] \\ y_\epsilon\left(\frac{1}{\omega_\epsilon}\right) = p & \text{if } s \in \left[\frac{1}{\omega_\epsilon}, K_1\right], \end{cases}$$

donde $K_1 = \sup_{\epsilon \in]0,1]} \frac{1}{\omega_\epsilon}$. Decimos que existe una constante positiva a_1 independiente de ϵ tal que

$$H_\Phi(z_\epsilon(\tau_\epsilon))[\dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon), \dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon)] \leq a_1 \langle \dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon), \dot{z}_\epsilon(\tau_\epsilon) \rangle_R, \quad (6.65)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ es la métrica riemanniana $\langle \zeta, \zeta \rangle_R = \langle \xi, \xi \rangle + \beta(x)\tau^2$. De hecho, dado que

$$(\tilde{y}_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]} \text{ está acotada en } C^0([0, K_1], \mathbf{R}), \quad (6.66)$$

se sigue (6.65). Además por (3.2) tenemos la existencia de una constante positiva a_2 tal que, para ϵ suficientemente pequeño,

$$\langle \nabla \phi(y_\epsilon(\tau_\epsilon)), \nabla \phi(y_\epsilon(\tau_\epsilon)) \rangle \geq a_2. \quad (6.67)$$

Luego por (6.63), (6.65) y (6.59)

$$\mu(\tau_\epsilon) \leq a_3 \left[E + \psi_\epsilon \left(\frac{1}{\Phi^2(z_\epsilon(\tau_\epsilon))} \right) + \beta(y_\epsilon(\tau_\epsilon)) t_\epsilon^2(\tau_\epsilon) \right]$$

y siendo β acotado inferiormente,

$$\frac{2}{\phi^3(y_\epsilon(\tau_\epsilon))} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(y_\epsilon(\tau_\epsilon))} \right) \leq a_4 + a_5 \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\phi^2(y_\epsilon(\tau_\epsilon))} \right).$$

Paso 2: Argumentos estándar muestran que existe una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ en $]0, 1]$ y $x \in H^1(I, \overline{\mathcal{D}})$ tal que $\{x_{\epsilon_m}\}$ converge fuertemente a x en $H^1(I, \mathbf{R}^N)$.

Paso 3: Razonando como en los Pasos 5, 6, 7 de la Proposición 5.2.2, obtenemos la existencia de $\lambda \in L^2(I, \mathbf{R})$, mayor o igual a 0 casi en todo I , igual a 0 si $x(s) \in \mathcal{D}$ y tal que para cada $\xi \in T_x \Omega^1(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (E - V(x)) ds \int_0^1 \langle \dot{x}, \xi \rangle ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \int_0^1 \langle \nabla V(x), \xi \rangle ds = \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \int_0^1 \lambda(s) \langle \nabla \phi(x), \xi \rangle ds. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Además integrando por partes (6.68) resulta que $x \in H^2(I, \overline{\mathcal{D}})$, véase la Sección 2.2, es una solución débil de la ecuación

$$\int_0^1 (E - V(x)) ds D_s \dot{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \nabla V(x) = -\lambda(s) \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \nabla \phi(x). \quad (6.69)$$

Paso 4: Sea $\bar{s} \in I$ tal que $x(\bar{s}) \in \mathcal{D}$. Entonces probaremos que existe un entorno cerrado J de \bar{s} tal que $\lambda(s) = 0$ para cada $s \in J$. De hecho, como $x(\bar{s}) \in \mathcal{D}$ y x es continua, existe un entorno cerrado J de \bar{s} tal que $x(s) \in \mathcal{D}$ para cada $s \in J$. Dado que la sucesión $\{x_{\epsilon_m}\}$ converge uniformemente a x , por (3.2), existe $\nu \in \mathbf{N}$ tal que

$$d = \inf \{ \phi(x_{\epsilon_m}(s)) \mid s \in J, m \geq \nu \} > 0.$$

Por (4.10) para cada $m \in \mathbf{N}$, $m \geq \nu$, tal que $\epsilon_m < d^2$, tenemos

$$\psi_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\phi^2(x_{\epsilon_m}(s))} \right) = 0, \quad \psi'_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\phi^2(x_{\epsilon_m}(s))} \right) = 0 \quad \forall s \in J.$$

Entonces, tomando el límite débil cuando $m \rightarrow \infty$ tenemos $\lambda(s) = 0$, para cada $s \in J$. Paso 5: Probaremos que el multiplicador desaparece casi por doquier. De hecho, sabemos que $\lambda(s) = 0$ si $x(s) \in \mathcal{D}$; sea ahora $\bar{s} \in]0, 1[$ tal que $x(\bar{s}) \in \partial\mathcal{D}$ y existe $\ddot{x}(\bar{s})$, entonces \bar{s} es un mínimo para $u(s) = \phi(x(s))$, así $\dot{u}(\bar{s}) = 0$, $\ddot{u}(\bar{s}) \geq 0$. Podemos considerar $z = (y, t)$ con y como en la Proposición 6.7.2 y t como en el Paso 1. Sea $h(s) = \Phi(z(s)) = \phi(y(s))$, y llamemos $\bar{\tau}$ al mínimo correspondiente a \bar{s} . Así, diferenciando dos veces, por (6.7) tenemos:

$$0 \leq \ddot{h}(\bar{\tau}) = H_{\Phi}^L(z(\bar{\tau}))[\dot{z}(\bar{\tau}), \dot{z}(\bar{\tau})] + \langle \nabla^L \Phi(z(\bar{\tau})), D_s \dot{z}(\bar{\tau}) \rangle_L \leq -\mu(\bar{\tau}) \langle \nabla^L \Phi(z(\bar{\tau})), \nabla^L \Phi(z(\bar{\tau})) \rangle_L, \quad (6.70)$$

donde μ denota el multiplicador correspondiente a z . Luego por el Paso 5 obtenemos $\mu(s) = 0$ casi por doquier. Finalmente, tenemos $z \left(\left[0, \frac{1}{\omega}\right] \right) \subset \mathcal{S}$ siendo z una geodésica que une dos puntos de \mathcal{S} y $\partial\mathcal{S}$ convexo. \square

Observación 6.7.3 Cuando \mathcal{D} no es contráctil en sí misma, podemos razonar como en la demostración del Teorema 3.2.2. De hecho, tenemos la existencia de una sucesión $\{x_m\}$ de puntos críticos de \mathcal{E} tal que $\{\mathcal{E}(x_m)\}$ diverge, así podemos considerar la sucesión asociada $z_m = (y_m, t_m)$, con

$$\tau_{w,\gamma}(z_m) = t_m \left(\frac{1}{\omega(y_m)} \right) \geq c \sqrt{\mathcal{E}(x_m)},$$

para alguna constante $c > 0$, y de aquí se sigue (6.46).

Usando este enfoque también es posible considerar el caso de que \mathcal{S} sea una variedad lorentziana estática con borde convexo no regular, según la Definición 6.6.1, véase [7, Theorem 1.7].

Capítulo 7

Trayectorias periódicas

Como anunciamos en la Observación 2.6.7, en este capítulo consideraremos una clase de geodésicas llamadas *trayectorias periódicas*, véase la Definición 7.1.1. Éstas se introdujeron en [20] para los espacios-tiempos estáticos con $\mathcal{M} = \mathbf{R}^3$. Resultados de existencia y multiplicidad acerca de las trayectorias periódicas en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ se pueden encontrar en [20] y [27] para el caso estático y en [69] para el caso estacionario. La existencia de una trayectoria periódica temporal para una métrica dependiente del tiempo en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ se ha demostrado en [80], [79], [68]. En [27] y [67] hay resultados de existencia y multiplicidad de trayectorias periódicas en variedades lorentzianas estáticas con \mathcal{M} compacta, véase también [103]. Para el caso de que \mathcal{M} no sea compacta y tenga borde, nos remitimos a [26], [12], [76], [36]. En la Sección 7.1 daremos algunas definiciones para poder presentar en la Sección 7.2 algunos resultados de existencia y multiplicidad sobre trayectorias periódicas. Las demostraciones serán llevadas a cabo en las Secciones 7.3, 7.4 y 7.5 y, finalmente, en la Sección 7.6 daremos una aplicación.

7.1 Preliminares

Definición 7.1.1 Sean \mathcal{L} una variedad lorentziana estacionaria y $T > 0$. Una trayectoria periódica de período universal T y período propio $a > 0$ es una geodésica $\gamma = (x, t) : [0, a] \rightarrow \mathcal{L}$ tal que

$$\begin{cases} x(a) = x(0) \\ \dot{x}(a) = \dot{x}(0) \end{cases} \quad \begin{cases} t(a) = t(0) + T \\ \dot{t}(a) = \dot{t}(0). \end{cases}$$

Una trayectoria periódica $\gamma = (x, t)$ se le llama *no-trivial* si x no es una curva constante. Supondremos $t(0) = 0$ y llamaremos dos trayectorias periódicas $\gamma_1 = (x_1, t_1), \gamma_2 = (x_2, t_2)$ *geométricamente distintas* si tienen imágenes diferentes, esto es $\gamma_1([0, a]) \neq \gamma_2([0, a])$. (Sin la elección $t(0) = 0$ se podrían considerar diferentes $(x(s), t(s))$ y $(x(s), t(s) + t(0))$, lo cual no es interesante.)

Observación 7.1.2 Nótese que una curva $\gamma(s) = (x, t(s))$ con $x \in \mathcal{M}$ es una trayectoria periódica trivial si y sólo si $t(s) = Ts/a$ y \bar{x} es un punto crítico de β , véase (6.40).

Desde luego, una trayectoria periódica trivial es temporal y, si \mathcal{M} es compacta, existen seguramente trayectorias triviales.

Observación 7.1.3 Cuando $\langle \cdot, \cdot \rangle$, δ y β en (6.2) dependen de t periódicamente, esto es coinciden en cada par (x, t) , $(x, t + \tau)$ para cierto $\tau > 0$, tiene sentido buscar trayectorias periódicas de período universal múltiplo de τ , véanse [103] y sus referencias.

Observación 7.1.4 Podemos buscar trayectorias periódicas con energía fija E (en el sentido del Capítulo 6), período propio a o período universal T , comparar con el Capítulo 4. Cuando \mathcal{L} es una variedad lorentziana estática, una trayectoria periódica $\gamma = (x, t)$ satisface (6.25), donde c está relacionado con el período propio y la energía, así podemos fijar c (véanse [102] y la Sección 7.5), luego dos geodésicas con diferentes energías son geoméricamente distintas, y buscar trayectorias periódicas con energía, período propio o período universal fijo. La correspondencia establecida en [102], véanse también las Proposiciones 6.3.1 y 7.5.1, permite obtener resultados acerca de los dos primeros problemas como corolarios de los resultados del caso riemanniano. Para estudiar el tercer problema es mejor seguir el enfoque de las referencias citadas en la introducción de este capítulo. Remarquemos que las trayectorias periódicas causales son la versión relativista de los movimientos periódicos bajo la fuerza gravitacional en la mecánica lagrangiana clásica.

Observación 7.1.5 Como en el caso riemanniano, se pueden buscar geodésicas cerradas. La existencia de trayectorias temporales o luminosas ha sido estudiada desde el punto de vista de la Teoría Causal en [45], [46], [110]. Con los métodos variacionales se ha estudiado la existencia de geodésicas cerradas espaciales en espacio-tiempos más relevantes físicamente en [77], donde se ha probado la existencia de una geodésica espacial cerrada en variedades lorentzianas estacionarias con \mathcal{M} completa, y en [38] donde el mismo resultado se ha demostrado en una clase de variedades lorentzianas estacionarias con borde estrictamente espacial-convexo.

7.2 Exposición de los resultados

En primer lugar presentaremos un resultado de existencia y multiplicidad sobre trayectorias periódicas con período universal fijo T (llamaremos a estas curvas trayectorias T -periódicas) para métricas estacionarias con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ completa, véase (6.2), que se demostrará en la Sección 7.3.

Teorema 7.2.1 [5] *Sea \mathcal{L} una variedad lorentziana estacionaria, con $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ y \mathcal{M} completa. Supongamos que para algún $x_0 \in \mathcal{M}$*

(i) *existen $\eta, b \in \mathbf{R}$ (pondremos por simplicidad $b = 1$) tal que:*

$$0 < \eta \leq \beta(x) \leq b \quad \forall x \in \mathcal{M}; \quad (7.1)$$

(ii)

$$\limsup_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} K(x) \leq 0,$$

donde K ha sido definida en (4.2);

(iii)

$$\lim_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} |\delta(x)| = 0;$$

(iv)

$$\lim_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} |\nabla\beta(x)| = 0, \quad \lim_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} |\delta'(x)[\xi]| = 0,$$

donde para cada $x \in \mathcal{M}$, $\xi \in T_x\mathcal{M}$ es un vector unitario;

(v)

$$\limsup_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} H_\beta(x)[\xi, \xi] \leq 0, \quad \lim_{d(x,x_0) \rightarrow \infty} |\delta''(x)[\xi, \xi]| = 0,$$

donde para cada $x \in \mathcal{M}$, $\xi \in T_x\mathcal{M}$ es un vector unitario;

(vi) existen un cuerpo \mathcal{F} y infinitos $q \in \mathbf{N}$ tales que

$$H_q(\Lambda(\mathcal{M}), \mathcal{F}) \neq \{0\}, \quad (7.2)$$

(véase la Observación 2.5.9).

Entonces, para cada $T > 0$ existen infinitas trayectorias T -periódicas geométricamente distintas.

Remarquemos que las hipótesis del Teorema 7.2.1 son diferentes de las del análogo resultado en [76]. De hecho, en [76] se supone la existencia de una función regular sobre \mathcal{M} , que es convexa fuera de un compacto; bajo esta hipótesis, los resultados del caso compacto se pueden extender, usando la teoría de la categoría de Ljusternik-Schnirelman (véase también la Observación 4.2.2).

A continuación consideraremos trayectorias periódicas temporales. De hecho, el siguiente resultado concierne a trayectorias temporales sobre una clase de variedades lorentzianas estacionarias que incluyen el espacio-tiempo de Kerr (véase la Sección 6.1) y se probará en la Sección 7.4.

Teorema 7.2.2 [5] *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estacionaria con borde diferenciable variacionalmente estrictamente temporal-convexo y compacto (véase la Definición 6.1.8). Supongamos que las hipótesis del Teorema 7.2.1 se satisfacen con \mathcal{M} reemplazado por \mathcal{D} y que el conjunto de los puntos críticos de β sea finito. Entonces, denotando por $N(T)$ el número de las trayectorias T -periódicas temporales sobre \mathcal{S} ,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} N(T) = \infty.$$

Corolario 7.2.3 [5] *Denotando por $N_K(T)$ el número de las trayectorias T periódicas temporales del espacio-tiempo de Kerr, entonces*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} N_K(T) = \infty.$$

Recordemos que nuestro enfoque también ha sido usado en [12] en el estudio de las trayectorias periódicas en variedades lorentzianas estáticas, como el espacio-tiempo de Schwarzschild y Reissner–Nordström.

Además, como aplicación del Teorema 4.2.1, obtendremos la existencia y la multiplicidad de trayectorias periódicas con energía prefijada E en una clase de variedades lorentzianas estáticas con borde gracias al principio variacional establecido en [102].

A continuación $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ denotará la métrica de Jacobi definida en (3.70) sobre \mathcal{M} con V como en (6.20). Ponemos para cada $x \in \mathcal{M}$

$$K_E(x) = \sup \{K_E(\pi) \mid \pi \subset T_x \mathcal{M}\},$$

donde $K_E(\pi)$ es la curvatura seccional del plano 2-dimensional π respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

Teorema 7.2.4 [8] Sean $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estática, V como en (6.20) y $E \in \mathbf{R}$ with $E > \sup V$. Supongamos que $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ sea CCB y que para algún $x_0 \in \mathcal{M}$

(i)

$$\limsup_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} K_E(x) \leq 0;$$

(ii) existen un cuerpo \mathcal{F} y $q \in \mathbf{N}$, $q > 2 \dim \mathcal{M}$, tales que se mantiene (7.2).

Entonces existe una trayectoria periódica no trivial sobre \mathcal{L} con energía E .

Observaciones 7.2.5 El Teorema 7.2.4 se puede aplicar para lograr la existencia de trayectorias periódicas bajo hipótesis que involucran sólo la métrica riemanniana sobre \mathcal{M} , teniendo en cuenta las siguientes consecuencias de las fórmulas (3.71) y (4.50):

(1) Cuando \mathcal{M} es CCB respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la hipótesis (ii) del Corolario 4.2.3 es suficiente para garantizar que \mathcal{M} es CCB respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, para cada $E > \sup V$.

(2) Si se mantienen las condiciones (i) y (ii) del Corolario 4.2.3 para K y V entonces se mantiene la hipótesis (i) del Teorema 7.2.4. Desafortunadamente, la condición CCB sobre $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ no se satisface para los espacios-tiempos de Schwarzschild y Reissner–Nordström. Sin embargo, en la Sección 7.6, se mostrará que todas las hipótesis del Teorema 7.2.4 son satisfechas por estos espacios-tiempos. El Teorema 7.2.4 garantiza en ellos la existencia y multiplicidad de trayectorias periódicas con energía E , en el rango $\sup V < E \leq 0$.

Observación 7.2.6 Hemos ya destacado que las trayectorias periódicas con diferentes energías son geoméricamente distintas (véase también la Sección 7.5) así, variando E obtenemos un resultado de multiplicidad cuando se mantiene (ii) del Teorema 7.2.4. Por otra parte, en el Teorema 7.2.1, véase también [12, Theorem 1.6], se obtiene un resultado de multiplicidad de trayectorias periódicas con período universal fijo cuando se mantiene (ii) del Teorema 7.2.4 para infinitos $q \in \mathbf{N}$.

7.3 Demostración del Teorema 7.2.1

Se puede probar que las trayectorias T -periódicas son los puntos críticos de la acción f^1 , véase (6.47), definido sobre la variedad de dimensión infinita

$$\mathcal{Z}_T = \Lambda^1(\mathcal{M}) \times H^1(0, T),$$

véase p.ej. [51, Lemma 4.1], donde

$$H^1(0, T) = \left\{ t \in H^1(I, \mathbf{R}) \mid t(0) = 0, t(1) = T \right\}.$$

Dado que el período universal T no depende de reparametrizaciones afines, véase [102, Remark 3.2], asumimos $a = 1$, o sea las trayectorias T -periódicas son normalizadas en el período propio.

Hemos ya destacado que la búsqueda de los puntos críticos del funcional (6.47) es bastante difícil porque f es fuertemente indefinido y el índice de Morse de su puntos críticos es ∞ . Además, por el hecho de que \mathcal{M} no es compacta y por la naturaleza periódica del problema, f no satisface la condición (PS). Superamos el primer problema usando un principio variacional, véase [51, Theorem 2.2].

Puesto, para cada $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$,

$$H(x) = \frac{T - \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta(x)} ds}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds}, \quad (7.3)$$

son válidos los siguientes lemas, véase [51, Section 2] y la Sección 8.2.

Lema 7.3.1 *Sea $\gamma = (x, t) \in \mathcal{Z}_T$ un punto crítico de f . Entonces*

$$\dot{t} = \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle + H(x)}{\beta(x)} \quad \text{c.p.d.} \quad (7.4)$$

Sea ahora $f_t(x, t) : H_0^1(I, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ la derivada parcial de f respecto a t y consideremos el conjunto

$$\mathcal{V} = \{ \gamma = (x, t) \in \mathcal{Z}_T \mid f_t(x, t) = 0 \}.$$

Lema 7.3.2 *\mathcal{V} es el gráfico de la aplicación regular $\Psi : \Lambda^1(\mathcal{M}) \rightarrow H^1(0, T)$ tal que para cada $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$*

$$\Psi(x)(s) = \int_0^s \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta(x)} dr + H(x) \int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr, \quad (7.5)$$

donde $H(x)$ se define por (7.3).

¹Nótese que el funcional $\Delta(y) = \int_0^1 \langle \delta(y), \dot{y} \rangle ds$ sobre $H^1(I, \mathcal{M})$ es diferenciable y, para cada $v \in T_y H^1(I, \mathcal{M})$ resulta $\Delta'(y)[v] = \int_0^1 \langle \delta'(y)[v], \dot{y} \rangle ds + \int_0^1 \langle \delta(y), D_s v \rangle ds$ donde $\delta'(y)$ ha sido definido en (2.6).

Consideremos ahora la restricción de f al gráfico de Ψ , esto es el funcional $J : \Lambda^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{R}$

$$J(x) = f(x, \Psi(x)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle^2}{\beta(x)} ds - \frac{H^2(x)}{2} \int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds. \quad (7.6)$$

Se verifica el siguiente teorema.

Teorema 7.3.3 *Sea $\gamma = (x, t) \in \mathcal{Z}_T$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (a) γ es un punto crítico de f ;
- (b) (i) x es un punto crítico de J ;
- (ii) $t \in H^1(0, T)$ es la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{t} = \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle + H(x)}{\beta(x)} \\ t(0) = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Más aún, si es cierto (a) o (b),

$$f(\gamma) = J(x).$$

La ventaja de estudiar el funcional J , en lugar de f , es que J , bajo nuestras hipótesis, está acotado inferiormente y el índice de Morse de sus puntos críticos es finito. Por la hipótesis (iii) del Teorema 7.2.1, obtenemos la existencia de $D > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \langle \delta(x), \delta(x) \rangle = D < \infty, \quad (7.8)$$

así, es sencillo probar el siguiente lema.

Lema 7.3.4 *Supongamos que se verifiquen (7.1) y (7.8). Entonces J está acotado inferiormente.*

Aunque cuando J esté acotado inferiormente, no satisface la condición (PS) porque \mathcal{M} no es compacta y por la naturaleza periódica del problema. Siguiendo [30] y [12], perturbemos f y J de manera conveniente. Tal penalización permite encontrar puntos críticos de f : de hecho, aplicaremos el Teorema 2.5.7 a los funcionales penalizados y luego, gracias a ciertas estimaciones a priori, encontraremos puntos críticos de J ; finalmente será aplicado el Teorema 7.3.3.

Sean, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $\psi_\epsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ como en (4.10), $W \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ tal que se verifique (4.14) y $W_\epsilon(x)$ como en (4.15). Ahora, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, consideremos los funcionales

$$\begin{aligned} f_\epsilon(\gamma) &= f(\gamma) + W_\epsilon(x(0)) \\ J_\epsilon(x) &= J(x) + W_\epsilon(x(0)) \end{aligned} \quad (7.9)$$

sobre \mathcal{Z}_T y $\Lambda^1(\mathcal{M})$ respectivamente.

Con argumentos estándar se prueba que estos funcionales y sus puntos críticos son regulares. Además, dado que el termino de penalización no depende de t , el resultado del Teorema 7.3.3 se mantiene con f y J reemplazados respectivamente por f_ϵ y J_ϵ . Para la demostración de la siguiente proposición remitimos a [51, Theorem 3.3], [12, Proposition 3.3].

Proposición 7.3.5 Para cada $\epsilon \in]0, 1]$ J_ϵ satisface la condición (PS).

En el resto de esta sección consideraremos $\Lambda^1(\mathcal{M})$ dotado de la métrica definida en (4.16). Para aplicar el Teorema 2.5.7 a los funcionales penalizados J_ϵ , necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 7.3.6 Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, sea x_ϵ un punto crítico de J_ϵ . Entonces, $H_{J_\epsilon}(x_\epsilon)$ define un operador de Fredholm de índice 0.

Demostración: Fijemos $\epsilon \in]0, 1]$ y sea $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ un punto crítico de J_ϵ . Entonces, para cada $\xi \in T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$ resulta

$$H_{J_\epsilon}(x)[\xi, \xi] = H_J(x)[\xi, \xi] + H_{\mathcal{W}_\epsilon}(x(0))[\xi(0), \xi(0)] \quad (7.10)$$

y, véanse p.ej. [78, Proposition 5.6.4] y la Sección 7.7,

$$\begin{aligned} H_J(x)[\xi, \xi] = & \int_0^1 [\langle D_s \xi, D_s \xi \rangle - \langle R(\xi, \dot{x} + t\delta(x))\dot{x}, \xi \rangle] ds + \\ & \int_0^1 \langle \delta''(x)[\xi, \xi], \dot{x} \rangle t ds - \frac{1}{2} \int_0^1 H_\beta(x)[\xi, \xi] t^2 ds + \\ & 2 \int_0^1 \langle \delta'(x)[\xi], D_s \xi \rangle t ds + \\ & 2 \int_0^1 [\langle \delta'(x)[\xi], \dot{x} \rangle \dot{\tau} + \langle \delta(x), D_s \xi \rangle \dot{\tau} - \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle t \dot{\tau}] ds, \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde $R(\cdot, \cdot)$ es el tensor de curvatura de la métrica riemanniana. En [78, Proposition 5.6.4], usando el hecho que las inclusiones de $H^1(S^1, \mathbf{R}^N)$ en $H^{\frac{1}{2}, 2}(S^1, \mathbf{R}^N)$ (véase [1, Chapter VII]) y en $L^2(S^1, \mathbf{R}^N)$ son compactas, se ha demostrado que $H_J(x)$ es una perturbación compacta de la forma cuadrática definida positiva sobre $T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$

$$\int_0^1 [\langle D_s \xi, D_s \xi \rangle + \langle \delta(x), D_s \xi \rangle^2] ds - 2 \left(\int_0^1 \langle \delta(x), D_s \xi \rangle ds \right)^2.$$

Entonces, por (7.10) y (7.11), se sigue que el operador lineal asociado a $H_{J_\epsilon}(x)$ es una perturbación compacta del producto escalar (4.16) sobre $T_x \Lambda^1(\mathcal{M})$, luego define un operador de Fredholm de índice 0. \square

Los mismos argumentos usados en la demostración de la Proposición 4.3.5 permiten probar la siguiente.

Proposición 7.3.7 Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $q \in \mathbf{N}$ tal que se verifique (7.2), existe un punto crítico $x_{\epsilon, q}$ de J_ϵ correspondiente al valor crítico

$$c_{\epsilon, q} = \inf_{A \in \Gamma_q} \sup_{x \in A} J_\epsilon(x) \quad (7.12)$$

y es tal que

$$m(x_{\epsilon, q}, J_\epsilon) \leq q \leq m^*(x_{\epsilon, q}, J_\epsilon), \quad (7.13)$$

véase la Definición 2.5.1.

Nuestro próximo intento es probar que, para ϵ suficientemente pequeño, los puntos críticos encontrados en la Proposición 7.3.7 son puntos críticos de J . Dado que queremos encontrar trayectorias no-triviales, necesitamos estimaciones que garanticen que los puntos críticos encontrados sean curvas no-constantes.

Lema 7.3.8 *Existe $q \in \mathbf{N}$ tal que para cada $\epsilon \in]0, 1]$ y para cada punto crítico x_ϵ de J_ϵ con*

$$m^*(x_\epsilon, J_\epsilon) > \bar{q}, \quad (7.14)$$

x_ϵ es no-constante.

Demostración: Sean $\epsilon \in]0, 1]$ y $\bar{x} \in \mathcal{M}$; supongamos que $\bar{x}(s) \equiv \bar{x}$ sea un punto crítico de J_ϵ . Por la Observación 7.1.2, \bar{x} es un punto crítico de β y por (7.3) y (7.4) $t = T$. Así, por (7.10) y (7.11) tenemos para cada $\xi \in T_{\bar{x}}\Lambda^1(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} H_{J_\epsilon}(\bar{x})[\xi, \xi] &= \int_0^1 \langle D_s \xi, D_s \xi \rangle ds - \frac{T^2}{2} \int_0^1 H_\beta(\bar{x})[\xi, \xi] ds + \\ &\frac{2}{\beta(\bar{x})} \left[\int_0^1 \langle \delta(\bar{x}), D_s \xi \rangle^2 ds - \left(\int_0^1 \langle \delta(\bar{x}), D_s \xi \rangle ds \right)^2 \right] + \\ &2T \int_0^1 \langle \delta'(\bar{x})[\xi], D_s \xi \rangle ds + H_{W_\epsilon}(\bar{x})[\xi(0), \xi(0)], \end{aligned}$$

véase la Sección 7.7. Con un cálculo directo (véase [12, Proposition 4.1]), poniendo $n = \dim \mathcal{M}$, resulta que

$$T_{\bar{x}}\Lambda^1(\mathcal{M}) \text{ es isométrico a } H^1(S^1, \mathbf{R}^n)$$

y que la derivada covariante es igual a la usual. Proveemos a $H^1(S^1, \mathbf{R}^n)$ con el producto escalar análogo a (4.16), o sea

$$\int_0^1 \langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle ds + \langle \xi(0), \xi(0) \rangle, \quad (7.15)$$

entonces $H^1(S^1, \mathbf{R}^n)$ admite la siguiente descomposición ortogonal respecto a (7.15):

$$H^1(S^1, \mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n \oplus H_0^1(I, \mathbf{R}^n) \quad (7.16)$$

donde \mathbf{R}^n está identificado con los lazos constantes. Consideremos la realización auto-adjunta en $L^2(I, \mathbf{R}^n)$ del operador

$$\xi \rightarrow \mathcal{O}(\xi) = -\ddot{\xi};$$

es bien conocido que el espectro de \mathcal{O} consiste de una sucesión creciente y divergente $\{\lambda_m\}$ de valores propios, contados con su multiplicidad, véase p.ej. [35, Chapitre 9]. Sea e_m un vector propio relativo a λ_m y sea H_m el espacio generado por $\{e_1, \dots, e_m\}$; entonces

$$H_0^1(I, \mathbf{R}^n) = H_m \oplus H_m^\perp. \quad (7.17)$$

Ahora pongamos

$$b_1 = \sup \{ H_\beta(x)[\xi, \xi] \mid x \in \mathcal{M}, \xi \in T_x \mathcal{M}, |\xi| = 1 \}$$

y

$$d = \sup \{ |\delta'(x)[\xi]| \mid x \in \mathcal{M}, \xi \in T_x \mathcal{M}, |\xi| = 1 \};$$

entonces, por la desigualdad de Poincaré (4.48), resulta

$$\begin{aligned} H_{J_\epsilon}(\bar{x})[\xi, \xi] &\geq \int_0^1 \langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle ds - \frac{T^2}{2} \int_0^1 H_\beta(\bar{x})[\xi, \xi] ds + \\ &2T \int_0^1 \langle \delta'(\bar{x})[\xi], \dot{\xi} \rangle ds \geq \left(\lambda_m - \frac{b_1 T^2}{2} \right) \int_0^1 \langle \xi, \xi \rangle ds - 4dT \int_0^1 \langle \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle ds, \end{aligned} \quad (7.18)$$

para cada $\xi \in H_m^\perp$. Escogiendo m tal que

$$\lambda_m > \frac{b_1 T^2}{2} + dT,$$

resulta que la forma cuadrática anterior es definida positiva sobre H_m^\perp , así, poniendo $\bar{q} = n + m$ (que no depende de \bar{x} y ϵ) se sigue la tesis. \square

Lema 7.3.9 Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, sea x_ϵ un punto crítico de J_ϵ y sea $\gamma_\epsilon = (x_\epsilon, t_\epsilon)$ el correspondiente punto crítico de f_ϵ , véase el Teorema 7.3.3. Sea $K \in \mathbf{R}$ tal que

$$J_\epsilon(x_\epsilon) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1]. \quad (7.19)$$

Entonces existen dos constantes α, χ tales que

$$\sup_{s \in I} \langle \dot{x}_\epsilon, \dot{x}_\epsilon \rangle \leq \alpha \quad \forall \epsilon \in]0, 1] \quad (7.20)$$

y

$$\sup_{s \in I} |\dot{t}_\epsilon| \leq \chi \quad \forall \epsilon \in]0, 1]. \quad (7.21)$$

Demostración: Escogiendo vectores tangentes $\zeta = (\xi, \tau)$ tales que $\xi(0) = 0$, γ_ϵ es una geodésica, luego existe una constante $E_\epsilon \in \mathbf{R}$ tal que

$$E_\epsilon = \langle \dot{x}_\epsilon, \dot{x}_\epsilon \rangle + 2\langle \delta(x_\epsilon), \dot{x}_\epsilon \rangle \dot{t}_\epsilon - \beta(x_\epsilon) \dot{t}_\epsilon^2 \quad \forall s \in I$$

donde \dot{t}_ϵ está dado por (7.4), véase (2.2). Con cálculos estándar tenemos

$$\langle \dot{x}_\epsilon, \dot{x}_\epsilon \rangle = E_\epsilon - \frac{\langle \delta(x_\epsilon), \dot{x}_\epsilon \rangle^2}{\beta(x_\epsilon)} + \frac{H^2(x_\epsilon)}{\beta(x_\epsilon)} \leq 2K + \frac{H^2(x_\epsilon)}{\eta^2}. \quad (7.22)$$

Por (7.19), se sigue que $(\|\dot{x}_\epsilon\|_2)_{\epsilon \in]0, 1]}$ está acotada; además, por (7.3), existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $H(x_\epsilon) \leq c$, entonces por (7.22) se sigue (7.20). Finalmente, se (7.21) sigue por (7.4), (7.8) y (7.20). \square

Proposición 7.3.10 Sea $q \in \mathbf{N}$, $q > 2n$, donde $n = \dim \mathcal{M}$, y para cada $\epsilon \in]0, 1]$ sea x_ϵ un punto crítico de J_ϵ , tal que se verifiquen (7.12) y (7.13). Entonces, existe $\bar{\epsilon} \in]0, 1]$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$, x_ϵ es un punto crítico de J .

Demostración: La demostración es esencialmente la de la Proposición 4.3.7. Usaremos las mismas notaciones y si $\xi \in Z_m$ denotaremos, para cada $s \in [0, 1]$, $m \in \mathbf{N}$, por $\pi(m, s) \subseteq T_{x_m(s)}\mathcal{M}$ al plano generado por $\dot{x}_m(s)$ y $\xi(s)$, y por $K(m, s)$ su curvatura seccional $\pi(m, s)$, con la convención $K(m, s) = 0$ si $\dot{x}_m(s)$ y $\xi(s)$ son linealmente dependientes. Por las hipótesis (ii)–(v) del Teorema 7.2.1 y (4.46) existen sucesiones infinitesimales que denotaremos por simplicidad por $\{\eta_m\}$, tales que para cada $\xi \in Z_m$ y para cada $s \in I$ resulta

$$\begin{cases} K(m, s) \leq \eta_m, \\ |\nabla\beta(x_m(s))| \leq \eta_m, \\ |\delta(x_m(s))| \leq \eta_m, \\ |\delta'(x_m(s))[\xi(s)]| \leq \eta_m|\xi(s)|, \\ H_\beta(x_m(s))[\xi(s), \xi(s)] \leq \eta_m\langle\xi(s), \xi(s)\rangle, \\ |\delta''(x_m(s))[\xi(s), \xi(s)]| \leq \eta_m\langle\xi(s), \xi(s)\rangle. \end{cases} \quad (7.23)$$

Nótese que con argumentos estándar resulta:

$$\begin{aligned} \langle R(\xi, \dot{x}_m + \dot{t}_m\delta(x_m))\dot{x}_m, \xi \rangle &= \langle R(\dot{x}_m, \xi)\xi, \dot{x}_m + \dot{t}_m\delta(x_m) \rangle = \\ &= \langle R(\dot{x}_m, \xi)\xi, \dot{x}_m \rangle + \dot{t}_m\langle R(\dot{x}_m, \xi)\xi, \delta(x_m) \rangle = \\ &= K(\xi, \dot{x}_m) [\langle\xi, \xi\rangle\langle\dot{x}_m, \dot{x}_m\rangle - \langle\xi, \dot{x}_m\rangle^2] + \dot{t}_m\langle R(\dot{x}_m, \xi)\xi, \delta(x_m) \rangle, \end{aligned}$$

luego por el Lema 7.3.9, (7.23) y la continuidad del operador de curvatura tenemos por alguna $C \in \mathbf{R}$

$$\int_0^1 \langle R(\xi, \dot{x}_m + \dot{t}_m\delta(x_m))\dot{x}_m, \xi \rangle ds \leq \eta_m\alpha \int_0^1 \langle\xi, \xi\rangle ds + \chi C\eta_m\sqrt{\alpha} \int_0^1 \langle\xi, \xi\rangle ds. \quad (7.24)$$

Usando de nuevo el Lema 7.3.9 y (7.23) resulta

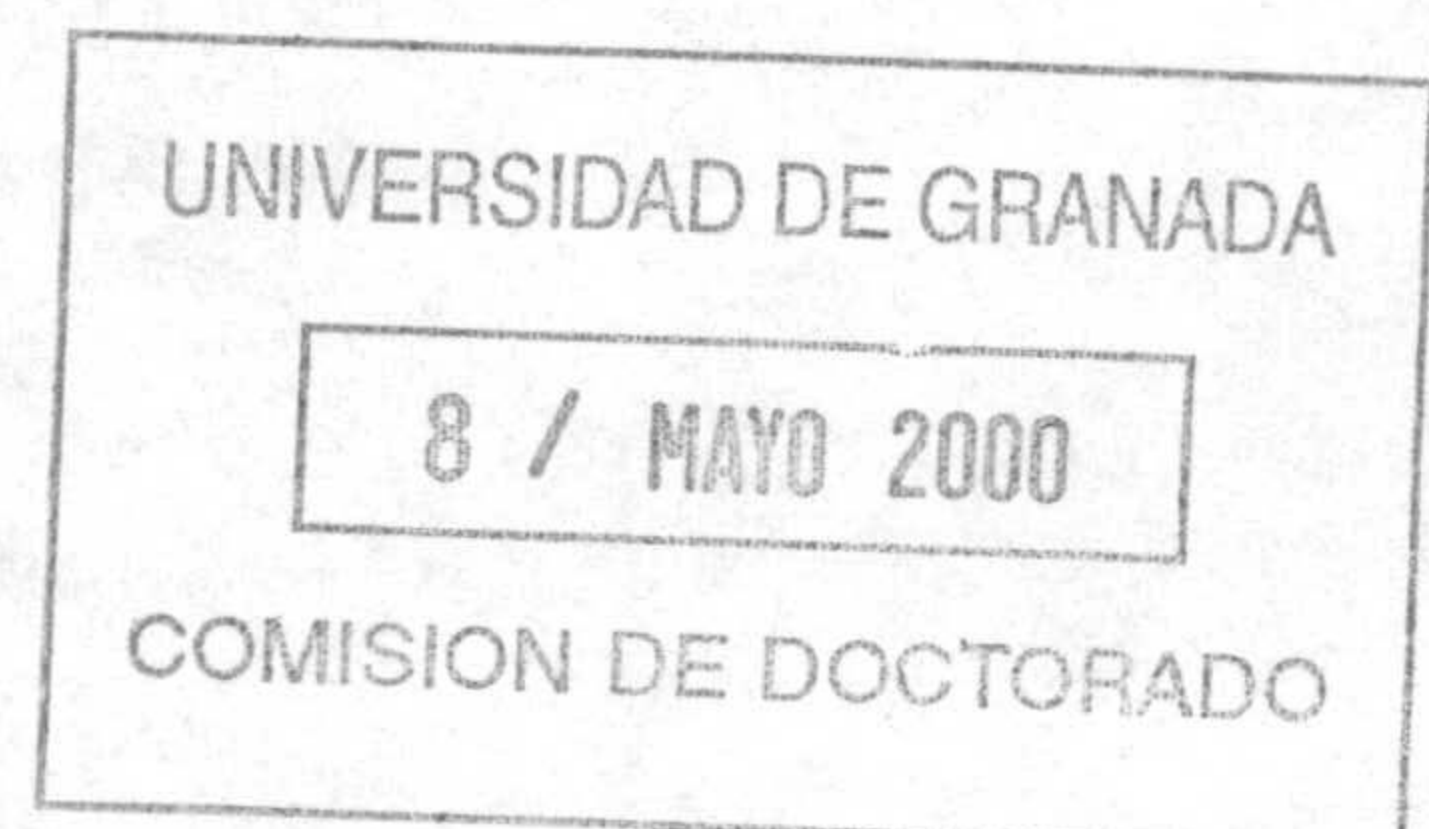
$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \delta''(x_m)[\xi, \xi], \dot{x}_m \rangle \dot{t}_m ds &\leq \chi\sqrt{\alpha}\eta_m \int_0^1 \langle\xi, \xi\rangle ds, \\ \int_0^1 H_\beta(x_m)[\xi, \xi]\dot{t}_m^2 ds &\leq \chi^2\eta_m \int_0^1 \langle\xi, \xi\rangle ds, \\ \int_0^1 \langle \delta'(x_m)[\xi], D_s\xi \rangle \dot{t}_m ds &\leq \chi\eta_m \int_0^1 |D_s\xi||\xi| ds. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Por (7.10), (7.11), (7.24) y (7.25) encontramos oportunas constantes K_1, K_2, K_3 tales que

$$\begin{aligned} H_{J_m}(x_m)[\xi, \xi] &\geq \left(\frac{1}{4} - \eta_m K_1\right) \int_0^1 |\xi|^2 ds - \\ &\eta_m K_2 \int_0^1 |D_s\xi|^2 ds - \eta_m K_3 \left(\int_0^1 |D_s\xi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

véase la Sección 7.7. Entonces, por (7.26), y para $m \in \mathbf{N}$ lo bastante grande obtenemos

$$H_{J_m}(x_m)[\xi, \xi] > 0, \quad \forall \xi \in Z_m \setminus \{0\}. \quad \square$$



Demostración del Teorema 7.2.1:

Sea $q_1 \in \mathbf{N}$, $q_1 > \max\{2n, \bar{q}\}$ tal que se verifique (7.2) (donde \bar{q} ha sido hallado en el Lema 7.3.8). Por la Proposición 7.3.7, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, existe un punto crítico x_{ϵ, q_1} de J_ϵ , tal que se mantienen (7.12) y (7.13). Además, por el Lema 7.3.8 y la Proposición 7.3.10 tenemos que para cada ϵ suficientemente pequeño, x_{ϵ, q_1} es un punto crítico no trivial de J y $m^*(x_{\epsilon, q_1}, J_\epsilon) = m^*(x_{\epsilon, q_1}, J)$. Ahora, sea $q_2 \in \mathbf{N}$, $q_2 > m^*(x_{\epsilon, q_1}, J)$; usando los mismos argumentos, encontramos un punto crítico de J , que es distinto del precedente porque tienen diferentes índices de Morse, que se corresponden por el Teorema 7.3.3 con trayectorias T -periódicas no triviales. Razonando por inducción, podemos encontrar infinitas trayectorias T -periódicas distintas, véase también [27, Theorem 1.5].

7.4 Demostración del Teorema 7.2.2

Debido a la presencia del borde tenemos que considerar para cada $\epsilon \in]0, 1]$ los funcionales

$$\begin{aligned} f_\epsilon(\gamma) &= f(\gamma) + \int_0^1 U_\epsilon(x) ds + W_\epsilon(x(0)) \\ J_\epsilon(x) &= J(x) + \int_0^1 U_\epsilon(x) ds + W_\epsilon(x(0)) \end{aligned} \quad (7.27)$$

sobre $\Lambda^1(\mathcal{D}) \times H^1(0, T)$ y $\Lambda^1(\mathcal{D})$ respectivamente, donde las \bar{U}_ϵ son como en (4.13) (véase también (6.10)), las ψ_ϵ son como en (4.10) y satisfacen (4.11), las W_ϵ son como en (7.9) y Φ es como en (6.10). Claramente, la tesis del Teorema 7.3.3 se mantiene con f y J remplazados por f_ϵ y J_ϵ . Técnicas estándar muestran que para cada $\epsilon \in]0, 1]$ los subniveles de J_ϵ son subespacios métricos completos de $\Lambda^1(\mathcal{D})$, y que los funcionales J_ϵ satisfacen la condición (PS). Además se mantienen las Proposiciones 7.3.6 y 7.3.7, véase también el Capítulo 4.

Demostración del Teorema 7.2.2:

Por la Observación 7.1.2 y la hipótesis de que el conjunto de los puntos críticos de β es finito, existe $\bar{q} \in \mathbf{N}$ tal que si (\bar{x}, t) es una trayectoria T -periódica trivial sobre S , entonces

$$m^*(\bar{x}, J) \leq \bar{q}.$$

Fijemos $p \in \mathbf{N}$ y consideremos $q_1, \dots, q_p \in \mathbf{N}$, $q_i > \max\{2n, \bar{q}\}$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, tal que

$$H_{q_i}(\Lambda(\mathcal{D}), \mathcal{F}) \neq \{0\} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, sea C_i un subconjunto compacto de $\Lambda^1(\mathcal{D})$ perteneciente a Γ_{q_i} , véanse las Observaciones 2.5.8(2). Por compacidad, se puede encontrar $\bar{T} > 0$ tal que, para una oportuna K que especificaremos después, para cada $T > \bar{T}$

$$\sup J_\epsilon(C_i) \leq K \quad \forall \epsilon \in]0, 1], i \in \{1, \dots, p\}. \quad (7.28)$$

Por el Teorema 2.5.7 obtenemos la existencia de m puntos críticos distintos $x_{i,\epsilon}$ of J_ϵ para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $i \in \{1, \dots, p\}$, con correspondientes valores críticos menores o iguales a K . Ahora mostremos que existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que para cada $\xi \in T_{x_{i,\epsilon}} \Lambda^1(\mathcal{D})$ con $\xi(0) = 0$ resulta

$$H_{J_\epsilon}(x_{i,\epsilon})[\xi, \xi] = H_J(x_{i,\epsilon})[\xi, \xi] \quad \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0], i \in \{1, \dots, p\}$$

(véase también la Proposición 4.3.7). Para este fin, basta comprobar que para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ existe $\epsilon_{i,0} \in]0, 1]$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_{i,0}]$

$$\min_{s \in I} \phi(x_{i,\epsilon}(s)) \geq \sqrt{\epsilon},$$

véase el Lema 4.3.6. Supongamos, por reducción al absurdo, que exista una sucesión decreciente e infinitesimal $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$, y para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ una sucesión $\{x_{i,m}\}$ de puntos críticos de $J_{\epsilon_m} \equiv J_m$ satisfaciendo

$$\phi(x_{i,m}(s_{i,m})) = \min_{s \in I} \phi(x_{i,m}(s)) < \sqrt{\epsilon_m}. \quad (7.29)$$

Es sencillo ver que para cada $s \in I$ y $m \in \mathbf{N}$, $\gamma_{i,m} = (x_{i,m}, t_{i,m})$ (véase el Teorema 7.3.3) satisface la ecuación

$$D_s \dot{\gamma}_{i,m} = -\frac{2}{\Phi^3(\gamma_{i,m})} \psi'_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_{i,m})} \right) \nabla^L \Phi(\gamma_{i,m}). \quad (7.30)$$

Poniendo $u_{i,m}(s) = \Phi(\gamma_{i,m}(s))$, obtenemos, tras diferenciar dos veces:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{i,m}(s_{i,m}) = & H_{\Phi}^L(\gamma_{i,m}(s_{i,m}))[\dot{\gamma}_{i,m}(s_{i,m}), \dot{\gamma}_{i,m}(s_{i,m})] + \langle \nabla^L \Phi(\gamma_{i,m}(s_{i,m})), D_s \dot{\gamma}_{i,m}(s_{i,m}) \rangle_L < \\ & -2\psi'_m \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_{i,m}(s_{i,m}))} \right) \frac{\langle \nabla^L \Phi(\gamma_{i,m}(s_{i,m})), \nabla^L \Phi(\gamma_{i,m}(s_{i,m})) \rangle_L}{\Phi^3(\gamma_{i,m}(s_{i,m}))}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

para cada $m \in \mathbf{N}$. Remarquemos ahora que por (7.28), $\{\|\dot{x}_{i,m}\|_2\}$ está acotada para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, (véase la Proposición 4.3.4), luego, salvo parciales, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, existe $x_i \in H^1(I, \mathbf{R}^N)$ tal que

$$x_{i,m} \rightarrow x_i \quad \text{uniformemente.}$$

Además, salvo parciales, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ existe $s_{i,0} \in I$ tal que

$$s_{i,m} \rightarrow s_{i,0}.$$

Argumentos estándar (véase el Lema 3.4.5) muestran que

$$\phi(x_{i,m}(s_{i,m})) \rightarrow \phi(x_i(s_{i,0})),$$

así, por (7.29), $\phi(x_i(s_{i,0})) = 0$; esto es, $x_i(s_{i,0}) \in \partial\mathcal{D}$ y esto implica, véase (6.11),

$$|\nabla^L \Phi(\gamma_i(s_{i,0}))| > 0,$$

luego para m grande

$$|\nabla^L \Phi(\gamma_{i,m}(s_{i,m}))| > 0. \quad (7.32)$$

Más aún, integrando (7.30) es sencillo ver que para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, $\epsilon \in]0, 1]$ existe $c_{i,m} \in \mathbf{R}$ tal que

$$c_{i,m} = \frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}_{i,m}(s), \dot{\gamma}_{i,m}(s) \rangle - \psi_m \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_{i,m}(s))} \right) \quad \forall s \in I$$

así, para $s = s_{i,0}$, obtenemos, por la forma de la penalización

$$\frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}_i(s_{i,0}), \dot{\gamma}_i(s_{i,0}) \rangle \leq K + \psi_1 \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_i(s_{i,0}))} \right),$$

y podemos escoger K tal que $\dot{\gamma}_i(s_{i,0}) \in \partial \mathcal{S}$ es temporal para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Ahora, siendo la frontera de \mathcal{S} acotada y variacionalmente estrictamente temporal-convexa, para m suficientemente grande resulta

$$H_{\Phi}^L(\gamma_{i,m}(s_{i,m}))[\dot{\gamma}_{i,m}(s_{i,m}), \dot{\gamma}_{i,m}(s_{i,m})] < 0, \quad (7.33)$$

véase la Observación 4.1.3. Así por (7.31), (7.32) y (7.33) llegamos a una contradicción y la demostración de la Proposición 7.3.10 se puede desarrollar con los mismos argumentos. \square

Demostración del Corolario 7.2.3:

Verificaremos a continuación que todas las hipótesis del Teorema 7.2.2 se satisfacen para el espacio-tiempo de Kerr, véase la Sección 6.1. Remarquemos que sobre el espacio-tiempo de Kerr no hay trayectorias periódicas triviales porque $\beta(r, \theta)$ no tiene puntos críticos en D_K , véase la Sección 7.1, y, dado que \mathcal{D}_K es homotópicamente equivalente a la esfera 2-dimensional S^2 , la hipótesis (vi) del Teorema 7.2.1 se mantiene, véase la Observación 2.5.9. Es sencillo ver que si tenemos en cuenta el espacio-tiempo de Kerr, se mantiene (i) del Teorema 7.2.1, dado que

$$\beta(r, \theta) = 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

Probemos que se mantiene (ii) del Teorema 7.2.1: denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica sobre la parte riemanniana del espacio-tiempo de Kerr, por $R = R_{ijk}^m$ su tensor de curvatura y por $K = R_{ijkm}$ su tensor de curvatura covariante. Las componentes esenciales no nulas de K son R_{1212} , R_{1313} , R_{1323} , R_{2323} y se pueden calcular usando el programa MAPLEV. Sea $\{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ la base de vectores tangentes para las coordenadas polares, x un punto de \mathcal{D}_K y π un plano de $T_x \mathcal{D}_K$ generado por $u = a_1 \partial_r + b_1 \partial_\theta + c_1 \partial_\phi$ y $v = a_2 \partial_r + b_2 \partial_\theta + c_2 \partial_\phi$. Evaluando K_π , por la expresión de R_{ijkm} , se sigue (ii) cuando $r \rightarrow \infty$. Es sencillo ver que las componentes de δ en coordenadas polares son $(0, 0, \frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}})$ donde

$$g_{\phi t} = -\frac{4mar}{\lambda} a \sin^2 \theta$$

y

$$g_{\phi\phi} = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2ma^2}{\lambda} r \sin^4 \theta.$$

Luego, de

$$\langle \delta(r, \theta), \delta(r, \theta) \rangle = \frac{g_{\phi\phi}^2}{g_{\phi\phi}},$$

resulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\delta(x)| = 0,$$

y se verifica también (iii) del Teorema 7.2.1. Cálculos directos muestran que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\nabla \beta(r, \theta)| = 0.$$

Ahora, cálculos sistemáticos muestran que, para cada $x = (r, \theta, \phi) \in \mathcal{D}_K$ y para cada $\xi = (\rho, \Theta, \Phi) \in T_x \mathcal{D}_K$,

$$\delta'(x)[\xi] = \rho \left(\frac{\partial \delta^3}{\partial r} + \Gamma_{13}^3 \delta^3 \right) \partial_\phi + \Theta \left(\frac{\partial \delta^3}{\partial \theta} + \Gamma_{23}^3 \delta^3 \right) \partial_\phi + \Phi \left(\Gamma_{33}^1 \delta^3 \partial_r + \Gamma_{33}^2 \delta^3 \partial_\theta \right)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\phi\phi}} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\phi\phi}} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{\theta\theta}} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

luego, tomando ξ de norma uno, resulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\delta'(x)[\xi]| = 0,$$

y también (iv) se verifica. Calculemos el hessiano de β en un punto $x = (r, \theta, \phi) \in \mathcal{D}_K$: sea $\gamma(s) = (r(s), \theta(s), \phi(s))$ una geodésica sobre \mathcal{D}_K tal que $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi$, entonces (véase (2.5))

$$H_\beta(x)[\xi, \xi] = \left[\frac{d^2}{ds^2} \beta(\gamma(s)) \right]_{s=0}.$$

Puesto $h(s) = \beta(\gamma(s)) = \beta(r(s), \theta(s))$, tenemos

$$h''(s) = \beta_{rr} \dot{r}^2 + \beta_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + 2\beta_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + \beta_r \ddot{r} + \beta_\theta \ddot{\theta},$$

donde, siendo γ una geodésica,

$$\frac{\lambda}{\Delta} \ddot{r} = \dot{r} \dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{m}{\lambda} a^2 \sin^4 \theta \dot{\phi}^2 (a^2 \cos^2 \theta - r^2) + \frac{a^2 \sin 2\theta \dot{r} \dot{\theta}}{\Delta} + \frac{\dot{r}^2}{\Delta^2} (mr^2 - a^2 \sin^2 \theta r - ma^2 \cos^2 \theta)$$

y

$$\lambda \ddot{\theta} = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta \left(\dot{\theta}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\Delta} \right) - 2r \dot{r} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (r^2 + a^2) \sin 2\theta \dot{\phi}^2 + \frac{2ma^2 r}{\lambda} \sin 2\theta \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{mr}{\lambda^2} a^4 \sin 2\theta \sin^4 \theta \dot{\phi}^2;$$

considerando un vector unitario $\xi \in T_x \mathcal{D}_K$, resulta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_\beta(x)[\xi, \xi] = 0.$$

Para cada $x \in \mathcal{D}_K$, $\xi \in T_x \mathcal{D}_K$, se tiene

$$\delta''(x)[\xi, \xi] = \delta''(X, X)(x) = (D_X D_X \delta - D_{D_X X} \delta)(x),$$

donde X es el campo vectorial tal que $X(x) = \xi$, luego cálculos directos (véase la Sección 2.1) muestran que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\delta''(x)[\xi, \xi]| = 0. \quad \square$$

7.5 Demostración del Teorema 7.2.4

El problema de las trayectorias periódicas con energía fija sobre una variedad lorentziana estática $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$ se reduce a la búsqueda de órbitas periódicas con energía fija de un sistema lagrangiano sobre \mathcal{M} , cuyo potencial depende de la métrica lorentziana; más precisamente, depende de β , véase [102]. Dado que estamos interesados en el estudio de trayectorias periódicas no triviales geoméricamente distintas, podemos fijar por conveniencia el valor $c = \sqrt{2}$. Esta elección no es restrictiva porque cada geodésica γ (con $\dot{\gamma}$ no tangente a \mathcal{M}) puede reparametrizarse de manera única (usando una homotecia) para satisfacer (6.25) con $c = \sqrt{2}$. De hecho, razonando como en la demostración de la Proposición 6.3.1, y por la Proposición 4.4.1, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.5.1 *Sea $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ una trayectoria periódica sobre \mathcal{L} satisfaciendo (6.25) con $c = \sqrt{2}$. Entonces $x(s)$ es una pregeodésica cerrada (esto es, geodésica cerrada salvo reparameterizaciones) para una métrica de Jacobi (3.70), donde $E = E_\gamma$ es igual a la energía de γ , véase (2.2). Recíprocamente, si $\hat{x}(s)$ es una geodésica cerrada por una métrica de Jacobi (3.70) entonces admite una reparameterización $x(s)$ tal que $(x(s), t(s))$ es una trayectoria periódica sobre \mathcal{L} , donde $t(s)$ es una solución de (6.25) con $c = \sqrt{2}$ y*

$$T = \sqrt{2} \int_0^a \frac{1}{\beta(x)} d\tau.$$

Ahora por la Proposición 7.5.1 y el Teorema 4.2.1, se sigue el Teorema 7.2.4.

7.6 Aplicación del Teorema 7.2.4

Dado que el espacio-tiempo de Schwarzschild se obtiene del Reissner–Nordström poniendo $c = 0$, verificaremos que el Teorema 7.2.4 se puede aplicar oportunamente a este espacio-tiempo. El Teorema 7.2.4 será aplicado a $\mathcal{S}_R^* = \mathcal{D}_R^* \times \mathbf{R}$, véase (6.13), para apropiados valores de r^* y E . A lo largo de esta sección, $(\mathcal{D}_R, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denotará la parte riemanniana del espacio-tiempo de Reissner–Nordström.

Nótese en primer lugar que como los grupos de homología de $\Lambda(\mathcal{D}_R^*)$ son homotópicamente equivalentes a los de $\Lambda(S^2)$ y, en este caso, se verifica (ii) del Teorema 7.2.4 para $\mathcal{F} = \mathbf{Q}$, véase la Observación 2.5.9, esta hipótesis se mantiene también en nuestro caso.

Consideremos, para cada $E \in \mathbf{R}$, $E > \sup_{\mathcal{D}_R^*} V = -1$, véase (6.20), la métrica de Jacobi (3.70). Con cálculos directos se prueba que todos los términos de (4.50) convergen a cero cuando $r \rightarrow \infty$ (véanse también las Observaciones 7.2.5(2)); así, la hipótesis (i) del Teorema 7.2.4 se satisface en \mathcal{D}_R^* , para todos los valores admisibles de r^* . Para acabar, tenemos que obtener valores de r^* y E tales que $(\mathcal{D}_R, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ es CCB. Nos centraremos en energías $E \leq 0$ debido a su mayor interés físico.

Escogemos $\phi(r) = r - r^*$. Recordemos que los gradientes de dos métricas conformes se relacionan por

$$\nabla^E \phi(x) = \exp(-2u(x)) \nabla \phi(x)$$

donde u es como en (3.72), así

$$\nabla^E \phi(x) = \frac{1}{E - V(x)} \nabla \phi(x);$$

dato que 0 es un valor regular para ϕ y $E > \sup_{\mathcal{D}_R^*} V$, se verifica (ii) de la Definición 4.1.1 para r próximo a r^* . Además calculando de (3.71) resulta:

$$H_\phi^E(x)[\xi, \xi] = \frac{\beta^2(r)}{r^3} \left(r^2 - \frac{mr - e^2}{\beta^2(r)(E - V(r))} \right) \langle \xi, \xi \rangle \quad (7.34)$$

para cada ξ tal que $\phi'(x)[\xi] = 0$. Así, \mathcal{D}_R^* es CCB para $-1 < E \leq 0$ cuando

$$r^2 - 3mr + 2e^2 \leq 0 \quad (7.35)$$

para r próximo a r^* , esto es, cuando la desigualdad en (7.35) admite dos raíces, $r_-, r_+, r_- < r_+$ y

$$r_- \leq r^* < r_+.$$

La existencia de dos raíces es equivalentes a imponer $9m^2 > 8e^2$ y, en este caso, las raíces son:

$$r_\pm = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8e^2}}{2}.$$

Sin embargo, recordemos que, cuando $m^2 \geq e^2$, la coordenada radial del espacio-tiempo de Reissner–Nordström queda restringida a $r > m + \sqrt{m^2 - e^2}$. Pero $r_+ > m + \sqrt{m^2 - e^2}$, luego, si se elige r^* tal que

$$\max\{r_-, m + \sqrt{m^2 - e^2}\} \leq r^* < r_+$$

entonces $(\mathcal{D}_R^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ es un subconjunto abierto de $(\mathcal{D}_R, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ y es CCB $\forall E \in]-1, 0]$. Por otra parte, cuando $e^2 > m^2$, por (7.34) podemos escoger r^* lo bastante pequeño para obtener que $(\mathcal{D}_R^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ es CCB, $\forall E \in]-1, 0[$.

Teniendo en cuenta la simetría esférica en (6.17), todos estos resultados se pueden resumir como sigue:

el espacio-tiempo de Reissner–Nordström siempre admite infinitas (no-triviales, no-equivalentes) trayectorias periódicas temporales de energía $E \in]-1, 0[$. Además, cuando $9m^2 > 8e^2$, admite también infinitas trayectorias periódicas luminosas.

En particular, esto ocurre para el espacio-tiempo de Schwarzschild, donde para cada $r^ \in [2m, 3m[$ se pueden encontrar tales trayectorias temporales y luminosas en \mathcal{S}_S^* .*

Observación 7.6.1 Es bien conocido que la trayectorias periódicas luminosas del espacio-tiempo de Schwarzschild tienen coordenada radial constante $r = 3m$; todas las otras geodésicas luminosas o escapan a infinito o se topan con la frontera, véase, por ejemplo, [86, Chapter 13]. Luego, si se elige r^* mayor o igual a $3m$, no sólo $(\mathcal{D}_S^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ no es CCB para $E = 0$ sino que tampoco hay trayectorias periódicas luminosas en \mathcal{S}_S^* .

7.7 Apéndice

Para estudiar el hessiano de los funcionales J_ϵ , (véanse la Proposición 7.3.7 y la Proposición 7.3.10), necesitamos evaluar $\tau = \Psi'(x)[\xi]$, véase (7.5), y $\dot{\tau}$. Por (7.5) y (7.3) tenemos

$$\begin{aligned}
 \Psi'(x)[\xi](s) &= \int_0^s \frac{\langle \delta'(x)[\xi], \dot{x} \rangle}{\beta(x)} dr + \int_0^s \frac{\langle \delta(x), D_r \xi \rangle}{\beta(x)} dr - \\
 &\int_0^s \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta^2(x)} \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle dr - H(x) \int_0^s \frac{\langle \nabla \beta(x), \xi \rangle}{\beta^2(x)} dr + \\
 &\int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta^2(x)} \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle ds \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds} - \\
 &\int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds} \left[\int_0^1 \frac{\langle \delta'(x) \xi, \dot{x} \rangle}{\beta(x)} ds + \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), D_s \xi \rangle}{\beta(x)} ds \right] + \\
 &\int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr \left(\frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds} \right)^2 \int_0^1 \frac{\langle \nabla \beta(x), \xi \rangle}{\beta^2(x)} ds \left[T - \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta(x)} ds \right].
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Entonces resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau} &= \frac{\langle \delta'(x)[\xi], \dot{x} \rangle}{\beta(x)} + \frac{\langle \delta(x), D_s \xi \rangle}{\beta(x)} - \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta^2(x)} \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle - \\
 & H(x) \frac{\langle \nabla \beta(x), \xi \rangle}{\beta^2(x)} + \frac{1}{\beta(x)} \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds}. \\
 & \cdot \left(\int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta^2(x)} \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle ds - \int_0^1 \frac{\langle \delta'(x)\xi, \dot{x} \rangle}{\beta(x)} ds - \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), D_s \xi \rangle}{\beta(x)} ds \right) + \\
 & \frac{1}{\beta(x)} \left(\frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds} \right)^2 \int_0^1 \frac{\langle \nabla \beta(x), \xi \rangle}{\beta^2(x)} ds \left[T - \int_0^1 \frac{\langle \delta(x), \dot{x} \rangle}{\beta(x)} ds \right].
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Por (7.37), el Lema 7.3.9 y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \langle \delta'(x)[\xi], \dot{x} \rangle \dot{\tau} ds &\geq -\sqrt{\alpha} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \frac{\alpha}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds - \\
 & \frac{T\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds - \frac{\alpha}{\eta^3} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds - \frac{\alpha}{\eta^3} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2 - \\
 & \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| ds \int_0^1 |\xi| ds - \frac{T\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2 - \\
 & \frac{\alpha}{\eta^4} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2,
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \langle \delta(x), D_s \xi \rangle \dot{\tau} ds &\geq -\frac{\sqrt{\alpha}}{\eta} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \\
 & \frac{T}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^3} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \\
 & \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^3} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| ds \int_0^1 |\xi| ds - \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds - \\
 & \frac{T}{\eta^3} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| ds \int_0^1 |\xi| ds - \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| ds,
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

y

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \dot{\tau} ds &\leq \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds + \\
 & \frac{\chi}{\eta} \eta_m \int_0^1 |D_s \xi| |\xi| ds + \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds + \frac{T\chi}{\eta^2} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds + \\
 & \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta^3} \eta_m \int_0^1 |\xi|^2 ds + \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta^3} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2 + \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta^2} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2 + \\
 & \frac{\chi}{\eta} \eta_m \int_0^1 |\xi| ds \int_0^1 |D_s \xi| ds + \frac{T\chi}{\eta^3} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2 + \frac{\sqrt{\alpha} \chi}{\eta^4} \eta_m \left(\int_0^1 |\xi| ds \right)^2.
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Por (7.10), (7.11), (7.23), (7.24), (7.25), (7.38), (7.39), (7.40) y la desigualdad de Poincaré finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 H_{J_m}(x)[\xi, \xi] &\geq \left(\frac{1}{4} - \eta_m L_1\right) \int_0^1 |\xi|^2 ds - \\
 &\eta_m L_2 \int_0^1 |\xi| |D_s \xi| ds - \eta_m L_3 \left(\int_0^1 |\xi| ds\right)^2 - \\
 &\eta_m L_4 \int_0^1 |\xi| ds \int_0^1 |D_s \xi| ds - \eta_m L_5 \int_0^1 |D_s \xi| ds,
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

para constantes apropiadas $L_i, i = 1, \dots, 5$. Entonces, la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned}
 H_{J_m}(x)[\xi, \xi] &\geq \left(\frac{1}{4} - \eta_m L_1 - \eta_m L_3\right) \int_0^1 |\xi|^2 ds - \\
 &2\eta_m(L_2 + L_4) \int_0^1 |D_s \xi|^2 ds - \eta_m L_5 \left(\int_0^1 |D_s \xi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

y queda demostrada (7.26).

Capítulo 8

Trayectorias bajo un potencial vectorial

En este capítulo estudiaremos otra clase de curvas sobre variedades lorentzianas; más precisamente, consideraremos una variedad lorentziana estacionaria \mathcal{L} , con $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbf{R}$, y campos vectoriales regulares

$$\mathcal{A} : \mathcal{L} \rightarrow T\mathcal{L}$$

independientes del tiempo, esto es,

$$\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(x) = (\mathcal{A}_1(x), \mathcal{A}_2(x)) \quad \forall z = (x, t) \in \mathcal{L}. \quad (8.1)$$

Buscaremos curvas regulares $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}$ que solucionan la ecuación

$$D_s \dot{\gamma}(s) = \frac{1}{2} F(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s)], \quad (8.2)$$

donde F es el campo tensorial $(1, 1)$ asociado a $\text{curl } \mathcal{A}$, véase (2.8). Esta es la ecuación de Euler-Lagrange de un funcional introducido en [24] (véase la Sección 8.2). Remarquemos que (8.2) representa la ley de la fuerza de Lorentz que determina el movimiento de partículas relativistas sometidas a un campo electromagnético, cuando tenemos en cuenta curvas temporales γ , véase [94, p. 88]¹. Primero buscaremos soluciones de (8.2) que verifican

$$\gamma(0) = z, \gamma(1) = w \quad (8.3)$$

donde z, w son dos eventos fijos de \mathcal{L} . A las soluciones de (8.2) y (8.3) se les llamará *trayectorias* que unen los eventos dados. Queda claro que este problema generaliza al problema de la conexión geodésica, véase la Sección 6.6

Fijado $T > 0$, estudiaremos también las soluciones de (8.2) satisfaciendo

$$\begin{cases} x(0) = x(1) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(1) \end{cases} \quad \begin{cases} t(0) = 0, t(1) = T \\ \dot{t}(0) = \dot{t}(1), \end{cases} \quad (8.4)$$

¹Sobre variedades riemannianas (8.2) representa la ley que determina el movimiento de una partícula clásica sometida a la acción de una fuerza que depende linealmente de su velocidad.

las que llamaremos trayectorias T -periódicas de (8.2), véase la Sección 7.1. A dos trayectorias periódicas con imágenes diferentes se les llama geoméricamente distintas.

En el estudio de los problemas (8.2)–(8.3) y (8.2)–(8.4), cuando \mathcal{L} es una variedad lorentziana estacionaria, es posible establecer un principio variacional que reduce la búsqueda de las soluciones de (8.2) a la de los puntos críticos de un funcional oportuno dependiente sólo de la componente espacial, véanse también las Secciones 6.6 y 7.3; en ciertos casos obtendremos resultados de multiplicidad aplicando la teoría de la categoría de Ljusternik–Schnirelman. Las técnicas usadas son bastante similares a las de los capítulos anteriores excepto para los resultados sobre trayectorias periódicas; de hecho, por simplicidad usaremos un enfoque diferente, comparar con la Observación 4.2.2.

8.1 Exposición de los resultados

Vamos a empezar con un resultado acerca de las trayectorias que unen dos eventos fijos.

Teorema 8.1.1 [4] *Sea \mathcal{L} una variedad lorentziana estática con \mathcal{M} completa y supongamos que:*

(i) *existe $b \in \mathbf{R}$ (ponemos por simplicidad $b = 1$) tal que*

$$0 < \beta(x) \leq b, \quad \forall x \in \mathcal{M};$$

(ii) *existen $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tales que*

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\mathcal{A}_1(x)| = a_1$$

y

$$0 \leq \mathcal{A}_2(x) \leq a_2.$$

Entonces, para cada dos eventos en \mathcal{L} existe una trayectoria γ que los une. Además, si \mathcal{M} no es contráctil en sí misma, entonces existe una sucesión $\{\gamma_m\}$ de trayectorias que unen cada dos eventos de \mathcal{L} .

Observación 8.1.2 Una transformación Gauge no modifica al conjunto de los puntos críticos del funcional en [24]. De hecho, añadiendo a \mathcal{A} cualquier campo vectorial irrotacional \mathcal{Z} independiente de t , digamos $\mathcal{Z} = (\nabla V(x), a_0)$ con $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ y $a_0 \in \mathbf{R}$, los puntos críticos del correspondiente funcional satisfacen la misma ecuación de Euler–Lagrange, véase la Sección 8.2. Luego basta que $\mathcal{A} + \mathcal{Z}$ satisfaga las hipótesis del Teorema 8.1.1 para tal \mathcal{Z} (en particular basta que \mathcal{A}_2 esté acotado inferiormente).

Observación 8.1.3 Sea \mathcal{L} una variedad lorentziana estacionaria con \mathcal{M} completa. Supongamos que se verifique (ii) del Teorema 8.1.1 y que existan tres constantes η, b, d tales que

$$0 < \eta \leq \beta(x) \leq b \quad \forall x \in \mathcal{M} \tag{8.5}$$

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\delta(x)| = d.$$

Entonces, la tesis del Teorema 8.1.1 ha sido probada en [6] con argumentos similares.

Observación 8.1.4 Sea S una variedad lorentziana con borde convexo y diferenciable, véanse las Definiciones 6.1.12, 6.1.2 y el Teorema 6.2.4. Bajo las hipótesis del Teorema 8.1.1, (8.5) y la siguiente:

existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in S$ con $\Phi(z) < \delta$

$$\langle F(z)[\nabla^L \Phi(z)], \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in T_z S \quad \text{t.q.} \quad \Phi'(z)[\zeta] = 0, \quad (8.6)$$

se mantienen las mismas conclusiones del Teorema 8.1.1, como probaremos rápidamente en la Observación 8.3.2. Parece razonable que con argumentos similares se pueda demostrar el mismo resultado cuando la variedad es estacionaria.

Ejemplo 8.1.5 Consideremos un subconjunto abierto del espacio-tiempo de Minkowski, véase el Ejemplo 2.1.1. Dado el campo vectorial \mathcal{A} , la 2-forma curl \mathcal{A} se puede escribir como

$$\text{curl } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^3 E^i dx^i \wedge dt + B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2$$

donde $E^i, B^i, i = 1, 2, 3$ son funciones diferenciables. A esta 2-forma, o al campo de endomorfismos asociado F , se le llama *campo electromagnético*. Además, $E = \sum_{i=1}^3 E^i \partial_i$ es el campo *eléctrico* y $B = \sum_{i=1}^3 B^i \partial_i$ es el *magnético*. Estos conceptos se pueden extender al espacio tangente de cualquier variedad lorentziana, cada vez que se fija un campo vectorial tangente temporal (que desempeña el papel de ∂_t) (véase p.ej. [94, p. 75]). Así, la hipótesis (8.6) sólo involucra el campo magnético naturalmente asociado a la descomposición $S = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$.

El siguiente teorema concierne a las trayectorias periódicas de período universal fijo sobre una clase de variedades lorentzianas bajo la acción de un potencial vectorial.

Denotaremos por $|\cdot|_*$ la norma de los endomorfismos sobre $T_x \mathcal{M}$ inducida por la métrica riemanniana sobre \mathcal{M} en cada $x \in \mathcal{M}$.

Teorema 8.1.6 [14] *Sea \mathcal{L} una variedad lorentziana estática y supongamos que \mathcal{M} es completa, no contráctil en sí misma, y que $\pi_1(\mathcal{M})$ es finito o contiene infinitas clases de conjugación. Supongamos que para algún $x_0 \in \mathcal{M}$:*

(i) *existen dos constantes $\eta, b \in \mathbf{R}$ (ponemos por simplicidad $b = 1$), tales que*

$$0 < \eta \leq \beta(x) \leq b \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

y

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} \beta(x) = 1;$$

(ii) *existen $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tales que*

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\mathcal{A}_1(x)| = a_1, \quad 0 \leq \mathcal{A}_2(x) \leq a_2 \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

y

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} |\mathcal{A}_1(x)| = 0, \quad \lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} \mathcal{A}_2(x) = a_2;$$

(iii) existen $U \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ y dos constantes positivas r, σ tales que para cada $x \in \mathcal{M}$ con $d(x, x_0) \geq r$

$$H_U(x)[\xi, \xi] \geq \sigma \langle \xi, \xi \rangle \quad \forall x \in \mathcal{M}, \forall \xi \in T_x \mathcal{M};$$

(iv)

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} |\mathcal{A}'_1(x)|_* |\nabla U(x)| = 0$$

y

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} |\nabla \mathcal{A}_2(x)| |\nabla U(x)| = 0;$$

(v)

$$\lim_{d(x, x_0) \rightarrow \infty} |\nabla \beta(x)| |\nabla U(x)| = 0.$$

Entonces, para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $\bar{T} > 0$ tal que, para cada $T > \bar{T}$, existen por lo menos m trayectorias T -periódicas geométricamente distintas de (8.2).

El próximo resultado concierne la existencia de trayectorias T -periódicas sobre una variedad lorentziana estática con borde diferenciable (véase la Observación 6.1.11, véase también la Observación 8.4.5).

Teorema 8.1.7 [14] *Sea $\mathcal{S} = \mathcal{D} \times \mathbf{R}$ una variedad lorentziana estática con borde diferenciable variacionalmente estrictamente convexo y compacto. Supongamos que se mantenga estrictamente (6.7), que \mathcal{D} no sea contráctil en sí, que $\pi_1(\mathcal{D})$ sea finito o contenga infinitas clases de conjugación, se satisfagan las hipótesis del Teorema 8.1.6, con \mathcal{M} reemplazado por \mathcal{D} , y que se verifique (8.6). Entonces, para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $\bar{T} > 0$ tal que, para cada $T > \bar{T}$ existen al menos m trayectorias T -periódicas geométricamente distintas de (8.2).*

Para una extensión de este resultado a métricas lorentzianas estacionarias véase [83].

8.2 Entramado funcional

En [24] se introdujo un nuevo principio variacional por las ecuaciones fundamentales de la Física Clásica; tal principio permite obtener una suerte de unificación del campo gravitatorio y del campo electromagnético. El punto básico de este principio variacional es que la trayectoria de un punto material está parametrizada por un parámetro s que porta información física, concretamente está relacionado con la masa en reposo y la carga. En lo que sigue, por simplicidad, consideraremos sólo variedades lorentzianas estáticas y remitimos a [6] para detalles acerca del caso estacionario.

Sean $z = (p, t_1)$, $w = (q, t_2)$ dos eventos de \mathcal{L} ; consideraremos el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma) &= \int_0^1 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_L ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}(\gamma), \dot{\gamma} \rangle_L ds = \\ &= \int_0^1 [\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - \beta(x) \dot{t}^2] ds + \int_0^1 [\langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle - \beta(x) \mathcal{A}_2(x) \dot{t}] ds \end{aligned} \quad (8.7)$$

sobre $\mathcal{Z} = \Omega^1(\mathcal{M}) \times H^1(t_1, t_2)$, véanse (6.3) y la Sección 2.2, donde

$$H^1(t_1, t_2) = \left\{ t \in H^1(I, \mathbf{R}) \mid t(0) = t_1, t(1) = t_2 \right\}.$$

Es válido el siguiente lema (véase [24, Section 2]).

Lema 8.2.1 *Sea $\gamma \in \mathcal{Z}$. Entonces γ es una trayectoria que conecta z y w si y sólo si γ es un punto crítico de \mathcal{F} sobre \mathcal{Z} .*

Demostración: Si $\gamma \in \mathcal{Z}$ entonces es un punto crítico de \mathcal{F} , es regular y, para cada $\zeta \in T_\gamma \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\gamma)[\zeta] &= 2 \int_0^1 \langle \dot{\gamma}, \dot{\zeta} \rangle_L ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}'(\gamma)\zeta, \dot{\gamma} \rangle_L ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}(\gamma), D_s \zeta \rangle_L ds = \\ &= -2 \int_0^1 \langle D_s \dot{\gamma}, \zeta \rangle_L ds + \int_0^1 \langle \nabla^L \mathcal{A}(\gamma)\zeta, \dot{\gamma} \rangle_L ds - \int_0^1 \langle D_s \mathcal{A}(\gamma), \zeta \rangle_L ds = \\ &= -2 \int_0^1 \langle D_s \dot{\gamma}, \zeta \rangle_L ds + \int_0^1 \langle [(\nabla^L \mathcal{A}(\gamma))^T - \nabla^L \mathcal{A}(\gamma)] \dot{\gamma}, \zeta \rangle_L ds = 0, \end{aligned}$$

donde $\nabla^L \mathcal{A}$ denota el gradiente de un campo vectorial \mathcal{A} y $(\nabla^L \mathcal{A})^T$ su adjunto, véase (2.7). Resulta entonces

$$-2D_s \dot{\gamma} + (\nabla^L \mathcal{A}(\gamma))^T \dot{\gamma} - \nabla^L \mathcal{A}(\gamma) \dot{\gamma} = 0. \quad (8.8)$$

De hecho, si hubiese un $s_0 \in [0, 1]$ tal que

$$D_s \dot{\gamma}(s_0) \neq \frac{1}{2} F(\gamma(s_0))[\dot{\gamma}(s_0)],$$

donde F es el campo de tensores $(1, 1)$ asociado a $\text{curl } \mathcal{A}$, podríamos encontrar $v \in T_{\gamma(s_0)} \mathcal{M}$ tal que $\langle D_s \dot{\gamma}(s_0) - \frac{1}{2} F(\gamma(s_0))[\dot{\gamma}(s_0)], v \rangle_L \neq 0$. Si V es el campo vectorial a lo largo de γ obtenido por transporte paralelo de v , debería existir $\delta_1 > 0$ tal que para cada $s \in [s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$: $\langle D_s \dot{\gamma}(s) - \frac{1}{2} F(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s)], V(s) \rangle_L \neq 0$. Entonces, llamando ψ a una función regular con soporte en $[s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$, y poniendo $\zeta(s) = \psi(s)V(s) \in T_{z(s)} \mathcal{L}$, resulta sobre $[s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$

$$\mathcal{F}'(\gamma)[\zeta] \neq 0,$$

lo cual es absurdo; luego γ es una trayectoria que une z y w . Sea ahora $\gamma \in \mathcal{Z}$ una trayectoria que une z y w . Si $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(I, \mathbf{R}^{N+1})$, resulta que γ es un punto crítico de \mathcal{F} , entonces por un argumento de densidad, véase p.ej. [78, Proposition 2.9.8], se sigue la tesis. \square

Observación 8.2.2 La ecuación (8.8) tiene una integral primera, de hecho:

$$\frac{d}{ds} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_L = 2 \langle D_s \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_L = \langle (\nabla^L \mathcal{A}(\gamma))^T \dot{\gamma} - \nabla^L \mathcal{A}(\gamma) \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_L = 0,$$

por tanto, existe una constante real c tal que

$$\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle_L = c \quad \forall s \in I.$$

En particular (para $c < 0$) la masa en reposo aparece como una constante del movimiento que se determina por las condiciones iniciales, y también se puede deducir la igualdad entre la masa en reposo y la masa gravitacional (véase [24]).

Por el Lema 8.2.1, para encontrar trayectorias que unen dos eventos, tenemos que estudiar la existencia de puntos críticos del funcional (8.7) sobre \mathcal{Z} . Ya hemos dicho que, como para el problema geodésico, este funcional es fuertemente indefinido y superamos esta dificultad por medio de un principio variacional que extiende el demostrado en [27], y que reduce el estudio de los puntos críticos de \mathcal{F} al de los puntos críticos de un funcional apropiado que, bajo nuestras hipótesis, está acotado inferiormente sobre $\Omega^1(\mathcal{M})$. De hecho, si $x \in \Omega^1(\mathcal{M})$, ponemos

$$H(x) = \frac{2\Delta + \int_0^1 \mathcal{A}_2(x) ds}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds}, \quad (8.9)$$

donde $\Delta = t_2 - t_1$, y

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) = & \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 \beta(x) \mathcal{A}_2^2(x) ds - \frac{H^2(x)}{4} \int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Con argumentos estándar se puede demostrar que \mathcal{J} es un funcional C^2 sobre $\Omega^1(\mathcal{M})$.

Lema 8.2.3 *Sea $x \in \Omega^1(\mathcal{M})$. Denotemos por t la solución del siguiente problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{t} = \frac{H(x)}{2\beta(x)} - \frac{\mathcal{A}_2(x)}{2} \\ t(0) = t_1. \end{cases} \quad (8.11)$$

Entonces

$$(x, t) \in \mathcal{Z} \quad (8.12)$$

$$\mathcal{F}(x, t) = \mathcal{J}(x) \quad (8.13)$$

$$\mathcal{F}'(x, t)[\xi, 0] = \mathcal{J}'(x)[\xi] \quad \forall \xi \in T_x \Omega^1(\mathcal{M}). \quad (8.14)$$

Demostración: Integrando (8.11), obtenemos:

$$t(1) = \frac{H(x)}{2} \int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{A}_2(x) ds$$

y, por (8.9) se sigue que $t(1) = t_1 + \Delta$ y entonces (8.12). Probemos (8.13). Si t es la

solución de (8.11), resulta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(x, t) &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \int_0^1 \beta(x) (\mathcal{A}_2(x) + t) \dot{t} ds = \\
 &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \\
 &= \int_0^1 \beta(x) \left(\mathcal{A}_2(x) + \frac{H(x)}{2\beta(x)} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_2(x) \right) \left(\frac{H(x)}{2\beta(x)} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_2(x) \right) ds = \\
 &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \beta(x) \left(\frac{H^2(x)}{\beta^2(x)} - \mathcal{A}_2^2(x) \right) ds = \mathcal{J}(x).
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Mostremos (8.14). Para cada $\xi \in T_x \Omega^1(\mathcal{M})$ y $\tau \in H_0^1(I, \mathbf{R})$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(x, t)[\xi, \tau] &= 2 \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{\xi} \rangle ds - 2 \int_0^1 \beta(x) \dot{t} \dot{\tau} ds - \int_0^1 \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \dot{t}^2 ds + \\
 &= \int_0^1 \langle \mathcal{A}'_1(x)[\xi], \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{\xi} \rangle ds - \\
 &= \int_0^1 \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \mathcal{A}_2(x) \dot{t} ds - \int_0^1 \beta(x) \langle \nabla \mathcal{A}_2(x), \xi \rangle \dot{t} ds - \int_0^1 \beta(x) \mathcal{A}_2(x) \dot{\tau} ds.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] &= -2 \int_0^1 \beta(x) \dot{t} \dot{\tau} ds - \int_0^1 \beta(x) \mathcal{A}_2(x) \dot{\tau} ds = \\
 &= - \int_0^1 \beta(x) (2\dot{t} + \mathcal{A}_2(x)) \dot{\tau} ds.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Si t es la solución de (8.11), entonces

$$\mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] = -H(x) \int_0^1 \dot{\tau} ds = 0, \tag{8.17}$$

luego

$$\mathcal{F}'(x, t)[\xi, \tau] = \mathcal{F}'(x, t)[\xi, 0].$$

Para cada $x \in \Omega^1(\mathcal{M})$ podemos considerar la solución de (8.11), y así podemos definir la aplicación

$$\Psi : \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow H^1(t_1, t_2)$$

tal que:

$$\Psi(x)(s) = \frac{H(x)}{2} \int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr - \frac{1}{2} \int_0^s \mathcal{A}_2(x) dr.$$

Por (8.15):

$$\mathcal{J}(x) = \mathcal{F}(x, \Psi(x))$$

y por (8.17)

$$\mathcal{F}'(x, \Psi(x))[0, \tau] = 0 \quad \forall \tau \in H_0^1(I, \mathbf{R}).$$

Observación 8.3.2 Para demostrar el resultado cuando la variedad tiene borde, tenemos que introducir funcionales convenientes penalizados \mathcal{F}_ϵ y \mathcal{J}_ϵ , véanse el Capítulo 5 y el Teorema 8.2.4. Un punto crítico γ de \mathcal{F}_ϵ satisface la siguiente ecuación

$$D_s \dot{\gamma} = \frac{1}{2} F(\gamma)[\dot{\gamma}] - \frac{2}{\Phi^3(\gamma)} \psi'_\epsilon \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma)} \right) \nabla^L \Phi(\gamma).$$

Con argumentos estándar se puede encontrar una familia $(\gamma_\epsilon)_{\epsilon \in]0,1]}$ de puntos críticos de \mathcal{F}_ϵ tales que

$$\mathcal{F}_\epsilon(\gamma_\epsilon) \leq K,$$

para una cierta constante $K \in \mathbf{R}$. Razonando como en el Teorema 6.7.1, de (8.6) se sigue que los multiplicadores de la ecuación anterior están acotados y podemos obtener γ satisfaciendo (8.2) y (8.3). Luego es suficiente comprobar que la imagen de γ está contenida en \mathcal{S} . Si por contradicción, el conjunto $C = \{s \in I \mid \gamma(s) \in \partial \mathcal{S}\}$ no fuera vacío, consideremos $u(s) = \Phi(\gamma(s)) = \phi(x(s))$. Con argumentos análogos a los usados en el Paso 10 de la Proposición 5.2.2 llegamos a una contradicción.

8.4 Demostración del Teorema 8.1.6

Ahora, debido al hecho de que \mathcal{M} no es compacta y por la naturaleza periódica del problema existen sucesiones de Palais–Smale que no están acotadas en $\Lambda^1(\mathcal{M})$; así, siguiendo [26], penalizamos el funcional \mathcal{F} de manera apropiada. Consideremos para cada $\epsilon \in]0, 1]$, una función no negativa creciente $\psi_\epsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ definida por

$$\psi_\epsilon(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \frac{1}{\epsilon} \\ \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \sigma^m \left(s - \frac{1}{\epsilon} \right)^m & \text{si } s > \frac{1}{\epsilon} \end{cases} \quad (8.23)$$

donde σ es como en (iii) del Teorema 8.1.6. Ponemos, para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $\gamma \in \mathcal{Z}_T$

$$\mathcal{F}_\epsilon(\gamma) = \mathcal{F}(\gamma) + \int_0^1 \psi_\epsilon(U(x)) ds,$$

y para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $x \in \Lambda^1(\mathcal{M})$

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) = \mathcal{J}(x) + \int_0^1 \psi_\epsilon(U(x)) ds, \quad (8.24)$$

donde la función U es como en (iii) del Teorema 8.1.6. Dado que el término de penalización no depende de t , todavía se mantiene el Teorema 8.2.4 cuando \mathcal{F} y \mathcal{J} son remplazados por \mathcal{F}_ϵ , \mathcal{J}_ϵ .

Será útil el siguiente lema, véase [26, Lemma 2.2].

Lema 8.4.1 Sean U, r, σ, x_0 como en el Teorema 8.1.6. Entonces existen $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que para cada $x \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla U(x), \nabla U(x) \rangle^{\frac{1}{2}} &\geq \sigma d(x, x_0) - c_1 \\ U(x) &\geq \frac{\sigma}{2} d^2(x, x_0) - c_2 d(x, x_0) - c_3. \end{aligned}$$

8.3 Demostración del Teorema 8.1.1

Por el Lema 8.2.1 y el Teorema 8.2.4, tenemos que estudiar los puntos críticos del funcional (8.10) sobre $\Omega^1(\mathcal{M})$. En primer lugar notemos que todas las hipótesis del Teorema 8.1.1 implican, por la desigualdad de Hölder, que

$$\mathcal{J}(x) \geq \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds - \left(\Delta^2 + \frac{a_2^2}{4} + \Delta a_2 \right) - a_1 \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle^{\frac{1}{2}} ds,$$

luego \mathcal{J} está acotado inferiormente. Además \mathcal{J} satisface la condición (PS).

Proposición 8.3.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 8.1.1 \mathcal{J} satisface la condición (PS).*

Demostración: Sea $\{x_m\}$ una sucesión (PS) en $\Omega^1(\mathcal{M})$. Entonces por las hipótesis del Teorema 8.1.1 y la desigualdad de Hölder, deducimos que

$$\int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds \leq K + \left(\Delta^2 + \frac{a_2^2}{4} + \Delta a_2 \right) + a_1 \left(\int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

así

$$\{\|\dot{x}_m\|_2\} \text{ está acotada} \quad (8.19)$$

y luego por (2.9)

$$\{\|x_m\|\} \text{ está acotada.} \quad (8.20)$$

Entonces, pasando eventualmente a una parcial, tenemos que

$$x_m \rightarrow x \text{ débilmente en } H^1(I, \mathbf{R}^N). \quad (8.21)$$

Razonando como en la demostración de (ii) de la Proposición 3.4.2 se sigue la tesis. \square

Demostración del Teorema 8.1.1:

Ya hemos remarcado que \mathcal{J} está acotado inferiormente; por la Proposición 8.3.1 \mathcal{J} satisface la condición (PS) sobre $\Omega^1(\mathcal{M})$, así por el Teorema 2.3.5 \mathcal{J} tiene un punto mínimo x que se corresponde con el punto crítico $\gamma = (x, \Psi(x))$ de \mathcal{F} en virtud del Teorema 8.2.4. Por el Lema 8.2.1 queda demostrada la primera parte del enunciado. Además, por la Proposición 2.4.3

$$\text{cat}_{\Omega^1(\mathcal{M})} \mathcal{J}^c < \infty \quad \forall c \in \mathbf{R}. \quad (8.22)$$

Argumentos más simples que los usados en la demostración del Teorema 3.2.2 muestran que, cuando \mathcal{M} no es contráctil,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}(x_m) = \infty.$$

Luego, poniendo $\gamma_m = (x_m, \Psi(x_m))$ para cada $m \in \mathbf{N}$, por el Teorema 8.2.4 y el Lema 8.2.1, tenemos la existencia de infinitas trayectorias que unen los eventos dados y tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_m) = \infty. \quad \square$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

8 / MAYO 2000

COMISION DE DOCTORADO

Entonces, para cada $\xi \in T_x\Omega^1(\mathcal{M})$, resulta:

$$\mathcal{J}'(x)[\xi] = \mathcal{F}'(x, \Psi(x))[\xi, 0] + \mathcal{F}'(x, \Psi(x))[0, \Psi'(x)(\xi)] = \mathcal{F}'(x, \Psi(x))[\xi, 0]$$

y, si $t = \Psi(x)$ es la solución de (8.11), se sigue la tesis. \square

Teorema 8.2.4 Sea $\gamma = (x, t) \in \mathcal{Z}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) γ es un punto crítico de \mathcal{F} ;
 - (b) se verifican:
 - (i) x es un punto crítico de \mathcal{J} ;
 - (ii) $t \in H^1(t_1, t_2)$ es la solución de (8.11).
- Más aún, si se cumple (a) ó (b),

$$\mathcal{F}(\gamma) = \mathcal{J}(x). \quad (8.18)$$

Demostración: (a) \Rightarrow (b) Si $\gamma = (x, t)$ es un punto crítico de \mathcal{F} , por (8.16) se sigue que, para cada $\tau \in H_0^1(I, \mathbf{R})$:

$$\int_0^1 \beta(x)(2\dot{t} + \mathcal{A}_2(x))\dot{\tau} ds = 0$$

y entonces existe $c \in \mathbf{R}$ tal que

$$\beta(x)(2\dot{t} + \mathcal{A}_2(x)) = c \text{ c.p.d. sobre } I,$$

luego

$$\dot{t} = \frac{c}{2\beta(x)} - \frac{\mathcal{A}_2(x)}{2} \quad \text{c.p.d.}$$

Integrando de 0 a 1, resulta $c = H(x)$, así, t satisface (8.11) y se sigue (ii). Además de (8.14), se sigue (i).

(b) \Rightarrow (a) Sea $x \in \Omega^1(\mathcal{M})$ un punto crítico de \mathcal{J} , y sea t la solución de (8.11). Entonces, por el Lema 8.2.3, $(x, t) \in \mathcal{Z}$ y para cada $\zeta = (\xi, \tau) \in T_{(x,t)}\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{F}'(x, t)[\xi, \tau] = \mathcal{F}'(x, t)[\xi, 0] + \mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] = \mathcal{J}'(x)[\xi] + \mathcal{F}'(x, t)[0, \tau].$$

Por (8.17) se sigue que $\mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] = 0$ y entonces (x, t) es un punto crítico de \mathcal{F} . Finalmente, (8.18) se sigue de (8.13). \square

Observación 8.2.5 Cuando estudiamos las soluciones de (8.2)–(8.4), tenemos que buscar los puntos críticos de \mathcal{F} sobre la variedad $\mathcal{Z}_T = \Lambda^1(\mathcal{M}) \times H^1(0, T)$ en lugar de \mathcal{Z} , y, salvo obvias variaciones, podemos reenunciar todos los resultados de sección, véase también la Sección 7.3.

solución de (8.11), resulta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(x, t) &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \int_0^1 \beta(x) (\mathcal{A}_2(x) + t) \dot{t} ds = \\
 &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \\
 &= \int_0^1 \beta(x) \left(\mathcal{A}_2(x) + \frac{H(x)}{2\beta(x)} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_2(x) \right) \left(\frac{H(x)}{2\beta(x)} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_2(x) \right) ds = \\
 &= \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds - \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \beta(x) \left(\frac{H^2(x)}{\beta^2(x)} - \mathcal{A}_2^2(x) \right) ds = \mathcal{J}(x).
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Mostremos (8.14). Para cada $\xi \in T_x \Omega^1(\mathcal{M})$ y $\tau \in H_0^1(I, \mathbf{R})$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(x, t)[\xi, \tau] &= 2 \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{\xi} \rangle ds - 2 \int_0^1 \beta(x) t \dot{\tau} ds - \int_0^1 \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \dot{t}^2 ds + \\
 &= \int_0^1 \langle \mathcal{A}'_1(x)[\xi], \dot{x} \rangle ds + \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{\xi} \rangle ds - \\
 &= \int_0^1 \langle \nabla \beta(x), \xi \rangle \mathcal{A}_2(x) \dot{t} ds - \int_0^1 \beta(x) \langle \nabla \mathcal{A}_2(x), \xi \rangle \dot{t} ds - \int_0^1 \beta(x) \mathcal{A}_2(x) \dot{\tau} ds.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] &= -2 \int_0^1 \beta(x) \dot{\tau} ds - \int_0^1 \beta(x) \mathcal{A}_2(x) \dot{\tau} ds = \\
 &= - \int_0^1 \beta(x) (2\dot{t} + \mathcal{A}_2(x)) \dot{\tau} ds.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Si t es la solución de (8.11), entonces

$$\mathcal{F}'(x, t)[0, \tau] = -H(x) \int_0^1 \dot{\tau} ds = 0, \tag{8.17}$$

luego

$$\mathcal{F}'(x, t)[\xi, \tau] = \mathcal{F}'(x, t)[\xi, 0].$$

Para cada $x \in \Omega^1(\mathcal{M})$ podemos considerar la solución de (8.11), y así podemos definir la aplicación

$$\Psi : \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow H^1(t_1, t_2)$$

tal que:

$$\Psi(x)(s) = \frac{H(x)}{2} \int_0^s \frac{1}{\beta(x)} dr - \frac{1}{2} \int_0^s \mathcal{A}_2(x) dr.$$

Por (8.15):

$$\mathcal{J}(x) = \mathcal{F}(x, \Psi(x))$$

y por (8.17)

$$\mathcal{F}'(x, \Psi(x))[0, \tau] = 0 \quad \forall \tau \in H_0^1(I, \mathbf{R}).$$

Lema 8.4.2 Existe un $\bar{\delta} > 0$, independiente de ϵ tal que

$$\text{cat}_{\Lambda^1(\mathcal{M})} \left(\mathcal{J}_\epsilon^{-T^2 - Ta_2 + \bar{\delta}} \right) \leq \dim \mathcal{M} \quad \forall \epsilon \in]0, 1], \quad (8.25)$$

para T suficientemente grande.

Demostración: Por la forma de la penalización, la desigualdad de Hölder y la hipótesis (ii) del Teorema 8.1.6, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x), \dot{x} \rangle ds \leq \\ & \left(\int_0^1 |\mathcal{A}_1(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq a_1 \left(\int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Se sigue que

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) \geq \mathcal{J}(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds - \frac{3}{2} \frac{T^2}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds} - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2). \quad (8.27)$$

Para T suficientemente grande, exactamente $T > \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{3} \int_0^1 \frac{1}{\beta(x(s))} ds \right)^{\frac{1}{2}}$, resulta

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle ds - \frac{3T^2}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x)} ds},$$

luego, por la propiedad de monotonía de la categoría, la demostración se puede terminar razonando como en [26, Lemma 3.1]. \square

Lema 8.4.3 Existe un $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, cada punto crítico $x_\epsilon \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ del funcional \mathcal{J}_ϵ satisfaciendo

$$-T^2 - Ta_2 + \bar{\delta} \leq \mathcal{J}_\epsilon(x_\epsilon) \leq K, \quad (8.28)$$

donde $\bar{\delta}$ ha sido encontrado en el Lema 8.4.2 y K es una oportuna constante real independiente de ϵ , es un punto crítico de \mathcal{J} .

Demostración: Por la forma de la penalización, basta probar que existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ y para cada punto crítico x_ϵ de \mathcal{J}_ϵ que satisface (8.28) resulta

$$\sup \{d(x_\epsilon(s), x_0) | s \in I, \epsilon \in]0, \epsilon_0]\} < \infty. \quad (8.29)$$

Supongamos que existan una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ y una sucesión de puntos críticos $\{x_m\}$ de $\mathcal{J}_m \equiv \mathcal{J}_{\epsilon_m}$, satisfaciendo (8.28), tal que

$$\sup \{d(x_m(s), x_0) | s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (8.30)$$

Siendo β, \mathcal{A} acotados, resulta que $\{\dot{t}_m\}$ está acotada, véase (8.11) y entonces por (8.26), (8.28), existe alguna $B \in \mathbf{R}$ tal que

$$\int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds \leq B \quad \forall m \in \mathbf{N}. \quad (8.31)$$

Luego por (8.30) y (8.31) tenemos

$$\inf \{d(x_m(s), x_0) | s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (8.32)$$

Si t_m es la solución de (8.11) correspondiente a x_m , por el Teorema 8.2.4 resulta que (x_m, t_m) es un punto crítico de $\mathcal{F}_m \equiv \mathcal{F}_{\epsilon_m}$. Entonces, para cada $\xi \in T_{x_m} \Lambda^1(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{F}'_m(x_m, t_m)[\xi, 0] &= -2 \int_0^1 \langle D_s \dot{x}_m, \xi \rangle ds - \int_0^1 \langle \nabla \beta(x_m), \xi \rangle \dot{t}_m^2 ds + \\ &\int_0^1 \langle [(\nabla \mathcal{A}_1(x_m))^T - \nabla \mathcal{A}_1(x_m)] \dot{x}_m, \xi \rangle ds - \int_0^1 [\langle \nabla \beta(x_m), \xi \rangle \mathcal{A}_2(x_m) + \\ &\beta(x_m) \langle \nabla \mathcal{A}_2(x_m), \xi \rangle] \dot{t}_m ds + \int_0^1 \psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) \langle \nabla U(x_m), \xi \rangle ds. \end{aligned}$$

Por (8.11) se sigue:

$$\begin{aligned} 2D_s \dot{x}_m &= -H(x_m) \frac{\nabla \beta(x_m)}{2\beta(x_m)} \dot{t}_m - \frac{1}{2} \nabla \beta(x_m) \mathcal{A}_2(x_m) \dot{t}_m + \\ &[(\nabla \mathcal{A}_1(x_m))^T - \nabla \mathcal{A}_1(x_m)] \dot{x}_m - \beta(x_m) \nabla \mathcal{A}_2(x_m) \dot{t}_m + \\ &\psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) \nabla U(x_m). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Pongamos, para cada $m \in \mathbf{N}$, $s \in I$, $u_m(s) = U(x_m(s))$. Entonces, siendo x_m un punto crítico de \mathcal{F}_m , por (8.32), (8.33) y (iii) del Teorema 8.1.6 resulta, para m lo bastante grande,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ddot{u}_m ds &= \int_0^1 H_U(x_m)[\dot{x}_m, \dot{x}_m] ds + \int_0^1 \langle \nabla U(x_m), D_s \dot{x}_m \rangle ds \geq \\ &\sigma \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \nabla U(x_m), H(x_m) \frac{\nabla \beta(x_m)}{2\beta(x_m)} \rangle \dot{t}_m ds - \\ &\frac{1}{4} \int_0^1 \langle \nabla U(x_m), \nabla \beta(x_m) \rangle \mathcal{A}_2(x_m) \dot{t}_m ds + \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 \langle \nabla U(x_m), [(\nabla \mathcal{A}_1(x_m))^T - \nabla \mathcal{A}_1(x_m)] \dot{x}_m \rangle ds - \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 \langle \nabla U(x_m), \nabla \mathcal{A}_2(x_m) \rangle \beta(x_m) \dot{t}_m ds + \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 \psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) \langle \nabla U(x_m), \nabla U(x_m) \rangle ds. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Siendo β, \mathcal{A}_2 acotados, resulta que $\{H(x_m)\}, \{\dot{t}_m\}$ también están acotadas y entonces, por (v) del Teorema 8.1.6, se sigue que la segunda y la tercera integrales en (8.34) son

$o(1)$. Por (iv) del Teorema 8.1.6 y por (8.31), se sigue que también la cuarta y la quinta integrales son $o(1)$. Entonces, dado que $\dot{x}_m(0) = \dot{x}_m(1)$, resulta

$$0 = \int_0^1 \ddot{u}_m(s) ds \geq \sigma \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) \langle \nabla U(x_m), \nabla U(x_m) \rangle ds + o(1). \quad (8.35)$$

Por (8.28) y (8.24) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds &\geq -T^2 - Ta_2 + \bar{\delta} + \frac{T^2}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x_m)} ds} + \frac{\left(\int_0^1 \mathcal{A}_2(x_m) ds\right)^2}{4 \int_0^1 \frac{1}{\beta(x_m)} ds} - \\ &\quad \frac{1}{4} \int_0^1 \beta(x_m) \mathcal{A}_2^2(x_m) ds + \frac{T}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x_m)} ds} \int_0^1 \mathcal{A}_2(x_m) ds - \\ &\quad \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x_m), \dot{x}_m \rangle ds - \int_0^1 \psi_{\epsilon_m}(U(x_m)) ds = -T^2 - Ta_2 + \bar{\delta} + \\ &\quad \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\beta(x_m)} ds} \left(T + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{A}_2(x_m) ds\right)^2 - \frac{1}{4} \int_0^1 \beta(x_m) \mathcal{A}_2^2(x_m) ds - \\ &\quad \int_0^1 \langle \mathcal{A}_1(x_m), \dot{x}_m \rangle ds - \int_0^1 \psi_{\epsilon_m}(U(x_m)) ds. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Además por (ii) y (i) del Teorema 8.1.6, para cada número real positivo α y para m suficientemente grande,

$$\mathcal{A}_2(x_m) > a_2 - \alpha \quad (8.37)$$

y

$$\beta(x_m) > 1 - \alpha. \quad (8.38)$$

Entonces por (8.32), (8.36), (8.37), (8.38) y (ii) del Teorema 8.1.6, se sigue que, para m suficientemente grande,

$$\int_0^1 \langle \dot{x}_m, \dot{x}_m \rangle ds \geq \bar{\delta} - \alpha \left[\left(T + \frac{1}{2} a_2\right)^2 + \frac{1}{4} (1 - \alpha) (4T + 2a_2 - \alpha) \right] + o(1), \quad (8.39)$$

luego, elegido α tal que

$$\frac{\bar{\delta}}{2} > \alpha \left[\left(T + \frac{1}{2} a_2\right)^2 + \frac{1}{4} (1 - \alpha) (4T + 2a_2 - \alpha) \right],$$

(8.35) implica

$$0 = \int_0^1 \ddot{u}_m ds \geq \sigma \left(\frac{\bar{\delta}}{2} + o(1) \right) - \sigma \int_0^1 \psi_{\epsilon_m}(U(x_m)) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) \langle \nabla U(x_m), \nabla U(x_m) \rangle ds + o(1). \quad (8.40)$$

Por el Lema 8.4.1 y (8.32), para m grande resulta

$$\langle \nabla U(x_m), \nabla U(x_m) \rangle \geq 2,$$

entonces por (8.40) y la forma de la penalización, obtenemos

$$0 = \int_0^1 \ddot{u}_m ds \geq \sigma \frac{\bar{\delta}}{2} + \int_0^1 (\psi'_{\epsilon_m}(U(x_m)) - \sigma \psi_{\epsilon_m}(U(x_m))) ds + o(1) \geq \sigma \frac{\bar{\delta}}{2} + o(1),$$

lo cual es una contradicción. \square

Con argumentos estándar podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 8.4.4 *Para cada $\epsilon \in]0, 1]$, \mathcal{J}_ϵ satisface la condición (PS).*

Demostración del Teorema 8.1.6:

Bajo nuestras hipótesis, existe una sucesión $\{C_m\}$ de subconjuntos compactos de $\Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{cat}_{\Lambda^1(\mathcal{M})} C_m = \infty,$$

véase la Observación 2.4.7. Fijemos $m \in \mathbf{N}$. Entonces existe un subconjunto compacto C_m de $\Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que

$$\text{cat}_{\Lambda^1(\mathcal{M})} C_m \geq n + m, \quad (8.41)$$

donde $n = \dim \mathcal{M}$. Nótese que existe $\epsilon_1 \in]0, 1]$ tal que para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$,

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) = \mathcal{J}(x) \quad \forall x \in C_m.$$

Cálculos sencillos muestran que, para cada $K \in \mathbf{R}$, existe $\bar{T} > 0$ tal que para cada $T > \bar{T}$, $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$,

$$\sup \mathcal{J}_\epsilon(C_m) = \sup \mathcal{J}(C_m) \leq K. \quad (8.42)$$

Pongamos, para $j \in \mathbf{N}$, $j > n$, $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$,

$$\Gamma_j = \left\{ A \subset \Lambda^1(\mathcal{M}) \mid \text{cat}_{\Lambda^1(\mathcal{M})} A \geq j \right\}$$

$$c_{\epsilon, j} = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{x \in A} \mathcal{J}_\epsilon(x).$$

Entonces, (8.41) y (8.42) implican que para $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$, $k = n + 1, \dots, n + m$, $c_{\epsilon, k} \leq K$. Por el Lema 8.4.2, tenemos la existencia de $\bar{\delta} > 0$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_1]$ y para cada T lo bastante grande

$$-T^2 - Ta_2 + \bar{\delta} \leq c_{\epsilon, k} \leq K, \quad k = n + 1, \dots, n + m. \quad (8.43)$$

Por la Proposición 8.4.4 y el Teorema 2.4.2 cada $c_{\epsilon, k}$, $k = n + 1, \dots, n + m$, es un valor crítico por \mathcal{J}_ϵ . Luego existen al menos m puntos críticos de \mathcal{J}_ϵ correspondientes a tales valores críticos. Por (8.43) y el Lema 8.4.3, tenemos que, si ϵ es suficientemente pequeño, ellos son también puntos críticos de \mathcal{J} . Finalmente, la demostración se completa por el Teorema 8.2.4 y el Lema 8.2.1; además se puede probar que estas trayectorias son geoméricamente distintas razonando como en [27, Theorem 1.5]. \square

Observación 8.4.5 Bajo las hipótesis (i) y (ii) del Teorema 8.1.6, se puede probar que para oportunos valores de K (donde K es como en el Lema 8.4.3) y T , se pueden encontrar trayectorias causales, véase también el Teorema 7.2.2.

8.5 Demostración del Teorema 8.1.7

Dado que ahora trabajamos sobre variedades con borde, el funcional \mathcal{F} debe ser ulteriormente penalizado. Para cada $\epsilon \in]0, 1]$ y para cada $\gamma = (x, t) \in \Lambda^1(\mathcal{D}) \times H^1(0, T)$ consideremos

$$\mathcal{F}_\epsilon(\gamma) = \mathcal{F}(\gamma) + \int_0^1 \psi_\epsilon(U(x)) ds + \int_0^1 U_\epsilon(x) ds.$$

Luego

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) = \mathcal{J}(x) + \int_0^1 \psi_\epsilon(U(x)) ds + \int_0^1 U_\epsilon(x) ds,$$

con U_ϵ como en (4.13), donde ψ_ϵ es cómo en (8.23), aunque en el segundo término de la penalización podríamos considerar cualquier función como en los capítulos anteriores. Nótese que sigue manteniéndose el Teorema 8.2.4 reemplazando \mathcal{F} y \mathcal{J} por \mathcal{F}_ϵ y \mathcal{J}_ϵ .

También en este caso se puede demostrar el Lema 8.4.2. Además se verifica el siguiente lema.

Lema 8.5.1 *Existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, cada punto crítico $x_\epsilon \in \Lambda^1(\mathcal{D})$ del funcional \mathcal{J}_ϵ satisfaciendo*

$$-T^2 - Ta_2 + \bar{\delta} \leq \mathcal{J}_\epsilon(x_\epsilon) \leq K, \quad (8.44)$$

donde $\bar{\delta}$ es independiente de ϵ y K es una oportuna constante real, es un punto crítico de \mathcal{J} .

Demostración: Por la forma de la penalización es suficiente demostrar que existe $\epsilon_0 \in]0, 1]$ tal que para cada punto crítico x_ϵ de \mathcal{J}_ϵ satisfaciendo (8.44) resulta

$$\sup \{d(x_\epsilon(s), x_0) | s \in I, \epsilon \in]0, \epsilon_0]\} < \infty \quad (8.45)$$

y

$$\phi(x_\epsilon(s)) \geq \sqrt{\epsilon} \quad \forall s \in I. \quad (8.46)$$

Supongamos que existen una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ y una sucesión de puntos críticos $\{x_m\}$ de $\mathcal{J}_m \equiv \mathcal{J}_{\epsilon_m}$ satisfaciendo (8.44) y tal que

$$\sup \{d(x_m(s), x_0) | s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (8.47)$$

Razonando como en la primera parte del Lema 8.4.3, obtenemos que

$$\inf \{d(x_m(s), x_0) | s \in I, m \in \mathbf{N}\} = \infty. \quad (8.48)$$

Dado que $\partial\mathcal{D}$ es compacta, se sigue la existencia de $\mu > 0$ tal que para m lo bastante grande:

$$\phi(x_m(s)) \geq \mu > 0 \quad \forall s \in I.$$

Entonces, dado que $\{\epsilon_m\}$ tiende hacia 0, si m es suficientemente grande:

$$\psi_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s))} \right) = 0 \quad \forall s \in I$$

y

$$\psi'_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\phi^2(x_m(s))} \right) = 0 \quad \forall s \in I.$$

Luego, razonando como en el caso completo, llegamos a una contradicción y se verifica (8.45). Para probar (8.46) supongamos que existen una sucesión infinitesimal y decreciente $\{\epsilon_m\}$ de números en $]0, 1]$ y una sucesión de puntos críticos $\{x_m\}$ de $\mathcal{J}_m \equiv \mathcal{J}_{\epsilon_m}$ satisfaciendo (8.44) y tal que

$$\phi(x_m(s_m)) < \sqrt{\epsilon_m}, \quad (8.49)$$

donde para cada $m \in \mathbf{N}$ s_m denota al punto de mínimo de $\phi(x_m(s))$ sobre I . Poniendo, para cada $m \in \mathbf{N}$, $u_m(s_m) = \phi(x_m(s_m))$, resulta:

$$\dot{u}_m(s_m) = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{u}_m(s_m) \geq 0.$$

Ahora definimos $t_m = \Psi(x_m)$; por el Teorema 8.2.4 aplicado a los funcionales penalizados, $\gamma_m = (x_m, t_m)$ es un punto crítico de \mathcal{F}_m . Luego razonando como en la demostración del Teorema 7.2.2 y por (8.6), se sigue que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq H_{\Phi}^L(\gamma_m(s_m))[\dot{\gamma}_m(s_m), \dot{\gamma}_m(s_m)] + \langle \nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m)), D_s \dot{\gamma}_m(s_m) \rangle_L \leq \\ &H_{\Phi}^L(\gamma_m(s_m))[\dot{\gamma}_m(s_m), \dot{\gamma}_m(s_m)] + \frac{1}{2} \langle F(\gamma_m)[\nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m))], \dot{\gamma}_m(s_m) \rangle - \\ &\frac{1}{2} \psi'_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_m(s_m))} \right) \frac{\langle \nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m)), \nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m)) \rangle_L}{\Phi^3(\gamma_m(s_m))} \leq \\ &-\frac{1}{2} \psi'_{\epsilon_m} \left(\frac{1}{\Phi^2(\gamma_m(s_m))} \right) \frac{\langle \nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m)), \nabla^L \Phi(\gamma_m(s_m)) \rangle_L}{\Phi^3(\gamma_m(s_m))}, \end{aligned} \quad (8.50)$$

llegándose a una contradicción para m grande. \square

Argumentos estándar muestran que para cada $\epsilon \in]0, 1]$, $c \in \mathbf{R}$ los subniveles \mathcal{J}_ϵ^c son subespacios métricos completos de $\Lambda^1(\mathcal{M})$ y \mathcal{J}_ϵ satisface la condición (PS).

Demostración del Teorema 8.1.7:

Como en la demostración del Teorema 8.1.6, para cada $m \in \mathbf{N}$, existe un subconjunto compacto C_m de $\Lambda^1(\mathcal{M})$ tal que se mantiene (8.41), donde $n = \dim \mathcal{M}$. Entonces existe $\bar{\epsilon} \in]0, 1]$ tal que, para cada $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}]$,

$$\mathcal{J}_\epsilon(x) = \mathcal{J}(x) \quad \forall x \in C_m.$$

Luego el Lema 8.5.1 permite razonar como en la demostración del Teorema 8.1.6, obteniéndose la tesis. \square

Bibliografía

- [1] R.A. ADAMS, Sobolev spaces. Academic Press: New York–San Francisco–London, 1975
- [2] A. AVEZ, *Essais de Géométrie Riemannienne hyperbolique: applications to Relativité générale*, Ann. Inst. Fourier **132**, 105-190 (1963)
- [3] R.BARTOLO, *Periodic orbits on Riemannian manifolds with convex boundary*, Discrete Contin. Dynam. Systems vol.3 **3**, 439-450 (1997)
- [4] R.BARTOLO, *Trajectories connecting two events of a Lorentzian manifold in the presence of a vector field*, J. Differential. Equations **153**, 82-95 (1999)
- [5] R.BARTOLO, *Periodic trajectories on stationary Lorentzian manifolds*, to appear on Nonlinear Anal.
- [6] R.BARTOLO, *Trajectories on stationary Lorentzian manifolds*, preprint
- [7] R.BARTOLO, A.GERMINARIO, *Geodesics with prescribed energy on static Lorentzian manifolds with convex boundary*, J. Geom. Phys. **32**, 293-310 (2000)
- [8] R.BARTOLO, A.GERMINARIO, M.SÁNCHEZ, *Periodic trajectories with fixed energy on Riemannian and Lorentzian manifolds with boundary*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CLXXVII**, 241-262 (1999)
- [9] R.BARTOLO, A.GERMINARIO, M.SÁNCHEZ, *Convexity of domains of Riemannian manifolds*, preprint
- [10] R.BARTOLO, A.GERMINARIO, M.SÁNCHEZ, *A note on the boundary of a static Lorentzian manifold*, preprint
- [11] R.BARTOLO, A.GERMINARIO, M.SÁNCHEZ, in preparation
- [12] R.BARTOLO, A.MASIELLO, *On the existence of infinitely many trajectories for a class of static Lorentzian manifolds like Schwarzschild and Reissner–Nordström space-times*, J. Math. Anal. Appl. **199**, 14-38 (1996)
- [13] R.BARTOLO, A.MASIELLO, *Morse theory for trajectories of Lagrangian systems on Riemannian manifolds with convex boundary*, Adv. Differential Equations vol.2 **4**, 593-618 (1997)

- [14] R.BARTOLO, E.MIRENGHI, M.TUCCI, *Periodic trajectories on Lorentzian manifolds under the action of a vector field*, to appear on J. Differential Equations
- [15] J.K.BEEM, P.E.EHRLICH, K.L.EASLEY, *Global Lorentzian Geometry*, Second Edition. Pure App. Math., vol. 202, Marcel Dekker: New York, 1996
- [16] J.K.BEEM, R.E.PARKER, *Pseudoconvexity and geodesic connectedness*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CLV**, 137-142 (1989)
- [17] V.BENCI, *Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1**, 401-412 (1984)
- [18] V.BENCI, *Periodic solutions of Lagrangian systems on a compact manifold*, J. Differential Equations **63**, 135-161 (1986)
- [19] V.BENCI, *A new approach to Morse-Conley theory and some applications*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CLVIII**, 231-305 (1991)
- [20] V.BENCI, D.FORTUNATO, *Periodic trajectories for the Lorentz metric of a static gravitational field*, in Proc. of "Variational Methods" (H.Berestycki J.M.Coron I.Ekeland, Eds) Paris, 413-429 (1988)
- [21] V.BENCI, D.FORTUNATO, *Existence of geodesics for the Lorentz metric of a stationary gravitational field*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7**, 27-35 (1990)
- [22] V.BENCI, D.FORTUNATO, *Geodesics on space-time manifolds: a variational approach*, Proc. of "Variational Methods and Nonlinear Analysis" (A.Ambrosetti-K.C.Chang, Eds), Gordon & Breach (1992)
- [23] V.BENCI, D.FORTUNATO, *On the existence of infinitely many geodesics on space-time manifolds*, Adv. Math. **105**, 1-25 (1994)
- [24] V.BENCI, D.FORTUNATO, *A new variational principle for the fundamental equations of classical physics*, Found. Phys. vol.28 **2**, 333-352 (1998)
- [25] V.BENCI, D.FORTUNATO, F.GIANNONI, *Geodesics on static Lorentzian manifolds with convex boundary*, in "Proc. Variational Methods in Hamiltonian systems and Elliptic Equations" Pitman Res. Notes Math. Ser. **243**, Longman 21-41 (1990)
- [26] V.BENCI, D.FORTUNATO, F.GIANNONI, *On the existence of periodic trajectories in static Lorentz manifolds with singular boundary*, Nonlinear Analysis, a Tribute in honour of G. Prodi, Quaderni della Scuola Normale Superiore, Pisa (A.Ambrosetti-A.Marino, Eds), 109-133 (1991)
- [27] V.BENCI, D.FORTUNATO, F.GIANNONI, *On the existence of multiple geodesics in static space-times*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **8**, 79-102 (1991)

- [28] V.BENCI, D.FORTUNATO, F.GIANNONI, *On the existence of geodesics in static Lorentz manifolds with singular boundary*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **XIX**, 255-289 (1992)
- [29] V.BENCI, D.FORTUNATO, A.MASIELLO, *On the geodesic connectedness of Lorentzian manifolds*, Math. Z. **217**, 73-93 (1994)
- [30] V.BENCI, F.GIANNONI, *On the existence of closed geodesics on noncompact Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **68**, 195-215 (1992)
- [31] V.BENCI, F.GIANNONI, *Morse theory for C^1 -functionals and Conley blocks*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **4**, 365-398 (1994)
- [32] V.BENCI, P.H.RABINOWITZ, *Critical point theorems for indefinite functionals*, Inv. Math. **52**, 241-273 (1979)
- [33] A.BESSE, *Einstein manifolds*. Springer-Verlag: Berline Heidelberg, 1987
- [34] R.L. BISHOP, *Infinitesimal convexity implies local convexity*, Indiana Math. J. **24** No. 2, 169-172 (1974)
- [35] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*. Masson Ed.: Paris, 1984
- [36] A.CANDELA, *Lightlike periodic trajectories in space-times*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CLXXI**, 131-158 (1996)
- [37] A.CANDELA, A.SALVATORE, *Closed geodesics in Riemannian manifolds with convex boundary*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **124**, 1247-1258 (1994)
- [38] A.CANDELA, A.SALVATORE, *Closed geodesics in stationary manifolds with strictly space-convex boundary*, Differential Geom. Appl.
- [39] A.CAPOZZI, D.FORTUNATO, C.GRECO, *Null geodesics on Lorentz manifolds*, in Nonlinear variational problems and partial differential equations (A.Marino-M.K.V.Murthy, Eds), Pitman Res. Notes Math. Ser. **320**, Longman 81-84 (1995)
- [40] M.P. DO CARMO, F.W. WARNER, *Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres*, J. Differential Geom. **4**, 133-144 (1970)
- [41] E.FADELL, S.HUSSEINI, *Category of loop spaces of open subsets in Euclidean Space*, Nonlinear Anal. **17**, 1153-1161 (1991)
- [42] J.FLORES, M.SÁNCHEZ, *Geodesic connectedness of multiwarped spacetimes*, preprint
- [43] J.FLORES, M.SÁNCHEZ, *Geodesic connectedness and conjugate points in GRW spacetimes*, to appear on J. Geom. Phys.
- [44] D.FORTUNATO, F.GIANNONI, A.MASIELLO, *A Fermat principle for stationary space-times with applications to light rays*, J. Geom. Phys. **15**, 159-188 (1995)

- [45] G.J. GALLOWAY, *Closed timelike geodesics*, Trans. Amer. Math. Soc. **285**, 379-388 (1984)
- [46] G.J. GALLOWAY, *Compact Lorentzian manifolds without closed nonspacelike closed geodesics*, Proc. Amer. Math. Soc. **98**, 119-123 (1986)
- [47] A. GERMINARIO, *Homoclinics on Riemannian manifolds with convex boundary*, Dynam. Systems Appl. **4**, 549-566 (1995)
- [48] A. GERMINARIO, F. GIANNONI, *Existence and multiplicity results for massive particles trajectories in a universe with boundary*, J. Math. Phys. **40**, 5835-5848 (1999)
- [49] R.GEROCH *Domains of dependence*, J. Math. Phys. **11**, 437-449 (1970)
- [50] F.GIANNONI, *Geodesics on nonstatic Lorentz manifolds of Reissner-Nordström type*, Math. Ann. **291**, 383-401 (1991)
- [51] F.GIANNONI, A.MASIELLO, *On the existence of geodesics on stationary Lorentz manifolds with convex boundary*, J. Funct. Anal. vol. 101 **2**, 340-369 (1991)
- [52] F.GIANNONI, A.MASIELLO, *Geodesics on Lorentzian manifolds with quasi-convex boundary*, Manuscripta Math. **78**, 81-96 (1993)
- [53] F.GIANNONI, A.MASIELLO, *Morse relations for geodesics on stationary Lorentzian manifolds*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **6**, 1-30 (1995)
- [54] F.GIANNONI, A.MASIELLO, *Geodesics on product Lorentzian manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12**, 27-60 (1995)
- [55] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *A variational theory for light rays in stably causal Lorentzian manifolds: regularity and multiplicity results*, Comm. Math. Phys. **187**, 375-415 (1997)
- [56] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *A timelike extension of Fermat's Principle in General Relativity and Applications*, Calc. Var. **6**, 263-283 (1998)
- [57] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *A Morse Theory for light rays on stably causal Lorentzian manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **69**, 359-412 (1998)
- [58] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *Convexity and the finiteness of the number of geodesics. Applications to the multiple-image effect*, Class. Quantum Grav. **16**, 731-748 (1999)
- [59] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *A Morse theory for massive particles and photons in general relativity*, to appear on J. Geom. Phys.
- [60] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, *The Fermat principle in General Relativity and applications*, preprint

- [61] F.GIANNONI, A.MASIELLO, P.PICCIONE, TAUSK, *A generalized index theorem for Morse–Strum systems and applications to semiriemannian geometry*, preprint
- [62] F.GIANNONI, P.PICCIONE, *An intrinsic approach to the geodesical connectedness of stationary Lorentzian manifolds*, *Comm. Anal. Geom.* vol. 7 **1**, 157-197 (1999)
- [63] W.B. GORDON, *On the equivalence of second order systems occurring in the Calculus of Variations*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **50**, 118-126 (1973)
- [64] W.B. GORDON, *The existence of geodesics joining two given points*, *J. Differential Geom.* **9**, 443-450 (1974)
- [65] W.B. GORDON, *Physical variational principles which satisfy the Palais–Smale condition*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **78**, 712-716 (1972)
- [66] D.GRASSI, *Metodi variazionali e topologici per lo studio di traiettorie di sistemi Lagrangiani su varietà Riemanniane*, tesi di laurea, Università di Bari (1993)
- [67] C.GRECO, *Periodic trajectories in static space–times*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **113**, 99-103 (1989)
- [68] C.GRECO, *Periodic trajectories for a class of Lorentz metrics of a time–dependent gravitational field*, *Math. Ann.* **287**, 515-521 (1990)
- [69] C.GRECO, *Multiple periodic trajectories on stationary space–times*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **CLXII**, 337-348 (1992)
- [70] D.GROMOLL, W.MEYER, *Geodesics on compact Riemannian manifolds*, *J. Differential Geom.* **3**, 455-510 (1969)
- [71] S.W.HAWKING, G.F.ELLIS *The Large Scale Structure of Space–Time*. Cambridge Univ. Press: London–New York, 1973
- [72] W.KLINGENBERG, *Lectures on closed geodesics*. Springer–Verlag: Berlin–Heidelberg–New York, 1978
- [73] L.A.LYUSTERNIK, A.FET, *Variational problems on compact manifolds*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **81**, 17-18 (1951)
- [74] L.A.LJUSTERNIK, L.SCHNIRELMAN, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationelles*. Actualites Sci. Industr. **188**: Paris, 1934
- [75] A.MARINO, G.PRODI, *Metodi perturbativi nella teoria di Morse*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **11** n.3 suppl., 1-32 (1975)
- [76] A.MASIELLO, *Timelike periodic trajectories in stationary Lorentz manifolds*, *Non-linear Anal.* **19**, 531-545 (1992)
- [77] A.MASIELLO, *On the existence of a closed geodesic in stationary Lorentz manifolds*, *J. Differential Equations* **104**, 48-59 (1993)

- [78] A.MASIELLO, Variational Methods in Lorentzian Geometry. Pitman Res. Notes Math. Ser. **309**, Longman: London, 1994
- [79] A.MASIELLO, *On the existence of a timelike periodic trajectory for a Lorentzian metric*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **125**, 807-815 (1995)
- [80] A.MASIELLO, L.PISANI, *Existence of a timelike periodic trajectory for a time dependent Lorentz metric*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sc. Mat. **XXXVI**, 207-222 (1990)
- [81] J. MILNOR, Morse Theory. Ann. of Math. Studies 51. Princeton Univ. Press: Princeton, 1963
- [82] E.MIRENGHI, M.TUCCI, *Periodic solutions with prescribed energy on non-complete Riemannian manifolds* J. Math. Anal. Appl. **199**, 334-348 (1996)
- [83] E.MIRENGHI, M.TUCCI, preprint
- [84] J.NASH, *The embedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63**, 20-63 (1956)
- [85] K.NOMIZU, H.OZEKI *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **12**, 889-891 (1961)
- [86] B.O'NEILL, Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity. Academic Press: New York-London, 1983
- [87] B.O'NEILL, The geometry of Kerr black holes. Wellesley: Massachusetts, A.K. Peter, 1995
- [88] R. S. PALAIS, *Morse Theory on Hilbert manifolds*, Topology **2**, 299-340 (1963)
- [89] R. S. PALAIS, *Ljusternik-Schnirelman Theory on Banach manifolds*, Topology **5**, 115-132 (1966)
- [90] R.S. PALAIS, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology **5**, 1-16 (1966)
- [91] R. S. PALAIS, S.SMALE, *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 165-172 (1964)
- [92] P.H.RABINOWITZ, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **65**, Amer. Math. Soc.: Providence, 1984
- [93] A. ROMERO, M. SÁNCHEZ, *On the completeness of geodesics obtained as a limit*, J. Math. Phys. **34**, 3768-3774 (1993)
- [94] R.K.SACHS, H.WU, General Relativity for Mathematicians. Springer-Verlag: New York, 1977

- [95] A.SALVATORE, *On the existence of infinitely many periodic solutions on non-complete Riemannian manifolds*, J. Differential Equations **120**, 198-214 (1995)
- [96] A. SALVATORE, *A two points boundary value problem on non complete Riemannian manifolds*, Proc. of "Variational Methods and Nonlinear Analysis" (A.Ambrosetti-K.C.Chang, Eds), Gordon & Breach, 149-160 (1995)
- [97] M. SÁNCHEZ, *Lorentzian manifolds admitting a Killing vector field*, Nonlinear Anal. **1**, 643-654 (1997)
- [98] M. SÁNCHEZ, *Geodesic connectedness in Generalized Reissner-Nordström type Lorentz manifolds*, Gen. Relativity Gravitation **29**, 1023-1037 (1997)
- [99] M. SÁNCHEZ, *Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field*, Trans. Amer. Math. Soc. **349**, 1063-1080 (1997)
- [100] M. SÁNCHEZ, *Some remarks on Causality Theory and Variational methods in Lorentzian Geometry*, Conf. Semin. Mat. Univ. Bari **265**, 1-12 (1997)
- [101] M. SÁNCHEZ, *On the geometry of Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation **30**, 915-932 (1998)
- [102] M. SÁNCHEZ, *Geodesics in static spacetimes and t -periodic trajectories*, Nonlinear Anal. **35**, 677-686 (1999)
- [103] M. SÁNCHEZ, *Timelike periodic trajectories in spatially compact Lorentz manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 3057-3066 (1999)
- [104] M. SÁNCHEZ, *Geodesic connectedness of semi-Riemannian manifolds*, Proc. III World Congress of Nonlinear Analysis, Catania, Italy, 2000
- [105] J.T. SCHWARTZ, *Generalizing the Ljusternik-Schnirelman theory of critical points* Comm. Pure Appl. Math. **XVII**, 307-315 (1964)
- [106] H.J. SEIFERT, *Global connectivity by timelike geodesics*, Z. Naturfor. **22a**, 1356 (1970)
- [107] J.P.SERRE, *Homologie singuliere des espace fibres*, Ann. of Math. **54**, 425-505 (1951)
- [108] E.H.SPANIER, Algebraic Topology. McGraw-Hill: New York, 1966
- [109] M. STRUWE, Variational Methods. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 1990
- [110] F.J. TIPLER, *Existence of closed timelike geodesics in Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 633-644 (1979)
- [111] K. UHLENBECK, *A Morse theory for geodesics on a Lorentz manifold*, Topology **14**, 69-90 (1975)

- [112] E.W.C. VAN GROESEN, *Analytical Mini-max Methods for Hamiltonian Brake Orbits of Prescribed Energy*, J. Math. Anal. Appl. **132**, 1-12 (1988)
- [113] M.VIGUÉ-POIRRIER, D.SULLIVAN, *The homology theory of the closed geodesic problem*, J. Differential Geom. **11**, 633-644 (1976)
- [114] C.VITERBO, *Indice de Morse des points critiques obtenus par minmax*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5**, 221-225 (1988)



Biblioteca Universitaria de Granada



01066544