

T S 144

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 613378314
Nº Copia 15570691



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 19/11/01
ENTRADA NUM. 4440

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

*Algoritmos de Estimación en Sistemas
con Observaciones Inciertas*

Teresa M^a García Muñoz

Tesis Doctoral

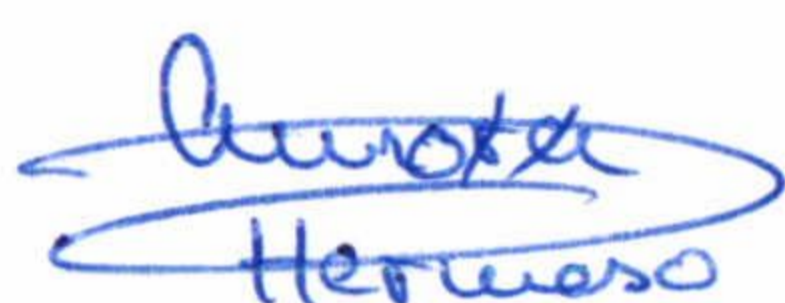
Granada, 2001

Algoritmos de Estimación en Sistemas con Observaciones Inciertas

Memoria presentada por
Teresa M^a García Muñoz
para optar al grado de
Doctor por la Universidad
de Granada

V^o B^o

Directoras de Tesis



Dra. D^a Aurora Hermoso Carazo



Dra. D^a Josefa Linares Pérez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Algoritmos de Estimación en Sistemas con Observaciones Inciertas

El doctorando



Teresa Mª García Muñoz

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Índice

Introducción General	iii
1 Sistemas Estocásticos Lineales Discretos	1
1.1 Introducción	1
1.2 Ecuación Dinámica de un Sistema Lineal en Tiempo Discreto .	3
1.3 Propiedades Cualitativas	4
1.3.1 Estabilidad	4
1.3.2 Controlabilidad	7
1.3.3 Observabilidad	8
1.4 Estimación Óptima en Sistemas Estocásticos Lineales Discretos	10
1.5 Filtrado de Kalman	13
1.5.1 Técnica de Proyecciones Ortogonales	13
1.5.2 Algoritmo Recursivo	15
2 Estimación Lineal en Sistemas con Observaciones Inciertas	17
2.1 Introducción	17
2.2 Descripción de Sistemas con Observaciones Inciertas	20
2.3 Sistemas con Error de Observación Blanco	22
2.3.1 Perturbación del Estado Blanca	23
2.3.2 Perturbación del Estado Correlada en el Tiempo	26
2.4 Sistemas con Error de Observación Correlado en el Tiempo . .	29
2.4.1 Incertidumbre Descrita por Variables Aleatorias Inde- pendientes	31
2.4.2 Incertidumbre Descrita por Variables Aleatorias no In- dependientes	46
2.5 Sistemas con Ruidos Aditivos Correlados	49

3 Estimación Lineal mediante Observaciones Inciertas usando Funciones de Covarianza	67
3.1 Introducción	67
3.2 Observaciones afectadas por Ruido Blanco más Ruido Coloreado	71
3.3 Ruido de Observación Correlado con la Señal	74
3.3.1 Predictor de la Señal	76
3.3.2 Filtro de la Señal	83
3.4 Señal y Ruido Correlados en un Intervalo de Tiempo Finito . .	86
Ejemplo Numérico	93
Bibliografía	107

Introducción General

Un sistema se define, siguiendo las normas de la IEEE, como una *combinación de componentes que actúan conjuntamente*. El objetivo central en el estudio de un sistema consiste en determinar los cambios que experimenta a través del tiempo, por influencia de perturbaciones externas y/o internas. Dichas perturbaciones, en muchas situaciones reales, son aleatorias, lo que conlleva que, tanto la observación del sistema como la señal descrita por el mismo tengan también carácter aleatorio. Estos sistemas se denominan *sistemas estocásticos* y uno de los principales problemas abordados en ellos es la estimación de la señal a partir de las observaciones.

Los principios de la Teoría de Estimación pueden situarse en el siglo XVII y son atribuidos a Galileo Galilei. Un siglo más tarde, concretamente en 1795, Gauss desarrolló el método conocido como mínimos cuadrados, lo que le permitió determinar la órbita del asteroide Ceres. Los resultados de este descubrimiento no fueron publicados hasta 1809. Este retraso en la publicación provocó controversia en la asignación del método ya que, tres años antes y de forma independiente, Legendre inventó y publicó también

UNIVERSIDAD DE GRANADA

05 NOV. 2001

COMISION DE DOCTORADO

esta técnica. A pesar de todo, los historiadores han encontrado evidencias suficientes para dar prioridad a Gauss.

Los primeros investigadores que desarrollaron un método de estimación mínimo cuadrática para procesos estocásticos surgen en el siglo XX. En 1939, Kolmogorov aborda el problema de predicción para procesos estacionarios en tiempo discreto. Sus resultados fueron extendidos por Krein (1945) al caso continuo. En 1942, Wiener formula el problema de predicción y filtrado en tiempo continuo para proceso escalares estacionarios, obteniendo expresiones para los estimadores óptimos. Utilizando como información las funciones de covarianza de la señal y la perturbación, y a partir del Lema de Proyecciones Ortogonales dedujo una ecuación, denominada de Wiener-Hopf, cuya solución proporciona una expresión para la función impulso-respuesta del estimador de la señal. Curiosamente, el problema de solucionar dicha ecuación ya había sido abordado por él mismo y Hopf en 1931.

Si bien no es difícil extender la ecuación de Wiener-Hopf al caso de procesos no estacionarios, la obtención de su solución es más complicada, no existiendo un método general para resolverla. Son muchos los trabajos que trataron este problema, sin embargo, como comenta Kailath [8], la puesta en práctica de los resultados era complicada y la aplicación al caso vectorial difícil de llevar a cabo. Estos inconvenientes toman relevancia, sobre todo, a finales de los años 50 con la determinación de órbitas de satélites. Uno de los primeros investigadores en aportar algoritmos recursivos para este problema fue Swerling (1959).

En 1960, Kalman [9] cambia la formulación del problema de estimación especificando, en vez de la función de covarianza de la señal, un modelo

que describe el comportamiento interno del sistema, denominado *modelo de espacio de estados*. Con esta nueva formulación, solucionó el problema obteniendo un algoritmo recursivo para el filtro de menor error cuadrático medio del estado. Kalman deduce dicho algoritmo suponiendo que los ruidos aditivos del estado y la observación son blancos y mutuamente independientes. El carácter restrictivo de estas hipótesis hace necesario el estudio de casos más generales, como son, por ejemplo, el caso en el que los ruidos no son blancos (Jazwinski [7], Meditch [17]) o cuando se suprime la hipótesis de independencia entre ambos ruidos (Kalman [10], Kowalski y Szynal [12]).

Las ventajas computacionales que aporta la recursividad del filtro de Kalman son indudables; sin embargo, para su aplicación es necesario conocer el modelo de espacio de estados, lo que en muchas situaciones prácticas es difícil o imposible. En la década de los 80, Nakamori retoma el problema de filtrado de la señal. Bajo la hipótesis de que la matriz de covarianzas de este proceso tiene forma de núcleo semi-degenerado, obtiene algoritmos recursivos para la determinación de estimadores de menor error cuadrático medio, sin necesidad de especificar un modelo de espacio de estados. Para su deducción, Nakamori traslada el problema de resolver la ecuación de Wiener-Hopf al de la resolución de un conjunto de ecuaciones en diferencias.

En los sistemas estudiados por Kalman y Nakamori, el proceso que se desea estimar siempre forma parte de las observaciones disponibles para su estimación. Sin embargo, en muchas situaciones reales, esta presencia no está asegurada. A este tipo de sistemas se les denomina *Sistemas con Observaciones Inciertas*. Concretamente, esta terminología describe sistemas en los que la señal, en la ecuación de la observación, no sólo se ve afectada por un

ruido aditivo, sino que, además, está perturbada por un ruido multiplicativo modelizado por una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli.

Como indicaron Jaffer y Gupta [6], la obtención del estimador óptimo del estado en sistemas con observaciones inciertas no es computacionalmente simple, por lo que los diferentes estudios sobre la estimación del estado en estos sistemas se centran en la obtención de estimadores subóptimos, tales como el lineal. En 1969, Nahi [18] dedujo estimadores lineales de menor error cuadrático medio del estado bajo la hipótesis de que la incertidumbre se describe mediante una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli. En 1979, Hadidi y Schwartz [3] abordan el mismo problema suprimiendo esta condición de independencia. Ambos trabajos consideran sistemas donde los ruidos aditivos del estado y la observación son sucesiones blancas y mutuamente independientes. En 1994, Hermoso y Linares [5] generalizan los resultados de Nahi considerando que ambos ruidos están correlados en un instante.

Por otro lado, en diversos trabajos ([19], [20], [21]), Nakamori obtiene estimadores de la señal basándose en la información proporcionada por las funciones de covarianza de la señal y los ruidos, sin necesidad de conocer el modelo de espacio de estados. En 2001, Caballero et al. [2] generalizan el resultado de Nakamori [20] obteniendo algoritmos recursivos para los estimadores de la señal en sistemas con observaciones inciertas bajo las hipótesis de que las observaciones están afectadas por ruido blanco y ruido coloreado, y que tanto la matriz de covarianzas de la señal como la del ruido coloreado se expresan en forma de núcleo semi-degenerado.

Centrándonos en sistemas con observaciones inciertas, en esta memoria

generalizamos los resultados comentados anteriormente, tanto cuando el modelo de espacio de estados es conocido, como cuando se usa como información para la obtención de los estimadores las funciones de covarianza de los procesos que intervienen en el sistema.

La memoria se estructura en tres capítulos:

Capítulo 1 (Sistemas Estocásticos Lineales Discretos). En este capítulo, tras describir la ecuación dinámica de estos sistemas, planteamos el problema de estimación óptima del estado a partir de una serie de observaciones. Finalmente, presentamos el algoritmo de predicción y filtrado obtenido por Kalman [9].

Capítulo 2 (Estimación Lineal en Sistemas con Observaciones Inciertas). Una vez descrita la ecuación dinámica de estos sistemas, en este capítulo, abordamos el problema de estimación lineal del estado en sistemas con ruido de observación blanco; tras resumir los trabajos de Nahi [18] y Hadidi y Schwartz [3], generalizamos sus resultados considerando que la perturbación del estado está correlada en el tiempo. Seguidamente, se considera el caso en que el ruido de observación no es blanco. Por último, al abordar el caso en el que los ruidos aditivos del estado y la observación están correlados en un intervalo de tiempo finito, se generalizan los resultados de Hermoso y Linares [5].

Capítulo 3 (Estimación Lineal mediante Observaciones Inciertas usando Funciones de Covarianza). Tras resumir brevemente los resultados de Caballero et al. [2], en este capítulo, tratamos el problema de estimación lineal de la señal, en sistemas en los que la señal y el ruido de observación están correlados en el mismo instante. Por último, abordamos el caso en que estos

procesos están correlados en un intervalo de tiempo finito.

Para finalizar esta memoria, presentamos un ejemplo numérico en el que se aplican algunos de los resultados propuestos.

Capítulo 1

Sistemas Estocásticos Lineales

Discretos

1.1 Introducción

Un *sistema* es un conjunto de variables que se interrelacionan y que a la vez pueden considerarse como un todo. Usualmente, el interés en el estudio de un sistema se centra en determinar los cambios que experimenta a través del tiempo por influencia de agentes externos y/o internos. Esto constituye el objetivo de la Teoría de Sistemas Dinámicos.

En el estudio de un sistema cabe destacar las siguientes etapas:

(a) *Modelización*. Consiste en encontrar un modelo que refleje bien las características del sistema y facilite su estudio. En esta etapa, se definen las variables que intervienen en el sistema: *variables de entrada*, que representan los estímulos externos; *variables internas*, las propias del sistema, y *variables de salida*, que proporcionan la información real que se obtiene de él.

(b) *Descripción matemática.* En esta etapa se trata de encontrar las ecuaciones matemáticas que representen las relaciones existentes entre las variables que intervienen en el sistema. Existen básicamente dos tipos de descripciones: *descripción externa* o *entrada-salida* y *descripción interna* o *con variables de estado*. En la primera se describe la relación entre las variables de entrada y las de salida, sin tener en cuenta la estructura propia del sistema. En la descripción interna, además de la relación entrada-salida, se especifica el comportamiento interno del sistema. Para dar esta descripción es preciso definir, además de las variables citadas en la descripción externa, la *variable estado*.

(c) *Análisis.* Consiste en determinar la solución de la ecuación matemática que representa al sistema (*análisis cuantitativo*) y estudiar propiedades generales del mismo (*análisis cualitativo*).

La descripción interna de un sistema se realiza mediante dos ecuaciones: la *ecuación del estado*, que liga al estado con las variables de entrada, y la *ecuación de la observación*, que relaciona las variables de salida con el estado del sistema. Al conjunto de estas dos ecuaciones se le denomina *ecuación dinámica*.

Cuando la ecuación dinámica del sistema no está perturbada por ninguna entrada aleatoria, se dice que el sistema es *determinístico*. Sin embargo, en un gran número de situaciones reales, un sistema dinámico está afectado por perturbaciones aleatorias; en tal caso, tanto el estado como la observación tienen también carácter aleatorio. Este tipo de sistemas se denomina *sistemas estocásticos*.

Nuestro estudio se centrará en sistemas estocásticos lineales en tiempo

discreto. Tras describir su ecuación dinámica (Sección 1.2) y hacer un breve resumen de algunas de sus propiedades (Sección 1.3), consideramos el problema de estimación óptima en este tipo de sistemas, planteando el problema general de estimar el estado a partir de una serie de observaciones (Sección 1.4). Por último, presentamos el algoritmo de predicción y filtrado obtenido por Kalman (Sección 1.5).

1.2 Ecuación Dinámica de un Sistema Lineal en Tiempo Discreto

Supondremos que todas las variables o vectores aleatorios que intervienen en la descripción de un sistema estocástico están definidos sobre un espacio de probabilidad común (Ω, \mathcal{A}, P) y toman valores en espacios euclídeos finito dimensionales.

Consideremos un sistema estocástico lineal en tiempo discreto cuya ecuación dinámica está dada por

Ecuación del estado

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0 \quad (1.2.1)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1.2.2)$$

Ecuación de la observación

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0 \quad (1.2.3)$$

donde $\{x(k), k \geq 0\}$ es un proceso n -dimensional que describe el *estado* del sistema, $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido p -dimensional que representa la

UNIVERSIDAD DE GRANADA

05 NOV. 2001

COMISION DE DOCTORADO

perturbación del estado, $\{z(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional que describe la *salida* u *observación* del sistema y $\{v(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido m -dimensional, el *error de observación*. Por último, $\Phi(k+1, k)$, $\Gamma(k+1, k)$ y $H(k)$ son matrices determinísticas, de dimensiones acordes al vector que acompañan, denominadas *matriz de transición del estado*, *matriz de ponderación de la perturbación* y *matriz de observación*, respectivamente.

1.3 Propiedades Cualitativas

1.3.1 Estabilidad

En términos generales, la estabilidad es una propiedad de los sistemas dinámicos que estudia la permanencia de la trayectoria del estado alrededor de un cierto valor, denominado estado de equilibrio, cuando dicha trayectoria no está afectada por ninguna perturbación externa.

Diremos que un vector x_e es un *estado de equilibrio* de un sistema dinámico si, una vez que el estado alcanza dicho valor, su trayectoria permanece en él en instantes futuros, siempre que el sistema no sea perturbado. Por tanto, el estudio de la estabilidad se centra en el análisis del comportamiento de la parte homogénea de la ecuación del estado

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k),$$

y un estado de equilibrio debe verificar

$$x_e = \Phi(k+1, k)x_e.$$

Si en un determinado instante k_0 el estado está “cerca” de un estado de equilibrio x_e , en instantes sucesivos, puede permanecer alrededor de ese va-

lor, o bien, alejarse de él. El objetivo es estudiar condiciones sobre la matriz de transición que garanticen que si el sistema en un instante k_0 “arranca” cerca del estado de equilibrio, cuando el tiempo avance, permanezca próximo o, incluso, converja hacia él. Un estado de equilibrio que verifique estas propiedades se denomina *estable* y *asintóticamente estable*, respectivamente. A continuación, siguiendo los textos de Anderson y Moore [1], Kalman y Bertram [11] y Szidarovsdy y Terry [23], definimos formalmente estos conceptos.

Definición 1.3.1 Un estado de equilibrio x_e es *estable* si, para un instante k_0 arbitrario y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, k_0)$ tal que, si $\|x(k_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon, k_0)$, entonces $\|x(k) - x_e\| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. \square

Definición 1.3.2 Un estado de equilibrio x_e es *asintóticamente estable* si es estable y, además, para todo k_0 , existe $\delta_1(k_0)$ tal que, si $\|x(k_0) - x_e\| < \delta_1(k_0)$, entonces $\|x(k) - x_e\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. \square

Cuando $\delta(\varepsilon, k_0)$ y $\delta_1(k_0)$ son independientes de k_0 , se tiene la estabilidad uniforme y la estabilidad asintótica uniforme, respectivamente, como se especifica en las siguientes definiciones.

Definición 1.3.3 Un estado de equilibrio x_e es *estable uniformemente* si, para un instante k_0 arbitrario y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que, si $\|x(k_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon)$, entonces $\|x(k) - x_e\| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. \square

Definición 1.3.4 Un estado de equilibrio x_e es *asintóticamente estable uniformemente* si es uniformemente estable y, además, para todo k_0 , existe δ_1 tal que, si $\|x(k_0) - x_e\| < \delta_1$, entonces $\|x(k) - x_e\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. \square

Observemos que si la solución nula, $x(k) = 0$, es estable en alguno de los sentidos definidos anteriormente, cualquier otra solución también lo será en el mismo sentido, y se habla entonces de estabilidad de la ecuación del estado.

A continuación, siguiendo el texto de Jazwinski [7], y notando por

$$\begin{aligned}\Phi(k, l) &= \Phi(k, k-1) \cdots \Phi(l+1, l), \quad k > l \geq 0 \\ \Phi(k, k) &= I,\end{aligned}$$

se definen los distintos tipos de estabilidad para la ecuación del estado en términos de la matriz de transición.

Definición 1.3.5

1. La ecuación del estado es estable si y sólo si existe una constante α tal que

$$\|\Phi(k, 0)\| \leq \alpha, \quad k \geq 0.$$

2. La ecuación del estado es asintóticamente estable si y sólo si es estable y se verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(k, 0)\| = 0.$$

3. La ecuación del estado es estable uniformemente si y sólo si existe una constante β tal que

$$\|\Phi(k, l)\| \leq \beta, \quad k \geq l \geq 0.$$

4. La ecuación del estado es asintóticamente estable uniformemente si y sólo si existen c_1 y c_2 constantes positivas, tales que

$$\|\Phi(k, 0)\| \leq c_1 e^{-c_2 k}, \quad k \geq 0.$$

□

1.3.2 Controlabilidad

En el estudio de la controlabilidad, nos planteamos la posibilidad de transferir cualquier estado del sistema a otro estado prefijado, en un intervalo de tiempo finito. Un estudio exhaustivo de esta propiedad para sistemas determinísticos puede verse en Kwakernak y Sivan [13] y Meditch [17].

Claramente, el estudio de la controlabilidad de un sistema estocástico se refiere únicamente a la ecuación del estado y, para el tipo de sistemas descritos en la Sección 1.2, la trayectoria del estado es controlable mediante la manipulación del término $\Gamma(k+1, k)\omega(k)$.

Si consideramos que la perturbación del estado $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $Q(k)$, la transferencia del estado desde un instante j al instante k , se realiza mediante $\sum_{i=j}^{k-1} \Phi(k, i+1)\Gamma(i+1, i)\omega(i)$, cuya matriz de covarianzas viene dada por

$$C(k, j) = \sum_{i=j}^{k-1} \Phi(k, i+1)\Gamma(i+1, i)Q(i)\Gamma^T(i+1, i)\Phi^T(k, i+1).$$

Esta matriz se denomina *matriz de controlabilidad* y, a partir de ella, se definen los siguientes conceptos (Jazwinski [7], McGarty [16]).

Definición 1.3.6 Un sistema lineal estocástico es *completamente controlable* si y sólo si $C(k, 0) > 0$ para algún $k > 0$.

□

Definición 1.3.7 Un sistema lineal estocástico es *completamente controlable uniformemente* si existe un entero positivo N y constantes positivas α y β tal que

$$\alpha I \leq C(k, k - N) \leq \beta I, \quad k \geq N.$$

□

1.3.3 Observabilidad

En el estudio de la observabilidad en sistemas determinísticos, nos cuestionamos bajo qué condiciones es posible determinar de forma única el estado de un sistema conociendo las entradas y salidas del mismo. Un análisis detallado de la propiedad de observabilidad para estos sistemas se realiza en Kwakernak y Sivan [13] y Meditch [17].

En sistemas estocásticos, el concepto de observabilidad está íntimamente relacionado con el de estimación del estado a partir de unas determinadas observaciones.

Supongamos que, dadas las observaciones $\{z(j), \dots, z(k)\}$ del sistema descrito en la Sección 1.2, deseamos obtener el estimador de mínimos cuadrados del estado teniendo como única información dichas observaciones.

Concretamente, si se consideran sistemas en los que el proceso error de observación $\{v(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $R(k)$, y el estado no está afectado por ninguna perturbación ($\omega(k) = 0, k \geq 0$), el Método Clásico de Mínimos Cuadrados concluye que los estimadores $\{x^*(j), \dots, x^*(k)\}$ son aquellos que minimizan la función

$$J(k, j) = \frac{1}{2} \sum_{i=j}^k [z(i) - H(i)\Phi(i, k)x(k)]^T R^{-1}(i) [z(i) - H(i)\Phi(i, k)x(k)]$$

con respecto a $x(k)$, donde $\Phi(i, k) = \Phi^{-1}(k, i)$.

Entonces, el valor $x^*(k)$ debe verificar

$$\sum_{i=j}^k \Phi^T(i, k) H^T(i) R^{-1}(i) [z(i) - H(i) \Phi(i, k) x^*(k)] = 0, \quad (1.3.1)$$

y definiendo

$$W(k, j) = \sum_{i=j}^k \Phi^T(i, k) H^T(i) R^{-1}(i) H(i) \Phi(i, k),$$

la solución de (1.3.1) está dada por

$$x^*(k) = W^{-1}(k, j) \sum_{i=j}^k \Phi^T(i, k) H^T(i) R^{-1}(i) z(i).$$

Claramente, la existencia de este estimador está ligada a la no singularidad de la matriz $W(k, j)$, denominada *matriz de observabilidad*. A partir de esta matriz se definen los siguientes conceptos (Jazwinski [7], McGarty [16]).

Definición 1.3.8 Un sistema lineal estocástico es *completamente observable* si y sólo si $W(k, 0) > 0$, para algún $k > 0$. □

Definición 1.3.9 Un sistema lineal estocástico es *completamente observable uniformemente* si existe un entero N y constantes positivas ρ y δ tal que

$$\rho I \leq W(k, k - N) \leq \delta I, \quad k \geq N. \quad \square$$

1.4 Estimación Óptima en Sistemas Estocásticos Lineales Discretos

Consideremos el problema de la estimación del estado $x(k)$ a partir de una serie de observaciones $\{z(0), \dots, z(j)\}$ en el sistema estocástico lineal discreto (1.2.1)-(1.2.3).

Dependiendo de la relación existente entre el instante en que se estima el estado (k) y el instante en el que se realiza la última observación (j), el problema de estimación adopta las siguientes denominaciones:

(a) *Problema de Filtrado*, si $k = j$. Se determina un estimador de $x(k)$ a partir de observaciones dadas hasta el instante actual. El estimador se denomina *Filtro*.

(b) *Problema de Predicción o de Extrapolación*, si $k > j$. Se calcula un estimador del estado $x(k)$ basado en observaciones anteriores. Al estimador se le conoce por *Predictor*.

(c) *Problema de Suavizamiento o de Interpolación*, si $k < j$. Se obtiene un estimador de $x(k)$ considerando observaciones anteriores y posteriores al instante k . El estimador se denomina *Suavizador*.

Es claro que la distribución condicionada de $x(k)$ dadas $\{z(0), \dots, z(j)\}$ engloba toda la información sobre el estado contenida en las observaciones y, por tanto, la solución definitiva del problema de estimación requiere el conocimiento de dicha distribución de probabilidad.

Una vez determinada la distribución condicionada, distintas características de ella como, por ejemplo, la media, la moda o la mediana, pueden utilizarse como estimador del estado; surge entonces la cuestión de cuál de

estas debe elegirse y se precisa, para ello, un criterio que permita determinar el estimador óptimo.

Intuitivamente, si no existe diferencia entre el estado y el estimador, dicho estimador es el óptimo; sin embargo, esto, en general, no ocurre y lo que se persigue es que esta diferencia sea lo menor posible. Si notamos por $\hat{x}(k/j)$ al estimador de $x(k)$ basado en $\{z(0), \dots, z(j)\}$, el error cometido es $e(k/j) = x(k) - \hat{x}(k/j)$ y el estimador óptimo será aquel que minimice el error de estimación o, más bien, alguna medida de dicho error. Para determinar esta medida de forma razonable, se asigna una pérdida o penalización al error de estimación, considerando una función real de n -variables L , con las siguientes propiedades:

1. $L(0) = 0$.
2. Existe una función real, no negativa y convexa, δ , tal que, si $\delta(e^1(k/j)) \leq \delta(e^2(k/j))$, entonces $L(e^1(k/j)) \leq L(e^2(k/j))$.
3. $L(e(k/j)) = L(-e(k/j))$.

Una función verificando estas propiedades se denomina *función de pérdida admisible*.

Debido al carácter aleatorio de $L(e(k/j))$, una medida útil de la pérdida global es la pérdida media y, por tanto, el estimador óptimo bajo dicha función de pérdida es aquel cuyo error de estimación minimiza la pérdida esperada.

Sherman [22], bajo determinadas condiciones sobre la distribución condicionada del estado dadas las observaciones, obtuvo la siguiente caracterización del estimador óptimo.

Teorema 1.4.1 *Si la función de distribución condicionada de $x(k)$ dadas las observaciones $\{z(0), \dots, z(j)\}$ es simétrica respecto a su media y convexa para valores menores o iguales que la media, el estimador óptimo, para cualquier función de pérdida admisible, es*

$$\hat{x}(k/j) = E [x(k)/z(0), \dots, z(j)]. \quad \square$$

Como consecuencia de este teorema, si la distribución condicionada de $x(k)$ dadas $\{z(0), \dots, z(j)\}$ es gaussiana, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.4.2 *Si los procesos $\{x(k), k \geq 0\}$ y $\{z(i), i = 0, \dots, j\}$ son conjuntamente gaussianos, entonces el estimador óptimo, bajo cualquier función de pérdida admisible, es*

$$\hat{x}(k/j) = E [x(k)/z(0), \dots, z(j)]. \quad \square$$

El Teorema 1.4.1 proporciona la solución del problema de estimación para cualquier función de pérdida admisible, aunque la familia de procesos estocásticos a los que se le puede aplicar este resultado está limitada debido a la hipótesis sobre la función de distribución condicionada. Sin embargo, si nos restringimos a funciones de pérdida cuadráticas, definidas por

$$L(e(k/j)) = e^T(k/j)e(k/j),$$

se obtiene un resultado análogo para una familia más amplia de procesos estocásticos.

Teorema 1.4.3 *Si L es una función de pérdida cuadrática, entonces el estimador óptimo de $x(k)$ es*

$$\hat{x}(k/j) = E [x(k)/z(0), \dots, z(j)]. \quad \square$$

En este caso, el estimador óptimo se denomina *estimador de menor error cuadrático medio*.

1.5 Filtrado de Kalman

Según los resultados expuestos en la sección anterior, bajo las hipótesis de los Teoremas 1.4.1 y 1.4.3, la solución del problema de estimación está dada por la esperanza condicionada del estado dadas las observaciones.

En el caso gaussiano, la esperanza condicionada es una función lineal de las observaciones y, por tanto, el estimador óptimo, bajo cualquier función de pérdida admisible, es el estimador lineal de menor error cuadrático medio. Uno de los primeros investigadores que trataron este caso fue Kalman [9], quien, en 1960, mediante la Técnica de Proyecciones Ortogonales, obtuvo un algoritmo recursivo para el cálculo de dicho estimador.

Antes de presentar los resultados obtenidos por Kalman, realizamos un breve resumen de la Técnica de Proyecciones Ortogonales. Dicha técnica proporciona un método para la obtención de algoritmos recursivos para el cálculo de estimadores lineales de menor error cuadrático medio.

1.5.1 Técnica de Proyecciones Ortogonales

Sea $L^2((\Omega, \mathcal{A}, P); R^n)$ el espacio de clases de equivalencia de vectores aleatorios n -dimensionales de segundo orden, y sea $\Xi(j)$ el subespacio lineal generado por las observaciones $\{z(0), \dots, z(j)\}$. Es conocido que la proyección ortogonal de $x(k)$ sobre el subespacio $\Xi(j)$ es el estimador lineal de menor error cuadrático medio de $x(k)$, $\hat{x}(k/j)$, basado en $\{z(0), \dots, z(j)\}$.

Los siguientes resultados, consecuencia del Teorema de la Proyección Ortogonal, serán básicos en la deducción de algoritmos recursivos para la obtención del estimador lineal de menor error cuadrático medio.

Teorema 1.5.1 (*Lema de Proyecciones Ortogonales*). $\hat{x}(k/j)$ es el estimador lineal de menor error cuadrático medio de $x(k)$ dado $\{z(0), \dots, z(j)\}$ si y sólo si

$$E [[x(k) - \hat{x}(k/j)] z^T(i)] = 0, \quad i = 0, \dots, j.$$

□

Teorema 1.5.2 Si $Z(j)$ es el subespacio lineal de $L^2((\Omega, \mathcal{A}, P); R^n)$ generado por el vector $z(j) - \hat{z}(j/j-1)$ siendo $\hat{z}(j/j-1)$ la proyección ortogonal de $z(j)$ sobre $\Xi(j-1)$, entonces

$$\Xi(j) = \Xi(j-1) \oplus Z(j)$$

donde \oplus indica suma directa de subespacios.

□

Como consecuencia del Teorema 1.5.2, se obtiene la siguiente expresión recursiva para el cálculo del estimador lineal de menor error cuadrático medio

$$\hat{x}(k/j) = \hat{x}(k/j-1) + F(k, j) [z(j) - \hat{z}(j/j-1)]$$

siendo $F(k, j)$ una matriz a determinar, denominada *matriz de ganancia del estimador*.

La expresión que multiplica a la matriz de ganancia, diferencia entre la observación $z(j)$ y su proyección sobre el subespacio $\Xi(j-1)$, se denomina *innovación*, y representa la nueva información que aporta la última observación para la estimación de $x(k)$.

1.5.2 Algoritmo Recursivo

Como se ha indicado, Kalman [9], en 1960, dedujo un algoritmo recursivo para la obtención del filtro lineal de menor error cuadrático medio, mediante la técnica descrita anteriormente.

Aunque en su estudio, Kalman supuso que la ecuación de la observación no estaba afectada por ninguna perturbación, en el algoritmo que describimos a continuación, supondremos que las observaciones están perturbadas por un ruido blanco gaussiano. La descripción del sistema se realiza, por tanto, mediante la siguiente ecuación dinámica

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0 \\x(0) &= x_0 \\z(k) &= H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0\end{aligned}$$

donde x_0 es un vector gaussiano centrado con matriz de covarianza $P(0)$; $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ son sucesiones blancas gaussianas centradas con matrices de covarianzas $Q(k)$ y $R(k)$, respectivamente, siendo $R(k)$ definida positiva.

Supondremos además que el estado inicial y las sucesiones $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

El siguiente teorema presenta el algoritmo de predicción en una etapa y filtrado deducido por Kalman; la demostración, utilizando diversas técnicas, puede verse en Tanizaki [24].

Teorema 1.5.3 *El algoritmo para los problemas de filtrado y predicción de menor error cuadrático medio está dado por*

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + F(k)[z(k) - H(k)\hat{x}(k/k-1)] \quad k \geq 0 \quad (1.5.1)$$

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k), \quad k \geq 0 \quad (1.5.2)$$

$$\hat{x}(0/-1) = 0$$

donde la matriz de ganancia del filtro, $F(k)$, verifica

$$F(k) = P(k/k-1)H^T(k) [R(k) + H(k)P(k/k-1)H^T(k)]^{-1} \quad k \geq 0 \quad (1.5.3)$$

y las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y predicción, $P(k/k)$ y $P(k/k-1)$, respectivamente, satisfacen

$$\begin{aligned} P(k/k) &= [I - F(k)H(k)]P(k/k-1), \quad k \geq 0 \\ P(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)P(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

$$P(0/-1) = P(0).$$

□

Observemos que las ecuaciones (1.5.3)-(1.5.4), determinan el algoritmo para el cálculo recursivo de las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y predicción. Este proceso se efectúa independientemente de las ecuaciones (1.5.1) y (1.5.2); por tanto, el estudio de la bondad de los estimadores puede realizarse antes que el cálculo de los mismos.

Capítulo 2

Estimación Lineal en Sistemas con Observaciones Inciertas

2.1 Introducción

Dado el carácter determinístico de la matriz de observación en los sistemas considerados en el capítulo anterior, el proceso que se desea estimar, es decir, el estado del sistema, siempre forma parte de las observaciones disponibles para su estimación. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, la presencia del vector estado en la ecuación de la observación no está asegurada. Por ejemplo, consideremos un sistema de comunicación cuyo canal experimenta interrupciones aleatorias; debido a ellas, las observaciones registradas pueden estar formadas por señal más ruido, o únicamente por ruido. A este tipo de sistemas, cuyas observaciones pueden contener al estado con probabilidad menor que uno, se les denomina *Sistemas con Observaciones Inciertas*. Concretamente, bajo esta terminología se engloban sistemas en los

que el estado, en la ecuación de la observación, no sólo se ve perturbado por un ruido aditivo, sino que además, está afectado por un ruido multiplicativo, siendo este una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli.

Como comentamos en el Capítulo 1, en sistemas con certidumbre en las observaciones, cuando los ruidos y el estado inicial son gaussianos y mutuamente independientes, el estimador óptimo para cualquier función de pérdida admisible es el estimador lineal de menor error cuadrático medio. En sistemas con observaciones inciertas, aún con estas hipótesis, la distribución conjunta del estado y las observaciones no es gaussiana y, por tanto, el estimador óptimo no es una función lineal de las observaciones.

La obtención del estimador óptimo del estado en sistemas con observaciones inciertas, como indicaron Jaffer y Gupta [6], no es computacionalmente simple; por ello, los diferentes estudios sobre la estimación del estado en estos sistemas tienen como objetivo obtener estimadores subóptimos, tales como el lineal.

Nahi [18], en 1969, obtuvo estimadores lineales de menor error cuadrático medio, bajo la suposición de que la incertidumbre estaba descrita por una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli. En 1979, Hadidi y Schwartz [3] suprimen la condición de independencia entre las variables de esta sucesión y abordan el mismo problema. Tras demostrar que, en general, bajo esta hipótesis no existían estimadores recursivos, obtuvieron una condición necesaria y suficiente para su existencia.

El filtro de Kalman para sistemas con certidumbre en las observaciones, presentado en el Teorema 1.5.3, supone que los ruidos aditivos del estado y la observación son blancos y mutuamente independientes. En la práctica, estas

hipótesis pueden ser restrictivas y es necesario estudiar casos más generales. En los textos de Jazwinski [7] y Meditch [17] se generaliza dicho algoritmo considerando que tanto la perturbación del estado como el error de observación están correlados en el tiempo. Por otro lado, suprimiendo la hipótesis de independencia mutua entre ambos ruidos, Kalman [10] y Kowalski y Szynal [12] extienden también este algoritmo. Mientras Kalman supone que la correlación es en un instante, Kowalski y Szynal, tratan un caso más general, considerando que la correlación se produce en un intervalo de tiempo finito.

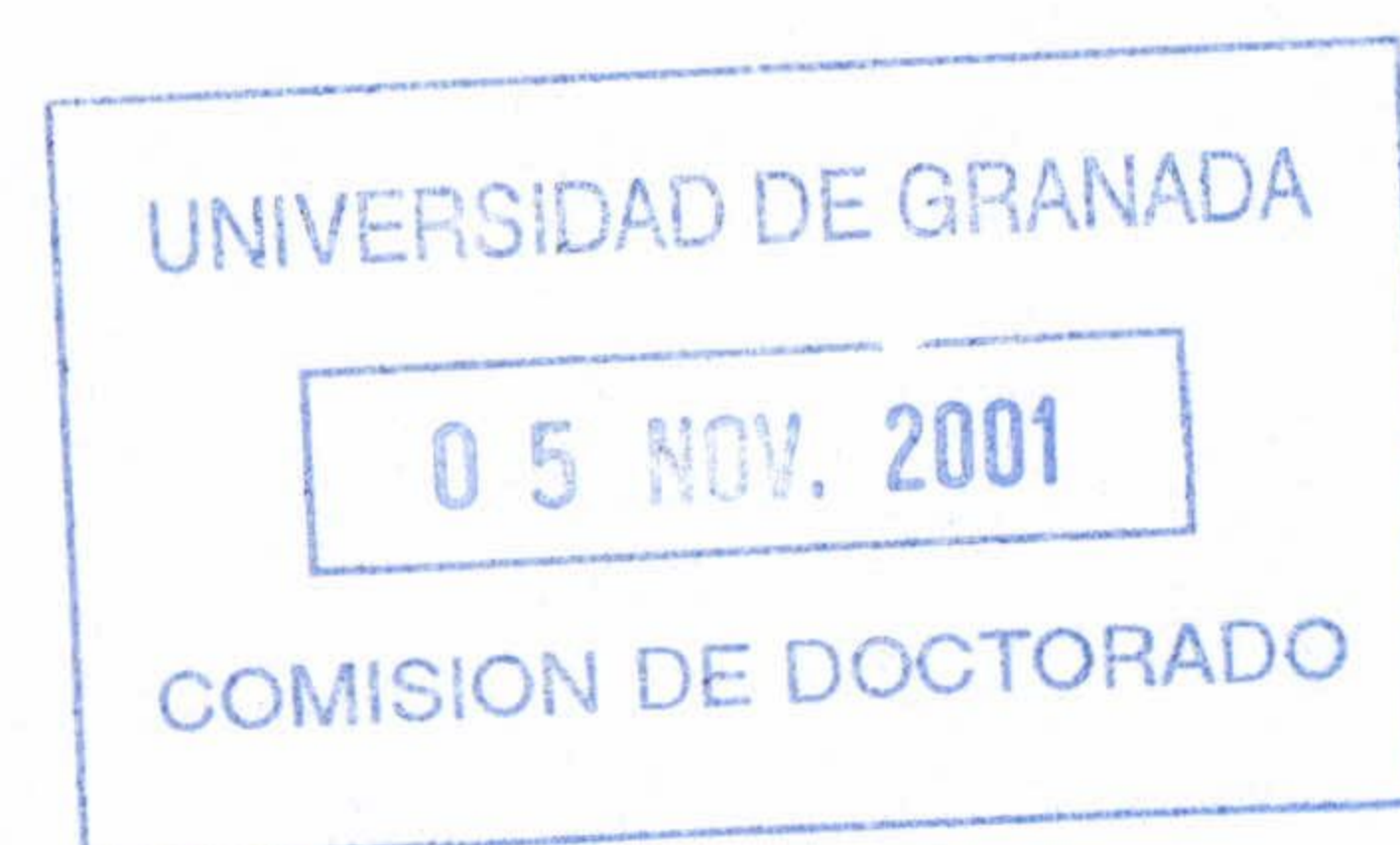
Tanto el trabajo de Nahi como el de Hadidi y Schwartz se desarrollan sobre sistemas donde los ruidos aditivos de las ecuaciones del estado y de la observación son sucesiones blancas y mutuamente independientes. Por tanto, en sistemas con observaciones inciertas, surge también la necesidad de estudiar casos con hipótesis menos restrictivas. En 1994, Hermoso y Linares [5] generalizan los resultados de Nahi considerando que ambos ruidos están correlados en un instante.

En este capítulo extendemos los resultados de Nahi y de Hadidi-Schwartz suponiendo que, o bien la perturbación del estado, o bien el error de observación no son ruidos blancos. Por otra parte, se generalizan los resultados de Hermoso y Linares estudiando el caso en que ambos ruidos están correlados en un intervalo de tiempo finito.

A continuación presentamos, brevemente, la estructura del capítulo:

En la Sección 2.2, describimos la ecuación dinámica de los sistemas con observaciones inciertas.

Seguidamente, en la Sección 2.3, abordamos el problema de estimación lineal del estado en sistemas con error de observación blanco. Tras resumir



los trabajos de Nahi [18] y Hadidi y Schwartz [3] (Subsección 2.3.1), generalizamos sus resultados considerando sistemas con perturbación del estado correlada en el tiempo (Subsección 2.3.2).

En la Sección 2.4 extendemos, de nuevo, los estudios de estos investigadores, considerando que el error de observación no es un ruido blanco.

Por último, en la Sección 2.5 generalizamos los resultados de Hermoso y Linares [5] abordando el caso en el que los ruidos aditivos de las ecuaciones del estado y de la observación están correlados en un intervalo de tiempo finito.

2.2 Descripción de Sistemas con Observaciones Inciertas

Como se ha comentado en la sección anterior, los sistemas con observaciones inciertas se caracterizan por no tener asegurada la presencia del vector estado en la ecuación de la observación. Dicho con otras palabras, en este tipo de sistemas, las observaciones pueden contener al estado con probabilidad menor que uno. Para reflejar la posibilidad de que, de manera aleatoria, cada observación pueda contener sólo ruido, la ecuación de la observación se describe como

$$z(k) = \begin{cases} H(k)x(k) + v(k) & \text{con probabilidad } p(k) \\ v(k) & \text{con probabilidad } 1-p(k) \end{cases}$$

o, de forma equivalente,

$$z(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k)$$

siendo $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli, con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.

Como se puede observar, existe una probabilidad $1-p(k)$, denominada *probabilidad de falsa alarma*, de que la observación sea únicamente ruido.

La diferencia, entonces, entre estos sistemas y los descritos en el Capítulo 1 radica únicamente en la ecuación de la observación. Por tanto, la ecuación dinámica para sistemas con observaciones inciertas es

Ecuación del estado

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0 \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Ecuación de la observación

$$z(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

donde $\{x(k), k \geq 0\}$ es un proceso n -dimensional que describe el *estado* del sistema; $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido p -dimensional que representa la *perturbación del estado*; $\{z(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional que describe la *salida* u *observación* del sistema; $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido, compuesto por variables aleatorias de Bernoulli, que representa la *incertidumbre de las observaciones*; y $\{v(k), k \geq 0\}$ es un proceso ruido m -dimensional, el *error de observación*.

A lo largo del capítulo, abordaremos el problema de estimación lineal del estado para estos sistemas, imponiendo distintas hipótesis sobre los ruidos.

2.3 Sistemas con Error de Observación Blanco

En esta sección abordamos el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio del estado en sistemas con observaciones inciertas y error de observación blanco.

Para ello, supondremos que el estado inicial y los ruidos verifican las siguientes hipótesis:

- x_0 es un vector aleatorio centrado con matriz de covarianzas $P(0)$.
- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- $\{v(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $R(k)$.
- $x(0)$, $\{\omega(k), k \geq 0\}$, $\{v(k), k \geq 0\}$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

Dividimos la sección en dos partes: en primer lugar suponemos que la perturbación del estado es una sucesión blanca y resumimos los trabajos de Nahi [18] y Hadidi y Schwartz [3]; recordemos que Nahi obtiene sus resultados bajo la hipótesis de que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, mientras que Hadidi y Schwartz suprimen esta condición. Más tarde, generalizamos los resultados de estos investigadores abordando el problema bajo la hipótesis de que la perturbación del estado está correlada en el tiempo.

Las notaciones que se utilizan para los estimadores y las matrices de covarianzas de los errores de estimación son las mismas que se introdujeron en el capítulo anterior.

2.3.1 Perturbación del Estado Blanca

Bajo la hipótesis de que $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $Q(k)$, comenzamos el tratamiento del problema resumiendo los resultados de Nahi [18] y Hadidi y Schwartz [3].

(A) Incertidumbre Descrita por Variables Independientes

En 1969, Nahi [18], considerando que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, aborda el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio del estado. Sus resultados se resumen en el algoritmo recursivo, de estructura similar al de Kalman, descrito en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *El algoritmo para los problemas de filtrado y predicción en una etapa está dado por*

$$\begin{aligned}\hat{x}(k/k) &= \hat{x}(k/k-1) + F(k) [z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1)], \quad k \geq 0 \\ \hat{x}(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k), \quad k \geq 0 \\ \hat{x}(0/-1) &= 0\end{aligned}$$

donde la matriz de ganancia del filtro, $F(k)$, verifica

$$F(k) = p(k)P(k/k-1)H^T(k)\Pi^{-1}(k), \quad k \geq 0$$

siendo

$$\Pi(k) = R(k) + p^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k)$$

con

$$\begin{aligned} S(k) &= \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ &\quad \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) &= P(0). \end{aligned}$$

Las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y predicción satisfacen

$$\begin{aligned} P(k/k) &= P(k/k-1) - F(k)\Pi(k)F^T(k), \quad k \geq 0 \\ P(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)P(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k), \quad k \geq 0 \\ P(0/-1) &= P(0). \end{aligned}$$

□

Observemos que si $R(k)$ es definida positiva, la existencia de las inversas de las matrices $\Pi(k)$, para todo $k \geq 0$, está asegurada; en caso contrario, se utilizan las pseudoinversas de $\Pi(k)$ (Magnus y Neudecker [15]).

(B) Incertidumbre Descrita por Variables no Independientes

Hadidi y Schwartz [3] tratan el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio del estado, suponiendo que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli no necesariamente independientes.

Tras comprobar que, en general, bajo esta hipótesis sobre la incertidumbre, no pueden obtenerse estimadores lineales recursivos, deducen una condición necesaria y suficiente para la existencia de los mismos:

“la probabilidad condicionada $P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ debe ser independiente de α , para $\alpha = 0, \dots, k - 1$.”

Bajo esta condición, y denotando a $P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ por $p_{11}(k)$, en el siguiente teorema se resumen los resultados de Hadidi y Schwartz.

Teorema 2.3.2 *El algoritmo para los problemas de filtrado y predicción en una etapa está dado por*

$$\begin{aligned}\hat{x}(k/k) &= \hat{x}(k/k-1) + F(k) [z(k) - p_{11}(k)H(k)\hat{x}(k/k-1)], \quad k \geq 0 \\ \hat{x}(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k), \quad k \geq 0 \\ \hat{x}(0/-1) &= 0\end{aligned}$$

donde la matriz de ganancia del filtro, $F(k)$, verifica

$$F(k) = [p_{11}(k)P(k/k-1)H^T(k) + (p(k) - p_{11}(k))S(k)H^T(k)]\Pi^{-1}(k)$$

siendo

$$\Pi(k) = R(k) + p_{11}^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + (p(k) - p_{11}^2(k))H(k)S(k)H^T(k)$$

con

$$\begin{aligned}S(k) &= \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ &\quad \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) &= P(0).\end{aligned}$$

Las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y predicción satisfacen

$$\begin{aligned}P(k/k) &= P(k/k-1) - F(k)\Pi(k)F^T(k), \quad k \geq 0 \\ P(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)P(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k), \quad k \geq 0 \\ P(0/-1) &= P(0).\end{aligned}$$

□

2.3.2 Perturbación del Estado Correlada en el Tiempo

Como se ha comentado, considerar que el ruido aditivo que afecta al estado es blanco puede ser una hipótesis restrictiva en algunas situaciones prácticas. En esta sección abordamos el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio del estado en sistemas con observaciones inciertas, donde la perturbación del estado se modeliza mediante una ecuación de este tipo

$$\omega(k+1) = \theta(k+1, k)\omega(k) + \Delta(k+1, k)\varepsilon(k),$$

siendo $\{\varepsilon(k), k \geq 0\}$ un proceso ruido blanco r -dimensional y las matrices $\theta(k+1, k)$ y $\Delta(k+1, k)$ conocidas y de dimensiones acordes al vector que acompañan.

En sistemas con certidumbre en las observaciones, los textos de Jazwinski [7] y Meditch [17] presentan la generalización de los resultados de Kalman al caso en que tanto la perturbación del estado como el error de observación se modelizan mediante una ecuación del mismo tipo que la anterior. Para el tratamiento del problema, se define un sistema, denominado *sistema aumentado*, cuyo vector estado está constituido por el estado original y ambos ruidos aditivos. En tal caso, en la ecuación dinámica del sistema aumentado, la perturbación del estado es un ruido blanco, y no existe error de observación; entonces, el algoritmo de Kalman (Teorema 1.5.3) resuelve el problema de estimación planteado.

Mediante un tratamiento similar, en esta sección extendemos los resultados de Nahi y Hadidi-Schwartz, obteniendo algoritmos para los problemas de predicción y filtrado en sistemas con observaciones inciertas donde la per-

turbación del estado no es un ruido blanco.

Consideremos el sistema descrito por la ecuación dinámica

Ecuación del estado

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\omega(k+1) = \theta(k+1, k)\omega(k) + \Delta(k+1, k)\varepsilon(k), \quad k \geq 0$$

$$\omega(0) = \omega_0$$

Ecuación de la observación

$$z(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

siendo

- x_0 y ω_0 vectores aleatorios centrados con

$$E \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^T & \omega_0^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} P_{xx}(0) & P_{x\omega}(0) \\ P_{x\omega}^T(0) & P_{\omega\omega}(0) \end{pmatrix}.$$

- $\{\varepsilon(k), k \geq 0\}$ un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $U(k)$.

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.

- $\{v(k), k \geq 0\}$ un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $R(k)$.

- Los vectores x_0 , ω_0 y las sucesiones $\{\varepsilon(k), k \geq 0\}$, $\{v(k), k \geq 0\}$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

Utilizaremos la técnica consistente en aumentar el vector estado para obtener un sistema cuyos ruidos verifiquen las hipótesis apropiadas para aplicar algoritmos ya conocidos.

Definimos un vector $(n + p)$ -dimensional formado por el estado original y su perturbación,

$$x^*(k) = \left(x^T(k), \omega^T(k) \right)^T, \quad k \geq 0.$$

Es fácil ver que este *vector aumentado* verifica la siguiente ecuación dinámica

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= \Phi^*(k+1, k)x^*(k) + \Gamma^*(k+1, k)\varepsilon(k), \quad k \geq 0 \\ x^*(0) &= \left(x_0^T \quad \omega_0^T \right)^T \\ z(k) &= \gamma(k)H^*(k)x^*(k) + v(k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi^*(k+1, k) &= \begin{pmatrix} \Phi(k+1, k) & \Gamma(k+1, k) \\ 0 & \Theta(k+1, k) \end{pmatrix} \\ \Gamma^*(k+1, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta(k+1, k) \end{pmatrix} \\ H^*(k) &= \begin{pmatrix} H(k) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que, por las hipótesis realizadas en el sistema original, tanto la perturbación del estado de este sistema aumentado, $\varepsilon(k)$, como el error de observación, $v(k)$, son ruidos blancos.

Si suponemos que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, el sistema aumentado descrito anteriormente verifica las mismas hipótesis que el considerado por Nahi [18]. Luego, el

algoritmo descrito en el Teorema 2.3.1 resuelve el problema de estimación planteado.

Por otro lado, supongamos, ahora, que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli, no necesariamente independientes. Si la probabilidad condicionada $P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ es independiente de α , para $\alpha = 0, \dots, k-1$, nos encontramos ante un sistema con ruidos aditivos blancos, en el que tenemos asegurada la existencia de estimadores recursivos. Por tanto, el problema de filtrado y predicción planteado se resolvería mediante el algoritmo deducido por Hadidi y Schwartz (Teorema 2.3.2).

2.4 Sistemas con Error de Observación Correlado en el Tiempo

En esta sección abordamos el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio del estado en sistemas con observaciones inciertas, donde el error de observación verifica una ecuación del tipo

$$v(k+1) = A(k+1, k)v(k) + B(k+1, k)\sigma(k),$$

siendo $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ un proceso ruido blanco s -dimensional y las matrices $A(k+1, k)$ y $B(k+1, k)$ conocidas y de dimensiones acordes al vector que acompañan.

Como se mencionó en la sección anterior, en sistemas con certidumbre en las observaciones, los textos de Jazwinski [7] y Meditch [17] presentan la solución de este problema utilizando la técnica consistente en aumentar el vector estado.

En sistemas con observaciones inciertas no es posible obtener un sistema aumentado cuya ecuación de la observación esté afectada por el mismo ruido multiplicativo del sistema original. Por este motivo, abordamos el problema de estimación de forma directa, usando la Técnica de Proyecciones Ortogonales (Sección 1.5.1).

Consideremos el sistema descrito por la ecuación dinámica

Ecuación del estado

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0 \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Ecuación de la observación

$$\begin{aligned}z(k) &= \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0 \\v(k+1) &= A(k+1, k)v(k) + B(k+1, k)\sigma(k), \quad k \geq 0 \\v(0) &= v_0\end{aligned}$$

donde

- x_0 y v_0 son vectores aleatorios centrados con matrices de covarianza $P_{xx}(0)$ y $P_{vv}(0)$, respectivamente.
- $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $Q(k)$.
- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $T(k)$.

- El estado inicial, x_0 , el error de observación inicial, v_0 , y las sucesiones $\{\omega(k), k \geq 0\}$, $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

En lo sucesivo, notaremos por $\hat{x}(\tau/k)$ y $\hat{v}(\tau/k)$ para $\tau = k + 1$ y $\tau = k$, al predictor y filtro, respectivamente, del estado y del error de observación. De igual forma, notaremos a las matrices de covarianzas de los errores de predicción y filtrado por:

$$\begin{aligned} P_{xx}(\tau/k) &= E [e_x(\tau/k)e_x^T(\tau/k)] \\ P_{vv}(\tau/k) &= E [e_v(\tau/k)e_v^T(\tau/k)] \\ P_{xv}(\tau/k) &= E [e_x(\tau/k)e_v^T(\tau/k)] = P_{vx}^T(\tau/k) \end{aligned}$$

para $\tau = k + 1$ y $\tau = k$, siendo $e_x(\tau/k) = x(\tau) - \hat{x}(\tau/k)$ y $e_v(\tau/k) = v(\tau) - \hat{v}(\tau/k)$.

Dividimos la sección en dos partes: en primer lugar abordamos el problema en sistemas donde $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes. Más tarde, consideramos el caso en el que la incertidumbre se describe mediante una sucesión arbitraria de variables aleatorias de Bernoulli.

2.4.1 Incertidumbre Descrita por Variables Aleatorias Independientes

Como ya hemos indicado, debido a la incertidumbre en las observaciones, no es posible utilizar la técnica consistente en aumentar el vector estado. Por ello, abordamos el problema utilizando la Técnica de Proyecciones Ortogonales.

Comenzamos presentando las expresiones que relacionan el predictor en una etapa y el filtro del estado (Teoremas 2.4.3 y 2.4.5). Estas expresiones mostrarán que es necesario determinar el predictor del ruido de observación y las matrices de covarianzas y covarianzas cruzadas de los errores de predicción. En los Teoremas 2.4.6-2.4.8 se presentan los algoritmos para determinar dichos predictores y matrices de covarianzas. Finalmente, en el Teorema 2.4.9 se resumen todos estos resultados mediante un algoritmo de filtrado y predicción.

Antes de iniciar nuestro estudio, presentamos dos proposiciones en las que se establecen propiedades de ortogonalidad de los ruidos $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{\sigma(k), k \geq 0\}$, que serán de gran utilidad en la obtención del algoritmo.

Proposición 2.4.1

$$(a) E[\omega(k)z^T(\alpha)] = 0, \quad \alpha = 0, \dots, k.$$

$$(b) E[\omega(k)e_x^T(k/k)] = 0.$$

$$(c) E[\omega(k)e_v^T(k/k)] = 0.$$

-Demostración-

(a) Dado que $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es independiente de $(x_0, \{\omega(k), k \geq 0\})$, utilizando la ecuación de la observación,

$$E[\omega(k)z^T(\alpha)] = p(\alpha)E[\omega(k)x^T(\alpha)]H^T(\alpha) + E[\omega(k)v^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k.$$

Ya que $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es una sucesión blanca e independiente de x_0 , el primer sumando se anula. Además, puesto que $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es independiente de $(v_0, \{\sigma(k), k \geq 0\})$, el segundo sumando también vale cero.

(b) Por la definición de $e_x(k/k)$,

$$E[\omega(k)e_x^T(k/k)] = E[\omega(k)x^T(k)] - E[\omega(k)\hat{x}^T(k/k)].$$

El primer sumando se anula por ser $\{\omega(k), k \geq 0\}$ una sucesión blanca independiente de x_0 . Por otra parte, al ser $\hat{x}(k/k)$ una combinación lineal de $z(0), \dots, z(k)$, por el apartado (a), el segundo término también es nulo.

(c) Por la definición de $e_v(k/k)$,

$$E[\omega(k)e_v^T(k/k)] = E[\omega(k)v^T(k)] - E[\omega(k)\hat{v}^T(k/k)].$$

El primer sumando se anula ya que $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es una sucesión independiente de $(v_0, \{\sigma(k), k \geq 0\})$. Al ser $\hat{v}(k/k)$ una combinación lineal de $z(0), \dots, z(k)$, por el apartado (a), el segundo término es cero.

□

De manera similar se demuestran las propiedades de ortogonalidad verificadas por $\{\sigma(k), k \geq 0\}$.

Proposición 2.4.2

$$(a) E[\sigma(k)z^T(\alpha)] = 0, \quad \alpha = 0, \dots, k.$$

$$(b) E[\sigma(k)e_x^T(k/k)] = 0.$$

$$(c) E[\sigma(k)e_v^T(k/k)] = 0.$$

□

El siguiente teorema presenta la expresión del predictor del estado en función del filtro.

Teorema 2.4.3

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k), \quad k \geq 0$$

$$\hat{x}(0/-1) = 0.$$

-Demostración-

Veamos que $\Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k)$ verifica el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1). En efecto, teniendo en cuenta la ecuación del estado y el apartado (a) de la Proposición 2.4.1,

$$E[x(k+1)z^T(\alpha)] = \Phi(k+1, k)E[x(k)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k$$

y, por el Lema de Proyecciones Ortogonales,

$$E[x(k)z^T(\alpha)] = E[\hat{x}(k/k)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k.$$

Por tanto,

$$E[x(k+1)z^T(\alpha)] = \Phi(k+1, k)E[\hat{x}(k/k)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k$$

y $\Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k)$ verifica el Lema de Proyecciones Ortogonales.

En el instante inicial, al no existir observaciones, el estimador de $x(0)$ es su media, por lo que $\hat{x}(0/-1) = 0$. □

A continuación obtenemos la expresión del filtro del estado en función del predictor.

Como se indicó en el Capítulo 1, como consecuencia del Teorema 1.5.2, el filtro puede obtenerse a partir del predictor mediante la siguiente expresión

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + F(k)[z(k) - \hat{z}(k/k-1)], \quad k \geq 0 \quad (2.4.1)$$

siendo $F(k)$ una matriz a determinar, denominada *matriz de ganancia* del filtro.

Recordemos que el proceso que multiplica a la matriz de ganancia en la expresión (2.4.1), que notaremos por $\delta(k)$, se denomina *innovación* y representa la nueva información que aporta la última observación en la estimación de $x(k)$. En la siguiente proposición se establece la expresión de dicho proceso, así como sus matrices de covarianzas.

Proposición 2.4.4 *El proceso innovación está dado por*

$$\begin{aligned}\delta(k) &= z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1), \quad k > 0 \\ \delta(0) &= z(0).\end{aligned}$$

Las matrices de covarianzas de este proceso satisfacen

$$\begin{aligned}\Pi(k) &= p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + p(k)P_{vx}(k/k-1)H^T(k) + \\ & p(k)H(k)P_{xv}(k/k-1) + P_{vv}(k/k-1) + \\ & p^2(k)H(k)P_{xx}(k/k-1)H^T(k), \quad k > 0 \\ \Pi(0) &= p(0)H(0)P_{xx}(0)H^T(0) + P_{vv}(0)\end{aligned}$$

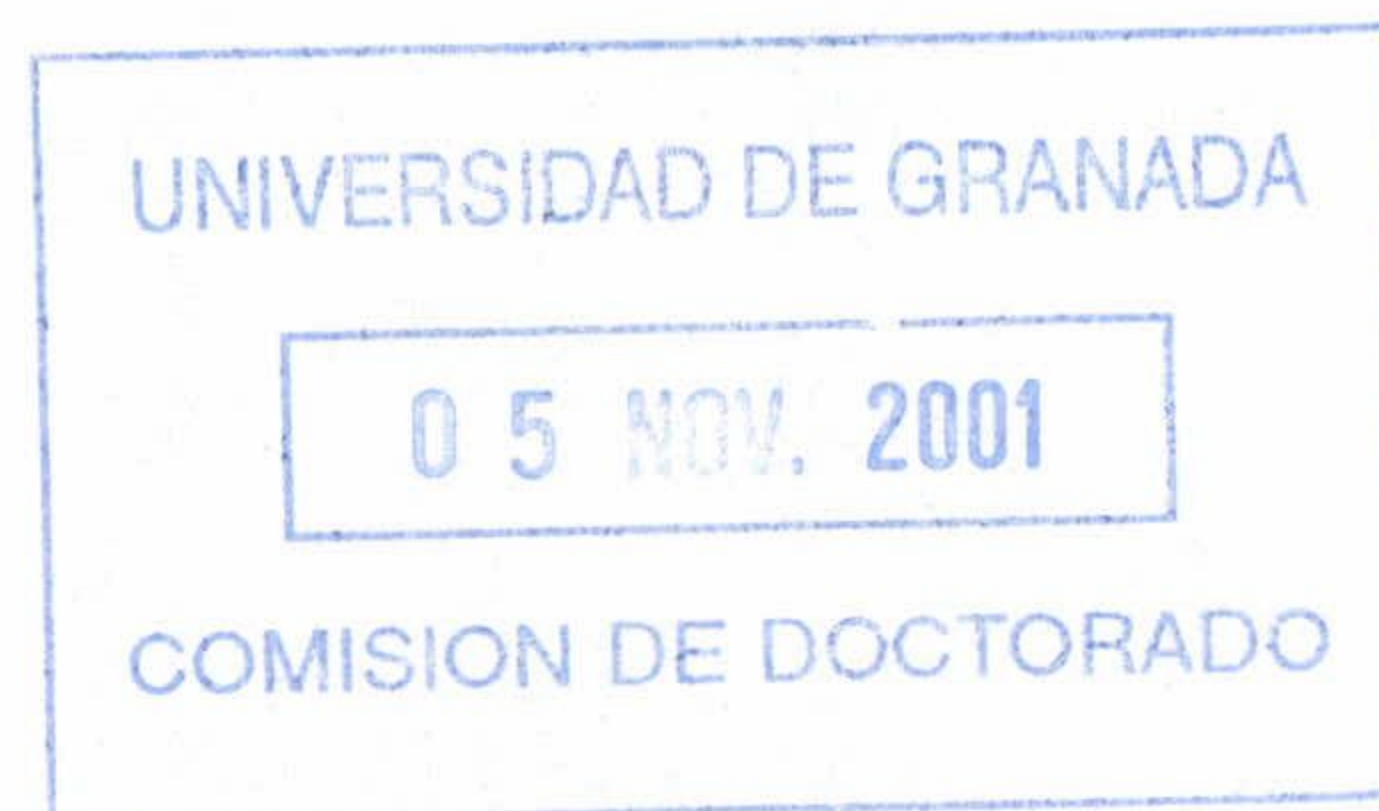
donde

$$\begin{aligned}S(k) &= \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ & \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) &= P_{xx}(0).\end{aligned}$$

-Demostración-

Ya que $\hat{z}(k/k-1)$ es la proyección ortogonal de $z(k)$ sobre el subespacio $\Xi(k-1)$ generado por las observaciones $\{z(0), \dots, z(k-1)\}$, sabemos que es el único elemento de este subespacio que verifica

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = E[\hat{z}(k/k-1)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k-1. \quad (2.4.2)$$



Teniendo en cuenta la ecuación de la observación, y dado que la sucesión de variables aleatorias independientes $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es, a su vez, independiente de $(x_0, v_0, \{\omega(k), k \geq 0\}, \{\sigma(k), k \geq 0\})$, se tiene que

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = p(k)H(k)E [x(k)z^T(\alpha)] + E [v(k)z^T(\alpha)]. \quad (2.4.3)$$

Ya que $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ son las proyecciones ortogonales de $x(k)$ y $v(k)$, respectivamente, sobre $\Xi(k-1)$,

$$\begin{aligned} E [x(k)z^T(\alpha)] &= E [\hat{x}(k/k-1)z^T(\alpha)] \\ E [v(k)z^T(\alpha)] &= E [\hat{v}(k/k-1)z^T(\alpha)] \end{aligned}$$

para $\alpha = 0, \dots, k-1$. Por tanto, sustituyendo en (2.4.3)

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = E [(p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1))z^T(\alpha)]$$

para $\alpha = 0, \dots, k-1$ y, de (2.4.2), se deduce

$$\hat{z}(k/k-1) = p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1).$$

El proceso innovación está dado, entonces, por

$$\delta(k) = z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)$$

para $k > 0$. En el instante inicial, al no disponer de observaciones para la estimación, los estimadores de $x(0)$ y $v(0)$ son la media de dichas variables y, por tanto, nulos. Así, $\delta(0) = z(0)$.

A continuación estudiamos las matrices de covarianzas del proceso innovación, $\Pi(k) = E [\delta(k)\delta^T(k)]$. Ya que $\hat{z}(k/k-1)$ es combinación lineal de

$z(0), \dots, z(k-1)$, por el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1), este estimador es ortogonal a $\delta(k) = z(k) - \hat{z}(k/k-1)$ y, por tanto,

$$\Pi(k) = E [\delta(k)z^T(k)].$$

Sustituyendo, entonces, la expresión que acabamos de obtener para el proceso innovación,

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & E [z(k)z^T(k)] - p(k)H(k)E [\hat{x}(k/k-1)z^T(k)] - \\ & E [\hat{v}(k/k-1)z^T(k)]. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Estudiemos los términos de esta expresión:

- Teniendo en cuenta la ecuación de observación y la independencia entre $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ y $(x_0, v_0, \{\omega(k), k \geq 0\}, \{\sigma(k), k \geq 0\})$ obtenemos

$$\begin{aligned} E [z(k)z^T(k)] = & p(k)H(k)S(k)H^T(k) + p(k)E[v(k)x^T(k)]H^T(k) + \\ & p(k)H(k)E[x(k)v^T(k)] + E[v(k)v^T(k)] \end{aligned}$$

donde $S(k) = E [x(k)x^T(k)]$ es la matriz de covarianzas del estado.

- Usando de nuevo la ecuación de observación y la hipótesis de independencia

$$\begin{aligned} E [\hat{x}(k/k-1)z^T(k)] = & p(k)E[\hat{x}(k/k-1)x^T(k)]H^T(k) + \\ & E[\hat{x}(k/k-1)v^T(k)]. \end{aligned}$$

- Por último, de igual forma, tenemos que

$$\begin{aligned} E [\hat{v}(k/k-1)z^T(k)] = & p(k)E[\hat{v}(k/k-1)x^T(k)]H^T(k) + \\ & E[\hat{v}(k/k-1)v^T(k)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas tres expresiones en (2.4.4) y agrupando términos

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + p(k)E[e_v(k/k-1)x^T(k)]H^T(k) + \\ & p(k)H(k)E[e_x(k/k-1)v^T(k)] + E[e_v(k/k-1)v^T(k)] + \\ & p^2(k)H(k)E[e_x(k/k-1)x^T(k)]H^T(k). \end{aligned}$$

Ya que $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ son combinaciones lineales de las observaciones $z(0), \dots, z(k-1)$, ambos estimadores son ortogonales a los errores $e_x(k/k-1)$ y $e_v(k/k-1)$; por tanto,

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + p(k)P_{vx}(k/k-1)H^T(k) + \\ & p(k)H(k)P_{xv}(k/k-1) + P_{vv}(k/k-1) + \\ & p^2(k)H(k)P_{xx}(k/k-1)H^T(k). \end{aligned}$$

En el instante inicial, debido a la independencia entre $\gamma(0)$, $x(0)$ y $v(0)$, es fácil comprobar que

$$\Pi(0) = p(0)H(0)P_{xx}(0)H^T(0) + P_{vv}(0).$$

Para finalizar la demostración, obtenemos la expresión recursiva para la matriz de covarianzas del estado, $S(k)$. Dicha expresión es inmediata sin más que tener en cuenta la ecuación del estado y la independencia entre el ruido blanco $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y la condición inicial, x_0 ; así

$$S(k) = \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1). \quad \square$$

A partir de la expresión (2.4.1) y la Proposición 2.4.4, en el siguiente teorema obtenemos la expresión del filtro en función del predictor.

Teorema 2.4.5 *El filtro del estado se expresa en función del predictor en una etapa como*

$$\begin{aligned} \hat{x}(k/k) = & \hat{x}(k/k-1) + \\ & F(k) [z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)], \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

donde la matriz de ganancia, $F(k)$, es

$$F(k) = [p(k)P_{xx}(k/k-1)H^T(k) + P_{xv}(k/k-1)]\Pi^{-1}(k), \quad k \geq 0$$

y $\Pi(k)$ viene dada en la Proposición 2.4.4.

-Demostración-

La ecuación del filtro es inmediata sin más que sustituir la expresión obtenida para la innovación en (2.4.1).

Para obtener la matriz de ganancia, consideremos la relación entre el error de filtrado y el de predicción. Dado que $\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + F(k)\delta(k)$, dicha relación viene expresada por

$$e_x(k/k) = e_x(k/k-1) - F(k)\delta(k).$$

Ya que $e_x(k/k)$ es ortogonal a la observación $z(k)$, $E[e_x(k/k)z^T(k)] = 0$ y, por tanto,

$$E[e_x(k/k-1)z^T(k)] = F(k)E[\delta(k)z^T(k)]. \quad (2.4.5)$$

Entonces, aplicando el Lema de Proyecciones Ortogonales, $E[\delta(k)z^T(k)] = \Pi(k)$ y, consecuentemente,

$$F(k) = E[e_x(k/k-1)z^T(k)]\Pi^{-1}(k).$$

Calculamos a continuación $E[e_x(k/k-1)z^T(k)]$. Teniendo en cuenta la ecuación de la observación y la independencia entre la sucesión $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ y $(x_0, v_0, \{\omega(k), k \geq 0\}, \{\sigma(k), k \geq 0\})$,

$$E[e_x(k/k-1)z^T(k)] = p(k)E[e_x(k/k-1)x^T(k)]H^T(k) + E[e_x(k/k-1)v^T(k)].$$

Ya que los errores de estimación son ortogonales a los estimadores,

$$E[e_x(k/k-1)z^T(k)] = p(k)P_{xx}(k/k-1)H^T(k) + P_{xv}(k/k-1).$$

Por tanto,

$$F(k) = [p(k)P_{xx}(k/k-1)H^T(k) + P_{xv}(k/k-1)]\Pi^{-1}(k). \quad \square$$

Hay que tener en cuenta que con las hipótesis realizadas sobre el sistema, la existencia de las inversas de $\Pi(k)$, para $k \geq 0$, no está asegurada. Por ello, en caso de no existir, se utilizarán las pseudoinversas de estas matrices (Magnus y Neudecker [15]).

En virtud del Teorema 2.4.5, la determinación del filtro del estado exige tanto la obtención del predictor del ruido de observación, como de las matrices $P_{xx}(k/k-1)$ y $P_{xv}(k/k-1)$.

En el siguiente teorema se presenta la expresión del predictor del ruido de observación. Su obtención es análoga a la realizada anteriormente para los estimadores del estado.

Teorema 2.4.6 *El predictor en una etapa y el filtro del error de observación están dados por*

$$\hat{v}(k+1/k) = A(k+1, k)\hat{v}(k/k), \quad k \geq 0$$

$$\hat{v}(0/-1) = 0$$

$$\hat{v}(k/k) = \hat{v}(k/k-1) +$$

$$J(k)[z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)], \quad k \geq 0$$

donde

$$J(k) = [p(k)P_{vx}(k/k-1)H^T(k) + P_{vv}(k/k-1)]\Pi^{-1}(k), \quad k \geq 0$$

y $\Pi(k)$ se ha obtenido en la Proposición 2.4.4. □

En el siguiente teorema obtenemos las matrices de covarianzas y de covarianzas cruzadas de los errores de predicción en función de las de los errores de filtrado.

Teorema 2.4.7

$$(a) P_{xx}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)P_{xx}(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k), \quad k \geq 0$$

$$P_{xx}(0/-1) = P_{xx}(0).$$

$$(b) P_{vv}(k+1/k) = A(k+1, k)P_{vv}(k/k)A^T(k+1, k) + B(k+1, k)T(k)B^T(k+1, k), \quad k \geq 0$$

$$P_{vv}(0/-1) = P_{vv}(0).$$

$$(c) P_{xv}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)P_{xv}(k/k)A^T(k+1, k)$$

$$P_{xv}(0/-1) = 0.$$

-Demostración-

(a) Por el Teorema 2.4.3, es claro que el error de predicción verifica

$$e_x(k+1/k) = \Phi(k+1, k)e_x(k/k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k). \quad (2.4.6)$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1/k) &= \Phi(k+1, k)E[e_x(k/k)e_x^T(k/k)]\Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad \Phi(k+1, k)E[e_x(k/k)\omega^T(k)]\Gamma^T(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)E[\omega(k)e_x^T(k/k)]\Phi^T(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)E[\omega(k)\omega^T(k)]\Gamma^T(k+1, k). \end{aligned}$$

Por el apartado (b) de la Proposición 2.4.1, los dos términos centrales se anulan y se obtiene la expresión de $P_{xx}(k+1/k)$ deseada. En el instante inicial, ya que $\hat{x}(0/-1) = 0$, se tiene que $P_{xx}(0/-1) = P_{xx}(0)$.

(b) Teniendo en cuenta el Teorema 2.4.6, el error de predicción verifica

$$e_v(k+1/k) = A(k+1, k)e_v(k/k) + B(k+1, k)\sigma(k). \quad (2.4.7)$$

A partir de aquí, la demostración se realiza de forma análoga a la del apartado (a).

(c) Por las expresiones (2.4.6) y (2.4.7), $P_{xv}(k+1/k)$ está dada por

$$\begin{aligned} P_{xv}(k+1/k) = & \Phi(k+1, k)E[e_x(k/k)e_v^T(k/k)]A^T(k+1, k) + \\ & \Phi(k+1, k)E[e_x(k/k)\sigma^T(k)]B^T(k+1, k) + \\ & \Gamma(k+1, k)E[\omega(k)e_v^T(k/k)]A^T(k+1, k) + \\ & \Gamma(k+1, k)E[\omega(k)\sigma^T(k)]B^T(k+1, k). \end{aligned}$$

Por los apartados (b) de la Proposición 2.4.2 y (c) de la Proposición 2.4.1, los dos términos centrales se anulan. De igual modo, por la independencia entre las sucesiones $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{\sigma(k), k \geq 0\}$, el último también vale cero; por tanto,

$$P_{xv}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)P_{xv}(k/k)A^T(k+1, k).$$

Ya que $\hat{x}(0/-1) = 0$ y $\hat{v}(0/-1) = 0$, en el instante inicial, por la independencia entre x_0 y v_0 , $P_{xv}(0/-1) = 0$. □

A continuación presentamos las expresiones de las matrices de covarianzas y de covarianzas cruzadas de los errores de filtrado en función de las de los errores de predicción.

Teorema 2.4.8

$$(a) \quad P_{xx}(k/k) = P_{xx}(k/k-1) - F(k)\Pi(k)F^T(k), \quad k \geq 0.$$

$$(b) \quad P_{vv}(k/k) = P_{vv}(k/k-1) - J(k)\Pi(k)J^T(k), \quad k \geq 0.$$

$$(c) \quad P_{xv}(k/k) = P_{xv}(k/k-1) - F(k)\Pi(k)J^T(k), \quad k \geq 0.$$

-Demostración-

(a) De la expresión del error $e_x(k/k) = e_x(k/k-1) - F(k)\delta(k)$, es claro que

$$P_{xx}(k/k) = P_{xx}(k/k-1) - E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)]F^T(k) - F(k)E[\delta(k)e_x^T(k/k-1)] + F(k)\Pi(k)F^T(k). \quad (2.4.8)$$

Sustituyendo la innovación por su expresión dada en la Proposición 2.4.4,

$$E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)] = E[e_x(k/k-1)z^T(k)] - p(k)E[e_x(k/k-1)\hat{x}^T(k/k-1)]H^T(k) - E[e_x(k/k-1)\hat{v}^T(k/k-1)].$$

Ya que el error $e_x(k/k-1)$ es ortogonal a los estimadores $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$, los dos últimos términos de esta expresión se anulan y, por (2.4.5),

$$E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)] = F(k)\Pi(k). \quad (2.4.9)$$

Así, el apartado (a) queda probado sin más que sustituir (2.4.9) en (2.4.8).

(b) Teniendo en cuenta que $e_v(k/k) = e_v(k/k-1) - J(k)\delta(k)$, la demostración es similar a la del apartado (a).

(c) A partir de las expresiones de $e_x(k/k)$ y $e_v(k/k)$, es claro que

$$P_{xv}(k/k) = P_{xv}(k/k-1) - E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)]J^T(k) - F(k)E[\delta(k)e_v^T(k/k-1)] + F(k)\Pi(k)J^T(k). \quad (2.4.10)$$

Además, de forma análoga a como se ha obtenido (2.4.9), se establece que

$$E[\delta(k)e_v^T(k/k-1)] = \Pi(k)J^T(k).$$

Sustituyendo esta expresión y (2.4.9) en (2.4.10), se prueba (c). \square

A continuación, introducimos una nueva notación, con objeto de resumir los resultados obtenidos hasta este momento.

$$- \hat{x}^*(\tau/k) = \left(\hat{x}^T(\tau/k) \quad \hat{v}^T(\tau/k) \right)^T, \text{ para } \tau = k \text{ y } \tau = k + 1$$

$$- P^*(\tau/k) = \begin{pmatrix} P_{xx}(\tau/k) & P_{xv}(\tau/k) \\ P_{vx}(\tau/k) & P_{vv}(\tau/k) \end{pmatrix}, \text{ para } \tau = k \text{ y } \tau = k + 1$$

$$- P^*(0) = \begin{pmatrix} P_{xx}(0) & 0 \\ 0 & P_{vv}(0) \end{pmatrix}$$

$$- F^*(k) = \left(F^T(k) \quad J^T(k) \right)^T$$

$$- Q^*(k) = \begin{pmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & T(k) \end{pmatrix}$$

$$- \Phi^*(k+1, k) = \begin{pmatrix} \Phi(k+1, k) & 0 \\ 0 & A(k+1, k) \end{pmatrix}$$

$$- \Gamma^*(k+1, k) = \begin{pmatrix} \Gamma(k+1, k) & 0 \\ 0 & B(k+1, k) \end{pmatrix}$$

$$- H^*(k) = \left(p(k)H(k) \quad I \right).$$

Las primeras n -componentes de $\hat{x}^*(k/k)$ y $\hat{x}^*(k+1/k)$, obtenidos en el siguiente teorema, proporcionan el filtro y el predictor del estado.

Teorema 2.4.9

$$\begin{aligned}\hat{x}^*(k/k) &= \hat{x}^*(k/k-1) + F^*(k) [z(k) - H^*(k)\hat{x}^*(k/k-1)], \quad k \geq 0 \\ \hat{x}^*(k+1/k) &= \Phi^*(k+1, k)\hat{x}^*(k/k), \quad k \geq 0 \\ \hat{x}^*(0/-1) &= 0\end{aligned}$$

donde

$$F^*(k) = P^*(k/k-1)H^{*T}(k)\Pi^{-1}(k)$$

siendo

$$\Pi(k) = p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + H^*(k)P^*(k/k-1)H^{*T}(k)$$

con

$$\begin{aligned}S(k) &= \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ &\quad \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) &= P_{xx}(0). \\ P^*(k/k) &= P^*(k/k-1) - F^*(k)\Pi(k)F^{*T}(k), \quad k \geq 0 \\ P^*(k+1/k) &= \Phi^*(k+1, k)P^*(k/k)\Phi^{*T}(k+1, k) + \\ &\quad \Gamma^*(k+1, k)Q^*(k)\Gamma^{*T}(k+1, k), \quad k \geq 0 \\ P^*(0/-1) &= P^*(0).\end{aligned}$$

□

2.4.2 Incertidumbre Descrita por Variables Aleatorias no Independientes

Bajo la hipótesis de que la incertidumbre en las observaciones es una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli, no necesariamente independientes, abordamos el problema de estimación lineal del estado en sistemas donde el error de observación es correlado en el tiempo.

Como se vió en el Capítulo 1, el filtro del estado se puede expresar en función del predictor en una etapa como

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + F(k)[z(k) - \hat{z}(k/k-1)]$$

donde $\hat{z}(k/k-1)$ es el estimador lineal de menor error cuadrático medio de $z(k)$ basado en las observaciones $z(0), \dots, z(k-1)$. Como veremos a continuación, dado que las variables aleatorias que forman parte de la sucesión $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ no son independientes, en general, no es posible obtener una expresión de $\hat{z}(k/k-1)$ como función lineal de $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$; es necesario, por tanto, establecer condiciones para la existencia de estimadores lineales recursivos.

Siguiendo el mismo razonamiento que en la Proposición 2.4.4, estudiamos la expresión de $\hat{z}(k/k-1)$. Por el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1), sabemos que este estimador es el único elemento del subespacio generado por las observaciones $\{z(0), \dots, z(k-1)\}$ que verifica

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = E[\hat{z}(k/k-1)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k-1. \quad (2.4.11)$$

Por la ecuación de la observación,

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = H(k)E[\gamma(k)x(k)z^T(\alpha)] + E[v(k)z^T(\alpha)]. \quad (2.4.12)$$

De nuevo, teniendo en cuenta la ecuación de la observación y ya que x_0 , v_0 , $\{\omega(k), k \geq 0\}$, $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes,

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = E [\gamma(k)\gamma(\alpha)] H(k)E [x(k)x^T(\alpha)] H^T(\alpha) + E [v(k)z^T(\alpha)].$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} E [\gamma(k)\gamma(\alpha)] &= P [\gamma(k) = 1, \gamma(\alpha) = 1] \\ &= P [\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1] p(\alpha), \end{aligned}$$

luego

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = P [\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1] p(\alpha)H(k)E [x(k)x^T(\alpha)] H^T(\alpha) + E [v(k)z^T(\alpha)].$$

Ya que $E [x(k)v^T(\alpha)] = 0$, esta expresión puede reescribirse como

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = P [\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1] H(k)E [x(k)z^T(\alpha)] + E [v(k)z^T(\alpha)].$$

Por el Lema de Proyecciones Ortogonales, sabemos que para $\alpha = 0, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned} E [x(k)z^T(\alpha)] &= E [\hat{x}(k/k-1)z^T(\alpha)] \\ E [v(k)z^T(\alpha)] &= E [\hat{v}(k/k-1)z^T(\alpha)]. \end{aligned}$$

Así, para $\alpha = 0, \dots, k-1$,

$$E [z(k)z^T(\alpha)] = E [\{P [\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1] H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1)\} z^T(\alpha)].$$

De esta manera, por la igualdad (2.4.11) concluimos que sólo si la probabilidad $P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ es independiente de α , $\hat{z}(k/k-1)$ es función lineal de $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$. Este resultado queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.10 $\hat{z}(k/k-1)$ puede expresarse como función lineal de los estimadores $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ si y sólo si $P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ es independiente de α para $\alpha = 0, \dots, k-1$. En tal caso,

$$\hat{z}(k/k-1) = p_{11}(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1)$$

donde $p_{11}(k) = P[\gamma(k) = 1/\gamma(\alpha) = 1]$ para $\alpha = 0, \dots, k-1$. □

Bajo la condición establecida en este teorema, la obtención del algoritmo presentado a continuación es similar a la realizada en la Sección 2.4.1. La notación utilizada es la misma que la introducida antes del Teorema 2.4.9, sustituyendo $p(k)$ por $p_{11}(k)$.

Teorema 2.4.11

$$\begin{aligned}\hat{x}^*(k/k) &= \hat{x}^*(k/k-1) + F^*(k)[z(k) - H^*(k)\hat{x}^*(k/k-1)], \quad k \geq 0 \\ \hat{x}^*(k+1/k) &= \Phi^*(k+1, k)\hat{x}^*(k/k), \quad k \geq 0 \\ \hat{x}^*(0/-1) &= 0\end{aligned}$$

donde

$$F^*(k) = \left[\begin{array}{c} (p(k) - p_{11}(k))S(k)H^T(k) \\ 0 \end{array} \right] + P^*(k/k-1)H^{*T}(k) \Pi^{-1}(k)$$

siendo

$$\Pi(k) = (p(k) - p_{11}^2(k))H(k)S(k)H^T(k) + H^*(k)P^*(k/k-1)H^{*T}(k)$$

con

$$S(k) = \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0$$

$$S(0) = P_{xx}(0).$$

$$P^*(k/k) = P^*(k/k-1) - F^*(k)\Pi(k)F^{*T}(k), \quad k \geq 0$$

$$P^*(k+1/k) = \Phi^*(k+1, k)P^*(k/k)\Phi^{*T}(k+1, k) + \Gamma^*(k+1, k)Q^*(k)\Gamma^{*T}(k+1, k), \quad k \geq 0$$

$$P^*(0/-1) = P^*(0). \quad \square$$

Las primeras n -componentes de $\hat{x}^*(k/k)$ y $\hat{x}^*(k+1/k)$ proporcionan el filtro y predictor del estado.

2.5 Sistemas con Ruidos Aditivos Correlados

En 1963, Kalman [10] extiende su célebre algoritmo y supone que los ruidos del estado y de la observación están correlados en el mismo instante de tiempo. En 1986, Kowalski y Szynal [12] generalizan este resultado, suponiendo que la correlación entre ambos ruidos es en un intervalo de tiempo finito.

En sistemas con observaciones inciertas, Hermoso y Linares [5] extienden los resultados de Nahi, tratando el problema de estimación lineal óptima del estado en sistemas con ruidos aditivos correlados en instantes de tiempo consecutivos. Utilizando como criterios de optimalidad la insesgadez y mínima varianza de los estimadores, obtienen el filtro y el predictor en una etapa, así como la relación entre ambos. En esta sección generalizamos dichos resultados, presentando un algoritmo de filtrado y predicción del estado en sistemas con ruidos aditivos correlados en un intervalo de tiempo finito.

Consideremos un sistema con observaciones inciertas descrito por la ecuación dinámica:

Ecuación del estado

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)\omega(k), \quad k \geq 0 \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Ecuación de la observación

$$z(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0$$

donde

- x_0 es un vector aleatorio centrado con matriz de covarianzas $P(0)$.
- $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ son sucesiones blancas centradas con

$$\begin{aligned}E[\omega(k)\omega^T(l)] &= Q(k)\delta_{kl} \\E[v(k)v^T(l)] &= R(k)\delta_{kl} \\E[\omega(k)v^T(l)] &= T(k, l)\end{aligned}$$

donde $T(k, l) = 0$ cuando $l - k < -s$ ó $l - k > t$, con $s = -1, 0, 1, \dots$ y $t = 0, 1, 2, \dots$, s y t fijos.

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- El estado inicial, x_0 , es independiente de las sucesiones $\{\omega(k), k \geq 0\}$, $\{v(k), k \geq 0\}$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$, y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es independiente de $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$.

Observemos que en el caso $s = -1$ y $t = 0$ este sistema coincide con el estudiado por Nahi [18] y, si $s = -1$ y $t = 1$, el sistema es el considerado por Hermoso y Linares [5].

En lo sucesivo, notaremos por $\hat{x}(k/l)$, $\hat{\omega}(k/l)$ y $\hat{v}(k/l)$ a los estimadores lineales de menor error cuadrático medio de $x(k)$, $\omega(k)$ y $v(k)$, respectivamente, dadas las observaciones $z(0), \dots, z(l)$. Los correspondientes errores de estimación se notarán, como es usual, por $e_x(k/l)$, $e_\omega(k/l)$ y $e_v(k/l)$ y, por último, notaremos por

$$P(k/l) = E [e_x(k/l)e_x^T(k/l)]$$

$$P_{y\tau}(k, l/j) = E [e_y(k/j)e_\tau^T(l/j)]$$

a las matrices de covarianzas y covarianzas cruzadas de dicho errores, donde $\{y(k), k \geq 0\}$ y $\{\tau(k), k \geq 0\}$ pueden ser indistintamente los procesos $\{x(k), k \geq 0\}$, $\{\omega(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$.

Como ya hemos mencionado, nuestro objetivo es obtener un algoritmo de filtrado y predicción del estado. Para ello, haciendo uso de la Técnica de Proyecciones Ortogonales (Sección 1.5.1), primero deducimos tanto las expresiones que relacionan al predictor y al filtro del estado (Teoremas 2.5.1 y 2.5.3), como las que relacionan a las matrices de covarianzas de los errores (Teorema 2.5.4). Seguidamente, se obtienen las expresiones recursivas de los estimadores de los ruidos aditivos (Teorema 2.5.6) y, finalmente, resumimos los resultados en el Teorema 2.5.11.

Teorema 2.5.1

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k) + \Gamma(k+1, k)\hat{\omega}(k/k), \quad k \geq 0$$

$$\hat{x}(0/-1) = 0.$$

-Demostración-

Veamos que $\Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k) + \Gamma(k+1, k)\hat{\omega}(k/k)$ cumple el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1). De la ecuación del estado tenemos que

$$E[x(k+1)z^T(\alpha)] = \Phi(k+1, k)E[x(k)z^T(\alpha)] + \Gamma(k+1, k)E[\omega(k)z^T(\alpha)]$$

y, por el Lema de Proyecciones Ortogonales,

$$E[x(k+1)z^T(\alpha)] = \Phi(k+1, k)E[\hat{x}(k/k)z^T(\alpha)] + \Gamma(k+1, k)E[\hat{\omega}(k/k)z^T(\alpha)]$$

para $\alpha = 0, \dots, k$. Por tanto,

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k) + \Gamma(k+1, k)\hat{\omega}(k/k).$$

En el instante inicial, el estimador de $x(0)$ es su media, de modo que $\hat{x}(0/-1) = 0$. □

A continuación obtenemos la expresión del filtro del estado dado el predictor en una etapa.

Recordemos que, como consecuencia del Teorema 1.5.2, el filtro del estado se puede expresar en función del predictor en una etapa como

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + F(k)[z(k) - \hat{z}(k/k-1)], \quad k \geq 0 \quad (2.5.1)$$

siendo $F(k)$ la *matriz de ganancia* del filtro y $z(k) - \hat{z}(k/k-1)$ el *proceso innovación*, que denotábamos por $\delta(k)$. A continuación se establece la expresión de dicho proceso, así como sus matrices de covarianzas.

Proposición 2.5.2 *El proceso innovación está dado por*

$$\begin{aligned} \delta(k) &= z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1), \quad k > 0 \\ \delta(0) &= z(0). \end{aligned}$$

Las matrices de covarianzas de este proceso verifican

$$\begin{aligned}\Pi(k) &= p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + p^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + \\ & p(k)H(k)P_{xv}(k, k/k-1) + p(k)P_{vx}(k, k/k-1)H^T(k) + \\ & P_{vv}(k, k/k-1), \quad k > 0 \\ \Pi(0) &= p(0)H(0)P(0)H^T(0) + R(0)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}S(k) &= \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ & \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) &= P(0).\end{aligned}$$

-Demostración-

Por el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1) sabemos que $\hat{z}(k/k-1)$ es el único elemento del subespacio generado por las observaciones $\{z(0), \dots, z(k-1)\}$ que verifica

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = E[\hat{z}(k/k-1)z^T(\alpha)], \quad \alpha = 0, \dots, k-1. \quad (2.5.2)$$

Por la ecuación de la observación, y dado que la sucesión de variables aleatorias independientes $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es, a su vez, independiente de $(x_0, \{\omega(k), k \geq 0\}, \{v(k), k \geq 0\})$, se tiene que

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = p(k)H(k)E[x(k)z^T(\alpha)] + E[v(k)z^T(\alpha)]$$

y, por el Lema de Proyecciones Ortogonales,

$$E[z(k)z^T(\alpha)] = E[\{p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1)\}z^T(\alpha)]$$

para $\alpha = 0, \dots, k-1$. Por (2.5.2), concluimos que

$$\hat{z}(k/k-1) = p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) + \hat{v}(k/k-1).$$

Por lo tanto, el proceso innovación está dado por

$$\delta(k) = z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1).$$

En el instante inicial, es inmediato que $\hat{z}(0/-1) = 0$ y, por tanto, $\delta(0) = z(0)$.

Estudiemos, a continuación, las matrices de covarianzas de este proceso, $\Pi(k) = E[\delta(k)\delta^T(k)]$. Dado que $\hat{z}(k/k-1)$ es ortogonal a $\delta(k)$, tenemos que

$$\Pi(k) = E[z(k)\delta^T(k)].$$

Sustituyendo la expresión de la innovación que acabamos de obtener

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & E[z(k)z^T(k)] - p(k)E[z(k)\hat{x}^T(k/k-1)]H^T(k) - \\ & E[z(k)\hat{v}^T(k/k-1)]. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Por la propiedades impuestas sobre el modelo,

$$\begin{aligned} - E[z(k)z^T(k)] = & p(k)H(k)S(k)H^T(k) + p(k)E[v(k)x^T(k)]H^T(k) + \\ & p(k)H(k)E[x(k)v^T(k)] + E[v(k)v^T(k)] \end{aligned}$$

donde $S(k)$ es la matriz de covarianzas del estado.

$$\begin{aligned} - E[z(k)\hat{x}^T(k/k-1)] = & p(k)H(k)E[x(k)\hat{x}^T(k/k-1)] + \\ & E[v(k)\hat{x}^T(k/k-1)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - E[z(k)\hat{v}^T(k/k-1)] = & p(k)H(k)E[x(k)\hat{v}^T(k/k-1)] + \\ & E[v(k)\hat{v}^T(k/k-1)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.5.3) y agrupando términos,

$$\begin{aligned}\Pi(k) = & p(k)(1 - p(k))H(k)S(k)H^T(k) + \\ & p^2(k)H(k)E[x(k)e_x^T(k/k-1)]H^T(k) + \\ & p(k)H(k)E[x(k)e_v^T(k/k-1)] + p(k)E[v(k)e_x^T(k/k-1)]H^T(k) + \\ & E[v(k)e_v^T(k/k-1)].\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que los estimadores $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ son ortogonales a los errores $e_x(k/k-1)$ y $e_v(k/k-1)$, se obtiene la expresión de $\Pi(k)$.

La expresión de $\Pi(0)$ es inmediata con sólo observar que $\delta(0) = z(0)$.

Para finalizar, dado que $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es una sucesión blanca e independiente de x_0 , la expresión recursiva de la matriz de covarianzas del estado, $S(k)$, se obtiene de forma inmediata. \square

Teorema 2.5.3 *El filtro del estado se expresa en función del predictor en una etapa como*

$$\begin{aligned}\hat{x}(k/k) = & \hat{x}(k/k-1) + \\ & F(k)[z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)], \quad k \geq 0\end{aligned}$$

donde la matriz de ganancia del filtro es

$$F(k) = [p(k)P(k/k-1)H^T(k) + P_{xv}(k, k/k-1)] \Pi^{-1}(k), \quad k \geq 0$$

y $\Pi(k)$ está dada en la Proposición 2.5.2.

-Demostración-

Sustituyendo en (2.5.1) la expresión dada para la innovación, se obtiene, de forma inmediata, la ecuación del filtro.

A continuación obtenemos la matriz de ganancia. Por (2.5.1) tenemos que el error de filtrado verifica

$$e_x(k/k) = e_x(k/k-1) - F(k)\delta(k).$$

Ya que $e_x(k/k)$ es ortogonal a la observación $z(k)$, $E[e_x(k/k)z^T(k)] = 0$ y, consecuentemente,

$$E[e_x(k/k-1)z^T(k)] = F(k)\Pi(k), \quad (2.5.4)$$

luego

$$F(k) = E[e_x(k/k-1)z^T(k)]\Pi^{-1}(k). \quad (2.5.5)$$

A continuación calculamos $E[e_x(k/k-1)z^T(k)]$. De la ecuación de la observación y por la independencia entre la sucesión $\{\gamma(k), k \geq 0\}$, el estado inicial y $(\{\omega(k), k \geq 0\}, \{v(k), k \geq 0\})$ tenemos que

$$\begin{aligned} E[e_x(k/k-1)z^T(k)] &= p(k)E[e_x(k/k-1)x^T(k)]H^T(k) + \\ &E[e_x(k/k-1)v^T(k)] \end{aligned}$$

y, como los errores de estimación son ortogonales a los estimadores,

$$E[e_x(k/k-1)z^T(k)] = p(k)P(k/k-1)H^T(k) + P_{xv}(k, k/k-1).$$

Sustituyendo esta expresión en (2.5.5), obtenemos la expresión deseada para $F(k)$. □

Observemos que la existencia de las inversas de las matrices $\Pi(k)$, para $k \geq 0$, no está asegurada con las hipótesis realizadas sobre el sistema. Si no existen, se utilizarán las pseudoinversas de estas matrices (Magnus y Neudecker [15]).

En el siguiente teorema se dan las expresiones que relacionan a las matrices de covarianzas de los errores de predicción y filtrado del estado.

Teorema 2.5.4

$$\begin{aligned}
 P(k+1/k) = & \Phi(k+1, k)P(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\
 & \Phi(k+1, k)P_{x\omega}(k, k/k)\Gamma^T(k+1, k) + \\
 & \Gamma(k+1, k)P_{\omega x}(k, k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\
 & \Gamma(k+1, k)P_{\omega\omega}(k, k/k)\Gamma^T(k+1, k), \quad k \geq 0
 \end{aligned}$$

$$P(0/-1) = P(0)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - F(k)\Pi(k)F^T(k), \quad k \geq 0.$$

-Demostración-

La expresión de $P(k+1/k)$ es inmediata sin más que tener en cuenta que el error de predicción verifica

$$e_x(k+1/k) = \Phi(k+1, k)e_x(k/k) + \Gamma(k+1, k)e_\omega(k/k).$$

En $k=0$, dado que $\hat{x}(0/-1) = 0$, tenemos que $P(0/-1) = P(0)$.

Por otra parte, de la expresión $e_x(k/k) = e_x(k/k-1) - F(k)\delta(k)$, es claro que

$$\begin{aligned}
 P(k/k) = & P(k/k-1) - E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)]F^T(k) - \quad (2.5.6) \\
 & F(k)E[\delta(k)e_x^T(k/k-1)] + F(k)\Pi(k)F^T(k).
 \end{aligned}$$

Puesto que $\delta(k) = z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 E[e_x(k/k-1)\delta^T(k)] = & E[e_x(k/k-1)z^T(k)] - \\
 & p(k)E[e_x(k/k-1)\hat{x}^T(k/k-1)]H^T(k) - \\
 & E[e_x(k/k-1)\hat{v}^T(k/k-1)].
 \end{aligned}$$

Ya que el error $e_x(k/k-1)$ es ortogonal a los estimadores $\hat{x}(k/k-1)$ y $\hat{v}(k/k-1)$, los dos últimos términos se anulan y, teniendo en cuenta (2.5.4),

$$E [e_x(k/k-1)\delta^T(k)] = F(k)\Pi(k).$$

Sustituyendo esta expresión en (2.5.6), queda demostrada la última parte del teorema. \square

Debemos hacer hincapié en que para la obtención de los estimadores del estado es necesario determinar tanto $\hat{\omega}(k/k)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ como las matrices de covarianzas $P_{\omega\omega}(k, k/k)$ y $P_{vv}(k, k/k-1)$ y de covarianzas cruzadas $P_{\omega x}(k, k/k)$ y $P_{vx}(k, k/k-1)$.

Comenzamos obteniendo los estimadores $\hat{\omega}(k/k)$ y $\hat{v}(k/k-1)$. Al no conocer la modelización de los ruidos aditivos, no es posible obtener ecuaciones que expresen a los predictores de estos procesos en función de los filtros. Debido a esto, para determinar dichos estimadores, usaremos las siguientes expresiones obtenidas como consecuencia del Lema de Proyecciones Ortogonales:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(k/l) &= \hat{\omega}(k/l-1) + F_{\omega}(k,l)\delta(l), & 0 \leq l \leq k \\ \hat{v}(k/l) &= \hat{v}(k/l-1) + F_v(k,l)\delta(l), & 0 \leq l \leq k-1\end{aligned}$$

donde $\{\delta(k), k \geq 0\}$ es el proceso innovación (Proposición 2.5.2).

El siguiente resultado proporciona las condiciones iniciales de estas expresiones recursivas.

Proposición 2.5.5

- (a) $\hat{\omega}(k/l) = 0, \quad l < k - s.$
- (b) $\hat{v}(k/l) = 0, \quad l \leq k - \max\{t, 1\}.$

-Demostración-

Es inmediata ya que, debido a las hipótesis realizadas sobre el sistema, $\omega(k)$ es incorrelado con $z(l)$ para $l < k - s$, y $v(k)$ es incorrelado con $z(l)$ para $l \leq k - \max\{t, 1\}$. \square

Como consecuencia de este resultado, observemos que si $s = -1$, el estimador $\hat{\omega}(k/k) = 0$, y si $t \leq 1$ entonces $\hat{v}(k/k - 1) = 0$. Por tanto, en tales casos, los estimadores de los ruidos necesarios para la determinación del predictor y el filtro del estado son nulos.

En el siguiente teorema se establece las fórmulas generales para la determinación de $\hat{\omega}(k/k)$ y $\hat{v}(k/k - 1)$.

Teorema 2.5.6

(a) Si $s = -1$: $\hat{\omega}(k/k) = 0$.

Si $s > -1$: $\hat{\omega}(k/k)$ se determina a partir de la siguiente expresión

$$\hat{\omega}(k/l) = \hat{\omega}(k/l - 1) + F_{\omega}(k, l)\delta(l), \quad \max\{0, k - s\} \leq l \leq k$$

con condición inicial

$$\hat{\omega}(k/\max\{0, k - s\} - 1) = 0,$$

donde $F_{\omega}(k, l) = [p(l)P_{\omega x}(k, l/l - 1)H^T(l) + P_{\omega v}(k, l/l - 1)] \Pi^{-1}(l)$.

(b) Si $t \leq 1$: $\hat{v}(k/k - 1) = 0$.

Si $t > 1$: $\hat{v}(k/k - 1)$ se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\hat{v}(k/l) = \hat{v}(k/l - 1) + F_v(k, l)\delta(l), \quad \max\{0, k - t + 1\} \leq l \leq k - 1$$

con condición inicial

$$\hat{v}(k/\max\{0, k-t+1\} - 1) = 0,$$

$$\text{donde } F_v(k, l) = [p(l)P_{vx}(k, l/l-1)H^T(l) + P_{vv}(k, l/l-1)] \Pi^{-1}(l).$$

-Demostración-

Teniendo en cuenta los comentarios previos a este teorema y la Proposición 2.5.2, basta probar las expresiones de las matrices de ganancia.

Obtenemos la expresión de $F_\omega(k, l)$ y, de forma análoga, se obtiene la de $F_v(k, l)$. Teniendo en cuenta que $e_\omega(k/l) = e_\omega(k/l-1) - F_\omega(k, l)\delta(l)$, y dado que $e_\omega(k/l)$ es ortogonal a la observación $z(l)$ se tiene que

$$E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] = F_\omega(k, l)\Pi(l),$$

por lo que

$$F_\omega(k, l) = E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] \Pi^{-1}(l).$$

Veamos la expresión de $E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)]$. Como $\hat{z}(l/l-1)$ es ortogonal al error $e_\omega(k/l-1)$ y $\hat{\omega}(k/l-1)$ es ortogonal a la innovación,

$$\begin{aligned} E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] &= E [e_\omega(k/l-1)\delta^T(l)] \\ &= E [\omega(k)\delta^T(l)]. \end{aligned}$$

Por tanto, usando la expresión para la innovación y la ecuación de la observación, por las hipótesis de independencia,

$$\begin{aligned} E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] &= p(l)E [\omega(k)x^T(l)] H^T(l) + E [\omega(k)v^T(l)] - \\ &\quad p(l)E [\omega(k)\hat{x}^T(l/l-1)] H^T(l) - \\ &\quad E [\omega(k)\hat{v}^T(l/l-1)], \end{aligned}$$

por lo que, agrupando términos,

$$E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] = p(l)E [\omega(k)e_x^T(l/l-1)] H^T(l) + E [\omega(k)e_v^T(l/l-1)].$$

Entonces, ya que $\hat{\omega}(k/l-1)$ es ortogonal a los errores $e_x(l/l-1)$ y $e_v(l/l-1)$,

$$E [e_\omega(k/l-1)z^T(l)] = p(l)P_{\omega x}(k, l/l-1)H^T(l) + P_{\omega v}^T(k, l/l-1)$$

y se obtiene la expresión de $F_\omega(k, l)$. □

A continuación, se dan las expresiones de las matrices de covarianzas $P_{\omega\omega}(k, k/k)$ y $P_{vv}(k, k/k-1)$ (Teorema 2.5.7) y de covarianzas cruzadas $P_{\omega x}(k, k/k)$ y $P_{vx}(k, k/k-1)$ (Teorema 2.5.8). La demostración de ambos teoremas se realiza de forma análoga a la del Teorema 2.5.4 usando las expresiones de los errores de estimación y aplicando el Lema de Proyecciones Ortogonales.

Teorema 2.5.7

(a) Si $s = -1$: $P_{\omega\omega}(k, k/k) = Q(k)$.

Si $s > -1$: $P_{\omega\omega}(k, k/k)$ se determina mediante la siguiente expresión

$$P_{\omega\omega}(k, k/l) = P_{\omega\omega}(k, k/l-1) - F_\omega(k, l)\Pi(l)F_\omega^T(k, l), \quad \max\{0, k-s\} \leq l \leq k$$

con condición inicial

$$P_{\omega\omega}(k, k/\max\{0, k-s\}-1) = Q(k).$$

(b) Si $t \leq 1$: $P_{vv}(k, k/k-1) = R(k)$.

Si $t > 1$: $P_{vv}(k, k/k-1)$ se obtiene a partir de esta expresión

$$P_{vv}(k, k/l) = P_{vv}(k, k/l-1) - F_v(k, l)\Pi(l)F_v^T(k, l), \quad \max\{0, k-t+1\} \leq l \leq k-1$$

con condición inicial

$$P_{vv}(k, k/\max\{0, k-t+1\}-1) = R(k).$$

□

Teorema 2.5.8

(a) Si $s = -1$: $P_{\omega x}(k, k/k) = 0$.

Si $s > -1$: $P_{\omega x}(k, k/k)$ se obtiene mediante las siguientes expresiones

$$P_{\omega x}(k, l/l) = P_{\omega x}(k, l/l-1) - F_\omega(k, l)\Pi(l)F^T(l), \quad \max\{0, k-s\} \leq l \leq k$$

$$P_{\omega x}(k, l/l-1) = P_{\omega x}(k, l-1/l-1)\Phi^T(l, l-1) + P_{\omega\omega}(k, l-1/l-1)\Gamma^T(l, l-1), \quad \max\{0, k-s\} < l \leq k$$

con condición inicial

$$P_{\omega x}(k, \max\{0, k-s\}/\max\{0, k-s\}-1) = 0.$$

(b) Si $t = 0$: $P_{vx}(k, k/k-1) = 0$.

Si $t = 1$: $P_{vx}(k, k/k-1) = T^T(k-1, k)\Gamma^T(k, k-1)$.

Si $t > 1$: $P_{vx}(k, k/k-1)$ se determina a partir de esta expresión

$$P_{vx}(k, l/l-1) = P_{vx}(k, l-1/l-2)\Phi^T(l, l-1) + P_{v\omega}(k, l-1/l-1)\Gamma^T(l, l-1) - F_v(k, l-1)\Pi(l-1)F^T(l-1)\Phi^T(l, l-1), \quad \max\{0, k-t+1\} < l \leq k$$

con condición inicial

$$P_{vx}(k, \max\{0, k-t+1\} / \max\{0, k-t+1\} - 1) =$$

$$\begin{cases} 0, & k-t+1 \leq 0 \\ T^T(k-t, k)\Gamma^T(k-t+1, k-t), & k-t+1 > 0. \end{cases}$$

□

Notemos que la determinación de las matrices $P_{\omega x}(k, k/k)$ ($s > -1$) y $P_{vx}(k, k/k)$ ($t > 1$) requiere conocer $P_{\omega\omega}(k, l/l)$ y $P_{v\omega}(k, l/l)$, respectivamente. Sus expresiones se dan a continuación.

Teorema 2.5.9

(a) $P_{\omega\omega}(k, l/l)$, $\max\{0, k-s\} \leq l \leq k-1$, se determina a partir de

$$P_{\omega\omega}(k, l/j) = P_{\omega\omega}(k, l/j-1) - F_{\omega}(k, j)\Pi(j)F_{\omega}^T(l, j), \quad \max\{0, k-s\} \leq j \leq l$$

con condición inicial

$$P_{\omega\omega}(k, l/\max\{0, k-s\} - 1) = 0.$$

(b) Si $s = -1$: $P_{v\omega}(k, l/l) = T^T(l, k)$, $\max\{0, k-t+1\} \leq l \leq k-1$.

Si $s > -1$: $P_{v\omega}(k, l/l)$, $\max\{0, k-t+1\} \leq l \leq k-1$, se determina a partir de

$$P_{v\omega}(k, l/j) = P_{v\omega}(k, l/j-1) - F_v(k, j)\Pi(j)F_{\omega}^T(l, j), \quad \max\{0, k-t+1, l-s\} \leq j \leq l$$

con condición inicial

$$P_{v\omega}(k, l/\max\{0, k-t+1, l-s\} - 1) = T^T(l, k).$$

□

Por último, en el siguiente teorema se determinan las matrices de covarianzas $P_{\omega v}(k, l/l-1)$ y $P_{vv}(k, l/l-1)$, necesarias para la obtención de $F_{\omega}(k, l)$ ($s > -1$) y $F_v(k, l)$ ($t > 1$), respectivamente.

Teorema 2.5.10

(a) Si $t \leq 1$ o $s = 0$: $P_{\omega v}(k, l/l-1) = T(k, l)$, $\max\{0, k-s\} \leq l \leq k$.

Si $t > 1$ y $s > 0$: $P_{\omega v}(k, l/l-1)$, $\max\{0, k-s\} \leq l \leq k$, se obtiene a partir de

$$P_{\omega v}(k, l/j) = P_{\omega v}(k, l/j-1) - F_{\omega}(k, j)\Pi(j)F_v^T(l, j), \max\{0, k-s, l-t+1\} \leq j \leq l-1$$

con condición inicial

$$P_{\omega v}(k, l/\max\{0, k-s, l-t+1\}-1) = T(k, l).$$

(b) $P_{vv}(k, l/l-1)$, $\max\{0, k-t+1\} \leq l \leq k-1$, se obtiene a partir de

$$P_{vv}(k, l/j) = P_{vv}(k, l/j-1) - F_v(k, j)\Pi(j)F_v^T(l, j), \max\{0, k-t+1\} \leq j \leq l-1$$

con condición inicial

$$P_{vv}(k, l/\max\{0, k-t+1\}-1) = 0.$$

□

Para finalizar, resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema, resolviendo así los problemas de filtrado y predicción para el estado de sistemas con observaciones inciertas y ruidos aditivos correlados en un intervalo de tiempo finito.

Teorema 2.5.11 *El filtro y el predictor del estado están dados por*

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k/k) + \Gamma(k+1, k)\hat{\omega}(k/k), \quad k \geq 0$$

$$\hat{x}(0/-1) = 0$$

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) +$$

$$F(k)[z(k) - p(k)H(k)\hat{x}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1)], \quad k \geq 0$$

donde la matriz de ganancia del filtro verifica

$$F(k) = [p(k)P(k/k-1)H^T(k) + P_{vx}^T(k, k/k-1)] \Pi^{-1}(k)$$

siendo

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k)(1-p(k))H(k)S(k)H^T(k) + p^2(k)H(k)P(k/k-1)H^T(k) + \\ & p(k)H(k)P_{vx}^T(k, k/k-1) + p(k)P_{vx}(k, k/k-1)H^T(k) + \\ & P_{vv}(k, k/k-1), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} S(k) = & \Phi(k, k-1)S(k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ & \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1), \quad k > 0 \\ S(0) = & P(0). \end{aligned}$$

Las matrices de covarianzas de los errores de filtrado y predicción satisfacen

$$\begin{aligned} P(k+1/k) = & \Phi(k+1, k)P(k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\ & \Phi(k+1, k)P_{\omega x}^T(k, k/k)\Gamma^T(k+1/k) + \\ & \Gamma(k+1/k)P_{\omega x}(k, k/k)\Phi^T(k+1, k) + \\ & \Gamma(k+1/k)P_{\omega\omega}(k, k/k)\Gamma^T(k+1/k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$P(0/-1) = P(0)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - F(k)\Pi(k)F^T(k), \quad k \geq 0.$$

Los estimadores $\hat{\omega}(k/k)$ y $\hat{v}(k/k-1)$ están dados en el Teorema 2.5.6, las matrices de covarianzas $P_{\omega\omega}(k, k/k)$ y $P_{vv}(k, k/k-1)$ en el Teorema 2.5.7,

y las matrices de covarianzas cruzadas $P_{\omega x}(k, k/k)$ y $P_{vx}(k, k/k - 1)$ se determinan en el Teorema 2.5.8. □

Capítulo 3

Estimación Lineal mediante Observaciones Inciertas usando Funciones de Covarianza

3.1 Introducción

En el capítulo anterior, bajo la hipótesis de que la descripción interna del sistema es conocida, se han deducido estimadores recursivos para el estado de sistemas con observaciones inciertas. Ahora bien, la especificación de un modelo de espacio de estados no siempre es posible ni fácil, por lo que parece razonable retomar el problema de estimación en sistemas con observaciones inciertas sin partir de esta base.

Consideremos un sistema estocástico lineal en tiempo discreto cuya ecuación de observación está dada por

$$z(k) = y(k) + v(k)$$

donde $\{z(k), k \geq 0\}$ es el proceso m -dimensional que describe la observación, $\{y(k), k \geq 0\}$ es un proceso centrado que representa la señal del sistema y $\{v(k), k \geq 0\}$ es el ruido de la observación, también centrado.

El primer investigador que abordó el estudio de estimadores lineales de menor error cuadrático medio de $\{y(k), k \geq 0\}$ fue Wiener (Haykin [4], Kailath [8]), quien, para procesos estacionarios, obtuvo su famoso filtro utilizando como información las funciones de covarianza de la señal y el ruido. A partir del Lema de Proyecciones Ortogonales, dedujo una ecuación, denominada *Ecuación de Wiener-Hopf*, cuya solución proporciona una expresión para la función impulso-respuesta del filtro de la señal. En el caso de procesos no estacionarios, aunque no es difícil extender dicha ecuación, la obtención de su solución es más complicada y para resolverla no existe un método general. Entre los numerosos trabajos para procesos no estacionarios, cabe destacar el de Shinbrot (Kailath [8]), quien trabajó bajo la hipótesis de que la función

$$L(k, l) = E [y(k)y^T(l)] + E [y(k)v^T(l)] + E [v(k)y^T(l)]$$

tiene forma de núcleo semi-degenerado, es decir,

$$L(k, l) = \begin{cases} A(k)B^T(l), & k \geq l \\ B(k)A^T(l), & k \leq l. \end{cases}$$

Así, sin necesidad de especificar el modelo de espacio de estados del sistema, se obtuvieron fórmulas explícitas para la determinación del filtro de la señal, tanto para procesos estacionarios como no estacionarios. Los estimadores así obtenidos, sin embargo, no poseen las ventajas computacionales que aporta la recursividad del filtro de Kalman cuando se conoce el modelo de espacio de estados.

En la década de los 80, Nakamori soluciona este inconveniente y, bajo una hipótesis similar a la de Shinbrot, concretamente, suponiendo que la matriz de covarianzas de la señal tiene forma de núcleo semi-degenerado, deduce algoritmos recursivos para la obtención de estimadores lineales de menor error cuadrático medio.

Nakamori [19] traslada el problema de resolver la ecuación de Wiener-Hopf al de la resolución de un conjunto de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales nulas y, de esta forma, obtiene el predictor de una señal escalar a partir de observaciones perturbadas por un ruido blanco, gaussiano e incorrelado con la señal. Posteriormente, en 1992, Nakamori [20] extiende estos resultados, obteniendo un algoritmo recursivo para la determinación del suavizador punto fijo bajo la hipótesis de que las observaciones están afectadas por ruido blanco y ruido coloreado.

Como se ha comentado anteriormente, es razonable retomar el problema de estimación en sistemas con observaciones inciertas, objetivo de esta memoria, cuando no se conoce el modelo de espacio de estados.

Consideremos la siguiente ecuación de observación

$$z(k) = \gamma(k)y(k) + v(k)$$

donde $\{z(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional que describe la observación, el proceso $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ representa la incertidumbre de las observaciones y es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$, $\{y(k), k \geq 0\}$ representa el proceso señal que se desea estimar y $\{v(k), k \geq 0\}$ es el error de la observación.

Para este tipo de sistemas y supuestas conocidas la matriz de transición del estado y la función de covarianzas cruzadas del estado y la señal, Naka-

mori [21], en 1997, deduce el filtro y el suavizador punto fijo de la señal. En este mismo trabajo, Nakamori presenta un método que permite identificar la matriz de transición del estado y la función de covarianzas cruzadas del estado y la señal a partir de la función de covarianzas de la señal.

Posteriormente, Caballero et al. [2] generalizan estos resultados sin necesidad de realizar las suposiciones anteriores. Para sistemas con observaciones inciertas donde las observaciones están afectadas por ruido blanco y ruido coloreado y bajo las hipótesis de que tanto la matriz de covarianzas de la señal como la del ruido coloreado se expresan en forma de núcleo semi-degenerado, obtienen algoritmos recursivos para el suavizador punto fijo, el filtro y el predictor de la señal.

Bajo las mismas hipótesis que Caballero et al. [2], es decir, suponiendo que la matriz de covarianzas de la señal se expresa en forma de núcleo semi-degenerado, en este capítulo tratamos el problema de estimación lineal de menor error cuadrático medio. Estudiaremos dicho problema considerando, en primer lugar, que la señal y el ruido aditivo están correlados en el mismo instante y, más tarde, que dicha correlación es en un intervalo de tiempo finito. Notemos que el hecho de suponer que la función de covarianza de la señal tiene forma de núcleo semi-degenerado permite trabajar tanto con procesos estacionarios como no estacionarios.

La estructura del capítulo es la siguiente:

En la Sección 3.2 resumimos brevemente los resultados de Caballero et al. [2] para sistemas con observaciones afectadas por un ruido blanco más uno coloreado.

A continuación, en la Sección 3.3, se aborda el problema de estimación

lineal de la señal en sistemas donde la señal y el ruido de la observación están correlados en el mismo instante de tiempo.

Por último, en la Sección 3.4, extendemos los resultados anteriores considerando que ambos procesos están correlados en un intervalo de tiempo finito.

3.2 Observaciones afectadas por Ruido Blanco más Ruido Coloreado

Bajo la hipótesis de que la observación del sistema está perturbada por un ruido blanco más un ruido coloreado, en 2001, Caballero et al. [2] obtienen fórmulas recursivas para los estimadores lineales de menor error cuadrático medio de la señal. A continuación presentamos un resumen de este trabajo.

Consideremos un sistema con ecuación de observación

$$z(k) = \gamma(k)y(k) + v_b(k) + v_c(k), \quad k > 0$$

donde

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- $\{y(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional centrado cuya función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semi-degenerado

$$K(k, s) = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s \end{cases}$$

donde A y B son funciones matriciales de dimensiones $m \times p$.

- $\{v_b(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con matrices de covarianzas $R(k)$, siendo $R(k)$ definida positiva para todo k .
- $\{v_c(k), k \geq 0\}$ es un ruido coloreado centrado cuya función de covarianzas está dada en forma de núcleo semi-degenerado

$$K_c(k, s) = \begin{cases} \alpha(k)\beta^T(s), & 0 \leq s \leq k \\ \beta(k)\alpha^T(s), & 0 \leq k \leq s \end{cases}$$

donde α y β son funciones matriciales de dimensiones $m \times p'$.

- $\{y(k), k \geq 0\}$, $\{\gamma(k), k \geq 0\}$, $\{v_b(k), k \geq 0\}$ y $\{v_c(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

A partir del Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1), Caballero et al. [2] obtienen algoritmos recursivos para el suavizador punto fijo y el filtro de la señal. En el siguiente teorema se presentan los resultados relativos al problema de filtrado.

Teorema 3.2.1 *El filtro de la señal está dado por*

$$\hat{y}(k/k) = A(k)O(k), \quad k > 0$$

donde $O(k)$ se calcula, de forma recursiva, mediante

$$O(k) = O(k-1) + J(k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1) - \alpha(k)Q(k-1)], \quad k > 0$$

$$O(0) = 0$$

$$Q(k) = Q(k-1) + I(k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1) - \alpha(k)Q(k-1)], \quad k > 0$$

$$Q(0) = 0$$

siendo

$$J(k, k) = [p(k)B^T(k) - p(k)r(k-1)A^T(k) - c(k-1)\alpha^T(k)] \Pi^{-1}(k)$$

$$I(k, k) = [\beta^T(k) - p(k)c^T(k-1)A^T(k) - d(k-1)\alpha^T(k)] \Pi^{-1}(k)$$

y donde $\Pi(k)$ está dada por

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k) [B(k) - p(k)A(k)r(k-1) - \alpha(k)c^T(k-1)] A^T(k) + \\ & [\beta(k) - p(k)A(k)c(k-1) - \alpha(k)d(k-1)] \alpha^T(k) + R(k). \end{aligned}$$

Las funciones matriciales r , c y d son de dimensiones $p \times p$, $p \times p'$ y $p' \times p'$, respectivamente, y verifican

$$r(k) = r(k-1) + J(k, k) [p(k)B(k) - p(k)A(k)r(k-1) - \alpha(k)c^T(k-1)]$$

$$r(0) = 0$$

$$c(k) = c(k-1) + J(k, k) [\beta(k) - p(k)A(k)c(k-1) - \alpha(k)d(k-1)]$$

$$c(0) = 0$$

$$d(k) = d(k-1) + I(k, k) [\beta(k) - p(k)A(k)c(k-1) - \alpha(k)d(k-1)]$$

$$d(0) = 0.$$

□

Observemos que, con este resultado, se resuelve también el caso considerado en la Sección 2.4 del capítulo anterior. En efecto, si $\{v_c(k), k \geq 0\}$ verifica la ecuación recursiva:

$$v_c(k+1) = \Psi(k+1, k)v_c(k) + \Gamma(k+1, k)\sigma(k)$$

siendo $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ un ruido blanco, es fácil ver que la función de covarianzas de este proceso tiene forma de núcleo semi-degenerado:

$$K_c(k, s) = \begin{cases} \alpha(k)\beta^T(s), & 0 \leq s \leq k \\ \beta(k)\alpha^T(s), & 0 \leq k \leq s \end{cases}$$

donde $\alpha(k) = \Psi(k, 0)$ y $\beta(k) = K_c(k, k)\Psi^T(0, k)$. Entonces, una vez identificadas estas matrices y suponiendo que el proceso $\{v_b(k), k \geq 0\}$ es nulo, el teorema anterior permite obtener el filtro de la señal en el caso antes reseñado sin necesidad de conocer el modelo de espacio de estados.

3.3 Ruido de Observación Correlado con la Señal

Bajo las hipótesis de que los procesos señal y ruido están correlados en el mismo instante de tiempo y que la función de covarianzas de la señal se expresa en forma de núcleo semi-degenerado, en esta sección se deducen algoritmos de predicción y filtrado para la señal.

Consideremos un sistema cuya ecuación de observación es

$$z(k) = \gamma(k)y(k) + v(k), \quad k > 0$$

donde

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- $\{y(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional centrado con función de covarianzas

$$K_y(k, s) = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s \end{cases}$$

donde A y B son funciones matriciales de dimensiones $m \times p$.

- $\{v(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_{ks}$.
- $\{y(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ están correlados en el mismo instante de tiempo, siendo $E[y(k)v^T(s)] = T(k)\delta_{ks}$.
- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es independiente de $(\{y(k), k \geq 0\}, \{v(k), k \geq 0\})$.

El objetivo es obtener estimadores lineales de menor error cuadrático medio de la señal dadas las observaciones $\{z(1), \dots, z(L)\}$; concretamente nuestro interés recae en deducir expresiones para el filtro ($L = k$) y el predictor ($L = k - 1$). Estos estimadores serán representados por

$$\hat{y}(k/L) = \sum_{i=1}^L h(k, i, L)z(i)$$

donde $h(k, i, L)$, para $i = 1, \dots, L$, es la función impulso-respuesta.

Por el Lema de Proyecciones Ortogonales, la ecuación de Wiener-Hopf para este estimador está dada por

$$E[y(k)z^T(s)] = \sum_{i=1}^L h(k, i, L)E[z(i)z^T(s)], \quad s \leq L.$$

Teniendo en cuenta la ecuación de observación y al ser $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ independiente de $\{y(k), k \geq 0\}$ obtenemos

$$E[y(k)z^T(s)] = p(s)K_y(k, s) + T(k)\delta_{ks}.$$

Por otro lado, y de nuevo por la ecuación de observación, tenemos que

$$\sum_{i=1}^L h(k, i, L) E [z(i)z^T(s)] = \sum_{i=1}^L h(k, i, L) \{E [\gamma(i)\gamma(s)] K_y(i, s) + p(i)E [y(i)v^T(s)] + p(s)E [v(i)y^T(s)] + E [v(i)v^T(s)]\}, \quad s \leq L.$$

Entonces, denotando

$$\begin{aligned} \bar{K}(i, s) &= E [\gamma(i)\gamma(s)] K_y(i, s) \\ S(s) &= p(s)T(s) + p(s)T^T(s) + R(s), \end{aligned}$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^L h(k, i, L) E [z(i)z^T(s)] = \sum_{i=1}^L h(k, i, L) \bar{K}(i, s) + h(k, s, L)S(s), \quad s \leq L$$

y, por tanto, la ecuación de Wiener-Hopf es

$$h(k, s, L)S(s) = p(s)K_y(k, s) + T(k)\delta_{ks} - \sum_{i=1}^L h(k, i, L)\bar{K}(i, s), \quad s \leq L. \quad (3.3.1)$$

Basándonos en esta ecuación obtenemos, en primer lugar, el algoritmo de predicción (Sección 3.3.1) y, posteriormente, el de filtrado (Sección 3.3.2).

3.3.1 Predictor de la Señal

La ecuación (3.3.1) para $L = k - 1$ es

$$h(k, s, k - 1)S(s) = p(s)K_y(k, s) - \sum_{i=1}^{k-1} h(k, i, k - 1)\bar{K}(i, s), \quad s \leq k - 1.$$

Dado que $s < k$, $K_y(k, s) = A(k)B^T(s)$ y es fácil ver que,

$$h(k, s, k - 1) = A(k)J(s, k - 1),$$

donde $J(s, k-1)$ verifica

$$J(s, k-1)S(s) = p(s)B^T(s) - \sum_{i=1}^{k-1} J(i, k-1)\bar{K}(i, s), \quad s \leq k-1. \quad (3.3.2)$$

Por tanto, definiendo

$$O(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} J(i, k-1)z(i), \quad (3.3.3)$$

el predictor $\hat{y}(k/k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} h(k, i, k-1)z(i)$ está dado por

$$\hat{y}(k/k-1) = A(k)O(k-1). \quad (3.3.4)$$

A la vista de esta expresión, nuestro objetivo es obtener una expresión recursiva para $O(k)$. Antes de ello, en la siguiente proposición se establece la expresión del proceso innovación y de su matriz de covarianzas.

Proposición 3.3.1 *El proceso innovación está dado por*

$$\delta(k) = z(k) - p(k)A(k)O(k-1), \quad k > 0.$$

Las matrices de covarianzas de este proceso satisfacen

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k) [B(k) - p(k)A(k)r(k-1)] A^T(k) + \\ & p(k)T(k) + p(k)T^T(k) + R(k), \quad k > 0 \end{aligned}$$

siendo $r(k) = E [O(k)O^T(k)]$.

-Demostración-

Por el Lema de Proyecciones Ortogonales (Teorema 1.5.1) sabemos que $\hat{z}(k/k-1)$ es el único elemento del subespacio generado por las observaciones $\{z(1), \dots, z(k-1)\}$ que verifica

$$E [z(k)z^T(s)] = E [\hat{z}(k/k-1)z^T(s)], \quad s \leq k-1. \quad (3.3.5)$$

Por la ecuación de observación, dado que la sucesión de variables aleatorias independientes $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es, a su vez, independiente de los procesos $\{y(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$, se tiene

$$E [z(k)z^T(s)] = p(k)E [y(k)z^T(s)], \quad s \leq k - 1.$$

Entonces, por el Lema de Proyecciones Ortogonales,

$$E [z(k)z^T(s)] = p(k)E [\hat{y}(k/k - 1)z^T(s)], \quad s \leq k - 1$$

y, teniendo en cuenta (3.3.4) y (3.3.5), concluimos que

$$\hat{z}(k/k - 1) = p(k)A(k)O(k - 1). \quad (3.3.6)$$

Por lo tanto, el proceso innovación está dado por

$$\delta(k) = z(k) - p(k)A(k)O(k - 1).$$

A continuación se obtienen las matrices de covarianzas de este proceso, $\Pi(k) = E [\delta(k)\delta^T(k)]$. Dado que $\hat{z}(k/k - 1)$ es ortogonal a $\delta(k)$ tenemos que $E [z(k)\hat{z}^T(k/k - 1)] = E [\hat{z}(k/k - 1)\hat{z}^T(k/k - 1)]$, por tanto

$$\Pi(k) = E [z(k)z^T(k)] - E [\hat{z}(k/k - 1)\hat{z}^T(k/k - 1)].$$

Por la ecuación de observación, el primer término verifica

$$E [z(k)z^T(k)] = p(k)K_y(k, k) + p(k)T(k) + p(k)T^T(k) + R(k),$$

y, por (3.3.6), el segundo es

$$E [\hat{z}(k/k - 1)\hat{z}^T(k/k - 1)] = p^2(k)A(k)r(k - 1)A^T(k)$$

Restando estas expresiones y agrupando términos

$$\begin{aligned}\Pi(k) = & p(k) [B(k) - p(k)A(k)r(k-1)] A^T(k) + \\ & p(k)T(k) + p(k)T^T(k) + R(k).\end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema deducimos un algoritmo de predicción en una etapa para la señal del sistema.

Teorema 3.3.2 *El predictor de la señal está dado por*

$$\hat{y}(k/k-1) = A(k)O(k-1), \quad k \geq 1$$

donde $O(k)$ se calcula, de forma recursiva, mediante

$$\begin{aligned}O(k) &= O(k-1) + J(k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1)] \\ O(0) &= 0\end{aligned}$$

siendo

$$J(k, k) = p(k) [B^T(k) - r(k-1)A^T(k)] \Pi^{-1}(k)$$

con

$$\begin{aligned}\Pi(k) = & p(k) [B(k) - p(k)A(k)r(k-1)] A^T(k) + \\ & p(k)T(k) + p(k)T^T(k) + R(k).\end{aligned}$$

Las matrices $r(k)$ se obtienen mediante

$$\begin{aligned}r(k) &= r(k-1) + p(k)J(k, k) [B(k) - A(k)r(k-1)] \\ r(0) &= 0.\end{aligned}$$

-Demostración-

La expresión del predictor de la señal se ha obtenido en (3.3.4). A continuación se deduce la ecuación recursiva para el cálculo de $O(k)$. De la definición de $O(k)$ dada en (3.3.3),

$$O(k) - O(k - 1) = J(k, k)z(k) + \sum_{i=1}^{k-1} (J(i, k) - J(i, k - 1)) z(i). \quad (3.3.7)$$

Estudiamos la expresión de $J(s, k) - J(s, k - 1)$ para $s \leq k - 1$. Por (3.3.2) obtenemos

$$(J(s, k) - J(s, k - 1)) S(s) = -J(k, k)\bar{K}(k, s) - \sum_{i=1}^{k-1} (J(i, k) - J(i, k - 1)) \bar{K}(i, s).$$

Observemos que al ser $s \leq k - 1$ y $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes,

$$\bar{K}(k, s) = p(k)p(s)A(k)B^T(s)$$

y, de nuevo, por la ecuación (3.3.2), se observa que

$$J(s, k) - J(s, k - 1) = -p(k)J(k, k)A(k)J(s, k - 1), \quad s \leq k - 1.$$

Por tanto, sustituyendo estas diferencias en (3.3.7) y teniendo en cuenta (3.3.3) obtenemos

$$O(k) = O(k - 1) + J(k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k - 1)],$$

con condición inicial $O(0) = 0$.

A continuación deducimos la expresión de la matriz $J(k, k)$. Dada la ecuación anterior y la expresión del proceso innovación (Proposición 3.3.1) tenemos que

$$O(k) = O(k - 1) + J(k, k)\delta(k). \quad (3.3.8)$$

Entonces,

$$E [O(k)\delta^T(k)] = E [O(k-1)\delta^T(k)] + J(k, k)\Pi(k)$$

y, ya que por el Lema de Proyecciones Ortogonales sabemos que la esperanza $E [O(k-1)\delta^T(k)]$ es nula, obtenemos

$$J(k, k) = E [O(k)\delta^T(k)] \Pi^{-1}(k).$$

Calculamos, a continuación, $E [O(k)\delta^T(k)]$. Por la definición del proceso innovación,

$$E [O(k)\delta^T(k)] = E [O(k)z^T(k)] - E [O(k)\hat{z}^T(k/k-1)]. \quad (3.3.9)$$

Estudiamos estos términos por separado:

- En virtud de la definición de $O(k)$ dada en (3.3.3) y las propiedades de independencia y correlación

$$\begin{aligned} E [O(k)z^T(k)] &= \sum_{i=1}^k J(i, k) E [z(i)z^T(k)] \\ &= \sum_{i=1}^k J(i, k) \bar{K}(i, k) + \\ &\quad J(k, k) [p(k)T(k) + p(k)T^T(k) + R(k)]. \end{aligned}$$

Entonces, por la ecuación (3.3.2), obtenemos

$$E [O(k)z^T(k)] = p(k)B^T(k).$$

- Dada la expresión (3.3.8) y ya que $\delta(k)$ es ortogonal a $\hat{z}(k/k-1)$ tenemos que

$$E [O(k)\hat{z}^T(k/k-1)] = E [O(k-1)\hat{z}^T(k/k-1)],$$

luego, por (3.3.6),

$$E [O(k)\hat{z}^T(k/k-1)] = p(k)r(k-1)A^T(k).$$

Sustituyendo ambas expresiones en (3.3.9),

$$E [O(k)\delta^T(k)] = p(k) [B^T(k) - r(k-1)A^T(k)]$$

y se obtiene así la expresión deseada para $J(k, k)$.

Por último, obtenemos la ecuación recursiva para el cálculo de $r(k)$. Dada la expresión (3.3.8) y ya que $\delta(k)$ es ortogonal a $O(k-1)$, obtenemos

$$r(k) = r(k-1) + J(k, k)\Pi(k)J^T(k, k),$$

y teniendo en cuenta que, como acabamos de ver,

$$\Pi(k)J^T(k, k) = p(k) [B(k) - A(k)r(k-1)]$$

se tiene la expresión de $r(k)$. □

Mediante la matriz de covarianzas del error $y(k) - \hat{y}(k/k-1)$, se conoce el comportamiento del predictor. A partir del Lema de Proyecciones Ortogonales es fácil obtener dicha matriz.

Teorema 3.3.3 *La matriz de covarianzas del error de predicción está dada por*

$$P(k/k-1) = A(k) [B^T(k) - r(k-1)A^T(k)], \quad k > 0.$$

□

3.3.2 Filtro de la Señal

Teniendo en cuenta la expresión (3.3.1), la ecuación de Wiener-Hopf para la función impulso-respuesta del filtro es

$$\begin{aligned} h(k, s, k)S(s) &= p(s)K_y(k, s) + T(k)\delta_{ks} - \sum_{i=1}^k h(k, i, k)\bar{K}(i, s) \\ &= \begin{pmatrix} A(k) & I_{m \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(s)B^T(s) \\ T(k)\delta_{ks} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^k h(k, i, k)\bar{K}(i, s) \end{aligned}$$

para $s \leq k$.

Sea $J(k, s, k)$ una función matricial que verifica

$$J(k, s, k)S(s) = \begin{pmatrix} p(s)B^T(s) \\ T(k)\delta_{ks} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^k J(k, i, k)\bar{K}(i, s), \quad s \leq k. \quad (3.3.10)$$

Entonces, $h(k, s, k) = \begin{pmatrix} A(k) & I_{m \times m} \end{pmatrix} J(k, s, k)$ y el filtro de la señal satisface

$$\hat{y}(k/k) = \begin{pmatrix} A(k) & I_{m \times m} \end{pmatrix} \hat{O}(k)$$

siendo $\hat{O}(k) = \sum_{i=1}^k J(k, i, k)z(i)$.

Nuestro objetivo, ahora, es obtener una expresión para $\hat{O}(k)$. Para ello, definimos la función matricial

$$\bar{J}(s, k) = \begin{pmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} J(s, k), \quad s \leq k,$$

y sea $\bar{O}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{J}(i, k)z(i)$, es decir, $\bar{O}(k) = \begin{pmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} O(k)$. Por (3.3.2),

claramente, $\bar{J}(s, k)$ verifica

$$\bar{J}(s, k)S(s) = \begin{pmatrix} p(s)B^T(s) \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^k \bar{J}(i, k)\bar{K}(i, s), \quad s \leq k. \quad (3.3.11)$$

A partir de esta ecuación, en el siguiente teorema, se obtiene una expresión para $\hat{O}(k)$.

Teorema 3.3.4

$$\hat{O}(k) = \bar{O}(k-1) + J(k, k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1)]$$

donde

$$J(k, k, k) = \left[\begin{pmatrix} p(k)B^T(k) \\ T(k) \end{pmatrix} - p(k) \begin{pmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} r(k-1)A^T(k) \right] \Pi^{-1}(k)$$

y las matrices $r(k)$ y $\Pi(k)$ están dadas en el Teorema 3.3.2.

-Demostración-

Por como se han definido $\hat{O}(k)$ y $\bar{O}(k-1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{O}(k) - \bar{O}(k-1) &= J(k, k, k)z(k) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{k-1} (J(k, i, k) - \bar{J}(i, k-1)) z(i). \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Estudiemos $J(k, s, k) - \bar{J}(s, k-1)$ para $s \leq k-1$. Por las ecuaciones (3.3.10) y (3.3.11), sabemos que

$$\begin{aligned} (J(k, s, k) - \bar{J}(s, k-1)) S(s) &= -J(k, k, k)\bar{K}(k, s) - \\ &\quad \sum_{i=1}^{k-1} (J(k, i, k) - \bar{J}(i, k-1)) \bar{K}(i, s) \end{aligned}$$

y, comparando con (3.3.2),

$$J(k, s, k) - \bar{J}(s, k-1) = -p(k)J(k, k, k)A(k)J(s, k-1), \quad s \leq k-1.$$

Por tanto, sustituyendo estas diferencias en (3.3.12) y teniendo en cuenta (3.3.3) obtenemos

$$\hat{O}(k) = \bar{O}(k-1) + J(k, k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1)].$$

La expresión de $J(k, k, k)$ se obtiene mediante un razonamiento similar al realizado en el Teorema 3.3.2 para $J(k, k)$.

□

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente algoritmo de filtrado.

Teorema 3.3.5 *El filtro de la señal está dado por*

$$\hat{y}(k/k) = \begin{pmatrix} A(k) & I_{m \times m} \end{pmatrix} \hat{O}(k), \quad k > 0$$

donde $\hat{O}(k)$ verifica

$$\begin{aligned} \hat{O}(k) &= \begin{pmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} O(k-1) + J(k, k, k) [z(k) - p(k)A(k)O(k-1)] \\ \hat{O}(0) &= 0 \end{aligned}$$

siendo

$$J(k, k, k) = \left[\begin{pmatrix} p(k)B^T(k) \\ T(k) \end{pmatrix} - p(k) \begin{pmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} r(k-1)A^T(k) \right] \Pi^{-1}(k).$$

Las expresiones de $O(k)$, $r(k)$ y $\Pi(k)$ están dadas en el Teorema 3.3.2.

□

A partir del Lema de Proyecciones Ortogonales y teniendo en cuenta la expresión del filtro de la señal, se presenta, en el siguiente teorema, la matriz de covarianzas del error de filtrado.

Teorema 3.3.6

$$\begin{aligned} P(k/k) &= A(k)B^T(k) - A(k)r(k-1)A^T(k) - \\ &\quad \begin{pmatrix} A(k) & I_{m \times m} \end{pmatrix} J(k, k, k) \Pi(k) J^T(k, k, k) \begin{pmatrix} A^T(k) \\ I_{m \times m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

3.4 Señal y Ruido Correlados en un Intervalo de Tiempo Finito

En esta sección extendemos los resultados anteriores considerando que existe correlación no nula entre la señal y el ruido de la observación en un intervalo de tiempo finito. Bajo esta hipótesis, y suponiendo que la función de covarianzas de la señal es conocida, se obtienen algoritmos de predicción y filtrado para la señal.

Consideremos un sistema cuya ecuación de observación es

$$z(k) = \gamma(k)y(k) + v(k), \quad k > 0$$

donde

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$.
- $\{y(k), k \geq 0\}$ es un proceso m -dimensional centrado con función de covarianzas $K_y(k, s)$ conocida.
- $\{v(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco centrado con $E[v(k)v^T(s)] = R(k)\delta_{ks}$.
- $\{y(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ están correlados en un intervalo de tiempo finito, siendo

$$E[y(k)v^T(s)] = T(k, s)$$

donde $T(k, s) = 0$ si $s - k < -l$ ó $s - k > t$, siendo l y t fijos, con $l = -1, 0, 1, \dots$ y $t = 0, 1, 2, \dots$

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es independiente de $(\{y(k), k \geq 0\}, \{v(k), k \geq 0\})$.

Observemos que si la función de covarianzas de la señal tiene forma de núcleo semi-degenerado, esto es,

$$K_y(k, s) = \begin{cases} A(k)B^T(s), & 0 \leq s \leq k \\ B(k)A^T(s), & 0 \leq k \leq s \end{cases}$$

y, además, $l = -1$ y $t = 0$, el sistema descrito coincide con el considerado por Caballero et al. [2] cuando las observaciones están únicamente afectadas por un ruido blanco incorrelado con la señal. Por otro lado, en la misma situación, si $l = t = 0$ el sistema es el estudiado en la sección anterior.

El objetivo es obtener el predictor, $\hat{y}(k/k-1)$, y el filtro, $\hat{y}(k/k)$, lineal de menor error cuadrático medio de la señal, para lo que utilizaremos la siguiente expresión, consecuencia inmediata del Lema de Proyecciones Ortogonales:

$$\hat{y}(k/L) = \hat{y}(k/L-1) + J(k, L)\delta(L), \quad L \leq k$$

donde $\delta(L) = z(L) - \hat{z}(L/L-1)$ representa la innovación en el instante L .

En la siguiente proposición, presentamos la expresión del proceso innovación y de su matriz de covarianzas. Su demostración es análoga a la realizada en la Proposición 3.3.1.

Proposición 3.4.1 *El proceso innovación está dado por*

$$\delta(k) = z(k) - p(k)\hat{y}(k/k-1) - \hat{v}(k/k-1), \quad k > 0$$

donde $\hat{v}(k/k-1)$ es el predictor del ruido de la observación.

Las matrices de covarianzas de este proceso satisfacen

$$\begin{aligned} \Pi(k) = & p(k) [K_y(k, k) + T(k, k) + T^T(k, k) - \\ & p(k)r(k, k/k-1) - c(k, k/k-1) - c^T(k, k/k-1)] + \\ & R(k) - f(k, k/k-1), \quad k > 0 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} r(k, k/k-1) &= E [\hat{y}(k/k-1)\hat{y}^T(k/k-1)] \\ c(k, k/k-1) &= E [\hat{y}(k/k-1)\hat{v}^T(k/k-1)] \\ f(k, k/k-1) &= E [\hat{v}(k/k-1)\hat{v}^T(k/k-1)]. \end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema se establece la fórmula general para la determinación del predictor y el filtro de la señal.

Teorema 3.4.2 *Las expresiones del predictor y del filtro de la señal se obtienen mediante*

$$\begin{aligned} \hat{y}(k/L) &= \hat{y}(k/L-1) + J(k, L)\delta(L), \quad 1 \leq L \leq k \quad (3.4.1) \\ \hat{y}(k/0) &= 0 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} J(k, L) &= [p(L) [K_y(k, L) - r(k, L/L-1)] + \\ &\quad T(k, L) - c(k, L/L-1)] \Pi^{-1}(L) \\ r(k, L/L-1) &= E [\hat{y}(k/L-1)\hat{y}^T(L/L-1)] \\ c(k, L/L-1) &= E [\hat{y}(k/L-1)\hat{v}^T(L/L-1)] \end{aligned}$$

y donde $\Pi(L)$ está dada en la Proposición 3.4.1.

-Demostración-

Como ya se ha indicado, la ecuación (3.4.1) es consecuencia inmediata del Lema de Proyecciones Ortogonales y, entonces, basta probar la expresión de la matriz de ganancia.

Por la ecuación (3.4.1) sabemos

$$E [\hat{y}(k/L)\delta^T(L)] = E [\hat{y}(k/L - 1)\delta^T(L)] + J(k, L)\Pi(L),$$

y por el Lema de Proyecciones Ortogonales, $E [\hat{y}(k/L - 1)\delta^T(L)] = 0$; entonces

$$J(k, L) = E [\hat{y}(k/L)\delta^T(L)] \Pi^{-1}(L). \quad (3.4.2)$$

Por la definición del proceso innovación,

$$E [\hat{y}(k/L)\delta^T(L)] = E [\hat{y}(k/L)z^T(L)] - E [\hat{y}(k/L)\hat{z}^T(L/L - 1)]. \quad (3.4.3)$$

Analizamos estos dos términos por separado.

- Por el Lema de Proyecciones Ortogonales,

$$\begin{aligned} E [\hat{y}(k/L)z^T(L)] &= E [y(k)z^T(L)] \\ &= p(L)K_y(k, L) + T(k, L). \end{aligned}$$

- Por la ecuación (3.4.1) y ya que la innovación es ortogonal a $\hat{z}(L/L - 1)$ se tiene

$$E [\hat{y}(k/L)\hat{z}^T(L/L - 1)] = E [\hat{y}(k/L - 1)\hat{z}^T(L/L - 1)]$$

por tanto, dado que

$$\hat{z}(L/L - 1) = p(L)\hat{y}(L/L - 1) + \hat{v}(L/L - 1),$$

obtenemos

$$E [\hat{y}(k/L)\hat{z}^T(L/L - 1)] = p(L)r(k, L/L - 1) + c(k, L/L - 1).$$

Sustituyendo ambas esperanzas en (3.4.3) y teniendo en cuenta (3.4.2) obtenemos la expresión de $J(k, L)$. \square

Como se ha visto en la Proposición 3.4.1, el proceso innovación depende del predictor del ruido de la observación, $\hat{v}(k/k-1)$. En el teorema siguiente, cuya demostración es análoga a la anterior, se obtiene su expresión.

Teorema 3.4.3 $\hat{v}(k/k-1)$ se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \hat{v}(k/L) &= \hat{v}(k/L-1) + J_v(k, L)\delta(L), \quad \max\{1, k-t\} \leq L \leq k-1 \\ \hat{v}(k/\max\{1, k-t\}-1) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J_v(k, L) &= \left[p(L) [T(L, k) - c(L, k/L-1)]^T - \right. \\ &\quad \left. f(k, L/L-1) \right] \Pi^{-1}(L) \\ f(k, L/L-1) &= E [\hat{v}(k/L-1)\hat{v}^T(L/L-1)]. \end{aligned}$$

\square

El conocimiento de la matriz de covarianzas del proceso innovación y las matrices de ganancia de los estimadores conlleva la determinación de $r(k, L/L-1)$, $c(k, L/L-1)$, $c(L, k/L-1)$ y $f(k, L/L-1)$, para $1 \leq L \leq k$.

Teorema 3.4.4

(a) $r(k, L/L-1)$, $1 \leq L \leq k$, se determina mediante

$$\begin{aligned} r(k, L/j) &= r(k, L/j-1) + J(k, j)\Pi(j)J^T(L, j), \quad 1 \leq j \leq L-1 \\ r(k, L/0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) $c(k, L/L - 1)$ y $c(L, k/L - 1)$, $1 \leq L \leq k$, se calculan a partir de

$$c(M, N/j) = c(M, N/j - 1) + J(M, j)\Pi(j)J_v^T(N, j),$$

$$\max\{1, N - t\} \leq j \leq L - 1$$

$$c(M, N/\max\{1, N - t\} - 1) = 0.$$

(c) $f(k, L/L - 1)$, $\max\{1, k - t\} \leq L \leq k$, se obtiene a partir de

$$f(k, L/j) = f(k, L/j - 1) + J_v(k, j)\Pi(j)J_v^T(L, j),$$

$$\max\{1, k - t\} \leq j \leq L - 1$$

$$f(k, L/\max\{1, k - t\} - 1) = 0.$$

-Demostración-

La demostración es inmediata teniendo en cuenta los Teoremas 3.4.2 y 3.4.3 y la ortogonalidad de la innovación y los estimadores. \square

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema, donde presentamos un algoritmo de predicción y filtrado para la señal del sistema.

Teorema 3.4.5 *El predictor y el filtro de la señal se obtienen mediante*

$$\hat{y}(k/L) = \hat{y}(k/L - 1) +$$

$$J(k, L) [z(L) - p(L)\hat{y}(L/L - 1) - \hat{v}(L/L - 1)], \quad 1 \leq L \leq k$$

$$\hat{y}(k/0) = 0$$

$$\hat{v}(k/L) = \hat{v}(k/L - 1) + J_v(k, L) [z(L) - p(L)\hat{y}(L/L - 1) - \hat{v}(L/L - 1)],$$

$$\max\{1, k - t\} \leq L \leq k - 1$$

$$\hat{v}(k/\max\{1, k - t\} - 1) = 0$$

siendo

$$\begin{aligned}
 J(k, L) &= [p(L) [K_y(k, L) - r(k, L/L - 1)] + \\
 &\quad T(k, L) - c(k, L/L - 1)] \Pi^{-1}(L) \\
 J_v(k, L) &= \left[p(L) [T(L, k) - c(L, k/L - 1)]^T - f(k, L/L - 1) \right] \Pi^{-1}(L) \\
 \Pi(L) &= p(L) [K_y(L, L) + T(L, L) + T^T(L, L) - p(L)r(L, L/L - 1) - \\
 &\quad c(L, L/L - 1) - c^T(L, L/L - 1)] + R(L) - f(L, L/L - 1)
 \end{aligned}$$

y donde

$$\begin{aligned}
 r(k, L/j) &= r(k, L/j - 1) + J(k, j)\Pi(j)J^T(L, j), \quad 1 \leq j \leq L - 1 \\
 r(k, L/0) &= 0 \\
 c(M, N/j) &= c(M, N/j - 1) + J(M, j)\Pi(j)J_v^T(N, j), \\
 &\quad \max\{1, N - t\} \leq j \leq L - 1 \\
 c(M, N/\max\{1, N - t\} - 1) &= 0 \\
 f(k, L/j) &= f(k, L/j - 1) + J_v(k, j)\Pi(j)J_v^T(L, j), \\
 &\quad \max\{1, k - t\} \leq j \leq L - 1 \\
 f(k, L/\max\{1, k - t\} - 1) &= 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

A partir del Lema de Proyecciones Ortogonales y los estimadores de la señal dados en el teorema anterior, se obtienen las matrices de covarianzas de los errores de estimación.

Teorema 3.4.6 *La matrices de covarianzas de los errores de predicción y filtrado están dadas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned}
 P(k/k - 1) &= K_y(k, k) - r(k, k/k - 1) \\
 P(k/k) &= K_y(k, k) - r(k, k/k - 1) - J(k, k)\Pi(k)J^T(k, k). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ejemplo Numérico

En esta memoria se han obtenido algoritmos de filtrado para la señal de un sistema lineal con observaciones inciertas. Básicamente, los resultados obtenidos dependen de la información disponible sobre el sistema bajo estudio: modelo de espacio de estados (Capítulo 2) o funciones de covarianzas (Capítulo 3). A continuación presentamos aplicaciones numéricas de algunos de estos algoritmos.

En primer lugar consideramos un sistema escalar con modelo de espacio de estados conocido y con ruido de la observación correlado en el tiempo. Para estimar el proceso señal, en este caso, utilizamos el algoritmo propuesto en el Teorema 2.4.9.

Seguidamente, consideramos un sistema en el que no conocemos la ecuación del estado y sólo disponemos de las funciones de covarianzas de los procesos que intervienen en el sistema. Bajo la hipótesis de que el proceso señal está correlado con el ruido de la observación en el mismo instante de tiempo, su estimación se realiza a partir del Teorema 3.3.5.

Para la simulación de las observaciones y la implementación de los algoritmos se ha utilizado el programa “Mathematica”.

Consideremos el sistema lineal escalar descrito por la siguiente ecuación dinámica

$$x(k+1) = 0.9x(k) + \omega(k), \quad k \geq 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$z(k) = \gamma(k)x(k) + v(k) \quad k \geq 0.$$

donde

- x_0 es una variable aleatoria gaussiana centrada con varianza 1.

- $\{\omega(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco con distribución

$$P[\omega(k) = -1] = \frac{8}{11} \quad P[\omega(k) = 2] = \frac{2}{11} \quad P[\omega(k) = 4] = \frac{1}{11}$$

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p$.

Como ya hemos comentado, en primer lugar vamos a suponer que el ruido de la observación, $\{v(k), k \geq 0\}$, es correlado en el tiempo y está modelizado por la siguiente ecuación dinámica

$$\begin{aligned} v(k+1) &= 0.1v(k) + \sigma(k) \\ v(0) &= v_0 \end{aligned}$$

siendo v_0 una variable aleatoria gaussiana con media cero y varianza 1 y $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ un ruido blanco gaussiano centrado con varianza 1. Además supondremos que $x_0, v_0, \{\omega(k), k \geq 0\}, \{\gamma(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ son mutuamente independientes.

Por las hipótesis realizadas sobre el sistema, el algoritmo propuesto en el Teorema 2.4.9 es válido para estimar el proceso $\{x(k), k \geq 0\}$.

En primer lugar, mediante las varianzas de los errores de filtrado, estudiamos el comportamiento del filtro para distintos valores sobre la probabilidad de falsa alarma. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

k	$1-p=0.9$	$1-p=0.5$	$1-p=0.1$		k	$1-p=0.9$	$1-p=0.5$	$1-p=0.1$
0	0.9909	0.8333	0.5737		26	12.1315	5.2723	1.7889
1	3.6156	2.4749	1.1306		27	12.1348	5.2741	1.7895
2	5.6409	3.3409	1.3042		28	12.1373	5.2755	1.7899
3	7.1895	3.8529	1.4083		29	12.1393	5.2766	1.7902
4	8.3681	4.1907	1.4860		30	12.1409	5.2775	1.7905
5	9.2633	4.4311	1.5469		31	12.1422	5.2783	1.7907
6	9.9431	4.7478	1.5951		32	12.1432	5.2789	1.7909
7	10.4595	4.8549	1.6336		33	12.1441	5.2794	1.7911
8	10.8523	4.9395	1.6643		34	12.1447	5.2798	1.7912
9	11.1516	5.0067	1.6890		35	12.1452	5.2801	1.7913
10	11.3800	5.0603	1.7088		36	12.1456	5.2804	1.7914
11	11.5547	5.1032	1.7247		37	12.1460	5.2806	1.7914
12	11.6885	5.1376	1.7376		38	12.1462	5.2808	1.7915
13	11.7914	5.1653	1.7479		39	12.1465	5.2809	1.7915
14	11.8705	5.1876	1.7563		40	12.1466	5.2810	1.7916
15	11.9316	5.2056	1.7631		41	12.1468	5.2811	1.7916
16	11.9788	5.2201	1.7686		42	12.1469	5.2812	1.7916
17	12.0155	5.2318	1.7729		43	12.1470	5.2812	1.7916
18	12.0439	5.2413	1.7765		44	12.1470	5.2813	1.7917
19	12.0661	5.2489	1.7794		45	12.1471	5.2813	1.7917
20	12.0833	5.2552	1.7818		46	12.1472	5.2814	1.7917
21	12.0969	5.2602	1.7837		47	12.1472	5.2814	1.7917
22	12.1074	5.2643	1.7852		48	12.1472	5.2814	1.7917
23	12.1158	5.2676	1.7864		49	12.1473	5.2814	1.7917
24	12.1223	5.2676	1.7874		50	12.1473	5.2814	1.7917
25	12.1275	5.2702	1.7883		≥ 51	12.1473	5.2814	1.7917

Tabla 1. Varianzas de los Errores de Filtrado

Como puede observarse, a medida que disminuye la probabilidad de falsa alarma ($1 - p$), decrece también la varianza del error de filtrado. Los mejores resultados se obtienen, por tanto, para $1 - p = 0.1$, estabilizándose a partir de la iteración 44.

Con $P[\gamma(k) = 1] = 0.9$, se han simulado el estado y las observaciones para el sistema bajo estudio. Los valores del filtro y del estado simulado se representan hasta el instante 200 en la gráfica siguiente.

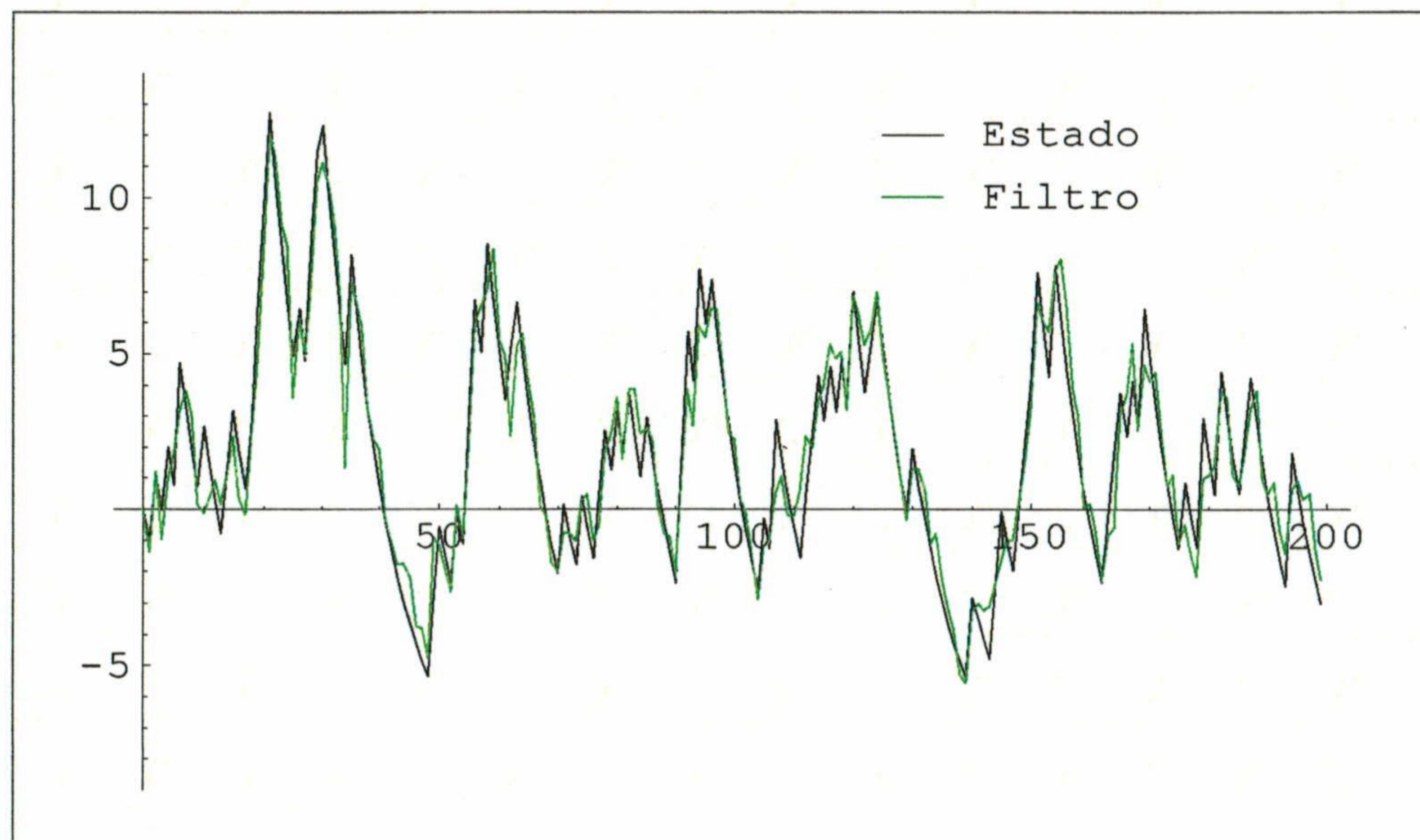


Figura 1. Estado Simulado y Filtro Propuesto

Por otra parte, a partir del algoritmo propuesto por Nahi (Teorema 2.3.1), se ha obtenido el filtro del estado para las observaciones anteriormente simuladas. Con objeto de comparar el filtro propuesto y el filtro de Nahi hemos calculado la media de los errores cuadráticos de filtrado; algunos de estos

valores se presentan en la Tabla 2.

	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x(i) - \hat{x}(i/i))^2$	
	Filtro Propuesto	Filtro de Nahi
$k = 50$	1.28097	1.28349
$k = 100$	1.10926	1.11654
$k = 150$	0.99657	1.00362
$k = 200$	1.03827	1.04819

Tabla 2. Media Errores Cuadráticos de Filtrado

Como cabía esperar, dado que las observaciones proceden de un sistema con ruido de la observación correlado, el filtro propuesto se comporta mejor que el de Nahi.

Consideremos, ahora, un sistema cuya ecuación del estado es desconocida, y las observaciones se obtienen mediante

$$z(k) = \gamma(k)x(k) + v(k)$$

donde

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con $P[\gamma(k) = 1] = p$.
- $\{x(k), k \geq 0\}$ es un proceso escalar centrado cuya función de covarianzas se expresa en forma de núcleo semi-degenerado, siendo

$$A(k) = 15.311 \times (0.9)^k \quad \text{y} \quad B(k) = (0.9)^{-k}.$$

- $\{v(k), k \geq 0\}$ es un ruido blanco con distribución

$$P[v(k) = 1] = \frac{8}{11} \quad P[v(k) = -2] = \frac{2}{11} \quad P[v(k) = -4] = \frac{1}{11}.$$

- $\{x(k), k \geq 0\}$ y $\{v(k), k \geq 0\}$ están correlados en el mismo instante de tiempo, con $T = E[x(k)v(k)] = -\frac{13}{11}$.

- $\{\gamma(k), k \geq 0\}$ es independiente de $(\{x(k), k \geq 0\}, \{v(k), k \geq 0\})$.

Con objeto de estimar la señal del sistema, y teniendo en cuenta las hipótesis impuestas sobre él, aplicamos el algoritmo de filtrado propuesto en Teorema 3.3.5.

Como en el caso anterior, comenzamos estudiando el comportamiento de las varianzas de los errores de filtrado (Teorema 3.3.6) para distintos valores sobre la probabilidad de falsa alarma. Los resultados se presentan en la Tabla 3. Como cabía esperar, de nuevo, la varianza de los errores decrece a medida que lo hace la probabilidad de falsa alarma. Los mejores resultados, por tanto, los obtenemos para $1 - p = 0.1$, donde, además, la varianza se estabiliza a partir de la octava iteración.

k	$1-p=0.9$	$1-p=0.5$	$1-p=0.1$		k	$1-p=0.9$	$1-p=0.5$	$1-p=0.1$
1	15.2820	10.8445	4.4118		22	13.4634	6.5507	2.9977
2	14.8373	8.3355	3.1569		23	13.4621	6.5507	2.9977
3	14.5018	7.3325	3.0168		24	13.4611	6.5507	2.9977
4	14.2485	6.9008	3.0001		25	13.4603	6.5507	2.9977
5	14.0569	6.7089	2.9980		26	13.4597	6.5507	2.9977
6	13.9119	6.6226	2.9978		27	13.4593	6.5507	2.9977
7	13.8020	6.5834	2.9978		28	13.4590	6.5507	2.9977
8	13.7189	6.5656	2.9977		29	13.4587	6.5507	2.9977
9	13.6558	6.5575	2.9977		30	13.4585	6.5507	2.9977
10	13.6080	6.5538	2.9977		31	13.4584	6.5507	2.9977
11	13.5718	6.5521	2.9977		32	13.4583	6.5507	2.9977
12	13.5443	6.5514	2.9977		33	13.4582	6.5507	2.9977
13	13.5234	6.5510	2.9977		34	13.4581	6.5507	2.9977
14	13.5076	6.5509	2.9977		35	13.4581	6.5507	2.9977
15	13.4956	6.5508	2.9977		36	13.4580	6.5507	2.9977
16	13.4865	6.5508	2.9977		37	13.4580	6.5507	2.9977
17	13.4796	6.5508	2.9977		38	13.4580	6.5507	2.9977
18	13.4744	6.5508	2.9977		39	13.4580	6.5507	2.9977
19	13.4704	6.55075	2.9977		40	13.4580	6.5507	2.9977
20	13.4674	6.55075	2.9977		41	13.4580	6.5507	2.9977
21	13.4651	6.55075	2.9977		≥ 42	13.4579	6.5507	2.9977

Tabla 3. Varianzas de los Errores de Filtrado

Considerando $P[\gamma(k) = 1] = 0.9$, simulamos el estado y las observaciones del sistema. Para ello hemos supuesto que la señal se modeliza por la ecuación del estado

$$x(k) = 0.9x(k-1) + \omega(k-1), \quad k \geq 0,$$

siendo la función masa de probabilidad conjunta de la perturbación del estado y del ruido de la observación

$$P[\omega(k-1) = \omega, v(k) = v] = \begin{cases} \frac{7}{11}, & \omega = -1, v = 1 \\ \frac{1}{11}, & \omega = -1, v = -4 \\ \frac{1}{11}, & \omega = 2, v = 1 \\ \frac{1}{11}, & \omega = 2, v = -2 \\ \frac{1}{11}, & \omega = 4, v = -2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir del algoritmo de filtrado propuesto en el Teorema 3.3.5, se obtiene el filtro de la señal. En la gráfica siguiente se describe la evolución del estado simulado y dicho filtro.

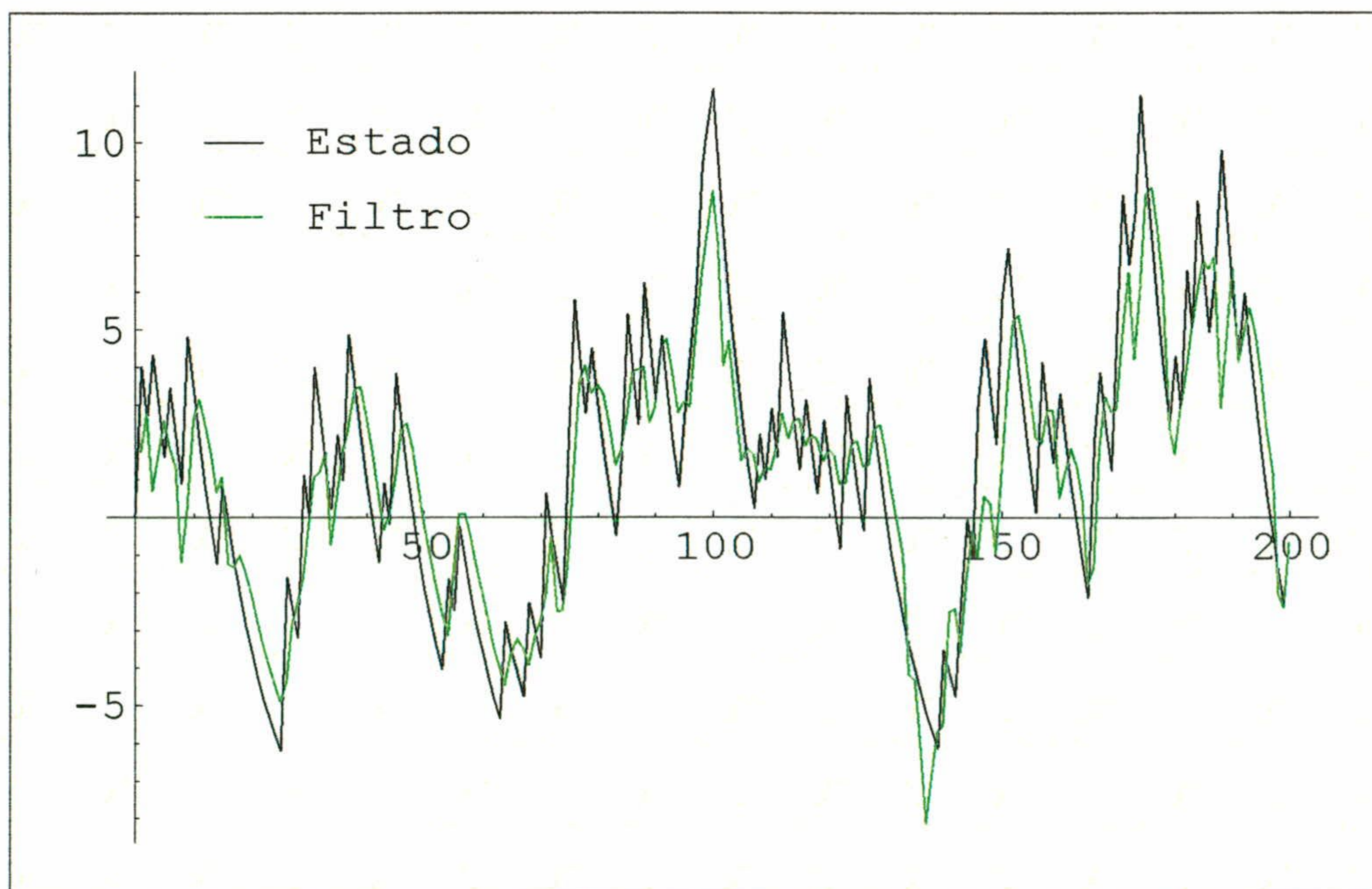


Figura 2. Estado Simulado y Filtro Propuesto

Para finalizar comparamos el comportamiento de los filtros obtenidos considerando distintos valores de la correlación del estado y el ruido, lo que da lugar a diferentes valores del coeficiente de correlación entre el estado y la observación del sistema:

$$c = \frac{E[x(k)z(k)]}{\sqrt{E[x^2(k)]E[z^2(k)]}} = \frac{15.311p + T}{\sqrt{15.311(15.311p + 2pT + \frac{32}{11})}}$$

Esto se ha realizado para distintas probabilidades de falsa alarma. Presentamos los resultados en la siguiente tabla. En la parte superior de cada celda representamos las varianzas estabilizadas de los errores de filtrado y, en la inferior, el coeficiente de correlación.

1-p	T = -13/11	T = 0	T = 2/11	T = 1
0.9	13.4579 0.043	13.1282 0.186	13.0245 0.207	12.3992 0.300
0.5	6.5507 0.540	6.0594 0.601	5.9655 0.611	5.4977 0.650
0.1	2.9977 0.844	2.5683 0.862	2.4925 0.864	2.1356 0.878
0	2.1308 0.907	1.7379 0.917	1.6695 0.919	1.3503 0.927

Tabla 4. Varianzas Estabilizadas de Errores de Filtrado y Coeficientes de Correlación

Como puede observarse, a medida que aumenta el coeficiente de correlación entre el estado y la observación, disminuyen las varianzas de los errores de filtrado. Los resultados completos, para cada caso, se pueden consultar en las tablas 5, 6, 7 y 8.

k	$T = -\frac{13}{11}$	$T = 0$	$T = 2/11$	$T = 1$
1	15.2820	14.7830	14.6556	13.9304
2	14.8373	14.3840	14.2629	13.5642
3	14.5018	14.0819	13.9654	13.2863
4	14.2485	13.8528	13.7397	13.0749
5	14.0569	13.6790	13.5684	12.9142
6	13.9119	13.5470	13.4383	12.7918
7	13.8020	13.4468	13.3394	12.6985
8	13.7189	13.3706	13.2641	12.6274
9	13.6558	13.3126	13.2069	12.5733
10	13.6080	13.2685	13.1633	12.5320
11	13.5718	13.2350	13.1302	12.5005
12	13.5443	13.2095	13.1050	12.4765
13	13.5234	13.1901	13.0858	12.4581
14	13.5076	13.1753	13.0711	12.4441
15	13.4956	13.1641	13.0600	12.4335
16	13.4865	13.1555	13.0515	12.4253
17	13.4796	13.1490	13.0451	12.4191
18	13.4744	13.1440	13.0402	12.4144
19	13.4704	13.1403	13.0364	12.4108
20	13.4674	13.1374	13.0336	12.4080
21	13.4651	13.1352	13.0314	12.4059
22	13.4634	13.1335	13.0297	12.4043
23	13.4621	13.1323	13.0285	12.4031
24	13.4611	13.1313	13.0275	12.4022
25	13.4603	13.1306	13.0268	12.4015

Tabla 5. Varianzas Errores de Filtrado ($1 - p = 0.9$)

k	$T = -\frac{13}{11}$	$T = 0$	$T = 2/11$	$T = 1$
26	13.4597	13.1300	13.0262	12.4009
27	13.4593	13.1296	13.0258	12.4005
28	13.4590	13.1293	13.0255	12.4002
29	13.4587	13.1290	13.0253	12.3999
30	13.4585	13.1288	13.0251	12.3998
31	13.4584	13.1287	13.0249	12.3996
32	13.4583	13.1286	13.0248	12.3995
33	13.4582	13.1285	13.0247	12.3994
34	13.4581	13.1284	13.0247	12.3994
35	13.4581	13.1284	13.0246	12.3993
36	13.4580	13.1284	13.0246	12.3993
37	13.4580	13.1283	13.0246	12.3992
38	13.4580	13.1283	13.0245	12.3992
39	13.4580	13.1283	13.0245	12.3992
40	13.4580	13.1283	13.0245	12.3992
41	13.4580	13.1283	13.0245	12.3992
42	13.4579	13.1283	13.0245	12.3992
43	13.4579	13.1283	13.0245	12.3992
44	13.4579	13.1283	13.0245	12.3992
45	13.4579	13.1283	13.0245	12.3992
46	13.4579	13.1283	13.0245	12.3992
≥ 47	13.4579	13.1282	13.0245	12.3992

Tabla 5 (continuación). ($1 - p = 0.9$)

k	$T = -\frac{13}{11}$	$T = 0$	$T = 2/11$	$T = 1$
1	10.8445	9.7635	9.5953	8.8328
2	8.3355	7.7189	7.6078	7.0688
3	7.3325	6.8370	6.7419	6.2676
4	6.9008	6.4311	6.339	5.8820
5	6.7089	6.2388	6.1477	5.6913
6	6.6226	6.1463	6.0545	5.5956
7	6.5834	6.1016	6.0091	5.5474
8	6.5656	6.0799	5.9869	5.5229
9	6.5575	6.0694	5.9759	5.5104
10	6.5538	6.0643	5.9706	5.5042
11	6.5521	6.0618	5.9680	5.5009
12	6.5514	6.0606	5.9667	5.4994
13	6.5510	6.0599	5.9661	5.4985
14	6.5509	6.0597	5.9658	5.4981
15	6.5508	6.0596	5.9656	5.4979
16	6.5508	6.0595	5.9655	5.4978
17	6.5508	6.0595	5.9655	5.4977
18	6.5508	6.0594	5.9655	5.4977
≥ 19	6.5507	6.0594	5.9655	5.4977

Tabla 6. Varianzas Errores de Filtrado ($1 - p = 0.5$)

k	$T = -\frac{13}{11}$	$T = 0$	$T = 2/11$	$T = 1$
1	4.4118	3.9331	3.8555	3.4961
2	3.1569	2.8328	2.7702	2.4659
3	3.0168	2.6239	2.5539	2.2227
4	3.0001	2.5801	2.5063	2.1590
5	2.9980	2.5708	2.4956	2.1419
6	2.9978	2.5688	2.4932	2.1373
7	2.9978	2.5684	2.4927	2.1361
8	2.9977	2.5683	2.4926	2.1357
≥ 9	2.9977	2.5683	2.4925	2.1356

Tabla 7. Varianzas Errores de Filtrado ($1 - p = 0.1$)

k	$T = -\frac{13}{11}$	$T = 0$	$T = 2/11$	$T = 1$
1	2.7209	2.4446	2.3950	2.1534
2	2.1404	1.8239	1.7671	1.4979
3	2.1309	1.7491	1.6837	1.3798
4	2.1308	1.7394	1.6715	1.3563
5	2.1308	1.7381	1.6698	1.3515
6	2.1308	1.7379	1.6695	1.3506
7	2.1308	1.7379	1.6695	1.3504
≥ 8	2.1308	1.7379	1.6695	1.3503

Tabla 8. Varianzas Errores de Filtrado ($1 - p = 0$)

Como puede observarse, a medida que la probabilidad de falsa alarma disminuye, las varianzas de los errores de filtrado se estabilizan antes.

Year	Production (Q)	Price (P)	Revenue (R)
1980	100	10	1000
1981	110	9	990
1982	120	8	960
1983	130	7	910
1984	140	6	840
1985	150	5	750
1986	160	4	640
1987	170	3	510
1988	180	2	360
1989	190	1	190

Year	Production (Q)	Price (P)	Revenue (R)
1990	200	1	200
1991	210	0.9	189
1992	220	0.8	176
1993	230	0.7	161
1994	240	0.6	144
1995	250	0.5	125
1996	260	0.4	104
1997	270	0.3	81
1998	280	0.2	56
1999	290	0.1	29

... (faint text at the bottom of the page)

Bibliografía

- [1] Anderson, B.D.O., Moore, J.B. (1979). *Optimal Filtering*. Prentice-Hall.
- [2] Caballero Águila, R., Hermoso Carazo, A., Linares Pérez, J., Nakamori, S. (2001). *Linear Estimation Using Covariance Information in Systems with Uncertain Observations*. Proceeding of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, pp. 34-40, Marbella.
- [3] Hadidi, M.T., Schwartz, S.C. (1979). *Linear Recursive State Estimators Under Uncertain Observations*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 6, pp. 944-948.
- [4] Haykin, S. (1996). *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall.
- [5] Hermoso Carazo, A., Linares Pérez, J. (1994). *Linear Estimation for Discrete-Time Systems in the Presence of Time-Correlated Disturbances and Uncertain Observations*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 8, pp. 1636-1638.

- [6] Jaffer, A.G., Gupta, S.C. (1971). *Recursive Bayesian Estimation with Uncertain Observation*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-17, pp. 614-616.
- [7] Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press.
- [8] Kailath, T. (1974). *A View of Three Decades of Linear Filtering Theory*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol IT-20, No.2, pp. 146-181.
- [9] Kalman, R.E. (1960). *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME, Serie D: Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35-45.
- [10] Kalman, R.E. (1963). *New Methods in Wiener Filtering Theory*. Proc. Symp. Eng. Appl. Random Function Theory and Probability, pp. 270-387, Wiley, New York.
- [11] Kalman, R.E., Bertram, J.E. (1960). *Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov, II Discrete-Time Systems*. Transactions of the ASME, Serie D: Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 394-400.
- [12] Kowalski, A., Szynal, D. (1986). *Filtering in Discrete-Time Systems with State and Observation Noises Correlated on a Finite Time Interval*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31. No. 4, pp. 381-384.
- [13] Kwakernak, H., Sivan, R. (1972). *Linear Optimal control Systems*. Wiley, New York.

- [14] Ljung, L., Glad, T. (1994). *Modelling of Dynamics Systems*. Prentice-Hall.
- [15] Magnus, J.R., Neudecker, H. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons.
- [16] McGarty, T.P. (1974). *Stochastic Systems and State Estimation*. Wiley, New York.
- [17] Meditch, J.S. (1969). *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*. McGraw-Hill, N.Y..
- [18] Nahi, N.E. (1969). *Optimal Recursive Estimation with Uncertain Observation*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-15, No. 4, pp. 457-462.
- [19] Nakamori, S. (1983). *New Design of Linear Discrete-time Predictor Using Covariance Information*. Automatica, Vol. 19, No. 3, pp. 341-344.
- [20] Nakamori, S. (1992). *Design of Recursive Fixed-point Smoother Using Covariance Information in Linear Discrete-time Systems*. International Journal Systems Sci., Vol. 23, No. 12, pp. 2323-2324.
- [21] Nakamori, S. (1997). *Estimation Technique using Covariance Information with Uncertain Observations in Linear Discrete-Time Systems*. Signal Processing, Vol. 58, pp. 309-317.
- [22] Sherman, S. (1958). *Non-Mean-Square Error Criteria*. IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-4, pp. 125-126.

- [23] Szidarovsdy, F., Terry Bahill, A. (1998). *Linear System Theory*. CRC Press LLC.
- [24] Tanizaki, H. (1996). *Nonlinear Filters (Estimation and Applications)*. Springer.
- [25] Wang, X. (1984). *Recursive Algorithms for Linear LMSE Estimators Under Uncertain Observations*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-29, No. 9, pp. 853-854.

