

~~La Proo. 83/110~~
5/103

UNIVERSIDAD DE GRANADA

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA**

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 16/02/00.....
ENTRADA NUM. 52.....



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 613386268
Nº Copia 15555963

TESIS DOCTORAL

**DISTRIBUCIONES TIPO FASE EN EL ANÁLISIS DE LA
FIABILIDAD DE SISTEMAS REPARABLES**

Inmaculada Torres Castro

Granada, Febrero 2000

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA



TESIS DOCTORAL

**DISTRIBUCIONES TIPO FASE EN EL ANÁLISIS DE LA
FIABILIDAD DE SISTEMAS REPARABLES**

Autora: Inmaculada Torres Castro

Director: Prof. Dr. D. Rafael Pérez Ocón

Granada, Febrero del 2000

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA



DISTRIBUCIONES TIPO FASE EN EL ANÁLISIS DE LA FIABILIDAD DE SISTEMAS REPARABLES

Memoria que para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas,
presenta la licenciada en Ciencias Matemáticas D^a Inmaculada Torres Castro.


Inmaculada Torres Castro

V^o. B^o. del Director de la Memoria



Prof. Dr. D. Rafael Pérez Ocón



09 FEB. 2000

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincera gratitud a todas las personas que han estado a mi lado durante el desarrollo de esta Memoria.

A mi director Prof. Dr. D. Rafael Pérez Ocón, quien me inició y guió en mi labor investigadora, se ha dedicado plenamente a esta Memoria como si de su propia tesis se tratara, y muy especialmente quisiera agradecer el trato personal que me ha dispensado.

Al Prof. Marcel Neuts, por su gran ayuda para la elaboración del trabajo, su contaste ánimo y apoyo y su buena disposición a todo tipo de dudas planteadas.

Al Prof. Dr. Ruiz Castro por su apoyo incondicional en el tratamiento informático llevado a cabo en esta Memoria.

A la Prof. Dra. Gámiz Pérez por el amable trato recibido que ha contribuido a hacer más fácil la realización de la Tesis.

Al Prof. Dr. Landesa Porras por su disposición y consejos en cada momento para mejorar el trabajo.

Al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada por las facilidades dadas para la realización de esta tesis.

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura por el apoyo y las facilidades dadas para el desarrollo de mi labor.

A todos vosotros, un cariñoso agradecimiento.

A mis padres

INTRODUCCIÓN

1. El problema de la modelización en fiabilidad

La modelización de sistemas dinámicos desde el punto de vista de la fiabilidad es un tema de estudio que en los últimos años ha dado lugar a un número importante de publicaciones en la literatura especializada. Muchos son los tópicos conectados con la fiabilidad de sistemas, por lo que los trabajos incluyen las áreas de conocimiento de Estadística y Probabilidad e Investigación Operativa. Pero también cubren otras áreas más directamente relacionadas con las aplicaciones, especialmente la física y la ingeniería. La literatura existente en fiabilidad cubre temas como análisis de tiempos de fallo, sistemas complejos y modelos de mantenimiento, y en general estos aparecen mezclados entre sí junto con problemas de optimización. El libro de Barlow y Proschan (1975) es un texto de referencia en este área. Un tratamiento actual de los problemas de la fiabilidad de sistemas supone la utilización de las más modernas técnicas probabilísticas disponibles y ello implica el uso de procesos estocásticos. Éstos permiten formular modelos generales de fallo, establecer fórmulas para el cálculo de diversas medidas de funcionamiento, y son lo suficientemente versátiles como para permitir la introducción de diversas políticas de reemplazamiento en situaciones complejas. Muchos modelos previamente estudiados pueden ser incluidos como casos particulares cuando se consideran los procesos estocásticos en el análisis de la fiabilidad de sistemas. En esta Memoria se presenta un estudio de la fiabilidad de sistemas reparables en régimen estacionario

incluyendo modelos que hasta ahora no han sido estudiados, se efectúa el cálculo de ciertas medidas de funcionamiento, y se introduce una política de reemplazamiento por ciclos completados de trabajo, extendiendo modelos y resultados obtenidos en años recientes. Los modelos aplicados son generales, en el sentido de que no se refieren a una situación real específica, pero pueden ser aplicados en diferentes casos y para ilustrar uno de los modelos se incluye un supuesto práctico. Ésta es una aproximación teórica probabilística que suministra herramientas para ser usadas en las aplicaciones. Distinto es el punto de vista del ingeniero, que a partir del análisis de un problema real precisa la construcción de un modelo matemático que describa la situación de manera adecuada.

La modelización en el estudio de la fiabilidad de sistemas depende de la información que se tenga sobre los estados del sistema, y estos a su vez están relacionados con el tiempo operativo del mismo. Esto depende en gran medida del nivel de observación que se tenga del sistema. Cuando mayor información se disponga sobre estos puntos, tanto más adecuado será el modelo, mejor ajustadas serán las predicciones y se tendrá buena información sobre la tendencia al fallo del sistema. Hay muchas maneras de introducir información adicional sobre el modelo. Por ejemplo, el sistema puede estar formado por componentes organizadas de una cierta manera; el sistema sufre daños acumulativos y falla cuando se supera un umbral de daño acumulado; los tiempos de reparación pueden ser despreciables con respecto a los de funcionamiento (reparación instantánea) o deben ser tenidos en cuenta (sistemas reparables); hay diversas modalidades de reparación (ver Barlow y Proschan, 1975), etc. Por otro lado, ciertas características presentan interés, como determinar el tiempo de fallo del sistema en función de los tiempos de fallo de las componentes, establecer la clase de fiabilidad del tiempo de fallo del sistema, optimizar el tiempo de reemplazamiento, etc.

2. Antecedentes

Diversos procesos estocásticos han sido utilizados para modelizar las diferentes situaciones que se presentan en la práctica. Cuando el sistema opera de modo que al producirse el fallo la

reparación es instantánea y además es tan buena como nueva, el proceso de Poisson suministra un posible modelo que tiene la ventaja de su fácil manipulación y sus propiedades son bien conocidas (Hoyland y Rousand, 1994). Si la reparación es minimal (Ascher y Feingold, 1984), es decir, al ser reparado el sistema pasa a estar en la misma situación con respecto a la fiabilidad que inmediatamente antes del fallo, y esta reparación se produce instantáneamente, el proceso de Poisson no homogéneo puede ser aplicado. Este tiene la desventaja de que el tiempo del primer fallo determina el riesgo de fallo del sistema el resto del tiempo (Hoyland y Rousand, 1994). Si la reparación es instantánea y tan buena como nueva, los procesos de renovación pueden ser aplicados. En el caso de modelos con daño acumulado, el proceso de Poisson compuesto suministra un buen modelo. Si el tiempo de reparación juega un papel importante, los procesos alternados de renovación son usados para reparaciones tan buenas como nuevas (Heyman y Sobel, 1982). El comportamiento asintótico de estos procesos alternados de renovación en el caso en que no hay independencia entre las sucesiones de tiempos operativos y de reparación ni están idénticamente distribuidos entre sí cada una de ellas ha sido estudiado por Marlow y Tortorella (1995). Un modelo de Poisson a trozos ha sido estudiado para el estudio de un modelo de fiabilidad creciente (Sen y Bhattacharyya, 1993).

Un paso más adelante en la modelización lo constituyen los procesos de Markov. Estos se enmarcan dentro de los modelos multiestados. El sistema opera y va ocupando estados de manera aleatoria y permanece en cada uno de ellos un tiempo exponencialmente distribuido. Presentan la ventaja de que son una clase de procesos estocásticos bien conocida. Esta clase de procesos ha sido utilizada para sistemas de fiabilidad en los que el daño es acumulativo y el fallo se produce cuando el sistema alcanza un estado umbral, esto implica que en el proceso de Markov que modeliza el sistema los estados están ordenados y las transiciones se producen en orden creciente. El fallo se produce cuando se sobrepasa un estado umbral y se alcanza una clase (absorbente) de estados. Para estos sistemas se ha estudiado la clase de fiabilidad del tiempo de primer paso por la clase absorbente, dando condiciones suficientes en términos de los parámetros del proceso. Se han calculado estas condiciones para las clases IFR y IFRA (Brown y Chaganty, 1983);

para la clase NBU (Shaked y Shantikumar, 1987), para las clases NBU y NBUE (Karasu y Özekici, 1989); para las clases DMRL y NBUC (Pérez-Ocón y Gámiz-Pérez, 1996). Más recientemente, este problema está siendo tratado por Belzunce et al. (1999). Este tipo de procesos está siendo aplicado con frecuencia en problemas de supervivencia desde una óptica distinta. El proceso de una enfermedad es un claro ejemplo de proceso multiestado. En este caso el planteamiento es similar al del ingeniero: a partir de observaciones se construye un modelo, se estiman los parámetros del mismo y se estudia la bondad del ajuste de las medidas estudiadas con las observadas. La literatura sobre modelos de Markov para este tipo de problemas ha crecido en los últimos años (ver Pérez-Ocón et al., 1998, y referencias en él).

Los sistemas de fiabilidad con componentes que tienen tiempos de fallo exponencialmente distribuidos son modelizados por procesos de Markov (Kulkarni, 1995). Para estos han sido calculados medidas de funcionamiento de interés práctico. Un estudio sistemático de modelización de sistemas utilizando procesos semi-Markovianos y procesos puntuales no homogéneos ha sido llevado a cabo por Ravichandran (1989) y más recientemente por Kovalenko et al. (1997). Pérez-Ocón et al. (1999) han construido modelos semi-Markovianos partiendo de datos observados en fiabilidad y supervivencia.

3. Aportaciones

A menudo la exponencialidad supone una restricción demasiado fuerte en los procesos de Markov que modelizan sistemas. Una extensión en esta dirección, sin perder de vista la estructura Markoviana de modo que ésta pueda seguir siendo utilizada, puede ser llevada a cabo utilizando distribuciones tipo fase (Neuts, 1981). Una distribución tipo fase es la distribución del tiempo de primer paso por un estado absorbente en un proceso de Markov finito con estados absorbentes. Si el funcionamiento de una unidad sigue una distribución tipo fase, ésta va ocupando diferentes fases operativas hasta que alcanza el estado absorbente, y entonces se produce el fallo. Un sistema gobernado por una distribución de esta clase no es otra

cosa que un sistema modelizado por un proceso de Markov con espacio de estados finito, que es lo que se presenta en la práctica. Un paso más allá en la extensión de modelos consiste en considerar sistemas cuyas componentes estén gobernadas por distribuciones tipo fase. En este caso, los estados de funcionamiento del sistema corresponden a diferentes fases en el funcionamiento de las componentes, de modo que puede haber transiciones entre las diferentes fases operativas de las componentes sin que por ello cambie el estado del sistema, se habla entonces de macroestados del sistema. Pocas referencias hay en este dominio. Neuts y Maier (1981) estudian la distribución del tiempo de fallo de un sistema con dos componentes que siguen distribuciones tipo fase y establecen algunas nuevas propiedades de esta clase de distribuciones. Chakravarty (1983) considera un sistema en paralelo con tiempo operativo exponencial y tiempo de reparación siguiendo una distribución tipo fase, estudiando la cola frente al canal de reparación.

Ya hemos hablado de algunos tipos de reparación, y cada una de ellos tiene una realidad práctica. El tipo de reparación que vamos a considerar en esta Memoria es “no tan buena como nueva”, y será introducida a partir de un factor de deterioro. La idea es que, tras cada reparación, el sistema no se comporta igual que antes del fallo, y lo hace de modo que su tiempo operativo viene afectado por un factor a , razón de deterioro si es ≥ 1 . En otras palabras, si T es el tiempo operativo inicial, tras la primera reparación el tiempo operativo es aT , tras la segunda reparación el tiempo operativo es a^2T , y así sucesivamente. Esta idea se debe a Lam (1995), que definió los procesos geométricos generalizando así los procesos de renovación. De esta manera se tiene un proceso estocástico para la modelización del tipo de reparación. Además tiene la ventaja que sirve también para modelos de crecimiento de la fiabilidad cuando el parámetro a es ≤ 1 .

La política de reemplazamiento que se aplica en los modelos que se estudian en esta Memoria es la que considera ciclos de reparación. Se estudian sistemas reparables, de modo que los tiempos de reparación son aleatorios y no despreciables frente a los de funcionamiento, y además, después de un determinado número de reparaciones el sistema es sustituido por otro nuevo e idéntico. Esto es hecho por Lam (1997) para sistemas con componentes que tienen

tiempos de vida exponencialmente distribuidas, de modo que el sistema viene modelizado por un proceso de Markov. Los tiempos de reparación en los modelos que se estudian en esta Memoria vienen gobernados por distribuciones tipo fase.

En todos los trabajos citados hasta ahora, los fallos se consideran internos al sistema. Cuando el sistema falla y pasa a ser reparado, se entiende que alguna de las componentes ha fallado, pero no se hace hipótesis alguna sobre el tipo de fallo, por lo que hay que suponer que estos son fallos de desgaste de las componentes. En esta Memoria los fallos son de distintos tipos, generalizando con ello los trabajos anteriores. Así, se supondrán fallos externos al sistema o fallos accidentales, que a su vez podrán ser reparables o no reparables. y también se supondrán fallos internos del sistema o fallos de desgaste.

Las medidas de funcionamiento que se estudian en esta Memoria para los distintos modelos son la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos, que expresa el número medio de ocurrencia de fallos por unidad de tiempo. La primera es la primera medida de funcionamiento en sistemas reparables, en cuanto a la segunda, el interés práctico resulta obvio de su definición. Esta medida coincide con el valor del parámetro en los procesos de Poisson homogéneos, con la función intensidad en los procesos de Poisson no homogéneos, y con la función densidad de renovación en procesos de renovación. Para el caso de procesos de Markov, la expresión en términos de los parámetros y las magnitudes fundamentales del proceso ha sido calculada por Lam (1997). En esta Memoria es calculada para todos los modelos estudiados.

En resumen, en esta Memoria se introducen las distribuciones tipo fase en fiabilidad y se calculan medidas de funcionamiento para distintos tipos de sistemas. En ella se hacen las siguientes aportaciones y extensiones de trabajos anteriores: se proponen nuevos modelos no estudiados hasta ahora de sistemas reparables con tiempos operativos y tiempos de reparación que siguen distribuciones tipo fase; las reparaciones afectan a los tiempos de funcionamiento a través de un coeficiente de deterioro; el número de ciclos de reparaciones del sistema está limitado; y por último, se consideran diferentes tipos de

fallo. Con ello se completan los modelos anteriores de Neuts y Meier, Chakravarty y Lam. Dentro de estos modelos estudiados se comprenden como casos particulares todos aquellos de tipo Erlangiano, Erlangiano generalizado o hiperexponencial, que son casos particulares de distribuciones tipo fase. En cuando a las medidas de funcionamiento, se generaliza el trabajo de Lam (1997), al ser aplicado el cálculo de la razón de ocurrencia de fallos a procesos más generales que los considerados por él. Programas informáticos originales son realizados con el *Matlab* para aplicar los resultados a casos numéricos. Esto constituye el desarrollo de los Capítulos II y III.

Hasta aquí, esta Memoria continúa de alguna manera el trabajo ya iniciado en la Tesina de Licenciatura de la autora titulada *Medidas de funcionamiento en Sistemas Reparables*, donde se hace una primera aproximación a las distribuciones tipo fase en el estudio de la fiabilidad de sistemas.

Además de todo lo expuesto anteriormente, en esta Memoria se hace una extensión de nuestros propios modelos, considerando tiempos operativos y de reparación generalmente distribuidos, sin referencia alguna a distribuciones particulares. Se aplica así un modelo semi-Markoviano para el estudio del funcionamiento del sistema con las condiciones anteriormente consideradas. Para este sistema completamente general, se han calculado la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos de los diferentes tipos de fallos y del sistema en su totalidad. Como caso particular de este se obtiene uno de los modelos tipo fase introducidos en el trabajo. Las aportaciones efectuadas en los Capítulos II y III son extendidas al proceso semi-Markoviano. El estudio completo de este modelo se lleva a cabo en el Capítulo IV.

4. Organización de esta Memoria

La organización de la Memoria es como sigue. En el primer capítulo se definen las distribuciones tipo fase y se establecen sus propiedades más importantes. Se introducen los procesos estocásticos que serán usados: los procesos semi-Markovianos y los procesos geométricos. No se hace una mención explícita de los procesos de

Markov, que se consideran casos particulares de los semi-Markovianos. Se citan los resultados que serán usados posteriormente y no se dan pruebas de los resultados, remitiendo a las referencias.

En el Capítulo II se introduce el primer modelo de sistema con las características expuestas anteriormente, en los que los tiempos operativos y de reparación siguen distribuciones tipo fase. Se establecen las hipótesis que serán comunes en gran parte con los otros dos modelos estudiados. La metodología seguida en los Capítulos II y III es la misma: se definen los estados del sistema (macroestados) y se establecen las transiciones entre éstos construyendo el generador del proceso de Markov que gobierna el sistema. Esto se hace por bloques, ya que cada transición entre macroestados supone diversas transiciones entre las fases operativas y de reparación del sistema y la correspondiente fase de absorción, dicho de otra manera, diversos cambios entre fases operativas o de reparación no dan lugar a cambios de estado del sistema. Una vez obtenido el generador, se calcula la distribución estacionaria, la disponibilidad, y las razones de ocurrencia de los diferentes tipos de fallo y la razón de ocurrencia de fallo total del sistema. El modelo considerado en este capítulo se denota Modelo I, y en él, cuando se produce un fallo reparable en una fase dada, al ser reparado el sistema, éste retorna a la fase operativa en que se produjo el fallo. Es un modelo con memoria de la fase de fallo. Esto hace que haya que utilizar el algoritmo de Kronecker en el cálculo del generador del proceso de Markov que gobierna el sistema.

En el Capítulo III se considera lo que se denota por Modelo II. Las hipótesis son prácticamente las mismas. La diferencia con el Modelo I radica en que ahora, cuando se produce un fallo, al ser reparado el sistema y retornar al estado operativo, éste no recuerda la fase en que ocurrió el fallo, y la incorporación al estado operativo se hace siguiendo un vector inicial de probabilidades fijo. Es un modelo sin memoria de la fase de fallo. Esto simplifica notablemente el generador, ya no se hace preciso el algoritmo de Kronecker, y los tiempos de funcionamiento forman un proceso geométrico. Aparecen en el cálculo de la distribución estacionaria las transformadas de Laplace-Stieltjes de los tiempos operativos. En ambos Modelos I y II se facilitan fórmulas para su cálculo mediante métodos informáticos. En el caso del Modelo II, se hace una aplicación numérica basada en

un supuesto práctico, con números que tienen que ver con situaciones reales de componentes electrónicos.

En el Capítulo IV se introduce el modelo semi-Markoviano. Las hipótesis son prácticamente como en los otros modelos, pero ahora la estructura Markoviana se introduce a través de la cadena de Markov inmersa. Se calcula el núcleo del proceso y a partir de él se obtiene la matriz de transición de esta cadena de Markov. El cálculo de la distribución estacionaria del proceso se hace utilizando los resultados del Capítulo I, para ello hay que calcular los tiempos de permanencia en estados y la distribución estacionaria de la cadena de Markov inmersa. La disponibilidad y las razones de ocurrencia de fallos son obtenidas. Como caso particular de éste se obtiene el Modelo II.

Las referencias sobre distribuciones tipo fase y fiabilidad son escasas. Esta clase de distribuciones ha encontrado un campo de aplicación abonado en el estudio de los sistemas de colas. La literatura sobre teoría de colas se ha visto ampliada y su dominio extendido a multitud de situaciones prácticas debido a la versatilidad de estas distribuciones. Su aplicación en este dominio quizás se deba a que son la extensión natural del método de etapas de Erlang, que es estudiado en los cursos elementales de teoría de colas. Creemos que la aplicación de las distribuciones tipo fase al estudio de la fiabilidad permitirá, no solo ampliar el campo de las distribuciones de uso frecuente, que es muy reducido, sino permitirá disponer de una herramienta adecuada para que sistemas complejos puedan ser tratados convenientemente. Actualmente el estudio de las propiedades de las distribuciones tipo fase está siendo investigado, como puede verse consultando las revistas especializadas y ha sido reflejado en las referencias.

Se añaden dos anexos. El Anexo I trata de las posibles extensiones de esta Memoria. El Anexo II suministra los programas que han sido utilizados en el tratamiento numérico del ejemplo estudiado en el Capítulo II.

Índice General

Distribuciones Tipo Fase en el Análisis de Fiabilidad de Sistemas Reparables

1. Modelos estocásticos de tiempos de fallo	1
1.1. Distribuciones Tipo Fase.....	2
1.1.1. Definiciones y ejemplos.....	3
1.1.2. Propiedades de clausura.....	7
1.1.3. Producto de Kronecker.....	9
1.2. Medidas de funcionamiento en sistemas reparables.....	10
1.2.1. Disponibilidad de sistemas reparables	11
1.2.2. Razón de ocurrencia de fallos en procesos de recuento	11
1.2.3. Razón de ocurrencia de fallos en Procesos de Markov.....	13
1.3. Procesos estocásticos	14
1.3.1. Procesos Geométricos.....	14
1.3.2. Procesos de Renovación Markovianos.....	15
1.3.3. Procesos Semimarkovianos.....	19
2. Sistema con tiempos operativos y de reparación Tipo Fase con memoria de la fase de fallo (Modelo I).....	27
2.1. El Proceso de Markov	28
2.1.1. Hipótesis del modelo	28
2.1.2. El generador infinitesimal.....	30
2.2. Distribución estacionaria.....	34
2.3. Medidas de funcionamiento	37
2.3.1. Disponibilidad	37
2.3.2. Razón de ocurrencia de fallos (ROCOF).....	38
3. Sistema con tiempos operativos y de reparación tipo fase sin memoria de la fase de fallo (Modelo II)	43
3.1. El Proceso de Markov	44
3.2. Distribución estacionaria.....	46
3.3. Medidas de funcionamiento	51
3.3.1. Disponibilidad	51
3.3.2. Razón de ocurrencia de fallos (ROCOF).....	52
3.4. Aplicación numérica	55

4. Sistema con tiempos operativos y de reparación generales (Modelo semi-Markoviano)	63
4.1. El Proceso semi-Markoviano.....	64
4.1.1. El núcleo.....	66
4.1.2. La Cadena de Markov inmersa	68
4.2. Distribución estacionaria.....	72
4.2.1. Distribución estacionaria de la Cadena de Markov inmersa.....	72
4.2.2. Tiempos medios de permanencia en cada uno de los estados ..	73
4.2.3. Distribución estacionaria del SMP	75
4.3. Medidas de funcionamiento del sistema	77
4.3.1. Disponibilidad	78
4.3.2. Razón de ocurrencia de fallos	83
4.4. Consecuencias y aplicaciones.....	90
4.4.1. ROCOF y distribución estacionaria	91
4.4.2. Caso de distribuciones Tipo Fase.....	92

CAPÍTULO I

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE TIEMPOS DE FALLO

Este primer capítulo está dedicado a las nociones sobre procesos estocásticos que son utilizados a lo largo de esta Memoria. Algunas de ellas son bien conocidas por tratarse de conceptos generales que se estudian en textos sobre procesos de Markov, tal es el caso de las distribuciones tipo fase, los procesos de renovación de Markov, y los procesos semi-Markovianos. Otras no son de uso frecuente en la literatura general y su campo de estudio es más específico, como son los procesos geométricos y la razón de ocurrencia de fallos en sistemas modelizados por procesos de tipo Markoviano, que tienen su estudio en el dominio de la fiabilidad. En todos los casos se hace un repaso de las propiedades fundamentales. Los resultados que se refieren a la teoría general de procesos de Markov no son estudiados

específicamente, y nos remitiremos a las referencias, especialmente al texto de Kulkarni (1995).

Por tratarse de un capítulo introductorio, se enuncian propiedades generales de las clases de procesos que constituyen los modelos sobre los que está basado este trabajo, pero no se dan demostraciones. Un estudio más detenido de las mismas se hace en las referencias. Sí ha parecido interesante introducir los tópicos que serán utilizados posteriormente. A lo largo del mismo se establece la notación y los elementos que intervienen a lo largo del trabajo, y serán de continua referencia.

En las definiciones y propiedades de estas clases de procesos estocásticos que se definen, está presente la utilización que de los mismos se hace en esta Memoria. En otras palabras, cuando se habla de proceso estocástico se está suponiendo un modelo probabilístico para el funcionamiento de sistemas desde el punto de vista de la fiabilidad. Y solo se estudian desde esta perspectiva, aunque es claro que tienen interés por sí mismos.

En la Sección 1 se introducen las distribuciones tipo fase, que generalizan los tiempos de operativos y de reparación exponencialmente distribuidos y permiten utilizar toda la estructura Markoviana para obtener medidas de funcionamiento de sistemas que vienen regidos por esta clase de distribuciones. En la Sección 2 se considera la razón de ocurrencia de fallos en las diferentes clases de procesos puntuales en las que dicha medida ha sido obtenida. En la Sección 3 se definen procesos estocásticos que van a permitir generalizar la modelización de sistemas a otros donde la distribución exponencial no juega ningún papel.

1.1. Distribuciones Tipo Fase

En la teoría de la fiabilidad, la distribución exponencial juega un papel central como distribución de tiempos aleatorios de funcionamiento o reparación. Una consecuencia de ello ha sido la introducción de los procesos de Markov en este dominio. No obstante, los límites de la distribución exponencial en la modelización de

sistemas son conocidos y muchas situaciones prácticas no pueden ser representadas satisfactoriamente. Un primer paso en la generalización de esta distribución se hace considerando etapas o fases exponencialmente distribuidas en la evolución de los tiempos aleatorios considerados en el modelo. Cuando estas fases se organizan en serie se tiene la distribución de Erlang, que es la convolución de distribuciones exponencialmente distribuidas, independientes e idénticas, y cuando se organizan en paralelo surge la distribución hiperexponencial, que es una mezcla finita de distribuciones exponencialmente distribuidas. Esto se conoce como el método de fases o etapas de Erlang. Cuando se consideran fases siguiendo una organización intermedia entre serie y paralelo se tienen las distribuciones tipo fase.

La introducción de esta clase de distribuciones se debe a Neuts (1981), y están íntimamente ligadas a los procesos de Markov. Dicha clase ha sido aplicada con cierta extensión en teoría de colas, y ha dado lugar a una gran cantidad de trabajos sobre el tema. A lo largo de esta Memoria se pondrá de manifiesto que estas distribuciones también suministran un modelo versátil para el tratamiento de las medidas de funcionamiento en sistemas reparables. Un estudio detallado sobre esta clase de distribuciones se hace en el texto de Neuts que aparece en las referencias, aquí nos dedicamos solo a señalar la definición y primeras propiedades que serán aplicadas posteriormente. Hay una versión discreta para distribuciones tipo fase que no se estudian aquí.

1.1.1. Definiciones y ejemplos

Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$ continuo a la derecha. Los estados $1, 2, \dots, m$ son transitorios y el estado $m+1$ absorbente. El generador infinitesimal del proceso, que representa las intensidades de transición entre estados, puede ser escrito en la forma

$$Q = \begin{pmatrix} T & T^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

donde la matriz $\mathbf{T} = (T_{ij})$ es de orden $m \times m$, con $T_{ii} < 0$, para $1 \leq i \leq m$, y $T_{ij} > 0$ para $i \neq j$. Además $\mathbf{T}\mathbf{e} + \mathbf{T}^0 = \mathbf{0}$, siendo \mathbf{e} un vector columna de unos de dimensión m , y $\mathbf{0}$ denota un vector columna de ceros de dimensión m . A lo largo de esta Memoria, cuando aparecen los vectores $\mathbf{0}$ y \mathbf{e} , y en general para cualesquiera vectores y matrices, la dimensión vendrá determinada por la expresión en que figuran. De la misma manera, será fácil determinar si un vector es fila o columna, aunque será usada la misma notación en ambos casos.

El hecho de que los estados $1, 2, \dots, m$ sean transitorios supone que la absorción por el estado $m+1$ desde cualquier estado inicial es cierta. Esta condición se satisface si y solo si \mathbf{T} es no singular.

Sea (α, α_{m+1}) un vector inicial de probabilidades del proceso, es decir, $\alpha_i = P\{X(0) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, m$, y $\alpha\mathbf{e} + \alpha_{m+1} = 1$. Nótese que α_{m+1} es la probabilidad de que el proceso se inicie en el estado absorbente. Se denota τ el tiempo de absorción del proceso por el estado absorbente, es decir, $\tau = \inf \{t: X(t) = m+1\}$. Entonces la distribución de probabilidad de τ es

$$F(x) = 1 - \alpha \exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e}, \quad x \geq 0. \quad (1.2)$$

En efecto, la solución de las ecuaciones adelantadas de Kolmogorov asociadas al proceso definido a partir de (1.1) restringida al conjunto de estados transitorios es de la forma $\exp(\mathbf{T}x)$. La expresión $\exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e}$ representa el vector de probabilidades de permanencia en el conjunto de estados transitorios, y $\alpha \exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e}$ la probabilidad de no ser absorbido en el tiempo x partiendo del vector inicial α . Luego la probabilidad de absorción viene dada por (1.2).

Como se ha indicado, F puede ser obtenida directamente resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales $v'(x) = v(x)\mathbf{T}$ con la condición inicial $v(0) = \alpha$. Nótese que F tiene un átomo en 0 , $P\{\tau = 0\} = \alpha_{m+1}$, y es absolutamente continua en $(0, \infty)$. Por simplificar, en adelante se supondrá que $\alpha_{m+1} = 0$, esto garantiza que $P\{\tau > 0\} = 1$, y simplifica algunas de las expresiones que aparecen más adelante. En las aplicaciones a sistemas físicos, esta hipótesis surge de manera

natural. Las fórmulas detalladas pueden ser consultadas en Neuts (1981).

Definición 1.1.1. Una variable aleatoria τ con distribución de probabilidad F de la forma (1.2) se dice que es *tipo fase* con representación (α, T) .

Dicho de otra manera, una distribución de probabilidad F definida sobre $[0, \infty)$ es una *distribución de tipo fase* si y solo si es la distribución del tiempo hasta la absorción en un proceso de Markov finito del tipo definido en (1.2). Una variable aleatoria tipo fase puede tener más de una representación.

La matriz T no es un generador, pero sí lo es la matriz definida por

$$Q^* = T + T^0\alpha. \quad (1.3)$$

Este es un generador de un nuevo proceso de Markov con estados $\{1, 2, \dots, m\}$ construido a partir del proceso inicial definido en (1.1) suponiendo que cuando el proceso inicial alcanza el estado absorbente entonces retorna instantáneamente a los estados $\{1, 2, \dots, m\}$ siguiendo el vector de probabilidades inicial α .

Definición 1.1.2. La representación (α, T) se dice que es irreducible si el generador Q^* definido en (1.3) es irreducible en el correspondiente proceso de Markov.

Las representaciones irreducibles no son únicas. En lo que sigue se supondrá que las representaciones de las distribuciones tipo fase utilizadas serán irreducibles. Para más detalles ver Neuts (1981).

Para la distribución tipo fase de la Definición 1.1.1, la función de densidad f es

$$f(x) = \alpha \exp(Tx)T^0, \quad x > 0, \quad (1.4)$$

y la transformada de Laplace-Stieltjes Φ es una función racional cuya expresión es

$$\Phi(s) = \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^0, \quad \text{Re}(s) \geq 0. \quad (1.5)$$

Esta función es siempre racional. Las distribuciones tipo fase han sido caracterizadas a partir de la transformada de Laplace-Stieltjes (O' Cinneide, 1990).

Los momentos no centrados de τ son todos finitos y vienen dados por

$$E[\tau^k] = (-1)^k \alpha \mathbf{T}^{-k} \mathbf{e}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.1.3. La distribución de Erlang con parámetro λ , que se obtiene como distribución de una suma de variables aleatorias exponenciales i.i.d. con parámetro λ , es una distribución tipo fase con representación dada por $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ y

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ & -\lambda & \lambda & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & -\lambda & \lambda \\ & & & & & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Como caso particular de esta se obtiene la distribución exponencial.

Ejemplo 1.1.4. La mezcla de k distribuciones exponenciales (distribución hiperexponencial), cuya función de distribución es

$$F(x) = \sum_{i=1}^k p_i (1 - \exp(-\lambda_i x)), \quad \lambda_i > 0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

con

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1,$$

es una variable aleatoria con distribución tipo fase con representación dada por $\alpha = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ y $\mathbf{T} = -\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Ejemplo 1.1.5. La distribución de Erlang generalizada, que se obtiene como distribución de una suma de variables aleatorias exponenciales independientes pero no necesariamente idénticamente distribuidas con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, es una distribución tipo fase con $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ y

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & & & & \\ & -\lambda_2 & \lambda_2 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ & & & & & -\lambda_k \end{pmatrix}.$$

1.1.2. Propiedades de clausura

En la teoría de la fiabilidad una cuestión importante es saber bajo qué operaciones se preserva una determinada clase de distribuciones de tiempos de vida. Estas operaciones de fiabilidad son la convolución, la mezcla y la formación de sistemas coherentes. A continuación enunciamos los resultados correspondientes a estas operaciones para distribuciones tipo fase, junto con otros de interés. Estos tres teoremas que siguen han sido probados por Assaf y Levikson (1982).

Teorema 1.1.6. La convolución finita de distribuciones tipo fase es también tipo fase.

En particular, si X e Y son dos variables aleatorias independientes tipo fase con representaciones (α, \mathbf{T}) y (β, \mathbf{S}) , respectivamente, la variable $X + Y$ tiene representación $(\alpha, \mathbf{0})$ y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{T}\mathbf{e}\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1.7. Una mezcla finita de distribuciones tipo fase es también tipo fase.

Dicho de otra manera, si F_i es una distribución tipo fase con representación (α^i, \mathbf{T}^i) , $i = 1, 2, \dots, k$, entonces la distribución

$$F = \sum_{i=1}^k p_i F_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1,$$

es una distribución tipo fase con representación $(p_1\alpha^1, \dots, p_k\alpha^k)$ y $\mathbf{T} = \text{diag}(\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^k)$.

Teorema 1.1.8. Si X_1, \dots, X_k son variables aleatorias independientes tipo fase, entonces para toda función de vida h de un sistema coherente, $Y = h(X_1, \dots, X_k)$ es de tipo fase.

Un sistema coherente es usado aquí en el sentido de Barlow y Proschan (1975). La representación de Y depende de la forma de la función h . Para sistemas en serie y en paralelo con dos componentes las representaciones vienen dadas en Neuts (1981).

Uno de los modelos que ha pasado a ser un clásico en fiabilidad es el modelo de choques de Esary, Marshall y Proschan (1973). Dicho modelo expresa el tiempo de fallo de un dispositivo en términos de las llegadas de choques aleatorios. Si H es la distribución del tiempo de fallo de un dispositivo sometido a choques que ocurren aleatoriamente según un proceso de llegadas $\{N(t), t \geq 0\}$, \bar{P}_k la probabilidad de supervivencia al golpe k -ésimo, la probabilidad de supervivencia del dispositivo viene dada por

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} \bar{P}_k.$$

El siguiente resultado se debe a Neuts y Bhattacharjee (1981).

Teorema 1.1.9. Si en el modelo de choques anterior el proceso de llegadas es de Poisson y la sucesión de supervivencia (\bar{P}_k) es tipo fase discreta, entonces la distribución H es tipo fase continua.

En el trabajo citado se obtiene la representación del tiempo de fallo, y además se obtiene un resultado más fuerte que el enunciado aquí, y se aportan aproximaciones algorítmicas. Por último, enunciamos un resultado general de interés.

Teorema 1.1.10. La clase de distribuciones tipo fase es densa en el conjunto de todas las distribuciones sobre $[0, \infty)$.

La importancia de este resultado es más teórica que práctica, ya que no se conocen resultados de aproximación generales, y distribuciones con expresiones no especialmente complicadas son muy difíciles de aproximar. Consultar Neuts (1981) para una discusión general.

1.1.3. Producto de Kronecker

En el análisis de la fiabilidad de sistemas en los que intervienen distribuciones tipo fase como distribuciones de tiempos de fallo y/o reparación, aparece de manera natural una operación de matrices que se define a continuación (Chakravarthy, 1983). Esta operación surge también en el estudio de mezclas infinitas de convoluciones de distribuciones tipo fase (Neuts, 1981).

Definición 1.1.11. Sean A y B matrices de dimensiones $m \times n$ y $p \times q$, respectivamente. Se define el producto de Kronecker y se denota por $A \otimes B$ a la matriz en forma de bloques dada por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Es una matriz de dimensión $mp \times nq$.

Una propiedad muy utilizada a lo largo de esta Memoria es la siguiente. Si \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son matrices tales que el producto ordinario de matrices \mathbf{AB} y \mathbf{CD} esté bien definido, entonces

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}. \quad (1.8)$$

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices cuadradas de dimensiones m y n , respectivamente, se define la siguiente operación, denominada suma de Kronecker,

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

donde la matriz \mathbf{I} del primer sumando es cuadrada de dimensión n y la matriz \mathbf{I} del segundo sumando es cuadrada de dimensión m . Una propiedad importante de la suma de Kronecker es la siguiente igualdad para las matrices anteriores

$$\exp(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \otimes \exp(\mathbf{B}). \quad (1.10)$$

1.2. Medidas de funcionamiento en sistemas reparables

En esta Memoria se estudia la fiabilidad de diferentes tipos de sistemas reparables. Esta fiabilidad se mide a partir de diferentes magnitudes que juegan un papel fundamental en los capítulos siguientes: la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos.

1.2.1. Disponibilidad de sistemas reparables

La principal medida de funcionamiento de un sistema no reparable es la fiabilidad, que se define como la probabilidad de que el sistema esté en funcionamiento después de un tiempo t . Si T es el tiempo de fallo de un sistema, la *fiabilidad* durante el intervalo $[0, t]$ es

$$R(t) = P\{T > t\}, \quad t \geq 0.$$

Si el sistema es reparable la probabilidad de que el sistema esté operativo en el tiempo t se conoce como la *disponibilidad* del sistema, y se denota $A(t)$. La expresión matemática de esta medida depende de la estructura del sistema. Si ϕ es la función de estructura del sistema (Barlow & Proschan, 1975), y $X(t)$ denota el estado del sistema (0 si está en reparación, 1 si está operativo), se tiene

$$A(t) = P\{\phi(X(t)) = 1\}, \quad t \geq 0.$$

Nótese que si el sistema es no reparable, $A(t) = R(t)$. En este trabajo se consideran sólo sistemas reparables, por lo que a lo largo del mismo estudiaremos la disponibilidad de distintos sistemas. Cuando el sistema alcanza el régimen estacionario, la fiabilidad y la disponibilidad (estacionarias) se calculan tomando límites en $R(t)$ y $A(t)$ para $t \rightarrow \infty$.

1.2.2. Razón de ocurrencia de fallos en procesos de recuento

Los modelos probabilísticos para sistemas reparables describen la ocurrencia de sucesos con el paso del tiempo. En la mayoría de los casos, tales modelos no son estacionarios, de modo que los tiempos entre fallos no se mantienen probabilísticamente idénticos con el paso del tiempo, pudiendo crecer (en cuyo caso el sistema mejora) o decrecer (en cuyo caso el sistema se deteriora). Una magnitud importante para estudiar modelos para sistemas reparables es la razón de ocurrencia de fallos, cuyo acrónimo inglés es ROCOF. Esta se define como el límite siguiente

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{\text{un fallo en } [t, t+h)\}}{h},$$

donde t es el tiempo desde que el sistema inició el funcionamiento.

Una primera aproximación a estos modelos son los procesos de recuento, en el que se supondrá que no ocurren fallos simultáneos. El ROCOF de un proceso de recuento $\{N(t), t \geq 0\}$, donde $N(t)$ señala los fallos hasta el tiempo t , se define

$$v(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)],$$

donde $E[N(t)]$ es el número medio de fallos en el intervalo $(0, t]$. Parece intuitivo que el crecimiento del ROCOF determina un empeoramiento del sistema, mientras que el decrecimiento supone un mejoramiento del mismo.

Los procesos de renovación son una clase particular de procesos de recuento, que modelizan sistemas en los que la reparación es del tipo tan bueno como nuevo. En éstos, el ROCOF es precisamente la función densidad de renovación $m(t) = v(t)$. El más sencillo es el proceso de Poisson homogéneo, que tiene ROCOF constante $v(t) = \lambda$. Esta es otra interpretación de la propiedad de no memoria de este proceso.

Dentro de los modelos no estacionarios el más sencillo es el proceso de Poisson no homogéneo. En este caso el ROCOF es la función intensidad del proceso $v(t)$. La propiedad de incrementos independientes supone que el número de fallos en un intervalo es independiente de los fallos ocurridos antes de dicho intervalo, la aplicación práctica de esto es que la fiabilidad es exactamente la misma antes del fallo e inmediatamente después de la reparación, este tipo de reparación se conoce como "reparación minimal". Además, en este proceso, el ROCOF coincide con la razón de fallo del tiempo del primer fallo, de modo que el comportamiento hasta el primer fallo determina el comportamiento durante todo el tiempo, por lo que a

ocurrencia de fallos se refiere. Esta propiedad limita la aplicación de este proceso.

1.2.3. Razón de ocurrencia de fallos en Procesos de Markov

Para definir la razón de ocurrencia de fallos en procesos de Markov, conviene dar una interpretación de dichos procesos en términos de sistemas de fiabilidad.

Sea un proceso de Markov $\{X(t), t \geq 0\}$ homogéneo con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, donde $X(t)$ denota el estado de un sistema en el tiempo t . Se denota $\mathbf{P} = (p_{ij}(t))$ la matriz de probabilidades de transición en el tiempo t y $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ el generador infinitesimal del proceso. Se denota $p_i = P\{X(t) = i\}$, $i \in S$.

La matriz \mathbf{Q} es tal que $-q_{ii} = q_i \geq 0$ y $q_{ij} \geq 0$ para $j \neq i$. Se dice que es conservativa si

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Si $\sup_i q_i < \infty$, la matriz \mathbf{Q} está uniformemente acotada.

Los estados del sistema pueden ser agrupados en dos clases bien diferenciadas: estados operativos y estados no operativos (reparación). Se denotan ambas clases por W y F , respectivamente, de modo que $S = W \cup F$. En el instante inicial el sistema está operativo. No todas las transiciones que ocurren en el proceso dan lugar a fallos del sistema. Un fallo ocurre cada vez que hay una transición desde un estado del conjunto W a un estado del conjunto F . El siguiente resultado se debe a Lam (1997).

Teorema 1.1.12. Sea un proceso de Markov como el descrito anteriormente. Si la matriz \mathbf{Q} es conservativa y está uniformemente acotada, entonces la razón de ocurrencia de fallos del sistema es

$$v(t) = \sum_{i \in W, j \in F} p_i(t) q_{ij}. \quad (1.11)$$

Corolario 1.1.13. Bajo las condiciones del Teorema 1.1.12, si el proceso de Markov es ergódico y su distribución estacionaria es $\pi = (\pi_i, i \in S)$, entonces la razón de ocurrencia de fallos estacionaria es

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sum_{i \in W, j \in F} \pi_i q_{ij}. \quad (1.12)$$

1.3. Procesos estocásticos

Como ya ha sido dicho anteriormente, los procesos de Markov constituyen los modelos básicos sobre los que está basada esta Memoria. Pero también intervienen otras clases de procesos en la modelización de sistemas reparables que serán estudiados en este trabajo. Con respecto al funcionamiento del sistema los procesos a utilizar son todos de tipo Markoviano, bien a través de distribuciones tipo fase como tiempos de funcionamiento y reparación o bien utilizando procesos semi-Markovianos, que son una extensión de los procesos de Markov cuando se elimina la exponencialidad en los tiempos o fases de funcionamiento y/o reparación. En cuando al tipo de reparación los procesos geométricos permiten una modelización del tipo “no tan buena como nueva”.

1.3.1. Procesos geométricos

En el estudio de sistemas reparables, un modelo que ha sido utilizado cuando las reparaciones son “tan buenas como nuevas” son los procesos de renovación, donde se supone que el sistema se renueva después de cada fallo. Una hipótesis alternativa es suponer “reparación minimal”, que conduce al modelo de reparación minimal.

Cuando el tiempo de reparación no es instantáneo se utilizan los procesos alternados de renovación. Un estudio clásico de este tipo de procesos es dado en Heyman y Sobel (1982). Una extensión de este

estudio a nuevos tipos de procesos puntuales que incluyen las sucesiones de tiempos alternados de operatividad y reparación dependientes y no idénticamente distribuidas es llevado a cabo por Marlow y Tortorella (1995).

Cuando el tipo de reparación no es “tan bueno como nuevo” el sistema se deteriora y un modelo diferente a los anteriores puede ser aplicado. Supongamos que el sistema al ser reparado no es tan bueno como nuevo, disminuyendo el tiempo de funcionamiento después de cada reparación. El proceso de Poisson no homogéneo podría ser utilizado para modelizar estos sistemas que se deterioran, pero ya se ha explicado antes el inconveniente que presenta. Otro posible camino es la introducción de los procesos geométricos.

Definición 1.3.1. Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots , si para algún $a > 0$, la sucesión $\{a^{n-1}X_n, n = 1, 2, \dots\}$ forma un proceso de renovación, entonces $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un proceso geométrico.

El parámetro a es llamado la razón del proceso geométrico. Si $a \geq 1$, el proceso geométrico es decreciente y creciente si $a < 1$. Nótese que si $a = 1$ el proceso geométrico se reduce a un proceso de renovación.

Esta clase de procesos permite modelizar situaciones de deterioro cuando $a \geq 1$, entonces el proceso es estocásticamente creciente, y situaciones de crecimiento de la fiabilidad cuando $a < 1$, entonces el proceso es estocásticamente decreciente. Para un estudio detallado de esta clase de procesos remitimos a Lam (1987).

1.3.2. Procesos de renovación de Markov

Una extensión natural de los procesos de Markov lo constituyen los procesos semi-Markovianos. Estamos interesados en las propiedades de éstos que son usadas posteriormente, por lo que la introducción se hace directamente, sin especiales consideraciones metodológicas. Se supone un espacio de estados S , que puede ser identificado al de los números naturales. Íntimamente ligado a estos

procesos están los procesos de renovación de Markov, que pueden ser considerados la versión discreta de los procesos semi-Markovianos.

Desde el punto de vista de la fiabilidad de sistemas, los procesos de Markov constituyen un modelo de funcionamiento para el caso en que los tiempos de permanencia en estados están exponencialmente distribuidos. Una primera extensión lo constituyen las distribuciones tipo fase, donde no se pierde de vista la exponencialidad a través de las fases. Ahora bien, cuando los tiempos de permanencia no siguen distribuciones exponenciales o no puede ser interpretado como sucesión de fases exponencialmente distribuidas, se precisa una extensión de esta clase de procesos. Estos son los procesos semi-Markovianos.

Sin perder de vista un sistema de fiabilidad que con el paso del tiempo va ocupando diferentes estados y los saltos entre estos se producen aleatoriamente, en lo que sigue se considera un proceso estocástico de referencia $\{X(t), t \geq 0\}$ tal que cada $X(t)$ representa el estado ocupado en el tiempo t , que en general no es un proceso de Markov. Nos fijamos en los instantes de tiempo y en los estados ocupados en esos sucesivos instantes de tiempo. Estos tiempos pueden ser los instantes de observación en los que el sistema ocupa un determinado estado. La formulación matemática del problema es como sigue.

Sea una sucesión de tiempos (S_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, y una sucesión de estados $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Definición 1.3.2. Se dice que la sucesión bivalente de variables aleatorias $\{(S_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de renovación de Markov si se verifica:

$$(1) S_0 = 0, \text{ y } S_n \leq S_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots, \text{ y}$$

$$(2) P\{Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq x \mid Y_n = i, Y_{n-1}, S_{n-1}, \dots, Y_0\}$$

$$= P\{Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq x \mid Y_n = i\}$$

$$= P\{Y_1 = j, S_1 \leq x \mid Y_0 = i\}, \quad i, j \in S.$$

Se denota $Q_{ij}(x)$, con $i, j \in S$, la probabilidad definida en (2), es decir,

$$Q_{ij}(x) = P\{Y_1 = j, S_1 \leq x \mid Y_0 = i\}, \quad i, j \in S. \quad (1.13)$$

Sumando (1.13) sobre el subíndice j , se tiene

$$P\{S_1 \leq x \mid Y_0 = i\} = \sum_{j \in S} Q_{ij}(x) = H_i(x), \quad x \geq 0, \quad i \in S,$$

esta es la función de distribución del tiempo de permanencia en el estado i para cada i .

Definición 1.3.3. La matriz $Q(x) = (Q_{ij}(x))$ con $i, j \in S$, se denomina núcleo de la sucesión de renovación de Markov dada por (S_n, Y_n) .

La expresión

$$N(t) = \sup \{n \geq 0: S_n \leq t\} \quad (1.14)$$

representa el número de transiciones entre estados que han ocurrido hasta el tiempo t . Nos fijamos en un estado $j \in S$, y escribimos $U_j(n) = 1$ si $Y_n = j$, y $U_j(n) = 0$ en otro caso. Entonces el número de visitas al estado j hasta el tiempo t viene dado por

$$N_j(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} U_j(n), \quad j \in S, \quad t \geq 0. \quad (1.15)$$

Definición 1.3.4. El proceso estocástico vectorial $\{(N_j(t), j \in S), t \geq 0\}$ se denomina proceso de renovación de Markov (PRM).

Cuando el espacio de estados consta solo de un elemento se tiene un proceso de renovación. Para cada j , $\{N_j(t), t \geq 0\}$ es un proceso de renovación (posiblemente retardado) con tiempo entre renovaciones igual al tiempo de primer retorno al estado j .

El proceso $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados S y matriz de transición $\mathbf{P} = (p_{ij})$ dada por $\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\infty)$. Esta se denomina cadena de Markov inmersa en el PRM.

Definición 1.3.5. La matriz $\mathbf{M}(t) = (M_{ij}(t))$, cuyos elementos son

$$M_{ij}(t) = E[N_j(t) \mid Y_0 = i], \quad j \in S, \quad t \geq 0, \quad (1.16)$$

se denomina función de renovación del PRM.

La función $M_{ij}(t)$ definida en (1.16) juega un papel central en el estudio de esta clase de procesos. Dicha función representa el número esperado de visitas por el estado j en el periodo $]0, t]$ partiendo del estado i . Si inicialmente el proceso ocupa el estado i , el número esperado de visitas al estado j por unidad de tiempo durante el periodo $]0, t]$ es

$$m_{ij}(t) = \frac{dM_{ij}(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{M_{ij}(t + dt) - M_{ij}(t)}{dt}$$

Esta función $m_{ij}(t)$ se denomina densidad de renovación del PRM.

Para dt suficientemente pequeño podemos escribir $M_{ij}(t+dt) - M_{ij}(t) = E[I_{ij}\{t, t+dt\}]$, donde la expresión entre corchetes es igual a uno si ocurre una transición $i \rightarrow j$ en el intervalo $(t, t+dt)$ e igual a cero en otro caso. Entonces $dM_{ij}(t) = m_{ij}(t)dt$ es la probabilidad de que ocurra una transición $i \rightarrow j$ en el intervalo $(t, t+dt)$. Esto explica por qué se denomina a $m_{ij}(t)$ densidad de renovación, aunque no es una función de densidad de probabilidad, y pueda ser utilizada como una medida de la densidad de transiciones.

La función de renovación satisface la llamada ecuación de renovación de Markov, cuya expresión matemática es la que sigue

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q} * \mathbf{M}(t), \quad (1.17)$$

donde $*$ denota el operador de convolución.

Esta ecuación recuerda la ecuación de renovación en procesos de renovación. A partir de esta ecuación se puede probar que un PRM queda determinado por su función de renovación y una distribución inicial de probabilidad para la cadena de Markov inmersa $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Estas expresiones suelen ser tratadas a partir de las transformadas de Laplace-Stieltjes, que sustituye la convolución por el producto y hace más fácil las operaciones. Si Φ y Ψ son respectivamente las transformadas de Laplace-Stieltjes de M y Q respectivamente, se tiene

$$[1 - \Psi(s)] \Phi(s) = \Psi(s), \quad \Phi(s) \geq 0, \text{ Re } s > 0.$$

Si el espacio de estados es finito, como ocurre en los modelos que son tratados en esta Memoria, se tiene

$$\Psi(s) = \Phi(s) [\mathbf{I} + \Phi(s)]^{-1}, \quad \text{Re } s > 0.$$

Para un estudio más detallado de esta clase de procesos consultar las referencias.

1.3.3. Procesos semi-Markovianos

Estos procesos son una generalización de las cadenas de Markov de parámetro discreto y de parámetro continuo cuando los tiempos entre transiciones son variables aleatorias que dependen del presente estado y del estado de la próxima visita. Contiene como caso particular los procesos de Markov, en el caso en que los tiempos de permanencia están exponencialmente distribuidos y solo dependen del estado presente. Estos procesos están íntimamente ligados a los procesos de renovación de Markov.

Definición 1.3.6. Sea $\{(S_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ una sucesión de renovación de Markov y $N(t)$ definido en (1.14). Se define

$$X(t) = Y_{N(t)}. \quad (1.18)$$

El proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ se denomina proceso semi-Markoviano (PSM).

El proceso $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ se denomina cadena de Markov inmersa en el PSM, tiene espacio de estados S y matriz de transición $P = (p_{ij})$ dada por $P = Q(\infty)$.

Ejemplos 1.3.7. a) Toda cadena de Markov puede ser considerada un caso particular de PSM. En efecto, si $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una cadena de Markov con matriz de transición $P = (p_{ij})$, definiendo $X(t) = Y_{[t]}$ siendo $[t]$ la parte entera de t , y definiendo $Q_{ij}(t) = 0$ para $t < 1$, $Q_{ij}(t) = p_{ij}$ para $t \geq 1$, $\{X(t), t \geq 0\}$ es un PSM.

b) Si $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Markov con generador infinitesimal $A = (a_{ij})$, entonces es también un PSM cuya cadena de Markov inmersa tiene como matriz de transición los elementos $p_{ii} = 0$, y $p_{ij} = a_{ij}/-a_{ii}$ si $i \neq j$, y tal que $Q_{ij}(x) = p_{ij}(1 - \exp(a_{ii}x))$.

c) Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso alternado de renovación que modeliza el funcionamiento de un sistema reparable, con espacio de estados $\{0 \text{ (reparación)}, 1 \text{ (operativo)}\}$. Este es un PSM cuya matriz de transición de la cadena inmersa tiene como elementos $p_{01} = p_{10} = 1$, $p_{00} = p_{11} = 0$, y $Q_{01}(x) = P\{\text{tiempo en reparación} \leq x\} = H_0(x)$, $Q_{10}(x) = P\{\text{tiempo operativo} \leq x\} = H_1(x)$, siendo $H_i(x)$ la función de distribución del tiempo de permanencia en el estado $i = 0, 1$, como se ha indicado a partir de (1.13).

d) Sea un sistema con n componentes. El tiempo operativo de la componente i está exponencialmente distribuido con parámetro λ_i y el tiempo de reparación sigue una función de distribución $H_i(\cdot)$. Inicialmente todas las componentes están operativas. Cuando una componente falla el sistema falla y la componente pasa a ser reparada. Mientras el sistema está no operativo las componentes no pueden fallar. Esta situación se puede modelizar usando un PSM. Se toma $X(t) = 0$ si el sistema está operativo y $X(t) = i$ si la componente i está siendo reparada. Se define $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Llamando $p_{0i} = \lambda_i/\lambda$, $p_{i0} = 1$; $Q_{0i}(x) = 1 - \exp(-\lambda_i x)$, y $Q_{i0}(x) = H_i(x)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es un PSM.

Otros muchos ejemplos pueden darse de sistemas de fiabilidad en los que los procesos semi-Markovianos permiten la modelización de los mismos.

De (1.18) se ve que $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene funciones muestrales escalonadas continuas a la derecha. La expresión (1.13) define el núcleo del PSM. Se dice que el PSM es regular si $P\{N(t) < \infty\} = 1$ para todo $t \geq 0$, entonces el proceso tiene un número finito de saltos en un intervalo finito de tiempo. En este caso, el PSM está completamente determinado por una distribución inicial $\alpha_i = P\{X(0) = i\}$ y el núcleo definido en (1.13). Esto es similar a lo que ocurre en los procesos de Markov.

Los tiempos de primer paso por los estados juegan un papel fundamental en el estudio de esta clase de procesos.

Definición 1.3.8. Se define de la siguiente manera el tiempo de primer paso por j partiendo de i ,

$$T_{ij} = \inf \{t: N_j(t) > 0 \mid X(0) = i\}, \quad i, j \in S. \quad (1.19)$$

T_{ii} denota el tiempo medio de primer retorno al estado i .

Se introduce la siguiente notación para los tiempos medios de tiempos de primer paso que tienen interés en el estudio de esta clase de procesos: $\mu_{ij} = E[T_{ij}]$ es el tiempo medio de primer paso por el estado j desde el estado i ; $\mu_{ii} = E[T_{ii}]$ es el tiempo medio de retorno al estado i ; $\eta_i = E[S_1 \mid Y_0 = i]$ es el tiempo medio de la duración de una transición desde el estado i (tiempo de permanencia ininterrumpida en el estado i); $\eta_{ij} = E[S_1 \mid Y_0 = i, Y_1 = j]$ es el tiempo medio de la duración de la transición al estado j desde el estado i . Entre estas magnitudes existen relaciones lineales que hacen intervenir la matriz de transición de la cadena de Markov inmersa. Esto puede ser consultado en algunos textos citados en las referencias.

La comunicación de estados en el PSM y en la cadena de Markov inmersa se da simultáneamente, es decir, dos estados se comunican en el PSM si y solo si se comunican en la cadena inmersa. Como consecuencia, ambos procesos son a la vez irreducibles, es decir, hay una sola clase comunicante y todos los estados se comunican.

Definición 1.3.9. Un estado i es recurrente si $P\{T_{ii} < \infty\} = 1$ y transitorio en otro caso. Si un estado recurrente es tal que $E[T_{ii}] = \infty$ se dice que es recurrente nulo, y si $E[T_{ii}] < \infty$ es recurrente positivo. Un estado recurrente positivo es llamado ergódico.

Un estado es recurrente (transitorio) en el PSM si y solo si es recurrente (transitorio) en la cadena de Markov inmersa.

El comportamiento asintótico de las probabilidades de transición del proceso es otro de los tópicos importantes. Con el fin de simplificar los resultados, supondremos que todos los estados son aperiódicos. El siguiente resultado da una condición suficiente para la recurrencia positiva o nula en un PSM.

Teorema 1.3.10. Sea la cadena de Markov inmersa $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ irreducible y recurrente. Sea π una solución positiva del sistema $\pi = \pi P$, donde $P = Q(\infty)$ es la matriz de transición de la cadena de Markov inmersa. Entonces todos los estados del PSM son

(1) recurrentes positivos si y solo si $\sum_{i \in S} \pi_i \eta_i < \infty$,

(2) recurrentes nulos si y solo si $\sum_{i \in S} \pi_i \eta_i = \infty$,

siendo η_i el tiempo medio de permanencia en el estado i .

En el caso en que la cadena inmersa es recurrente positiva el vector π debidamente normalizado es la distribución estacionaria.

El teorema que sigue es un importante resultado sobre el comportamiento límite de las probabilidades de transición en el PSM, y está íntimamente ligado al comportamiento límite en la cadena de Markov inmersa.

Teorema 1.3.11. Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un PSM irreducible, recurrente y aperiódico. Sea π una solución positiva del sistema $\pi = \pi P$, siendo P la matriz de transición de la cadena de Markov inmersa. Entonces

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\} = \frac{\pi_j \eta_j}{\sum_{k \in S} \pi_k \eta_k}, \quad (1.20)$$

donde η_i es el tiempo medio de permanencia en el estado i .

Retornamos ahora al PRM asociado al PSM. El PRM es irreducible si y solo si lo es el correspondiente PSM. El teorema llave de renovación válido para procesos de renovación es extensible a PRM con espacio de estados finito, como será el caso de los modelos que se estudian en este trabajo. Se precisa la definición de funciones directamente integrables Riemann.

Definición 1.3.12. Sea $g \geq 0$ una función acotada sobre intervalos finitos. Para $b > 0$ se define

$$\gamma'_b(n) = \inf \{g(t): nb \leq t < nb+b\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\gamma''_b(n) = \sup \{g(t): nb \leq t < nb+b\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y sea

$$\sigma'_b = b \sum_n \gamma'_b(n), \quad \sigma''_b = b \sum_n \gamma''_b(n).$$

Se dice que la función g es directamente integrable Riemann si las sumas anteriores convergen para cualquier $b > 0$, y además

$$\lim_{b \rightarrow 0} (\sigma''_b - \sigma'_b) = 0.$$

Si g es directamente integrable Riemann, entonces

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma''_b = \lim_{b \rightarrow 0} \sigma'_b = \int_0^{\infty} g(t) dt,$$

siendo la última integral la de Riemann de la función g .

Los siguientes resultados serán aplicados en el Capítulo IV. Las pruebas de los mismos pueden ser consultadas en Çinlar (1975, p. 296). Estos establecen caracterizaciones y propiedades de esta clase de funciones en términos que permiten una más fácil aplicación, dada la dificultad de aplicar directamente la definición anterior.

Teorema 1.3.13. (a) Sea $g \geq 0$ una función continua definida sobre un intervalo acotado y nula fuera de él, entonces es directamente integrable Riemann.

(b) Sea $g \geq 0$ una función continua y acotada, entonces es directamente integrable Riemann si y solo si $\sigma_b'' < 0$ para algún $b > 0$.

(c) Sea $g \geq 0$ una función monótona y decreciente, entonces es directamente integrable Riemann si y solo si es integrable Riemann.

(d) Sea $g \geq 0$ una función directamente integrable Riemann, y sea φ una función de distribución, entonces la convolución $\varphi * g$ es directamente integrable Riemann.

Como consecuencia de estas propiedades, si una función $g \geq 0$ es integrable Riemann y está acotada por una función directamente integrable Riemann, entonces la función g es directamente integrable Riemann.

Teorema 1.3.14. Sea $M(\cdot)$ la función de renovación de Markov de un PRM irreducible con núcleo $Q(\cdot)$ y espacio de estados finito $S = \{0, 1, \dots, n\}$. Para cada $j \in S$, sea $h_j(\cdot)$ una función directamente integrable Riemann. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \int_0^t h_j(t-u) dM_{ij}(u) = \frac{1}{\mu_{jj}} \sum_{j=0}^n \int_0^{\infty} h_j(u) du, \quad (1.21)$$

para cada $j \in S$, donde μ_{jj} es el tiempo medio de retorno al estado j .

En la prueba de este teorema se establece la igualdad de los dos miembros anteriores término a término, para cada j . En el Capítulo IV,

donde se introduce un proceso semi-Markoviano para modelizar el funcionamiento de un sistema, se aplicará este resultado.

Para una discusión completa en el caso en que el espacio de estados es infinito una condición más fuerte que la de ser directamente integrable Riemann es necesitada para la verificación de la relación anterior. Para más detalles debe consultarse el texto de Çinlar (1975). En lo que a este trabajo se refiere es este resultado el que aplicaremos al estudiar los modelos de sistemas de fiabilidad, debido a que el espacio de estados es finito.

CAPÍTULO II

SISTEMA CON TIEMPOS OPERATIVOS Y DE REPARACIÓN TIPO FASE CON MEMORIA DE LA FASE DE FALLO (MODELO I)

Se considera un dispositivo o sistema desde el punto de vista de la fiabilidad. Inicialmente el sistema está operativo y está sometido a fallos que ocurren aleatoriamente en el tiempo. Cuando un fallo ocurre el sistema pasa a ser reparado. Una vez reparado el sistema pasa a ser operativo de nuevo. Los tiempos de funcionamiento y reparación son aleatorios. Este tipo de sistemas ha sido estudiado cuando estos tiempos aleatorios están exponencialmente distribuidos utilizando procesos alternados de renovación siempre que la reparación sea tan

buena como nueva. Si la reparación no es tan buena como nueva, el proceso de Poisson no homogéneo puede ser utilizado para este fin, con los inconvenientes que ya se han indicado cuando se trató de este proceso en el Capítulo I. Lam (1995) consideró que después de cada reparación el tiempo operativo del sistema venía afectado por un coeficiente de deterioro, y los sucesivos tiempos operativos formaban un proceso geométrico. Con esta hipótesis hay que introducir variables suplementarias en el modelo para conseguir que el funcionamiento del sistema venga gobernado por un proceso de Markov. En el trabajo citado los tiempos operativos y de reparación estaban exponencialmente distribuidos, y solo se consideraban fallos reparables. Después de un determinado número de fallos el sistema era sustituido por otro nuevo e idéntico. En el modelo que se estudia en este capítulo se generaliza el trabajo de Lam en dos aspectos. En primer lugar se considera un sistema con tiempos operativos y de reparación que siguen distribuciones tipo fase. En segundo lugar, los tipos de fallo pueden ser de desgaste y accidentales, estos a su vez pueden ser reparables o no reparables. Con esta nueva consideración hay que modelizar la llegada de los fallos accidentales.

2.1. El proceso de Markov

Se considera un sistema de fiabilidad sometido a fallos accidentales y de desgaste, los primeros se deben a causas externas y los segundos a causas internas. El sistema está operativo inicialmente. Cuando se produce un fallo reparable pasa a un canal con un reparador, donde se lleva a cabo la reparación. Una vez reparado el sistema pasa a estar de nuevo operativo. La reparación no es tan buena como nueva. Una vez que el sistema es reparado pasa instantáneamente a estar operativo. Cuando se produce un fallo no reparable, el sistema es sustituido instantáneamente por otro nuevo e idéntico.

2.1.1. Hipótesis del modelo

A continuación establecemos las hipótesis sobre las magnitudes que intervienen en el comportamiento de este sistema: las llegadas de

los fallos, los tiempos de funcionamiento y reparación, y el mecanismo de reparación.

Hipótesis 1. Los fallos accidentales ocurren según un proceso de Poisson de parámetro λ . Estos fallos pueden ser reparables con probabilidad p o no reparables con probabilidad $q = 1 - p$, siguiendo el mecanismo de los ensayos de Bernoulli. Además, el sistema puede fallar debido al desgaste, y estos fallos son siempre no reparables. Los fallos reparables son reparados en el canal de reparación, y una vez que son reparados el sistema se reinicia pero no es tan bueno como nuevo. La ocurrencia de fallos no reparables supone la sustitución del sistema por otro nuevo e idéntico. Todos los fallos son independientes.

Hipótesis 2. Sea X_n el tiempo de fallo del sistema después de la reparación $(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$, donde X_1 supone el tiempo de fallo antes de ser reparado, cuando el sistema es nuevo. Suponemos que cada X_n está gobernado por una distribución tipo fase cuya representación consta de un vector inicial y una matriz del tipo $a^{n-1}T$, con $a \geq 1$, siendo a un coeficiente de deterioro. El vector inicial está determinado en cada caso por la fase operativa en que falló el sistema, de modo que cuando ocurre un fallo desde una fase operativa, el sistema una vez reparado retorna a la fase operativa en que falló. En otras palabras, el sistema "recuerda" la fase operativa en que ocurrió el fallo y después de ser reparado retorna a dicha fase.

Hipótesis 3. El tiempo de reparación después del fallo n -simo se representa por Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Se supone que $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un proceso de renovación, y cada Y_n es una distribución tipo fase con representación (β, S) . La función de distribución de cada Y_n es por tanto de la forma

$$G(x) = 1 - \beta \exp(Sx)e, \quad x \geq 0.$$

Las matrices T , S , y los vectores iniciales β y los correspondientes a las distribuciones tipo fase de X_n son de orden adecuado para que las expresiones tengan sentido.

Hipótesis 4. Las sucesiones $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ y $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ son independientes.

Hipótesis 5. Cuando el sistema ha sido reparado N veces ya no es reparado en el siguiente fallo, de modo que si ocurre un fallo de cualquier tipo el sistema es sustituido por uno nuevo e idéntico.

2.1.2. El generador infinitesimal

En este sistema el dispositivo tiene una distribución de tiempo de fallo inicial tipo fase denotada por $F(\cdot)$ y con representación (α, T) . Después de cada reparación la representación del nuevo tiempo de fallo cambia en ambas componentes, siendo conocida la evolución de la matriz y dependiente de la evolución del sistema el vector inicial. Después de i reparaciones completadas el tiempo de fallo del sistema viene multiplicado por el factor α^i , de modo que para $\alpha \geq 1$ se va ocasionando un deterioro. Nótese que si $\alpha \leq 1$ el sistema tendría fiabilidad creciente después de cada reparación.

Los estados del sistema se dividen en dos grupos: estados operativos y estados de fallo o reparación (no operativos). Se denota i el estado operativo después de i reparaciones, $i = 0, 1, \dots, N$, y por i_R el estado de reparación después de haber completado $i - 1$ reparaciones, $i_R = 1_R, 2_R, \dots, N_R$. Estos estados se agrupan en los siguientes conjuntos $W = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ y $F = \{1_R, 2_R, \dots, N_R\}$, donde W consta de los estados operativos y F de los estados no operativos. Estos estados son realmente macro-estados, y serán designados como estados por simplificar.

El generador infinitesimal del proceso de Markov que va a modelizar el funcionamiento del sistema viene expresado en términos de estos macro-estados, y como se pondrá en evidencia más abajo dicho generador será una matriz de bloques. Para fijar ideas supondremos que las fases de los tiempos operativos son m y las de los tiempos de reparación n , en otras palabras, la matriz T es de orden $m \times m$ y la matriz S de orden $n \times n$, y las fases absorbentes son $m + 1$ y $n + 1$, respectivamente.

En la Figura 1 se presenta el diagrama de las transiciones entre los macro-estados del sistema.

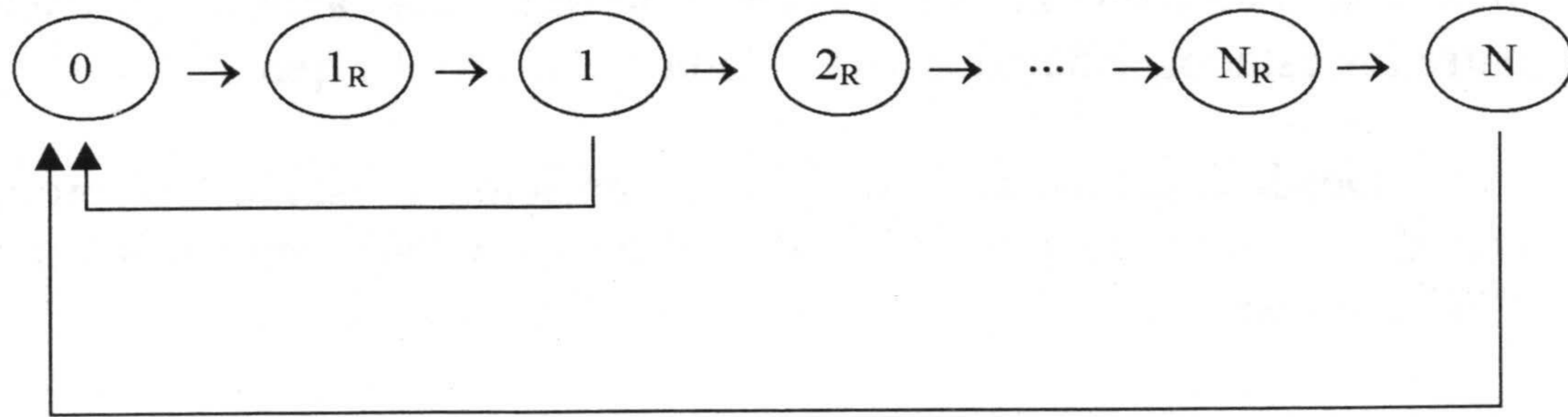


Figura 1. Diagrama de transiciones entre estados

Cuando el sistema está operativo está en alguna de las m fases operativas, y cuando está en reparación ocupa alguna de las n fases no operativas. El estado operativo i está por tanto constituido por todas las fases $1, 2, \dots, m$, y el macro-estado i_R está constituido por todos los pares (i, j) con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, la primera componente indica la fase operativa en la que ocurrió el fallo y la segunda la fase de reparación.

La estructura de Markov puede ser aplicada ya que se consideran los tiempos exponencialmente distribuidos de permanencia en las fases operativas y de reparación, aunque el razonamiento para la obtención del generador se va a hacer sobre los macro-estados antes definidos.

Transición $i \rightarrow 0$

Si el sistema está operativo en el estado i ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) y se presenta un fallo no reparable, se produce una transición desde el estado i al estado 0 . Ahora bien, los fallos no reparables pueden ser de desgaste o accidentales. Si el fallo es de desgaste, las razones de fallo desde las fases operativas del macro-estado i vienen dadas por el vector de absorción $\alpha^i T^0$, e inmediatamente pasa a ser sustituido por un sistema nuevo e idéntico que opera siguiendo el vector inicial α . Un fallo accidental ocurre con razón λq en alguna fase operativa sin

determinar del estado i , el sistema es sustituido instantáneamente y pasa a ser operativo reiniciándose en alguna fase operativa según el vector α . Por tanto la matriz que representa las razones de cambio entre los estados señalados viene dada por $\alpha^i \mathbf{T}^0 \alpha + \lambda q e \alpha$.

Desde el estado operativo N la transición al estado 0 se produce cuando ocurre cualquier tipo de fallo. Esto está representado por $\alpha^N \mathbf{T}^0 \alpha + \lambda e \alpha$.

Transición $i \rightarrow (i+1)_R$

Si el sistema está operativo en el estado i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) y ocurre un fallo reparable, se produce una transición al estado desde i al estado $(i+1)_R$. En estas transiciones, el sistema pasa desde una fase operativa cualquiera a una fase de reparación de acuerdo con el vector inicial β . Entonces la matriz de razones de transición viene dada por $\lambda p \mathbf{I} \otimes \beta$, siendo \mathbf{I} la matriz identidad de orden $m \times m$.

Transición $i_R \rightarrow i$

Si el sistema está siendo reparado en el estado i_R ($i = 1, \dots, N$), la transición al estado i ocurre cuando se completa la reparación y retorna al estado operativo i . En estas transiciones la fase ocupada por el sistema en el instante de fallo es recordada, y el sistema retorna a la fase operativa en que se produjo el fallo. La matriz de razones de transición viene dada por $\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}^0$.

El resto de bloques no considerados aquí, excepto en lo que se refiere a los bloques diagonales, son nulos. Vamos a calcular los bloques diagonales, abusando de la notación, ya que las siguientes no son realmente transiciones.

Transición $i_R \rightarrow i_R$

Si el sistema está en reparación en el estado i_R ($i = 1, \dots, N$), estará ocupando alguna de las fases de reparación independientemente del estado operativo de procedencia, entonces las razones de transición vienen gobernadas por la matriz $\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}$.

Transición $i \rightarrow i$

Las matrices de razones de transición por bloques que están colocadas en la diagonal corresponden a las transiciones $i \rightarrow i$ ($i = 1, \dots, N$), y estas están gobernadas por las matrices $a^i \mathbf{T}$, ya que estas transiciones ocurren entre fases operativas del mismo estado.

La matriz correspondiente a la transición $0 \rightarrow 0$ se obtiene teniendo en cuenta tres posibilidades: que el sistema ocupe una fase operativa y cambie a otra fase operativa, esto se rige por la matriz \mathbf{T} ; que se produzca un fallo de desgaste y sea sustituido por otro nuevo e idéntico, esto se rige por la matriz $\mathbf{T}^0 \alpha$; o que se produzca un fallo accidental no reparable, esto viene gobernado por la matriz $\lambda q e \alpha$. Luego la matriz correspondiente es $\mathbf{T} + \mathbf{T}^0 \alpha + \lambda q e \alpha$.

El generador infinitesimal construido de esta manera es de orden $[m(N + 1) + mnN] \times [m(N + 1) + mnN]$. Efectuando el producto por bloques de esta matriz por el vector columna \mathbf{e} de la correspondiente dimensión, aplicando propiedades del producto de Kronecker, se advierte que los productos son siempre vectores ceros excepto los bloques diagonales. En efecto, es fácil comprobar que al multiplicar la primera fila de bloques de la matriz \mathbf{Q} por el vector \mathbf{e} de orden mn , que puede ser escrito en la forma $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$, donde el subíndice designa la dimensión del vector columna, se obtiene el vector $\lambda \mathbf{e}_m$. Esto ocurre con todas los bloques de las filas correspondientes a los estados i . Por tanto los bloques diagonales deben ser corregidos para que la matriz sea conservativa en la forma que se indica en la expresión del generador \mathbf{Q} . No se representan los bloques nulos del generador.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{T}^0 \alpha - \lambda \mathbf{I} + q \lambda e \alpha & \lambda p \mathbf{I} \otimes \beta & \dots & \dots \\ & \mathbf{I} \otimes \mathbf{S} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}^0 & \dots \\ a^1 \mathbf{T}^0 \alpha + \lambda q e \alpha & & a^1 \mathbf{T} - \lambda \mathbf{I} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^N \mathbf{T}^0 \alpha + \lambda e \alpha & \dots & \dots & \dots & a^N \mathbf{T} - \lambda \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Las matrices $-\lambda\mathbf{I}$ que aparecen en la diagonal principal indican la influencia que tienen sobre el generador los fallos accidentales. Cuando no se considera ese tipo de fallos, el generador resultante obtenido como se ha indicado previamente resulta conservativo, sin necesidad de añadir sumandos correctores sobre la diagonal.

2.2. Distribución estacionaria

Estamos interesados en el comportamiento del sistema con respecto a las medidas de fiabilidad. El régimen transitorio presenta graves problemas de cálculo y resulta de poca efectividad práctica. Por ello se va a considerar el comportamiento del sistema en régimen estacionario y las medidas de la fiabilidad del sistema serán calculadas en este régimen. Ahora se comprueba la ventaja de utilizar la estructura Markoviana del sistema, sin perder de vista las fases exponencialmente distribuidas, aunque el estado del sistema lo representen los macro-estados.

En régimen estacionario las probabilidades de ocupación de los estados no dependen del tiempo. Se aplican los resultados bien conocidos de los procesos de Markov.

Se denota la distribución estacionaria por un vector utilizando los bloques que han sido introducidos en el generador infinitesimal \mathbf{Q} calculado anteriormente. El vector distribución estacionaria se escribe en la forma

$$\pi = [\pi(0), \pi(1_R), \pi(1), \pi(2_R), \dots, \pi(N)]. \quad (2.1)$$

En esta expresión, $\pi(i)$ es la probabilidad de permanecer en el estado operativo i , y $\pi(i_R)$ es la probabilidad de permanecer en el estado de reparación i_R . Cada uno de estos vectores tiene en cuenta la fase ocupada por el sistema en cada estado. El vector π está

determinado por la ecuación $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, bajo la condición de normalización $\pi\mathbf{e} = 1$.

Ciertas cantidades son introducidas con el fin de simplificar la expresión final de la distribución estacionaria, y que pueda ser aplicada utilizando métodos informáticos. Además, las medidas de fiabilidad que serán obtenidas en la siguiente sección vienen dadas en términos del vector π , y es conveniente disponer de expresiones preparadas para su utilización computacional.

Efectuando el producto $\pi\mathbf{Q}$ por bloques se tiene para la primera fila la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \pi(0)(\mathbf{T} + \mathbf{T}^0\alpha - \lambda\mathbf{I} + q\lambda\mathbf{e}\alpha) \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \pi(i)(a^i\mathbf{T}^0\alpha + \lambda q\mathbf{e}\alpha) + \pi(N)(a^N\mathbf{T}^0\alpha + \lambda\mathbf{e}\alpha), \end{aligned} \quad (2.2)$$

y para las restantes filas se puede comprobar que las expresiones son

$$\pi(i-1)[\lambda p\mathbf{I} \otimes \beta] + \pi(i_R)[\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$\pi(i_R)[\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}^0] + \pi(i)[a^i\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

La expresión (2.1) igualada al vector $\mathbf{0}$ puede ser escrita en la forma

$$\pi(0) = \mathbf{K}\alpha(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}, \quad (2.5)$$

donde la constante \mathbf{K} viene dada por

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^N a^i \pi(i)\mathbf{T}^0 + \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i)\mathbf{e} + \lambda \pi(N)\mathbf{e}. \quad (2.6)$$

Igualando al vector $\mathbf{0}$ las expresiones (2.3)-(2.4) y utilizando argumentos de recurrencia se obtienen las expresiones explícitas de $\pi(i)$ y $\pi(i_R)$, que expresamos en términos de (2.6) para simplificar:

$$\pi(i) = K(\lambda p)^i \alpha \prod_{k=0}^i (\lambda \mathbf{I} - a^k \mathbf{T})^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.7)$$

$$\pi(i_R) = -K(\lambda p)^{i-1} \alpha \prod_{k=0}^{i-1} (\lambda \mathbf{I} - a^k \mathbf{T})^{-1} (\lambda p \mathbf{I} \otimes \beta \mathbf{S}^{-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

La constante K introducida en (2.6) es calculada a partir de la propiedad de normalización $\pi \mathbf{e} = 1$. Para ello esta expresión se escribe como

$$\sum_{i=0}^N \pi(i) \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N \pi(i_R) \mathbf{e} = 1, \quad (2.9)$$

donde los vectores \mathbf{e} tienen las dimensiones adecuadas. Sustituyendo (2.7) y (2.6) en esta expresión, la constante K puede ser expresada como

$$K^{-1} = \sum_{i=0}^N (\lambda p)^i \alpha \prod_{k=0}^i (\lambda \mathbf{I} - a^k \mathbf{T})^{-1} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N (\lambda p)^i \mu_R \alpha \prod_{k=0}^{i-1} (\lambda \mathbf{I} - a^k \mathbf{T})^{-1} \mathbf{e},$$

siendo μ_R el valor medio del tiempo de reparación.

Como puede observarse, estas expresiones no son manejables y su aplicación práctica presenta dificultades de cálculo evidentes. Por esta razón se introducen ahora nuevas cantidades cuyo único fin es preparar las expresiones anteriores para su cálculo computacional. Se puede escribir

$$K^{-1} = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i, \quad (2.10)$$

con

$$\varepsilon_i = (\lambda p)^i \alpha \prod_{k=0}^i (\lambda I - a^k T)^{-1} e. \quad (2.11)$$

Sustituyendo este valor de K en las expresiones (2.7)-(2.8) puede calcularse la distribución estacionaria en términos de (2.11).

2.3. Medidas de funcionamiento

Las medidas de funcionamiento que son calculadas en este trabajo son la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos (ROCOF). Dado que son considerados distintos tipos de fallo, el ROCOF será calculado para cada uno de ellos, y además para el conjunto de fallos. El comportamiento del sistema será considerado estacionario.

2.3.1. Disponibilidad

En sistemas reparables la disponibilidad $A(t)$ es la primera medida de funcionamiento. Define la probabilidad de que el sistema esté operativo en el tiempo t , y ha sido ya introducida en el Capítulo I. El problema primero que tratamos es dar una expresión para la disponibilidad estacionaria del sistema que estamos estudiando. Con ello se extiende en cierto sentido el trabajo de Lam (1995). La expresión que obtendremos para la disponibilidad será expresada en términos de las cantidades dadas en (2.11) para su cálculo informático.

Teniendo en cuenta la definición de disponibilidad aplicada al sistema que tratamos, y dado que el sistema se haya en régimen estacionario, la disponibilidad es la probabilidad de que en un instante arbitrario el sistema esté operativo, dicho de otra manera, es la probabilidad de que el sistema ocupe alguno de los macro-estados operativos. También puede ser interpretada como la proporción de tiempo que el sistema está operativo. En la siguiente expresión se hace uso de estos argumentos y se utiliza directamente (2.11):

$$A = \sum_{i=0}^N \pi(i) \mathbf{e} = \frac{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (2.12)$$

Razonando de la misma manera, la proporción de tiempo que el sistema está en reparación (no operativo) es $\bar{A} = 1 - A$ y la expresión formal es

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \pi(i_R) \mathbf{e} = \frac{\lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (2.13)$$

Nótese que la disponibilidad depende de la distribución de los tiempos operativos, del número de reparaciones y del tiempo medio de reparación, pero no depende de la forma que tiene la distribución del tiempo de reparación.

2.3.2. Razón de ocurrencia de fallos (ROCOF)

La razón de ocurrencia de fallos ha sido definida en el Capítulo I para diversos procesos estocásticos, y se debe a Lam (1997) la obtención del mismo para procesos de Markov. Esta viene dada en términos de las intensidades de transición q_{ij} y de las probabilidades

de ocupación $p_i(t)$ en el tiempo t . Para el cálculo de la expresión matemática del mismo el espacio de estados se clasifica en dos clases: estados operativos W y estados no operativos F . Recordamos ahora la expresión (1.11) que expresa el ROCOF en un proceso de Markov:

$$v(t) = \sum_{i \in W, j \in F} p_i(t) q_{ij}.$$

En el caso estacionario $v = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Esta medida es interpretada como el número medio de fallos por unidad de tiempo, y su interés es obvio en el comportamiento del sistema. Dado que se distinguen tres tipos de fallo, calcularemos el ROCOF para cada uno de ellos. Vendrán dadas las expresiones utilizando (2.11), para que puedan ser abordadas computacionalmente.

ROCOF de fallos reparables

Se denota v_1 el ROCOF de los fallos reparables. Haciendo uso de la definición de ROCOF, los fallos reparables ocurren con razón λp y el fallo se produce cuando el sistema está en un estado operativo, la expresión de esta medida es

$$v_1 = \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} = \frac{\lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (2.14)$$

ROCOF de fallos accidentales no reparables

El ROCOF de los fallos accidentales no reparables se denota v_2 y su expresión matemática, teniendo en cuenta que la razón de ocurrencia de este tipo de fallos es λq , viene dada por

$$v_2 = \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda \pi(N) \mathbf{e} = \frac{\lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i + \lambda \varepsilon_N}{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (2.15)$$

ROCOF de fallos de desgaste

Por último, el ROCOF debido a fallos de desgaste se denota v_3 . Un fallo de este tipo ocurre desde cualquier estado operativo y se produce cuando hay una absorción por la fase absorbente en cada uno de los estados operativos. El vector de absorción varía en cada estado operativo, por tanto la expresión matemática del ROCOF de este tipo de fallos es

$$v_3 = \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0 = \frac{\sum_{i=0}^N (a\lambda p)^i \alpha \prod_{k=0}^i (\lambda \mathbf{I} - a^k \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0}{\sum_{i=0}^N \varepsilon_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (2.16)$$

ROCOF del total de fallos del sistema

La razón de ocurrencia total de fallos es $v = v_1 + v_2 + v_3$. Nótese que de la expresión (2.6) se deduce que la constante K es precisamente $v_2 + v_3$, con lo que se puede dar una interpretación física de la misma, esta constante es la razón de ocurrencia de fallos no reparables, accidentales o de desgaste. Entonces K^{-1} representa el tiempo medio entre ocurrencias consecutivas de fallos no reparables, en otras palabras, el tiempo medio entre reemplazamientos consecutivos del sistema.

La razón de ocurrencia total de fallos puede venir expresada en términos de la disponibilidad del sistema. En efecto, usando (2.12), (2.14), (2.15) y (2.16) resulta

$$\begin{aligned} v &= \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda \pi(N) \mathbf{e} + \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0 \\ &= \lambda \mathbf{A} + \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta fórmula expresa también que la razón de ocurrencia de fallos accidentales es precisamente la razón λ del proceso de Poisson de llegadas de fallos accidentales por la disponibilidad del sistema.

Comparando las expresiones (2.13) y (2.14) resulta

$$\bar{\mathbf{A}} = \mu_R v_1, \quad (2.18)$$

es decir, en la evolución del sistema en régimen estacionario, la proporción de tiempo que el sistema está en reparación es el producto del tiempo medio de reparación por la razón de ocurrencia de fallos reparables. Esta relación puede ser escrita en la forma

$$\sum_{i=1}^N \pi(i_R) \mathbf{e} = \mu_R \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e}. \quad (2.19)$$

Usando la propiedad de normalización (2.9) se obtiene otra expresión para la disponibilidad del sistema

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^N \pi(i) \mathbf{e} = \frac{1 + \lambda p \mu_R \pi(N) \mathbf{e}}{1 + \lambda p \mu_R}. \quad (2.20)$$

CAPÍTULO III

SISTEMA CON TIEMPOS OPERATIVOS Y DE REPARACIÓN TIPO FASE SIN MEMORIA DE LA FASE DE FALLO (MODELO II)

En este capítulo se considera el mismo modelo que en el capítulo anterior, es decir, se trata de un sistema con tiempos de funcionamiento y reparación que siguen distribuciones tipo fase, el tipo de reparación es "no tan buena como nueva", se tiene en cuenta un número de ciclos de reparación y el sistema está sometido a distintos tipos de fallo. La novedad radica en que ahora, cuando el sistema es reparado y retorna a un estado operativo, no se tiene en cuenta la fase operativa en que ocurrió el fallo, y el retorno al estado

operativo se hace siguiendo un vector inicial de probabilidades. Esta situación suele presentarse en la práctica cuando no se conoce con detalle el funcionamiento interno del sistema. En este modelo el deterioro progresivo puede venir modelizado mediante un proceso geométrico. Esto no fue posible en el modelo del capítulo anterior al tener cada entrada en un estado de funcionamiento un vector de probabilidades inicial distinto. En definitiva es el mismo modelo pero las transiciones ocurren ahora de otra manera. Esto supondrá en los cálculos la introducción de la transformada de Laplace-Stieltjes, que no había tenido ningún papel en el Modelo I. Se sigue en este capítulo la misma metodología y el mismo desarrollo que se ha seguido en el Capítulo II. Se establecerán comparaciones entre ambos modelos, y se comprobará que algunas expresiones son muy similares.

3.1. El proceso de Markov

Las hipótesis de este nuevo modelo son las mismas que las que han sido formuladas para el Modelo I en la Sección 2.1.1, pero las transiciones ocurren de manera diferente. Supondremos que X_n es el tiempo de fallo del sistema después de la reparación $(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$, donde cada X_n está gobernado por una distribución tipo fase cuya representación es $(\alpha, a^{n-1}\mathbf{T})$, con $a \geq 1$, siendo a un coeficiente de deterioro. En otras palabras, el proceso $\{a^{n-1} X_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un proceso de renovación, o equivalentemente, $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un proceso geométrico. La función de distribución de la variable aleatoria X_n viene dada por

$$F_n(x) = 1 - \alpha \exp(a^{n-1}\mathbf{T}x)\mathbf{e}, \quad x \geq 0. \quad (3.1)$$

Se representa por $F(\cdot)$ la función de distribución del sistema cuando es nuevo.

El tiempo de reparación después del fallo n ésimo se representa por Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Se supone que $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un proceso de renovación, y que cada Y_n sigue una distribución tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) , con función de distribución de la forma

$$G(x) = 1 - \beta \exp(\mathbf{S}x)\mathbf{e}, \quad x \geq 0. \quad (3.2)$$

En este modelo, cuando ocurre una reparación el sistema una vez reparado retorna al estado operativo y el retorno se hace siguiendo el vector inicial de probabilidades α .

Los estados del sistema, denominados macro-estados, son los mismos que en el Modelo I, y se mantiene la misma notación. Lo que varía en este caso son las transiciones que estudiamos a continuación. Recordamos que cuando el sistema está operativo está en alguna de las m fases operativas, y cuando está en reparación ocupa alguna de las n fases no operativas. El estado operativo i está por tanto constituido por todas las fases $1, 2, \dots, m$, y el macro-estado i_R está constituido por todas las fases $1, 2, \dots, n$. También se supone el mismo orden para las matrices que se tratan, y el generador será construido por bloques, que se calculan a continuación.

Transición $i \rightarrow 0$

Se repite paso a paso lo que se estableció en el Modelo I, de modo que la matriz que representa las razones de cambio entre los estados señalados viene dada por $a^i T^0 \alpha + \lambda q e \alpha$ para $i = 0, 1, \dots, N-1$, y $a^N T^0 \alpha + \lambda e \alpha$ para el estado $i = N$.

Transición $i \rightarrow (i+1)_R$

Si el sistema está operativo en el estado i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) y ocurre un fallo reparable, se produce una transición al estado desde i al estado $(i+1)_R$. Esto ocurre desde cualquier fase operativa y entra en el estado de reparación según el vector inicial β . Entonces la matriz de razones de transición viene dada por $\lambda p e \beta$.

Transición $i_R \rightarrow i$

Esta transición ocurre igual que en el Modelo I: primero se produce la absorción en el tiempo de reparación y la incorporación al estado operativo siguiendo el vector α . La matriz de razones de transición viene dada por $S^0 \alpha$.

Transición $i_R \rightarrow i_R$

Es fácil comprobar que esta mal llamada transición viene regida por la matriz S .

Transición $i \rightarrow i$

En este caso el razonamiento nos lleva a las mismas expresiones que en el Modelo I.

Como consecuencia de lo anterior, el generador infinitesimal construido de esta manera es de orden $[m + (m + n) N] \times [m + (m + n) N]$. Nótese que en esta ocasión no aparece el formalismo de Kronecker en el cálculo de las matrices de razones de transición, por lo que algunas expresiones son simplificadas con respecto al Modelo I. Teniendo en cuenta que la matriz debe ser conservativa, se tiene por fin el generador infinitesimal para este modelo,

$$Q = \begin{pmatrix} T + T^0 \alpha - \lambda I + q\lambda e\alpha & \lambda p e \beta & \dots & \dots \\ & S & S^0 \alpha & \dots \\ \alpha T^0 \alpha + \lambda q e \alpha & & \alpha T - \lambda I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^N T^0 \alpha + \lambda e \alpha & \dots & \dots & \dots & \alpha^N T - \lambda I \end{pmatrix}.$$

3.2. Distribución estacionaria

Se denota la distribución estacionaria como en el Capítulo II, es decir,

$$\pi = [\pi(0), \pi(1_R), \pi(1), \pi(2_R), \dots, \pi(N)].$$

si bien ahora la dimensión es distinta. Este vector π está determinado por la ecuación $\pi Q = 0$, bajo la condición de normalización $\pi e = 1$.

Efectuando el producto $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ por bloques se tiene para la primera fila la siguiente expresión:

$$\pi(0) = K\alpha(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}, \quad (3.3)$$

donde la constante K viene dada por

$$K = \sum_{i=0}^N \alpha^i \pi(i) \mathbf{T}^0 + \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda \pi(N) \mathbf{e}. \quad (3.4)$$

Estas expresiones son similares a las obtenidas en el Modelo I y para las restantes filas se puede comprobar que se verifica

$$\pi(i-1)[\lambda p e \beta] + \pi(i) \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

$$\pi(i) \mathbf{S}^0 \alpha + \pi(i) [\alpha^i \mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}] = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

La transformada de Laplace-Stieltjes de las distribuciones de tiempos de fallo aparece en los cálculos intermedios para resolver estas ecuaciones por recurrencia y obtener una expresión explícita para la distribución estacionaria. Será utilizada la propiedad de cambio de escala en esta transformación.

Se denota $\Phi(s)$ la transformada de Laplace-Stieltjes de $F(\cdot)$, que es la función de distribución del tiempo operativo del sistema cuando es nuevo. La transformada de esta distribución tipo fase, que tiene representación (α, \mathbf{T}) , es una expresión algebraica (Neuts, 1981) dada por

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0, \quad \text{Re } s > 0. \quad (3.7)$$

Tiene interés señalar que esta transformada tiene una interpretación probabilística de interés en lo que sigue. Si se sustituye s por λ en la expresión (3.7), se tiene la probabilidad de que ocurra un fallo de desgaste antes que un fallo accidental. Resulta fácil de comprobar, integrando por partes, que

$$1 - \Phi(s) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-sx}) dF(x),$$

y esto, sustituyendo s por λ expresa la probabilidad de un fallo accidental antes que un fallo de desgaste. Estas expresiones surgen frecuentemente en adelante.

De la expresión (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Phi(s)}{s} &= \frac{1}{s} [1 - \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0] \\ &= \frac{1}{s} [\alpha \mathbf{e} - \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0] \\ &= \frac{1}{s} [\alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{T}) \mathbf{e} - \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0] \\ &= \frac{1}{s} \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{T}) \mathbf{e} - \mathbf{T}^0] \\ &= \frac{1}{s} \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} (s\mathbf{I} \mathbf{e} - \mathbf{T} \mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \\ &= \alpha(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{e}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Resolviendo las ecuaciones (3.5)-(3.6) utilizando (3.7)-(3.8) se tienen las expresiones explícitas de las probabilidades que conforman la distribución estacionaria. Para $i = 1, 2, \dots, N$, se tiene

$$\boldsymbol{\pi}(i) = Kp^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - \Phi(a^{-k}\lambda)) \boldsymbol{\alpha} (\lambda \mathbf{I} - a^i \mathbf{T})^{-1}, \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\pi}(i_R) = -Kp^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - \Phi(a^{-k}\lambda)) \boldsymbol{\beta} \mathbf{S}^{-1}. \quad (3.10)$$

Nótese que para $i = 0$ la expresión (3.3) es coherente con la expresión (3.9). Por razones de simplicidad escribimos

$$\Psi_i(\lambda; a) = \prod_{k=0}^i (1 - \Phi(a^{-k}\lambda)), \quad (3.11)$$

y dada la interpretación probabilística de la transformada de Laplace-Stieltjes, esta es la probabilidad de que ocurra un fallo accidental antes que uno de desgaste durante los periodos operativos ocurridos antes de la reparación i -ésima. Sustituyendo (3.11) en (3.9)-(3.10) se obtienen expresiones más simples.

La constante K de (3.4) se determina a partir de la condición de normalización, $\boldsymbol{\pi} \mathbf{e} = 1$, que se escribe exactamente igual que (2.9):

$$\sum_{i=0}^N \boldsymbol{\pi}(i) \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\pi}(i_R) \mathbf{e} = 1. \quad (3.12)$$

Tiene interés el cálculo de los sumandos que figuran en esta expresión, y es ilustrativo hacerlo introduciendo (3.11). A partir de (3.3), (3.9) y (3.10) se tiene

$$\boldsymbol{\pi}(0) \mathbf{e} = K \boldsymbol{\alpha} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{e} = K \lambda^{-1} (1 - \Phi(\lambda)), \quad (3.13)$$

y para $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\pi(i)\mathbf{e} = Kp^i \Psi_{i-1}(\lambda; a)\alpha(\lambda\mathbf{I} - a^i\mathbf{T})^{-1}\mathbf{e} = K\lambda^{-1} p^i \Psi_i(\lambda; a), \quad (3.14)$$

$$\pi(i_R)\mathbf{e} = -Kp^i \Psi_{i-1}(\lambda; a)\beta\mathbf{S}^{-1}\mathbf{e} = K\mu_R p^i \Psi_{i-1}(\lambda; a), \quad (3.15)$$

siendo μ_R el tiempo medio de reparación. Sustituyendo estas fórmulas en (3.12) se tiene una expresión explícita para la constante K ,

$$K^{-1} = \sum_{i=0}^N \lambda^{-1} p^i \Psi_i(\lambda; a) + \sum_{i=1}^N \mu_R p^i \Psi_{i-1}(\lambda; a). \quad (3.16)$$

Es posible escribir

$$K^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{i=0}^N D_i + p\mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i, \quad (3.17)$$

llamando

$$D_i = p^i \Psi_i(\lambda; a). \quad (3.18)$$

Esta es una expresión que está pensada para su implementación computacional, como ha sido hecho en el Modelo I.

Como ya ocurrió en el Modelo I, la constante K definida en (3.4) se puede interpretar como el número medio de fallos no reparables del sistema. Esto se probará en la siguiente sección, pero su analogía con el Modelo I permite interpretarlo ahora y como consecuencia interpretar las fórmulas obtenidas. La probabilidad de que el sistema ocupe el estado inicial, $\pi(0)\mathbf{e} = K\lambda^{-1}(1 - \Phi(\lambda))$, el producto de tres factores: el número medio de fallos no reparables, el tiempo medio entre llegadas de fallos accidentales mientras el sistema funciona, y la probabilidad de que ocurra un fallo accidental antes que un fallo de desgaste cuando el sistema es nuevo.

La expresión $\Psi_i(\lambda; a)$ definida en (3.11) es la probabilidad de que ocurran fallos accidentales en los sucesivos estados ocupados por el sistema desde el estado inicial hasta el estado i antes que fallos de desgaste. Entonces la probabilidad de que el sistema ocupe el estado i , $\pi(i)\mathbf{e} = K\lambda^{-1}p^i\Psi_{i-1}(\lambda; a)$, $i = 1, 2, \dots, N$, es el producto de cuatro factores, todos ellos tienen una interpretación probabilística bien conocida, y donde el factor p^i es la probabilidad de ocurrencia de i fallos reparables.

La probabilidad de que el sistema ocupe el estado de reparación i_R , $\pi(i_R)\mathbf{e} = K\mu_R p^i \Psi_{i-1}(\lambda; a)$, incorpora a los factores ya interpretados el tiempo medio de reparación. Las expresiones D_i definidas (3.18) que han sido introducidas para cálculos computacionales pueden ser interpretadas obviamente en términos de probabilidades de ocurrencia de fallos, como ha sido hecho con las expresiones anteriores.

3.3. Medidas de funcionamiento

La disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos (ROCOF) para los diversos tipos de fallo y para el sistema serán calculadas para este sistema. El procedimiento que se sigue es el mismo que en el modelo con memoria de la fase de fallo. El régimen es estacionario.

3.3.1. Disponibilidad

Formalmente la expresión de la disponibilidad es la misma que en el Modelo I, sólo que ahora las expresiones varían. La disponibilidad tiene la forma

$$A = \sum_{i=0}^N \pi(i)\mathbf{e} = \frac{\sum_{i=0}^N D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}. \quad (3.19)$$

La proporción de tiempo que el sistema está en reparación (no operativo) es $\bar{A} = 1 - A$ y la expresión formal es

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \pi(i_R) \mathbf{e} = \frac{\lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}. \quad (3.20)$$

Como en el Modelo I, la disponibilidad depende de la distribución de los tiempos operativos, del número de reparaciones y del tiempo medio de reparación, pero no depende de la forma que tiene la distribución del tiempo de reparación.

3.3.2. Razón de ocurrencia de fallos (ROCOF)

Esta sección es prácticamente una repetición de la Sección análoga del Capítulo II, con fórmulas muy similares a las obtenidas entonces. Seguimos los pasos que hemos dado para esta medida en el Modelo I, con las mismas interpretaciones.

ROCOF de fallos reparables

Se denota v_1 el ROCOF de los fallos reparables. Haciendo uso de la definición de ROCOF, los fallos reparables ocurren con razón λp y el fallo se produce cuando el sistema está en un estado operativo, la expresión de esta medida es

$$v_1 = \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} = \frac{\lambda p \sum_{i=0}^{N-1} D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}. \quad (3.21)$$

ROCOF de fallos accidentales no reparables

El ROCOF de los fallos accidentales no reparables se denota v_2 y su expresión matemática, teniendo en cuenta que la razón de ocurrencia de este tipo de fallos es λq , viene dada por

$$v_2 = \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda \pi(N) \mathbf{e} = \frac{\lambda q \sum_{i=0}^{N-1} D_i + \lambda D_N}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i} . \quad (3.22)$$

ROCOF de fallos de desgaste

Por último, el ROCOF debido a fallos de desgaste se denota v_3 , y viene dado por

$$v_3 = \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0 .$$

Para obtener una fórmula más simple en términos de los elementos D_i primero calculamos

$$\pi(0) \mathbf{T}^0 = \mathbf{K} \Phi(\lambda),$$

$$\pi(i) \mathbf{T}^0 = \mathbf{K} p^i \Psi_{i-1}(\lambda; a) \alpha(\lambda \mathbf{I} - a^i \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0 = \mathbf{K} p^i \Psi_{i-1}(\lambda; a) \Phi(a^{-i} \lambda) a^i,$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces la expresión matemática del ROCOF de este tipo de fallos es

$$v_3 = \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0 = \frac{\lambda \Phi(\lambda) + \lambda p \sum_{i=0}^N D_{i-1} \Phi(a^{-i} \lambda)}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}. \quad (3.23)$$

ROCOF del total de fallos del sistema

La razón de ocurrencia total de fallos es $v = v_1 + v_2 + v_3$. De la expresión (3.4) se deduce que la constante K es precisamente $v_2 + v_3$, con lo que se interpreta K de la misma manera que en el Modelo I, es la razón de ocurrencia de fallos no reparables, accidentales o de desgaste, y consecuentemente K^{-1} representa el tiempo medio entre reemplazamientos consecutivos del sistema.

La razón de ocurrencia total de fallos puede venir expresada en términos de la disponibilidad del sistema como en el Modelo I, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} v &= \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda q \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e} + \lambda \pi(N) \mathbf{e} + \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0 \\ &= \lambda \mathbf{A} + \sum_{i=0}^N a^i \pi(i) \mathbf{T}^0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esta fórmula expresa también que la razón de ocurrencia de fallos accidentales es precisamente la razón λ del proceso de Poisson de llegadas de fallos accidentales por la disponibilidad del sistema.

Se tiene también

$$\bar{\mathbf{A}} = \mu_R v_1, \quad (3.25)$$

es decir, la proporción de tiempo que el sistema está en reparación es el producto del tiempo medio de reparación por la razón de ocurrencia de fallos reparables. Esta relación puede ser escrita en la forma

$$\sum_{i=1}^N \pi(i_R) \mathbf{e} = \mu_R \lambda p \sum_{i=0}^{N-1} \pi(i) \mathbf{e}. \quad (3.26)$$

Usando la propiedad de normalización se obtiene otra expresión para la disponibilidad del sistema

$$A = \sum_{i=0}^N \pi(i) \mathbf{e} = \frac{1 + \lambda p \mu_R \pi(N) \mathbf{e}}{1 + \lambda p \mu_R}. \quad (3.27)$$

3.4. Aplicación numérica

El Modelo II que acabamos de tratar resulta de más fácil aplicación que el Modelo I, ya que en general es difícil conocer la fase operativa en los estados de funcionamiento. En cualquier caso las fórmulas anteriores para el cálculo de la distribución estacionaria y las razones de ocurrencia de fallos no son fáciles de manejar. En esta sección se simula una situación práctica basada en un supuesto empírico y se implementan computacionalmente las fórmulas. Se construyen varios programas para el cálculo de la disponibilidad y la razón de ocurrencia de fallos utilizando el programa *Matlab*. También se obtienen diferentes curvas de supervivencia relativas a los diferentes tipos de fallos que se estudian.

Se supone un dispositivo con las características del sistema estudiado en los Capítulos II y III, por lo tanto dicho dispositivo está sometido a las hipótesis formuladas en el Capítulo II. El dispositivo está sujeto a fallos externos y de desgaste. Los fallos externos se producen según un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0.00187/\text{hora}$, es decir, éstos llegan a razón de 1.87 fallos cada mil horas de funcionamiento, lo que significa que el tiempo medio entre llegadas es de 534.76 horas. De estos fallos, aproximadamente el 87% son reparables y consecuentemente el 33% es no reparable, lo que

significa en términos de la notación seguida anteriormente que $p = 0.87$ y $q = 0.13$.

El tiempo operativo del dispositivo es tipo fase. Se supone que mientras el dispositivo está operativo va ocupando sucesivamente tres fases 1, 2 y 3 antes de ocupar el estado de fallo (absorbente). Esto significa que el tiempo de fallo tiene tres fases operativas ($m = 3$) y una absorbente. En términos físicos supone que el sistema pasa por tres fases operativas sucesivas de degradación antes de producirse el fallo del mismo, de modo que se supone una degradación creciente, es un modelo con degradación acumulada. El siguiente diagrama ilustra las transiciones entre fases operativas.

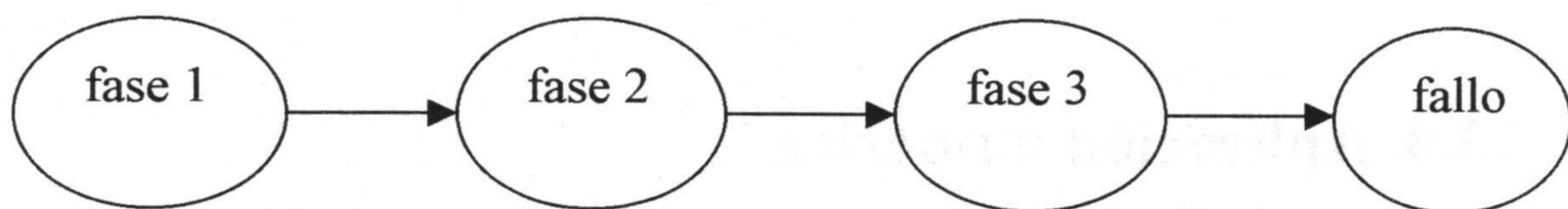


Figura 2. Diagrama de transiciones entre fases operativas del dispositivo

El coeficiente de deterioro después de cada reparación es $a = 1.25$. Esto significa que la reparación no es “tan buena como nueva”, y se expresa en términos de este coeficiente. Esta cantidad expresa que el tiempo medio de vida después de cada reparación es un 80% del tiempo medio en el estado operativo anterior a la reparación.

Se supone que la fase inicial de cada periodo operativo es siempre la fase 1. Esta es la hipótesis que identifica el Modelo II, diferenciándole del Modelo I. Significa que después de cada reparación el dispositivo pasa a ser operativo y se inicia en la fase 1, siempre la misma. En resumen, el tiempo operativo después de la reparación $i - 1$ sigue una distribución tipo fase con representación $(\alpha, a^i T)$, con $\alpha = (1, 0, 0)$, $a = 1.25$, y la matriz T viene dada por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -0.0027 & 0.0027 & 0 \\ 0 & -0.008 & 0.008 \\ 0 & 0 & -0.02878 \end{pmatrix}.$$

Nótese que los elementos fuera de la diagonal principal representan las razones de transición entre fases operativas. Así, las transiciones entre las fases 1 y 2 se producen a razón de 2.7 cada 1000 horas; entre las fases 2 y 3 se producen 8 transiciones cada 1000 horas, y desde la fase 3 hasta el fallo se producen aproximadamente 29 cada 1000 horas. Los tiempos medios de permanencia en las diferentes fases vienen dados por los valores inversos de la diagonal principal cambiados de signo.

Si el dispositivo falla entra en reparación. Esta operación de reparación se lleva a cabo según el siguiente esquema. El dispositivo entra en la fase 1 de reparación, donde es reparado, y entonces entra en la fase 2, donde se establece un control sobre la reparación efectuada a un nivel medio de funcionamiento. Si no es satisfactorio el dispositivo retorna a la fase 1 para volver a ser reparado, y si lo es pasa a un segundo control donde se somete a un nivel acelerado de funcionamiento. Si en este segundo control el nivel de funcionamiento no es satisfactorio retorna a la fase inicial, y si es satisfactorio acaba el proceso de reparación y el dispositivo retorna al correspondiente estado de funcionamiento. Este proceso se repite. En la Figura 3 se ilustra el diagrama que sigue el proceso de reparación.

Se trata entonces de cuatro fases, la última de absorción ($n = 3$). La fase inicial de reparación es siempre la fase 1. Se supone que el tiempo de reparación sigue una distribución tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) , con $\beta = (1, 0, 0)$ y

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & -0.08 & 0.07 \\ 0.005 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Como en el caso del tiempo de reparación, cada elemento fuera de la diagonal principal representa las razones de cambio entre las correspondientes fases y los números inversos de los situados en la diagonal principal cambiados de signo representan los tiempos medios de permanencia en cada una de las fases. El número medio de reparaciones en la fase 1 es de 20 cada mil horas, el número medio de veces que no se supera el control 1 es de 10 cada mil horas, el número medio de veces que no es superado el control 2 es de 5 cada mil horas. En la fase 1 el dispositivo pasa un tiempo medio de 50 horas. El resto de las cantidades se calcula de la misma manera.

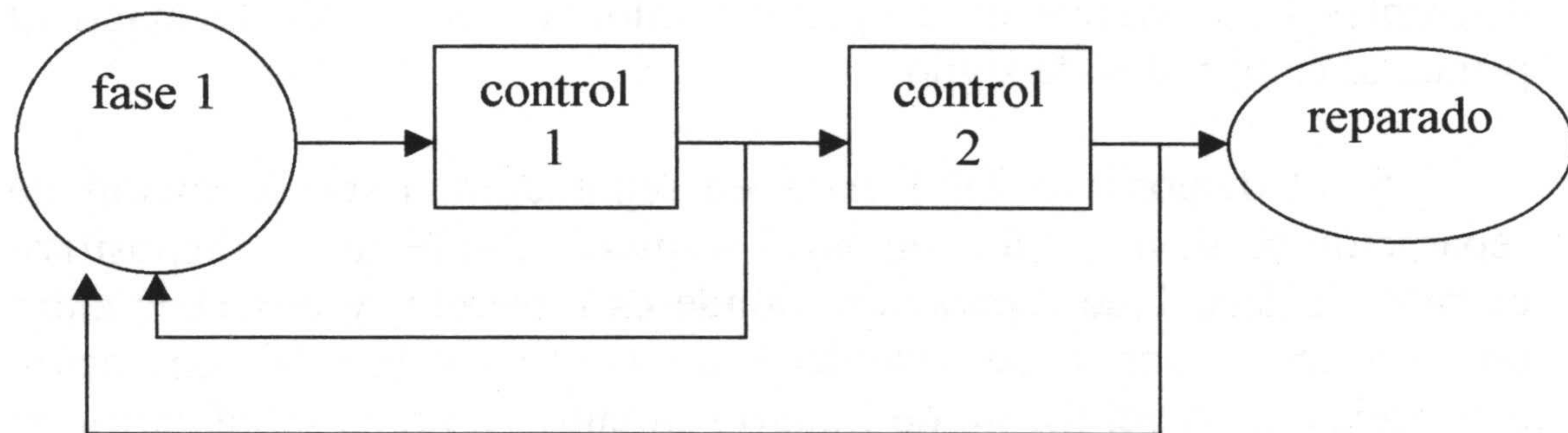


Figura 3. Diagrama de transiciones entre fases de reparación

Se supone que el dispositivo puede soportar hasta tres reparaciones, de modo que cuando se produce la cuarta es sustituido instantáneamente por uno nuevo e idéntico, en otras palabras, el número de reparaciones para un dispositivo es $N = 3$. Los estados del dispositivo son de dos tipos: funcionamiento y reparación. A su vez los estados de funcionamiento se distinguen por el número de reparaciones que han completado, y los estados de reparación constituyen un proceso de renovación. El conjunto de estados, siguiendo la notación empleada hasta ahora, está formado por los elementos $S = \{0, 1_R, 1, 2_R, 2, 3_R, 3\}$, y el diagrama de transiciones

entre estados viene dado en la Figura 4. Los fallos reparables suponen una transición $i \rightarrow i_R$ y los fallos no reparables una transición $i \rightarrow 0$, para $i = 1, 2, 3$.

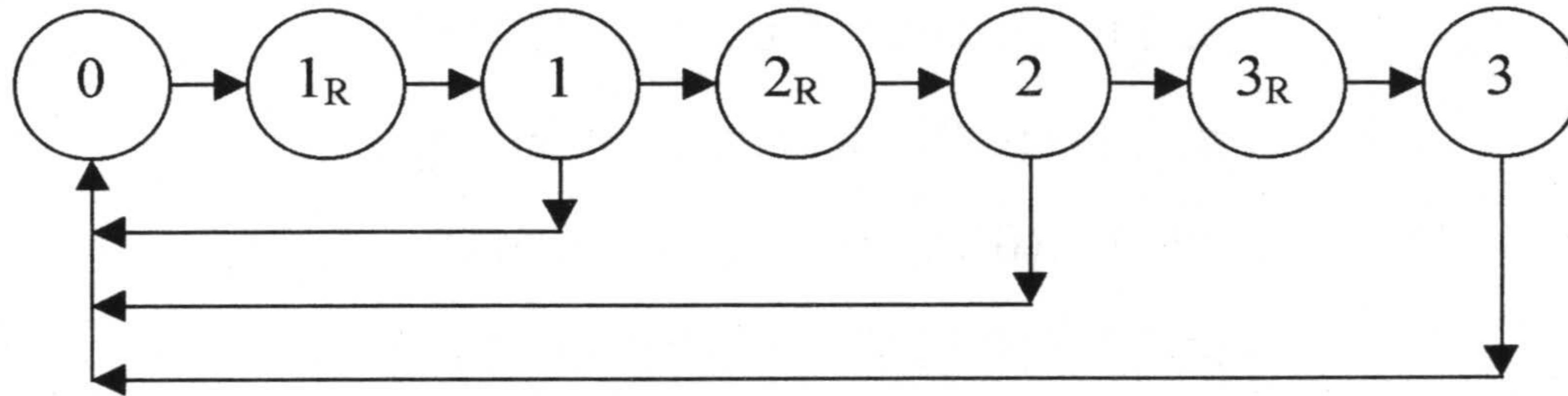


Figura 4. Diagrama de transiciones entre estados

Los estados operativos constituyen el subconjunto $F = \{0, 1, 2, 3\}$ y los de reparación $F = \{1_R, 2_R, 3_R\}$. El tiempo que el dispositivo permanece en cada uno de éstos sigue una distribución tipo fase, estas han sido especificadas anteriormente.

La forma del generador \mathbf{Q} es la que ha sido dada en el caso general en la Sección 3.1. Esta matriz \mathbf{Q} es una matriz de bloques de matrices 3×3 , y el número de bloques por filas y por columnas es igual a siete, de modo que dicha matriz es 21×21 . Aquí no la escribimos explícitamente.

El vector π que expresa la distribución estacionaria se define de acuerdo con los bloques que constituyen la matriz \mathbf{Q} . Por tanto dicho vector es de la forma

$$\pi = [\pi(0), \pi(1_R), \pi(1), \pi(2_R), \pi(2), \pi(3_R), \pi(3)],$$

donde a su vez cada $\pi(i)$, $\pi(i_R)$ son vectores de dimensión 3.

Se calcula la distribución estacionaria construyendo un programa informático utilizando el paquete informático *Matlab* para resolver la ecuación $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Una vez efectuados los cálculos se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= (0.4030, 0.1103, 0.0288), \\
\pi(1_R) &= (0.0530, 0.0133, 0.003), \\
\pi(1) &= (0.1681, 0.0478, 0.0126), \\
\pi(2_R) &= (0.0224, 0.0056, 0.0039), \\
\pi(2) &= (0.0611, 0.0179, 0.0048), \\
\pi(3_R) &= (0.0082, 0.0020, 0.0014), \\
\pi(3) &= (0.0191, 0.0058, 0.0015).
\end{aligned}$$

La interpretación de estos números es bien conocida. A modo de ejemplo interpretamos las componentes del vector $\pi(0)$. Estas dan las probabilidades de ocupación de las fases de funcionamiento cuando el dispositivo aún no ha sido reparado. El dispositivo pasa el 40.30% del tiempo en la fase 1, el 11.03% en la fase 2, y el 2.88% en la fase 3.

Aplicando las fórmulas (3.13)-(3.15) se tiene

$$\begin{aligned}
\pi(0)\mathbf{e} &= 0.5421, \\
\pi(1_R)\mathbf{e} &= 0.0756, \\
\pi(1)\mathbf{e} &= 0.2286, \\
\pi(2_R)\mathbf{e} &= 0.0319, \\
\pi(2)\mathbf{e} &= 0.0838, \\
\pi(3_R)\mathbf{e} &= 0.0117, \\
\pi(3)\mathbf{e} &= 0.0264,
\end{aligned}$$

que representan las proporciones de tiempo que el dispositivo pasa en cada uno de los estados (macro-estados). Así, el 54.21% del tiempo el dispositivo es nuevo, aproximadamente el 23% está en funcionamiento después de haber sido reparado una vez; el 8.38% y el

2.64% del tiempo está en funcionamiento después de haber sido reparado dos y tres veces, respectivamente. Para estados de reparación los porcentajes son más pequeños, el dispositivo pasa el 7.56% del tiempo en la primera reparación, aproximadamente el 3% en la segunda y el 1.17% en la tercera.

La disponibilidad del dispositivo se calcula a partir de (3.19), y resulta ser $A = 0.8808$ (88%), esta es la fracción de tiempo que el dispositivo está operativo. El porcentaje de tiempo no operativo es 11.92%.

El número medio de fallos reparables por unidad de tiempo (ROCOF) para los diversos tipos de fallo y para el conjunto de todos los fallos viene dado por las fórmulas (3.21)-(3.24). Para el conjunto de números que se usa en este modelo resulta que el número de fallos reparables es 1.4 cada diez mil horas, el número de fallos accidentales no reparables es de 0.2 cada mil horas, y el número de fallos de desgaste es 1.6 cada mil horas. El número total de fallos es la suma de estas cantidades, 3.2 fallos cada 1000 horas.

Se completa el estudio de la fiabilidad del dispositivo calculando la función de supervivencia del mismo en los diferentes estados y la función de supervivencia del tiempo de reparación. La construcción de las mismas se hace utilizando el paquete matemático *Matlab*. En la Figura 5 se representan estas funciones. Como se deduce de los números, las funciones de supervivencia después de cada reparación forman una sucesión decreciente. También se han calculado los tiempos medios de permanencia del dispositivo en los estados operativos, y las cantidades son: 230.16 horas cuando es nuevo, 184.01 después de la primera reparación, 147.25 después de la segunda reparación, y 117.82 horas después de la tercera reparación.

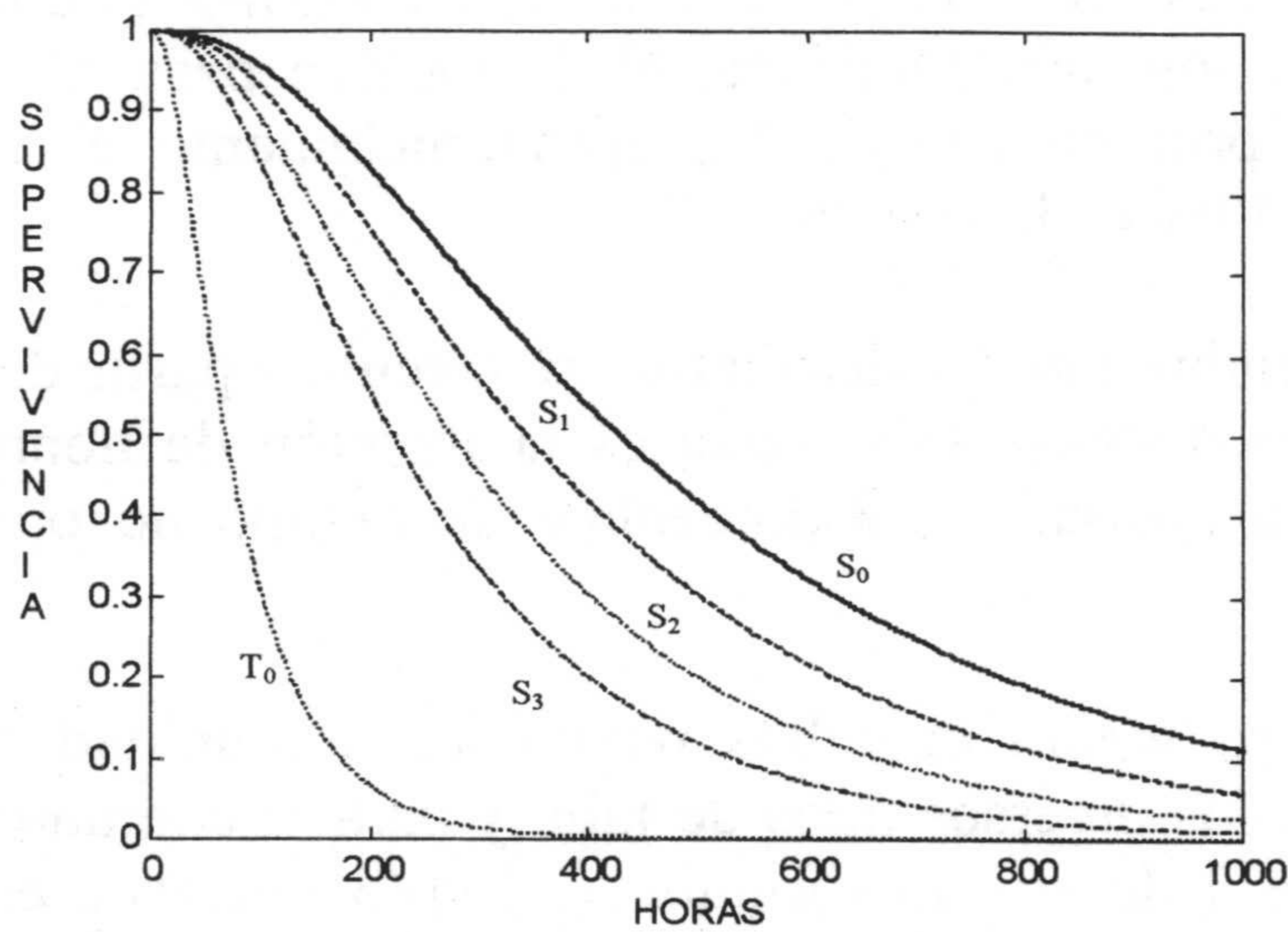


Figura 5. Funciones de supervivencia S_i para diferentes estados de funcionamiento ($i = 0, 1, 2, 3$) y para el tiempo de reparación (T_0)

La simulación puede ser modificada para representar el funcionamiento de sistemas reales en medios dinámicos. En algunos casos, el tiempo operativo no puede ser observado, opera entonces como una caja negra. Pero la versatilidad de las distribuciones tipo fase puede ser ajustada a tiempos operativos considerando varias situaciones prácticas. El número de piezas que fallan en un sistema complejo, los tamaños de la rotura por corrosión de un material sometido a estudio, los intervalos de funcionamiento de un sistema, y muchas otras, pueden ser considerados como fases por las que el sistema pasa. El tiempo de reparación puede en general ser controlado por la política de mantenimiento en cada caso. Cada caso particular tiene sus correspondientes magnitudes de interés desde el punto de vista del funcionamiento del sistema.

CAPÍTULO IV

SISTEMA CON TIEMPOS OPERATIVOS Y DE REPARACIÓN GENERALES (MODELO SEMI-MARKOVIANO)

El modelo que se estudia es una generalización de los anteriores, en el que los tiempos de funcionamiento y reparación no siguen distribuciones pertenecientes a una clase determinada. Se supondrá que los tiempos operativos y de reparación siguen distribuciones generales de probabilidad. En lo demás se mantienen las hipótesis que fueron enunciadas en el Capítulo II, es decir, se tiene un sistema sometido a un proceso de llegadas de Poisson de fallos

accidentales (reparables y no reparables), hay fallos de desgaste no reparables, y se mantiene la modalidad de reparación, lo que significa que tras cada reparación el tiempo operativo viene modificado en el sentido ya considerado anteriormente. Para estudiar un sistema de este tipo se considera un proceso semi-Markoviano, y se sigue un procedimiento similar al que se ha hecho en los capítulos anteriores: se calcula la distribución estacionaria, la disponibilidad, y las razones de ocurrencia de los diferentes tipos de fallo. Se comprobará que el Modelo II puede obtenerse a partir de éste como un caso particular.

4.1. El proceso semi-Markoviano

Las hipótesis de este nuevo modelo son esencialmente las mismas que las que han sido formuladas para el Modelo I en la Sección 2.1.1, excepto en lo que se refiere a la distribución de los tiempos de fallo y reparación, que formulamos ahora. Recordamos que las llegadas de fallos accidentales se producen según un proceso de Poisson de parámetro λ , siendo λp y $\lambda q = \lambda(1 - p)$ las razones de llegadas de fallos accidentales reparables y no reparables, respectivamente.

Sea X_n el tiempo de funcionamiento del sistema después de la reparación $(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots$. Se denota $F(\cdot)$ la función de distribución del sistema cuando es nuevo, entonces la distribución de X_n , que se escribe $F_n(\cdot)$, viene dada por

$$F_n(x) = F(a^{n-1}x), \quad a \geq 1, \quad x \geq 0. \quad (4.1)$$

De esta manera se tiene en cuenta el efecto del deterioro después de cada reparación a través de la constante a , que tiene el mismo significado que en los modelos anteriores. La función de densidad de probabilidad de $F(\cdot)$ se denota por $f(\cdot)$ y se supone que existe.

El tiempo de reparación después del fallo n -simo se representa Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Se supone que $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ es un

proceso de renovación, con función de distribución dada por $G(\cdot)$ y función de densidad de probabilidad $g(\cdot)$, que se supone existe siempre.

En primer lugar definimos los estados del sistema. El sistema ocupa el estado i si ha completado i reparaciones. Sea $\{Z(t), t \geq 0\}$ el proceso estocástico que representa el estado del sistema en el tiempo t . El espacio de estados es $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, ya que se supone que cuando se han completado N reparaciones el sistema es sustituido por uno nuevo al producirse el siguiente fallo. Las funciones muestrales se suponen continuas a la derecha. El estado inicial es 0 , este es el estado del sistema cuando es nuevo.

Las transiciones entre estados se producen según el siguiente diagrama

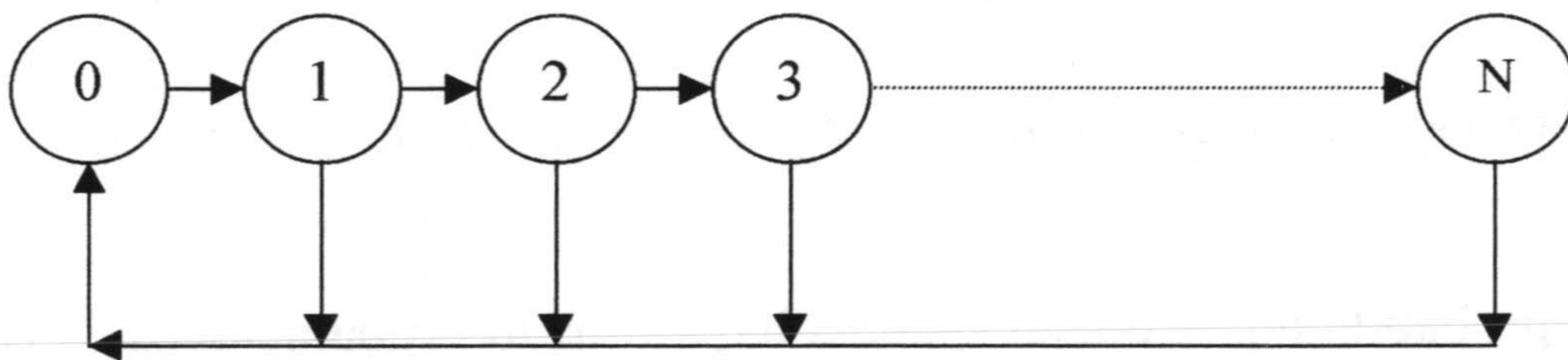


Figura 6. Diagrama de transiciones entre estados

Se supone que el proceso $\{Z(t), t \geq 0\}$ es un proceso semi-Markoviano, donde los tiempos de permanencia en estados son variables aleatorias distribuidas arbitrariamente que dependen del estado actual y del próximo estado. Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, los instantes de transición entre estados y $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, los tiempos de permanencia en los sucesivos estados ocupados. El estado ocupado en el instante t_n se denota por $Y_n = Z(t_n)$, entonces $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ es la cadena de Markov inmersa en el proceso semi-Markoviano $\{Z(t), t \geq 0\}$.

4.1.1. El núcleo

La matriz del núcleo del proceso semi-Markoviano $\{Z(t), t \geq 0\}$ definido anteriormente es $\mathbf{Q}(x) = (Q_{ij}(x))$, con

$$Q_{ij}(x) = P\{Y_{n+1} = j, \tau_n \leq x \mid Y_n = i\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

definido para $x \geq 0$.

Dado que $Q_{ij}(x)$ no depende de n el proceso es homogéneo en el tiempo. En lo que sigue calcularemos los elementos del núcleo $\mathbf{Q}(x)$.

Transición $i \rightarrow 0$

Si el sistema ocupa el estado i ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) y ocurre un fallo no reparable se produce una transición al estado 0 . Formalmente,

$$Q_{i0}(x) = P\{Y_{n+1} = 0, \tau_n \leq x \mid Y_n = i\}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

es la probabilidad de que el sistema haya sufrido i reparaciones en t_n y en t_{n+1} el sistema está nuevo. Esto puede ocurrir de dos maneras disjuntas: en un tiempo $0 \leq u \leq x$ ocurre un fallo accidental no reparable o un fallo de desgaste. Teniendo en cuenta las hipótesis del modelo esto ocurre con probabilidad

$$Q_{i0}(x) = \int_0^x \lambda q e^{-\lambda u} (1 - F(a^i u)) du + \int_0^x e^{-\lambda u} dF(a^i u), \quad (4.3a)$$

para $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Desde el estado N se produce una transición al estado 0 cuando se produce un fallo accidental, sea o no reparable, o un fallo de desgaste. Esto ocurre con probabilidad

$$Q_{N0}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} (1 - F(a^N u)) du + \int_0^x e^{-\lambda u} dF(a^N u), \quad (4.3b)$$

Transición $i \rightarrow i+1$

Si el sistema ocupa el estado i ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) y ocurre un fallo reparable se produce una transición al estado $i+1$. Formalmente,

$$Q_{i,i+1}(x) = P\{Y_{n+1} = i+1, \tau_n \leq x \mid Y_n = i\}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

es la probabilidad de que el sistema haya sufrido i reparaciones en t_n y entre t_n y t_{n+1} ocurre un fallo reparable antes que un fallo de desgaste, y en el tiempo de vida residual hasta el tiempo x el sistema es reparado. Este suceso tiene la probabilidad

$$Q_{i,i+1}(x) = \int_0^x \lambda p e^{-\lambda u} (1 - F(a^i u)) G(x-u) du, \quad (4.4)$$

para $i = 0, 1, \dots, N-1$.

$Q_{ij}(x) = 0$ para otro caso diferente de (4.3)-(4.4). La expresión final de la matriz \mathbf{Q} es

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} Q_{00}(x) & Q_{01}(x) & 0 & \dots & 0 \\ Q_{10}(x) & 0 & Q_{12}(x) & \dots & 0 \\ Q_{20}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{N-1,N}(x) \\ Q_{N0}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

La función de distribución del tiempo de permanencia en el estado i viene dado por

$$Q_i(x) = \sum_{j=0}^N Q_{ij}(x) = Q_{i0}(x) + Q_{i,i+1}(x). \quad (4.6)$$

El comportamiento límite de los elementos del núcleo será tratado en la sección siguiente, al considerar la cadena de Markov inmersa.

4.1.2. La cadena de Markov inmersa

Vamos a calcular la matriz de transición de la cadena de Markov inmersa $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ en el proceso semi-Markoviano $\{Z(t), t \geq 0\}$. Para efectuar los cálculos que siguen se define la transformada de Laplace-Stieltjes de los elementos que componen el núcleo $Q(x)$. Se define

$$\varphi_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dQ_{ij}(x), \quad \text{Re } s > 0. \quad (4.7)$$

Es bien conocido que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_{ij}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_{ij}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} e^{-sx} Q_{ij}(x) dx, \quad (4.8)$$

la segunda igualdad se obtiene integrando por partes en la expresión (4.8). La integral del miembro de la derecha es la transformada de Laplace de la función $Q_{ij}(x)$.

Se denotan Φ, ϕ las transformadas de Laplace-Stieltjes de F y G , respectivamente. Estas funciones juegan un papel importante en lo que sigue.

Sea $\mathbf{P} = (p_{ij})$ la matriz de transición de la cadena de Markov inmersa $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$, es decir, $p_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\}$, para todo n . De la teoría general de procesos semi-Markovianos es bien sabido que

$$p_{ij} = \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{ij}(x) = Q_{ij}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \phi_{ij}(s).$$

Vamos a calcular las transformadas de Laplace-Stieltjes de los elementos del núcleo (4.6). En primer lugar consideramos los elementos de la forma $Q_{i0}(x)$. Se utiliza la expresión (4.3a).

Para $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{i0}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dQ_{i0}(x) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left[e^{-\lambda x} a^i f(a^i x) + \lambda q e^{-\lambda x} (1 - F(a^i x)) \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} a^i f(a^i x) dx + \lambda q \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} (1 - F(a^i x)) dx \\ &= \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right) + \frac{\lambda q}{s+\lambda} - \lambda q \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} F(a^i x) dx, \end{aligned}$$

esta última ecuación se calcula integrando por partes. Esta expresión se puede escribir en términos de la función Φ ,

$$\varphi_{i0}(s) = \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right) + \lambda q \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{s+\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.9)$$

Para $i = N$, repitiendo los cálculos con la expresión (4.3b), resulta

$$\varphi_{N0}(s) = \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^N}\right) + \lambda \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^N}\right)}{s+\lambda}. \quad (4.10)$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, usando (4.4), (4.7) y (4.8), se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{i,i+1}(s) &= s \int_0^\infty e^{-sx} Q_{i,i+1}(x) \\ &= s \int_{x=0}^\infty e^{-sx} \left(\int_{u=0}^x \lambda p e^{-\lambda u} (1 - F(a^i u)) G(x-u) du \right) dx \\ &= s \lambda p \int_{u=0}^\infty \int_{v=0}^\infty e^{-\lambda u} e^{-s(u+v)} (1 - F(a^i u)) G(v) dudv \\ &= \lambda p \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{s+\lambda} \phi(s), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando (4.9)-(4.11) se obtienen expresiones explícitas para las probabilidades de transición de la cadena de Markov inmersa en el proceso semi-Markoviano. En efecto, de la relación

$$p_{ij} = \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{ij}(x) = Q_{ij}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_{ij}(s),$$

aplicada a este modelo resulta

$$p_{i0} = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_{i0}(s) = q + p\Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.12)$$

$$p_{iN} = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_{iN}(s) = 1,$$

$$p_{i,i+1} = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_{i,i+1}(s) = p - p\Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.13)$$

La matriz de transición de la cadena inmersa es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q + p\Phi(\lambda) & p - p\Phi(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ q + p\Phi\left(\frac{\lambda}{a}\right) & 0 & p - p\Phi\left(\frac{\lambda}{a}\right) & \dots & 0 \\ q + p\Phi\left(\frac{\lambda}{a^2}\right) & 0 & & p - p\Phi\left(\frac{\lambda}{a^2}\right) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

4.2. Distribución estacionaria

En esta sección se calcula primero la distribución estacionaria de la cadena de Markov inmersa, y a partir de ella la distribución estacionaria del proceso semi-Markoviano. Se utiliza la notación del Capítulo I.

Sea $\mathbf{p} = (p_j, j \in S)$ la distribución estacionaria del proceso semi-Markoviano $\{Z(t), t \geq 0\}$ con espacio de estados S , entonces

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Z(t) = j \mid Z(0) = i\}, \quad j \in S.$$

Por otro lado, sea $\pi = (\pi_j, j \in S)$ la distribución estacionaria de la cadena de Markov inmersa $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ en el proceso $\{Z(t), t \geq 0\}$ con matriz de transición \mathbf{P} , entonces $\pi = \pi\mathbf{P}$. Es bien conocido que

$$p_j = \frac{\pi_j \eta_j}{\sum_{k \in S} \pi_k \eta_k}, \quad j \in S, \quad (4.15)$$

siendo η_j el tiempo medio de permanencia en el estado j , como ha sido visto en (1.20). Para calcular las probabilidades $p_j, j \in S$, primero debemos calcular las probabilidades π_j y los valores medios $\eta_j, j \in S$.

4.2.1. Distribución estacionaria de la cadena de Markov inmersa

El espacio de estados del proceso que representa el modelo es $S = \{0, 1, \dots, N\}$, por tanto $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$, con $\pi_j > 0$ para todo j . Este vector π satisface la ecuación $\pi = \pi\mathbf{P}$, y a partir de ella se calcula resolviendo el sistema resultante.

Las ecuaciones que resultan al aplicar al modelo que tratamos la fórmula $\pi = \pi\mathbf{P}$ son

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^N \pi_i \left(q + p \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) + \pi_N,$$

$$\pi_i = p \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^{i-1}} \right) \right) \pi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Por recurrencia se obtiene

$$\pi_i = \pi_0 p^i \prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^k} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.16)$$

y a partir de la condición de normalización $\pi \mathbf{e} = 1$ se calcula el valor de π_0 , que es

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^N p^i \prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^k} \right) \right) \right]^{-1}. \quad (4.17)$$

4.2.2. Tiempos medios de permanencia en cada uno de los estados

El tiempo medio de permanencia en cada uno de los estados i se representa $\eta_i = E[Q_i]$, con Q_i dado por (4.6). El procedimiento para calcular estos tiempos medios es utilizar la transformada de Laplace-Stieltjes φ_i definida en (4.7), entonces

$$\varphi_i(s) = \sum_{j=0}^N \varphi_{ij}(s) = \varphi_{i0}(s) + \varphi_{i,i+1}(s), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\varphi_N(s) = \varphi_{N0}(s),$$

y

$$\eta_i = \int_0^{\infty} x dQ_i(x) = - \left. \frac{d\varphi_i(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.18)$$

Análogamente el tiempo medio de reparación se denota por μ_R y viene dado por

$$\mu_R = \int_0^{\infty} x dG(x) = - \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (4.19)$$

siendo $\phi(\cdot)$ la transformada de Laplace-Stieltjes de la función $G(\cdot)$ como ya ha sido definido. Teniendo en cuenta las expresiones (4.9)-(4.11) resulta para $i = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\varphi_i(s) = \varphi_{i0}(s) + \varphi_{i,i+1}(s)$$

$$= \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right) + \lambda q \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{s+\lambda} + \lambda p \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{s+\lambda} \phi(s)$$

$$= \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right) + \lambda \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{\lambda + s} (q + p\phi(s)) \quad (4.20)$$

y para $i = N$,

$$\varphi_{N0}(s) = \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^N}\right) + \lambda \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^N}\right)}{s+\lambda}.$$

Derivando estas expresiones y evaluando en $s = 0$ se obtienen los tiempos medios de permanencia en cada uno de los estados

$$\eta_i = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) (1 + \lambda p \mu_R), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.21)$$

$$\eta_N = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^N}\right) \right), \quad (4.22)$$

4.2.3. Distribución estacionaria del proceso semi-Markoviano

Una vez calculados los elementos que intervienen en la expresión (4.15) estamos en condiciones de calcular la distribución estacionaria del proceso que rige el funcionamiento del sistema. Ya que π_j representa la probabilidad de que la cadena de Markov inmersa ocupe el estado j y η_j es el tiempo medio de permanencia en el estado j , $\pi_j \eta_j$ se interpreta como el tiempo esperado en que el sistema ha sufrido j reparaciones completas y

$$\xi = \sum_{k=0}^N \pi_k \eta_k$$

representa el tiempo medio que el sistema pasa ocupando todos los estados del proceso, algo así como el tiempo medio de un ciclo completo, entendiendo por tal el paso por todos los estados. La expresión matemática para (4.15) en términos de las cantidades fundamentales del proceso se calcula sustituyendo las fórmulas (4.16)-(4.17) y (4.21)-(4.22). Por razones de simplicidad se introduce una función $\psi_i(\lambda; a)$ definida por la siguiente expresión

$$\psi_i(\lambda; a) = \prod_{k=0}^i \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^k} \right) \right). \quad (4.23)$$

Esta cantidad representa la probabilidad de que ocurra un fallo accidental antes que uno de desgaste durante los periodos operativos ocurridos antes de la reparación i -ésima. La expresión matemática final para (4.15) queda en la forma

$$p_j = \frac{p^j \Psi_j(\lambda; a)(1 + \lambda p \mu_R)}{\sum_{j=0}^{N-1} p^j \Psi_j(\lambda; a)(1 + \lambda p \mu_R) + p^N \Psi_N(\lambda; a)}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.24)$$

$$p_N = \frac{p^N \Psi_N(\lambda; a)}{\sum_{j=0}^{N-1} p^j \Psi_j(\lambda; a)(1 + \lambda p \mu_R) + p^N \Psi_N(\lambda; a)}. \quad (4.25)$$

Estas son las probabilidades de ocupación de los estados en el proceso semi-Markoviano en régimen estacionario. Para su tratamiento computacional se define

$$D_i = p^i \psi_i(\lambda; a)$$

y las expresiones (4.24)-(4.25) se reducen a

$$p_j = \frac{D_j(1 + \lambda p \mu_R)}{\sum_{j=0}^{N-1} D_j(1 + \lambda p \mu_R) + D_N} \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.26a)$$

$$p_N = \frac{D_N}{\sum_{j=0}^{N-1} D_j(1 + \lambda p \mu_R) + D_N} \quad (4.26b)$$

4.3. Medidas de funcionamiento del sistema

En esta sección se calculan la disponibilidad y las razones de ocurrencia de los distintos tipos de fallo, como ha sido hecho para los modelos estudiados anteriormente. Para ello se precisa calcular la función de renovación del proceso semi-Markoviano, que ha sido definido en el Capítulo I (Definición 1.3.5). Dicha función se define

$$M(x) = (M_{ji}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(x),$$

siendo $Q^{(n)}$ la convolución de la función Q consigo misma n veces.

$M(x)$ es la función de renovación del proceso semi-Markoviano que gobierna el sistema, $M_{ji}(x)$ expresa por tanto el número medio de pasos por i desde el estado inicial j . Conviene interpretar $dM_{ji}(x)$ como la probabilidad de una transición $j \rightarrow i$ durante el intervalo infinitesimal de tiempo $(x, x + dx)$. En lo que sigue se supone que el sistema ocupa inicialmente el estado j .

4.3.1. Disponibilidad

Los estados del sistema $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ han sido definidos como el número de reparaciones completadas en el sistema, de modo que si el sistema se encuentra en el estado i se han completado i reparaciones. No obstante, ignoramos si el sistema está operativo o en reparación en dicho estado. Este es el siguiente problema que resolvemos.

Probabilidad de que el sistema esté siendo reparado cuando ocupa el estado i

Se supone que el sistema se encuentra en el instante inicial en el estado j . Para que el sistema esté en reparación en el estado i en un instante t deben ocurrir los siguientes sucesos: que en un tiempo u , $0 < u < t$, el sistema cambie desde el estado j al estado i , que en el intervalo (u, t) ocurra un fallo reparable antes que cualquier otro fallo, y que la reparación no haya finalizado en el instante t . La probabilidad de que el sistema esté en reparación es

$$\int_{u=0}^t \int_{v=u}^t dM_{ji}(u) \lambda p e^{-\lambda(v-u)} [1 - F((v-u)\alpha^i)] [1 - G(t-v)] dv. \quad (4.27)$$

Esta expresión depende del estado inicial j . Estamos interesados en el comportamiento del sistema en régimen estacionario por lo que calcularemos el límite de esta expresión cuando $t \rightarrow \infty$. Este límite se calcula aplicando el Teorema llave de la renovación para procesos semi-Markovianos (Teorema 1.3.14). Para aplicar dicho teorema necesitamos definir algunas funciones de modo que (4.18) tenga una forma que permita la aplicación de (1.21) término a término.

El proceso semi-Markoviano que representa el sistema bajo estudio tiene núcleo $Q(x)$ y espacio finito de estados $S = \{0, 1, \dots, N\}$, siendo irreducible, ergódico y tal que

$$\sum_{j \in S} \eta_j < \infty$$

Se define la función

$$h_i(y) = \int_0^y \lambda p e^{-\lambda z} [1 - F(za^i)][1 - G(y-z)] dz. \quad (4.28)$$

Veamos que esta función es directamente integrable Riemann. Es integrable Riemann, esto se prueba calculando directamente la integral. Para ello se advierte que la función $h_i(\cdot)$ es la convolución de las funciones $A(x) = \lambda p e^{-\lambda x} (1 - F(a^i x))$ y $B(x) = 1 - G(x)$. Se denotan $A(s)$ y $B(s)$ las transformadas de Laplace de $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente. Utilizando cálculos ya realizados previamente se tiene

$$A(s) = \lambda \int_0^{\infty} p e^{-(\lambda+s)x} (1 - F(a^i x)) dx = \lambda p \frac{1 - \Phi\left(\frac{s+\lambda}{a^i}\right)}{s+\lambda},$$

$$B(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (1 - G(x)) dx = \frac{1 - \phi(s)}{s},$$

y la transformada de Laplace de $h_i(s)$ es el producto $A(s)B(s)$. El valor de la transformada de Laplace en $s = 0$ da el valor de la integral de la función $h_i(\cdot)$, ahora bien el producto de las transformadas $A(s)$ y $B(s)$ en $s = 0$ es inmediato: $A(0)$ se calcula directamente y para el cálculo de $B(0)$ es preciso aplicar la regla de l'Hopital. En resumen se tiene

$$\int_0^{\infty} h_i(x) dx = p\mu_R \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right). \quad (4.29)$$

Por cálculo directo se prueba que la función $h_i(y)$ es de variación acotada, esto se hace viendo que es la diferencia de dos funciones crecientes, y por tanto esta función es directamente integrable Riemann.

Se puede aplicar entonces el Teorema 1.3.14 y calcular el límite de la expresión (4.27). Se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h_i(t-u) dM_{ji}(u) = \frac{1}{\mu_{ii}} \int_0^{\infty} h_i(u) du, \quad (4.30)$$

donde μ_{ii} el tiempo medio de retorno al estado i , dado por

$$\mu_{ii} = \frac{\xi}{\pi_i}.$$

El segundo miembro de (4.30) expresa la probabilidad de que el sistema esté siendo reparado cuando ocupa el estado i en régimen estacionario, esto se denota por $p(i_r)$ y su valor ya ha sido calculado en (4.29), siendo este

$$p(i_r) = \frac{\pi_i}{\xi} p\mu_R \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.31)$$

$$p(i_r) = 0 \quad i = N$$

Sumando (4.31) para todos los estados i se obtiene la probabilidad de que el sistema se encuentre en reparación en régimen estacionario, o dicho de otra forma, la fracción de tiempo que el sistema se encuentra en reparación. Dicha probabilidad es precisamente la no disponibilidad y su valor es

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \sum_{i=0}^{N-1} p(i_r) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i}{\xi} p\mu_R \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) \\
 &= \frac{p\mu_R}{\xi} \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) \\
 &= \frac{p\mu_R}{\xi} \sum_{i=0}^{N-1} \pi_0 p^i \prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^k}\right) \right) \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) \\
 &= \frac{\mu_R}{\xi} \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{i+1} = \frac{\mu_R}{\xi} (1 - \pi_0). \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Probabilidad de que el sistema esté operativo cuando ocupa el estado i : Disponibilidad estacionaria

La probabilidad de que partiendo del estado j el sistema esté operativo en un estado i en un instante t , viene dada por la siguiente integral

$$\int_0^t dM_{ji}(u) e^{-\lambda(t-u)} (1 - F(a^i(t-u))) du. \tag{4.33}$$

En efecto, razonando como en el caso anterior, para que el sistema ocupe el estado i y esté operativo, debe ocurrir una transición $j \rightarrow i$ en un intervalo $(u, u + du)$ con $0 < u < t$ y en el intervalo (u, t) el sistema no sufre ningún tipo de fallo, ni accidental ni de desgaste.

La disponibilidad es el límite de la expresión anterior para $t \rightarrow \infty$. Este límite se calcula siguiendo un razonamiento parecido al

que se ha llevado a cabo para el cálculo de $p(i_r)$, se aplica por tanto el teorema llave de renovación para procesos semi-Markovianos. Se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dM_{ji}(u) e^{-\lambda(t-u)} (1 - F(a^i(t-u))) du = \frac{1}{\mu_{ii}} \int_0^{\infty} h_i(u) du,$$

siendo $h_i(z) = e^{-\lambda z} (1 - F(a^i z))$, si dicha función es directamente integrable Riemann. Ahora bien, esta función $h_i(z)$ es directamente integrable Riemann, ya que es integrable Riemann y está acotada por una función directamente integrable Riemann. El valor de su integral es igual a

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} (1 - F(a^i z)) dz = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p(i) &= \frac{1}{\mu_{ii}} \int_0^{\infty} h_i(u) du \\ &= \frac{\pi_i}{\lambda \xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{4.34a}$$

y

$$p(N) = p_N = \frac{\pi_N}{\lambda \xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^N}\right) \right) \tag{4.34b}$$

Sumando las expresiones (4.34) para cada uno de los estados $i = 0, 1, \dots, N$, se obtiene la fracción de tiempo que el sistema se encuentra operativo

$$A = \sum_{i=0}^N p(i) = \frac{1}{\lambda \xi} \sum_{i=0}^N \pi_i \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right). \quad (4.35)$$

Otra manera de calcular la disponibilidad estacionaria podría haberse seguido a partir de la distribución estacionaria del proceso semi-Markoviano. La probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado i es p_i dada por (4.26), y es claro que $p_i = p(i) + p(i_r)$, donde $p(i)$ y $p(i_r)$ se obtuvieron en (4.31) y (4.34a) para $i = 0, 1, \dots, N-1$. Cuando el sistema se encuentra en el estado N siempre está operativa ya que ha completado i reparaciones completas. A partir de (4.31) para $j = 0, 1, \dots, N-1$, se tiene

$$p_j = \frac{p^j \Psi_j(\lambda; a)(1 + \lambda p \mu_R)}{\sum_{j=0}^{N-1} p^j \Psi_j(\lambda; a)(1 + \lambda p \mu_R) + p^N \Psi_N(\lambda; a)}$$

$$= \frac{\pi_0}{\lambda \xi} \left\{ \prod_{k=0}^j p^k \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^k} \right) \right) \right\} (1 + \lambda p \mu_R)$$

y a partir de aquí se calcula $p(j) = p_j - p(j_r)$ para todos los estados.

4.3.2. Razón de ocurrencia de fallos (ROCOF)

En esta sección, se calcula el número medio de fallos por unidad de tiempo para cada uno de los tipos de fallo que afectan al funcionamiento de la unidad, siguiendo la misma metodología que en los dos modelos anteriores, sin hacer uso de las fórmulas de Lam (1997) ya que ahora el proceso no es de Markov. El procedimiento a seguir es el que se ha utilizado en el cálculo de la disponibilidad.

ROCOF de fallos accidentales reparables

El número medio de fallos accidentales reparables por unidad de tiempo en el estado i para $i = 0, 1, \dots, N - 1$, en el tiempo t viene dado por

$$v_{1i}(t) = \int_0^t dM_{ji}(u) \lambda p e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))] du. \quad (4.36)$$

La justificación de esta expresión es como sigue. Partiendo de un estado inicial j se produce una transición al estado i en el intervalo $(u, u+du)$ con $0 < u < t$. Una vez en el estado i , en el intervalo (u, t) se debe producir un fallo accidental reparable antes que un fallo de desgaste y este suceso tiene probabilidad $\lambda p e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))]$ para $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Para $i = N$, el fallo accidental es siempre no reparable ya que la unidad ha completado N reparaciones y es sustituida al siguiente fallo.

Sumando la expresión (4.36) para todos los estados i , con $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, se obtiene la expresión en régimen transitorio del ROCOF en el instante t , que resulta ser

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} v_{1i}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^t dM_{ji}(u) \lambda p e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))] du. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tomando límite para $t \rightarrow \infty$ en (4.37) se calcula se obtiene el ROCOF estacionario para fallos reparables. Se tiene

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^t dM_{ji}(u) \lambda p e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))] du \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i}{\xi} p \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{\alpha^i} \right) \right) \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

ROCOF de fallos accidentales no reparables

El número medio de fallos accidentales no reparables por unidad de tiempo en el estado i y en el instante t , partiendo del estado j , viene dado por las siguientes expresiones. Para $i = 0, 1, \dots, N-1$,

$$v_{2i}(t) = \int_0^t dM_{ji}(u) \lambda q e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))] du, \tag{4.39a}$$

y

$$v_{2N}(t) = \int_0^t dM_{jN}(u) \lambda e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^N(t-u))] du. \tag{4.39b}$$

La justificación es la siguiente. Partiendo del estado inicial j , se produce una transición al estado i en el intervalo $(u, u+du)$ con $0 < u < t$. Una vez en el estado i , en el intervalo (u, t) se debe producir un fallo accidental no reparable antes que un fallo de desgaste y esto ocurre con probabilidad $\lambda q e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(\alpha^i(t-u))]$ para $i = 0, 1, \dots, N-1$. Desde el estado N el fallo es siempre no reparable. Por tanto, el ROCOF de fallos accidentales no reparables en el instante t se obtiene sumando en todos los estados i las expresiones (4.39), y resulta ser

$$v_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^t dM_{ji}(u) \lambda q e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(a^i(t-u))] du +$$

$$\int_0^t dM_{jN}(u) \lambda e^{-\lambda(t-u)} [1 - F(a^N(t-u))] du \quad (4.40)$$

Tomando límites para $t \rightarrow \infty$ en (4.40) se calcula el ROCOF estacionario para fallos accidentales no reparables. Para ello hay que aplicar de nuevo el teorema llave de renovación para procesos semi-Markovianos. La función definida por $h_i(u) = \lambda e^{-\lambda u} [1 - F(a^i u)]$ es directamente integrable Riemann por ser integrable Riemann y monótona decreciente. El valor de la integral de dicha función se calcula a partir de la transformada de Laplace en $s = 0$, como ya ha sido hecho en otros casos anteriormente. Se tiene

$$H_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \lambda e^{-\lambda u} [1 - F(a^i u)] du = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+s)u} [1 - F(a^i u)] du$$

$$= \lambda \frac{1 - \Phi\left(\frac{s + \lambda}{a^i}\right)}{s + \lambda}. \quad (4.41)$$

Evaluando (4.41) en $s = 0$, se tiene

$$\int_0^{\infty} h_i(u) du = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right),$$

y tomando límites en (4.40) se tiene

$$v_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i q}{\xi} \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) + \frac{\pi_N}{\xi} \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^N} \right) \right) \quad (4.42)$$

ROCOF de fallos de desgaste

Para este tipo de fallos el número medio de fallos de desgaste en el estado i en el instante t , partiendo del estado inicial j es

$$v_{3i}(t) = \int_0^t dM_{ji}(u) e^{-\lambda(t-u)} a^i f(a^i(t-u)) du \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.43)$$

La justificación de (4.43) es análoga a la que ha sido dada en los casos anteriores, aunque aquí intervienen las funciones de densidad de probabilidad de los tiempos pasado en estados operativos del proceso. Partiendo de un estado inicial j , se produce una transición al estado i en el intervalo $(u, u+du)$ con $0 < u < t$. Una vez en el estado i ocurre un fallo de desgaste antes que un fallo externo al sistema en el intervalo (u, t) con probabilidad $e^{-\lambda(t-u)} a^i f(a^i(t-u))$, para $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Sumando (4.43) para todos los estados i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, se obtiene la expresión en régimen transitorio del ROCOF de fallos de desgaste en el instante t partiendo del estado j ,

$$v_3(t) = \sum_{i=0}^N v_{3i}(t) = \sum_{i=0}^N \int_0^t dM_{ji}(u) a^i f(a^i(t-u)) e^{-\lambda(t-u)} du. \quad (4.44)$$

Tomando límites para $t \rightarrow \infty$ en (4.44) se obtiene el ROCOF estacionario para este tipo de fallos,

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} v_3(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \int_0^t dM_{ji}(u) a^i f(a^i(t-u)) e^{-\lambda(t-u)} du \\
 &= \sum_{i=0}^N \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dM_{ji}(u) e^{-\lambda(t-u)} a^i f(a^i(t-u)) du \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

De nuevo se aplica el teorema llave de renovación para proceso semi-Markovianos. Se define la función

$$h_i(u) = e^{-\lambda u} a^i f(a^i u),$$

que es integrable Riemann y está acotada por una función directamente integrable Riemann, ya que la función $a^i M e^{-\lambda u}$, siendo $M = \sup f(u)$ es monótona decreciente e integrable Riemann. Por consiguiente la función $h_i(u)$ es directamente integrable Riemann y se aplica el Teorema 1.3.14 para determinar el ROCOF estacionario para fallos de desgaste. Se hace preciso calcular primero el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} h_i(u) du = \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right),$$

que se obtiene evaluando en cero la transformada de Laplace de la función $h_i(\cdot)$.

Finalmente, el límite de la expresión (4.45) es

$$v_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_3(t) = \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i}{\xi} \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right). \quad (4.46)$$

ROCOF del total de fallos del sistema

La razón total de fallos del sistema es la suma de las razones de cada uno de los diferentes tipos de fallos. Se denota por v y es la suma de las expresiones (4.38), (4.42) y (4.46). Se tiene

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i}{\xi} P\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right)\right) \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i q}{\xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right)\right) + \frac{\pi_N}{\xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^N}\right)\right) \\ &+ \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i}{\xi} \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right). \end{aligned}$$

Agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i}{\xi} p \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) + \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i}{\xi} \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \\
&= \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\sum_k \pi_k \eta_k}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Si entendemos por ciclo medio de funcionamiento el tiempo medio que el sistema emplea en pasar por todos los estados una sola vez, la expresión $1/\xi$ representa el número medio de ciclos completados por unidad de tiempo.

Se puede comprobar que

$$v_2 + v_3 = \frac{\pi_0}{\xi},$$

y esto es el número medio de ciclos completados desde el estado inicial.

El valor inverso de esta expresión anterior,

$$\frac{\xi}{\pi_0} = E(T_{00}),$$

es el tiempo medio de retorno al estado 0.

4.4. Consecuencias y aplicaciones

En esta sección se estudian consecuencias directas de los resultados relativos a los ROCOF de los diferentes tipos de fallo del sistema y la aplicación al caso en que las distribuciones de tiempos de funcionamiento y reparación son de tipo fase.

4.4.1. ROCOF y distribución estacionaria

Supongamos que el sistema es nuevo, se encuentra por tanto en el estado 0. El ROCOF para los tipos de fallo reparable, accidental no reparable y de desgaste viene dado a partir de las expresiones (4.38), (4.42) y (4.46), siendo estas, respectivamente,

$$\frac{\pi_0}{\xi} p(1 - \Phi(\lambda)), \quad \frac{\pi_0}{\xi} q(1 - \Phi(\lambda)) \quad \text{y} \quad \frac{\pi_0}{\xi} \Phi(\lambda).$$

La transformada de Laplace-Stieltjes ha sido interpretada en términos de probabilidades de fallo en el Capítulo III. Esto permite interpretar estas expresiones anteriores en términos de cantidades asociadas al funcionamiento del sistema. Así, el ROCOF para fallos reparables dado por

$$\frac{\pi_0}{\xi} p(1 - \Phi(\lambda)),$$

es igual al número medio de ciclos completados por unidad de tiempo multiplicado por la probabilidad de ocurrencia de un fallo reparable antes que un fallo de desgaste. El ROCOF para fallos accidentales no reparables es igual al número medio de ciclos completados por unidad de tiempo multiplicado por la probabilidad de un fallo accidental no reparable antes que un fallo de desgaste. Y por último, el ROCOF de fallos de desgaste es el número medio de ciclos completados por unidad de tiempo por la probabilidad de ocurrencia de un fallo de desgaste. Estas fórmulas vienen modificadas por el factor a^j cuando se inicia el ciclo en el estado j , y se tiene, respectivamente,

$$\frac{\pi_j}{\xi} p\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right), \quad \frac{\pi_j}{\xi} q\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right) \quad \text{y} \quad \frac{\pi_j}{\xi} \left(\Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right)$$

Es posible también expresar estos valores del ROCOF en términos de la distribución estacionaria del proceso semi-Markoviano dada en (4.26). Recordamos que η_j es el tiempo medio de permanencia del sistema en el estado j . Sustituyendo y llevando a cabo las operaciones de simplificación se tiene cuando el estado inicial es j ,

$$\frac{p_j}{\eta_j} p\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right), \quad \frac{p_j}{\eta_j} q\left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right) \quad \text{y} \quad \frac{p_j}{\eta_j} \left(\Phi\left(\frac{\lambda}{a^j}\right)\right)$$

4.4.2. Caso de distribuciones tipo fase

Si se aplican los resultados obtenidos en este capítulo al caso en que las distribuciones de tiempo de funcionamiento, F , y de tiempo de reparación, G , son de tipo fase, se obtienen directamente las fórmulas que han sido calculadas en el Capítulo II como un caso particular. En esta sección se demuestra que son análogas las expresiones obtenidas en el capítulo anterior y las obtenidas en éste para las principales medidas de operatividad del sistema. Esto se lleva a cabo comparando una a una cada una de las medidas de funcionamiento.

Probabilidad de que el sistema no esté operativo

El valor de esta probabilidad viene dado por la expresión (4.32), y es

$$\bar{A} = \sum_{i=0}^{N-1} p(i_r) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i}{\xi} p\mu_R \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right)\right).$$

Sustituyendo (4.15), (4.20) y (4.21) en esta expresión, se tiene

$$\xi = \frac{\pi_0}{\lambda} \left[\sum_{k=0}^N p^k \prod_{i=0}^k \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) + \lambda \mu_R p \sum_{k=0}^{N-1} p^k \prod_{i=0}^k \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) \right].$$

Llamando $D_i = p^i \prod_{k=0}^i \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^k} \right) \right)$, (4.32) puede expresarse

$$\bar{A} = \frac{\lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i},$$

que es análoga a la obtenida en (3.20).

Disponibilidad

La fórmula para la disponibilidad ha sido calculada en (4.35), y viene dada por

$$A = \sum_{i=0}^N p(i) = \frac{1}{\lambda \xi} \sum_{i=0}^N \pi_i \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right) = \frac{1}{\lambda \xi} \sum_{i=0}^N \pi_0 D_i$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^N D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i},$$

similar a (3.19).

ROCOF de fallos reparables

Ya se ha visto que

$$v_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i}{\xi} p \left(1 - \Phi \left(\frac{\lambda}{a^i} \right) \right).$$

Sustituyendo los valores de π_i y ξ , v_1 puede expresarse como

$$v_1 = \frac{\lambda p \sum_{i=0}^{N-1} D_i}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i},$$

expresión análoga a (3.21).

ROCOF de fallos accidentales no reparables

El número medio de fallos accidentales reparables viene dado por

$$v_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\pi_i q}{\xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right) \right) + \frac{\pi_N}{\xi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{a^N}\right) \right),$$

y expresando π_i y ξ en función de los D_i , se tiene

$$v_2 = \frac{\lambda \sum_{i=0}^{N-1} D_i q + \lambda D_N}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i},$$

como en (3.22).

Rocof de ocurrencia de fallos de desgaste

Ya hemos visto que

$$v_3 = \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i}{\xi} \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right).$$

y como en los casos anteriores, expresando π_i y ξ en función de los D_i , se tiene

$$v_3 = \frac{\lambda \Phi(\lambda) + \lambda p \sum_{i=0}^N D_{i-1} \Phi\left(\frac{\lambda}{a^i}\right)}{\sum_{i=0}^N D_i + \lambda p \mu_R \sum_{i=0}^{N-1} D_i}$$

expresión análoga a (3.23).

ANEXO I

Fiabilidad de sistemas complejos

Esta Memoria es un primer paso en el estudio de la fiabilidad de sistemas reparables considerando distribuciones tipo fase. Aalen (1995) ya estableció las ventajas de estas distribuciones y dio ejemplos de su aplicación en diferentes dominios. Posibles extensiones de esta Memoria nos han ido surgiendo en el transcurso de la elaboración de la misma, y algunas de las posibles extensiones ya están siendo tratadas.

Una posible extensión es considerar también el tiempo de reparación afectado por un factor b de manera análoga a como han sido considerados los tiempos operativos, si $b \leq 1$ el tiempo de reparación empeoraría y se tardaría más tiempo en reparar, cosa que puede suceder en la práctica. Con ello se tendría una extensión inmediata de los modelos considerados aquí.

En otra dirección, se pueden considerar sistemas con más de una componente, cada una de las cuales sigue una distribución tipo fase, y con tiempos de reparación también tipo fase. Estos sistemas pueden estar organizados según una función de estructura coherente, y como caso particular se tendrían los sistemas en serie, en paralelo, con redundancia activa, o con redundancia pasiva, y estudiar en ellos diversas medidas de funcionamiento. Además, podría hacerse considerando la extensión de la primera línea. Una de las dificultades a superar es la complejidad de las

fórmulas. Los programas informáticos son una parte esencial de este tipo de estudio.

La modelización de sistemas con más de una componente utilizando proceso semi-Markovianos siguiendo el procedimiento del Capítulo IV es una vía que está siendo considerada en estos momentos para el caso de dos componentes. La implementación computacional de estos modelos sería de gran utilidad práctica, y supondría una extensión de todos los sistemas exponenciales. Para más de dos componentes los cálculos resultan ser especialmente complicados. Por último, la visión del ingeniero que ha sido expuesta anteriormente sobre modelización, supone que los problemas de inferencia para la clase de distribuciones tipo fase y en general para distribuciones de uso frecuente en fiabilidad pueden ser de aplicación para diversas situaciones prácticas, y no hay muchos trabajos sobre estos tópicos.

ANEXO II

Programa computacional para la aplicación numérica del Modelo II

- **Función Φ : Transformada de Laplace-Stieltjes de la distribución tipo fase (α, T)**

Dicha función es

$$\Phi(s) = \alpha_{m+1} - \alpha(sI - T)^{-1}Te,$$

siendo I la matriz identidad de dimensiones apropiadas.

Introducimos el vector α en los programas considerando que $\alpha_{m+1} = 0$.

El programa está realizado para cualquier distribución tipo fase de tiempo de reparación y de operatividad según el modelo II.

Los parámetros de dicha función son: (α, T, λ) .

```
function salida=phi(alpha,t,lambda)
u=length(alpha);
salida=-alpha*inv(lambda*eye(u)-t)*sum(t)';
```

- **Función ψ**

$$\psi_i = \prod_{k=0}^i (1 - \phi(\lambda/a^k))$$

Los parámetros de dicha función son: $(i, \alpha, T, \lambda, a)$.

```
function salida=tsi(i,alpha,t,lambda,a)
for k=1:i+1
    aux(k)=1-phi(alpha,t,lambda/(a.^(k-1)));
end
salida=prod(aux);
```

- **Simulación de las medidas de interés desde las expresiones obtenidas.**

Parámetros de la función: $(\beta, S, \alpha, T, n, p, \lambda, a)$

```
function salida=simula(beta,s,alpha,t,n,p,lambda,a)
m=length(beta);
u=length(alpha);
d(1)=tsi(0,alpha,t,lambda,a);
for j=2:n+1
    d(j)=(p.^(j-1))*tsi(j-1,alpha,t,lambda,a);
end

mur=beta*sum(inv(-s))';
c=((1/lambda).*sum(d)+p.*mur.*(sum(d)-d(n+1))).^(-1);

'Fraction of time system is operating'
ftso=sum(d)./(sum(d)+lambda.*p.*mur.*(sum(d)-d(n+1)))
'Fraction of time system is repairing'
ftsr=(lambda.*p.*mur.*(sum(d)-d(n+1)))./(sum(d)+lambda.*p.*mur.*(sum(d)-d(n+1)))

'Rate of occurrence of reparable failures'
mfr=(lambda.*p.*(sum(d)-d(n+1)))./(sum(d)+lambda.*p.*mur.*(sum(d)-d(n+1)))

'Rate of occurrence of no reparable failures'
```

```

mfnr=(lambda.*(1-p).*(sum(d)-
d(n+1))+lambda.*d(n+1))./(sum(d)+lambda.*p.*mur.*(sum(d)-
d(n+1)))

'Rate of occurrence of "from old age" failures'
for i=1:n
    aux(i)=d(i).*phi(alpha,t,lambda.*a.^(-i));
end
mfoa=(lambda*phi(alpha,t,lambda)+lambda*p.*sum(aux))./(sum(d)
+p.*lambda.*mur.*(sum(d)-d(n+1)))

'Rate of transitions'
r=mfr+mfnr+mfoa

```

• **Simulación de las medidas de interés desde las definiciones con probabilidades de transición estacionarias**

```

function salida=simula2(beta,s,alpha,t,n,p,lambda,a)
m=length(beta);
u=length(alpha);
d(1)=tsi(0,alpha,t,lambda,a);
for j=2:n+1
    d(j)=(p.^(j-1))*tsi(j-1,alpha,t,lambda,a);
end

mur=beta*sum(inv(-s))';
c=((1/lambda).*(sum(d)+p.*mur.*(sum(d)-d(n+1))).^(-1));

'Steady State Probabilities'

pp(1,:)=c.*alpha*inv(lambda*eye(u)-t);

for i=2:n+1
    for k=1:i-1
        aux2(k)=(1-phi(alpha,t,lambda/(a.^(k-1))));
    end
    pp(i,:)=c*(p.^(i-1))*prod(aux2)*alpha*inv(lambda*eye(u)-
(a.^(i-1))*t);
    ppr(i-1,:)=c*(p.^(i-1))*prod(aux2)*beta*inv(s);
    v=zeros(i-1);
    aux2=v(1,:);

```

```

end
'Operating Steady State Probabilities'
pp

'Repairing Steady State Probabilities'
ppr

'Sums of the Operating Steady State Probabilities'
sum(pp)

'Sums of the Repairing Steady State Probabilities'
sum(ppr)

'Fraction of time system is operating'
sum(sum(pp))

'Fraction of time system is repairing'
sum(sum(ppr))

'Rate of occurrence of reparable failures'
mfr=lambdap*(sum(sum(pp))-sum(pp(n+1,:)))
'Rate of occurrence of no reparable failures'
mfnr=lambdap*(1-p)*(sum(sum(pp))-
sum(pp(n+1,:)))+lambda*sum(pp(n+1,:))

'Rate of occurrence of "from old age" failures'
for j=1:n+1
    aux3(j)=(a.^(j-1))*pp(j,:)*sum(t)';
end
mfoa=-sum(aux3)

'Rate of transitions'
r=mfr+mfnr+mfoa

```

REFERENCIAS

Aalen, O. (1995). Phase type distributions in survival analysis. *Scandinavian Journal of Statistics*. Vol **22**, 447-463.

Amljot, H. y Marvin, R. (1994). *System Reliability Theory*. Wiley.

Ascher, H. y Feingold, H. (1984). *Repairable Systems Reliability*. Marcel Dekker. NY.

Assaf, D. y Levikson, B. (1982). Closure of phase type distributions under operations arising in reliability theory. *Ann. Probab.* **10**, No.1, 265-269.

Barlow, R.E. y Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability Models*. Holt Rinehart and Winston 1975.

Baxter, L. (1981). Availability measures for a two state system. *J. Appl. Prob.* **18** 227-235.

Bellman, R. (1960). *Introduction to Matrix Analysis*. Mc Graw-Hill.

Belzunce, F., Ortega, E. y Ruiz, J.M. (1999). On aging properties of first passage times of increasing Markov processes. *Comunicación personal*.

- Brown, M. y Chaganty, N. (1983). On the first passage time distribution for a class of Markov chains. *Ann. Appl. Prob.* **11**, 1000-1008.
- Chakravathy, S. (1983). Reliability Analysis of a Parallel System with Exponential Life Times and Phase Type Repairs, *O.R. Spektrum*, **5**, 25-32.
- Çinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastics Processes*. Prentice-Hall.
- Cox, D.R. y Miller, H.D. (1965). *The Theory of Stochastics Processes*, Methuen, London.
- Ebrahimi, N. (1977). Multivariate age replacement. *J. Appl. Prob* **34**, 1032-1040.
- Ebrahimi, N. (1993). Modelling of repairable systems. *Adv. Appl. Prob.* **25**. 926-938.
- Esary, J.D., Marshall, A.W. y Proschan, F. (1973). Shocks models and wear processes. *Ann. Prob.* **1**, No.4, 627-649.
- Finkelstein, M.S. (1992). Some notes on two types of minimal repair. *Adv. Appl. Prob* **24**, 226-228.
- Franken, P y Steller, A. (1980). Reliability analysis of complex repairable systems by means of marked point process. *J. Appl. Prob.* **17**, 154-167.
- Frankel, E. (1988). *Systems Reliability and Risk Analysis*. Kluwer Academic Publishers 1988.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol I y II. Wiley New York.
- Heyman, D.P. y Sobel, M.J. (1982). *Stochastics Models in Operations Research*. Vol I. Mc-Graw Hill. N.Y.

- Hoyland, A. y Rousand, M. (1994). *System Reliability Theory*. John Wiley & Sons. N.Y.
- Kao, E. y Sponoky, M. (1993). On renewal processes relating to counter model the case of phase-type interarrival times. *J. Appl. Prob.* **30**, 175-183.
- Karasu, I. y Özekici, S. (1989). NBUE and NWUE properties of increasing Markov processes. *Journ. Appl. Probab.*, **29**, 116-128.
- Karlin, S. and Taylor, H. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press. New York.
- Karlin, S. and Taylor, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, London.
- Kovalenko, I., Kuznetsov, N. and Pegg, P.A. (1997). *Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications*. Wiley, Chichester.
- Kulkarni, V.G. (1995) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman-Hall. N.Y.
- Lam, Y. (1988). A note on the optimal replacement problem. *Adv. Appl. Prob.* **20**, 479-482.
- Lam, Y. (1992). Nonparametric Inference for geometric Processes. *Commun. Statist Theory Meth*, **21**.2083-2105.
- Lam, Y. (1995). Calculating the rate of occurrence of failures for continuous time Markov Chains with application to a two-component parallel system. *Journal of the Operational Research Society*, **46**, 528-538.
- Lam, Y. (1995). An optimal inspection-repair-replacement policy for standby systems. *J. Appl. Prob.* **32**. 212-223.

Lam, Y. y Zhang, L. (1996). Analysis of a two component series system with a geometric process model. *Naval Research Logistics*, **43**, 491-502.

Lam, Y. (1997). The rate of occurrence of failures. *J.Appl. Prob.* **34**, 234-237.

Last, T. y Szekli, R. (1988). Stochastics comparison or repairable systems by coupling. *J. Appl. Prob* **35**, 348-370.

Lawless, J.F. y Thiagarajah, K. (1996). A point process model incorporating renewals and time trends with application to repairable systems. *J. Am. Statist. Assoc.* **38**, No2,131-138.

Limnios, N. (1992). Repairable failure-delay systems with elementary structure. *Appl. Stoch. Mod. & Data Anal.* **8**.79-80.

Marlow, N.A. y Tortorella, M. (1995). Some general characteristics of two-state reliability models for maintained systems. *J.Appl. Prob.* **32**, 805-820.

Medhi (1982). *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons. N.Y.

Narayan, U. *Elements of Applied Stochastics Processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Nelson (1995). *Probability, Stochastics Processes and Queueing Theory*. Springer-Verlag.

Neuts, M.F. (1975). Probability distributions of phase type . *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*. Dept. Math. Univ. Louvain, Belgium, 173-206.

Neuts, M.F. (1981). *Matrix Geometric Solutions in Stochastics Models. An Algorithmic Approach*. Jonhs Hopkins Univ. Press.

Neuts, M.F. y Meier K. (1981). On the use of phase type distributions in reliability modeling of systems with two components. *OR Spektrum* **2**. 227-234.

- Hoyland, A. y Rousand, M. (1994). *System Reliability Theory*. John Wiley & Sons. N.Y.
- Kao, E. y Sponoky, M. (1993). On renewal processes relating to counter model the case of phase-type interarrival times. *J. Appl. Prob.* **30**, 175-183.
- Karasu, I. y Özekici, S. (1989). NBUE and NWUE properties of increasing Markov processes. *Journ. Appl. Probab.*, **29**, 116-128.
- Karlin, S. and Taylor, H. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press. New York.
- Karlin, S. and Taylor, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, London.
- Kovalenko, I., Kuznetsov, N. and Pegg, P.A. (1997). *Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications*. Wiley, Chichester.
- Kulkarni, V.G. (1995) *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman-Hall. N.Y.
- Lam, Y. (1988). A note on the optimal replacement problem. *Adv. Appl. Prob.* **20**, 479-482.
- Lam, Y. (1992). Nonparametric Inference for geometric Processes. *Commun. Statist Theory Meth*, **21**.2083-2105.
- Lam, Y. (1995). Calculating the rate of occurrence of failures for continuous time Markov Chains with application to a two-component parallel system. *Journal of the Operational Research Society*, **46**, 528-538.
- Lam, Y. (1995). An optimal inspection-repair-replacement policy for standby systems. *J. Appl. Prob.* **32**. 212-223.

- Lam, Y. y Zhang, L. (1996). Analysis of a two component series system with a geometric process model. *Naval Research Logistics*, **43**, 491-502.
- Lam, Y. (1997). The rate of occurrence of failures. *J.Appl. Prob.* **34**, 234-237.
- Last, T. y Szekli, R. (1988). Stochastics comparison or repairable systems by coupling. *J. Appl. Prob* **35**, 348-370.
- Lawless, J.F. y Thiagarajah, K. (1996). A point process model incorporating renewals and time trends with application to repairable systems. *J. Am. Statist. Assoc.* **38**, No2,131-138.
- Limnios, N. (1992). Repairable failure-delay systems with elementary structure. *Appl. Stoch. Mod. & Data Anal.* **8**.79-80.
- Marlow, N.A. y Tortorella, M. (1995). Some general characteristics of two-state reliability models for maintained systems. *J.Appl. Prob.* **32**, 805-820.
- Medhi (1982). *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons. N.Y.
- Narayan, U. *Elements of Applied Stochastics Processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Nelson (1995). *Probability, Stochastics Processes and Queueing Theory*. Springer-Verlag.
- Neuts, M.F. (1975). Probability distributions of phase type . *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*. Dept. Math. Univ. Louvain, Belgium, 173-206.
- Neuts, M.F. (1981). *Matrix Geometric Solutions in Stochastics Models. An Algorithmic Approach*. Jonhs Hopkins Univ. Press.
- Neuts, M.F. y Meier K. (1981). On the use of phase type distributions in reliability modeling of systems with two components. *OR Spektrum* **2**. 227-234.

- Neuts, M.F. y Bhattacharjee, M.C.(1981) Shock Models with phase type survival and Shock resistance. *Naval Res. Logist. Quart*, **28**, 213-219.
- Neuts, M.F. (1994). An interesting random walk on the non-negative integer. *J. Appl. Prob.* **31**, 48-58.
- Neuts M.F., Pérez-Ocón, R. y Torres-Castro, I., (2000). Repairing model with operating and repairing times governed by phase type distributions. *Adv. Appl. Prob.* **32**, No.2 (Aparecerá en Junio del 2000).
- O' Cinneide, C.A. (1989). A continuous multivariate exponential distribution that is multivariate phase type. *Stat & Prob. Letters* **7**, 323-325.
- O' Cinneide, C.A. (1991). Phase type distributions and majorization. *Ann. Appl. Probab.* **1**, No2, 219-227.
- O' Cinneide, C.A. (1991). Phase type distributions and invariant polytopes. *Adv. Appl. Prob.* **23**, 515-535.
- Parzen (1962). *Stochastics Processes*. Holden Day, San Francisco.
- Pérez-Ocón, R. y Gámiz-Pérez, M.L. (1996). On first passage times in increasing Markov processes. *Statistic. & Prob. Lett.*, **26**, 199-203.
- Pérez-Ocón, R., Ruiz-Castro, J.E., y Gámiz-Pérez, M.L. (1998). *Métodos Estocásticos en Teoría de la Fiabilidad*. Proyecto Sur de Ediciones, Granada.
- Pérez-Ocón, R., Ruiz-Castro, J.E., y Gámiz-Pérez, M.L. (1998). A multivariate model to measure the effect of treatments in survival to breast cancer. *Biom. Journal*, **40** (6), 703-715.
- Pérez-Ocón R., Gámiz-Pérez M.L., Ruiz-Castro J.E., y Torres-Castro, I. (1998). *Estudio de Tiempos de Fallo en Sistemas de Markov Reparables*. SEIO, Almería.

Pérez-Ocón, R., Ruiz-Castro, J.E., y Gámiz-Pérez, M.L. (1999). Semi-Markov models for lifetime data analysis. En: *Semi-Markov Models and Applications*, Eds. J. Janssen & N. Limnios, Kluwer. Academic Publisher, Dordrecht, 229-238.

Pérez-Ocón R., Torres-Castro, I., Gámiz-Pérez M.L. y Ruiz-Castro J.E (1999). *Lifetime Study of a Repairable Model with three Types of Failures*. AMSDA 99-IX. International Symposium Applied Stochastics. Models and Data Analysis.

Pérez-Ocón, R. y Torres-Castro, I., (1999). *Availability of repairable systems governed by Semi-Markov Processes*. Bulletin of the international statistical Institute ISI 99. Book 3, 117-118.

Rade, L. (1989). Expected time to failure of a reliability systems. *Math. Scientist* **14**, 24-37.

Raftery, A.E. (1984). A continuous multivariate exponential distribution. *Commun. Statist. Theor. Meth* **13(8)**, 974-965.

Ravichandran, N. (1989). *Stochastics Methods in Reliability Theory*. John Wiley & Sons. N.Y.

Rocha-Martínez, J.M. y Shaked, M (1995). A discrete-time model of failure and repair. *Appl. Stoch. Mod & Data Anal.* **2**, 167-180.

Ross, S.M. (1989). *Introduction to Probability Models*. Academic Press. New York.

Sen, A. y Bhattacharyya, G.K. (1993) A piecewise exponential model for reliability growth and associated inferences. *Advances in Reliability* Ed. Bassu 331-355.

Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (1987). IFRA properties of some Markov jump processes with general state space. *Math. Operat. Res.*, **12**, 562-568.

Sharma, O.P., Ravichandran, N. y Dass, J. (1989). Transient analysis of multiple unit reliability systems. *Naval Res. Logist.* **36**, 255-264.

Shi, D.M. y Liu, L. (1996). Availability analysis of a two-unit series systems with a priority shut-off rule. *Naval Res. Logist.* **43**, 1009-1024.

Sumita, U., Shanthikumar, J.G. y Masuda, Y. Analysis of fault tolerant computer systems. *Microel. Reliab.* **27**, 1 65-78.

Torres-Castro, I. (1998). *Medidas de funcionamiento en sistemas reparables*. Tesina de licenciatura. Universidad de Granada.

Van der Duyn, S. and Wartenhorst, P. (1994). Transient analysis of a two-unit standby system with markovian degrading units. *Management Science* **40**,(3) 418-428.