



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

Programa de Doctorado en Matemáticas

**Superficies con curvatura media  
predeterminada**

Jesús Antonio Bueno Linares

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autor: Jesús Antonio Bueno Linares  
ISBN: 978-84-1306-175-7  
URI: <http://hdl.handle.net/10481/55498>



# Agradecimientos

Los agradecimientos de una tesis es la parte que siempre me ha resultado más llamativa. Es lo último que redactas, pero es lo que más cuesta escribir. Es lo que menos contenido tiene de tu tema de investigación, pero es lo que todo el mundo seguro que lee. Permittedme que me extienda, que deje a un lado la formalidad y que, al menos aquí, disfrutéis de la lectura.

Como no puede ser de otra forma, quiero comenzar agradeciendo a mis directores de tesis, José Antonio Gálvez y Pablo Mira, por la confianza depositada y el tiempo invertido en mí. Gracias a sus consejos y sus conocimientos, un cúmulo de cuentas e ideas han tomado esta forma.

Agradezco sinceramente a Joaquín Pérez y a Rafa López por el apoyo y los consejos después de tantos años. Rafa, muchas gracias por tus consejos y, aunque a veces intentes “disimularlo”, por preocuparte por mí. Joaquín, mil gracias por dejarme comenzar a hacer Matemáticas “de verdad” contigo. No se me olvidarán las tardes enteras que te hice pasar resolviendo mil dudas de mil temas distintos, y siempre con predisposición por tu parte; la base investigadora que tengo es gracias a ti.

Quiero hacer extensivo este agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, al igual que a los compañeros de la Universidad Politécnica de Cartagena, los cuales me habéis hecho sentir como en casa en las estancias que he realizado. Sergio, Sonia, Concha, Carlos, Juan Carlos, Luis Ángel, Pedro, mil gracias por acogerme como uno más de vosotros.

Antes de plantearme siquiera realizar los estudios de Matemáticas, no tenía interés

alguno por esta materia. Por eso estoy profundamente agradecido a don Cristóbal Calvente, mi profesor de bachillerato, por haberme hecho ver las Matemáticas de una forma que, hasta ese momento, nadie había conseguido. Igualmente, quiero dar las gracias a Miguel Ángel Morales “*Gaussianos*”, porque el descubrimiento de su blog fue el empujón definitivo para embarcarme en esta aventura. Y, por qué no decirlo, porque las veces que he coincidido con él ha resultado ser un tío majísimo.

Este camino ha sido largo y nada sencillo, pero el tener buenos amigos a tu lado facilita todo notablemente. Yo tengo la suerte de contar con los mejores.

Gracias a Álvaro, Enelio y Antonio, los *del pueblo*. Son muchísimas anécdotas, contigo Álvaro desde los 3 años, y con vosotros, Enelio y Antonio, desde el instituto. Muchos partidos de baloncesto, muchas moragas, muchos marcos de la puerta que han sufrido derrotas de nuestro Real Madrid, muchas noches de fiesta y de trucos de magia; en definitiva, muchos momentos inolvidables. Intentar plasmar un mínimo de lo que os aprecio en estos agradecimientos, desmerecería todo. Lo resumiré en que os considero hermanos.

Durante la carrera he tenido la suerte de conocer a gente increíble, con la que he compartido grandes historias. Gracias a Garnica, Cervera, Nino, Ester, Sonia, Noel, David *el cigala*, Antonio Molina *el forense* y *Alsonfo*, por hacer que los 5 años de Licenciatura se pasasen como si fuesen 5 minutos. Pero a nadie le extrañará que guarde un lugar especial para dos auténticos fenómenos, Milán y Ramón. Han sido muchísimos buenos momentos, no solo en la carrera sino también en la convivencia. Hemos obtenido becas de desayuno y comida, salvado el trimestre fiscal de muchos bares, e incluso montamos una academia totalmente improvisada en un par de horas, sin olvidar aquel incidente con la cabra. Volvería a hacer cualquier carrera si estáis los dos ahí.

La etapa de doctorando es con seguridad una de las más especiales, pero la experiencia mejora exponencialmente si tienes la suerte de coincidir con buenos compañeros. Y los míos del despacho nº 4 son inmejorables. Tengo que agradecer de forma muy especial a Ildefonso, porque empezamos en esto prácticamente a la vez, y seguimos al pie del cañón. Que esta etapa me haya brindado un amigo como tú, lo ha hecho todo

más fácil. Son muchísimas las anécdotas y vivencias que hemos pasado juntos, y espero seguir generando buenos momentos. Gracias también a Jesús, y a Antonio, por tantos buenos ratos, por idear los *martes traviesos* y hacer que pasar tantas horas trabajando sea mucho más ameno. Quiero dar las gracias también a Alberto. De verdad que a veces pienso que nos separaron al nacer. Las tertulias que mantenemos en el día a día son fuente inagotable de conocimiento. Finalmente, gracias a Vero por completar la *pareja de cuatro*, la cual ha pasado momentos estupendos.

Gracias a esta etapa, he podido conocer a Irene. Gracias por tu apoyo, por tu cariño y por sacarme una sonrisa hasta en los momentos que más cuesta sonreír. Gracias por serenarme, por aconsejarme y por cuidarme. Gracias por tu madurez y por tu templanza. Es una suerte poder compartir tantas cosas contigo y aprender de ti.

Sin mi familia, yo no sería absolutamente nada. Todo lo bueno que tengo, se lo debo a ellos; para corregir lo “no tan bueno”, tengo que seguir aprendiendo de ellos. Solo os puedo decir que os quiero muchísimo.

Muchas gracias a mi hermana, por ponerme un poco de oscuridad cuando lo veo todo demasiado claro, por pintarme una amplia escala de grises entre mi blanco y mi negro, y por hacer diferenciables los picos de mi cabeza algo cuadrada. Cualquiera que nos vea saludarnos estrechándonos la mano, o hablando de cualquier cosa, piensa que no somos hermanos al uso y eso es lo que más me gusta entre nosotros.

Muchas gracias a mi madre, por tu bondad, tu cariño y tu fortaleza infinita. Eres todo un ejemplo y una figura a imitar en todos los aspectos de la vida. Soy muy afortunado por tenerte como madre.

Por último, quiero agradecer de forma muy emocionada a mi padre. Fuiste íntegro, trabajador, honrado, y, en definitiva, una buena persona. ¿Qué digo? ¡La mejor persona que he conocido! Muchas gracias por tus consejos, por la educación que me has dado, por confiar en mí, por hincharte de orgullo por mis éxitos y saber reprenderme en mis equivocaciones. Que alguien me diga que le recuerdo a ti, es el mayor de los halagos. Ojalá pudieses estar aquí para ver esta tesis, la cual no es más que el fruto de haber tenido al mejor padre, y de tener a la mejor madre.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Propiedades básicas de las <math>\mathcal{H}</math>-hipersuperficies</b>	<b>1</b>
1.1. Principios del máximo y de tangencia . . . . .	1
1.2. Un caso particular: solitones de traslación . . . . .	7
1.3. $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas en $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	10
1.4. Los teoremas de Alexandrov y Hopf para $\mathcal{H}$ -superficies . . . . .	12
1.5. Construcción de $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no compactas . . . . .	20
1.6. Resolución del problema de Björling para $\mathcal{H}$ -superficies . . . . .	25
1.7. Un teorema de compacidad . . . . .	33
<b>2. <math>\mathcal{H}</math>-hipersuperficies rotacionalmente simétricas inmersas en <math>\mathbb{R}^{n+1}</math></b>	<b>37</b>
2.1. Análisis del plano de fases . . . . .	37
2.2. $\mathcal{H}$ -bowls y $\mathcal{H}$ -catenoides en $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	46
2.3. Un teorema de clasificación de tipo Delaunay . . . . .	51
2.4. Ejemplos que no existen para $\mathcal{H}$ constante . . . . .	60
2.5. Descripción de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies con $\mathcal{H}$ lineal . . . . .	68

<b>3. Clasificación de <math>\mathcal{H}</math>-superficies propiamente embebidas en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>77</b>
3.1. Estimaciones de curvatura y del diámetro . . . . .	77
3.2. Estimaciones de altura uniformes para $\mathcal{H}$ -grafos . . . . .	86
3.3. Demostración del Teorema 3.2.2 . . . . .	91
3.4. $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas con un final . . . . .	98
<b>4. Estabilidad de las <math>\mathcal{H}</math>-hipersuperficies</b>	<b>107</b>
4.1. Estabilidad de las hipersuperficies con curvatura media constante . . . . .	107
4.2. El operador de estabilidad de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies . . . . .	110
4.3. Operadores elípticos generalizados y $\mathcal{H}$ -hipersuperficies estables . . . . .	113
4.4. Estimaciones del radio y la curvatura de $\mathcal{H}$ -superficies . . . . .	116
<b>5. Problemas abiertos</b>	<b>125</b>
5.1. Sobre $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas en $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	125
5.2. Sobre propiedades generales de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies . . . . .	127
5.3. Sobre $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	129
5.4. Sobre $\mathcal{H}$ -superficies estables en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	130
<b>Bibliografía</b>	<b>141</b>





# Introducción

Uno de los problemas fundamentales dentro del Análisis Geométrico y la Geometría Diferencial clásica es el estudio de las hipersuperficies del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$  que cumplen una relación predeterminada entre sus curvaturas principales y su aplicación de Gauss en cada punto. Dentro de este marco general, dos de las teorías principales son el estudio de las hipersuperficies de curvatura media constante, y los problemas de tipo Minkowski para ovaloides.

Las hipersuperficies de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$  aparecen como puntos críticos de un problema variacional de minimización de área, con respecto a variaciones normales de soporte compacto que conservan el volumen. Entre los problemas clave de esta teoría destacan el estudio y clasificación geométrica de las hipersuperficies de curvatura media constante dadas por condiciones topológicas y geométricas globales tales como completitud, compacidad, embebimiento, o restricciones sobre el tipo topológico, así como sobre la estabilidad de la hipersuperficie como solución a su problema variacional asociado. El caso de superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  es sin duda el que mayor atención ha atraído a lo largo de los años.

Por otra parte, el problema de Minkowski [Min] para ovaloides pide, dada una función  $F > 0$  sobre  $\mathbb{S}^n$ , determinar la existencia y unicidad de una hipersuperficie compacta estrictamente convexa  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que cumple la ecuación  $K_e = F(\eta)$  en cada punto, siendo  $K_e$  su curvatura de Gauss-Kronecker (esto es, el producto de sus curvaturas principales), y  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su aplicación de Gauss. El problema de Min-

kowski ha sido estudiado, además de para  $K_e$ , para otros muchos funcionales elípticos  $\Phi(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$  dependiendo de las curvaturas principales  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  de la hipersuperficie. Como ejemplo, podemos mencionar el famoso *problema de Christoffel* [Chr], donde se estudia la ecuación  $\sum_{i=1}^n 1/\kappa_i = F(\eta)$ .

Los dos tipos de problemas que acabamos de mencionar confluyen de manera natural en el estudio de las hipersuperficies  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuya curvatura media, definida como  $H_\Sigma := (\kappa_1 + \dots + \kappa_n)/n$ , viene dada como una función predeterminada en términos de su normal unitario. Específicamente, dada una función  $\mathcal{H}$  de clase  $C^1$  definida en la esfera unidad  $\mathbb{S}^n$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ , diremos que una hipersuperficie  $\Sigma$  orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tiene *curvatura media predeterminada*  $\mathcal{H}$  si su función curvatura media  $H_\Sigma$  viene dada por

$$H_\Sigma(p) = \mathcal{H}(\eta_p), \quad \forall p \in \Sigma, \quad (1)$$

donde  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la *aplicación de Gauss* de  $\Sigma$ . A lo largo de esta memoria diremos indistintamente que  $\Sigma$  tiene *curvatura media predeterminada*  $\mathcal{H}$ , o que  $\Sigma$  es una  *$\mathcal{H}$ -hipersuperficie*.

El objetivo de esta memoria es desarrollar una teoría global de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tomando como motivación inicial la teoría global de hipersuperficies con curvatura media constante. En particular, pondremos un énfasis especial en la teoría global de  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$ , e intentaremos extender a este contexto más general algunos teoremas conocidos sobre superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ .

En el caso compacto, la existencia y unicidad de ovaloides con curvatura media predeterminada en  $\mathbb{R}^{n+1}$  fue ampliamente estudiada, entre otros, por Alexandrov [Ale] y Pogorelov [Pog], pero las propiedades globales de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies para una función  $\mathcal{H}$  arbitraria se encontraban prácticamente inexplorada.

Debemos mencionar que al predeterminar ciertas funciones  $\mathcal{H}$  en la ecuación (1), aparecen clases de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies que han sido ampliamente estudiadas en la literatura. Por ejemplo, las hipersuperficies con curvatura media constante  $H_0$  surgen al predeterminar la función constante  $H_0$  en  $\mathbb{S}^n$ . Otro caso de interés corresponde al predeterminar la función  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , la cual no es más que

la altura en la esfera  $\mathbb{S}^n$  respecto de la dirección  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ . En esta ocasión, la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies definida por medio de la ecuación (1) son los conocidos *solitones de traslación del flujo por curvatura media*. En las últimas décadas esta teoría se ha convertido en un campo de trabajo fructífero, atrayendo la atención de numerosos investigadores. Véanse [CSS, DDN, HuSi, Ilm, ImRi, MSHS, Smi, SpXi] y sus referencias para un enfoque global del desarrollo de esta teoría.

Aparte de los trabajos clásicos sobre ovaloides previamente citados, y de las teorías descritas que aparecen como casos particulares al prescribir elecciones concretas de la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  en la ecuación (1), tenemos que avanzar hasta el año 2002 para obtener el primer resultado de peso que concierne a esta clase de hipersuperficies:

**Teorema 1 (Guan-Guan, [GuGu]).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  una función positiva, invariante bajo un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^n$  sin puntos fijos. Entonces, existe un ovaloide con curvatura predeterminada  $\mathcal{H}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Al ovaloide con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  dado por el teorema anterior lo llamaremos *esfera de Guan-Guan*, la cual denotaremos comúnmente por  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .

Recientemente, los trabajos de Gálvez y Mira [GaMi4, GaMi5] enfocados en ambientes tridimensionales más generales, han estudiado la unicidad de esferas inmersas en 3-variedades definidas por medio de ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Para el caso en el que se predetermina la curvatura media, esto es, para la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , se tiene el siguiente teorema de unicidad:

**Teorema 2 (Gálvez-Mira, [GaMi4, GaMi5]).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^0(\mathbb{S}^2)$  y supongamos que existe una esfera  $\mathcal{S}$  con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$ , estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $\mathcal{S}$  es (salvo traslaciones) la única  $\mathcal{H}$ -superficie compacta de género cero, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .*

Es posible deducir ciertas similitudes entre la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies para una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  genérica y las hipersuperficies con curvatura media constante. Por ejemplo, por ser la ecuación (1) invariante por traslaciones euclídeas, la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies es invariante por estas traslaciones y por tanto podemos *trasladar* libremente toda

$\mathcal{H}$ -hipersuperficie a través de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Igualmente, las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies vienen localmente modeladas por una ecuación en derivadas parciales cuasilineal y elíptica cuando son vistas como grafos locales en  $\mathbb{R}^{n+1}$  sobre cualquier hiperplano tangente, y por tanto satisfacen el *principio del máximo geométrico*.

Sin embargo, la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies es de hecho mucho más amplia y rica, y por tanto tenemos que desarrollar nuevas ideas para su estudio. Algunas diferencias notables entre las hipersuperficies con curvatura media constante y la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies son las siguientes. Para empezar, en general, las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no son solución de un problema variacional involucrando funcionales geométricos como el área y el volumen, y en consecuencia muchas de las técnicas más usadas en el estudio de las hipersuperficies con curvatura media constante se hacen inaccesibles. Otra diferencia es que no podemos garantizar la existencia de objetos holomorfos en la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  no constante. Y por último, para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria perdemos las propiedades de simetría e isotropía de la ecuación (1). Por ejemplo, el método de reflexión de Alexandrov solo podremos aplicarlo respecto de direcciones en las que  $\mathcal{H}$  sea simétrica.

A pesar de estas dificultades, los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria muestran que bajo hipótesis muy generales sobre  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies presenta un comportamiento homogéneo, siendo posible dar un tratamiento global a sus elementos. En esta memoria nos centraremos en la clasificación de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales, en la geometría de las  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas de topología finita en  $\mathbb{R}^3$ , en el estudio de la estabilidad de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, y en la obtención de estimaciones de distancia al borde y de curvatura para  $\mathcal{H}$ -superficies estables en  $\mathbb{R}^3$ .

El resto de la introducción está dedicado a la presentación de los resultados más relevantes de la memoria.

Comenzaremos estudiando las propiedades básicas que satisfacen las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , contenido al que estará dedicado el **Capítulo 1**. En la Sección 1.1 indicaremos que la ecuación (1) está modelada por una ecuación en derivadas parciales

cuasilineal y elíptica. Como consecuencia, podremos enunciar el principio del máximo geométrico, el cual se convertirá en una de las principales herramientas para el estudio de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies.

En general, disponer de un principio del máximo tiene consecuencias geométricas al aplicar las isometrías del ambiente, como ocurre por ejemplo con el método de reflexión de Alexandrov. Como ya hemos comentado, la ecuación (1) para una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria no hereda la isotropía del espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  y en consecuencia tenemos restricciones a la hora de aplicar isometrías del ambiente al estudio de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. En el Lema 1.1.5 relacionaremos las simetrías de una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  con las isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, como sigue.

*Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie con aplicación de Gauss  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  y sea  $\Phi$  una isometría lineal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\mathcal{H} \circ \Phi|_{\mathbb{S}^n} = \mathcal{H}$ . Entonces  $\tilde{\Sigma} = \Phi(\Sigma)$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, con respecto a la orientación dada por  $\tilde{\eta} = d\Phi(\eta)$ .*

Antes de comenzar con el estudio general de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, conviene tratar alguna elección particular de la función predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Este es el objetivo de la Sección 1.2, donde estudiaremos la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies que vienen definidas a través de una función  $\mathcal{H}$  lineal de la forma  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, v \rangle + b$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{S}^n$ . Notemos que esta elección de  $\mathcal{H}$  engloba a las superficies con curvatura media constante para la elección  $a = 0$ , y a los solitones de traslación del flujo por curvatura media para las elecciones  $a = 1, b = 0$ .

Supongamos que  $a \neq 0$ . Sin perder generalidad podemos suponer  $a = 1$  tras aplicar una homotecia a  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Probaremos que estas  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies son solución de un flujo geométrico que generaliza al flujo por curvatura media, al incluir un factor de corrección constante. Otra caracterización importante de estas  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies viene dada por medio de la Proposición 1.2.2:

*Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie para la elección  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle + b$ , para cierto  $b \in \mathbb{R}$ .
2.  $\Sigma$  es un solitón de traslación del flujo por curvatura media con un término corrector constante dado en la ecuación (1.6).
3.  $\Sigma$  tiene curvatura media con peso constante  $H_\phi = nb \in \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con respecto de la densidad  $e^\phi$ , donde  $\phi(x) := n\langle x, e_{n+1} \rangle$ .

En la Sección 1.3, daremos condiciones a priori sobre  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  para determinar la existencia de ejemplos compactos (sin borde) en la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Como es presumible, no todas las elecciones de la función  $\mathcal{H}$  van a definir clases de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies que contengan ejemplos compactos (casos claros de esto son las elecciones  $\mathcal{H} = 0$ , o  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle$ ), y en concreto probaremos en la Proposición 1.3.1 la siguiente condición *necesaria* para la existencia de estos ejemplos compactos:

*Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  y supongamos que  $\mathcal{H}(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{S}^n$ . Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

No obstante, por medio del Corolario 1.3.2 mostraremos que la condición  $\mathcal{H} > 0$  no es suficiente para garantizar la existencia de ejemplos compactos, sin borde, en la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. En particular, las funciones lineales  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, e_{n+1} \rangle + b$  con  $a \neq 0$  y  $b > |a|$  estudiadas en la Sección 1.2 determinan clases de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies sin ejemplos compactos.

En la teoría global de las hipersuperficies compactas con curvatura media constante  $H > 0$ , dos de los teoremas fundamentales son las caracterizaciones de la esfera debidas a Alexandrov y Hopf [Ale, Hop].

La primera caracteriza la esfera totalmente umbilical  $\mathbb{S}^n(1/H)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  como la única hipersuperficie con curvatura media constante  $H \neq 0$  y compacta, embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El método empleado por Alexandrov para probar este resultado se basa en una aplicación adecuada del principio del máximo geométrico y de la invariancia de la ecuación (1) cuando  $\mathcal{H}$  es constante al reflejar respecto de hiperplanos en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

El teorema de Hopf caracteriza la esfera totalmente umbilical  $\mathbb{S}^2(1/H)$  de  $\mathbb{R}^3$  como la única inmersión con curvatura media constante  $H \neq 0$  de una esfera topológica en  $\mathbb{R}^3$ . Para probar este resultado, Hopf definió geoméricamente una diferencial cuadrática holomorfa en cada superficie con curvatura media constante, conocida en la literatura como *diferencial de Hopf*, la cual se anula exactamente sobre los puntos umbilicales de la superficie. Es bien sabido que en una esfera topológica no existen diferenciales cuadráticas holomorfas no nulas, concluyendo así el resultado. La holomorfía de la diferencial de Hopf es consecuencia de la *ecuación de Codazzi* en  $\mathbb{R}^3$ , y este es el motivo que imposibilita su generalización de forma directa a cualquier espacio ambiente arbitrario. Llegados a este punto, es necesario mencionar el trabajo pionero de Abresch y Rosenberg [AR1, AR2] en el cual los autores definen una diferencial cuadrática holomorfa en superficies con curvatura media constante inmersas en espacios 3-dimensionales homogéneos simplemente conexos con grupo de isometrías de dimensión 4, los conocidos espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . En particular, la *diferencial de Abresch-Rosenberg* permite caracterizar las esferas rotacionales con curvatura media constante definidas en estos espacios, como las únicas inmersiones con curvatura media constante de una esfera topológica.

En la Sección 1.4 nos proponemos generalizar estos resultados a la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. La dificultad que nos encontramos a la hora de generalizar el teorema de Alexandrov es la imposibilidad de reflejar respecto de cualquier hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por la pérdida de simetrías de la ecuación (1). Si  $\mathcal{H}$  es invariante bajo la reflexión de un hiperplano vectorial, el Lema 1.1.5 nos permite aplicar el método de reflexión de Alexandrov respecto de hiperplanos paralelos a tal hiperplano vectorial. En el caso en el que  $\mathcal{H}$  sea invariante bajo  $n$  reflexiones independientes podremos probar la Proposición 1.4.2, que generaliza el teorema de Alexandrov.

*Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función invariante con respecto a  $n$  reflexiones  $R_1, \dots, R_n$  de  $\mathbb{S}^n$  linealmente independientes. Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  compacta, embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ . Es más,  $\Sigma$  es un bigrafo simétrico respecto a hiperplanos  $\widehat{\Pi}_1, \dots, \widehat{\Pi}_n$  paralelos a los hiperplanos  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  fijados por  $R_i$ .*

El problema que surge al intentar generalizar el teorema de Hopf en  $\mathbb{R}^3$  es la

no existencia de objetos holomorfos definidos de forma geométrica en la clase de las  $\mathcal{H}$ -superficies, para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  arbitraria. No obstante, esta dificultad se puede salvar aplicando el teorema de Gálvez-Mira (Teorema 2) previamente enunciado. Combinando el teorema de existencia de Guan-Guan (Teorema 1), el teorema de unicidad de Gálvez-Mira (Teorema 2) y la Proposición 1.4.2, en el Corolario 1.4.6 daremos una extensión del teorema de Alexandrov para funciones  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  muy generales:

*Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y embebida en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  es positiva e invariante por un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  sin puntos fijos que contiene dos reflexiones de  $\mathbb{S}^2$  linealmente independientes. Entonces,  $\Sigma$  es una traslación de la esfera de Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .*

Como complemento a la sección anterior, en la Sección 1.5 abordaremos el estudio de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no compactas que vienen dadas como un producto riemanniano  $\Sigma = M^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , donde  $M^k$  es una hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{k+1}$ , y los subespacios  $\mathbb{R}^{n-k}$  y  $\mathbb{R}^{k+1}$  son ortogonales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En particular, si  $k = 1$ ,  $M^k$  no es más que una curva  $\alpha$  contenida en un 2-plano vectorial  $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . En la Proposición 1.5.3 probaremos que toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, completa y llana es un *cilindro generalizado* de la forma  $\alpha \times \mathbb{R}^{n-1}$ , donde  $\alpha$  es una curva plana y completa que satisface la ecuación (1.11), la cual es el análogo 1-dimensional de la ecuación (1). En el Corolario 1.5.4 probamos a través del célebre teorema de Minkowski bajo qué condiciones la curva  $\alpha$  es cerrada.

*Sean  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  y  $\alpha$  una curva plana completa contenida en un 2-plano vectorial  $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y supongamos que el producto  $\alpha \times \mathbb{R}^{n-1}$  define una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La hipersuperficie  $\alpha \times \mathbb{R}^{n-1}$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Esto es, la curva  $\alpha(s)$  es cerrada.*
2. *Si denotamos  $\mathbb{S}_{\Pi}^1 = \mathbb{S}^n \cap \Pi$ , entonces  $\mathcal{H}(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{S}_{\Pi}^1$  y se cumple la*

*condición integral*

$$\int_{\mathbb{S}_{\Pi}^1} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx = 0.$$

En la Sección 1.6 resolvemos el problema de Björling para la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  supuesto que  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ , esto es, para elecciones analíticas de la función  $\mathcal{H}$ .

*Sea  $\beta(s)$  una curva regular analítica en  $\mathbb{R}^3$  y  $\Pi(s)$  una distribución analítica de planos orientados a lo largo de  $\beta(s)$ , y supongamos que  $\beta'(s) \subset \Pi(s)$  para todo  $s$ . Entonces existe una única  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\beta(s)$  y tal que  $T_{\beta(s)}\Sigma = \Pi(s)$ , para todo  $s$ .*

Tal y como hemos definido las  $\mathcal{H}$ -superficies al comienzo de la introducción, toda  $\mathcal{H}$ -superficie está orientada. No obstante, si la función predeterminada cumple la condición de *antisimetría antipodal*  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ , y  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie con orientación  $\eta$ , entonces  $\Sigma$  vuelve a ser una  $\mathcal{H}$ -superficie para la orientación  $-\eta$ . Esto es, la condición de ser  $\mathcal{H}$ -superficie para una  $\mathcal{H}$  antipodalmente antisimétrica no depende de la orientación escogida. En este caso, podemos plantearnos el estudio de  $\mathcal{H}$ -superficies *no orientables*; en particular, con la topología de una banda de Möbius.

En consecuencia, dada  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ , probaremos en la Proposición 1.6.3 la existencia de  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  con la topología de una banda de Möbius. En particular, la elección analítica  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$  satisface la condición de imparidad anteriormente expuesta, y por tanto podremos construir bandas de Möbius en la familia de los solitones de traslación del flujo por curvatura media.

Para finalizar este capítulo, en la Sección 1.7 damos el siguiente *teorema de compacidad* para el espacio de las  $\mathcal{H}$ -superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con segunda forma fundamental acotada.

*Sea  $(\Sigma_n)_n$  una sucesión de  $\mathcal{H}_n$ -superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  para alguna sucesión de funciones  $\mathcal{H}_n \in C^k(\mathbb{S}^2)$ ,  $k \geq 1$ , y tomemos  $p_n \in \Sigma_n$ . Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. Existe una sucesión de números positivos  $r_n \rightarrow \infty$  tales que la sucesión de discos geodésicos  $D_n = D_{\Sigma_n}(p_n, r_n)$  están contenidos en el interior de  $\Sigma_n$ , es decir, que toda geodésica que emana de  $p_n$  está bien definida hasta distancia al menos  $r_n$ .
2. La sucesión  $(p_n)_n \rightarrow p$  para algún  $p \in \mathbb{R}^3$ .
3. Si denotamos por  $|\sigma_{\Sigma_n}|$  la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma_n$ , existe  $C > 0$  tal que  $|\sigma_{\Sigma_n}(x)| \leq C$ ,  $\forall x \in \Sigma_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
4.  $\mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}$  en la topología  $C^k$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^k(\mathbb{S}^n)$ .

Entonces, existe una parcial de la sucesión  $(\Sigma_n)_n$  que converge uniformemente sobre conjuntos compactos en la topología  $C^{k+2}$  a una  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma$  que es completa, posiblemente con varias componentes conexas y de curvatura acotada, que pasa por el punto  $p$ .

Este resultado será de gran utilidad en los Capítulos 3 y 4, en los que varios de los argumentos que aplicaremos se basarán en tomar límite en una determinada sucesión de  $\mathcal{H}$ -superficies.

En el **Capítulo 2** estudiaremos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies invariantes bajo la acción de las isometrías lineales de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la orientación y dejan fijo un eje punto a punto, esto es, analizaremos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies *rotacionales*. En virtud del Lema 1.1.5, no toda función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es susceptible de generar una clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies que contenga ejemplos rotacionales; en general, una función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria carece de estas simetrías y por tanto la ecuación (1) no es invariante por rotaciones respecto de algún eje de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Es natural entonces restringirnos a la clase de funciones que son *rotacionalmente simétricas*, esto es, para las que existe un cierto  $v \in \mathbb{S}^n$  tal que  $\mathcal{H}(x)$  depende exclusivamente de la cantidad  $\langle x, v \rangle$ . Por tanto, el que  $\mathcal{H}$  sea rotacionalmente simétrica equivale a la existencia de una función  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  tal que

$$\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, v \rangle), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n. \quad (2)$$

En consecuencia, para estas elecciones de  $\mathcal{H}$  la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies contendrá elementos rotacionales respecto de cualquier eje paralelo al vector  $v \in \mathbb{S}^n$ . Para concretar, salvo un cambio de coordenadas euclídeas podemos suponer que  $v = e_{n+1}$ . En consecuencia,  $\mathcal{H}$  depende de la *altura en la esfera* medida respecto del hiperplano  $\{x_{n+1} = 0\}$ , y la ecuación (1) para una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  toma la expresión

$$H_{\Sigma}(p) = \mathfrak{h}(\langle \eta_p, e_{n+1} \rangle), \quad \forall p \in \Sigma, \quad (3)$$

Geoméricamente, esta condición quiere decir que la función curvatura media depende de la *función ángulo* de  $\Sigma$ , definida como

$$\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(p) := \langle \eta_p, e_{n+1} \rangle, \quad \forall p \in \Sigma. \quad (4)$$

Una vez fijado el marco de trabajo, en la Sección 2.1 estudiaremos las hipersuperficies rotacionales con curvatura media predeterminada dada por la ecuación (3). Estas hipersuperficies vienen dadas como la órbita de una curva plana regular

$$\alpha(s) = (x(s), 0, \dots, 0, z(s)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

bajo la acción del grupo de isometrías lineales de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la orientación y dejan el eje  $x_{n+1}$  fijo punto a punto.

Suponiendo que  $\alpha$  está parametrizada por su longitud de arco, la ecuación (1) para una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional se simplifica en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la cual puede ser escrita como el sistema diferencial autónomo de primer orden

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y(s) \\ (n-1)\frac{1-y(s)^2}{x(s)} - n\varepsilon \mathfrak{h}(y(s))\sqrt{1-y(s)^2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \text{sign}(z').$$

El estudio de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales se realizará por medio del análisis del *plano de fases* asociado al sistema anterior, gracias al cual obtendremos tanto propiedades locales como globales. Por ejemplo, por medio del plano de fases podremos demostrar que las  $\mathcal{H}$ -esferas rotacionales son estrictamente convexas:

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  rotacionalmente simétrica, y sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional y difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces,  $\Sigma$  es una esfera estrictamente convexa.

En la Sección 2.2 aplicaremos el análisis del plano de fases para construir, para elecciones muy generales de funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H}$ , ejemplos de  $\mathcal{H}$ -grafos de tipo “bowl” estrictamente convexos enteros, y de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies con la topología de  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , propiamente embebidos en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Concretamente, en la Proposición 2.2.1 generalizaremos el ejemplo rotacional que aparece en la familia de los solitones de traslación del flujo por curvatura media:

Sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$ , supongamos que existe  $y_0 \in [0, 1]$  (resp.  $y_0 \in [-1, 0]$ ) tal que  $\mathfrak{h}(y_0) = 0$  y sea  $\mathcal{H}$  definida por  $\mathfrak{h}$  por medio de (2). Entonces, existe un  $\mathcal{H}$ -grafo entero y rotacional en  $\mathbb{R}^{n+1}$  orientado hacia arriba (resp. orientado hacia abajo).

De igual forma, en la Proposición 2.2.2 construiremos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales que generalizan a las catenoides mínimas:

Sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$ ,  $\mathfrak{h} \leq 0$ , supongamos que  $\mathfrak{h}(\pm 1) = 0$ , y sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  definida a partir de  $\mathfrak{h}$  por medio de la ecuación (2). Entonces, existe una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales, propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cuya curvatura de Gauss-Kronecker es estrictamente negativa en todo punto, y difeomorfas a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Cada elemento de esta familia es un bigrafo sobre  $\mathbb{R}^n - \mathbb{B}^n(r)$ , donde  $\mathbb{B}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ , para cierto  $r > 0$ .

Los ejemplos que hemos construido hasta ahora son análogos a los que aparecen en las clases de las hipersuperficies mínimas y de los solitones de traslación del flujo por curvatura media, teorías en las que no existen ejemplos compactos. En el caso en el que la curvatura media es una constante positiva, los ejemplos rotacionales de esta clase de hipersuperficies están descritos por medio del *teorema de Delaunay*. Motivados por este resultado, en la Sección 2.3 nos centramos en probar un teorema de tipo Delaunay para una clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies mucho más amplia, obteniendo el siguiente resultado.

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función rotacionalmente simétrica, positiva y tal que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ . Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional alrededor del eje  $x_{n+1}$  es, salvo traslaciones verticales, uno de los siguientes ejemplos:

1. El cilindro vertical recto  $C_{\mathcal{H}} := \mathbb{S}^{n-1}((n-1)/(n\mathfrak{h}(0)) \times \mathbb{R}$ , de curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ , donde  $\mathfrak{h}$  viene dada por (2) en términos de  $\mathcal{H}$ .
2. Una  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .
3. Una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -onduloides  $O_{\mathcal{H}}$  propiamente embebidos.
4. Una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -nodoidees  $N_{\mathcal{H}}$  propiamente inmersos.

Es más, cada  $\mathcal{H}$ -onduloide o  $\mathcal{H}$ -nodoide es invariante por una traslación vertical en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es difeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , y está contenido en un entorno tubular del eje  $x_{n+1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La imagen de la aplicación de Gauss de cada  $\mathcal{H}$ -onduloide omite un entorno abierto de los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ . La imagen de la aplicación de Gauss de cada  $\mathcal{H}$ -nodoide es  $\mathbb{S}^n$ .

Cabe destacar que mientras el teorema de Guan-Guan probaba la existencia de esferas estrictamente convexas para  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$ , en el resultado anterior hemos conseguido extender este resultado a  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  bajo la hipótesis de que  $\mathcal{H}$  sea rotacionalmente simétrica.

Las elecciones de  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  fijadas hasta ahora han generado clases de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies cuyos elementos rotacionales se comportan de forma muy similar a los ejemplos que aparecen en teorías ampliamente estudiadas: la de hipersuperficies con curvatura media constante (positiva y cero) y la de solitones de traslación del flujo por curvatura media. En la Sección 2.4 construiremos una gran variedad de  $\mathcal{H}$ -superficies rotacionales en  $\mathbb{R}^3$  para elecciones muy arbitrarias de la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ , las cuales no tienen un análogo en ninguna de las teorías mencionadas anteriormente, mostrando así la diversidad existente en la clase de las  $\mathcal{H}$ -superficies.

Para finalizar este capítulo, en la Sección 2.5 describiremos las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales en el caso en el que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  sea una función lineal, las cuales aparecieron en el estudio de la Sección 1.2. En [Lop], López obtuvo de forma independiente una

descripción similar en el caso en el que el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^3$ . Cabe destacar que las ideas desarrolladas en estas dos últimas secciones para analizar los espacios de fases asociados a cada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , dan herramientas útiles que pueden usarse para clasificar las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales para una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  rotacionalmente simétrica arbitraria.

Una vez enunciadas las propiedades generales de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies y habiendo estudiado en profundidad los ejemplos rotacionales, nos centramos en la teoría global de  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Una de las contribuciones clave en esta teoría fue la dada por Meeks [Mee2], donde se estudió el comportamiento global de las superficies con curvatura media constante positiva propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Algunos de los resultados que probó Meeks fueron los siguientes: no existen superficies con curvatura media constante positiva propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  homeomorfas a una superficie compacta menos un punto; y si una superficie con curvatura media constante positiva propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  es homeomorfa a una superficie compacta menos dos puntos, entonces está contenida en un cilindro sólido. En general, probó que cada *final* de una superficie con curvatura media constante propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ , se encuentra cilíndricamente acotado.

El estudio de Meeks motiva los contenidos del **Capítulo 3**, en el cual nos centraremos en el análisis global de  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Una de las piedras angulares en el trabajo de Meeks fue la existencia de *estimaciones uniformes de altura* para grafos con curvatura media constante positiva, concepto que se puede definir formalmente para  $\mathcal{H}$ -grafos con  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  dada como sigue.

*Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ , y fijemos un cierto  $v \in \mathbb{S}^2$ . Diremos que existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $v$  si existe una constante  $C = C(\mathcal{H}, v) > 0$  tal que la siguiente afirmación se cumple:*

*Para todo  $\mathcal{H}$ -grafo  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  orientado hacia  $v$  (esto es,  $\langle \eta, v \rangle > 0$  en  $\Sigma$ , donde  $\eta$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ ), y con  $\partial\Sigma$  contenido en el plano  $\Pi = v^\perp$ , se tiene*

que la distancia de todo  $p \in \Sigma$  al plano  $\Pi$  es a lo sumo  $C$ .

Notemos que para este caso, la ecuación (1) es isotrópica, esto es, no depende de la dirección  $v$  fijada en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathcal{H} = 0$ , es sabido que estas estimaciones no existen; la mitad de la catenoide es un grafo con borde apoyado en un plano y con crecimiento logarítmico. En particular, la altura de la mitad de la catenoide al plano donde se apoya no está acotada.

En el Capítulo 2 construimos  $\mathcal{H}$ -grafos simplemente conexos, estrictamente convexos asintóticos a un cilindro (véase la figura 2.14) para ciertas funciones  $\mathcal{H} > 0$ , poniendo de manifiesto que la condición  $\mathcal{H} > 0$  no es suficiente para asegurar la existencia de estas estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -superficies para una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  genérica. Debemos hacer hincapié en que para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  fija, los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo dependen de la dirección  $v$  de  $\mathbb{R}^3$  que fijamos, ya que la ecuación (1) no es isotrópica. No obstante, tras un posible cambio de coordenadas euclídeas podemos suponer que el vector  $v$  es el vector vertical  $e_3$ .

En la Sección 3.1, siguiendo las ideas desarrolladas en [RST], daremos la siguiente estimación de curvatura para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

*Sean  $\Lambda, d, \rho$  constantes positivas. Entonces, existe una constante  $C = C(\Lambda, d, \rho) > 0$  de forma que se cumple la siguiente afirmación: Sea  $\Sigma$  una superficie orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , posiblemente con borde no vacío, sean  $\sigma_\Sigma, H_\Sigma, \eta_\Sigma$ , respectivamente, su segunda forma fundamental, su curvatura media y su aplicación de Gauss, y supongamos que*

$$|H_\Sigma| + |\nabla H_\Sigma| \leq \Lambda \quad \text{en } \Sigma.$$

$$\eta_\Sigma(\Sigma) \subset \mathbb{S}^2 \text{ omite un disco esférico de radio } \rho.$$

*Entonces, para todo  $p \in \Sigma_d := \{q \in \Sigma : d_\Sigma(q, \partial\Sigma) \geq d\}$ , se tiene*

$$|\sigma_\Sigma(p)| \leq C.$$

Uno de los conceptos que aparecerán a lo largo de este capítulo es el de  $\mathcal{H}$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ , esto es, una  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  compacta, estrictamente convexa y con

borde, de manera que  $\text{int}(\Sigma_{\mathcal{H}})$  es un  $\mathcal{H}$ -grafo  $x_3 = u(x_1, x_2)$  orientado hacia arriba sobre un disco convexo con regularidad  $C^2$  contenido en  $\mathbb{R}^2$ , y cuya imagen por su aplicación de Gauss es  $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 \geq 0\}$ .

Igualmente, recordemos que dados  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\Pi$  un plano vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y  $\alpha \subset \Pi$  una curva regular y completa, y tal que el cilindro  $\alpha \times \mathbb{R}$  define una  $\mathcal{H}$ -superficie, una condición necesaria y suficiente para que  $\alpha$  sea cerrada es que  $\mathcal{H}(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2 \cap \Pi$  y que se cumpla la condición integral:

$$\int_{\mathbb{S}^2 \cap \Pi} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx = 0.$$

En este caso,  $\alpha$  es estrictamente convexa y acota un dominio compacto  $\Omega_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

En la Sección 3.2 enunciaremos uno de los resultados principales de este capítulo, el Teorema 3.2.2, el cual da condiciones muy generales sobre  $\mathcal{H}$  que garantizan la existencia de estimaciones uniformes de altura para  $\mathcal{H}$ -grafos.

*Dada  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , denotemos por  $S_1 = \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 = 0\}$ ,  $\mathbb{S}_+^2 = \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\}$  y  $\overline{\mathbb{S}_+^2} = \mathbb{S}_+^2 \cup S_1$ . Entonces, cualquiera de las siguientes condiciones sobre  $\mathcal{H}$  implica que existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$ :*

1.  $\int_{S_1} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx \neq 0$ .
2.  $\int_{S_1} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx = 0$ , y existe un grafo  $\Sigma_0$  orientado hacia  $e_3$ , sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que contiene  $\Omega_{\mathcal{H}}$ , y satisfaciendo  $H_{\Sigma_0}(p) > \mathcal{H}(\eta(p))$  para todo  $p \in \Sigma_0 \cap (\Omega_{\mathcal{H}} \times \mathbb{R})$ .
3. Existe una  $\mathcal{H}$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ .
4. Existe alguna  $\mathcal{H}^* \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$  para la cual existe una  $\mathcal{H}^*$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ , con  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$  en  $S^1$  y tal que  $\mathcal{H}^* > \mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}_+^2$ .
5. La función  $\mathcal{H}$  satisface  $\max \mathcal{H} < 2 \min \mathcal{H}|_{S^1}$ .

En la teoría de superficies con curvatura media constante, la posibilidad de aplicar el método de reflexión de Alexandrov nos proporciona estimaciones de altura para

superficies compactas y embebidas, con borde en un plano. En nuestro caso, en virtud del Lema 1.1.5 podemos dar el siguiente corolario.

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , satisfaciendo:

1.  $\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{H}(x_1, x_2, -x_3)$  para todo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ .
2. Existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$  o  $-e_3$ .

Entonces, cualquier  $\mathcal{H}$ -superficie compacta  $\Sigma$ , embebida en  $\mathbb{R}^3$  con  $\partial\Sigma$  contenido en el plano  $x_3 = 0$ , se encuentra contenida en la banda  $|x_3| \leq 2C$  de  $\mathbb{R}^3$ , donde  $C$  es la estimación uniforme de altura que satisfacen los  $\mathcal{H}$ -grafos.

Dedicaremos el resto de la Sección 3.2 a discutir las condiciones suficientes enunciadas en el Teorema 3.2.2, a deducir consecuencias de él y a mostrar casos concretos en los que estas condiciones suficientes se dan. De igual forma, nos apoyaremos en los ejemplos estudiados en la Sección 2.4 para convencernos de que muchas de las condiciones suficientes que damos no pueden relajarse. La Sección 3.3 está dedicada íntegramente a la demostración del Teorema 3.2.2.

Para finalizar este capítulo, en la Sección 3.4 aplicaremos las estimaciones uniformes de altura obtenidas para estudiar  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas con un final. Primero, en el Teorema 3.4.1 recordaremos un resultado clásico de Meeks, conocido como el *lema de separación*, que podemos aplicar en nuestras condiciones a la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies con  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  positiva. Una vez definidos los conceptos de *topología finita* y de *final* de una superficie, en el Teorema 3.4.2 obtendremos el siguiente resultado.

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , la cual satisface:

1.  $\mathcal{H}$  es invariante bajo la reflexión en  $\mathbb{S}^2$  que fija una geodésica  $\mathbb{S}^2 \cap v^\perp$ , para algún  $v \in \mathbb{S}^2$ .

2. Existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en las direcciones  $v$  y  $-v$ .

Entonces, existe una constante  $\Lambda = \Lambda(\mathcal{H}, v) > 0$  tal que la siguiente afirmación se cumple: toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y un final está contenida en la banda abierta de anchura a lo sumo  $\Lambda$  determinada por dos planos paralelos a  $\Pi = v^\perp$ .

Tras probar el Teorema 3.4.2, daremos consecuencias de este resultado imponiendo simetrías añadidas a la función  $\mathcal{H}$ . El resultado que culmina este capítulo es el Teorema 3.4.6.

Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ . Supongamos que  $\mathcal{H}$  es invariante bajo tres reflexiones de  $\mathbb{S}^2$  linealmente independientes.

Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y a lo sumo un final es una traslación de la esfera Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ , definida en el Teorema 1.4.5.

En particular, para estas elecciones de la función  $\mathcal{H}$ , no existen  $\mathcal{H}$ -superficies con topología finita y un final, propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ .

El **Capítulo 4** de esta memoria está dedicado al estudio de la estabilidad de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. En la Sección 4.1 recordaremos las nociones básicas de la estabilidad de las hipersuperficies con curvatura media constante. Este concepto surge al estudiar los funcionales área y volumen de estas hipersuperficies al ser sometidas a *variaciones normales*. El estudio de este problema variacional lleva a definir el conocido *operador de estabilidad* de las hipersuperficies con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , el cual es el operador lineal y elíptico dado por  $L = \Delta_\Sigma + |\sigma_\Sigma|^2$ , donde  $\Delta_\Sigma$  y  $|\sigma_\Sigma|^2$  denotan, respectivamente, el operador de Laplace-Beltrami y la norma al cuadrado de

la segunda forma fundamental de  $\Sigma$ . La noción de estabilidad de estas hipersuperficies está fuertemente ligada a las propiedades espectrales del operador  $\mathcal{L}$ .

El objetivo de la Sección 4.2 es definir un operador de estabilidad para la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. El principal inconveniente para una  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria es que no es conocida una caracterización variacional de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, y por tanto no podemos definir un operador de estabilidad de forma geométrica. No obstante, el operador de estabilidad  $L$  de las hipersuperficies con curvatura media constante aparece de igual forma como el *operador curvatura media linealizado*. Esto es, dada una variación normal con soporte compacto de  $\Sigma$

$$\Psi(p, t) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto p + tf(p)\eta(p),$$

si definimos en cada hipersuperficie para  $t$  fijo  $\Sigma_t := \Psi(p, t)$ ,  $p \in \Sigma$  su curvatura media  $H(t) := H_{\Sigma_t}$ , entonces se tiene:

$$Lf = nH'(0).$$

Motivados por este hecho, en la Proposición 4.2.1 calculamos la linealización de (1) para la familia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, lo cual nos lleva a determinar en la Definición 4.2.2 el operador de estabilidad  $\mathcal{L}$  de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies:

Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $f \in C_0^2(\Sigma)$ , y para cada  $t$  suficientemente pequeño denotemos por  $\Sigma_t$  a la hipersuperficie dada por la variación normal anterior. Definamos  $\widehat{H}(t) := H(t) - \mathcal{H}(\eta_t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $H(t)$  y  $\eta_t$  denotan, respectivamente, la curvatura media y la aplicación de Gauss de cada  $\Sigma_t$ . Entonces,

$$n\widehat{H}'(0) = \mathcal{L}f, \quad \mathcal{L}f := \Delta_\Sigma f + \langle X_{\mathcal{H}}, \nabla_\Sigma f \rangle + |\sigma_\Sigma|^2 f,$$

donde  $X_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  viene dado para cada  $p \in \Sigma$  por  $X_{\mathcal{H}}(p) := n\nabla_{\mathbb{S}^n} \mathcal{H}(\eta(p))$ .

Esta definición coincide con la definición del operador de estabilidad de las hipersuperficies con curvatura media constante, y con el operador de estabilidad de los

solitones de traslación. Sin embargo, en general este operador  $\mathcal{L}$  no es auto-adjunto, y en consecuencia no es susceptible de ser diagonalizable.

En la Sección 4.3 estudiaremos los operadores de Schrödinger generalizados de la forma  $L = \Delta_\Sigma + \langle X, \nabla_\Sigma \cdot \rangle + q$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,  $q \in C^2(\Sigma)$ , definidos sobre una variedad riemanniana abstracta. Aún no siendo auto-adjuntos, la teoría clásica de operadores elípticos asegura que se puede definir un primer valor propio para estos operadores, el cual es el menor número real que resuelve el problema elíptico con condiciones Dirichlet

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada dominio  $\Omega \subset \Sigma$  acotado y regular. En relación con este tipo de operadores, daremos la siguiente definición de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie estable.

*Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , y sea  $\mathcal{L}$  su operador de estabilidad. Diremos que  $\Sigma$  es estable si existe una función positiva  $u \in C^2(\Sigma)$  tal que  $\mathcal{L}u \leq 0$ .*

Dedicaremos el resto de la sección a motivar esta definición escogida de estabilidad, y a generalizar resultados conocidos para el caso en el que  $\mathcal{H}$  es constante. Por ejemplo, probaremos que todos los  $\mathcal{H}$ -grafos son estables, y que no existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas (sin borde) y estables.

En la Sección 4.4 daremos una estimación del radio de una  $\mathcal{H}$ -superficie estable, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , bajo condiciones a priori sobre  $\mathcal{H}$ . Para ello usaremos un lema de Galloway y Schoen [GaSc] sobre operadores de Schrödinger generalizados. Así, obtendremos:

*Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisface en  $\mathbb{S}^2$  la desigualdad*

$$3\mathcal{H}^2 + \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}) + \mathcal{H}\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H} - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}|^2 - \frac{1}{4}(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H})^2 \geq c > 0$$

para alguna constante  $c > 0$ . Entonces, para toda  $\mathcal{H}$ -superficie estable  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , y para todo  $p \in \Sigma$ , se tiene

$$d(p, \partial\Sigma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3c}}.$$

Esta condición para  $\mathcal{H}$  no se puede sustituir por la hipótesis debilitada  $\mathcal{H} > 0$ , ya que en el Capítulo 2 probamos la existencia de numerosos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -grafos (por tanto,  $\mathcal{H}$ -superficies estables) completos. Como consecuencia de esta estimación del radio generalizaremos el hecho conocido de que no existen superficies con curvatura media constante distinta de cero, completas y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ :

Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisfaciendo la condición

$$3\mathcal{H}^2 + \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}) + \mathcal{H}\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H} - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}|^2 - \frac{1}{4}(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H})^2 \geq c > 0,$$

para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -superficies completas y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

De igual forma, si  $\mathcal{H}$  satisface la condición anteriormente enunciada, en el Corolario 4.4.7 daremos una estimación de altura para  $\mathcal{H}$ -grafos en  $\mathbb{R}^3$  en todas las direcciones. El último resultado del capítulo es el Teorema 4.4.8, el cual da una estimación de curvatura para  $\mathcal{H}$ -superficies estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , bajo condiciones sobre  $\mathcal{H}$ :

Sean  $a, c > 0$ . Entonces, existe una constante  $C = C(a, c) > 0$  tal que se cumple la siguiente afirmación: si  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisface

$$|\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}| + |\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}| \leq a$$

en  $\mathbb{S}^2$ , y  $\Sigma$  es cualquier  $\mathcal{H}$ -superficie estable en  $\mathbb{R}^3$  y tal que  $\mathcal{H}$  satisface

$$3\mathcal{H}^2 + \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}) + \mathcal{H}\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H} - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}|^2 - \frac{1}{4}(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H})^2 \geq c > 0.$$

para la constante  $c$ , entonces para todo  $p \in \Sigma$  se cumple la siguiente estimación:

$$|\sigma_{\Sigma}(p)|d_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \leq C.$$

Este teorema está inspirado en los resultados obtenidos por Schoen [[Scho](#)] en el caso  $\mathcal{H} = 0$ , y por Bérard y Hauswirth [[BeHa](#)] en el caso  $\mathcal{H} = H_0 > 0$  constante.

# Capítulo 1

---

## Propiedades básicas de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies

---

*Este capítulo está dedicado al análisis primario de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Probaremos que las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies satisfacen un principio del máximo geométrico y relacionaremos las isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la clase de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies con las simetrías de  $\mathcal{H}$ , lo cual será de gran utilidad al estudiar ejemplos compactos sin borde y la generalización de los famosos teoremas de Alexandrov y Hopf. De forma análoga, caracterizaremos las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies completas con curvatura constante y resolveremos el problema de Björling para la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies, mediante el cual construiremos solitones de traslación con la topología de una banda de Möbius. Para finalizar, daremos un teorema de compacidad para el espacio de las  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura acotada.*

### 1.1. Principios del máximo y de tangencia

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Diremos que una hipersuperficie  $\Sigma$  orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tiene *curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$*  si su función curvatura media  $H_\Sigma$  viene dada

por

$$H_\Sigma(p) = \mathcal{H}(\eta_p), \quad \forall p \in \Sigma, \quad (1.1)$$

donde  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la *aplicación de Gauss* de  $\Sigma$ . A lo largo de esta memoria diremos indistintamente que  $\Sigma$  tiene curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  o que  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie.

Comenzaremos analizando la expresión que adquiere la ecuación (1.1) cuando expresamos la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie alrededor de un punto como un grafo sobre su espacio tangente. Sea pues  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  y  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dado  $p \in \Sigma$  tomamos coordenadas  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  alrededor de  $p$  para las cuales  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$  forman una base ortonormal positivamente orientada, y de forma que  $\partial_{n+1} = \eta_p$  en  $p$ ; aquí  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . En esta situación, podemos ver localmente  $\Sigma$  alrededor de  $p$  como un grafo  $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$  definido en un abierto  $\Omega$  del espacio tangente  $T_p\Sigma$ , tal que  $\Omega$  contiene al origen  $\mathbf{o} \in T_p\Sigma$ . La condición de ser  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie dada por la ecuación (1.1) implica que la función  $u(x_1, \dots, x_n)$  es una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = n\mathcal{H}(Z_u), \quad Z_u := \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \quad (1.2)$$

donde  $\operatorname{div}$  y  $D$  denotan respectivamente los operadores divergencia y gradiente en  $\mathbb{R}^n$ . Esta expresión es *elíptica*, y por tanto nos permitirá disponer de un principio del máximo. Para ello definiremos unos conceptos previos que aparecerán en este estudio.

Consideremos un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , esto es,  $\partial\Omega$  es una unión finita de subvariedades regulares de dimensión  $n-1$  en  $\mathbb{R}^n$ . Un *operador diferencial lineal* de orden 2 sobre  $\Omega$  es una correspondencia  $L : C^k(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{k-2}(\overline{\Omega})$ ,  $k \geq 2$ , de la forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x), \quad (1.3)$$

donde  $a_{ij}, b_i, c \in C^k(\overline{\Omega})$ , la matriz  $(a_{ij})_{ij}$  es simétrica y  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son las coordenadas de  $\Omega$ . Si además la matriz  $(a_{ij})_{ij}$  es definida positiva, diremos que el operador  $L$

es *elíptico*. Denotemos por  $\text{Sim}_n(\mathbb{R})$  al grupo de las matrices simétricas de orden  $n$  con coeficientes reales. Notemos que la ecuación (1.2) podemos escribirla como

$$Q(u) := \langle A(Du), D^2u \rangle - \mathcal{H}(Z_u) = 0, \quad \forall u \in C^k(\bar{\Omega}), \quad (1.4)$$

donde el producto escalar de matrices es el usual  $\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB^t)$ ,  $D^2u$  denota la *matriz hessiana* de la función  $u$ , y la matriz  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Sim}_n(\mathbb{R})$  tiene la expresión en coordenadas  $(p_1, \dots, p_n)$  de  $\mathbb{R}^n$

$$A_{ij} = \frac{1 + p_1^2 + \dots + p_n^2 - p_i^2}{n(1 + p_1^2 + \dots + p_n^2)^{3/2}}, \quad \text{si } i = j,$$

$$A_{ij} = \frac{-p_i p_j}{n(1 + p_1^2 + \dots + p_n^2)^{3/2}}, \quad \text{si } i \neq j.$$

En general, un operador se dice *cuasilineal* si se puede escribir de la forma

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, u, Du), \quad \forall u \in C^k(\bar{\Omega}),$$

donde  $a_{ij}, b$  son funciones de clase  $C^k$  definidas en  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Además, si la matriz  $(a_{ij})_{ij}$  es definida positiva, diremos que el operador  $Q$  es *cuasilineal elíptico*. En particular, en vista de la ecuación (1.4), podemos deducir que el operador curvatura media predeterminada es un operador cuasilineal elíptico. Un resultado clásico de la teoría de operadores elípticos asegura que para cada operador cuasilineal elíptico  $Q$  y para cada par de funciones  $u_1, u_2 \in C^k(\bar{\Omega})$ , existe un operador lineal elíptico  $L$ , dependiendo de  $u_1, u_2$  tal que  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ . Esta propiedad nos permite enunciar el principio del máximo para operadores cuasilineales elípticos.

**Teorema 1.1.1 (Principio del máximo).** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio regular, sea  $Q : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{k-2}(\bar{\Omega})$  un operador cuasilineal elíptico, y consideremos  $u_1, u_2 \in C^k(\bar{\Omega})$  tales que  $Q(u_1) \geq Q(u_2)$  en  $\Omega$ . Entonces,*

1. Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en algún punto interior de  $\Omega$ , la diferencia  $u_1 - u_2$  es constante.

2. Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en algún punto  $x_0 \in \partial\Omega$  entonces, o bien  $u_1 - u_2$  es constante, o bien  $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}(x_0) < \frac{\partial u_2}{\partial \xi}(x_0)$  donde  $\xi$  es el conormal unitario interior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$ .

La prueba de este resultado es una aplicación directa del principio del máximo de Hopf para operadores lineales elípticos, véase por ejemplo [GiTu]. A continuación, vamos a dar una versión geométrica del Teorema 1.1.1, la cual usaremos en numerosas ocasiones a lo largo de esta memoria. Este resultado extiende el conocido principio del máximo en sus versiones interior y frontera para superficies de curvatura media constante. Previamente, necesitamos formalizar el concepto de cuándo una superficie está *localmente a un lado* de otra.

Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos hipersuperficies embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , posiblemente con borde regular. Supongamos que existe  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  y que  $(\eta_1)_p = (\eta_2)_p$ , donde  $\eta_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la aplicación de Gauss de la superficie  $\Sigma_i$ . En tal caso los espacios tangentes  $T_p\Sigma_1$  y  $T_p\Sigma_2$  coinciden y podemos tomar coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$  de forma que  $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}, (\eta_i)_p\}$  sea una base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  positivamente orientada. Igualmente, podemos escribir localmente cada  $\Sigma_i$  alrededor de  $p$  como el grafo orientado hacia  $(\eta_i)_p$  de una función diferenciable  $u_i(x_1, \dots, x_n)$  definida en un abierto  $\Omega_i$  de  $T_p\Sigma_i$  que contiene al origen  $\mathbf{o} \in T_p\Sigma_i$ , y tal que  $u_i(\mathbf{o}) = p$ . Definimos  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ , que es un abierto de  $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$  que contiene al origen  $\mathbf{o}$  y donde están definidas ambas funciones  $u_i$ .

**Definición 1.1.2.** *En las condiciones anteriores, diremos que la superficie  $\Sigma_1$  está por encima de la superficie  $\Sigma_2$  alrededor de  $p$  si  $u_1 \geq u_2$  en  $\Omega$ .*

Cuando no especifiquemos qué superficie está por encima, simplemente diremos que *una superficie se encuentra localmente a un lado de la otra*.

**Lema 1.1.3 (Principio del máximo geométrico).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , y sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , posiblemente con borde regular. Supongamos que se da una de las siguientes condiciones:*

1. Existe  $p \in \text{int}(\Sigma_1) \cap \text{int}(\Sigma_2)$  tal que  $(\eta_1)_p = (\eta_2)_p$ , donde  $\eta_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ .
2. Existe  $p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$  tal que  $(\eta_1)_p = (\eta_2)_p$ , y  $(\xi_1)_p = (\xi_2)_p$ , donde  $\xi_i$  es el conormal interior de  $\partial\Sigma_i$ .

Supongamos además que  $\Sigma_1$  se encuentra a un lado de  $\Sigma_2$  alrededor de  $p$ . Entonces,  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .

En la teoría de hipersuperficies con curvatura media constante  $H$ , los casos  $H = 0$  y  $H > 0$  tienen diferencias muy notables. Por ejemplo, no existen superficies mínimas compactas y sin borde, al contrario que en el caso de curvatura media constante positiva. Otra diferencia significativa es que las superficies mínimas no pueden ser tangentes en un punto interior, ya que el Lema 1.1.3 asegura que dos superficies mínimas tangentes en un punto interior han de coincidir; la condición  $H = 0$  permite cambiar la orientación de las superficies involucradas, haciendo que tengan la misma orientación en cualquier punto de tangencia interior sin variar el valor de la curvatura media. Para  $H > 0$  este comportamiento no se mantiene, ya que dos esferas con la misma curvatura media constante pueden ser tangentes en un punto interior de ambas. En tal punto los normales unitarios tienen la orientación opuesta, sin llegar a contradecir el Lema 1.1.3.

En el caso de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies podemos intuir un comportamiento análogo para ciertas funciones  $\mathcal{H}$ . Como hemos puesto de manifiesto, la particularidad del caso  $H = 0$  radica en la posibilidad de invertir la orientación de la superficie sin variar el valor de la curvatura media. Si queremos un comportamiento similar para una función arbitraria  $\mathcal{H}$ , es natural imponer la condición  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ . Para esta familia de funciones, en las que  $\mathcal{H} \equiv 0$  está incluida, el Lema 1.1.3 es similar al principio de tangencia para superficies mínimas.

**Corolario 1.1.4 (Principio de tangencia).** Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  satisfaciendo  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x) \forall x \in \mathbb{S}^n$ , y sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Supongamos que existe  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  con  $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$  y tal que  $\Sigma_1$  queda localmente a un lado de  $\Sigma_2$  alrededor de  $p$ . Entonces,  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .

Nos centramos ahora en las isometrías euclídeas que preservan la propiedad de ser una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie. Por ejemplo, es inmediato que cualquier traslación de una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie es de nuevo una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie. En general, las posibles simetrías de la función  $\mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}^n$  inducen isometrías en la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, tal y como detallamos en el siguiente lema.

**Lema 1.1.5.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y sea  $\Phi$  una isometría lineal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\mathcal{H} \circ \Phi = \mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}^n$ . Entonces,  $\tilde{\Sigma} = \Phi \circ \Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie con respecto a la orientación dada por  $\tilde{\eta} = d\Phi(\eta)$ .*

En general, para una función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria las únicas isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la condición de ser una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie son las traslaciones. Esto a priori supone un problema a la hora de trabajar con argumentos geométricos, ya que nos impide aplicar isometrías a las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies tales como reflexiones respecto de hiperplanos y rotaciones respecto de un eje. Sin embargo, esta definición tan arbitraria de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie se convierte en una ventaja cuando nos proponemos generalizar este concepto a otros espacios ambiente. En este contexto, la noción de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie se puede definir en hipersuperficies orientadas en un grupo de Lie  $G$ , dotado de una métrica *invariante a izquierda*.

En efecto, sea  $\psi : \Sigma \rightarrow G$  una hipersuperficie inmersa en un grupo de Lie de dimensión  $n + 1$ , y supongamos que existe  $\eta : \Sigma \rightarrow TG$  un campo de vectores normal y unitario. Denotemos por  $e$  al elemento identidad de  $G$ , y por  $\mathfrak{g}$  al espacio tangente en la identidad,  $T_eG$ , el cual es conocido como el *álgebra de Lie* de  $G$ . Dado  $p \in G$ , se define la *traslación a izquierda por  $p$*  como el difeomorfismo  $l_p : G \rightarrow G$ ,  $l_p(q) = pq$  para todo  $q \in G$ , donde la concatenación  $pq$  indica la operación en  $G$ . En esta situación, podemos extender el campo normal unitario  $\eta$  a un único campo invariante izquierda  $\mathcal{G} : \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$ . La forma de definir el campo de vectores  $\mathcal{G}$  viene dado en coordenadas por

$$\mathcal{G}_p = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \eta_p, (E_i)_p \rangle E_i, \quad \forall p \in \Sigma,$$

siendo  $\{E_i\}_{i=1, \dots, n+1}$  una base ortonormal de  $\mathfrak{g}$ , y  $(E_i)_p = (dl_p)_e(E_i)$ . La aplicación  $\mathcal{G} : \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$  es conocida como la *aplicación de Gauss invariante a izquierda* de  $\Sigma$ . Cla-

ramente,  $\mathcal{G}$  toma valores en la esfera unidad del álgebra de Lie  $\mathbb{S}_{\mathfrak{g}}^n = \{v \in \mathfrak{g}; |v| = 1\}$ . En [DaMi, MePe, MMPR1, MMPR2] y sus referencias, el lector puede encontrar un desarrollo general de la teoría de superficies con curvatura media constante inmersas en grupos de Lie tridimensionales dotados de una métrica riemanniana invariante izquierda.

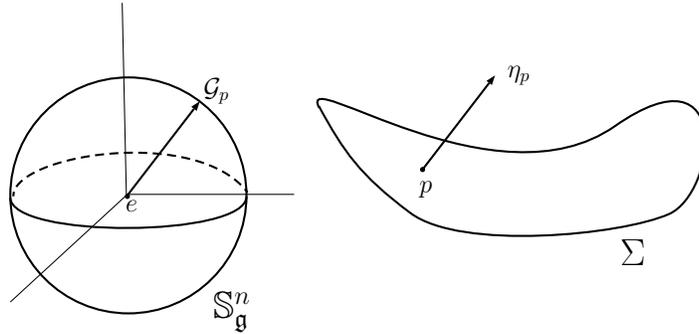


Figura 1.1: Representación de una superficie inmersa en un grupo de Lie y de la identificación del normal unitario en un punto con un elemento de la esfera unidad del álgebra de Lie del grupo.

Las técnicas desarrolladas en esta memoria nos han permitido extender la teoría de las  $\mathcal{H}$ -superficies a los espacios producto  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , donde hemos estudiado y clasificado  $\mathcal{H}$ -superficies rotacionales y hemos obtenido resultados de estructura para  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas con topología finita (ver [Bue1, Bue4, Bue5]).

## 1.2. Un caso particular: solitones de traslación

Consideremos el caso en el que la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es una función lineal, es decir  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, v \rangle + b$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{S}^n$ . Notemos que en el caso particular en el que  $a = 0$ , la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no es más que la clase de hipersuperficies con curvatura media constante  $b$ . Por tanto, nos restringimos al caso  $a \neq 0$ , y sin perder generalidad tras una homotecia y un cambio de coordenadas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  podemos suponer

que  $a = 1$  y  $v = e_{n+1}$ . En estas condiciones, la función  $\mathcal{H}$  tiene la expresión

$$\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle + b. \quad (1.5)$$

Sea  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa y orientada para  $\mathcal{H}$  dada por la ecuación (1.5), sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su normal unitario y consideremos las traslaciones verticales de  $\psi$  en la dirección  $e_{n+1}$  dadas por  $F(p, t) = p + te_{n+1}$ . Entonces, la familia de inmersiones  $F(p, t)$  es una solución para el siguiente flujo geométrico, que corresponde al flujo por curvatura media con un término corrector constante:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)^\perp = (H_t - b)\eta_t, \quad (1.6)$$

donde  $H_t = H(\cdot, t)$ ,  $\eta_t = \eta(\cdot, t)$  denotan la curvatura media y la aplicación de Gauss respectivamente de cada hipersuperficie  $F(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . En otras palabras,  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es un solitón de traslación para el flujo dado por (1.6). Notemos que para el caso  $b = 0$ , el flujo (1.6) no es más que el flujo por curvatura media clásico en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El recíproco es también cierto, esto es, todo solitón de traslación para el flujo (1.6) es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie para la función  $\mathcal{H}$  dada por (1.5).

Los solitones de traslación aparecen en la teoría de singularidades del flujo por curvatura media de  $\mathbb{R}^3$  como la ecuación límite tras un argumento de blow-up alrededor de singularidades del tipo II [HuSi]. En los últimos años, la teoría de solitones de traslación del flujo por curvatura media en  $\mathbb{R}^{n+1}$  se ha convertido en un campo de investigación fructífero, atrayendo la atención de numerosos geómetras. El lector puede encontrar en [CSS, Hui1, Hui2, Ilm, MPGSHS, MSHS] una recopilación de algunos de los principales trabajos relacionados con estas superficies.

Podemos dar otra caracterización para las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies cuya función predefinida  $\mathcal{H}$  viene dada por (1.5). Para ello tenemos que definir el concepto *curvatura media con peso* en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con una densidad  $e^\phi$  introducido por [Gro], véase también [BCMR].

**Definición 1.2.1.** *Sea  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  una hipersuperficie orientable inmersa, y sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su aplicación de Gauss. Se define la curvatura media con peso de  $\Sigma$  con*

respecto de la densidad  $e^\phi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$  como

$$H_\phi = nH_\Sigma - \langle \eta, D\phi \rangle, \quad (1.7)$$

donde  $H_\Sigma$  es la curvatura media de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $D$  es el gradiente en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Por tanto, la ecuación (1.7) junto con las discusiones anteriores nos permiten enunciar el resultado:

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie para  $\mathcal{H}$  dada por la ecuación (1.5) para cierto  $b \in \mathbb{R}$ .
2.  $\Sigma$  es un solitón de traslación del flujo por curvatura media con un término corrector constante (1.6).
3.  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H_\phi = nb \in \mathbb{R}$  para la densidad  $e^\phi$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , donde  $\phi(x) := n\langle x, e_{n+1} \rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

La clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para  $\mathcal{H}$  de la forma (1.5) está relacionada con el flujo por curvatura media que preserva el volumen introducido por Huisken [Hui2]. De forma específica, sea  $\Sigma$  una hipersuperficie compacta (posiblemente con borde no vacío) en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Siguiendo la notación de la ecuación (1.6), este flujo viene dado por

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)^\perp = (H_t - \bar{H}_t)\eta_t, \quad (1.8)$$

con

$$\bar{H}_t = \frac{1}{V_t} \int_{\Sigma_t} H(\cdot, t) dV_t,$$

y donde  $\Sigma_t = F(\cdot, t)$  y  $V_t$  denota el volumen de  $\Sigma_t$ .

En el caso particular de que la variación venga dada por traslaciones verticales, es decir  $\Sigma_t = \Sigma + te_{n+1}$ , el volumen  $V_t$  es constante y por tanto  $\bar{H}_t$  es una cierta constante

$b$ , de forma que cada  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  con  $\mathcal{H}$  de la forma (1.5) es un solitón de traslación para el flujo (1.8).

El caso  $b = 0$  correspondiente a los solitones de traslación difiere notablemente del caso  $b \neq 0$ . Esto es porque los solitones de traslación son superficies mínimas en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  para la densidad  $e^{nx_{n+1}}$ , en vista de la ecuación (1.7). En particular, los solitones de traslación se comportan como las superficies mínimas en el sentido de que no pueden tener un punto interior de tangencia. Este comportamiento se puede igualmente deducir del Corolario 1.1.4 tomando como función  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle$ , la cual corresponde al caso  $b = 0$  en la ecuación (1.5).

### 1.3. $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas en $\mathbb{R}^{n+1}$

Como ya hemos mencionado, no existen hipersuperficies mínimas compactas sin borde en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ya que de existir ésta tendría un punto interior de tangencia con un hiperplano en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , lo cual sería contradictorio con el Corolario 1.1.4. Sin embargo, para cada constante  $H_0 > 0$  existe una esfera con curvatura media constante igual a  $H_0$ . La siguiente proposición exhibe un comportamiento similar en el caso de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, dando una condición *necesaria* sobre  $\mathcal{H}$  para la existencia de una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  y supongamos que  $\mathcal{H}(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{S}^n$ . Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas, inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demostración.* La demostración la haremos por reducción al absurdo. Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  con  $\mathcal{H}(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{S}^n$ , y sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta sin borde. Salvo un cambio de coordenadas euclídeas, podemos suponer que el vector  $x_0$  es el vector  $e_{n+1}$ . Consideremos la familia de hiperplanos  $\{x_{n+1} = c\}$ . Por ser  $\Sigma$  compacta, existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\Sigma$  se encuentra contenida en el semiespacio  $\{x_{n+1} \leq c_0\}$  y de forma que  $\Sigma$  interseca al hiperplano  $\{x_{n+1} = c_0\}$  de forma tangente en algún punto  $p \in \Sigma$ , en el cual  $\eta_p = \pm e_{n+1}$ ; aquí  $\eta$  denota como de costumbre a la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ .

Si  $\eta_p = e_{n+1}$  entonces  $\Sigma$  y  $\{x_{n+1} = c_0\}$  tendrían que coincidir en virtud del Lema 1.1.3, ya que tanto  $\Sigma$  como  $\{x_{n+1} = c_0\}$  con la orientación dada por su normal unitario  $e_{n+1}$  son  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Esto es una contradicción, ya que  $\Sigma$  es compacta, al contrario que  $\{x_{n+1} = c_0\}$ . Por tanto, necesariamente  $\eta_p = -e_{n+1}$ . Al estar  $\Sigma$  por debajo de  $\{x_{n+1} = c_0\}$  alrededor de  $p$ , el principio de comparación de hipersuperficies implica que las curvaturas principales en  $p$ ,  $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$ , son todas no negativas. En particular, se tiene que  $H_\Sigma(p) > 0$ , ya que si  $H_\Sigma(p) = 0$  entonces  $\mathcal{H}(-e_{n+1}) = 0$ , y el hiperplano  $\{x_{n+1} = c_0\}$  con orientación dada por  $-e_{n+1}$  sería una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, contradiciendo de nuevo el Lema 1.1.3.

De nuevo, la compacidad de  $\Sigma$  asegura la existencia de un cierto  $c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1 < c_0$  de forma que  $\Sigma$  se encuentra contenida en el semiespacio  $\{x_{n+1} \geq c_1\}$  y de forma que  $\Sigma$  interseca al hiperplano  $\{x_{n+1} = c_1\}$  de forma tangente en algún punto  $q \in \Sigma$ , en el cual  $\eta_q = \pm e_{n+1}$ . El mismo argumento que el expuesto en el párrafo anterior nos permite concluir que  $\eta_q = -e_{n+1}$ . Por una parte, se tiene que  $H_\Sigma(q) = \mathcal{H}(-e_{n+1}) = H_\Sigma(p) > 0$ . Por otra parte, el principio de comparación de hipersuperficies asegura que las curvaturas principales en  $q$ ,  $\kappa_1(q), \dots, \kappa_n(q)$ , son todas no positivas. En particular,  $H_\Sigma(q) \leq 0$  lo cual es una contradicción con que  $H_\Sigma(q) > 0$ .

Esta contradicción prueba la Proposición 1.3.1. □

La Proposición 1.3.1 restringe la familia de funciones  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  a considerar si nos planteamos el estudio de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas, ya que es necesario que  $\mathcal{H}$  tenga signo constante en  $\mathbb{S}^n$ . Tras cambiar la orientación si es necesario, podemos suponer que  $\mathcal{H} > 0$  en  $\mathbb{S}^n$ . Podríamos pensar que tal y como ocurre en la teoría de superficies con curvatura media constante positiva, para toda función  $\mathcal{H} > 0$  existen ejemplos compactos en la familia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Sin embargo, esta condición no es suficiente. Para convencernos de esta afirmación, consideremos una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  compacta e inmersa, para cierta  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , tomemos  $v \in \mathbb{S}^n$  y denotemos por  $h = \langle \psi, v \rangle$ . Un resultado conocido en la teoría de hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  asegura que la función  $h$  satisface la ecuación en derivadas parciales  $\Delta_\Sigma h = nH_\Sigma \langle \eta, v \rangle$ , donde  $\Delta_\Sigma$  es el operador de *Laplace-Beltrami* en  $\Sigma$  y  $\eta$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ .

Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_{\Sigma} \langle \eta, v \rangle \mathcal{H}(\eta) = 0.$$

Esta ecuación, junto al hecho de que la función  $\langle \eta, v \rangle$  satisface la fórmula integral  $\int_{\Sigma} \langle \eta, v \rangle = 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{S}^n$ , si  $\Sigma$  es compacta, tienen como consecuencia el siguiente corolario:

**Corolario 1.3.2.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función de la forma  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_0(x) + b$ , donde  $b \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{H}_0 \in C^1(\mathbb{S}^n)$  no es idénticamente cero y satisface  $\mathcal{H}_0(x) \langle x, v \rangle \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$  y para algún  $v \in \mathbb{S}^n$ . Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Un ejemplo de funciones en las condiciones del Corolario 1.3.2 viene dado por  $\mathcal{H}(x) = \langle x, v \rangle + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . En particular, si  $b > 1$  la función  $\mathcal{H}$  es positiva pero no existen para esta elección  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas. Como hemos visto en la Sección 1.2, estas  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies tienen curvatura media con peso constante respecto de la densidad  $e^{n\mathcal{H}}$ . El Corolario 1.3.2 para superficies con curvatura media con peso constante fue probado por Rafael López en [Lop].

## 1.4. Los teoremas de Alexandrov y Hopf para $\mathcal{H}$ -superficies

En la teoría global de superficies con curvatura media constante  $H > 0$ , uno de los resultados más recurrentes es el de dar caracterizaciones de la  $H$ -esfera  $\mathcal{S}_H$  como la única superficie con curvatura media  $H$  (salvo isometrías euclídeas), bajo ciertas condiciones topológicas. Uno de los pilares de esta teoría global es el conocido *teorema de Alexandrov*, cuyo enunciado damos a continuación:

**Teorema 1.4.1 (Alexandrov, [Ale]).** *Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie compacta con curvatura media constante  $H > 0$ , embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces,  $\Sigma$  es una esfera totalmente umbilical  $\mathcal{S}_H$  de radio  $1/H$ .*

El teorema de Alexandrov no es solo importante por la caracterización de la esfera en sí, sino por la forma de demostrar el resultado. El método empleado por Alexandrov

para probar el Teorema 1.4.1 fue una aplicación perspicaz del principio del máximo geométrico 1.1.3 para hipersuperficies con curvatura media constante embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta herramienta ha sido usada tanto en geometría diferencial como en ecuaciones en derivadas parciales de forma extensa por un gran número de autores. Es tal la relevancia que en la literatura se conoce este procedimiento geométrico como *método de reflexión de Alexandrov*. En palabras de Hopf [Hop, p. 147]

*“En mi opinión, esta demostración de A.D. Alexandrov (...) abre nuevos aspectos importantes en la geometría diferencial global.”*

El principal problema al intentar generalizar el teorema de Alexandrov 1.4.1 es la pérdida de simetrías de la ecuación (1.1) para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria. En general, no podremos reflejar con respecto de hiperplanos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  manteniendo invariante la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Dado  $v \in \mathbb{S}^n$ , denotemos por  $\Pi_v$  al hiperplano vectorial con vector normal  $v$ , y sea  $R_v$  la reflexión en  $\mathbb{R}^{n+1}$  respecto de  $\Pi_v$ . En virtud del Lema 1.1.5, si  $\mathcal{H}$  es invariante por la reflexión  $R_v$  entonces las reflexiones en  $\mathbb{R}^{n+1}$  respecto de hiperplanos afines paralelos a  $\Pi_v$  preservan la clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. La siguiente proposición es una extensión del Teorema 1.4.1 a la familia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, supuesto que la función  $\mathcal{H}$  es suficientemente simétrica.

**Proposición 1.4.2 (Teorema de Alexandrov para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función invariante con respecto a  $n$  reflexiones linealmente independientes  $R_1, \dots, R_n$  de  $\mathbb{S}^n$  que fijan  $n$  geodésicas en  $\mathbb{S}^n$ . Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  compacta, embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ . Es más,  $\Sigma$  es un bigrafo simétrico respecto a hiperplanos  $\hat{\Pi}_1, \dots, \hat{\Pi}_n$  paralelos a los hiperplanos  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  fijados por  $R_i$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $v_1, \dots, v_n$  a los vectores normales y unitarios a los hiperplanos  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  (aquí la orientación  $\pm v_i$  es indiferente). Tras aplicar el método de reflexión de Alexandrov clásico con respecto de estas direcciones, los Lemas 1.1.4 y 1.1.5 implican que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Sigma$  es un bigrafo simétrico con respecto a algún hiperplano  $\hat{\Pi}_i$  paralelo a  $\Pi_i$ . Definimos ahora la línea recta en  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$\Gamma = \cap_{i=1}^n \widehat{\Pi}_i$ . Tras un cambio de coordenadas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , podemos suponer que  $\Gamma$  es el eje  $x_{n+1}$ , y por tanto cada  $v_i$  es un vector horizontal.

Denotemos por  $P_t = \{x_{n+1} = t\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  la familia de hiperplanos horizontales a altura  $t$ . Al ser  $\Sigma$  compacta, existe un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  tal que  $P_t \cap \Sigma = \emptyset$  si  $t \notin [a, b]$ . Por ser  $\Sigma$  un bigrafo conexo con respecto a las direcciones  $v_1, \dots, v_n$ , es claro que  $P_a \cap \Sigma = \{(\mathbf{0}, a)\}$  y  $P_b \cap \Sigma = \{(\mathbf{0}, b)\}$ , y  $P_t \cap \Sigma$  es una intersección no vacía y transversa para todo  $t \in (a, b)$ . La notación  $(\mathbf{0}, a)$  se refiere al punto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuyas  $n$  primeras coordenadas son idénticamente nulas, y la última es igual al valor  $a$ .

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  el dominio acotado por  $\Sigma$  (tal dominio existe por el teorema de Jordan-Brouwer, al ser  $\Sigma$  compacta y embebida), y definamos  $\Omega_t = \Omega \cap P_t$ ,  $t \in (a, b)$ . Para  $t < b$  suficientemente cerca de  $b$ ,  $\Omega_t$  es difeomorfo a una bola de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{B}^n$ . Como la intersección  $P_t \cap \Sigma$  es transversa para todo  $t \in (a, b)$ , deducimos que la intersección  $\Omega_t$  es difeomorfa a  $\mathbb{B}^n$  para todo  $t \in (a, b)$ . Esto implica que  $\Omega$  tiene la topología de  $\mathbb{B}^{n+1}$  y por tanto,  $\Sigma$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

El principio de reflexión de Alexandrov ha sido generalizado a funcionales más arbitrarios definidos sobre hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para probar no solo teoremas de caracterización de la esfera, sino también teoremas de unicidad y no existencia. En general, sea  $\mathcal{W}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{n+1})$  una función definida en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ , simétrica en las variables  $x_i$  y de clase  $C^1$ . Usaremos la notación  $(x, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  para referirnos a un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y un punto  $z \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . La *clase de hipersuperficies modeladas por  $\mathcal{W}$*  es el conjunto  $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$  de hipersuperficies orientadas, inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido de la siguiente forma: una hipersuperficie  $\Sigma$  pertenece a  $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$  si para cada  $p \in \Sigma$

$$\mathcal{W}(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p), \eta_p) = 0, \quad (1.9)$$

donde  $\kappa_1, \dots, \kappa_n : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  son las curvaturas principales de  $\Sigma$  y  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es su aplicación de Gauss. Consideremos ahora una isometría afín  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por una parte, es claro que  $\widetilde{\Sigma} := \Phi(\Sigma)$  es una hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; de hecho, al ser  $\Phi$  una isometría, para cada  $p \in \Sigma$  las curvaturas principales en cada  $\widetilde{p} = \Phi(p) \in \widetilde{\Sigma}$  cumplen  $\widetilde{\kappa}_i(\widetilde{p}) = \kappa_i(p)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por otra parte, la hipersuperficie  $\widetilde{\Sigma}$  tiene como

aplicación de Gauss  $\tilde{\eta} = d\Phi(\eta)$ . Supongamos  $\mathcal{W}$  satisfice

$$\mathcal{W}(x, d\Phi(z)) = \mathcal{W}(x, z), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{S}^n.$$

Entonces, la función  $\mathcal{W}$  se dice *invariante por la isometría*  $\Phi$ , y en particular, para cada  $p \in \Sigma$  se tiene

$$\mathcal{W}(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p), d\Phi_p(\eta_p)) = \mathcal{W}(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p), \eta_p).$$

En tal caso, la hipersuperficie  $\tilde{\Sigma}$  con aplicación de Gauss  $\tilde{\eta}$  está también modelada por  $\mathcal{W}$ . Esto se puede ver como una extensión del Lema 1.1.5, para hipersuperficies modeladas por un funcional arbitrario.

Supongamos que expresamos  $\Sigma$  alrededor de  $p$  como el grafo de una función  $u$  definida en un abierto  $\Omega$  de  $T_p\Sigma$ . Entonces, la función  $u$  es solución a la ecuación (1.9), la cual tendrá la expresión

$$F(x_1, \dots, x_n, u, Du, D^2u) = 0, \quad (1.10)$$

para cierta  $F$  de clase  $C^1$  dependiendo de las coordenadas  $x_i$ , de la función  $u$ , del gradiente  $Du$  y del Hessiano  $D^2u$ . Las ecuaciones en derivadas parciales de la forma (1.10) se conocen en la literatura como *ecuaciones en derivadas parciales completamente no lineales*. La función  $F$  está definida en el espacio  $\Lambda = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ , donde  $\text{Sim}_n(\mathbb{R})$  denota el espacio de las matrices simétricas de orden  $n$  con coeficientes reales. En estas condiciones,  $F$  se dice *elíptico* si  $F$  es diferenciable respecto de la variable  $r$ , y para cada  $\gamma = (x, u, p, r) \in \Lambda$  se tiene que la matriz  $F_r(\gamma) := (F_{r_{ij}}(\gamma))_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  es definida positiva, véase [Tru].

Supongamos que  $\mathcal{W}$  es de tipo elíptico e invariante por una reflexión de  $\mathbb{R}^{n+1}$  respecto de un hiperplano  $\Pi$  que deja fija una geodésica de la esfera  $\mathbb{S}^n$ . En estas condiciones, el método de reflexión de Alexandrov se podrá aplicar a la clase  $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$  respecto de hiperplanos afines paralelos a  $\Pi$ .

Notemos que en nuestro caso particular, el funcional  $\mathcal{W}$  viene dado por

$$\mathcal{W}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) - \mathcal{H}(z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Otra caracterización de la esfera que supuso un hito en la teoría global de superficies con curvatura media constante, es la obtenida por Hopf [Hop].

**Teorema 1.4.3 (Hopf, [Hop]).** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, con curvatura media constante  $H > 0$  y de género 0, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $\Sigma$  es una esfera totalmente umbilical de radio  $1/H$ .*

En su demostración, Hopf asoció de forma geométrica a cada superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  una *diferencial cuadrática* globalmente definida y que se anula exactamente sobre puntos umbilicales. La idea clave es que esta diferencial es holomorfa en superficies con curvatura media constante, como consecuencia de la ecuación de Codazzi para superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Pero es un hecho conocido en la teoría de la variable compleja que toda diferencial cuadrática holomorfa en una esfera es idénticamente nula, y por tanto la esfera ha de ser una esfera totalmente umbilical de radio  $1/H$ . A la diferencial cuadrática holomorfa definida por Hopf se la conoce en la actualidad como *diferencial de Hopf*.

Los teoremas de Hopf y de Alexandrov no solo difieren por los métodos usados en cada demostración, sino también en las hipótesis de sus enunciados. Primero, observamos que el espacio ambiente en el teorema de Hopf es  $\mathbb{R}^3$  y no un espacio euclídeo de dimensión arbitraria, tal y como ocurre con el teorema de Alexandrov. Esto es porque en dimensiones mayores a 3, el teorema de Hopf deja de ser cierto. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^4$  existen inmersiones de la esfera  $\mathbb{S}^3$  con curvatura media constante que se autointersecan [Hsi].

Otra de las hipótesis que cambia es la topología de la superficie. En el teorema de Alexandrov se pide que la hipersuperficie esté embebida, para que el método de reflexión de Alexandrov funcione. En general, el método de reflexión de Alexandrov es aplicable a las hipersuperficies conocidas como *Alexandrov embebidas*<sup>1</sup>, las cuales pueden tener

---

<sup>1</sup>Una hipersuperficie compacta  $\Sigma$  se dice Alexandrov embebida por medio de una inmersión  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  si existe una  $(n+1)$ -variedad compacta  $\Omega$  con  $\partial\Omega = \Sigma$  y una inmersión  $\tilde{\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\tilde{\psi}|_{\Sigma} = \psi$ .

autointersecciones, pero no para hipersuperficies con intersecciones arbitrarias. En el teorema de Hopf la hipótesis de embebimiento se relaja a inmersión, pero se pide que la superficie tenga género 0. Esta hipótesis, que puede parecer muy restrictiva, es totalmente necesaria; Wente [Wen] probó la existencia de toros con curvatura media constante inmersos en  $\mathbb{R}^3$ .

En la literatura, una *diferencial de tipo Hopf* es una diferencial cuadrática definida de forma geométrica sobre una superficie, y un *teorema de tipo Hopf* es un resultado de unicidad de esferas inmersas dentro de una clase de superficies. Un teorema de tipo Hopf tremendamente general para superficies modeladas por un funcional elíptico dependiendo de las curvaturas principales y de su normal unitario en grupos de Lie de dimensión 3, se puede encontrar en los trabajos [GaMi4, GaMi5]. El siguiente caso particular nos da un teorema de tipo Hopf para la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 1.4.4 (Gálvez–Mira, [GaMi4, GaMi5]).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^0(\mathbb{S}^2)$  y supongamos que existe una  $\mathcal{H}$ -esfera  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y de género 0, inmersa en  $\mathbb{R}^3$  es una traslación de  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .*

La hipótesis “estrictamente convexa” no se puede relajar a ser únicamente “convexa”. Para convencernos de esta afirmación, consideremos dos cilindros  $C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, -i \leq z \leq i\}$ ,  $i = 1, 2$ , y sea  $G$  un grafo rotacional convexo  $z = z(x, y)$  definido sobre el disco  $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  y con  $z(\partial\bar{D}) = 0$ . Definimos  $\Sigma_i = C_i \cup G_i \cup (-G_i)$ , donde  $G_i = G + ie_3$ ,  $i = 1, 2$  denota la traslación vertical del grafo  $G$  y supongamos que las  $\Sigma_i$  son superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$ , véase la Figura 1.2.

Claramente,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son difeomorfas para cierta aplicación  $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  que satisface para cada  $p \in \Sigma_1$ :

1. El normal unitario de  $\Sigma_1$  en  $p$  coincide con el normal unitario de  $\Sigma_2$  en  $\phi(p)$ .
2. Las curvaturas principales de  $\Sigma_1$  en  $p$  coinciden con las curvaturas principales de  $\Sigma_2$  en  $\phi(p)$ .

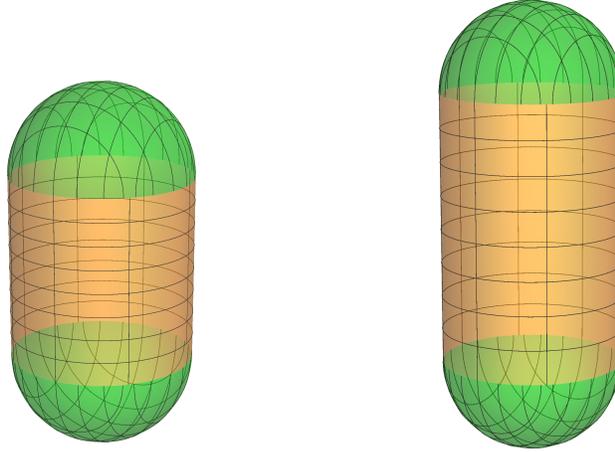


Figura 1.2: Las  $\mathcal{H}$ -esferas  $\Sigma_i$  convexas, pero no estrictamente convexas. Ambas esferas son difeomorfas, pero no difieren en una isometría en  $\mathbb{R}^3$ .

En particular, las superficies  $\Sigma_1, \Sigma_2$  son dos esferas topológicas convexas, cuyas curvaturas medias dependen de forma continua de la misma curvatura media predeterminada, pero que no difieren por una traslación de  $\mathbb{R}^3$ .

Para poder aplicar este teorema de unicidad tenemos que restringirnos a funciones positivas, en virtud de la Proposición 1.3.1. De todas formas, el Corolario 1.3.2 pone de manifiesto que esta condición no es suficiente para asegurar la existencia de ejemplos compactos, y menos aún de esferas.

Tal y como hemos puesto de manifiesto en la introducción, en [GuGu] los autores probaron el siguiente resultado de existencia de  $\mathcal{H}$ -esferas, bajo ciertas condiciones sobre  $\mathcal{H}$ :

**Teorema 1.4.5 (Guan–Guan, [GuGu]).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  una función positiva. Supongamos que  $\mathcal{H}$  es invariante por un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^n$  sin puntos fijos. Entonces, existe una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

A la  $\mathcal{H}$ -esfera dada por el teorema de Guan-Guan la llamaremos *esfera de Guan-Guan* y la denotaremos por  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .

Un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^n$  en las condiciones del Teorema 1.4.5 es el dado por  $\{1_{\mathbb{S}^n}, -1_{\mathbb{S}^n}\}$ . La imagen de un punto  $p \in \mathbb{S}^n$  bajo este grupo de isometrías no es más que el punto *antípoda*  $-p \in \mathbb{S}^n$ . Por tanto, una función  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  invariante por tal grupo de isometrías tiene que cumplir necesariamente  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ , esto es,  $\mathcal{H}$  es *antipodalmente simétrica*. Otro grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^n$ , en las condiciones del Teorema 1.4.5, de especial interés es el siguiente: consideremos los  $n + 1$  hiperplanos coordenados  $\Pi_i$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sean  $R_i$  las  $n + 1$  reflexiones en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que  $R_i(\Pi_i) = \Pi_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ . Si hacemos actuar todas las reflexiones sobre un cierto  $p \in \mathbb{S}^n$ , la imagen obtenida vuelve a ser el punto antípoda  $-p \in \mathbb{S}^n$ . Si  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  es invariante por este grupo de isometrías<sup>2</sup>, la esfera de Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  es simétrica con respecto a (una traslación de) cada hiperplano coordenado  $\Pi_i$ . Si  $n = 2$ , la esfera de Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  es la única  $\mathcal{H}$ -esfera inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , como consecuencia directa del Teorema 1.4.4.

Combinando la Proposición 1.4.2 y los Teoremas 1.4.4 y 1.4.5, en el siguiente resultado damos una extensión del teorema de Alexandrov para funciones  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  muy generales.

**Corolario 1.4.6.** *Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y embebida en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  es positiva e invariante por un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  sin puntos fijos que contiene dos reflexiones geodésicas linealmente independientes de  $\mathbb{S}^2$ . Entonces,  $\Sigma$  es una traslación de la esfera de Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .*

*Demostración.* Por ser  $\mathcal{H}$  positiva e invariante por un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  sin puntos fijos, el Teorema 1.4.5 implica que existe una  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$ , correspondiente a la esfera Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ . Tal esfera es la única  $\mathcal{H}$ -esfera inmersa en  $\mathbb{R}^3$  en virtud del Teorema 1.4.4.

---

<sup>2</sup>En particular, ya el grupo  $\{1_{\mathbb{S}^n}, -1_{\mathbb{S}^n}\}$  está contenido en este grupo de isometrías, se tiene  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ .

Por otra parte, sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Por ser  $\mathcal{H}$  simétrica respecto de dos reflexiones geodésicas independientes de  $\mathbb{S}^2$ , la Proposición 1.4.2 implica que  $\Sigma$  es difeomorfa a una esfera, y por tanto única de nuevo por el Teorema 1.4.4.  $\square$

Algunos grupos de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  que cumplen las hipótesis del corolario anterior son aquellas generadas por reflexiones respecto a tres geodésicas linealmente independientes de  $\mathbb{S}^2$ . En particular, los grupos de isometrías de  $\mathbb{S}^2$  que dejan invariante un solido platónico inscrito en  $\mathbb{S}^2$  satisfacen las hipótesis del Corolario 1.4.6.

## 1.5. Construcción de $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no compactas

Siguiendo con el estudio global de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, en esta sección centramos nuestra atención en las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no compactas. Más concretamente, el objeto de estudio serán las hipersuperficies  $\Sigma$  inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la forma  $\Sigma = M^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , donde  $M$  es una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{k+1}$ . En este contexto,  $\mathbb{R}^{k+1}$  denota *cualquier* subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y  $\mathbb{R}^{n-k}$  su complementario ortogonal. Las  $n$  curvaturas principales de  $\Sigma$ ,  $\kappa_1^\Sigma, \dots, \kappa_n^\Sigma$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_i^\Sigma &= \kappa_i^{M^k}, & \text{si } i = 1, \dots, k, \\ \kappa_i^\Sigma &= 0, & \text{si } i = k+1, \dots, n, \end{aligned}$$

donde  $\kappa_i^{M^k}$  denota la  $i$ -ésima curvatura principal de la hipersuperficie  $M^k$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por tanto,  $H_\Sigma = \frac{k}{n} H_{M^k}$ , donde  $H_\Sigma, H_{M^k}$  son las curvaturas medias de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $M^k$  en  $\mathbb{R}^{k+1}$ , respectivamente. En particular, si  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  y denotamos  $\mathbb{S}^k := \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$  y  $\mathcal{H}^* := \frac{n}{k} \mathcal{H}|_{\mathbb{S}^k}$ , entonces  $M$  es una  $\mathcal{H}^*$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{k+1}$  si y solo si  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

El siguiente resultado es una consecuencia directa de las discusiones anteriores y del Teorema 1.4.5:

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\mathbb{R}^{k+1}$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , con  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , y denotemos  $\mathbb{S}^k = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$ . Supongamos que la función  $\mathcal{H}^* =$*

$\frac{n}{k}\mathcal{H}|_{\mathbb{S}^k} \in C^2(\mathbb{S}^k)$  es positiva e invariante por un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^k$  sin puntos fijos.

Entonces, existe una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  completa inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definida por el producto riemanniano  $\Sigma = \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \times \mathbb{R}^{n-k}$ , donde  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  es la  $\mathcal{H}$ -esfera de Guan-Guan estrictamente convexa dada por el Teorema 1.4.5.

Como caso particular de la Proposición 1.5.1, si  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  satisface  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$  en todo  $x \in \mathbb{S}^n$ , entonces para cada subespacio vectorial  $\mathbb{R}^{k+1}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  existe una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie completa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  difeomorfa a  $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , y tal que el subespacio ortogonal  $\mathbb{R}^{n-k}$  a  $\mathbb{R}^{k+1}$  es tangente a  $\Sigma$  en todo punto. El caso particular  $k = n-1$  será útil a lo largo de esta memoria, y por tanto lo enunciamos aparte.

**Corolario 1.5.2.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^n)$  una función positiva satisfaciendo  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . Entonces, para cada  $v \in \mathbb{S}^n$  existe una hipersuperficie de dimensión  $n-1$  y compacta, estrictamente convexa  $S_v$  en el hiperplano  $v^\perp$ , de manera que la hipersuperficie definida por  $\Sigma_v := \{S_v + tv; t \in \mathbb{R}\}$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie completa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , difeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .*

La Proposición 1.5.1 nos permite clasificar las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con curvatura constante como veremos a continuación; notemos que en el caso  $k = 1$ , la hipersuperficie dada por  $\Sigma = M \times \mathbb{R}^{n-1}$  es llana.

Supongamos que la función  $\mathcal{H}$  es constante. Un resultado clásico asegura que las únicas hipersuperficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que además tienen curvatura constante, son hiperplanos (correspondientes al caso  $\mathcal{H} \equiv 0$ ), o congruentes a un cilindro homogéneo generalizado  $\mathbb{S}^1(1/(n|\mathcal{H}|)) \times \mathbb{R}^{n-1}$ , o a una esfera totalmente umbilical  $\mathbb{S}^n(1/|\mathcal{H}|)$ .

En el caso de que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  sea una función no constante, resultados clásicos de Liebmann, Hilbert y Hartman-Nirenberg implican que las únicas  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies completas de curvatura constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son cilindros generalizados llanos de la forma  $\alpha \times \mathbb{R}^{n-1}$ , donde  $\alpha \subset \Pi \equiv \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es una curva plana regular y completa. Para

estos cilindros generalizados, la condición de tener curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  implica que la curva  $\alpha$  satisface

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{n} \mathcal{H}(\mathbf{n}_\alpha), \quad (1.11)$$

donde  $\kappa_\alpha$  y  $\mathbf{n}_\alpha$  denotan la curvatura geodésica y el normal unitario de  $\alpha$ , respectivamente.

Por tanto, el estudio de los  $\mathcal{H}$ -cilindros generalizados se reduce a resolver la ecuación (1.11), la cual corresponde al *problema de Minkowski* para curvas planas cuando  $\mathcal{H} > 0$ . Hay que señalar no obstante que en nuestro caso  $\mathcal{H}$  no tiene por qué ser positiva, y no podemos garantizar a priori que la solución  $\alpha$  sea una curva cerrada.

Consideremos pues  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal positivamente orientada de  $\Pi$ , y definamos la función  $2\pi$ -periódica  $\widehat{\mathcal{H}} \in C^1(\mathbb{R})$  dada por

$$\widehat{\mathcal{H}}(\theta) = \frac{1}{n} \mathcal{H}(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2).$$

Fijemos  $v = \cos \theta_0 e_1 + \sin \theta_0 e_2 \in \Pi$ , para algún  $\theta_0$ . Si  $\widehat{\mathcal{H}}(\theta_0) = 0$ , entonces la línea recta generada por el vector  $v$  es trivialmente una solución de (1.11), y la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  correspondiente es un hiperplano en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Supongamos pues que  $\widehat{\mathcal{H}}(\theta_0) \neq 0$ , y sea  $I_0 \subset \mathbb{R}$  el mayor intervalo conteniendo a  $\theta_0$  donde  $\widehat{\mathcal{H}} \neq 0$ . En este caso, la función  $1/\widehat{\mathcal{H}}(x)$  está bien definida en  $I_0$ , y por tanto existe una primitiva suya  $F(x) \in C^2(I_0)$  tal que  $F(\theta_0) = 0$ . La condición  $\widehat{\mathcal{H}}(x) > 0$  implica que  $F'(x) > 0$ . Es más, por ser  $\widehat{\mathcal{H}}(x)$  una función periódica,  $F'(x) \geq c > 0$ , para cierto  $c > 0$ . Si  $\widehat{\mathcal{H}}(x) > 0$  en todo punto, entonces  $I_0 = \mathbb{R}$  y podemos definir globalmente la función inversa de  $F(x)$ ,  $F^{-1}(x)$ . Si  $\widehat{\mathcal{H}}(x)$  se anula en algún punto, entonces  $I_0$  es un intervalo abierto y acotado de la forma  $(a, b)$  con  $b - a < 2\pi$ , y con  $F'(x) \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow \{a, b\}$ . En tal situación, la función  $F^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow I_0$  es una función acotada, de forma que  $F^{-1}(x) \rightarrow a$  si  $x \rightarrow -\infty$  y  $F^{-1}(x) \rightarrow b$  si  $x \rightarrow \infty$ .

Si  $\alpha$  está parametrizada por su longitud de arco, podemos escribir  $\alpha'(s) = \cos \theta(s) e_1 + \sin \theta(s) e_2$  y la ecuación (1.11) se reescribe como

$$\theta'(s) = \widehat{\mathcal{H}}(\theta(s)), \quad (1.12)$$

la cual tiene solución única  $\theta(s) = F^{-1}(s) : \mathbb{R} \rightarrow I_0$  si imponemos la condición inicial  $\theta(0) = \theta_0$ . Por construcción, la curva  $\alpha(s)$  es completa. Lo expuesto anteriormente se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Fijemos  $v \in \mathbb{S}^n$  y un subespacio lineal de dimensión 2 de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , al que llamaremos  $\Pi$ , con  $v \in \Pi$ . Entonces, existe una única (salvo traslaciones) curva regular y completa  $\alpha$  en  $\Pi$  que satisface las siguientes propiedades:*

1. *La hipersuperficie  $\Sigma_{v,\Pi} := \alpha \times \mathbb{R}^{n-1}$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie completa y llana en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*
2. *El vector  $v$  es tangente a  $\Sigma_{v,\Pi}$  en algún punto.*

*Recíprocamente, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie completa con curvatura constante, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es, o bien una esfera totalmente umbilical (en el caso de que  $\mathcal{H}$  sea constante), o uno de los ejemplos  $\Sigma_{v,\Pi}$ .*

Es importante mencionar que la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma_{v,\Pi}$  descrita en la proposición anterior puede construirse de forma explícita restringiendo la función  $\mathcal{H}$  a la geodésica de  $\mathbb{S}^n$  dada por la intersección  $\Pi \cap \mathbb{S}^n$ . En general,  $\Sigma_{v,\Pi}$  tendrá la topología de  $\mathbb{R}^n$  o de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , dependiendo si la curva  $\alpha(s)$  es cerrada o no. Por construcción, una condición necesaria para que  $\alpha(s)$  sea una curva cerrada es que  $\mathcal{H}$  restringida a la geodésica  $\Pi \cap \mathbb{S}^n$  tenga signo constante. Sin embargo, esta condición no es suficiente; esta discusión es similar a la tratada en la Proposición 1.3.1 y el Corolario 1.3.2 a la hora de estudiar existencia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compactas. En el caso de curvas planas, este hecho es consecuencia inmediata de la solución al problema de Minkowski clásico para curvas planas:

**Corolario 1.5.4.** *Dada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , consideremos una de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies  $\Sigma_{v,\Pi}$  inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  construidas en la Proposición 1.5.3. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La hipersuperficie  $\Sigma_{v,\Pi}$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Esto es, la curva  $\alpha(s)$  es cerrada.*

2. Si denotamos  $\mathbb{S}_{\Pi}^1 = \mathbb{S}^n \cap \Pi$ , entonces  $\mathcal{H}(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{S}_{\Pi}^1$ , y se cumple la condición integral

$$\int_{\mathbb{S}_{\Pi}^1} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx = 0.$$

Para finalizar esta sección tratamos el problema de Dirichlet para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Este resultado nos garantiza la existencia de numerosos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, los cuales serán de especial importancia en el desarrollo del Capítulo 3. La siguiente proposición es una consecuencia del Corolario 1 en [Mar], y da condiciones generales para la existencia de grafos con curvatura media predeterminada en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposición 1.5.5.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado de regularidad  $C^{2,\alpha}$  y sea  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , para algún  $\alpha \in (0, 1)$ . Consideremos una función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones entre  $\mathcal{H}$  y  $\Omega$ :*

1.  $\max_{\mathbb{S}^n} |\mathcal{H}|^n \text{vol}(\Omega) < \omega_n$ , donde  $\omega_n$  es el volumen de la bola unidad  $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ .
2.  $H_{\partial\Omega}(x) \geq \frac{n}{n-1} |\mathcal{H}(\xi(x))| \forall x \in \partial\Omega$ , donde  $\xi$  denota el conormal interior a  $\partial\Omega$  como vector en  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y  $H_{\partial\Omega}$  es la curvatura media de la subvariedad  $\partial\Omega$  respecto a la orientación inducida por  $\xi$ .

Entonces, el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = n\mathcal{H}(Z_u), & Z_u := \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \quad \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.13)$$

tiene una única solución  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

En el caso en que el dominio  $\Omega$  sea no acotado, un resultado de existencia para el problema de Dirichlet (1.13) puede obtenerse como consecuencia de los resultados recientes desarrollados en [JuLi].

## 1.6. Resolución del problema de Björling para $\mathcal{H}$ -superficies

Esta sección está dedicada a la resolución del *problema de Björling* para la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$ . El problema de Björling clásico data de 1844, y se puede enunciar de la siguiente forma:

*Dada una curva regular y analítica  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  y una distribución de planos orientados  $\Pi(s)$  a lo largo de  $\beta(s)$  con  $\beta'(s) \subset \Pi(s)$  para todo  $s$ , discutir la existencia de una superficie mínima  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\beta(s) \subset \Sigma$  y la distribución de planos tangentes de  $\Sigma$  a lo largo de  $\beta(s)$  viene dada por  $\Pi(s)$ .*

Este problema, propuesto por el propio Björling, fue resuelto por Schwarz [Schw] por medio de una fórmula de representación integral, usando datos holomorfos. La resolución del problema de Björling ha servido para estudiar diversas cuestiones en la teoría de superficies mínimas: por ejemplo, para estudiar superficies con ciertas simetrías [DHKW], o para resolver problemas globales [AlMi, GaMi1]; véase también [ACG, GaMi2, GaMi3] y sus referencias para un desarrollo del *problema de Cauchy geométrico*. El problema de Björling ha sido también estudiado cuando la curvatura media es una constante no nula, véase [BrDo].

Denotaremos por  $C^\omega(\mathbb{S}^2)$  a la clase de *funciones analíticas* reales definidas en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , regularidad que se le pedirá a la función predeterminada  $\mathcal{H}$  a lo largo de esta sección.

**Definición 1.6.1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ . Un par de datos de Björling para  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  es una curva regular analítica  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un campo de vectores analítico  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  a lo largo de  $\beta(s)$  tal que  $|\beta'(s)| - |B(s)| = \langle \beta'(s), B(s) \rangle = 0$ ,  $\forall s \in I$ .*

Observemos que dada  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ , una curva regular y analítica  $\beta(s)$  y una distribución de planos  $\Pi(s)$  a lo largo de  $\beta(s)$ , obtenemos un par de datos de Björling sin más que definir el campo  $B(s) = J\beta'(s)$ ; aquí  $J$  denota la rotación de ángulo  $\pi/2$  en cada plano  $\Pi(s)$ .

Para una función  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$  arbitraria, en la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies no disponemos de una *representación de Weierstrass* tal y como ocurre para el caso  $\mathcal{H} = 0$ , y por tanto no podremos resolver el problema de Björling por medio de una fórmula integral explícita. No obstante, podemos garantizar la existencia y la unicidad de una  $\mathcal{H}$ -superficie que resuelva el problema de Björling por otros métodos.

Sea  $\Sigma$  una superficie riemanniana y sea  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, es bien conocida la fórmula

$$\Delta_\Sigma \psi = 2H_\Sigma \eta, \quad (1.14)$$

donde  $\Delta_\Sigma$  es el operador de Laplace-Beltrami en  $\Sigma$ ,  $\eta$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$  y  $H_\Sigma$  es la curvatura media de  $\Sigma$  respecto de  $\eta$ . Consideremos un parámetro conforme  $z = s + it$  para la primera forma fundamental de  $\Sigma$  definido en un dominio simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , y definamos los operadores usuales  $\partial_z = (\partial_s - i\partial_t)/2$ ,  $\partial_{\bar{z}} = (\partial_s + i\partial_t)/2$ . Entonces, la métrica inducida en  $\Sigma$  se escribe como  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \lambda^2 |dz|^2$ , donde  $|dz|^2$  denota la métrica llana en el dominio simplemente conexo  $\Omega$  y  $\lambda^2 = \langle \partial_s, \partial_s \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle > 0$  es el factor conforme. Para una coordenada conforme el operador  $\Delta_\Sigma$  se escribe como

$$\Delta_\Sigma = \frac{1}{\lambda^2} \Delta_0 = \frac{1}{\lambda^2} (\partial_{ss} + \partial_{tt}) = \frac{4}{\lambda^2} \partial_{z\bar{z}}; \quad (1.15)$$

aquí  $\Delta_0$  denota el Laplaciano en la métrica llana y hemos usado la relación del operador de Laplace-Beltrami entre dos métricas conformes. Por otra parte, se tiene que  $\lambda^2 = 2\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle$  y la aplicación de Gauss  $\eta$  se escribe respecto de la coordenada  $z$  como

$$\eta = \frac{2}{i} \frac{\psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}}{\sqrt{\langle \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}, \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}} \rangle}} = \frac{2}{i\lambda^2} \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}. \quad (1.16)$$

Supongamos ahora que la inmersión  $\psi$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie, para cierta  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ . Usando las ecuaciones (1.15) y (1.16), la ecuación (1.14) se escribe como

$$\psi_{z\bar{z}} = -i\mathcal{H}(\eta) \psi_z \wedge \psi_{\bar{z}}. \quad (1.17)$$

Si escribimos la inmersión en coordenadas  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , la ecuación (1.17) se puede ver como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En estas condiciones podemos

resolver el problema de Björling para la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies, el cual enunciamos a continuación.

**Teorema 1.6.2 (Problema de Björling para  $\mathcal{H}$ -superficies).** *Sea  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ , y sea  $\beta(s), B(s)$  un par de datos de Björling definidos en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Entonces, existe un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  con  $I \times \{0\} \subset \Omega$ , y existe una única inmersión conforme  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales con datos iniciales*

$$\begin{cases} \psi_{z\bar{z}} = -i\mathcal{H}(\eta)\psi_z \wedge \psi_{\bar{z}} \\ \psi(s, 0) = \beta(s) \\ \psi_t(s, 0) = B(s) \end{cases} \quad (1.18)$$

En consecuencia,  $\psi(\Sigma)$  define una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a la curva  $\beta(s)$  y tal que el plano tangente  $T_{\beta(s)}\Sigma$  en cada punto  $\beta(s) \in \psi(\Sigma)$  está generado por los vectores  $\beta'(s), B(s)$ .

*Demostración.* El sistema (1.18) dado por la ecuación en derivadas parciales (1.17) junto a las condiciones iniciales enunciadas forman un sistema de *Cauchy-Kovalevskaya* de tipo elíptico, véase [Pet] para una prueba del teorema de Cauchy-Kovalevskaya. En consecuencia, existen  $\delta > 0$  y funciones  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  definidas en  $I \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{C}$  tales que son solución de (1.17) y satisfacen  $\psi(s, 0) = \beta(s)$ ,  $\psi_t(s, 0) = B(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Observemos que se cumple la ecuación  $\langle \psi_{z\bar{z}}, \psi_z \rangle = 0$ , sin más que sustituir  $\psi_{z\bar{z}}$  por su expresión (1.17), y por tanto la función  $\langle \psi_z, \psi_z \rangle$  es holomorfa. Por otra parte, usando que  $\psi$  satisface las condiciones iniciales descritas, la función  $\langle \psi_z, \psi_z \rangle$  evaluada en el eje  $(s, 0)$  es igual a  $|\beta'(s)|^2 - |B(s)|^2 - 2i\langle \beta'(s), B(s) \rangle$ . Esta expresión es idénticamente nula por ser  $\beta'(s)$  y  $B(s)$  campos de vectores de igual longitud y que cumplen  $\beta'(s) \perp B(s)$ ,  $\forall s$ . En estas condiciones,  $\langle \psi_z, \psi_z \rangle$  es una función holomorfa idénticamente nula en el eje real, y por el principio de identidad  $\langle \psi_z, \psi_z \rangle$  es idénticamente nula en  $I \times (-\delta, \delta)$ . Esto nos dice que la aplicación  $\psi : I \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación conforme.

Tenemos que demostrar ahora que la aplicación  $\psi$  define una inmersión. Esta propiedad viene dada por la condición  $\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle > 0$ . Ahora bien, si evaluamos  $\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle$  en el eje  $(s, 0)$  obtenemos  $1/4(|\beta'(s)|^2 + |B(s)|^2) > 0$ . En consecuencia  $\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle > 0$  en el

eje real, y por tanto existe un conjunto abierto  $\Omega$  que contiene a  $I$  tal que la aplicación  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una inmersión conforme. Por último, al cumplir  $\psi$  la ecuación (1.17), tenemos que  $\psi$  define una inmersión conforme de una  $\mathcal{H}$ -superficie. Esto concluye la prueba del Teorema 1.6.2.  $\square$

Por ejemplo, consideremos la función analítica  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ . Recordemos que en la Sección 1.2 mostramos que esta elección particular corresponde al caso de los solitones de traslación del flujo por curvatura media. Tomando el par de datos de Björling  $\beta(s) = (\cos s, \sin s, 0)$  y  $B(s) = (0, 0, 1)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , la superficie generada por el Teorema 1.6.2 corresponde al ejemplo *wing-like* en la teoría de los solitones de traslación del flujo por curvatura media, el cual tiene plano tangente vertical a lo largo de la circunferencia que corresponde al *cuello* de dicha superficie. Véase la Figura 1.3.

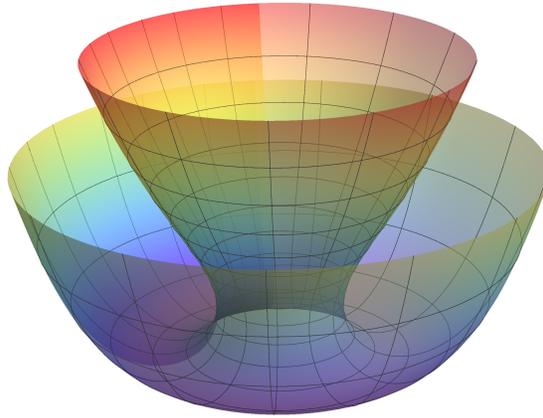


Figura 1.3: El ejemplo *wing-like* de los solitones de traslación del flujo por curvatura media, generado por los datos de Björling  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ ,  $\beta(s) = (\cos s, \sin s, 0)$  y  $B(s) = (0, 0, 1)$ .

Gracias a la resolución del problema de Björling por medio del Teorema 1.6.2 podemos garantizar la existencia de numerosos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -superficies para elecciones

arbitrarias de la función  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ . Como es usual en este contexto, la posibilidad de resolver el problema de Björling para la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies nos motiva a buscar ejemplos *no orientables*. No obstante, debemos incidir en el hecho de que nuestras  $\mathcal{H}$ -superficies se suponen siempre orientadas en virtud de la Definición 1.1. Por tanto, para plantearnos el estudio de  $\mathcal{H}$ -superficies no orientables debemos imponer alguna condición sobre la función predeterminada  $\mathcal{H}$ , de manera que la Definición 1.1 sea independiente de la orientación escogida. En este aspecto, la hipótesis mínima que se debe imponer es que  $\mathcal{H}$  sea *antipodalmente antisimétrica*, esto es  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Recordemos que esta condición ya apareció en el enunciado del principio de tangencia en el Corolario 1.1.4.

Volviendo al planteamiento de estudiar ejemplos no orientables, el ejemplo más recurrente son las superficies con la topología de una *banda de Möbius*, esto es, superficies con la topología de un cuadrado en la que los puntos de dos lados opuestos se identifican de forma antipodal. Concretamente, si definimos el cuadrado  $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  y consideramos los lados verticales  $\{0\} \times [0, 1]$  y  $\{1\} \times [0, 1]$ , entonces definimos la relación de equivalencia siguiente: se identifican los puntos  $(0, x) \sim (1, 1 - x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . La superficie definida como el cociente  $[0, 1]^2 / \sim$  es no orientable, y es conocida como banda de Möbius. Como observación, notemos además que la función predeterminada  $\mathcal{H} = 0$ , correspondiente a las superficies mínimas, es antipodalmente antisimétrica, y es bien conocida la existencia de bandas de Möbius mínimas, véase [Mee1].

La siguiente proposición para el caso mínimo  $\mathcal{H} = 0$  fue probada en [Mir].

**Proposición 1.6.3.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$  tal que  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ , sea  $\beta(s), B(s)$  un par de datos de Björling tal que  $\beta(s)$  es  $T$ -periódica y  $B(s)$  es  $T$ -antiperiódico, para cierto  $T > 0$ . Entonces, la  $\mathcal{H}$ -superficie generada por medio del Teorema 1.6.2 para la elección de estos datos de Björling tiene la topología de una banda de Möbius, con grupo fundamental generado por  $\beta(s)$ .*

*Recíprocamente, toda  $\mathcal{H}$ -banda de Möbius está generada de este modo.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$ , y consideremos una inmersión de una  $\mathcal{H}$ -banda de

Möbius  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y sea  $\Gamma$  una curva regular, cerrada y analítica de  $\mathcal{M}$  que genere su grupo fundamental.

Sea  $\tilde{\mathcal{M}}$  el *recubridor orientable de dos hojas* de  $\mathcal{M}$ , y denotemos por  $\pi : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  a la proyección canónica. En estas condiciones,  $\tilde{\mathcal{M}}$  puede ser vista como una superficie de Riemann  $M$  dotada de una involución antiholomorfa sin puntos fijos, esto es, una aplicación  $I : M \rightarrow M$  tal que  $I(z_1) = z_2$  si y solo si  $z_1 \neq z_2$  y además  $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ . Notemos que  $M$  es topológicamente un cilindro, y por tanto existe una curva regular  $\tilde{\Gamma}$  cerrada y analítica que genera el grupo fundamental de  $M$ , definida por la relación  $\pi(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$ . Por ser  $\tilde{\Gamma}$  una curva cerrada, podemos parametrizarla como  $\tilde{\Gamma}(s) : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ , donde  $\tilde{\Gamma}(s)$  es una curva  $2T$ -periódica para cierto  $T > 0$ , y además satisface  $I(\tilde{\Gamma}(s)) = \tilde{\Gamma}(s + T)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . En particular,  $\Gamma(s) = \pi(\tilde{\Gamma}(s))$  es  $T$ -periódica.

Definamos la superficie orientable  $\tilde{\psi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mediante la relación  $\tilde{\psi} = \psi \circ \pi$ . Entonces, la curva  $\beta(s) = \tilde{\psi}(\tilde{\Gamma}(s))$  es una curva regular y analítica en  $\mathbb{R}^3$ , que además es  $T$ -periódica. Por otra parte, si denotamos por  $\Pi(s)$  la distribución de planos tangentes orientados de  $\tilde{\psi}$  a lo largo de  $\beta(s)$ , se tiene que los planos  $\Pi(s + T)$  y  $\Pi(s)$  coinciden, pero con orientación opuesta. En estas condiciones, si denotamos por  $J$  la rotación de ángulo  $\pi/2$  en cada plano orientado, entonces el campo  $B(s) := J\beta'(s)$  satisface  $B(s + T) = -B(s)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . Es decir,  $B(s)$  es un campo  $T$ -antiperiódico.

Esto nos dice que la  $\mathcal{H}$ -superficie  $\tilde{\psi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  está generada por los datos de Björling  $\beta(s), B(s)$  tal que  $\beta(s)$  es  $T$ -periódica y  $B(s)$  es  $T$ -antiperiódico, y por tanto toda  $\mathcal{H}$ -banda de Möbius se recupera mediante estos datos de Björling.

Recíprocamente, sea  $\beta(s)$  una curva cerrada, analítica y regular en  $\mathbb{R}^3$ . Por ser  $\beta(s)$  cerrada en particular se puede parametrizar de modo periódico y por tanto existe  $T > 0$ , llamado el *periodo* de  $\beta(s)$ , tal que  $\beta(s) = \beta(s + T)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . En particular, el parámetro  $s$  está definido en todo  $\mathbb{R}$ . Sea  $B(s)$  un campo de vectores unitario y analítico lo largo de  $\beta$  y que satisface  $B(s + T) = -B(s)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , esto es,  $B(s)$  es  $T$ -antiperiódico. Supongamos que el par  $\{\beta(s), B(s)\}$  son datos de Björling, véase la Definición 1.6.1. En estas condiciones podemos resolver el problema de Björling para  $\beta(s), B(s)$  por medio del Teorema 1.6.2, el cual asegura la existencia de un abierto

$\Omega \subset \mathbb{C}$ , el cual contiene al eje real  $\{\Im(z) = 0; z \in \mathbb{C}\}$ , y de una inmersión conforme  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  que define una  $\mathcal{H}$ -superficie cumpliendo el sistema (1.18).

Por estar  $\psi(s, t)$  definida para todo  $s \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $\psi^*(s, t) := \psi(s + 2T, t)$  está bien definida y satisface la EDP dada por la ecuación (1.17). Igualmente, se tiene  $\psi^*(s, 0) = \psi(s + 2T, 0) = \beta(s + 2T) = \beta(s)$  y  $\psi_t(s + 2T, 0) = B(s + 2T) = B(s)$ , esto es,  $\psi(s + 2T, t)$  tiene los mismos datos de Björling que la inmersión  $\psi(s, t)$ . Por unicidad del Teorema 1.6.2, las  $\mathcal{H}$ -superficies dadas por las inmersiones conformes  $\psi(s, t)$  y  $\psi(s + 2T, t)$  coinciden. En particular, el dominio  $\Omega$  es un dominio  $2T$ -periódico en la dirección del eje real, esto es,  $\Omega = \Omega + (2T, 0)$ . Esta discusión nos permite afirmar que la aplicación cociente  $\psi : \Omega/(2T\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  está bien definida, y genera un cilindro topológico.

Podemos suponer además, haciendo  $\Omega$  más pequeño si fuese preciso, que  $\Omega$  es simétrico con respecto a la conjugación, es decir  $\bar{z} \in \Omega, \forall z \in \Omega$ . Definamos en el cilindro  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  la aplicación

$$\begin{aligned} I : \Omega/(2T\mathbb{Z}) &\longrightarrow \Omega/(2T\mathbb{Z}) \\ z &\longmapsto \bar{z} + T. \end{aligned}$$

Es claro que la aplicación  $I$  no tiene puntos fijos, que es una involución (esto es,  $I^2(z) = z, \forall z \in \Omega/(2T\mathbb{Z})$ ) y que invierte la orientación de  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  (viendo  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  como superficie de Riemann). En consecuencia,  $I$  es una aplicación antiholomorfa para la estructura conforme de  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$ , y podemos definir la relación de equivalencia sobre  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  de la siguiente forma: dos puntos  $z, w \in \Omega/(2T\mathbb{Z})$  se relacionan si y solo si  $z = I(w)$ . En esta situación, el cilindro  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  es el recubridor de dos hojas orientable del espacio  $(\Omega/(2T\mathbb{Z}), I)$ , con la proyección canónica  $\mathbf{p} : \Omega/(2T\mathbb{Z}) \rightarrow (\Omega/(2T\mathbb{Z}), I)$ .

Por ser  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  el recubridor de dos hojas del espacio  $(\Omega/(2T\mathbb{Z}), I)$ , la aplicación  $I$  determina el *cambio de hoja* dado por  $\mathbf{p} \circ I = \mathbf{p}$ . Definamos la aplicación  $\widehat{\psi}(s, t) := (\psi \circ I)(s, t) = \psi(s + T, -t)$ , esto es,  $\widehat{\psi}$  no es más que la aplicación  $\psi$  pero definida en  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$  con la orientación opuesta. De nuevo, es inmediato comprobar que  $\widehat{\psi}$  es solución de la EDP (1.17). Además, se tiene  $\widehat{\psi}(s, 0) = \psi(s + T, 0) = \beta(s + T) = \beta(s)$  y  $\widehat{\psi}_t(s, 0) = -\psi_t(s + T, 0) = -B(s + T) = B(s)$ , esto es,  $\widehat{\psi}$  y  $\psi$  tienen los mismos datos de Björling. La unicidad del Teorema 1.6.2 nos asegura que las inmersiones  $\psi(s, t)$  y

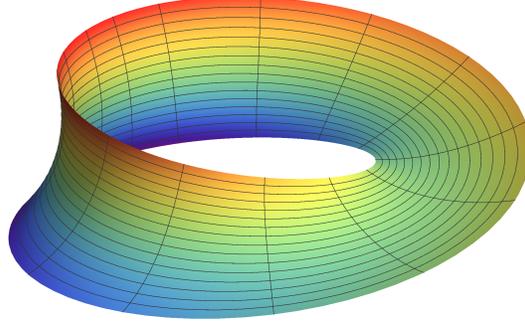


Figura 1.4: Una  $\mathcal{H}$ -banda de Möbius para la función analítica  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ , con datos de Björling  $\beta(s) = 1/2(\cos 2s, \sin 2s, 0)$ ,  $B(s) = \cos s(\cos s, \sin s, 0) + \sin s(0, 0, 1)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

$\widehat{\psi}(s, t)$  coinciden en  $\Omega/(2T\mathbb{Z})$ . En particular, por ser  $\psi(z) = \psi(I(z))$ ,  $\forall x \in \Omega/(2T\mathbb{Z})$ , la aplicación cociente  $\widetilde{\psi} : (\Omega/(2T\mathbb{Z}), I) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\widetilde{\psi}(z) = (\psi \circ \mathbf{p})(z)$  para todo  $z \in \Omega/(2T\mathbb{Z})$  está bien definida.

Con todo esto, hemos probado que  $\widetilde{\psi}$  define una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$  con la topología de una banda de Möbius con datos iniciales  $\beta(s), B(s)$ . Esto concluye la prueba de la Proposición 1.6.3.  $\square$

Notemos que la función  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ , la cual genera los solitones de traslación del flujo por curvatura media, está en las condiciones de la Proposición 1.6.3, y por tanto en la familia de los solitones de traslación del flujo por curvatura media existen ejemplos con la topología de una banda de Möbius. Véase la Figura 1.4. Tras una búsqueda detallada en la literatura podemos afirmar que estas *bandas de Möbius de traslación* son los primeros ejemplos no orientables construidos en la teoría de los solitones de traslación del flujo por curvatura media en  $\mathbb{R}^3$ . En la Figura 1.5 podemos observar un solitón de traslación no orientable, construido al hacer girar el vector  $B(s)$  7 veces alrededor de una circunferencia  $\beta(s)$  antes de cerrar. En el caso  $\mathcal{H} = 0$ , este tipo de

superficies, homeomorfas a una banda de Möbius, fueron construidas por primera vez en [Mir]. Cabe destacar igualmente el trabajo independiente de Meeks y Weber [MeWe]. Las superficies como las que aparecen en la Figura 1.4 suelen llamarse “helicoides doblados” (del inglés, *bent helicoids*).

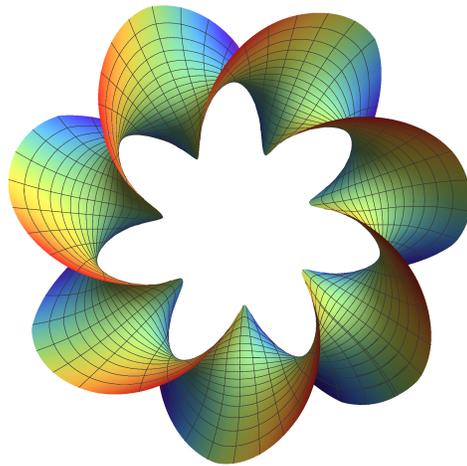


Figura 1.5: Una  $\mathcal{H}$ -superficie no orientable con la topología de una banda de Möbius para la función  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ ,  $x \in \mathbb{S}^2$ . Aquí el vector  $B(s)$  da 7 medias vueltas antes de cerrar.

## 1.7. Un teorema de compacidad

El objetivo de esta sección es dar un *teorema de compacidad* para el espacio de las  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  con segunda forma fundamental acotada (equivalentemente, con curvatura de Gauss acotada), el cual será clave en el estudio global de las  $\mathcal{H}$ -superficies en próximos capítulos. El resultado que vamos a probar es una generalización de un

resultado importante en la teoría de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ , véase la Sección 2 en [RST] para un desarrollo global del método usado.

Damos a continuación un esquema de demostración de la adaptación de [RST] a la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies para el caso en que  $\mathcal{H}$  es no constante.

**Teorema 1.7.1.** *Sea  $(\Sigma_n)_n$  una sucesión de  $\mathcal{H}_n$ -superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , para alguna sucesión de funciones  $\mathcal{H}_n \in C^k(\mathbb{S}^2)$ ,  $k \geq 1$ , y tomemos  $p_n \in \Sigma_n$ . Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. *Existe una sucesión de números positivos  $r_n \rightarrow \infty$  tales que la sucesión de discos geodésicos  $D_n = D_{\Sigma_n}(p_n, r_n)$  están contenidos en el interior de  $\Sigma_n$ , es decir, que toda geodésica que emana de  $p_n$  está bien definida hasta distancia al menos  $r_n$ .*
2. *La sucesión  $(p_n)_n \rightarrow p$  para algún  $p \in \mathbb{R}^3$ .*
3. *Si denotamos por  $|\sigma_{\Sigma_n}|$  la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma_n$ , existe  $C > 0$  tal que  $|\sigma_{\Sigma_n}(x)| \leq C$ ,  $\forall x \in \Sigma_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*
4.  *$\mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}$  en la topología  $C^k$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^k(\mathbb{S}^n)$ .*

*Entonces, existe una subsecuencia de la sucesión  $(\Sigma_n)_n$  que converge uniformemente sobre conjuntos compactos en la topología  $C^{k+2}$  a una  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma$  que es completa, posiblemente con varias componentes conexas, y de curvatura acotada, que pasa por el punto  $p$ .*

*Demostración.* Las condiciones *i), iii)*, junto con un resultado general de superficies inmersas en 3-variedades arbitrarias (véase por ejemplo la Proposición 2.3 en [RST]), aseguran la existencia de constantes positivas  $\delta, \mu$ , que solo dependen de la cota uniforme  $C$  de las segundas formas fundamentales (y por tanto ni de  $\mathcal{H}_n$  ni de  $\Sigma_n$ ) tales que, para  $n$  suficientemente grande se cumplen:

- a) Un entorno abierto de  $p_n$  en  $D_n \subset \Sigma_n$  es el grafo de una función  $u_n$  definida en el disco euclídeo  $D_\delta := D(0, \delta)$  de radio  $\delta$  en  $T_{p_n}\Sigma_n$ .

b) La norma  $C^2$  de la función  $u_n$  en  $D_\delta$  es menor o igual que  $\mu$

Por ser cada  $\Sigma_n$  una  $\mathcal{H}_n$ -superficie, tras un cambio de coordenadas euclídeas  $(x^n, y^n, z^n)$  en las cuales  $T_{p_n} \Sigma_n = \{z^n = 0\}$ , cada  $u_n$  es una solución en  $D_\delta$  de la ecuación cuasilineal elíptica

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 2\mathcal{H}_n(Z_u), \quad Z_u := \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}. \quad (1.19)$$

En particular, cada una de las ecuaciones (1.19) se puede expresar como una ecuación en derivadas parciales lineal y elíptica  $Lu_n = f_n$ , donde los coeficientes del operador  $L$  tienen una dependencia  $C^\infty$  de  $Du_n$ , y  $f_n$  tiene una dependencia  $C^k$  de  $Du_n$ . Por la condición b) anterior, cada función tiene regularidad  $u_n \in C^{1,\alpha}(D_\delta)$  para todo  $n$ . Esto implica que los coeficientes de  $L$  están acotados en la norma  $C^{0,\alpha}(D_\delta)$ . En esta situación, la teoría clásica de Schauder (véase el Capítulo 6 de Gilbarg-Trudinger, [GiTu]), asegura que para todo  $\delta' \in (0, \delta)$  existe una constante  $C'$  independiente de  $n$  tal que  $\|u_n\| \leq C'$  en la norma  $C^{2,\alpha}(D_{\delta'})$ . En consecuencia, los coeficientes de la ecuación lineal  $Lu_n = f_n$  tienen una acotación uniforme en la norma  $C^{1,\alpha}(D_{\delta'})$ . Si iteramos este proceso, finalmente obtendremos la acotación independiente de  $n$ ,

$$\|u_n\|_{C^{k+2,\alpha}(D_{\delta'})} \leq C'', \quad 0 < \alpha < 1,$$

para cierta constante  $C''$ . En estas condiciones, podemos aplicar el teorema de Arzela-Ascoli y deducir por las condiciones (ii), (iv) que una sucesión parcial de la sucesión de funciones  $\{u_n\}$  converge en el disco  $D_{\delta'}$  en la topología  $C^{k+2}$  a una solución  $u \in C^{k+2}(D_{\delta'})$  de la ecuación

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 2\mathcal{H}(Z_u), \quad Z_u := \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}. \quad (1.20)$$

Esto es, el grafo  $\Sigma_u$  definido por la función  $u$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $p$  por la forma en que ha sido construida, y con segunda forma fundamental acotada por  $C$ , véase la Figura 1.6.

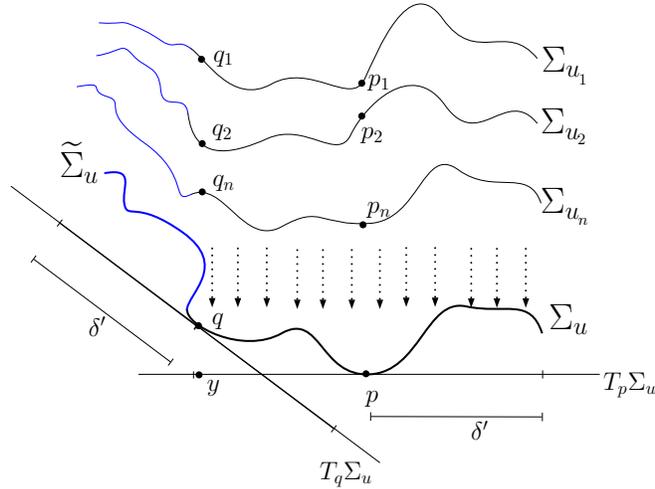


Figura 1.6: En negro, la obtención del grafo  $\Sigma_u$ . En azul, la extensión de la superficie  $\tilde{\Sigma}_u$  alrededor de  $q$ .

Consideremos ahora un punto  $y \in D_{\delta'}$ , y sea  $q \in \Sigma_u$  la imagen de  $y$  por el grafo  $u$ . Por ser  $u$  límite de las funciones  $u_n$ , existen  $q_n \in \mathbb{R}^3$  en los grafos definidos por las funciones  $u_n$ , donde cada  $q_n = u_n(y)$ , y tal que  $q_n \rightarrow q$ . De nuevo, tras extraer una sucesión convergente si es necesario de forma que la condición (i) se cumpla, podemos repetir el proceso anterior, esta vez con respecto a los puntos  $q_n$  y  $q$ . De este modo, obtenemos una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{\Sigma}_u$ , que extiende a la superficie  $\Sigma_u$  en el disco  $D_{\delta'}$ , véase la parte azul en la Figura 1.6.

Iterando este procedimiento, y tras un proceso diagonal estándar, obtenemos una  $\mathcal{H}$ -superficie límite  $\Sigma_\infty$ , la cual es completa, pasa por el punto  $p$ , y tiene segunda forma fundamental acotada por  $C$ . Es más,  $\Sigma_\infty$  es por construcción el límite en la topología  $C^{k+2}$  de conjuntos compactos contenidos en las superficies  $(\Sigma_n)_n$ . Es importante incidir en que en este proceso límite pueden aparecer más componentes conexas.  $\square$

## Capítulo 2

---

# $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionalmente simétricas inmersas en $\mathbb{R}^{n+1}$

---

*Este capítulo está dedicado al estudio de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales, supuesto que la función  $\mathcal{H}$  es rotacionalmente simétrica. Probaremos que las  $\mathcal{H}$ -esferas rotacionales son estrictamente convexas y construiremos grafos enteros estrictamente convexas y ejemplos de tipo catenoide, para diversas elecciones de la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Daremos un resultado de clasificación que generaliza el teorema de Delaunay, bajo la hipótesis  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0, \forall x \in \mathbb{S}^n$ . A lo largo de este capítulo construiremos numerosos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies para elecciones muy generales de  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , los cuales muestran la gran diversidad en la clase de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Finalmente, daremos una descripción de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales definidas por una función  $\mathcal{H}$  lineal.*

### 2.1. Análisis del plano de fases

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función rotacionalmente simétrica, esto es,

$$\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, e_{n+1} \rangle), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n, \quad (2.1)$$

para cierta  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$ , y sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  obtenida como la órbita de una curva regular, plana y parametrizada por el arco

$$\alpha(s) = (x(s), 0, \dots, 0, z(s)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad x(s) > 0,$$

bajo la acción de las isometrías lineales de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservan la orientación y dejan el eje  $x_{n+1}$  fijo punto a punto. Para ahorrar notación denotaremos por  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  a la *curva generatriz* de  $\Sigma$ , omitiendo las  $n - 1$  variables intermedias idénticamente nulas. Una parametrización de la hipersuperficie  $\Sigma$  viene dada por

$$\psi(s, \theta) = (x(s)\theta, z(s)) : I \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.2)$$

En cada punto  $\alpha(s)$  tenemos definida una base ortonormal positivamente orientada  $\{\alpha'(s), J\alpha'(s)\}$ ; aquí  $J$  denota la rotación positiva de ángulo  $\pi/2$  en el plano en el que  $\alpha(s)$  está contenida, esto es,  $J\alpha'(s) = (-z'(s), x'(s))$ . Sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ . Cambiando la orientación de  $\alpha(s)$  si es necesario, podemos suponer que  $J\alpha'(s) = \eta_{\alpha(s)}$  para todo  $s$  en  $I$ . En particular, la función ángulo en cada punto de  $\Sigma$  viene dada por la expresión  $\nu(\psi(s, \theta)) = x'(s)$ . Por ser  $\Sigma$  una hipersuperficie rotacional, las curvaturas principales de  $\Sigma$  son a lo sumo dos distintas, todas independientes de  $\theta$ , y por tanto solo dependen del parámetro  $s$ . Tales curvaturas principales vienen dadas por

$$\kappa_1(s) = \kappa_\alpha(s) = x'(s)z''(s) - x''(s)z'(s), \quad \kappa_2(s) = \dots = \kappa_n(s) = \frac{z'(s)}{x(s)}, \quad (2.3)$$

donde  $\kappa_\alpha$  denota la curvatura como curva plana de  $\alpha(s)$ .

Por ser  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, su curvatura media satisface en cada  $p \in \Sigma$  la ecuación

$$H_\Sigma(p) = \mathcal{H}(\eta_p) = \mathfrak{h}(\langle \eta_p, e_3 \rangle) = \mathfrak{h}(\nu(p)), \quad (2.4)$$

y en consecuencia la ecuación (2.3) implica que las coordenadas de la curva perfil  $\alpha(s)$  de  $\Sigma$  satisfacen

$$n\mathfrak{h}(x'(s)) = x'(s)z''(s) - x''(s)z'(s) + (n-1)\frac{z'(s)}{x(s)}. \quad (2.5)$$

Al estar  $\alpha(s)$  parametrizada por el arco sus coordenadas cumplen la relación  $x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$ . Sustituyendo en la ecuación (2.5) obtenemos que la función  $x(s)$  es una solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden autónoma

$$x''(s) = (n-1) \frac{1-x'(s)^2}{x(s)} - n\varepsilon \mathfrak{h}(x'(s)) \sqrt{1-x'(s)^2}, \quad \varepsilon = \text{signo}(z'(s)), \quad (2.6)$$

en cada subintervalo  $J \subset I$  donde  $z'(s) \neq 0$  para todo  $s \in J$ .

Mediante el cambio de variable  $x'(s) = y(s)$ , la ecuación (2.6) se transforma en el sistema autónomo de primer orden

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y(s) \\ (n-1) \frac{1-y(s)^2}{x(s)} - n\varepsilon \mathfrak{h}(y(s)) \sqrt{1-y(s)^2} \end{pmatrix} := F(x(s), y(s)). \quad (2.7)$$

Definimos el *plano de fases* del sistema (2.7) como la semibanda  $\Theta_\varepsilon := (0, \infty) \times (-1, 1)$ , con coordenadas  $(x, y)$  denotando, respectivamente, la distancia al eje de rotación y la función ángulo de  $\Sigma$ . Los *puntos de equilibrio* de (2.7) se definen como los  $(x_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$  tales que  $F(x_0, y_0) = 0$ . Si  $\varepsilon \mathfrak{h}(0) > 0$ , existe un único punto de equilibrio de (2.7) en  $\Theta_\varepsilon$  dado por

$$e_0 := \left( \frac{n-1}{n\varepsilon \mathfrak{h}(0)}, 0 \right). \quad (2.8)$$

Este equilibrio corresponde al caso en el que  $\Sigma$  se encuentra a distancia constante al eje de rotación, esto es,  $\Sigma$  es un cilindro circular recto  $\mathbb{S}^{n-1}((n-1)/(n\varepsilon \mathfrak{h}(0))) \times \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ . En cualquier otra situación, no hay puntos de equilibrio en  $\Theta_\varepsilon$ . Las *órbitas*  $(x(s), y(s))$  constituyen una foliación de  $\Theta_\varepsilon$  (o de  $\Theta_\varepsilon - \{e_0\}$  en el caso de que  $e_0$  exista) por curvas  $C^1$  regulares y propias. En particular, ninguna órbita puede tener como punto límite ningún  $(x_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$ , salvo quizás el equilibrio en caso de existir. Los puntos en  $\Theta_\varepsilon$  tales que  $y'(s) = 0$  corresponden a la intersección de  $\Theta_\varepsilon$  con el grafo horizontal (posiblemente disconexo) dado por

$$x = \Gamma_\varepsilon(y) = \frac{(n-1)\sqrt{1-y^2}}{n\varepsilon \mathfrak{h}(y)}, \quad (2.9)$$

el cual está definido en los puntos  $y \in [-1, 1]$  tales que  $\mathfrak{h}(y) \neq 0$ .

Notemos que el grafo  $\Gamma_\varepsilon(y)$  no toma un valor finito en los posibles ceros de  $\mathfrak{h}(y)$ , ya que  $\mathfrak{h}$  es de clase  $C^1$ . Para simplificar, denotaremos  $\Gamma_\varepsilon := \Theta_\varepsilon \cap \{x = \Gamma_\varepsilon(y)\}$ . Hay que hacer hincapié en que  $\Gamma_\varepsilon$  puede ser vacío; por ejemplo, en el caso  $\mathfrak{h} \leq 0$  y  $\varepsilon = 1$ . Como  $\alpha(s)$  está parametrizada por el arco, los valores  $s \in J$  donde la curva perfil  $\alpha(s)$  de  $\Sigma$  tiene curvatura geodésica igual a cero son aquellos donde  $x''(s) = y'(s) = 0$ , esto es, los puntos donde  $(x(s), y(s)) \in \Gamma_\varepsilon$ .

La curva  $\Gamma_\varepsilon$  y el eje  $y = 0$  dividen  $\Theta_\varepsilon$  en componentes conexas donde las funciones  $x(s)$  e  $y(s)$  son monótonas, véase la Figura 2.1. En particular, en cada una de estas *regiones de monotonía* la curva perfil  $\alpha(s)$  tiene curvatura geodésica con signo constante. Concretamente, la ecuación (2.3) implica que en cada punto  $\alpha(s)$  se satisface

$$\text{sign}(\kappa_1(s)) = \text{sign}(-\varepsilon y'(s)), \quad \text{sign}(\kappa_i(s)) = \varepsilon, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

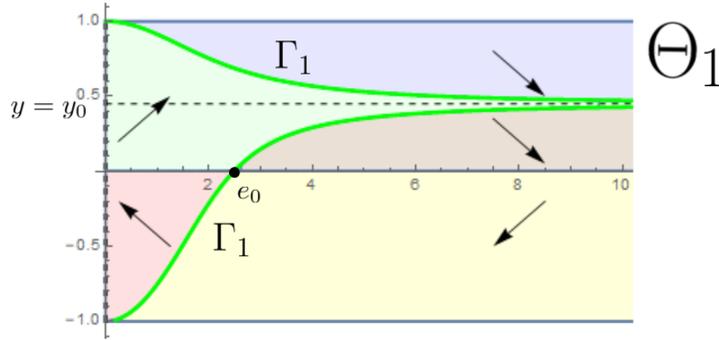


Figura 2.1: El plano de fases  $\Theta_1$  para cierta función determinada  $\mathfrak{h} \geq 0$  con  $\mathfrak{h}(y_0) = 0$ . El punto  $e_0$  es el equilibrio. La curva  $\Gamma_1$  tiene dos componentes conexas, y existen cinco regiones de monotonía, delimitadas por  $\Gamma_1$  y el eje  $y = 0$ . Cada flecha indica la dirección de monotonía en cada una de estas regiones.

De igual manera, si expresamos las órbitas del sistema (2.7) como grafos de la forma  $y = y(x)$  cuando sea posible (esto es, cuando  $y \neq 0$ ) tenemos

$$y \frac{dy}{dx} = (n-1) \frac{1-y^2}{x} - n\varepsilon \mathfrak{h}(y) \sqrt{1-y^2}. \quad (2.11)$$

Por tanto, en cada una de estas regiones de monotonía el signo de  $yy'(x)$  es constante. Si escribimos la expresión  $yy'(x)$  como

$$yy'(x) = n\varepsilon\mathfrak{h}(y) \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \left( \frac{(n-1)\sqrt{1-y^2}}{n\varepsilon\mathfrak{h}(y)} - x \right) = n\varepsilon\mathfrak{h}(y) \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} (\Gamma_\varepsilon(y) - x), \quad (2.12)$$

la monotonía local de la órbita de (2.7) pasando por un cierto  $(x_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$  está determinada por los signos de  $y_0$  y  $x_0 - \Gamma_\varepsilon(y_0)$  (siempre que  $\Gamma_\varepsilon(y_0)$  exista). A continuación detallamos algunas consecuencias triviales, las cuales se deducen directamente a partir de la ecuación (2.12) y pueden verse señaladas en las flechas de la Figura 2.1.

**Lema 2.1.1.** *En las condiciones anteriormente expuestas, para cada  $(x_0, y_0) \in \Theta_\varepsilon$  tal que  $\Gamma_\varepsilon(y_0)$  existe, las siguientes propiedades se cumplen:*

1. Si  $x_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$  (resp.  $x_0 < \Gamma_\varepsilon(y_0)$ ) y además  $y_0 > 0$ , entonces  $y(x)$  es estrictamente decreciente (resp. creciente) en  $x_0$ .
2. Si  $x_0 > \Gamma_\varepsilon(y_0)$  (resp.  $x_0 < \Gamma_\varepsilon(y_0)$ ) y además  $y_0 < 0$ , entonces  $y(x)$  es estrictamente creciente (resp. decreciente) en  $x_0$ .
3. Si  $y_0 = 0$ , entonces la órbita pasando por  $(x_0, 0)$  es ortogonal al eje  $x$ .

En particular, si  $(x_0, y_0) \in \Gamma_\varepsilon$  y además  $y_0 > 0$  (resp.  $y_0 < 0$ ), entonces  $y(x)$  tiene en  $(x_0, y_0)$  un máximo relativo (resp. un mínimo relativo).

Sigamos analizando el comportamiento de las órbitas en el plano de fases. Dada una órbita  $\gamma \in \Theta_\varepsilon$ , sabemos que  $\gamma$  es una curva propia. En particular, o bien permanece contenida en  $\Theta_\varepsilon$ , o bien necesariamente converge a algún punto borde de  $\Theta_\varepsilon$ , los cuales son de la forma  $(0, y)$ , con  $|y| < 1$ , y  $(x, \pm 1)$ , con  $x \geq 0$ . La siguiente proposición restringe los puntos borde a los que puede converger  $\gamma$ .

**Proposición 2.1.2.** *Ninguna órbita en  $\Theta_\varepsilon$  puede converger a algún punto de la forma  $(0, y)$  con  $|y| < 1$ .*

*Demostración.* Argumentando por contradicción, supongamos que  $\gamma$  es una órbita en uno de los planos de fases  $\Theta_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , y tal que  $\gamma \rightarrow (0, y)$ . Sea  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  la curva asociada a la órbita  $\gamma$ , y sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional generada por  $\alpha(s)$ . Entonces,  $(x(s_n), x'(s_n)) \rightarrow (0, y)$  para una sucesión  $s_n$ , y en particular  $\alpha(s)$  se acerca al eje de rotación de forma no ortogonal (ya que  $|y| \neq 1$ ). Las propiedades de monotonía expuestas en el Lema 2.1.1 aseguran que una parte de  $\Sigma$  es un grafo de la forma  $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$ , definido en una bola punteada  $\Omega - \{\mathbf{0}\}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Es más, la función curvatura media de  $\Sigma$ , vista como una función  $H(x_1, \dots, x_n)$  definida en  $\Omega - \{\mathbf{0}\}$ , se extiende de forma continua a  $\mathbf{0}$ , con valor  $\mathfrak{h}(y)$ . En estas condiciones es sabido que  $\Sigma$  se extiende diferenciablemente a la bola  $\Omega$ , véase por ejemplo [LeRo]. En particular, el normal unitario de  $\Sigma$  en  $\mathbf{0}$  es vertical, lo cual es contradictorio con la hipótesis  $|y| < 1$ .

En consecuencia,  $\gamma(s)$  no puede converger a ningún punto de la forma  $(0, y)$  con  $|y| < 1$ .  $\square$

La Proposición 2.1.2 limita a los puntos de la forma  $(x_0, \pm 1)$ , con  $x_0 \geq 0$ , como los únicos puntos borde de  $\Theta_\varepsilon$  a los cuales puede converger una órbita. El siguiente resultado afirma que si una órbita converge a uno de estos puntos, lo hace en tiempo finito.

**Proposición 2.1.3.** *Dada  $\gamma \in \Theta_\varepsilon$ , supongamos que  $\gamma(s) \rightarrow (x_0, \pm 1)$  con  $x_0 \geq 0$ . Entonces, existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(s_0) = (x_0, \pm 1)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\gamma(s) \rightarrow (x_0, \pm 1)$ ,  $x_0 \geq 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , y llegaremos a una contradicción. Si este es el caso, para  $s$  suficientemente grande, la coordenada  $x(s)$  es monótona y está acotada. Por el teorema del valor medio tendríamos  $x'(s) \rightarrow 0$ . Pero por otra parte, en vista de la ecuación (2.7) se tiene que  $x'(s) \rightarrow \pm 1$ , llegando a una contradicción.  $\square$

Una de las dificultades que nos encontramos en el estudio de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales es que no queda claro a partir del sistema (2.7) cómo asegurar la existencia

de solución al sistema (2.7) con condición inicial  $x_0 = 0$ , es decir, la existencia de un ejemplo intersecando el eje de rotación; en el caso  $x_0 = 0$  el sistema (2.7) tiene una singularidad y no podemos aplicar el teorema de unicidad de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias. No obstante, podemos estudiar la existencia de ejemplos de rotación que intersecan el eje por medio de la Proposición 1.5.5.

**Lema 2.1.4.** Sean  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  rotacionalmente simétrica y  $\delta \in \{-1, 1\}$ . Entonces, existe una única (salvo traslaciones verticales)  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que es rotacional con respecto al eje  $x_{n+1}$ , y que interseca a este eje ortogonalmente en algún punto  $p \in \Sigma$ , con normal unitario en  $p$  dado por el vector vertical unitario  $\delta e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

*Demostración.* La Proposición 1.5.5 nos permite resolver el problema de Dirichlet (1.13) para  $\mathcal{H}$ -grafos orientados hacia arriba en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definidos en una bola suficientemente pequeña  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , con valor constante en la frontera. Por ser  $\mathcal{H}$  una función rotacionalmente simétrica, el grafo  $\Sigma$  solución al problema de Dirichlet es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con normal unitario  $e_{n+1}$  en el origen. Como la ecuación en (1.13) es invariante por constantes aditivas, la unicidad de  $\Sigma$  es consecuencia inmediata del principio del máximo. Este mismo argumento se puede realizar para  $\mathcal{H}$ -grafos orientados hacia abajo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , lo cual completa la demostración del Lema 2.1.4.  $\square$

En particular, el Lema 2.1.4 tiene la siguiente consecuencia en el plano de fases  $\Theta_\varepsilon$ .

**Corolario 2.1.5.** Sean  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  y  $\mathcal{H}$  definida por la ecuación (2.1). Supongamos que  $\mathfrak{h}(\delta) \neq 0$  para algún  $\delta \in \{-1, 1\}$ , y sea  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tal que  $\varepsilon \mathfrak{h}(\delta) > 0$ . Entonces, existe una única órbita en  $\Theta_\varepsilon$  que tiene el punto  $(0, \delta) \in \overline{\Theta_\varepsilon}$  como punto inicial o final. Tal órbita no existe en  $\Theta_{-\varepsilon}$ .

*Demostración.* Sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie dada para  $\delta$  por el Lema 2.1.4. Sea  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  la curva perfil de  $\Sigma$  definida para  $s \in [0, s_0]$  o  $s \in (-s_0, 0]$  dependiendo de la orientación de  $\alpha$ , y supongamos que  $x(0) = z'(0) = 0$ , esto es,  $\alpha(0)$  se corresponde con el punto  $p_0$  de intersección ortogonal de  $\Sigma$  con el eje de rotación. Por ser  $p_0$  un

punto umbilical de  $\Sigma$ , las curvaturas principales de  $\Sigma$  en  $p_0$  coinciden; en particular, tienen el mismo signo que el valor  $\mathfrak{h}(\delta)$ .

Por la ecuación (2.3), la curvatura geodésica de  $\alpha(s)$  en  $s = 0$  es distinta de cero y por tanto el signo de  $z'(s)$ , denotado como de costumbre  $\varepsilon$ , es constante para  $s$  suficientemente pequeño. De nuevo, la ecuación (2.3) asegura que  $\varepsilon\mathfrak{h}(\delta) > 0$ . Esto implica que  $\alpha(s)$  genera una órbita en el plano de fases  $\Theta_\varepsilon$  con  $(0, \delta)$  como extremo. La unicidad de esta órbita es consecuencia de la unicidad de  $\Sigma$  en el Lema 2.1.4. En estas condiciones, está claro que tal órbita no puede existir en el plano de fases  $\Theta_{-\varepsilon}$  debido a la condición  $\varepsilon\mathfrak{h}(\delta) > 0$ .  $\square$

El estudio realizado del plano de fases hasta el momento nos permite describir geoméricamente las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales que son difeomorfos a  $\mathbb{S}^n$

**Teorema 2.1.6.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  rotacionalmente simétrica, y sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional y difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces,  $\Sigma$  es una esfera estrictamente convexa.*

*Demostración.* Sea  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  la curva perfil de la hipersuperficie  $\Sigma$ . Por la Proposición 1.3.1, y salvo cambio de la orientación de  $\Sigma$ , podemos suponer que  $\mathcal{H}(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . Por tanto, la curva  $\Gamma_\varepsilon := \Theta_\varepsilon \cap \{x = \Gamma_\varepsilon(y)\}$  donde  $\Gamma_\varepsilon(y)$  está dada por (2.9) no existe para  $\varepsilon = -1$ , y para  $\varepsilon = 1$  se tiene que  $\Gamma := \overline{\Gamma_1}$  es un arco compacto y conexo con extremos correspondientes a los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ . En esta situación, tenemos cuatro regiones abiertas de monotonía  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  dividiendo  $\Theta_1$ , con monotonía en cada  $\Lambda_i$  dada por el Lema 2.1.1, y un equilibrio  $e_0$ ; véase la Figura 2.2.

Por el Corolario 2.1.5, existe una órbita  $\gamma$  en el plano de fases  $\Theta_1$  con el punto  $(0, 1)$  como extremo; tal órbita corresponde a un subconjunto abierto de  $\Sigma$  que interseca al eje de rotación de forma ortogonal en un punto con normal unitario igual a  $e_{n+1}$ . Las propiedades de monotonía de las regiones  $\Lambda_i$  implican que la curva  $\gamma$  está contenida en  $\Lambda_1$  para puntos suficientemente cerca de  $(0, 1)$ . Aquí es importante destacar que la órbita  $\gamma$  no puede intersecar a la curva  $\Gamma$ . En efecto, supongamos que existe un cierto  $s_0$  tal que  $\gamma(s)$  interseca a  $\Gamma$  en el punto  $\gamma(s_0)$ . Por una parte, podemos ver la

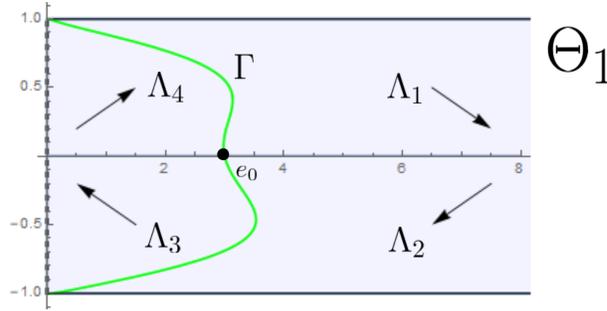


Figura 2.2: El plano de fases  $\Theta_1$ , mostrando la dirección de monotonía de cada región  $\Lambda_i$ .

órbita  $\gamma$  localmente alrededor de  $\gamma(s_0)$  como un grafo vertical  $y(x)$ . Por otra parte, las propiedades de monotonía implican que el grafo  $y(x)$  tiene en  $\gamma(s_0)$  un máximo local. En particular, para valores de  $s$  menores que  $s_0$  y suficientemente cercanos a  $s_0$ , la órbita  $\gamma(s)$  tendría que tener puntos contenidos en la región de monotonía  $\Lambda_4$ , lo cual es contradictorio con el hecho de que  $\gamma$  se encontraba contenida en  $\Lambda_1$ . En consecuencia,  $\gamma$  no puede intersectar a la curva  $\Gamma$ .

La Proposición 2.1.2 asegura que la órbita  $\gamma$  no puede converger a ningún punto de la forma  $(0, y)$  con  $y \in (-1, 1)$ . Como  $\gamma$  no se puede autointersecar, entonces las propiedades de monotonía del plano de fases implican que  $\gamma$  puede tener únicamente dos comportamientos:

1. Si  $\gamma$  entra en algún momento a la región definida por  $\Lambda_3 \cup \Lambda_4$ , entonces  $\gamma$  giraría alrededor del equilibrio  $e_0$  de  $\Theta_1$ , convergiendo asintóticamente a él. Pero esto implicaría que la curva perfil  $\alpha(s)$  convergería asintóticamente a una recta vertical, lo cual contradiría la compacidad de  $\Sigma$ . Por tanto, este caso es imposible.
2. Si  $\gamma$  se queda contenida en la región  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , entonces se puede expresar como un grafo de la forma  $x = g(y) > 0$ , con  $y \in (y_0, 1]$  para algún  $y_0 \in [-1, 1)$ . Por compacidad de  $\Sigma$ , necesariamente  $y_0 = -1$ . Por tanto,  $\gamma$  se puede extender a un grafo compacto  $x = g(y) \geq 0$  para  $y \in [-1, 1]$ , y tiene otro extremo de la forma  $(x_1, -1)$  con  $x_1 \geq 0$ .

Repitiendo el argumento anterior, obtendríamos una segunda órbita  $\sigma$  en  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \subset \Theta_1$ , con el punto  $(0, -1)$  como extremo, correspondiente a un subconjunto de  $\Sigma$  que interseca al eje de rotación en un punto con normal unitario  $-e_{n+1}$ . De nuevo,  $\sigma$  puede ser extendida a un grafo  $x = t(y) \geq 0$  para  $y \in [-1, 1]$ , con otro extremo de la forma  $(x_2, 1)$  con  $x_2 \geq 0$ . Debido a que  $\gamma$  y  $\sigma$  no se pueden intersecar en  $\Theta_1$ , la única posibilidad es que  $x_1 = 0$  o  $x_2 = 0$ . En estas condiciones, la unicidad del Corolario 2.1.5 implica que  $\gamma = \sigma$ , que es, por tanto, una órbita compacta en  $\Theta_1$  que une  $(0, 1)$  con  $(0, -1)$ . De nuevo, el Corolario 2.1.5 asegura que no existen tales órbitas en el plano de fases  $\Theta_{-1}$  con estos puntos como extremos. Esto implica que  $\gamma$  es la órbita que describe  $\alpha(s)$ .

Debido a que  $\gamma$  está enteramente contenida en  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , la ecuación (2.7) implica que  $y'(s) < 0$  para todo  $s$ . Para finalizar, en virtud de la ecuación (2.10), las curvaturas principales de  $\Sigma$  son positivas en cada punto y por tanto  $\Sigma$  es una esfera estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  $\square$

## 2.2. $\mathcal{H}$ -bowls y $\mathcal{H}$ -catenoides en $\mathbb{R}^{n+1}$

En esta sección construiremos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , para elecciones muy generales de funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Como es habitual en este capítulo, denotaremos por  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  a la función relacionada con  $\mathcal{H}$  por medio de la ecuación (2.1).

En primer lugar, construiremos  $\mathcal{H}$ -grafos enteros, estrictamente convexos. Estos  $\mathcal{H}$ -grafos son una generalización del *bowl de traslación* que existe en la teoría de solitones de traslación del flujo por curvatura media, el cual es igualmente un grafo entero, estrictamente convexo. Es por esto que llamaremos a estos ejemplos  $\mathcal{H}$ -bowls.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$ , supongamos que existe  $y_0 \in [0, 1]$  (resp.  $y_0 \in [-1, 0]$ ) tal que  $\mathfrak{h}(y_0) = 0$  y sea  $\mathcal{H}$  definida por  $\mathfrak{h}$  por medio de (2.1). Entonces, existe un  $\mathcal{H}$ -grafo entero y rotacional en  $\mathbb{R}^{n+1}$  orientado hacia arriba (resp. orientado hacia abajo).*

*Es más,  $\Sigma$  es o bien un hiperplano, o bien un grafo estrictamente convexo.*

*Demostración.* Si  $\mathfrak{h}(1) = 0$  (resp.  $\mathfrak{h}(-1) = 0$ ), podemos tomar como  $\Sigma$  un hiperplano horizontal orientado hacia arriba (resp. orientado hacia abajo) en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y el resultado es trivial.

Estudiemos primero el caso en el que  $y_0 \in [0, 1]$ , tomemos  $y_0$  el mayor de los  $y \in [0, 1]$  tales que  $\mathfrak{h}(y) = 0$ , y supongamos que  $\mathfrak{h}(1) > 0$ ; los demás casos a considerar, a saber  $\mathfrak{h}(1) < 0$  e  $y_0 \in [-1, 0]$  con  $\mathfrak{h}(-1) > 0$  y  $\mathfrak{h}(-1) < 0$ , se prueban de forma similar o tras un cambio de orientación.

Por ser  $\mathfrak{h}(y) > 0$  en el subintervalo  $(y_0, 1]$  y  $\mathfrak{h}(y_0) = 0$ , el grafo horizontal  $\Gamma := \Theta_1 \cap \{x = \Gamma_1(y)\}$  definido por (2.9) tiene una componente conexa dada por la restricción de  $\Gamma_1(y)$  al subintervalo  $(y_0, 1]$ , y satisface  $\Gamma_1(1) = 0$  y  $\Gamma_1(y) \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow y_0$ .

Definimos ahora  $\Lambda \subset \Theta_1$  por  $\Lambda = \{(x, y) \in \Theta_1 : y > y_0\}$ , y sean  $\Lambda^+ := \{(x, y) \in \Lambda; x > \Gamma_1(y)\}$  y  $\Lambda^- := \{(x, y) \in \Lambda; x < \Gamma_1(y)\}$ . Estas componentes  $\Lambda^+$  y  $\Lambda^-$  son las únicas componentes conexas de  $\Lambda - \Gamma$ , y tienen a  $\Gamma$  como su frontera común. Es más,  $\Lambda^+$ ,  $\Lambda^-$  son regiones de monotonía de  $\Theta_1$ , y en vista del Lema 2.1.1 cada órbita  $y = y(x)$  en  $\Lambda^+$  (resp.  $\Lambda^-$ ) satisface  $y'(x) < 0$  (resp.  $y'(x) > 0$ ); véase la Figura 2.3.

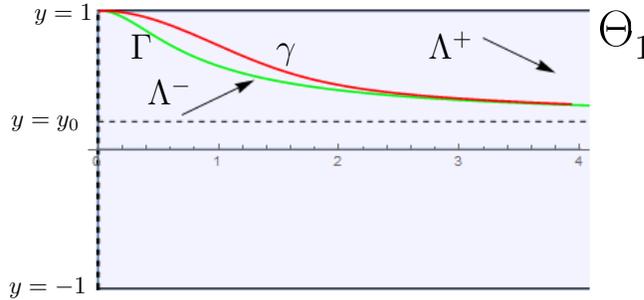


Figura 2.3: El plano de fases  $\Theta_1$ , mostrando las direcciones de monotonía de las regiones  $\Lambda^+$ ,  $\Lambda^-$ . En verde, la curva  $\Gamma$ ; en rojo, la órbita  $\gamma$ .

Sea  $\Sigma$  el  $\mathcal{H}$ -grafo rotacional orientado hacia arriba en  $\mathbb{R}^{n+1}$  construido en el Lema 2.1.4, y sea  $\gamma$  la órbita en  $\Theta_1$  asociada a la curva perfil  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  de  $\Sigma$ , la cual tiene como extremo el punto  $(0, 1)$ ; véase el Corolario 2.1.5. Por las propiedades de

monotonía explicadas anteriormente, la órbita  $\gamma$  está contenida en  $\Lambda^+$  para puntos cercanos a  $(0, 1)$ . Por las mismas propiedades de monotonía, y aplicando un razonamiento similar al expuesto en la prueba del Teorema 2.1.6, tenemos que la órbita  $\gamma$  no interseca en ningún punto a la curva  $\Gamma_1$ , y por tanto podemos concluir que  $\gamma$  está globalmente contenida en la región  $\Lambda^+$ . Al ser  $\gamma$  una curva propia se puede expresar como un grafo de la forma  $y = r(x)$ , donde  $r \in C^1([0, \infty))$  satisface  $r(0) = 1$ ,  $r(x) > y_0$  y  $r'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ .

El principio de comparación de hipersuperficies por curvatura media implica que  $r(x) \rightarrow y_0$  para  $x \rightarrow \infty$ . En particular, la curvatura media de  $\Sigma$  tiende a cero en infinito. Esto implica que  $\Sigma$  es un grafo rotacional y entero en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Al estar  $\gamma$  totalmente contenida en  $\Theta_1$ , la ecuación (2.10) asegura que las curvaturas principales  $\kappa_2, \dots, \kappa_n$  de  $\Sigma$  son positivas en todo punto. Es más, debido a que  $\gamma$  no abandona la región  $\Lambda^+$  las ecuaciones (2.7) y (2.10) nos permiten concluir que  $\kappa_1$  es también positiva en todo punto. Por tanto,  $\Sigma$  es un grafo rotacional, entero y estrictamente convexo.

Este argumento finaliza la prueba supuesto que  $\mathfrak{h}(1) > 0$  y  $y_0 \geq 0$ . Un argumento similar funciona en el caso  $\mathfrak{h}(-1) > 0$  e  $y_0 \leq 0$ . Los dos casos restantes, a saber  $\mathfrak{h}(1) < 0$ ,  $y_0 \geq 0$  y  $\mathfrak{h}(-1) < 0$ ,  $y_0 \leq 0$ , se reducen a los anteriores mediante un cambio de la orientación. Esto completa la prueba de la Proposición 2.2.1.  $\square$

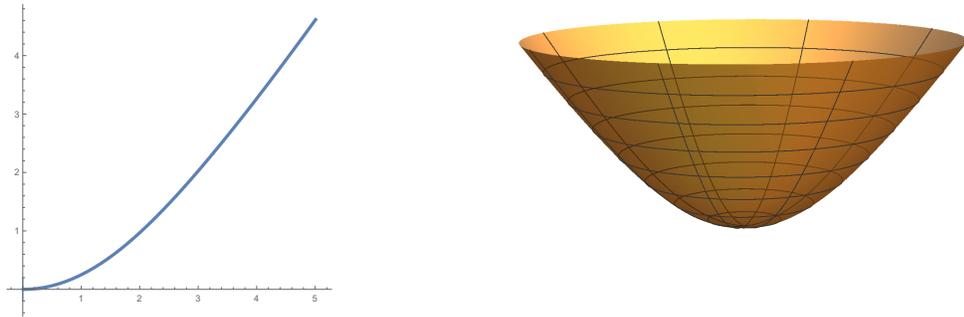


Figura 2.4: La curva perfil y el  $\mathfrak{h}$ -bowl en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y - 1/2$ .

El siguiente resultado muestra que existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales de *tipo*

catenoide para una gran cantidad de funciones  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  rotacionalmente simétricas.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$ ,  $\mathfrak{h} \leq 0$  supongamos que  $\mathfrak{h}(\pm 1) = 0$ , y sea  $\mathcal{H}$  definida a partir de  $\mathfrak{h}$  por medio de la ecuación (2.1). Entonces, existe una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales, propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cuya curvatura de Gauss-Kronecker es estrictamente negativa en todo punto, y difeomorfas a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Cada elemento de esta familia es un bigrafo sobre  $\mathbb{R}^n - \mathbb{B}^n(r)$ , donde  $\mathbb{B}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ , para cierto  $r > 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{H}$  la función definida a partir de  $\mathfrak{h}$  por medio de la ecuación (2.1). Dado  $x_0 > 0$ , consideremos el problema de Cauchy asociado al sistema (2.7) con condiciones iniciales  $x(0) = x_0, x'(0) = 0$ . Entonces, existe una curva  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  parametrizada por su longitud de arco solución de (2.5), la cual satisface, salvo una traslación vertical,  $\alpha(0) = (x_0, 0), \alpha'(0) = (0, 1)$ . Sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  obtenida al rotar  $\alpha(s)$  alrededor del eje  $x_{n+1}$ . Entonces, la órbita  $\gamma$  del sistema (2.7) asociada a  $\alpha(s)$  pasa a través de  $(x_0, 0)$  y pertenece al plano de fases  $\Theta_1$  alrededor de ese punto; esto es,  $\varepsilon = 1$  en (2.7).

Por ser  $\mathfrak{h} \leq 0$ , la curva  $\Gamma_1 := \Theta_1 \cap \{x = \Gamma_1(y)\}$ , donde  $\Gamma_1(y)$  viene dada por (2.9), no existe. Por tanto, en el plano de fases  $\Theta_1$  hay exactamente dos regiones de monotonía, definidas por los subconjuntos  $\Lambda^+ := \Theta_1 \cap \{y > 0\}$  y  $\Lambda^- := \Theta_1 \cap \{y < 0\}$ . Toda órbita vista como grafo vertical  $y = y(x)$  por medio de la ecuación (2.11) en  $\Lambda^+$  (resp.  $\Lambda^-$ ) satisface  $y'(x) > 0$  (resp.  $y'(x) < 0$ ).

Notemos que la condición  $\mathfrak{h}(\pm 1) = 0$ , junto al hecho de que  $\mathfrak{h}$  tiene regularidad  $C^1$  implican que ninguna órbita en  $\Theta_1$  puede tener un punto extremo de la forma  $(x_0, \pm 1)$  para algún  $x_0 > 0$ . En efecto, por ser  $\mathfrak{h}$  de clase  $C^1$  y anularse en  $\pm 1$ , la parte derecha del sistema (2.7) es una función de clase  $C^1$ . En consecuencia, podemos considerar la extensión del espacio de fases  $\Theta_1$  a la semibanda  $(0, \infty) \times [-1, 1]$ , donde igualmente se tiene existencia y unicidad dadas condiciones iniciales de la forma  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 > 0, y_0 \in [-1, 1]$ . Ahora bien, la órbita dada por  $\sigma(s) = (x_0 \pm s, \pm 1)$  es solución de (2.7) y satisface  $\sigma(0) = (x_0, \pm 1)$ . La  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie asociada a la órbita  $\sigma(s)$  es un hiperplano de la forma  $\{x_{n+1} = c; c \in \mathbb{R}\}$ , con orientación dada por el vector  $\pm e_{n+1}$ . En consecuencia,

la unicidad del sistema (2.7) imposibilita que cualquier otra órbita  $\gamma$  en  $\Theta_1$  tenga un punto límite de la forma  $(x_0, \pm 1)$ .

Las propiedades desarrolladas en el párrafo anterior nos permiten deducir que  $\gamma$  se puede expresar como un grafo horizontal  $x = r(y)$  para cierta  $r \in C^1([a, b])$  con  $a < 0 < b$ , y tal que  $r(0) = x_0$ ,  $r'(y) > 0$  (resp.  $r'(y) < 0$ ) para todo  $y \in (0, b)$  (resp. para todo  $y \in (a, 0)$ ), y  $r(y) \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow \{a, b\}$ . Concluimos por la ecuación (2.11) que esto solo es posible en nuestra situación si  $a = -1$ ,  $b = 1$ . Por tanto,  $\Sigma$  es un bigrafo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  sobre el dominio  $\Omega := \mathbb{R}^n - \mathbb{B}^n(x_0)$ , difeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Esto es,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  donde ambas hipersuperficies  $\Sigma_i$  son grafos sobre  $\Omega$  con  $\partial\Sigma_i = \partial\Omega$ , y cada  $\Sigma_i$  interseca el hiperplano  $x_{n+1} = 0$  de forma ortogonal a lo largo de  $\partial\Sigma_i$ .

En estas condiciones, la ecuación (2.7) implica que  $y'(s) > 0$  para todo  $s$ . Por tanto, por (2.10) tenemos que en todo  $p \in \Sigma$  las curvaturas principales satisfacen  $\kappa_1 < 0$  y  $\kappa_2 = \dots = \kappa_n > 0$ . En particular, la curvatura de Gauss-Kronecker es negativa en todo punto. Esto completa la prueba de la Proposición 2.2.2.  $\square$



Figura 2.5: La curva perfil y la gráfica de una  $\mathcal{H}$ -catenoide en  $\mathbb{R}^3$ , para la función  $\mathfrak{h}(y) = y^2 - 1$ .

Estos ejemplos son una generalización de las *catenoides* de la teoría de hipersuperficies mínimas; de hecho, la función  $\mathfrak{h} \equiv 0$  se encuentra en las condiciones de la Proposición 2.2.2. En este caso, las catenoides tienen una parametrización explícita, pero este no es el caso de las  $\mathcal{H}$ -catenoides generales construidas en la Proposición 2.2.2. Es más, es sabido que las catenoides mínimas tienen altura no acotada respecto del plano sobre el que son bigrafos, hecho que fue la piedra angular en la demostración de Hoffman y Meeks de su célebre teorema del semiespacio [HoMe] para superficies mínimas propiamente inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

El estudio del plano de fases no da un comportamiento asintótico explícito de estas  $\mathcal{H}$ -catenoides. En particular, la función altura de las  $\mathcal{H}$ -catenoides puede estar acotada o no, dependiendo de la función predeterminada  $\mathcal{H}$  (ver [Bue6]).

## 2.3. Un teorema de clasificación de tipo Delaunay

Un resultado clásico en la teoría de hipersuperficies con curvatura media constante  $H > 0$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es el teorema de Delaunay, el cual clasifica las  $H$ -hipersuperficies de rotación, completas e inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  como sigue: una esfera totalmente umbilical  $\mathcal{S}_H$ , el cilindro circular recto  $\mathbb{S}^{n-1}((n-1)/(nH)) \times \mathbb{R}$ , una familia uniparamétrica de *onduloides* propiamente embebidos, y una familia uniparamétrica de *nodoides* propiamente inmersos, con autointersecciones. Ambas familias de onduloides y nodoides son invariantes bajo un grupo discreto de traslaciones paralelas al eje de rotación en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

El objetivo de esta sección es extender la clasificación dada por el teorema de Delaunay a las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , suponiendo que la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es positiva, rotacionalmente simétrica y *antipodalmente simétrica*, esto es,  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ . En términos de la función  $\mathfrak{h}$  asociada a  $\mathcal{H}$  por medio de (2.1), esto implica que  $\mathfrak{h}(y) = \mathfrak{h}(-y) > 0$ ,  $\forall y \in [-1, 1]$ .

Es necesario mencionar que, a diferencia del caso en que la función  $\mathcal{H}$  es constante, para una función  $\mathcal{H}$  en las condiciones anteriores las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales en general no están dadas por una fórmula integral explícita. De igual forma, si la función  $\mathcal{H}$  no tiene la simetría  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$  en  $\mathbb{S}^n$  este resultado de clasificación no es cierto. En la Sección 2.4 daremos ejemplos explícitos de funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , que no son antipodalmente simétricas y que probarán esta afirmación.

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función rotacionalmente simétrica, positiva y tal que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ , y sea  $\mathfrak{h}$  la función definida por la ecuación (2.1). Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional alrededor del eje  $x_{n+1}$  es, salvo traslaciones verticales, uno de los siguientes ejemplos:*

1. El cilindro vertical recto  $C_{\mathcal{H}} := \mathbb{S}^{n-1}((n-1)/(n\mathfrak{h}(0))) \times \mathbb{R}$ , de curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ .
2. Una  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .
3. Una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -onduloides  $O_{\mathcal{H}}$  propiamente embebidos.
4. Una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -nodooides  $N_{\mathcal{H}}$  propiamente inmersos.

Es más, cada  $\mathcal{H}$ -onduloide o  $\mathcal{H}$ -nodoide es invariante por una traslación vertical en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es difeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , y está contenido en un entorno tubular del eje  $x_{n+1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La imagen de la aplicación de Gauss de cada  $\mathcal{H}$ -onduloide omite un entorno abierto de los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ . La imagen de la aplicación de Gauss de cada  $\mathcal{H}$ -nodoide es  $\mathbb{S}^n$ .

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{h}$  la función definida en términos de  $\mathcal{H}$  mediante la ecuación (2.1). La condición  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ , se traduce en que la función  $\mathfrak{h}$  es par y positiva en el intervalo  $[-1, 1]$ . La hipótesis  $\mathfrak{h}(y) = \mathfrak{h}(-y) > 0$  tiene la siguiente consecuencia en el plano de fases  $\Theta_{\varepsilon}$ : si  $(x(s), y(s))$  es una órbita en  $\Theta_{\varepsilon}$  solución de (2.7) para  $\mathfrak{h}$ , entonces la órbita  $(x(-s), -y(-s))$  es también una solución del sistema (2.7). Geométricamente, esto significa que las órbitas del plano de fases  $\Theta_{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  son simétricas con respecto al eje  $y = 0$ . La curva  $\Gamma_1$  en  $\Theta_1$  dada por (2.9) junto al eje  $y = 0$  dividen el plano de fases  $\Theta_1$  en cuatro regiones de monotonía  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$ , todas ellas teniendo al equilibrio  $e_0$  dado por (2.8) en su frontera. Por ser  $\mathfrak{h} > 0$ , la curva  $\Gamma_{-1}$  en  $\Theta_{-1}$  no existe y por tanto las regiones de monotonía de  $\Theta_{-1}$  vienen dadas por:  $\Lambda^+ = \Theta_{-1} \cap \{y > 0\}$  y  $\Lambda^- = \Theta_{-1} \cap \{y < 0\}$ . La Figura 2.6 muestra los planos de fases  $\Theta_1$  y  $\Theta_{-1}$ .

El análisis de las órbitas en  $\Theta_{-1}$  es trivial según las propiedades de monotonía expuestas en el Lema 2.1.1. Así, usando además la Proposición 2.1.2, obtenemos que cualquiera de estas órbitas viene dada por un grafo horizontal  $x = g(y)$  de clase  $C^1$ , con  $g(y) = g(-y) > 0$  para todo  $y \in (-1, 1)$ , y tal que  $g$  restringida a  $[0, 1]$  es estrictamente creciente. Si el grafo asociado a cualquier órbita cumpliera  $g(y) \rightarrow \infty$  para

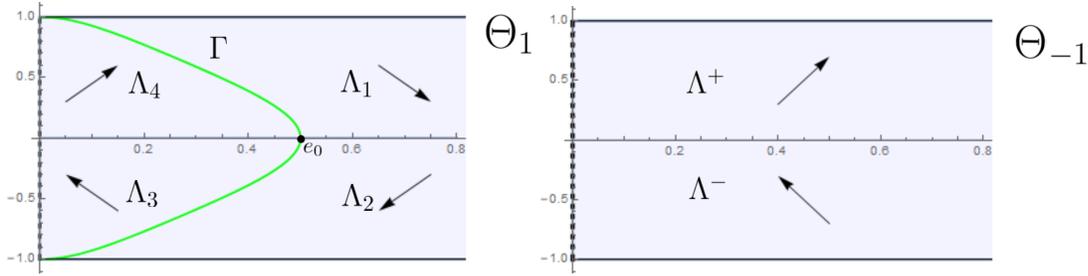


Figura 2.6: Los planos de fases  $\Theta_1$  y  $\Theta_{-1}$  para  $h(y) = h(-y) > 0$ .

$y \rightarrow 1$ , la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  descrita por tal órbita sería un bigrafo simétrico sobre el exterior de una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ , tal y como ocurría en el caso de las  $\mathcal{H}$ -catenoides, lo cual contradiría el principio de comparación por curvatura media. En efecto, por una parte  $h$  es una función positiva definida en un compacto y por tanto alcanza su mínimo, el cual es positivo. Pero por otra parte, podríamos comparar la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie con una esfera suficientemente grande, la cual tendrá curvatura media constante suficientemente pequeña menor que el mínimo de  $h$ , y llegaríamos a una contradicción.

En consecuencia, por ser las órbitas en  $\Theta_{-1}$  curvas propias y en vista de la Proposición 2.1.3, toda órbita en  $\Theta_{-1}$  tiene dos puntos extremos de la forma  $(x_0, \pm 1)$  para algún  $x_0 > 0$ . La  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie correspondiente  $\Sigma_{-1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es un bigrafo simétrico y compacto (con borde), sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq |x| \leq x_0\}$ ,  $\alpha > 0$ , y su borde viene dado por

$$\partial\Sigma_{-1} = (\mathbb{S}^{n-1}(x_0) \times \{a\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1}(x_0) \times \{b\}), \quad (2.13)$$

para ciertos  $a < b$ . La coordenada  $z(s)$  de la curva perfil  $\alpha(s)$  de  $\Sigma_{-1}$  es estrictamente decreciente y el normal unitario de  $\Sigma_{-1}$  a lo largo de  $\partial\Sigma_{-1} \cap \{x_{n+1} = a\}$  (resp. a lo largo de  $\partial\Sigma_{-1} \cap \{x_{n+1} = b\}$ ) es constante, e igual a  $e_{n+1}$  (resp. igual a  $-e_{n+1}$ ).

Llegados a este punto, es conveniente explicar cómo se extiende la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma_{-1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y cómo se interpreta este comportamiento en los planos de fases. En el análisis previo realizado, sabemos que toda órbita  $\gamma \in \Theta_{-1}$  tiene dos puntos extremos

de la forma  $(x_0, \pm 1)$ , y que  $\alpha(s)$  se comporta de la siguiente forma: existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(s_0) = (x_0, b)$ ,  $\alpha'(s_0) = (-1, 0)$ , y para  $s > s_0$  la segunda coordenada de  $\alpha(s)$  decrece hasta llegar a cierto  $s_1 > s_0$  tal que  $\alpha(s_1) = (x_0, a)$ ,  $a < b$ ,  $\alpha'(s_1) = (1, 0)$ . En este punto se tiene que  $z'(s_1) = 0$  y  $x'(s_1) = 1$  y así, de (2.5),  $z''(s_1) > 0$ , es decir  $z'(s) > 0$  para  $s > s_1$ . En consecuencia, la segunda coordenada de la curva  $\alpha(s)$  a partir de  $s_1$  es creciente y por tanto la órbita del sistema (2.7) asociada a la curva  $\alpha(s)$  para  $s > s_1$  se encuentra contenida en  $\Theta_1$ .

En conclusión, cuando una órbita en  $\Theta_{-1}$  alcanza un extremo de la forma  $(x_0, \pm 1)$ , tal órbita “continúa” en el plano de fases  $\Theta_1$ , y dicha continuación se tiene que entender como hemos expuesto: como la extensión de la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie asociada mediante la resolución del problema de Cauchy para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales correspondiente en puntos con normal unitario  $\pm e_{n+1}$ . Esta discusión se aplica de igual forma en el caso en el que la órbita alcance un extremo de la forma  $(x_0, \pm 1)$  en  $\Theta_1$ .

Una vez descritas las órbitas en el plano de fases  $\Theta_{-1}$ , nos centramos en analizar las órbitas en  $\Theta_1$  junto a las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies asociadas a ellas. Primero, observemos que el equilibrio  $e_0 \in \Theta_1$  corresponde a una hipersuperficie rotacional a distancia constante al eje de rotación, con función ángulo idénticamente nula, y por tanto  $e_0$  define, salvo traslaciones, el cilindro circular recto con curvatura media constante igual a  $\mathfrak{h}(0)$  paralelo al eje  $x_{n+1}$ .

Analicemos ahora la estructura de las órbitas de  $\Theta_1$  alrededor de  $e_0$ . Por ser  $\mathfrak{h}$  una función par necesariamente se cumple  $\mathfrak{h}'(0) = 0$ , y por tanto el *sistema linealizado* en  $e_0$  asociado al sistema no lineal (2.7) para  $\varepsilon = 1$  es

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -n^2\mathfrak{h}(0)^2/(n-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

La configuración de las órbitas del sistema (2.14) alrededor del origen son elipses y por tanto cerradas. La teoría clásica de sistemas autónomos no lineales asegura que hay dos configuraciones posibles para el espacio de las órbitas del sistema (2.7) alrededor de  $e_0$ ; o bien las órbitas son curvas cerradas (y por tanto  $e_0$  tiene una estructura de *centro*), o bien giran alrededor de  $e_0$  de forma espiral. La segunda posibilidad no se

puede dar en nuestra situación, ya que las órbitas de (2.7) son simétricas respecto al eje  $y = 0$  y  $e_0$  pertenece a tal eje. En consecuencia, deducimos que *todas las órbitas en  $\Theta_1$  permanecen a distancia positiva del equilibrio  $e_0$* , y en particular ninguna órbita puede converger al equilibrio.

Sea  $\mathcal{S}_+$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional que interseca ortogonalmente el eje  $x_{n+1}$ , con normal unitario  $e_{n+1}$ , dada por la Proposición 2.1.4, y sea  $\gamma_+$  la órbita correspondiente descrita en el Corolario 2.1.5. Es claro que  $\gamma_+$  es una órbita que tiene al punto  $(0, 1)$  como extremo, y que para puntos cercanos a  $(0, 1)$  se encuentra en la región de monotonía  $\Lambda_1$ . Por una parte,  $\gamma_+$  no puede converger a  $e_0$  como consecuencia de lo expuesto en el párrafo anterior. Por otra parte,  $\gamma_+$  no puede permanecer en todo momento en  $\Lambda_1$ , ya que contradiría el principio de comparación por curvatura media. En esta situación,  $\gamma_+$  necesariamente ha de intersecar el eje  $y = 0$  de forma ortogonal en cierto  $(x_0, 0) \neq e_0$ , con  $x_0 > 0$ .

Por simetría de la función  $\mathfrak{h}$  podemos definir la órbita  $\gamma_-(s) = (x(-s), -y(-s)) \in \Theta_1$ , la cual tiene como punto extremo  $(0, -1)$ . Por unicidad del problema de Cauchy,  $\gamma_-$  es la órbita correspondiente a la  $\mathfrak{h}$ -hipersuperficie  $\mathcal{S}_-$  dada por la Proposición 2.1.4 que interseca ortogonalmente el eje  $x_{n+1}$  con normal unitario  $-e_{n+1}$ . En particular, las órbitas  $\gamma_+$  y  $\gamma_-$  se intersecan de forma tangente en el punto  $(x_0, 0)$ .

Como las órbitas  $\gamma_+$  y  $\gamma_-$  se juntan en el punto  $(x_0, 0)$ , la unión  $\gamma_0 := \gamma_+ \cup \gamma_-$  es una órbita del sistema (2.7), la cual es un arco compacto que une los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ , y está contenida en  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ . Sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie generada por  $\gamma_0$ . Por ser  $\gamma_0$  un arco compacto uniendo los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ ,  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional que interseca el eje de revolución en dos puntos y con función altura estrictamente creciente, esto es,  $\Sigma$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ . Por estar  $\gamma_0$  contenida en la región  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , la ecuación (2.10) implica que las curvaturas principales son estrictamente positivas, esto es,  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa; véase la Figura 2.7. Denotaremos a esta  $\mathcal{H}$ -esfera por  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .

La órbita  $\gamma_0$  de  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  separa  $\Theta_1$  en dos componentes conexas: una conteniendo el equilibrio  $e_0$  a la que denotaremos por  $\mathcal{W}_0$ , y la otra donde la coordenada  $x > 0$  es

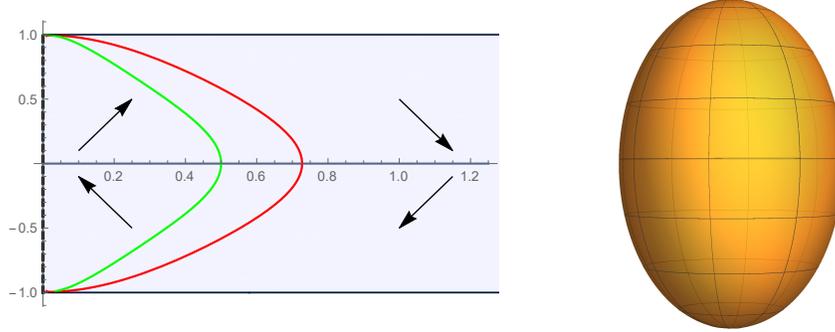


Figura 2.7: A la izquierda, el plano de fases  $\Theta_1$  y el comportamiento en cada región de monotonía para la elección  $h(y) = 1 + y^2$  para superficies en  $\mathbb{R}^3$ . La órbita  $\gamma_0$ , en rojo, corresponde a la  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa  $S_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^3$ . A la derecha, la esfera  $S_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^3$ . La curva verde representa la curva  $\Gamma_1$  en  $\Theta_1$ .

no acotada y que denotaremos por  $\mathcal{W}_{\infty}$ . Toda órbita de  $\Theta_1$  está contenida en una de estas dos regiones abiertas. Por simetría y las propiedades de monotonía, y el hecho de que la curva  $\gamma_0$  es la única órbita en  $\Theta_1$  con un extremo de la forma  $(0, \pm 1)$ , es claro que toda órbita contenida en  $\mathcal{W}_{\infty}$  es un grafo horizontal  $x = g(y)$  simétrico respecto del eje  $y = 0$  y con  $g(-1) = g(1) = x_1$  para cierto  $x_1 > 0$ . Por tanto, la función  $g(y)$  es estrictamente creciente en el intervalo  $[-1, 0]$  y estrictamente decreciente en el intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\Sigma_1$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional en  $\mathbb{R}^{n+1}$  asociada a tal órbita, y sea  $\alpha = (x(s), z(s))$  su curva perfil. Por ser  $\varepsilon = 1$  tenemos que la coordenada  $z(s)$  satisface  $z'(s) > 0$ . Aplicando argumentos similares a los usados en el estudio del plano de fases  $\Theta_{-1}$ , concluimos que la hipersuperficie  $\Sigma_1$  es un bigrafo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , simétrico con respecto a algún dominio de  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq |x| \leq \beta\}$ , y con borde dado por

$$\partial\Sigma_1 = (\mathbb{S}^{n-1}(x_1) \times \{c\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1}(x_1) \times \{d\}), \quad (2.15)$$

para ciertos  $c < d$ . En esta situación, el normal unitario a  $\Sigma$  a lo largo de  $\partial\Sigma_1 \cap \{x_{n+1} = c\}$  (resp. a lo largo de  $\partial\Sigma_1 \cap \{x_{n+1} = d\}$ ) es  $e_{n+1}$  (resp.  $-e_{n+1}$ ).

En consecuencia, por la unicidad de la solución del problema de Cauchy para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , podemos deducir que dado  $x_1 > 0$  tanto  $\Sigma_1$

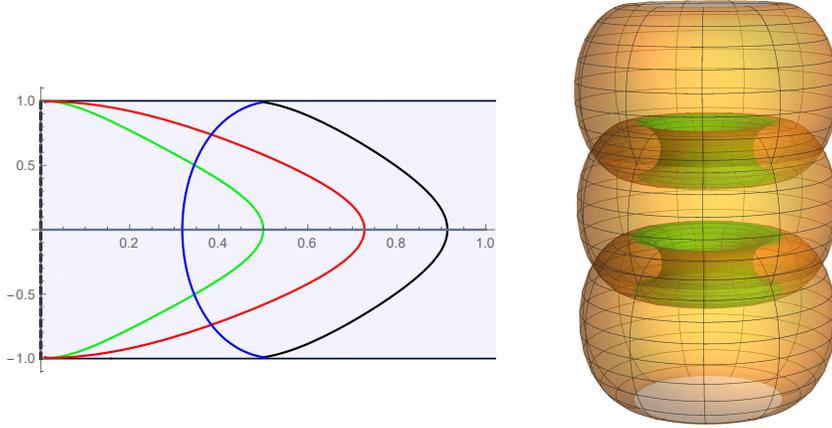


Figura 2.8: A la izquierda, el plano de fases  $\Theta_1$  para la función  $h(y) = 1 + y^2$ . La curva verde corresponde a la curva  $\Gamma_1$ , y la curva roja es la órbita  $\gamma_0$  de la  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa. La curva negra es la órbita correspondiente a la pieza del  $\mathcal{H}$ -nodoide donde  $z' > 0$ , y por tanto pertenece a  $\Theta_1$ . La curva azul es la órbita del  $h$ -nodoide en  $\Theta_{-1}$ . Notemos que la órbita azul puede intersectar otras curvas sin llegar a contradicción, ya que esta curva pertenece a otro plano de fases distinto. A la derecha, una imagen de un trozo compacto del  $\mathcal{H}$ -nodoide en  $\mathbb{R}^3$ .

como  $\Sigma_{-1}$  se pueden pegar de forma diferenciable a lo largo de sus fronteras, donde los normales unitarios coinciden, para formar una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie mayor. Esto es porque las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_{-1}$  están definidas salvo traslaciones verticales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y por tanto podemos trasladar las soluciones hasta hacer que sus fronteras coincidan, esto es, hacer que  $a = c$  o  $b = d$  (y por tanto, en la frontera  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_{-1}$  tienen los mismos datos de Cauchy).

Iterando este proceso obtenemos una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional y propia, no embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , difeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$  e invariante por un grupo discreto de traslaciones verticales. Este proceso demuestra la existencia de la familia de los  $\mathcal{H}$ -nodoides  $N_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , véase la Figura 2.8.

Para finalizar la prueba del Teorema 2.3.1, consideremos una órbita  $\gamma$  de  $\Theta_1$  conteni-

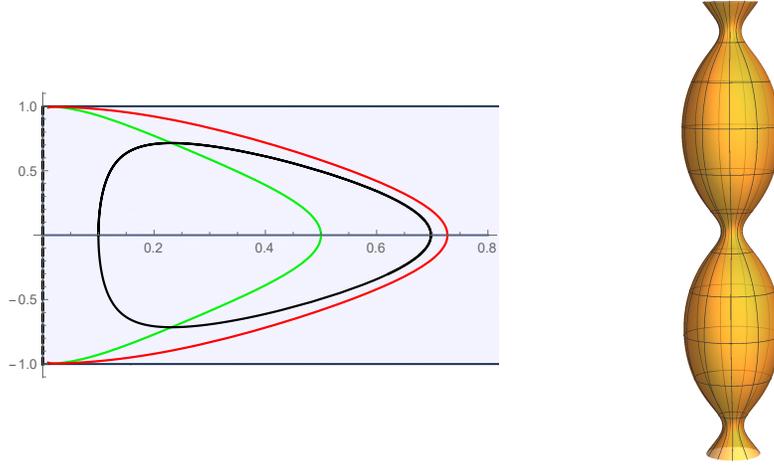


Figura 2.9: A la izquierda, el plano de fases  $\Theta_1$  para la función  $h(y) = 1 + y^2$ . La curva verde corresponde, como es usual, a  $\Gamma_1$ , y la curva roja a la órbita  $\gamma_0$  de la  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ . La curva negra es la órbita de un  $\mathcal{H}$ -onduloide en  $\mathbb{R}^3$ . A la derecha, una imagen de un  $\mathcal{H}$ -onduloide en  $\mathbb{R}^3$ .

da en el interior de la región  $\mathcal{W}_0$  y sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie asociada a  $\gamma$ . Recordemos que previamente probamos que  $\gamma$  se encuentra a una distancia positiva de  $e_0$ . Por ser  $\gamma$  una curva simétrica con respecto del eje  $y = 0$ , teniendo en cuenta las propiedades de monotonía de  $\Theta_1$  solo dos posibilidades se pueden dar en el comportamiento global de  $\gamma$ :

1.  $\gamma$  es una curva cerrada conteniendo a  $e_0$  en su región interior, o
2.  $\gamma$  es un arco propio en  $\Theta_1$  con dos extremos límite de la forma  $(0, y_1), (0, y_2)$ , con  $-1 < y_1 \leq 0 \leq y_2 < 1$ .

Notemos que la segunda posibilidad no puede darse, como consecuencia de nuevo de la Proposición 2.1.2. Como consecuencia, deducimos que toda órbita  $\gamma$  contenida en la región  $\mathcal{W}_0$  es una curva cerrada que contiene el equilibrio  $e_0$  en su región interior. Esto implica que la curva perfil  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  de  $\Sigma$  está definida para todo valor

del parámetro  $s$ . Como  $\gamma$  está enteramente contenida en  $\mathcal{W}_0$ , se tiene que  $\varepsilon = 1$  en todo momento y por tanto  $z'(s) > 0$  para todo  $s$ . Al ser  $\gamma$  una curva cerrada sus coordenadas son periódicas y en consecuencia  $x(s)$  es periódica. Estas propiedades implican que  $\Sigma$  es un  $\mathcal{H}$ -onduloide  $O_{\mathcal{H}}$ , con todas las propiedades mencionadas en el enunciado del teorema, véase la Figura 2.9.

Antes de concluir la prueba del teorema, es interesante mencionar que la familia de  $\mathcal{H}$ -onduloides, para  $\mathcal{H}$  en las condiciones del Teorema 2.3.1, es una familia uniparamétrica continua. Esta familia viene parametrizada por la distancia al eje de rotación que alcanzan los  $\mathcal{H}$ -onduloides, tal y como ocurre en el caso  $\mathcal{H} \equiv \text{cte}$ . Cuando el parámetro tiende a cero, los  $\mathcal{H}$ -onduloides convergen a una familia de  $\mathcal{H}$ -esferas  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  tangentes (con singularidad en los puntos de tangencia); por otra parte, si el parámetro converge al punto de equilibrio  $e_0$  entonces los  $\mathcal{H}$ -onduloides convergen al cilindro  $C_{\mathcal{H}}$ .  $\square$

**Observación 2.3.2.** *Si la función  $\mathcal{H}$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{S}^n$  y satisface  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ , el teorema de Guan-Guan 1.4.5 asegura la existencia de una  $\mathcal{H}$ -esfera  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Tal  $\mathcal{H}$ -esfera es rotacional si  $\mathcal{H}$  es rotacionalmente simétrica, ya que podemos aplicar el método de reflexión de Alexandrov respecto de cualquier hiperplano vertical.*

*En el Teorema 2.3.1 hemos probado la existencia de  $\mathcal{H}$ -esferas estrictamente convexas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuando  $\mathcal{H}$  es de clase  $C^1$  y satisface  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^n$ , pero con la hipótesis adicional de ser rotacionalmente simétrica, extendiendo el teorema de Guan-Guan 1.4.5. En el caso particular en el que el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^3$ , el Teorema 1.4.4 asegura que  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  es la única  $\mathcal{H}$ -esfera topológica inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .*

Las ideas desarrolladas en la prueba del Teorema 2.3.1 pueden ser usadas para clasificar las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales para otros tipos de funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ .

Por ejemplo, supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es rotacionalmente simétrica y tal que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0 \forall x \in \mathbb{S}^n - \{p_N, p_S\}$ ,  $\mathcal{H}(p_N) = \mathcal{H}(p_S) = 0$ , donde  $p_N, p_S$  son los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ , respectivamente, y sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  la función de-

finida por  $\mathcal{H}$  mediante la ecuación (2.1). En esta situación, podemos probar usando las ideas desarrolladas hasta el momento que existen exactamente cuatro tipos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ : hiperplanos horizontales, el cilindro vertical  $C_{\mathcal{H}} = \mathbb{S}^n((n-1)/(n\mathfrak{h}(0))) \times \mathbb{R}$ , una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -catenoides definidas como las de la Proposición 2.2.2 (con la orientación opuesta) y una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -onduloides. En esta situación, los  $\mathcal{H}$ -onduloides varían entre el cilindro  $C_{\mathcal{H}}$  y un doble recubrimiento de hiperplanos horizontales menos un punto, todos unidos a través del eje  $x_{n+1}$ . Véase la Figura 2.10.

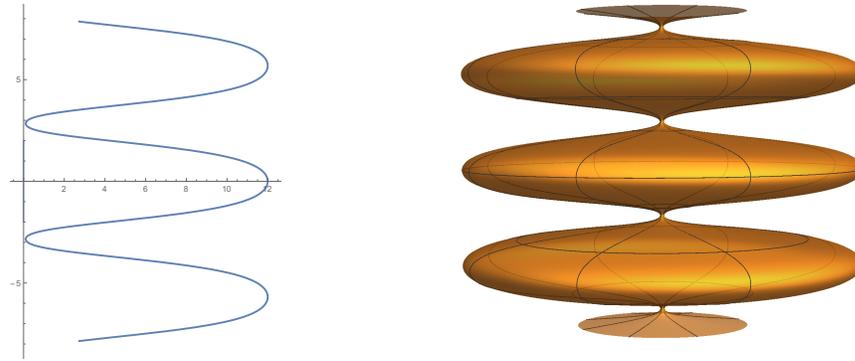


Figura 2.10: La curva perfil e imagen de un  $\mathcal{H}$ -onduloide en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = 1 - y^2$ .

## 2.4. Ejemplos que no existen para $\mathcal{H}$ constante

Los resultados obtenidos en las Secciones 2.2 y 2.3 muestran la existencia, entre otras, de los siguientes tipos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para diferentes elecciones de funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ : planos, cilindros, bowls, catenoides, esferas estrictamente convexas, onduloides y nodoides. Salvo los bowls, que son característicos de la teoría de los solitones de traslación del flujo por curvatura media, estos ejemplos aparecen de igual forma en la teoría de hipersuperficies con curvatura media constante (cero o positiva). De esta forma, podríamos pensar que

las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies se comportan de forma muy similar a las hipersuperficies con curvatura media constante.

Esta sección está dedicada a probar que la intuición del párrafo anterior dista mucho de la realidad, construyendo numerosos ejemplos de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con comportamientos muy distintos a los previamente estudiados. Para concretar, el espacio ambiente de trabajo será  $\mathbb{R}^3$ , pero es fácil convencerse de que los resultados obtenidos pueden ser generalizados a dimensión arbitraria de igual forma.

Consideraremos pues funciones  $\mathfrak{h} \in C^\infty([-1, 1])$ , las cuales definen funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$  por medio de la ecuación (2.1). De este modo construiremos  $\mathcal{H}$ -superficies rotacionales inmersas en  $\mathbb{R}^3$  y estudiaremos sus propiedades con la ayuda del plano de fases.

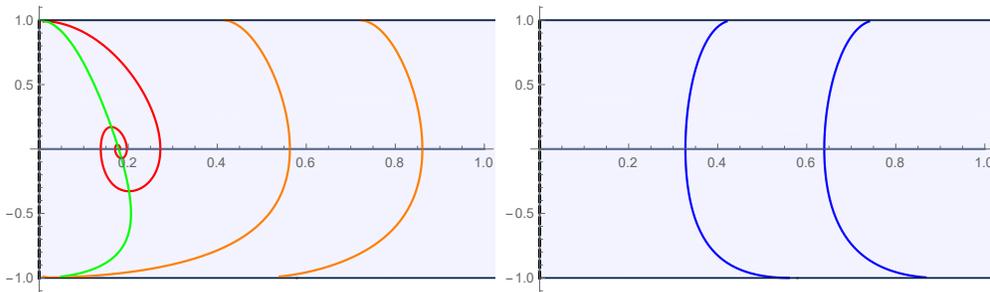


Figura 2.11: Los planos de fases  $\Theta_1$  y  $\Theta_{-1}$  a la izquierda y a la derecha, respectivamente, correspondientes a la elección  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ .

Supongamos en primer lugar que  $\Sigma$  interseca el eje de rotación. Por la Proposición 2.1.2, tal intersección ha de ser ortogonal. Si  $\mathfrak{h}$  es una función positiva y par, el Teorema 2.3.1 implica que  $\Sigma$  es una esfera estrictamente convexa. Sin embargo, dada  $\mathfrak{h} > 0$  no par la situación genérica es muy distinta.

Lo que generalmente ocurre es que una de las órbitas que arrancan desde el punto  $(0, \pm 1)$  en el plano de fases  $\Theta_1$  converge asintóticamente al equilibrio, bien de forma directa o bien girando alrededor de él; notemos que tal equilibrio existe en  $\Theta_1$  por ser  $\mathfrak{h} > 0$ . En la Figura 2.11 esta órbita está representada en color rojo.

En este caso, la superficie obtenida es un disco rotacional, propiamente embebido en  $\mathbb{R}^3$ , que interseca el eje de rotación de forma ortogonal, y que se encuentra contenida en un entorno tubular del cilindro con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ , véase la Figura 2.12.

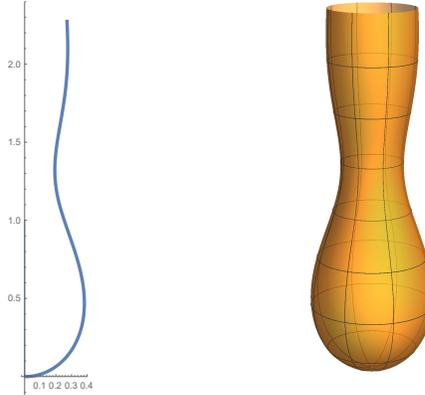


Figura 2.12: La curva perfil e imagen de la  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ , con normal unitario en el punto de intersección con el eje  $e_3$ . En este caso la órbita converge asintóticamente al equilibrio  $e_0$  girando alrededor de él.

La otra órbita que arranca desde el punto opuesto  $(0, \mp 1)$ , representada en color naranja en la Figura 2.11, abandona el plano de fases  $\Theta_1$  en tiempo finito intersecando la semirrecta  $\{y = \pm 1\}$ . Estos puntos corresponden a puntos de  $\Sigma$  con plano tangente horizontal, y, de nuevo, usando (2.5) como en la demostración del Teorema 2.3.1, la órbita correspondiente tiene que *entrar* en el plano de fases  $\Theta_{-1}$ , representada en color azul en la Figura 2.11. En esta situación, obtenemos un disco rotacional, propiamente inmerso en  $\mathbb{R}^3$ , el cual tiene distancia no acotada al eje de rotación, véase la Figura 2.13.

Otra posibilidad que puede darse es que la órbita en  $\Theta_1$  que empieza desde el punto  $(0, \pm 1)$  converja al equilibrio  $e_0 \in \Theta_1$  directamente, sin girar alrededor de él. Las propiedades de monotonía de  $\Theta_1$  aseguran que esta configuración nos da un grafo completo, estrictamente convexo, con distancia al eje de rotación acotada superiormente

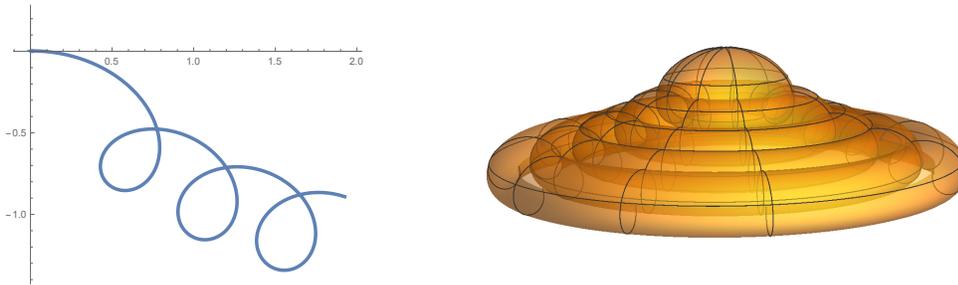


Figura 2.13: La curva perfil e imagen de la  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $h(y) = y + 2$ , con normal unitario  $-e_3$  en el punto de intersección con el eje de rotación.

por  $1/(2h(0))$  y que converge asintóticamente al cilindro con curvatura media constante  $h(0)$ . Un caso concreto de esta situación viene dada por el grafo de la curva en  $\mathbb{R}^3$   $\alpha(s) = (s, 0, -\log \cos s)$ , con  $s \in [0, \pi/2)$ . La curva  $\alpha(s)$  es la que genera el *cilindro grim reaper* en la teoría de los solitones de translación del flujo por curvatura media en  $\mathbb{R}^3$ , véase la Figura 2.14.

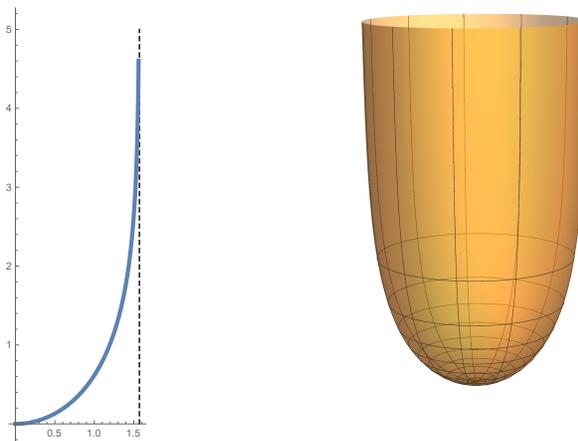


Figura 2.14: El  $\mathcal{H}$ -grafo rotacional estrictamente convexo en  $\mathbb{R}^3$  asintótico al cilindro de radio  $\pi/2$ , con curvatura media predeterminada dada por (2.16).

Es trivial comprobar que  $\alpha(s)$  es una curva estrictamente convexa, asintótica a la

recta vertical  $\{x = \pi/2\}$ . Denotando por  $\Sigma$  a la superficie de rotación alrededor del eje  $x_3$  generada por  $\alpha(s)$ , un cálculo directo muestra que la función ángulo de  $\Sigma$  en cada punto viene dada por  $\nu(s) = \cos s$ , y su curvatura media  $H_\Sigma$ , constante en cada paralelo, se escribe en función de  $\nu$  como sigue:  $H_\Sigma(\alpha(s)) = \mathfrak{h}_\alpha(\nu(s))$ , donde  $\mathfrak{h}_\alpha \in C^1([0, 1])$  tiene la expresión

$$\mathfrak{h}_\alpha(y) = y + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\arccos y}. \quad (2.16)$$

Por ser  $\mathfrak{h}_\alpha > 0$  para todo  $y \in [0, 1]$ , podemos extender  $\mathfrak{h}_\alpha$  a una función positiva de clase  $C^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por tanto, para la función predeterminada  $\mathcal{H}_\alpha \in \mathbb{S}^2$  definida mediante  $\mathfrak{h}$  por medio de la ecuación (2.1), obtenemos la existencia de una  $\mathcal{H}_\alpha$ -superficie rotacional, estrictamente convexa, con la topología de un disco, que es asintótica al cilindro vertical de radio  $\pi/2$ .

Observemos que todas estas  $\mathcal{H}$ -superficies se caracterizan por ser simplemente conexas y propias. Además, intuitivamente cada  $\mathcal{H}$ -superficie anteriormente expuesta diverge al infinito de  $\mathbb{R}^3$  en una sola *dirección* en la superficie; en la Sección 3.4 formalizaremos estos conceptos topológicos. Estas  $\mathcal{H}$ -superficies no pueden existir en la teoría de las superficies con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , y suponen la motivación para el desarrollo del Capítulo 3.

Centrémonos ahora en el caso en el que la  $\mathcal{H}$ -superficie no interseca el eje de rotación. Sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  satisfaciendo  $\mathfrak{h}(0) = 0$ , con  $\mathfrak{h}(y) < 0$  (resp.  $\mathfrak{h}(y) > 0$ ) si  $y < 0$  (resp.  $y > 0$ ). Notemos que los solitones de traslación del flujo por curvatura media están incluidos en esta familia, tomando la función particular  $\mathfrak{h}(y) = y$ ,  $\forall y \in [-1, 1]$ . Por tanto, el grafo horizontal  $\Gamma_1(y)$  definido en (2.9), es una curva que aparece en  $\Theta_1$  con extremo el punto  $(0, 1)$ , y tal que  $\Gamma_1(y) \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow 0$ . En particular, la curva  $\Gamma_1(y)$  divide el semiespacio  $\{y > 0\}$  de  $\Theta_1$  en dos componentes conexas, las cuales son regiones de monotonía, y junto al semiespacio  $\{y < 0\}$  conforman las regiones de monotonía de  $\Theta_1$ . Las mismas propiedades descritas se trasladan al plano de fases  $\Theta_{-1}$  para el grafo horizontal  $\Gamma_{-1}(y)$ , el cual está contenido en  $\{y < 0\}$  y lo divide en dos regiones de monotonía, las cuales junto a  $\{y > 0\}$  forman las regiones de monotonía de  $\Theta_{-1}$ . Véase la Figura 2.15.

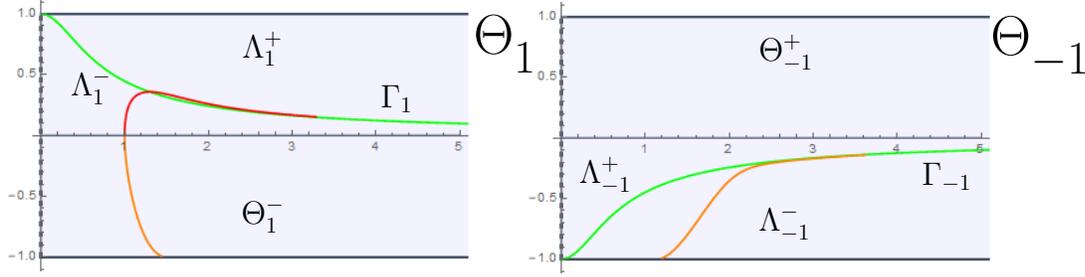


Figura 2.15: Los planos de fases  $\Theta_1$  y  $\Theta_{-1}$ , y sus respectivas regiones de monotonía, para la función  $h(y) = y(y + 2)$ .

Sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional en  $\mathbb{R}^3$  generada al rotar una curva parametrizada por el arco  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ , con condiciones iniciales  $x(0) = x_0 > 0$ ,  $z'(0) = 1$ . Por ser  $z'(0) > 0$ , la órbita correspondiente a  $\alpha(s)$  pertenece al plano de fases  $\Theta_1$  para valores del parámetro  $s$  suficientemente próximos a cero, es decir  $\varepsilon = 1$  en (2.7). Para  $s > 0$  suficientemente pequeño la órbita  $\gamma$  se encuentra contenida en la componente  $\Lambda_1^-$ , y por tanto  $y'(s) > 0$  en esta región hasta que  $\gamma$  interseca  $\Gamma_1$  en un instante  $s_0 > 0$  donde  $y(s)$  alcanza un máximo. Tras este instante la órbita  $\gamma$  permanece en la componente  $\Lambda_1^+$ , donde converge al eje  $\{y = 0\}$ . Esta componente de  $\gamma$  está pintada en rojo en la Figura 2.15.

Esta componente de la superficie  $\Sigma$  es un grafo con la topología de un anillo  $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)$ , cuyo borde es precisamente la circunferencia de radio  $x_0$ . Tal grafo es cóncavo en el intervalo  $[0, s_0]$  y para  $s > s_0$  la parte de  $\Sigma$  obtenida al rotar  $\alpha(s)$  es un grafo estrictamente convexo. Véase la parte roja de la Figura 2.16.

Volvamos al instante  $s = 0$ . Decreciendo  $s$ , la órbita de  $\Sigma$ , la cual pintamos ahora en naranja en la Figura 2.15, está contenida en la componente  $\Theta_1^- := \{(x, y) \in \Theta_1; y < 0\}$  hasta llegar a un punto límite de la forma  $\gamma(s_0) = (x_1, -1)$ , para cierto  $s_0 < 0$ , con  $x_1 > x_0$ . En este punto  $\alpha(s)$  tiene tangente horizontal, y por tanto los puntos de  $\Sigma$  tienen plano tangente horizontal en tal circunferencia. Por ser  $h(-1) < 0$ , y en vista de la Ecuación (2.5), la coordenada  $z(s)$  de  $\alpha(s)$  cumple  $z''(s_0) > 0$ , y en consecuencia

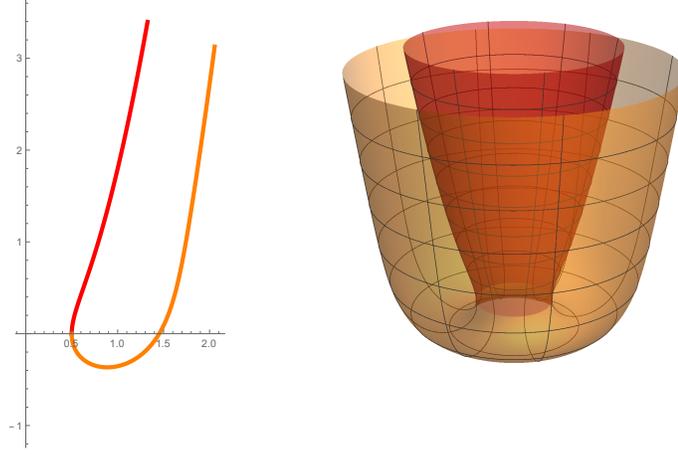


Figura 2.16: La curva perfil e imagen de la  $\mathcal{H}$ -superficie de rotación en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y(y + 2)$ .

$z(s)$  es decreciente para  $s < s_0$ . Por tanto, si hacemos decrecer  $s$  desde  $s_0$ , la órbita  $\gamma(s)$  se encuentra contenida en el plano de fases  $\Theta_{-1}$ , comienza desde el punto  $(x_1, -1)$  y está contenida en  $\Lambda_{-1}^-$ . En esta ocasión las propiedades de monotonía implican que  $\gamma$  está contenida enteramente en  $\Lambda_{-1}^-$  y converge al eje  $\{y = 0\}$  de  $\Theta_{-1}$ . Argumentos similares nos permiten asegurar que esta segunda componente es un anillo  $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)$ , el cual es un grafo estrictamente convexo sobre  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{B}^2(x_1)$ . Véase la Figura 2.16, la parte naranja.

Ambos anillos rojo y naranja tienen el mismo normal unitario en sus bordes, y por la unicidad del problema de Cauchy para  $\mathcal{H}$ -superficies rotacionales estos anillos se pueden pegar de forma diferenciable, obteniendo una superficie propia  $\Sigma$  que tiene la topología de un disco punteado y con dos finales con altura tendiendo a infinito. Llamaremos a estas superficies  $\mathcal{H}$ -catenoides *wing-like* en analogía con los ejemplos *wing-like* que aparecen en la teoría de los solitones de traslación del flujo por curvatura media, los cuales son un caso particular de esta familia de  $\mathcal{H}$ -superficies.

Como último tipo de ejemplos de esta sección, consideremos esta vez una función  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  tal que  $\mathfrak{h}(y) > 0$  si  $y \neq 0$ , y además  $\mathfrak{h}(0) = 0$ , y sea  $\mathcal{H}$  definida a partir de  $\mathfrak{h}$  por medio de la ecuación (2.1). Fijemos  $x_0 > 0$ , consideremos la órbita  $\gamma_\varepsilon(s)$  tal

que  $\gamma_\varepsilon(0) = (x_0, 0) \in \Theta_\varepsilon$ , y sea  $\Sigma_\varepsilon(x_0)$  la  $\mathcal{H}$ -superficie generada a partir de  $\gamma(s)$ . Si  $\varepsilon = 1$ , el grafo horizontal  $\Gamma_1(y)$  en  $\Theta_1$  tiene como extremos los puntos  $(0, \pm 1)$  y tiene una asíntota en  $\{y = 0\}$ . Véase la Figura 2.17.

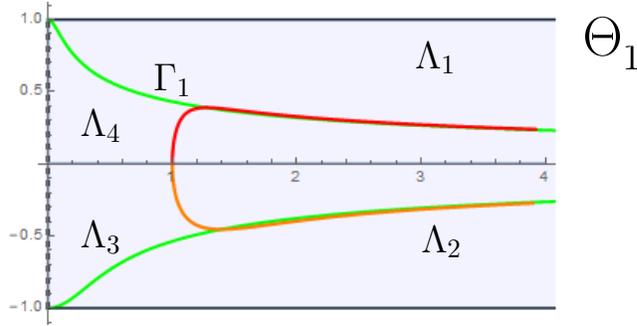


Figura 2.17: El plano de fases  $\Theta_1$  para la función  $h(y) = y^2(y + 2)$ .

Estudiando el plano de fases de forma similar a los casos anteriores obtenemos la existencia de una familia uniparamétrica de  $\mathcal{H}$ -anillos propiamente embebidos con dos finales, y tal que ningún ejemplo de esa familia está cilíndricamente acotado. Ambos finales son grafos sobre un plano horizontal y se unen en la circunferencia contenida en cada  $\mathcal{H}$ -anillo de menor radio, esto es, por el cuello. Estas superficies satisfacen que ningún ejemplo está cilíndricamente acotado, y que cada final tiene altura no acotada con respecto al plano horizontal sobre el que es un bigrafo. Véase la Figura 2.18.

Si  $\varepsilon = -1$ , el grafo  $\Gamma_{-1}$  no existe en  $\Theta_{-1}$ . Un análisis similar del plano de fases  $\Theta_{-1}$  nos permite concluir que en esta ocasión los elementos de la familia uniparamétrica obtenida no están embebidos, ya que la coordenada  $z(s)$  de la curva generatriz no es monótona. Omitimos los detalles del estudio del plano de fases, ya que es totalmente similar al del ejemplo anterior. En la Figura 2.19 observamos el ejemplo que aparece en este caso.

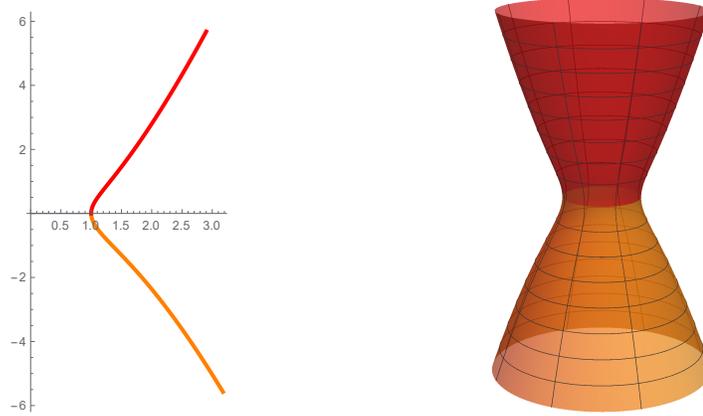


Figura 2.18: Perfil de la curva e imagen del  $\mathcal{H}$ -anillo propiamente embebido en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y^2(y + 2)$ . La órbita que define este ejemplo está estrictamente contenida en el plano de fases  $\Theta_1$ .

## 2.5. Descripción de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies con $\mathcal{H}$ lineal

La última sección de este capítulo está dedicada a describir globalmente las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales con  $\mathcal{H}$  de la forma  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, v \rangle + b$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  y  $v \in \mathbb{S}^n$ . Debemos mencionar que una descripción similar fue obtenida de forma independiente por López en [Lop] para el caso en el que el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^3$ . Recordemos que esta clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies se definió previamente en la Sección 1.2, donde probamos que son solución de un flujo geométrico que generaliza al flujo por curvatura media usual. Es más, estas superficies tienen *curvatura media con peso constante* igual a  $nb$  en el espacio con densidad  $(\mathbb{R}^{n+1}, e^{na\langle x, v \rangle})$ .

Como ya analizamos en la Sección 1.2, podemos suponer sin perder generalidad que  $a = 1$  tras aplicar si es necesario una homotecia de factor  $1/a$ . De igual forma, tras un cambio de coordenadas euclídeas podemos suponer que el vector  $v$  viene dado por  $v = e_{n+1}$ , y por tanto  $\mathcal{H}$  tiene la forma  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_{n+1} \rangle + b$ . Es más, podemos suponer también  $b \neq 0$ , ya que el caso  $b = 0$  genera la clase de los solitones de traslación del flujo por curvatura media y sus ejemplos rotacionales están totalmente clasificados

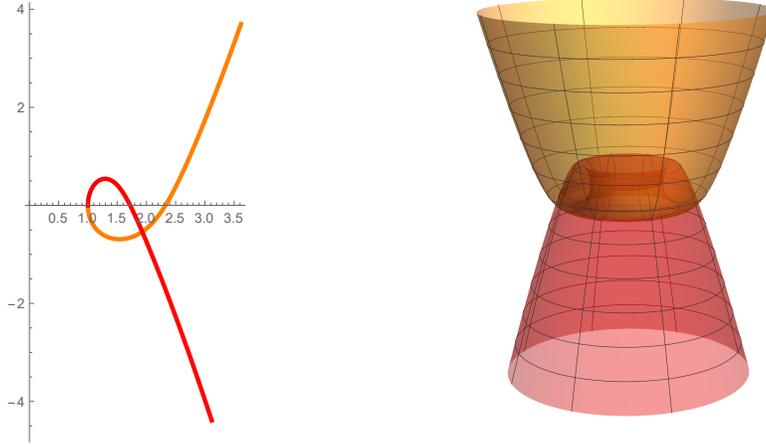


Figura 2.19: Perfil de la curva e imagen del  $\mathcal{H}$ -anillo propiamente inmerso en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y^2(y + 2)$ . La órbita que define este ejemplo existe en los planos de fases  $\Theta_1$  y  $\Theta_{-1}$ .

como bowls y ejemplos wing-like [CSS].

El primer resultado concierne la no existencia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas, sin borde, en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposición 1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  una función lineal. Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas, sin borde, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demostración.* La prueba se hará por reducción al absurdo. Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta, sin borde, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Es sabido que la función altura  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(p_1, \dots, p_{n+1}) = p_{n+1}$ ,  $\forall p \in \Sigma$  satisface la EDP elíptica  $\Delta_\Sigma h = nH_\Sigma \langle \eta, e_{n+1} \rangle$ , donde  $\Delta_\Sigma$  denota el *operador de Laplace-Beltrami* en  $\Sigma$ ,  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$  y  $\langle \eta, e_{n+1} \rangle = \nu$  es la función ángulo. Por ser  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, tenemos que  $H_\Sigma = \nu + b$ . Integrando en  $\Sigma$  y aplicando el teorema de la divergencia, tenemos

$$0 = \int_\Sigma \Delta_\Sigma h \, dV_\Sigma = \int_\Sigma nH_\Sigma \langle \eta, e_{n+1} \rangle \, dV_\Sigma = n \int_\Sigma (\nu^2 + b\nu) \, dV_\Sigma.$$

Por una parte, es sabido que por ser  $\Sigma$  compacta y sin borde, la integral  $\int_\Sigma \nu$  es idénticamente nula. Por otra parte, en vista de la ecuación anterior, la integral  $\int_\Sigma \nu^2$  se

anula igualmente, y por tanto  $\nu = 0$  en  $\Sigma$ . Esto nos dice que  $\Sigma$  está contenida en una hipersuperficie de la forma  $M^{n-1} \times \mathbb{R}$ , con  $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , lo cual contradice la compacidad de  $\Sigma$  y el resultado está probado.  $\square$

Con la certeza de la no existencia de ejemplos compactos, sin borde, en esta clase de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , nos disponemos a dar una descripción global de sus elementos rotacionales.

Sea  $\mathfrak{h} \in C^\infty([-1, 1])$  la función definida por  $\mathcal{H}$  por medio de la ecuación (2.1). Entonces,  $\mathfrak{h}(y) = y + b$ . Para simplificar el estudio distinguiremos entre los casos  $|b| > 1$ ,  $|b| = 1$  y  $0 < |b| < 1$ . Primero, notemos que podemos suponer sin perder generalidad que  $b > 0$  ya que el caso  $b < 0$  se reduce a  $b > 0$  tras un cambio en la orientación de la superficie.

**Caso  $b > 1$ .**

Este caso ha aparecido en esta sección para el caso particular  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ , en la Figura 2.11. En general tomar un  $b > 1$  genérico no cambia el comportamiento global de las órbitas en el plano de fases correspondiente, y por tanto toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional con  $\mathfrak{h}(y) = y + b$  tiene planos de fases similares a los mostrados en la Figura 2.11; véase la Figura 2.20, izquierda.

Por ser  $\mathfrak{h} > 0$ , la curva  $\Gamma_1$  dada por la intersección del grafo horizontal definido en (2.9) con  $\Theta_1$  es un arco compacto que une los puntos  $(0, \pm 1)$ , y la curva  $\Gamma_{-1}$  en  $\Theta_{-1}$  no existe. Para esta función  $\mathfrak{h}$  existe un  $\mathcal{H}$ -cilindro de radio  $(n-1)/(n\mathfrak{h}(0))$  y con curvatura media constante  $b$ . En esta situación, existen dos ejemplos distintos que intersecan al eje; uno orientado hacia arriba (Figura 2.12), el cual se encuentra propiamente embebido y converge al  $\mathcal{H}$ -cilindro, y otro orientado hacia abajo (Figura 2.13) propiamente inmerso con distancia no acotada al eje de rotación. Por otro lado, toda  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie rotacional que no toca el eje es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n - \{p_1, p_2\}$ ,  $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^n$ , es propiamente inmersa y tiene dos finales: uno embebido fuera de un compacto y cilíndricamente acotado, con un comportamiento similar al ejemplo mostrado en la Figura 2.12; y otro con autointersecciones y con distancia al eje de rotación no acotada, con un comportamiento similar al ejemplo mostrado en la Figura 2.13. En la Figura 2.20 derecha, observamos

un ejemplo de una  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ .

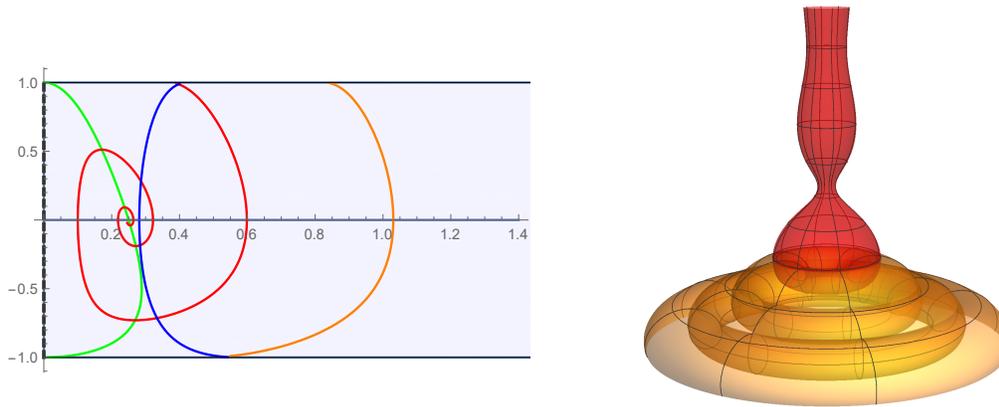


Figura 2.20: plano de fases  $\Theta_1$  e imagen del  $\mathcal{H}$ -anillo propiamente inmerso en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ . La parte azul corresponde a la órbita en  $\Theta_{-1}$ .

**Caso  $b = 1$ .**

Supongamos que  $\mathfrak{h}(y) = y + 1$ . En esta situación,  $\mathfrak{h}$  es una función no negativa que se anula en  $y = -1$ . En particular, los hiperplanos horizontales con la orientación dada por  $-e_{n+1}$  son  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies para esta elección de  $\mathfrak{h}$ . Por ser  $\mathfrak{h} \geq 0$ , la curva  $\Gamma_{-1}$  no existe en  $\Theta_{-1}$ , y  $\Gamma_1$  en  $\Theta_1$  es un arco con extremo el punto  $(0, 1)$  y con una asíntota horizontal en la semirrecta  $\{y = -1\}$ ; véase la Figura 2.21.

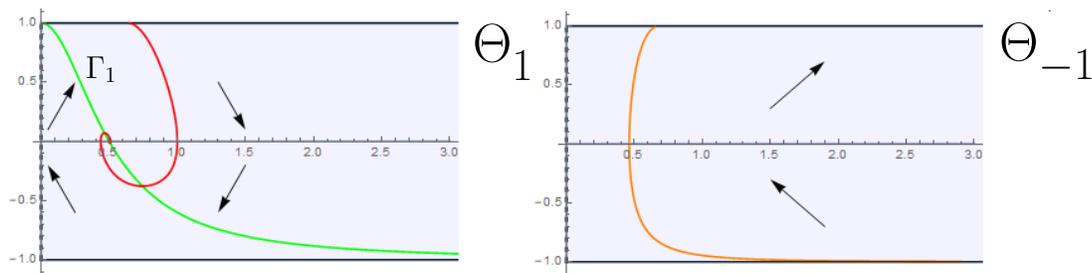


Figura 2.21: Los planos de fases para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 1$ .

Ya que  $\mathfrak{h}(1) > 0$ , el Corolario 2.1.5 asegura que existe una órbita  $\gamma_1$  con extremo el punto  $(0, 1)$ . Esta órbita genera una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma_1$  que interseca de forma ortogonal el eje  $x_{n+1}$ , y cuya aplicación de Gauss toma el valor  $e_{n+1}$  en el punto de intersección. Notemos que ninguna órbita en  $\Theta_1$  o  $\Theta_{-1}$  puede tener como extremo un punto en la semirrecta  $\{y = -1\}$ , debido a la unicidad del problema de Cauchy; la curva  $(s, -1)$ ,  $s \geq 0$  es solución de la ecuación (2.5) para  $\mathfrak{h}(y) = y + 1$ , y esta curva genera un hiperplano horizontal orientado hacia abajo. En consecuencia, y teniendo en cuenta las propiedades de monotonía de  $\Theta_1$ , la órbita  $\gamma_1$  converge asintóticamente al equilibrio  $e_0$ . Por tanto,  $\Sigma_1$  es un disco propiamente embebido que converge asintóticamente al cilindro con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ .

En general, dado  $x_0 > 0$  sea  $\gamma(s)$  la órbita en  $\Theta_1$  tal que  $\gamma(0) = (x_0, 0)$  y sea  $\Sigma$  la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie generada por  $\gamma$ . Para  $s > 0$ , las propiedades de monotonía de  $\Theta_1$  aseguran que  $\gamma$  converge asintóticamente al equilibrio  $e_0$ , véase la Figura 2.21 izquierda. Como  $\gamma$  no puede intersecar a la órbita  $\gamma_1$ , ya que contradiría la unicidad del problema de Cauchy, para  $s < 0$  la órbita  $\gamma(s)$  no puede girar indefinidamente alrededor de  $e_0$ .

En estas condiciones, podemos asegurar que la órbita  $\gamma$  no puede converger a la semirrecta  $\{y = -1\}$ . En efecto, supongamos que existe  $x_0 > 0$  tal que  $\gamma(0) = (x_0, 0)$ , y para  $s < 0$ , posiblemente tras “desenrollarse” de  $e_0$  una cantidad finita de veces,  $\gamma$  converge a la semirrecta  $\{y = -1\}$ , y por monotonía de  $\Theta_1$ , no interseca a la curva  $\Gamma_1$ . Además, sin perder generalidad supongamos que  $(x_0, 0)$  es el último punto en el que  $\gamma$  interseca al eje  $\{x = 0\}$ . En consecuencia, para  $s < 0$ ,  $\gamma$  se puede expresar como un grafo  $(x, h(x))$  tal que  $h(x_0) = 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $\forall x > x_0$  y  $h(x) \rightarrow -1$  para  $x \rightarrow \infty$ , véase la Figura 2.22, derecha, la órbita en azul.

Consideremos la función  $f(y) = 1/2 \cos(\pi/2y)$ , la cual es una función no negativa y par en el intervalo  $[-1, 1]$  y tal que  $f(\pm 1) = 0$ . Observemos que esta función satisface las hipótesis de los ejemplos mencionados al finalizar la Sección 2.3; véase la Figura 2.10. Las órbitas asociadas a esta predeterminación de la curvatura media son curvas cerradas que nunca intersecan a las semirrectas  $\{y = \pm 1\}$ .

Es claro que  $f(y) \leq 1 + y$  para todo  $y \in [-1, 1]$ , con igualdad si y solo si  $y = -1$ .

Consideremos el plano de fases  $\Theta_1$  asociado a la función  $h$ , y en este mismo plano de fases veremos las órbitas asociadas a la función  $f$ . Dada  $\gamma_f(t) = (x_f(t), y_f(t))$  una órbita del sistema (2.7) para la función  $f$ , supongamos que existe  $(x_0, y_0) \in \Theta_1$  e instantes  $s_0, t_0 < 0$  tales que  $\gamma(s_0) = \gamma_f(t_0) = (x_0, y_0)$ . Comparando los correspondientes sistemas autónomos dados por el sistema (2.7) para  $h$  y  $f$ , se cumple  $y'(s_0) < y'_f(t_0)$ .

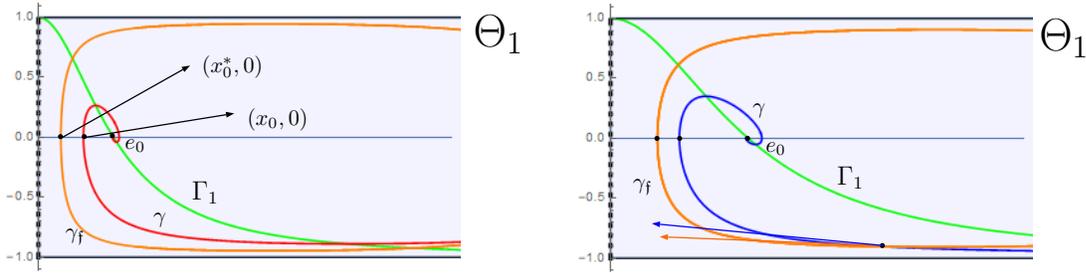


Figura 2.22: A la izquierda, la comparación de las órbitas para las funciones  $h(y) = y + 1$  y  $f(y) = 1/2 \cos(\pi/2y)$ . A la derecha, la contradicción a la que llegaríamos si  $\gamma$  convergiese a  $\{y = -1\}$ .

Sea pues  $\gamma_f(t)$  la órbita asociada a la función predeterminada  $f$  tal que  $\gamma_f(0) = (x_0^*, 0)$ , con  $x_0^* \in (0, x_0)$ ; véase la Figura 2.22, la órbita en naranja. Esta órbita también se puede expresar como un grafo  $(x, f(x))$  tal que  $f(x_0) = 0$ , el cual comienza decreciendo hasta que alcanza un punto de mínimo y luego crece, intersecando de nuevo al eje  $\{x = 0\}$ . Por ser  $f(y)$  una función par, la órbita  $\gamma_f$  se describe globalmente como el bigrafo generado por la función  $f(x)$ .

Por converger  $\gamma$  a  $\{y = -1\}$  y ser  $\gamma_f$  una órbita cerrada, existe  $x_1 > x_0$  tal que  $f(x_1) = h(x_1)$ . Esto implica la existencia de instantes  $s_1, t_1 < 0$  tales que  $\gamma(s_1) = \gamma_f(t_1)$ , donde sus segundas coordenadas satisfarían  $y'(s_1) > y'_f(t_1)$ . Este hecho es contradictorio con la comparación entre los sistemas dados por la ecuación (2.7); véase la Figura 2.22, derecha.

En consecuencia la órbita  $\gamma$  ha de intersecar también a  $\Gamma_1$  en tiempo finito, y por tanto existe  $s_0 < 0$  tal que  $\gamma(s_0) = (x_1, 1)$ ,  $x_1 > 0$ ; véase la Figura 2.22, izquierda.

Esta discusión nos permite afirmar que toda órbita  $\gamma(s)$  en  $\Theta_1$  se comporta como la mostrada en la Figura 2.21, izquierda. Esta órbita genera la primera porción de

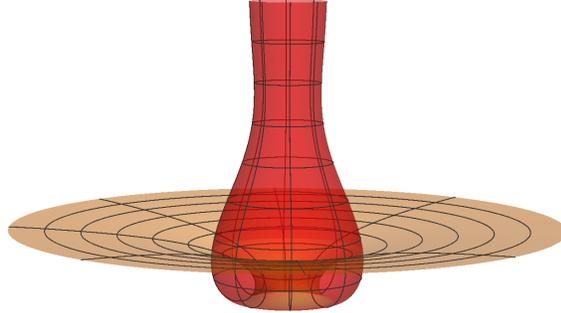


Figura 2.23: Una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 1$ .

una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$ , la cual tiene la topología de  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty)$ , tiene función altura estrictamente creciente y converge asintóticamente al cilindro circular recto con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ ; véase la Figura 2.23, la porción dibujada en rojo. Si tomamos  $s < s_0$ , entonces  $\gamma(s)$  se encuentra contenida en el plano de fases  $\Theta_{-1}$ , como consecuencia de la Ecuación (2.5) para la curva perfil  $(x(s), z(s))$ , al ser  $\mathfrak{h}(1) > 0$  y en consecuencia  $z''(s_0) > 0$ . Por tanto, para  $s < s_0$ , la coordenada  $z(s)$  es decreciente. Al no aparecer la curva  $\Gamma_{-1}$  en  $\Theta_{-1}$ ,  $\gamma$  es un grafo horizontal de la forma  $x = g(y)$ , con  $g(1) = x_1$  y  $g(y) \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow -1$ , véase la Figura 2.21, derecha. Esto genera la segunda porción de la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie  $\Sigma$ , la cual tiene la topología de  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty)$  y está embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; véase la Figura 2.23, la porción dibujada en naranja.

La unión de ambas porciones a lo largo de sus componentes borde (en los cuales sus aplicaciones de Gauss coinciden y por tanto tienen los mismos datos de Cauchy), genera la totalidad de  $\Sigma$ , la cual es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie propiamente inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con dos finales, ambos embebidos: uno que converge asintóticamente al cilindro con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ , y otro que se puede expresar como un grafo fuera de un conjunto compacto.

**Caso  $0 < b < 1$ .**

Para finalizar, supongamos que  $b \in (0, 1)$ . En tal caso, la función  $\mathfrak{h}$  se anula en el

valor  $-b \in (-1, 0)$ . Este caso entra en las condiciones  $\mathfrak{h}(-1) > 0$ ,  $y_0 < 0$  de la Proposición 2.2.1, y por tanto existe un  $\mathcal{H}$ -grafo estrictamente convexo que interseca el eje de rotación. Los planos de fases para esta elección de  $b$  tienen la siguiente configuración: el plano de fases  $\Theta_1$  contiene a la curva  $\Gamma_1$  con extremo en el punto  $(0, 1)$ , la cual tiene como asíntota la semirrecta  $\{y = -b\}$ . En particular,  $\Gamma_1$  interseca el eje  $\{y = 0\}$  obteniendo un equilibrio  $e_0$ . En el plano de fases  $\Theta_{-1}$  la curva  $\Gamma_{-1}$  tiene como extremo el punto  $(0, -1)$  y tiene de nuevo la semirrecta  $\{y = -b\}$  como asíntota, véase la Figura 2.24.

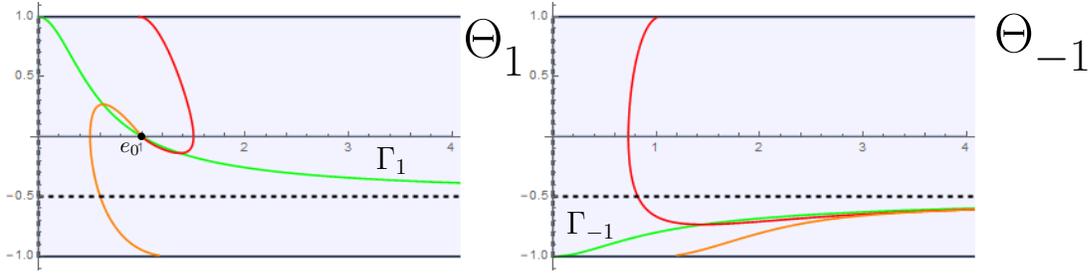


Figura 2.24: Los planos de fases para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 1/2$ .

En general, consideremos  $(x_0, 0)$ , con  $x_0 > 0$ , en el plano de fases  $\Theta_1$ . Entonces, la órbita  $\gamma$  que pasa por ese punto tiene un extremo que converge asintóticamente a  $e_0$ , y otro extremo que se aleja del equilibrio  $e_0$  hasta llegar a un punto de la forma  $(x_1, \pm 1)$ . En la Figura 2.24 se muestra una órbita con  $x_0 < 1/(2\mathfrak{h}(0))$  en naranja, y una órbita con  $x_0 > 1/(2\mathfrak{h}(0))$  en rojo, para el caso particular en el que  $\mathfrak{h}(y) = y + 1/2$  y el ambiente es  $\mathbb{R}^3$ .

La  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie que obtenemos a partir de la órbita roja en  $\Theta_1$ , la cual podemos ver en la Figura 2.25, izquierda, es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n - \{p_1, p_2\}$ ,  $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^n$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y tiene dos finales, los cuales están embebidos fuera de un compacto de la hipersuperficie. El primer final converge asintóticamente al cilindro con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ , y el segundo un grafo estrictamente convexo fuera de un compacto.

Por otra parte, la órbita naranja mostrada en la Figura 2.24 genera una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie con la topología de  $\mathbb{S}^n - \{p_1, p_2\}$ ,  $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^n$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e igualmente

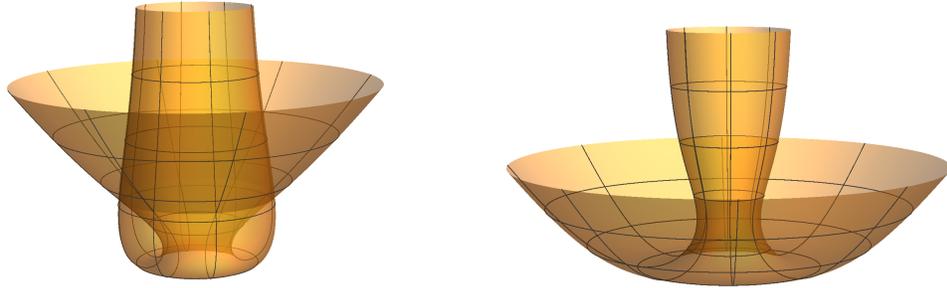


Figura 2.25: Dos  $\mathcal{H}$ -superficies en  $\mathbb{R}^3$  para la función  $\mathfrak{h}(y) = y + 1/2$ . A la izquierda, la  $\mathcal{H}$ -superficie correspondiente a la órbita roja mostrada en la Figura 2.24. A la derecha, la  $\mathcal{H}$ -superficie correspondiente a la órbita naranja mostrada en la Figura 2.24.

con dos finales embebidos. El primer final también converge al cilindro con curvatura media constante  $\mathfrak{h}(0)$ . El otro final es un grafo convexo fuera de un compacto de la superficie, véase la Figura 2.25, derecha. Esta discusión concluye la descripción de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies para una  $\mathcal{H}$  lineal.

## Capítulo 3

---

# Clasificación de $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$

---

*Este capítulo está dedicado al estudio de las  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . El objetivo principal es la obtención de estimaciones uniformes de altura para  $\mathcal{H}$ -grafos, supuestas condiciones muy generales sobre  $\mathcal{H}$ . Las estimaciones de altura serán la piedra angular para probar el resultado principal de este capítulo: la no existencia de  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y un solo final, supuesto que  $\mathcal{H}$  es invariante por tres reflexiones geodésicas independientes en  $\mathbb{S}^2$ .*

### 3.1. Estimaciones de curvatura y del diámetro

Dada una constante  $H > 0$ , es bien sabido que no existen grafos completos en  $\mathbb{R}^3$ , cilíndricamente acotados y de curvatura media constante  $H$ , esto es,  $H$ -grafos como el mostrado en la Figura 2.14. La no existencia de estos ejemplos es consecuencia de la existencia de *estimaciones uniformes de altura* para la clase de  $H$ -grafos compactos, resultado que probó primeramente Heinz [Hei]. Aunque este concepto lo definiremos

formalmente en la Definición 3.2.1, intuitivamente los  $H$ -grafos con borde compacto apoyado sobre un cierto plano tienen altura sobre tal plano uniformemente acotada por una constante  $C = C(H)$  que solo depende de  $H$ . De hecho, esta constante es igual a  $1/H$ , y se alcanza la igualdad si y solo si el  $H$ -grafo es una semiesfera rotacional.

Posteriormente, Meeks [Mee2] obtuvo tales estimaciones de altura en el caso no compacto mediante argumentos geométricos, los cuales exponemos brevemente a continuación. El primer paso es probar que si un  $H$ -grafo  $\Sigma$  compacto con borde en un plano  $\Pi$  tiene puntos a distancia suficientemente grande de  $\Pi$ , entonces cada componente conexa que aparece al cortar  $\Sigma$  con un plano  $\Pi_t$  paralelo a  $\Pi$  a distancia  $t$ , tiene *diámetro uniformemente acotado*. En cierto sentido, esta estimación de diámetro nos dice que los grafos con curvatura media constante  $H$  a partir de una altura suficientemente grande están contenidos en un cilindro sólido de radio uniforme. Teniendo esto en mente, la estimación uniforme de altura se obtiene aplicando el método de reflexión de Alexandrov respecto de planos inclinados (no paralelos) al eje del cilindro.

Consideremos ahora una función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . En vista del ejemplo generado en la Figura 2.14 en general no podemos garantizar la existencia de estimaciones uniformes de altura para  $\mathcal{H}$ -grafos, incluso siendo  $\mathcal{H} > 0$ , estando el grafo cilíndricamente acotado y siendo  $\mathcal{H}$  rotacionalmente simétrica. Estas observaciones ponen de manifiesto las dificultades iniciales que nos encontramos para la obtención de estimaciones uniformes de altura para  $\mathcal{H}$ -grafos. Una primera hipótesis que surge de forma natural en este estudio es que la función predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  sea positiva. En efecto, en el caso en que  $\mathcal{H}$  se anule en algún punto y sea rotacionalmente simétrica, en la Sección 2.2 construimos  $\mathcal{H}$ -grafos enteros y estrictamente convexos, para los cuales claramente no existe una estimación de altura uniforme; véase la Proposición 2.2.1.

El principal obstáculo que nos encontramos para generalizar el resultado de Meeks a los  $\mathcal{H}$ -grafos es la imposibilidad de reflejar respecto de planos arbitrarios, incluso en el caso en el que  $\mathcal{H}$  es rotacionalmente simétrica, y por tanto tendremos que usar otros métodos. Otro detalle a destacar es que la ecuación (1.1) no es simétrica en todas las direcciones del espacio, y por tanto la existencia de estimaciones uniformes de altura dependerá fuertemente de la dirección del espacio que define la condición de ser grafo.

No obstante, la estimación de diámetro puede ser generalizada sin mayor inconveniente a grafos con curvatura media positiva y acotada, como detallamos en el siguiente lema. Sin perder generalidad, tras un cambio de coordenadas euclídeas supondremos que los grafos son verticales, esto es, están definidos por medio de una función  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $\Sigma = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$ .

**Lema 3.1.1.** *Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  un grafo  $z = u(x, y)$  definido sobre un dominio (no necesariamente acotado) en  $\mathbb{R}^2$ , con valores cero en la frontera de este dominio. Supongamos que la curvatura media  $H_\Sigma$  de  $\Sigma$  satisface  $H_\Sigma > H_0$  para algún  $H_0 > 0$ .*

*Entonces, para todo  $t > 2/H_0$  el diámetro de cada componente conexa de  $\Sigma \cap \{|z| = t\}$  es a lo sumo  $2/H_0$ . En particular, todas las componentes conexas de  $\Sigma \cap \{|z| = t\}$  para  $t > 2/H_0$  son compactas.*

*Demostración.* El argumento para probar el Lema 3.1.1 es una adaptación del Lema 2.4 probado por Meeks en [Mee2], véase también el Teorema 4 en [AEG] y el Teorema 6.2 en [EGR]. El principio de comparación por curvatura media asegura que el grafo  $\Sigma$  está contenido en una de los semiespacios delimitados por el plano  $\{z = 0\}$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $\Sigma \subset \{z \geq 0\}$  y por tanto  $u \geq 0$ . Sea  $\mathcal{U}$  la componente conexa de  $\mathbb{R}^3$  determinada por el plano  $\{z = 0\}$  y el grafo  $\Sigma$ . Por ser  $H_\Sigma > 0$ , el principio de comparación por curvatura media nos asegura que el vector normal unitario  $\eta$  de  $\Sigma$  apunta hacia  $\mathcal{U}$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que existe  $t > 2/H_0$  y una componente conexa  $C_t$  de  $\Sigma \cap \{z = t\}$  con diámetro mayor que  $2/H_0$ . Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  el dominio donde está definida la función  $u$ . Sean  $q_1, q_2 \in C_t$  tales que  $d(q_1, q_2) > 2/H_0$  y sean  $p_1, p_2 \in \Omega$  tales que  $u(p_i) = q_i$ ,  $i = 1, 2$ . Llamemos  $\Sigma_t = \Sigma \cap \{z \geq t\}$  y consideremos una curva simple (esto es, sin autointersecciones)  $\Gamma$  contenida en  $\Sigma_t$  uniendo  $q_1, q_2$ . La proyección de  $\Gamma$  define una curva simple  $\gamma$  en  $\Omega$  con  $p_1, p_2$  como extremos y de forma que  $u(p) \geq t$ ,  $\forall p \in \gamma$ . Tras una isometría horizontal podemos suponer que los puntos  $p_i$  son de la forma  $p_1 = (x_0, 0)$  y  $p_2 = (-x_0, 0)$ , para cierto  $x_0 > 1/H_0$ .

En la forma en la que hemos construido  $\gamma$ , podemos asegurar que el *rectángulo*

$R = \gamma \times [0, t]$  está contenido enteramente en  $\mathcal{U}$ . Además,  $R$  divide la caja sólida

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| \leq x_0, 0 \leq z \leq t\}$$

en dos componentes conexas  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  con  $\partial\mathcal{C}_1 \cap \partial\mathcal{C}_2 = R$ .

Por construcción de  $R$ , existe un punto  $a \in R$  tal que  $d(a, \partial R) > 1/H_0$ . Centremos en tal punto la esfera  $S_{H_0}$  con curvatura media constante  $H_0$ . De nuevo, la forma de construir  $\mathcal{C}$  asegura que  $S_{H_0} \subset \mathcal{C}$ . De hecho, podemos mover  $S_{H_0}$  en el interior de  $\mathcal{C}$  mediante traslaciones horizontales en la dirección  $e_2$  de forma que  $S_{H_0}$  está siempre contenida en  $\mathcal{C}$ . Véase la Figura 3.1.

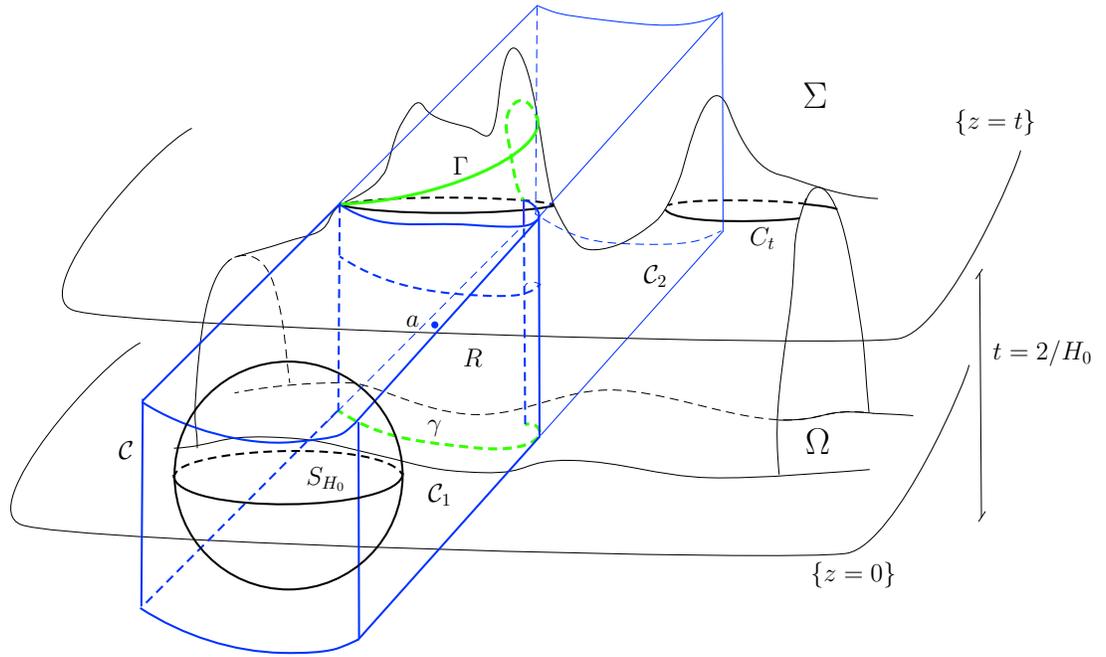


Figura 3.1: Diagrama de la construcción de la caja sólida  $\mathcal{C}$ , en azul. En verde, las curvas  $\Gamma$  (en el grafo) y  $\gamma$  (en el dominio). Notemos que las componentes  $\mathcal{C}_t$  pueden ser tanto acotadas como no acotadas.

Por una parte, la esfera  $S_{H_0}$  no puede estar contenida en  $\mathcal{U}$ , ya que podríamos mover  $S_{H_0}$  por traslaciones verticales hasta obtener un primer punto de contacto interior

entre  $\Sigma$  y  $S_{H_0}$ , lo cual contradiría el principio de comparación por curvatura media. En particular,  $\mathcal{C}$  no puede estar contenido en  $\mathcal{U}$ . Consideremos las traslaciones  $S_{H_0}(t) = S_{H_0} + te_2$ , las cuales están contenidas en  $\mathcal{C}$  como ya hemos comentado. Ya que  $R$  es compacto, para valores suficientemente pequeños de  $t < 0$ , la esfera  $S_{H_0}(t)$  está contenida en una de las dos regiones  $\mathcal{C}_i$ , digamos  $\mathcal{C}_1$ . Llamemos  $\Sigma_2 = \Sigma \cap \mathcal{C}_2$ , la cual es una porción compacta de la superficie  $\Sigma$ . Para  $t$  suficientemente pequeño, se tiene que  $S_{H_0}(t) \cap \Sigma_2 = \emptyset$ . Si incrementamos el parámetro  $t$ , las esferas  $S_{H_0}(t)$  se mueven hacia la región  $\mathcal{C}_2$  hasta llegar a un primer punto de contacto entre  $\Sigma_2$  y  $S_{H_0}(t_1)$  para cierto  $t_1 \in \mathbb{R}$ . Este punto de contacto es interior, ya que por construcción  $S_{H_0}$  permanece a distancia positiva de  $\partial\Sigma$ . Notemos además que en este punto de contacto los vectores normales coinciden, lo cual es contradictorio con el principio de comparación por curvatura media. Véase la Figura 3.2.

Esta contradicción prueba el Lema 3.1.1. □

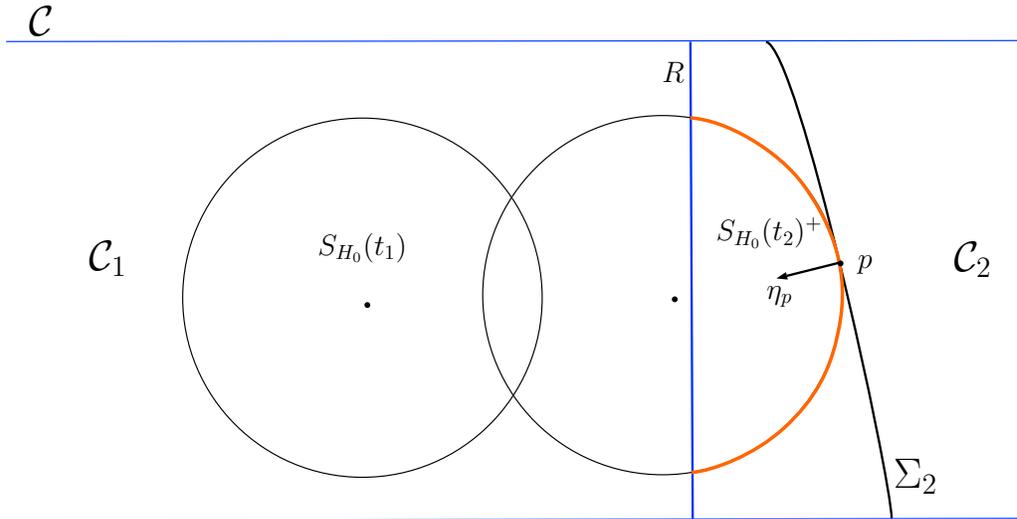


Figura 3.2: En naranja, la porción  $S_{H_0}(t)^+ = S_{H_0}(t) \cap \mathcal{C}_2$ . Notemos que la esfera  $S_{H_0}$  no tiene porqué estar contenida enteramente en  $\mathcal{U}$ , ya que la contradicción es local.

Esta estimación del diámetro de una superficie con curvatura media *acotada por*

abajo por una constante positiva en particular se cumple en la familia de  $\mathcal{H}$ -superficies con  $\mathcal{H} > 0$ , ya que la función  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  alcanza su mínimo en la esfera.

El siguiente resultado es una estimación de curvatura para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  inspirado en el estudio previo realizado por Rosenberg, Souam y Toubiana en [RST].

**Teorema 3.1.2.** *Sean  $\Lambda, d, \rho$  constantes positivas. Entonces, existe una constante  $C = C(\Lambda, d, \rho) > 0$  de forma que se cumple la siguiente afirmación:*

*Sea  $\Sigma$  una superficie orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , posiblemente con borde no vacío. Sean  $\sigma_\Sigma, H_\Sigma, \eta_\Sigma$ , respectivamente, su segunda forma fundamental, su curvatura media y su aplicación de Gauss, y supongamos que*

$$|H_\Sigma| + |\nabla H_\Sigma| \leq \Lambda \quad \text{en } \Sigma, \quad (3.1)$$

$$\eta_\Sigma(\Sigma) \subset \mathbb{S}^2 \text{ omite un disco esférico de radio } \rho. \quad (3.2)$$

*Entonces, para todo  $p \in \Sigma_d := \{q \in \Sigma : d_\Sigma(q, \partial\Sigma) \geq d\}$ <sup>3</sup>, se tiene*

$$|\sigma_\Sigma(p)| \leq C.$$

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que el enunciado del teorema no es cierto. Entonces, existe una sucesión  $f_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^3$  de superficies orientadas, inmersas en  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen (3.1), (3.2), y puntos  $p_n \in \Sigma_n$  tal que  $d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n) \geq d$  y  $|\sigma_{\Sigma_n}(p_n)| \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$ , donde  $\sigma_{\Sigma_n}$  denota la segunda forma fundamental de cada  $\Sigma_n$ . Tras quedarnos con una parcial de esta sucesión de superficies, podemos suponer que se satisface  $|\sigma_{\Sigma_n}(p_n)| > n, \forall n$ . Igualmente, aplicando una rotación a cada  $f_n(\Sigma_n)$  si es necesario, podemos suponer que las imágenes de todas las aplicaciones de Gauss  $\eta_n$  de  $f_n(\Sigma_n)$  omiten el disco esférico abierto centrado en el polo norte  $\mathbb{S}^2$  y de radio  $\rho$ .

Consideremos para cada  $n$  el disco métrico intrínseco  $D_n = B_{\Sigma_n}(p_n, d/2)$  en  $\Sigma_n$ , que por construcción se encuentra a una distancia positiva de  $\partial\Sigma_n$ . Sea  $q_n$  el máximo

---

<sup>3</sup>Cuando la superficie  $\Sigma$  no es completa, la condición  $d_\Sigma(q, \partial\Sigma) \geq d$  expresa que toda geodésica que emana de  $q$  está bien definida hasta distancia al menos  $d$ .

en  $D_n$  de la función

$$h_n(x) = |\sigma_{\Sigma_n}(x)|d_{\Sigma_n}(x, \partial D_n).$$

Claramente,  $q_n$  se encuentra en el interior de  $D_n$  ya que  $h_n$  es una función que se anula en  $\partial D_n$ . Sea  $\lambda_n = |\sigma_{\Sigma_n}(q_n)|$  y  $r_n = d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)$ . Entonces,

$$\lambda_n r_n = |\sigma_{\Sigma_n}(q_n)|d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n) = h_n(q_n) \geq h_n(p_n) > \frac{dn}{2}. \quad (3.3)$$

En particular,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$ . Además, notemos que para todo  $z_n \in B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$  tenemos

$$d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n) \leq 2d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n). \quad (3.4)$$

Consideremos ahora las inmersiones  $g_n : B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtenidas tras aplicar una homotecia de factor  $\lambda_n$  a la restricción de  $f_n$  a  $B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ ; esto es,  $g_n = \lambda_n f_n|_{B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)}$ . Para ahorrar notación escribiremos  $M_n$  para denotar a estas superficies dadas por  $g_n$ .

Por (3.4), tenemos la siguiente estimación de la segunda forma fundamental  $\sigma_{M_n}$  de  $M_n$  en todo punto  $z_n$  de  $B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ :

$$|\sigma_{M_n}(z_n)| = \frac{|\sigma_{\Sigma_n}(z_n)|}{\lambda_n} = \frac{h_n(z_n)}{\lambda_n d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq \frac{h_n(q_n)}{\lambda_n d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} = \frac{d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)}{d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq 2. \quad (3.5)$$

En particular, las normas de las segundas formas fundamentales de las superficies  $M_n$  están *uniformemente acotadas*. Notemos que por construcción  $|\sigma_{M_n}(q_n)| = 1$ . Por (3.3), la sucesión de los radios de  $M_n$  divergen a infinito (recordemos que el *radio* de una superficie riemanniana compacta con borde es el máximo de las distancias de los puntos de la superficie a su borde).

Sea ahora  $\widetilde{M}_n$  la traslación de  $M_n$  que lleva el punto  $g_n(q_n)$  al origen de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\xi_n \in \mathbb{S}^2$  la imagen de la aplicación de Gauss de  $M_n$  en  $q_n$ . Tras pasar a una parcial, tenemos que  $(\xi_n)_n \rightarrow \xi$  para  $n \rightarrow \infty$ , donde  $\xi \in \mathbb{S}^2$ . Por construcción, la norma de la segunda forma fundamental de  $\widetilde{M}_n$  es a lo sumo 2 y es igual a 1 en el origen.

A continuación usaremos un argumento similar al utilizado en la prueba del Teorema 1.7.1, que nos permitirá probar que una subsucesión de la sucesión  $\widetilde{M}_n$  converge uniformemente sobre compactos a una superficie mínima completa  $M_\infty$ , inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .

Primero, la Proposición 2.3 en [RST] asegura la existencia de constantes positivas  $\delta_0, \mu$  (que no dependen de  $n$ ) tal que para todo  $n$  suficientemente grande podemos ver un entorno del origen en  $\widetilde{M}_n$  como el grafo de una función  $u_n$  sobre un disco  $D_n^0$  de radio  $\delta_0$  en su plano tangente  $T_0\widetilde{M}_n = \xi_n^\perp$ , y tal que  $\|u_n\|_{C^2(D_n^0)} \leq \mu$ . Como los vectores  $\xi_n$  convergen a  $\xi$  en  $\mathbb{S}^2$ , tras hacer  $\delta_0$  menor (resp.  $\mu$  mayor) si fuese necesario, y para todo  $n$  suficientemente grande, tenemos que las mismas propiedades enunciadas se cumplen con respecto a la dirección  $\xi$ . Esto es:

1. Un entorno abierto del origen en  $\widetilde{M}_n$  se puede expresar como el grafo  $x_3 = u_n(x_1, x_2)$  de una función  $u_n$  sobre el disco euclídeo  $\mathcal{D}_0 := D(0, \delta_0)$  de radio  $\delta_0$  en  $\Pi_0 = \xi^\perp$ ; aquí  $(x_1, x_2, x_3)$  denota un sistema de coordenadas ortonormales euclídeas centradas en el origen, de forma que  $\frac{\partial}{\partial x_3} = \xi$ .
2. La norma  $C^2$  de  $u_n$  en  $\mathcal{D}_0$  es a lo sumo  $\mu$ .

Denotemos por  $H_n(x_1, x_2)$  a la función curvatura media del grafo  $u_n$  en estas coordenadas. Notemos que por (3.1) y por el hecho de que la sucesión  $\lambda_n$  diverge a  $\infty$ , las funciones  $H_n$  están uniformemente acotadas en la norma  $C^1(\mathcal{D}_0)$ ; es más, las funciones  $H_n$  convergen uniformemente a cero en esta norma. Por tener el grafo de  $u_n$  curvatura media  $H_n$ ,  $u_n$  es solución de la ecuación en derivadas parciales lineal y elíptica para  $u$ :

$$a_{11}(Du_n)u_{11} + 2a_{12}(Du_n)u_{12} + a_{22}(Du_n)u_{22} = 2H_n(1 + |Du_n|^2)^{3/2}, \quad (3.6)$$

donde  $u_{ij}$  denota la segunda derivada de  $u$  con respecto a las variables  $x_i, x_j$  y los coeficientes  $a_{ij}$  son funciones diferenciables. Por la condición 2 arriba enunciada, las funciones  $u_n$  están acotadas en la norma  $C^{1,\alpha}$  en  $\mathcal{D}_0$ , de lo que concluimos que todos los coeficientes de (3.6) están acotados en la norma  $C^{0,\alpha}(\mathcal{D}_0)$ . Bajo estas hipótesis, la teoría clásica de Schauder asegura que las normas  $C^{2,\alpha}$  de las funciones  $u_n$  en todo  $D(0, \delta) \subset\subset \mathcal{D}_0$  están uniformemente acotadas.

En estas condiciones podemos repetir la última parte de la prueba del Teorema 1.7.1 usando el teorema de Arzela-Ascoli y un argumento diagonal estándar, y concluir que una subsucesión de las superficies  $\widetilde{M}_n$  converge uniformemente sobre compactos en la topología  $C^2$  a una superficie mínima y completa  $M_\infty$ , con curvatura acotada y que pasa por el origen (observemos que  $M_\infty$  es mínima por el hecho de que las curvaturas medias de  $\widetilde{M}_n$  convergen uniformemente a cero por construcción). Además, la norma de la segunda forma fundamental de  $M_\infty$  en el origen es igual a 1.

Al haber obtenido las superficies  $\widetilde{M}_n$  por traslaciones y homotecias en  $\mathbb{R}^3$  de las inmersiones originales  $f_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y ya que las imágenes de las aplicaciones de Gauss de cada  $f_n$  omiten un disco esférico abierto de radio  $\rho$  del polo norte en  $\mathbb{S}^2$ , la aplicación de Gauss de  $M_\infty$  también omite dicho disco abierto. Aplicando un resultado clásico de Osserman el cual asegura que la imagen de la aplicación de Gauss de una superficie mínima no plana y completa en  $\mathbb{R}^3$  es densa en  $\mathbb{S}^2$ , deducimos que  $M_\infty$  ha de ser un plano. Pero esto contradice el hecho de que la norma de la segunda forma fundamental de  $M_\infty$  en el origen sea igual a 1. Esta contradicción prueba el Teorema 3.1.2.  $\square$

**Observación 3.1.3.** *Observando la prueba del Teorema 3.1.2, es claro que este resultado sigue siendo cierto si suponemos en vez de (3.1) que  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie para alguna función predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ . En este caso, la ecuación (3.6) se escribe como*

$$a_{11}(Du_n)u_{11} + 2a_{12}(Du_n)u_{12} + a_{22}(Du_n)u_{22} = 2\mathcal{H}_n \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |Du_n|^2}} \right) (1 + |Du_n|^2)^{3/2},$$

donde podemos ver cada función  $u_n$  definida en el espacio tangente  $T_{\xi_n}\mathbb{S}^2 = T_0\widetilde{M}_n$ . En particular, la constante  $C$  solo depende de  $d, \rho$  y la norma  $C^1$  de  $\mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}^2$ .

Es interesante comparar las hipótesis del Teorema 3.1.2 con la familia de catenoides mínimas  $C_\varepsilon$  en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\varepsilon > 0$  es el *tamaño del cuello*. Cuando el parámetro  $\varepsilon \rightarrow 0$  la curvatura de  $C_\varepsilon$  explota en el cuello. Más aún, si consideramos, para  $d > 0$  fijo, el trozo  $C_\varepsilon(d_0)$  de  $C_\varepsilon$  de todos los puntos que están a distancia menor que  $d_0$  del cuello,

entonces la imagen de la aplicación de Gauss en  $\mathbb{S}^2$  de  $C_\varepsilon(d_0)$  converge cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  a  $\mathbb{S}^2$  menos dos puntos antípoda. Esta situación muestra que la condición (3.2) no se puede suprimir en el Teorema 3.1.2.

### 3.2. Estimaciones de altura uniformes para $\mathcal{H}$ -grafos

En la siguiente definición no suponemos que  $\partial\Sigma$  esté acotado y por tanto  $\Sigma$  puede no ser compacta.

**Definición 3.2.1.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ , y fijemos un cierto  $v \in \mathbb{S}^2$ . Diremos que existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección de  $v$  si existe una constante  $C = C(\mathcal{H}, v) > 0$  tal que la siguiente afirmación se cumple:*

*Para todo grafo  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  de curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  orientado hacia  $v$  (esto es,  $\langle \eta, v \rangle > 0$  en  $\Sigma$ , donde  $\eta$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ ), y con  $\partial\Sigma$  contenido en el plano  $\Pi = v^\perp$ , se tiene que la distancia de todo  $p \in \Sigma$  al plano  $\Pi$  es a lo sumo  $C$ .*

Claramente los grafos mínimos en  $\mathbb{R}^3$  no satisfacen una estimación de altura uniforme; la mitad de una catenoide mínima es un grafo con borde compacto contenido en un plano y con altura respecto del plano no acotada. Si la curvatura media es constante y positiva ya hemos mencionado que Meeks probó que los  $H$ -grafos satisfacen una estimación de altura uniforme. Notemos que si  $\mathcal{H} > 0$ , la condición  $\langle \eta, v \rangle > 0$  implica por el principio de comparación por curvatura media que el interior de  $\Sigma$  está contenido en  $\Pi^-$ , donde  $\Pi^-$  es la componente de  $\mathbb{R}^3 - \Pi$  que contiene al vector  $-v$ .

Primero fijemos notación que será útil. Para el siguiente resultado trabajaremos en un sistema de coordenadas euclídeas  $(x_1, x_2, x_3)$  de forma que  $v = e_3$ . Denotaremos por  $\mathbb{S}_+^2 = \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\}$ ,  $S^1 = \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 = 0\}$ , y  $\overline{\mathbb{S}_+^2} = \mathbb{S}_+^2 \cup S^1$ .

Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ . Una  $\mathcal{H}$ -semiesfera en la dirección  $e_3$  es cualquier  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  compacta, estrictamente convexa y con borde, de forma que su interior es un grafo  $x_3 = u(x_1, x_2)$  orientado hacia arriba sobre un disco  $C^2$  regular y convexo en  $\mathbb{R}^2$ , y tal que la imagen de la aplicación de Gauss es  $\overline{\mathbb{S}_+^2}$ .

Dada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ , recordemos que una condición necesaria y suficiente para la existencia de una curva cerrada  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  tal que el cilindro vertical  $\gamma \times \mathbb{R}$  sea una  $\mathcal{H}$ -superficie es que  $\mathcal{H}(x) \neq 0 \forall x \in S^1$  y

$$\int_{S^1} \frac{x}{\mathcal{H}(x)} dx = 0, \quad (3.7)$$

véase el Corolario 1.5.4. En este caso,  $\gamma$  es estrictamente convexa y acota un dominio compacto en  $\mathbb{R}^2$ , el cual denotaremos por  $\Omega_{\mathcal{H}}$ .

**Teorema 3.2.2.** *Dada  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , cualquiera de las siguientes condiciones sobre  $\mathcal{H}$  implica que existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$ :*

1. La condición (3.7) no se cumple.
2. La condición (3.7) se cumple y existe un grafo  $\Sigma_0$  orientado hacia  $e_3$  sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que contiene a  $\Omega_{\mathcal{H}}$  y satisfaciendo  $H_{\Sigma_0}(p) > \mathcal{H}(\eta_0(p))$  para todo  $p \in \Sigma_0 \cap (\Omega_{\mathcal{H}} \times \mathbb{R})$ ; aquí  $\eta_0$  denota la aplicación de Gauss de  $\Sigma_0$ .
3. Existe una  $\mathcal{H}$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ .
4. Existe alguna  $\mathcal{H}^* \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$  para la cual existe una  $\mathcal{H}^*$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ , con  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$  en  $S^1$  y tal que  $\mathcal{H}^* > \mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}_+^2$ .
5. La función  $\mathcal{H}$  satisface  $\max \mathcal{H} < 2 \min \mathcal{H}|_{S^1}$ .

Probaremos el Teorema 3.2.2 en la Sección 3.3, y dedicaremos el resto de la Sección 3.2 a discutir las condiciones suficientes que aparecen en el Teorema 3.2.2 y a deducir consecuencias de él.

La primera condición en el Teorema 3.2.2 indica que para elecciones generales no simétricas de  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , existen estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos. La segunda condición da, para los casos restantes de las funciones  $\mathcal{H}$ , una condición suficiente muy general para la existencia de estimaciones de altura uniformes

para  $\mathcal{H}$ -grafos, en términos de la existencia de una *barrera* adecuada  $\Sigma_0$ . El resto de las condiciones suficientes en el Teorema 3.2.2 se obtienen aplicando la segunda condición a situaciones concretas donde podemos construir la barrera  $\Sigma_0$ .

La primera consecuencia particular del Teorema 3.2.2 de especial interés en nuestro estudio es:

**Corolario 3.2.3.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , y supongamos que existe una  $\mathcal{H}$ -esfera  $S_{\mathcal{H}}$  estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos con respecto a cualquier dirección  $v \in \mathbb{S}^2$ .*

*Demostración.* Simplemente observemos que la superficie definida por  $\Sigma_{\mathcal{H},v} := \{p \in S_{\mathcal{H}} : \langle \eta_{S_{\mathcal{H}}}(p), v \rangle \geq 0\}$ , donde  $\eta_{S_{\mathcal{H}}}$  denota la aplicación de Gauss de  $S_{\mathcal{H}}$ , es una  $\mathcal{H}$ -semiesfera en la dirección  $v$ . En estas condiciones podemos aplicar el apartado 3 del Teorema 3.2.2.  $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del apartado 5 del Teorema 3.2.2:

**Corolario 3.2.4.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ . Fijemos cualquier  $H_0 > \max \mathcal{H} - 2\min \mathcal{H}|_{S^1}$ . Entonces, existe una estimación de altura uniforme para grafos con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H} + H_0$  en la dirección  $e_3$ .*

*Demostración.* Simplemente notemos que  $\max(\mathcal{H} + H_0) = \max \mathcal{H} + H_0$ ,  $\min(\mathcal{H}|_{S^1} + H_0) = \min \mathcal{H}|_{S^1} + H_0$ , y por tanto  $\max(\mathcal{H} + H_0) - 2\min(\mathcal{H}|_{S^1} + H_0) = \max \mathcal{H} - 2\min \mathcal{H}|_{S^1} - H_0$ , lo cual es negativo por hipótesis. Ahora es claro que podemos aplicar el apartado 5 del Teorema 3.2.2 a la función  $\mathcal{H} + H_0$ .  $\square$

Si imponemos simetrías adicionales a la función predeterminada  $\mathcal{H}$ , el Teorema 3.2.2 nos da condiciones suficientes más específicas para la existencia de estimaciones de altura uniformes. Por ejemplo:

**Corolario 3.2.5.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , rotacionalmente simétrica, es decir,  $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, e_3 \rangle)$  para  $\mathfrak{h} \in C^1([0, 1])$ . Supongamos que  $\mathfrak{h}'(0) \leq 0$ .*

Entonces, existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$ .

*Demostración.* Primero supongamos que  $\mathfrak{h}'(0) = 0$ . Entonces podemos extender  $\mathfrak{h}$  a una función par y positiva con regularidad  $C^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por tanto,  $\mathcal{H}$  puede extenderse de igual forma a una función positiva de clase  $C^1$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , la cual denotaremos también por  $\mathcal{H}$ , y de forma que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ . Por el Teorema 2.3.1 existe una  $\mathcal{H}$ -esfera rotacional  $S_{\mathcal{H}}$  estrictamente convexa. Ahora el resultado es consecuencia del Corolario 3.2.3.

Supongamos entonces que  $\mathfrak{h}'(0) < 0$ . Entonces, podemos construir una función  $h^* \in C^1([-1, 1])$ , con  $h^*(t) = h^*(-t)$  para todo  $t$ , y tal que  $h^*(0) = \mathfrak{h}(0)$  y  $h^*(t) > \mathfrak{h}(t)$  para todo  $t \in (0, 1]$ . Sea  $\mathcal{H}^* \in C^1(\mathbb{S}^2)$  definida como de costumbre en términos de  $\mathfrak{h}^*$  por la ecuación (2.1), y notemos que  $\mathcal{H}^*(x) = \mathcal{H}^*(-x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Discutiendo como en el párrafo anterior, existe una  $\mathcal{H}^*$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ . Ahora es claro que  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$  en  $S^1$  y  $\mathcal{H}^* > \mathcal{H}$  en  $\mathbb{S}_+^2$ , y tenemos la estimación de altura deseada aplicando el apartado 4 del Teorema 3.2.2.  $\square$

**Observación 3.2.6.** *La condición  $\mathfrak{h}'(0) \leq 0$  en el corolario anterior no se puede suprimir. De hecho, el análisis de la Sección 2.4 muestra que existen funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , tal que la función  $\mathfrak{h}$  definida por medio de la ecuación (2.1) satisface  $\mathfrak{h}'(0) > 0$  y que no admiten estimaciones de altura uniformes. Por ejemplo, la función  $\mathfrak{h}$  definida por la ecuación (2.16) proporciona un ejemplo que prueba esta afirmación.*

Para el caso en el que  $\mathcal{H} > 0$  es invariante bajo la simetría con respecto a una geodésica de  $\mathbb{S}^2$ , tenemos una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -superficies compactas embebidas, no necesariamente grafos.

**Corolario 3.2.7.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , satisfaciendo:*

1.  $\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{H}(x_1, x_2, -x_3)$  para todo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ .
2. *Existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$  o  $-e_3$ .*

Entonces, existe una constante  $C = C(\mathcal{H}) > 0$  tal que se cumple la siguiente afirmación: cualquier  $\mathcal{H}$ -superficie compacta  $\Sigma$ , embebida en  $\mathbb{R}^3$  con  $\partial\Sigma$  contenido en el plano  $\{x_3 = 0\}$ , se encuentra contenida en la banda  $|x_3| \leq C$  de  $\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Notemos que por la condición de simetría impuesta sobre  $\mathcal{H}$ , podemos aplicar reflexiones con respecto de planos horizontales  $P(t) = \{x_3 = t; t \in \mathbb{R}\}$  a la clase de  $\mathcal{H}$ -superficies como una consecuencia directa del Lema 1.1.5.

Sea  $q \in \Sigma$  un punto donde se alcanza la altura máxima de  $\Sigma$  respecto de  $\{x_3 = 0\}$ ; salvo un cambio de coordenadas euclídeas, podemos suponer que  $q_3 > 0$ . Consideremos la foliación por planos horizontales  $P(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = t\}$ . Denotemos por  $P^+(t)$  al semiespacio superior  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 \geq t\}$ . Por ser  $\Sigma$  compacta, para  $t$  suficientemente grande tenemos que  $P(t) \cap \Sigma = \emptyset$ . Si hacemos  $t$  decrecer llegamos a un primer instante  $t = q_3$  tal que  $P(q_3) \cap \Sigma \neq \emptyset$ , donde  $q_3$  es la tercera coordenada del punto  $q$ . Si seguimos disminuyendo  $t$  y realizamos el método de reflexión de Alexandrov, para  $q_3/2 < t < q_3$  la simetría de  $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap P^+(t)$  no interseca a  $\partial\Sigma$ . Por tanto, ningún  $P(t)$  con  $t \in (q_3/2, q_3)$  puede ser un plano de simetría de  $\Sigma$ . Esto nos dice que la simetría de  $\Sigma^+(t)$  interseca a  $\Sigma$  solo en los puntos frontera  $\Sigma \cap P(t)$  y  $\Sigma$  nunca es ortogonal a  $P(t)$ . Por continuidad,  $\Sigma^+(q_3/2)$  es un grafo sobre un cierto dominio en el plano  $P(q_3/2)$ . Esto nos dice que toda  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma$  compacta y embebida en  $\mathbb{R}^3$  con borde en un plano satisface que “la mitad superior” de  $\Sigma$  es un grafo sobre el plano donde se apoya su borde. En consecuencia, si llamamos  $C/2 = C(\mathcal{H})/2$  a la constante proporcionada por el Teorema 3.2.2 para los  $\mathcal{H}$ -grafos, la superficie  $\Sigma$  satisface  $p_3 \leq C, \forall p \in \Sigma$ , donde  $p_3$  denota la tercera coordenada del punto  $p$ .

Si repetimos este procedimiento con la familia de planos  $P(t)$  para  $t$  viniendo de  $-\infty$ , obtenemos la acotación  $-p_3 \geq C \forall p \in \Sigma$ . En consecuencia,  $\Sigma$  está contenida en la banda  $|x_3| \leq C$ .  $\square$

### 3.3. Demostración del Teorema 3.2.2

Comenzaremos probando los dos primeros apartados. Argumentando por reducción al absurdo, supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\overline{\mathbb{S}_+^2})$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , es una función para la cual no existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en la dirección  $e_3$ . Entonces, existe una sucesión  $(\Sigma_n)_n$  de  $\mathcal{H}$ -grafos orientados hacia  $e_3$  (es decir,  $\langle \eta_n, e_3 \rangle > 0$  donde  $\eta_n$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma_n$ ), y cuyos bordes  $\partial\Sigma_n$  están contenidos en planos horizontales  $\Pi_n = \{x_3 = h_n\}$ ,  $h_n \in \mathbb{R}$ , y existen puntos  $p_n \in \Sigma_n$  de forma que la altura de cada  $p_n$  sobre  $\Pi_n$  tiende a infinito. Salvo traslaciones verticales podemos suponer que todos los planos  $\Pi_n$  coinciden con el plano horizontal  $\Pi = \{x_3 = 0\}$ , y salvo una parcial podemos suponer que la altura de cada  $p_n$  sobre  $\Pi$  es mayor que  $n$ . Notemos que  $\Sigma_n \subset \{x_3 \leq 0\}$  para todo  $n$ , como consecuencia del principio de comparación por curvatura media.

Tomemos  $H_0 \in (0, \min \mathcal{H})$  y denotemos por  $\Sigma_n^* := \Sigma_n \cap \{|x_3| \geq 4/H_0\}$ . Por hipótesis,  $p_n \in \Sigma_n^*$  para  $n$  suficientemente grande. Por el Lema 3.1.1, la componente conexa  $\Sigma_n^0$  de  $\Sigma_n^*$  que contiene a  $p_n$  es compacta y está contenida en el interior de un cilindro vertical sólido de radio  $2/H_0$ .

Sea  $q_n \in \Sigma_n^0$  un punto de altura máxima de  $\Sigma_n^0$  respecto de  $\Pi$ , y denotemos por  $\Sigma_n^1 := \Sigma_n^0 - q_n$  a la traslación de  $\Sigma_n^0$  que lleva el punto  $q_n$  al origen  $\mathbf{0}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Por el Teorema 3.1.2 y la Observación 3.1.3, las normas de las segundas formas fundamentales de los grafos  $\Sigma_n^1$  están uniformemente acotadas por una constante positiva  $C > 0$  que solo depende de  $H_0$  y  $\|\mathcal{H}\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}$  y no de  $n$ . Más aún, las distancias en  $\mathbb{R}^3$  del origen a  $\partial\Sigma_n^1$  divergen a  $\infty$ . Por el Teorema 1.7.1 deducimos que, tras pasar a una parcial, existen conjuntos compactos diferenciables  $K_n$  en los grafos  $\Sigma_n^1$ , todos ellos conteniendo al origen y con plano tangente horizontal en él, y que convergen uniformemente en la topología  $C^2$  a una  $\mathcal{H}$ -superficie completa  $\Sigma_\infty$  de curvatura acotada y que pasa por el origen.

Definamos ahora  $\nu_\infty := \langle \eta_\infty, e_3 \rangle$ , donde  $\eta_\infty$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma_\infty$ . Por la continuidad de la convergencia se tiene  $\eta_\infty(\mathbf{0}) = 1$ . Por estar todos los grafos  $\Sigma_n^1$  orientados apuntando hacia  $e_3$ , deducimos que  $\nu_\infty \geq 0$  en  $\Sigma_\infty$ .

Es más, por el Corolario 4.2.3 (el cual probaremos en el Capítulo 4) deducimos que la función  $\nu_\infty$  es una solución a una ecuación lineal elíptica en  $\Sigma_\infty$  de la forma

$$\Delta_{\Sigma_\infty} \nu_\infty + \langle X, \nabla_{\Sigma_\infty} \nu_\infty \rangle + q \nu_\infty = 0, \quad (3.8)$$

donde  $\Delta_{\Sigma_\infty}$ ,  $\nabla_{\Sigma_\infty}$  denotan, respectivamente, el operador de Laplace-Beltrami y el operador gradiente en  $\Sigma_\infty$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_\infty)$ , y  $q \in C^2(\Sigma_\infty)$ . El principio del máximo para operadores lineales elípticos de la forma (3.8) junto a la condición  $\nu_\infty \geq 0$  nos permiten afirmar que o bien  $\nu_\infty \equiv 0$  en  $\Sigma_\infty$  (lo cual no puede darse, por ser  $\nu_\infty(\mathbf{0}) = 1$ ), o bien  $\nu_\infty > 0$  en  $\Sigma_\infty$ . Por tanto,  $\Sigma_\infty$  es un grafo vertical local, esto es, para todo  $p \in \Sigma_\infty$  el plano tangente  $T_p \Sigma_\infty$  nunca es un plano vertical en  $\mathbb{R}^3$ .

En esta situación, y dado que  $\Sigma_\infty$  es el límite de piezas compactas de los grafos  $\Sigma_n^1$ , es claro que  $\Sigma_\infty$  es en sí un  $\mathcal{H}$ -grafo propio en  $\mathbb{R}^3$  orientado hacia  $e_3$ . Por construcción,  $\Sigma_\infty$  tiene plano tangente horizontal en el origen, tiene segunda forma fundamental acotada y está contenido en el semiespacio cerrado  $\{x_3 \geq 0\}$ . Como cada  $\Sigma_n^0$  se encuentra contenida en un cilindro sólido vertical en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $2/H_0$ , deducimos que todos los puntos de  $\Sigma_\infty$  se encuentran a una distancia en  $\mathbb{R}^3$  a lo sumo  $4/H_0$  del eje  $x_3$ .

Expresemos  $\Sigma_\infty$  como el grafo  $x_3 = f(x_1, x_2)$  sobre un dominio acotado abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y sea  $L$  una línea recta en  $\mathbb{R}^2$  suficientemente lejos de  $\Omega$ . Si movemos esta recta  $L$  hacia  $\Omega$  encontraremos un primer punto de contacto  $q_0 \in L$  con el conjunto compacto  $\bar{\Omega}$ ; obviamente, tal punto  $q_0$  se encuentra en  $\partial\Omega$ . Por ser  $\Sigma_\infty$  un grafo propio a distancia a lo sumo  $4/H_0$  del eje  $x_3$ , es claro que para tal  $q_0 \in \partial\Omega$  existe una sucesión divergente de puntos  $(a_n)_n \in \Sigma_\infty$  cuyas proyecciones horizontales convergen a  $q_0$  y de forma que  $\nu_\infty(a_n) \rightarrow 0$ .

Para la sucesión divergente  $(a_n)_n$  en  $\Sigma_\infty$ , consideremos las traslaciones verticales  $\Sigma_\infty^n = \Sigma_\infty - (0, 0, a_n^3)$  donde  $a_n^3$  denota la tercera coordenada del punto  $a_n$ . Salvo una parcial podemos suponer que la sucesión de las imágenes de las aplicaciones de Gauss en los puntos  $a_n$  convergen a un vector fijo  $\eta_0 \in \mathbb{S}^2$ , el cual es horizontal. De nuevo, un argumento de compacidad similar a los usados anteriormente nos permite asegurar que una parcial de los grafos  $\Sigma_\infty^n$  converge a una  $\mathcal{H}$ -superficie completa  $\Sigma_\infty^*$  que pasa por  $q_0 \in \partial\Omega$ .

Por construcción,  $\Sigma_\infty^*$  está contenida en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ . Es más, es claro del hecho de que la sucesión  $a_n^3$  diverge a infinito que  $(\Omega \times \mathbb{R}) \cap \Sigma_\infty^* = \emptyset$  (observemos que  $\Sigma_\infty^*$  ha sido construida a partir de traslaciones verticales divergentes de piezas compactas de  $\Sigma^*$ ). Esto implica que  $\Sigma_\infty^*$  está contenida en  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  y que la componente conexa de  $\Sigma_\infty^*$  que contiene el punto  $(q_0, 0)$  está contenida en  $(\partial_0\Omega) \times \mathbb{R}$ , donde  $\partial_0\Omega$  denota la componente conexa de  $\partial\Omega$  que contiene a  $q_0$ . Si seguimos llamando a esta componente conexa  $\Sigma_\infty^*$ , entonces tenemos  $\Sigma_\infty^* = \alpha \times \mathbb{R}$ , donde  $\alpha \subset \partial_0\Omega$  es una curva regular en  $\mathbb{R}^2$  que satisface la ecuación (1.11) ya que  $\Sigma_\infty^*$  tiene curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$ . Notemos que  $\alpha$  es una curva cerrada por ser  $\partial\Omega$  compacto, y por tanto  $\Sigma_\infty^*$  es un cilindro llano completo difeomorfo a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , esto es, una de las superficies del Corolario 1.5.4.

Ya que  $\alpha \cap \Omega = \emptyset$ , un argumento de conexión asegura que  $\Omega$  está contenido en una de las dos regiones de  $\mathbb{R}^2$  delimitadas por  $\alpha$ . Por la forma en la que el punto  $q_0 \in \partial\Omega$  fue elegido, es claro que  $\Omega$  está contenida en la región *interior* acotada por  $\alpha$ .

Con toda esta discusión podemos probar los dos primeros apartados del Teorema 3.2.2. Es importante recordar que la demostración la estamos haciendo por reducción al absurdo.

Por ser  $\alpha$  una curva cerrada el Corolario 1.5.4 implica que la ecuación (3.7) se satisface, lo cual es contradictorio. Esto prueba el primer apartado del Teorema 3.3.

Probemos ahora el apartado 2. Supongamos que existe un grafo  $\Sigma_0$  en las condiciones de este apartado, esto es, el dominio  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  sobre el cual  $\Sigma_0$  está definida contiene a  $\alpha$  y  $H_{\Sigma_0}(p) > \mathcal{H}(\eta(p))$  para todo  $p \in \Sigma_0 \cap (\Omega_{\mathcal{H}} \times \mathbb{R})$ . En particular  $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$  donde  $\Omega$  es el dominio del grafo  $\Sigma_\infty$ , el cual tiene curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$ . Recordemos que  $\Sigma_\infty$  está contenida en el semiespacio  $\{x_3 \geq 0\}$ . Por tanto, podemos mover el grafo  $\Sigma_0$  hacia abajo mediante traslaciones verticales de forma que la restricción al conjunto compacto  $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$  está contenido en  $\{x_3 < 0\}$ , y entonces empezar a moverlo hacia arriba hasta llegar a un primer punto de contacto con  $\Sigma_\infty$ . La existencia de este punto de tangencia contradice el principio de comparación por curvatura media, ya que  $H_{\Sigma_0} > \mathcal{H} \circ \eta$  en  $\Sigma_0 \cap (\Omega_{\mathcal{H}} \times \mathbb{R})$  por hipótesis. Esta contradicción prueba el segundo apartado del Teorema 3.3.

**Observación 3.3.1.** *El enunciado del apartado 2 también se cumple en el caso que  $\Sigma_0$  sea un  $\mathcal{H}$ -grafo respecto de la dirección  $e_3$  orientado hacia arriba, definido sobre un dominio que contiene  $\Omega_{\mathcal{H}}$  en su interior. La única diferencia en la demostración con esta nueva hipótesis es que se llega a la contradicción deseada aplicando el principio del máximo 1.1.3 para  $\mathcal{H}$ -superficies, en vez del principio de comparación por curvatura media.*

Ahora probamos el apartado 4 como aplicación del apartado 2. Sean  $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*$  en las condiciones del apartado 4 y sea  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$  una  $\mathcal{H}^*$ -semiesfera en la dirección  $e_3$ . Notemos que  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$  es un  $\mathcal{H}$ -grafo  $x_3 = u(x_1, x_2)$  orientado hacia la dirección  $e_3$ , definido sobre un disco estrictamente convexo cerrado  $\Omega_0$  con frontera regular  $C^2$  dada por  $\Gamma = \partial\Omega_0$ . Por el apartado 1 podemos suponer que la condición (3.7) se cumple, y en particular podemos considerar la curva cerrada  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma \times \mathbb{R}$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$  (véanse los comentarios anteriores al enunciado del Teorema 3.2.2). Si  $\kappa_1^*, \kappa_2^*$  denotan las curvaturas principales (positivas) de  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$ , entonces en todo  $p \in \Sigma_{\mathcal{H}}^*$  en el que el normal unitario  $\eta^*(p)$  sea un vector horizontal  $\xi \in S^1$ , se cumple (por ser  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$  en  $S^1$ )

$$\kappa_1^*(p) + \kappa_2^*(p) = 2\mathcal{H}^*(\xi) = 2\mathcal{H}(\xi) = \kappa_{\gamma}(p'), \quad (3.9)$$

donde  $p'$  es el punto de  $\gamma$  con vector normal igual a  $\xi$  y  $\kappa_{\gamma}$  denota la curvatura geodésica (positiva) de  $\gamma$ . Esto implica que para todo vector unitario  $v \in T_p\Sigma_{\mathcal{H}}^*$ , la segunda forma fundamental  $\sigma_{\Sigma_{\mathcal{H}}^*}$  de  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$  satisface

$$0 < \sigma_{\Sigma_{\mathcal{H}}^*}(p)(v, v) < \kappa_{\gamma}(p'). \quad (3.10)$$

Ya que  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$  es una  $\mathcal{H}$ -semiesfera, los puntos en  $\partial\Sigma_{\mathcal{H}}^* = \{p \in \Sigma_{\mathcal{H}}^* : \langle \eta^*(p), e_3 \rangle = 0\}$  tienen proyección regular sobre la curva convexa  $\Gamma$ . En consecuencia  $\gamma$  y  $\Gamma$  son dos curvas planas cerradas, estrictamente convexas que por la ecuación (3.10) satisfacen la siguiente condición: si  $n_{\Gamma}$  y  $n_{\gamma}$  denotan los normales unitarios interiores de  $\Gamma$  y  $\gamma$ , respectivamente, entonces:

$$\kappa_{\Gamma}(p) < \kappa_{\gamma}(p') \text{ siempre que } n_{\Gamma}(p) = n_{\gamma}(p'). \quad (3.11)$$

En estas condiciones necesitamos el siguiente resultado clásico de curvas planas convexas en  $\mathbb{R}^2$ .

*Si  $\Gamma = \Gamma(s), \gamma = \gamma(t)$  son dos curvas planas regulares, cerradas, estrictamente convexas que satisfacen la condición (3.11), entonces  $\gamma$  está contenida en el interior de la región acotada por alguna traslación de  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Podemos mover la curva  $\gamma$  de forma que sea tangente a  $\Gamma$  en un punto  $p$  y de forma que los normales interiores coincidan, esto es,  $n_\Gamma(p) = n_\gamma(p)$ . Por tanto, salvo reparametrización de las curvas, podemos suponer que  $\gamma(0) = \Gamma(0) = p$  y que  $\gamma'(0) = \Gamma'(0)$ . Por hipótesis  $\kappa_\Gamma(p) < \kappa_\gamma(p)$ , y en consecuencia  $\gamma$  se encuentra contenida en la región acotada por  $\Gamma$  para puntos suficientemente cerca de  $p$ . Supongamos que la tesis del enunciado no se da. Entonces, en un cierto instante,  $\gamma$  deja de estar contenida en la región acotada por  $\Gamma$ . Recorriendo las curvas para  $s, t > 0$ , llamemos  $q$  al primer punto en el que  $\gamma(t_0) \cap \Gamma(s_0) \neq \emptyset$ , para ciertos  $s_0, t_0 > 0$ . Igualmente, recorriendo las curvas para  $s, t < 0$ , llamemos  $w$  al primer punto en el que  $\gamma(t_1) \cap \Gamma(s_1) \neq \emptyset$ , para ciertos  $s_1, t_1 < 0$ .

Consideremos el arco compacto  $A_1 = \Gamma([0, s_0])$ , el cual tiene como puntos extremos  $p$  y  $q$ . Igualmente, consideremos el arco compacto  $A_2 = \Gamma([s_1, 0])$ , el cual tiene como puntos extremos  $p$  y  $w$ . Por ser  $\Gamma$  estrictamente convexa, su normal unitario interior  $n_\Gamma$  es una aplicación biyectiva. En particular, la imagen  $n_\Gamma(A_i)$  de uno de los arcos compactos  $A_i$  es un arco en la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  de amplitud menor o igual que  $\pi$ . Sin perder generalidad, supongamos que esta propiedad se da para el arco  $A_1$  (véase la Figura 3.3).

La convexidad estricta de  $\gamma$ , junto al hecho de que el arco compacto  $B_1 = \gamma([0, t_0])$  se encuentra contenido en el dominio interior delimitado por  $\Gamma$ , nos permite afirmar que la imagen  $n_\gamma(B_1)$  está contenida en  $n_\Gamma(A_i)$ ; en estas condiciones decimos que el normal de  $B_1$  ha “girado menos” en  $\mathbb{S}^1$  que el normal de  $A_1$ . En particular, ambos arcos  $A_1, B_1$  son grafos respecto de la misma dirección.

En vista de las discusiones de los párrafos anteriores, existen dos rectas paralelas

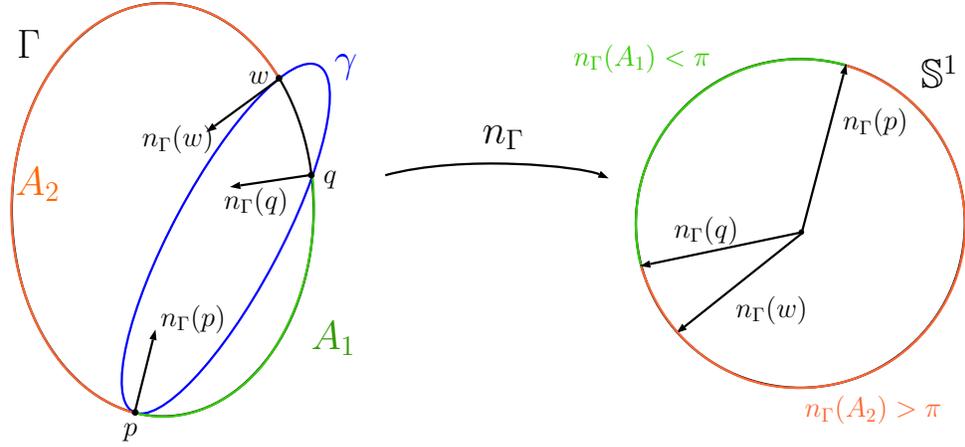


Figura 3.3: Extracción del arco  $A_1$  en  $\Gamma$ , donde el normal interior  $n_\Gamma$  recorre en la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  un arco con amplitud menor que  $\pi$ .

$L_1, L_2$ , conteniendo respectivamente a los puntos  $p$  y  $q$ , de forma que los arcos  $A_1, B_1$  están contenidos en la banda  $[L_1, L_2]$  delimitada por las rectas  $L_1$  y  $L_2$ . Movamos  $B_1$  dentro de la banda  $[L_1, L_2]$  hacia el arco  $A_1$ , de forma que los extremos de  $B_1$  permanezcan en  $L_1 \cup L_2$  en todo momento. Al comienzo,  $B_1$  interseca de forma transversa a  $A_1$  hasta que, por compacidad, una cierta traslación  $B_1^*$  de  $B_1$  deja de intersecar a  $A_1$ . Movamos ahora  $B_1^*$  hacia  $A_1$  hasta que otra traslación de  $B_1$ , la cual llamaremos  $B_1^{**}$ , y  $A_1$  se intersequen en un cierto  $z$ ; véase la Figura 3.4. Tal punto ha de ser un punto interior, ya que originalmente la única intersección entre  $B_1$  y  $A_1$  ocurría en los puntos frontera  $p, q$ . En este punto, los normales interiores de  $B_1^{**}$  y  $A_1$  coinciden, la curvatura de  $B_1^{**}$  es mayor que la de  $A_1$  en  $z$  (por hipótesis) y  $A_1$  está por encima de  $B_1^{**}$  alrededor de  $z$ . Este hecho es una contradicción con el principio de comparación de curvas planas, y el resultado está probado.  $\square$

Este resultado sobre curvas planas asegura que, tras una traslación de  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$ , el disco convexo  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre el cual  $\Sigma_{\mathcal{H}}^*$  es un grafo contiene  $\gamma = \partial\Omega_{\mathcal{H}}$  en su interior. En consecuencia, la existencia de una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos es consecuencia directa del apartado 2 del Teorema 3.2.2, el cual hemos probado ya. Esta

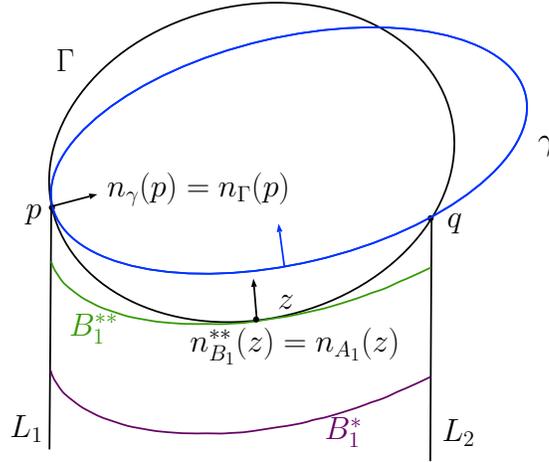


Figura 3.4: Prueba gráfica de la propiedad de las curvas planas convexas anteriormente enunciada. En azul la curva  $\gamma$ , y en negro la curva  $\Gamma$ .

discusión prueba el apartado 4.

La prueba del apartado 3 es análoga a la prueba del apartado 4, usando la formulación alternativa del apartado 2 que está explicada en la Observación 3.3.1, en vez del apartado 2 en sí; esto es, aplicando el principio del máximo para  $\mathcal{H}$ -superficies en lugar del principio de comparación por curvatura media.

Para finalizar, probaremos el apartado 5. El apartado 1 nos permite suponer que la condición (3.7) se satisface y por tanto podemos considerar de nuevo la curva plana cerrada  $\gamma$  para la cual el cilindro vertical  $\gamma \times \mathbb{R}$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Denotemos por  $H_0 := \max \mathcal{H}$ , y sea  $\mathbb{S}^2(1/H_0)$  la esfera totalmente umbilical con curvatura media constante  $H_0$ . Las hipótesis del apartado 5 sobre  $\mathcal{H}$  aseguran que  $2\mathcal{H}(\xi) > H_0$  para todo  $\xi \in S^1$ . Esto implica que la curvatura geodésica de  $\gamma$  satisface  $\kappa_\gamma > H_0$  en todo punto. Por tanto, tras una traslación, la curva  $\gamma$  está contenida en el disco abierto  $D(0, 1/H_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . En este punto, la prueba concluye aplicando el apartado 2 al hemisferio inferior  $\Sigma_0$  de  $\mathbb{S}^2(1/H_0)$ .

Estas discusiones finalizan la prueba del Teorema 3.2.2.

### 3.4. $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas con un final

El siguiente resultado es original de Meeks [Mee2], y tiene un papel fundamental en el desarrollo de esta sección. Véase también el Lema 1.5 en [KKS].

**Teorema 3.4.1 (Lema de separación, [Mee2]).** *Sea  $\Sigma$  una superficie con borde, propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ , difeomorfa al disco cerrado menos un punto  $\overline{\mathbb{D}} - \{0\}$ . Supongamos que la curvatura media  $H_\Sigma$  de  $\Sigma$  satisface  $H_\Sigma(p) \geq H_0 > 0$  para todo  $p \in \Sigma$ , y para algún  $H_0$ .*

*Sean  $P_1, P_2$  dos planos paralelos en  $\mathbb{R}^3$  a distancia uno del otro mayor que  $2/H_0$ , y sean  $P_1^+, P_2^+$  las componentes conexas de  $\mathbb{R}^3 - [P_1, P_2]$ , donde  $[P_1, P_2]$  es la banda abierta entre los dos planos, y tal que  $\overline{P_i^+} = P_i$ . Entonces, todas las componentes conexas de  $\Sigma \cap P_1^+$  o  $\Sigma \cap P_2^+$  son compactas.*

*Demostración.* Supongamos que tanto  $\Sigma \cap P_1^+$  como  $\Sigma \cap P_2^+$  tienen componentes conexas que no son compactas. Entonces podemos tomar curvas *propias*  $\alpha_i : [0, \infty) \rightarrow \Sigma \cap P_i^+$ . Sean  $p_i = \alpha_i(0)$ , de forma que  $p_i \notin \partial\Sigma$ , para  $i = 1, 2$ .

Tomemos  $\beta$  una curva embebida contenida en  $\Sigma$  que una  $p_1, p_2$ , y de forma que la curva  $\Gamma = \alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2$  acota un dominio simplemente conexo en  $\Sigma$ . Sea  $\Pi$  el plano en  $\mathbb{R}^3$  equidistante de los planos  $P_i$  (y por tanto contenido en la banda  $[P_1, P_2]$ ). Sea  $B$  una bola geodésica en  $\mathbb{R}^3$  conteniendo a la curva  $\beta$ , y sea  $C$  una circunferencia  $\mathbb{S}^1$  en  $\Pi$  satisfaciendo las siguientes condiciones:

1.  $C \cap B = \emptyset$ , y  $B$  tiene intersección no vacía con el disco abierto contenido en  $\Pi$  acotado por  $C$ .
2. El entorno tubular  $T = C \times \mathbb{D}^1(r)$  de la circunferencia  $C$  de radio  $r > 1/H_0$  está embebido y  $T \cap B = \emptyset$ .

3. Tomamos  $r$  de forma que  $T$  está contenido en la banda delimitada por los planos  $P_1$  y  $P_2$ .

Tomemos otra bola geodésica  $B_1$  de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $B \cup T$ . De nuevo, por ser  $\Sigma$  propia existen puntos  $x_i \in \alpha_i - B_1$  para  $i = 1, 2$  y existe una curva  $\gamma$  embebida en  $\Sigma$  uniendo  $x_1, x_2$ , la cual satisface:

1.  $\gamma \cap B_1 \neq \emptyset$
2. Si denotamos por  $\rho$  la curva contenida en  $\Gamma$  uniendo  $x_1, x_2$ , entonces la curva cerrada  $\sigma = \gamma \cup \rho$  corta el interior del disco acotado por  $C$  una sola vez, salvo deformación homotópica. Por tanto, el número de ligadura entre  $\sigma$  y  $C$  es  $\pm 1$ .
3. La curva  $\sigma$  acota una región simplemente conexa y compacta  $D$  en  $\Sigma$ .

En conclusión, el toro tubular  $T$  interseca  $D \subset \Sigma$  en un disco  $D_1$  de forma que  $\partial D_1 \subset \partial T$  y tal que el número de ligadura entre  $\partial D_1$  y  $C$  es  $\pm 1$ , véase la Figura 3.5 para un diagrama que muestra parte de la construcción anterior.

En estas condiciones podemos considerar el recubridor universal  $\tilde{T}$  del toro sólido  $T$  y su proyección,  $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$ , la cual es una isometría local, y el levantamiento de  $D_1$  (el cual sigue siendo topológicamente un disco)  $\tilde{D}_1 \subset \tilde{T}$ . Esto es,  $\tilde{T}$  es topológicamente  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ , y  $\tilde{D}_1$  separa  $\tilde{T}$  en dos componentes conexas con frontera común  $\tilde{D}_1$ . Denotemos por  $\mathcal{W}$  la componente conexa de  $\tilde{T} - \tilde{D}_1$  hacia la que apunta el vector curvatura media de  $\tilde{D}_1$ . Sea  $\tilde{C}$  la curva en  $\tilde{T}$  que se proyecta en  $C$  por medio de  $\pi$ .

Para cada  $p \in C$  denotemos por  $\mathcal{S}_{H_0}(p)$  la esfera con curvatura media constante  $H_0$  centrada en  $p$ , la cual está contenida en  $T$  por construcción. En analogía, sea  $\widetilde{\mathcal{S}}_{H_0}(\tilde{p})$  la esfera compacta contenida en  $\tilde{T}$  y centrada en  $\tilde{p} \in \tilde{C}$ . Por compacidad es claro que existe  $\tilde{q} \in \tilde{C}$  tal que  $\widetilde{\mathcal{S}}_{H_0}(\tilde{q})$  está estrictamente contenida en  $\mathcal{W}$ . Si movemos  $\widetilde{\mathcal{S}}_{H_0}(\tilde{q})$  hacia  $\tilde{D}_1$  encontramos un primer punto de contacto en el que los vectores curvatura media coinciden, lo cual es contradictorio con el principio de comparación por curvatura media ya que  $H_0$  era una constante menor o igual que la curvatura media  $H_\Sigma$ , y sin embargo  $\mathcal{S}_{H_0}$  se encuentra por encima de  $\Sigma$ .

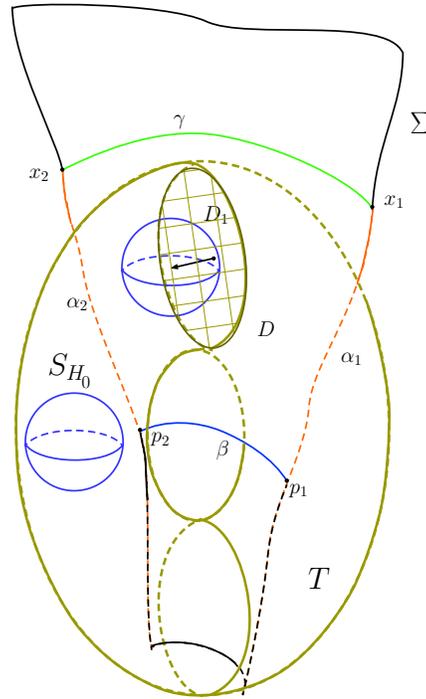


Figura 3.5: Figura que ilustra la construcción del lema de separación. La idea es extraer un trozo simplemente conexo de  $\Sigma$  que sea suficientemente grande, y buscar un punto interior de tangencia con una esfera suficientemente grande.

Esta contradicción prueba el Teorema 3.4.1 □

En lo sucesivo, diremos que una superficie  $\Sigma$  tiene *topología finita* si es difeomorfa a una superficie compacta sin borde  $\mathcal{K}$  menos una cantidad finita de puntos  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{K}$ . Si  $\Sigma$  está propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ , cada uno de los  $p_i$  define un *final* de la superficie, como detallamos a continuación. Para cada  $p_i$  existe un entorno  $D_i$  de  $p_i$  en  $\mathcal{K}$  con la topología de un disco cerrado y de forma que la intersección  $D_i \cap D_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ . Si consideramos un embebimiento propio  $\psi$  de la superficie  $\Sigma = \mathcal{K} - \{p_1, \dots, p_n\}$  en  $\mathbb{R}^3$ , los entornos  $A_i := D_i - \{p_i\}$  tienen la topología de un anillo  $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)$ . En estas

condiciones, se define un *final* de  $\Sigma$  como cualquiera de los anillos  $A_i$ . En numerosas ocasiones, identificaremos los finales  $A_i$  con su imagen por el embebimiento propio  $\psi$ . Notemos que si una superficie  $\Sigma$  es propia, sus finales *divergen a infinito*. Además, por estar  $\Sigma$  embebida en  $\mathbb{R}^3$ , dos finales no pueden intersectarse. Diremos que estos finales son de tipo *anillo*, debido a la topología que tienen. En particular, los finales de una superficie propiamente embebida se encuentran en las condiciones del Teorema 3.4.1.

El análisis realizado en la Sección 3.2 probó la existencia de estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos respecto de cualquier dirección  $v \in \mathbb{S}^2$  para elecciones muy generales de  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ . Por tanto, la segunda hipótesis en el siguiente teorema, aun siendo necesaria, es relativamente débil.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , la cual satisface:*

1.  $\mathcal{H}$  es invariante bajo la reflexión en  $\mathbb{S}^2$  que fija una geodésica  $\mathbb{S}^2 \cap v^\perp$ , para algún  $v \in \mathbb{S}^2$ .
2. Existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}$ -grafos en las direcciones  $v$  y  $-v$ .

*Entonces, existe una constante  $\Lambda = \Lambda(\mathcal{H}, v) > 0$  tal que la siguiente afirmación se cumple: toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y un final está contenida en una banda de anchura a lo sumo  $\Lambda$  entre dos planos paralelos a  $\Pi = v^\perp$ .*

*Demostración.* Sean  $\Pi_1, \Pi_2$  dos planos paralelos al plano vectorial  $\Pi = v^\perp$  a distancia  $2d > 2/H_0$ , donde  $H_0 := \min \mathcal{H}$ , y supongamos que ambos planos  $\Pi_1, \Pi_2$  intersecan  $\Sigma$  (si este par de planos no existe, entonces  $\Sigma$  se encuentra contenida en una banda de anchura  $2d$ , y se tiene el resultado). Tras un cambio de coordenadas euclídeas podemos suponer que  $v = e_3$ , que  $\Pi_1 = \{x_3 = d\}$  y  $\Pi_2 = \{x_3 = -d\}$  para algún  $d > 1/H_0$ . Por estar  $\Sigma$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  y tener un solo final, podemos descomponer  $\Sigma$  como  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \mathcal{A}$ , donde  $\Sigma_0$  es una superficie con topología finita, compacta con borde, embebida en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{A}$  es un embebimiento propio del disco menos un punto

$\mathbb{D} - \{0\}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Usando esta descomposición y el lema de separación (Teorema 3.4.1), deducimos que o bien  $\Sigma \cap \{x_3 \geq d\}$  o bien  $\Sigma \cap \{x_3 \leq -d\}$  tiene solo componentes conexas compactas. Para concretar, digamos que  $\Sigma \cap \{x_3 \geq d\}$  tiene esta propiedad. Por el Corolario 3.2.7,  $\Sigma \cap \{x_3 \geq d\}$  está contenida en la banda  $d \leq x_3 \leq d + C$ , donde  $C = C(\mathcal{H})$  es la constante que aparece en tal corolario. En particular,  $\Sigma$  está contenida en el semiespacio  $\{x_3 \leq d + C\}$ .

Consideremos ahora los planos  $x_3 = d - 2C$  y  $x_3 = -d - 2C$ . Repitiendo los argumentos anteriores, todas las componentes conexas de uno de los conjuntos  $\Sigma \cap \{x_3 \geq d - 2C\}$  o  $\Sigma \cap \{x_3 \leq -d - 2C\}$  son compactas. Si este es el caso de  $\Sigma \cap \{x_3 \geq d - 2C\}$ , los argumentos anteriores muestran que  $\Sigma$  estaría contenida en el semiespacio  $\{x_3 \leq d - C\}$ , lo cual no es posible ya que  $\Sigma$  interseca por hipótesis el plano  $x_3 = d$ . Por tanto,  $\Sigma \cap \{x_3 \leq -d - 2C\}$  solo tiene componentes conexas compactas, y un argumento similar al del párrafo anterior nos permite concluir que  $\Sigma$  está contenida en el semiespacio  $\{x_3 \geq -d - 3C\}$ . En consecuencia,  $\Sigma$  está contenida en una banda de amplitud  $D = 2d + 4C$  entre dos planos paralelos a  $v^\perp$ . Esto prueba el Teorema 3.4.2.  $\square$

A continuación detallamos algunas consecuencias de este resultado:

**Corolario 3.4.3.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , satisfaciendo las propiedades 1 y 2 del Teorema 3.4.2 con respecto a dos direcciones linealmente independientes  $v, w \in \mathbb{S}^2$ . Entonces, existe  $\alpha = \alpha(\mathcal{H}, v, w) > 0$  tal que se cumple la siguiente afirmación: toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida con topología finita y un final está contenida en el interior de un cilindro sólido  $C(v \wedge w, \alpha)$  de radio  $\alpha$  y eje ortogonal a ambos  $v, w$ .*

*Demostración.* Simplemente notemos que los vectores  $v, w$  generan dos bandas independientes (esto es, los planos paralelos que determinan cada banda son independientes) en  $\mathbb{R}^3$ , y tal intersección está contenida en un cilindro con eje  $v \wedge w$  y un cierto radio  $\alpha$ . Ahora, el corolario es inmediato del Teorema 3.4.2.  $\square$

Como caso particular del Corolario 3.4.3, podemos enunciar:

**Corolario 3.4.4.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ , rotacionalmente simétrica, y sea  $\mathfrak{h} \in C^1([-1, 1])$  la función definida mediante la relación  $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, v \rangle)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ , para cierto  $v \in \mathbb{S}^2$ .*

*Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  de topología finita y un final está contenida en el interior de un cilindro sólido de  $\mathbb{R}^3$  con eje paralelo a  $v$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 3.4.2 (o por el Corolario 3.4.3), es suficiente probar que existen estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos en cualquier dirección de  $\mathbb{R}^3$  ortogonal a  $v$ . La forma de obtener estas estimaciones es original de Meeks [Mee2], véase también el argumento en la prueba del Teorema 6.2 en [EGR] el cual reproducimos a continuación.

Sea  $w \in \mathbb{S}^2$  ortogonal a  $v$ . Primero observemos que, por el Lema 3.1.1, podemos restringir la obtención de estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos compactos  $\Sigma$  con  $\partial\Sigma \subset \Pi = w^\perp$ , y con el diámetro de cada componente conexa de  $\partial\Sigma$  siendo menor que  $2/H_0$ , donde  $0 < H_0 < \min_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}$ .

Por tanto, sea  $\Sigma$  un grafo así y sea  $\xi \in \mathbb{S}^2$  otro vector ortogonal a  $v$  y que forma un ángulo de  $\pi/4$  con  $w$ . Notemos que por ser  $\mathcal{H}$  rotacionalmente simétrica podemos aplicar el método de reflexión de Alexandrov con respecto a la familia de planos de  $\mathbb{R}^3$  ortogonales a  $\xi$ . Ahora podemos aplicar el argumento en [EGR, Teorema 6.2] usando reflexiones en esta *dirección inclinada*  $\xi$ , de forma que podemos garantizar la existencia de una constante positiva  $C = C(\mathcal{H}) > 0$  (independiente de  $\Sigma$ ) tal que la distancia de cada  $p \in \Sigma$  al plano  $\Pi$  está acotada por  $C$ . Esto prueba la existencia de estimaciones de altura uniformes y en consecuencia el Corolario 3.4.4.  $\square$

**Observación 3.4.5.** *Sea  $\mathfrak{h}(y) = y + b$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $b > 1$  y definamos la función rotacionalmente simétrica  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  por  $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{h}(\langle x, e_3 \rangle)$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . En la Sección 1.2 probamos que las  $\mathcal{H}$ -superficies obtenidas al predeterminar esta función  $\mathcal{H}$  son solución del flujo geométrico (1.6), el cual corresponde al flujo por curvatura media con un factor de corrección constante. Es más, probamos que estas  $\mathcal{H}$ -superficies tienen curvatura media con peso constante, véase la Proposición 1.2.2. Notemos que la función*

$\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  está en las condiciones del Corolario 3.4.4, y por tanto toda  $\mathcal{H}$ -superficie con topología finita y un final está cilíndricamente acotada. Por ejemplo, en la Sección 2.5 probamos que la  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional que interseca al eje de revolución, oscila alrededor de un cilindro convergiendo a él, y por tanto tiene distancia acotada al eje de revolución. En la Figura 2.12 observamos la  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional que interseca al eje para el caso concreto  $\mathfrak{h}(y) = y + 2$ .

En el caso de que la función  $\mathcal{H}$  sea simétrica respecto de tres reflexiones independientes, obtenemos el siguiente teorema de clasificación:

**Teorema 3.4.6.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ . Supongamos que  $\mathcal{H}$  es invariante bajo tres reflexiones de  $\mathbb{S}^2$  linealmente independientes.*

*Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y a lo sumo un final es una traslación de la esfera de Guan-Guan  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ , definida en el Teorema 1.4.5.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.4.5 sabemos que la  $\mathcal{H}$ -esfera de Guan-Guan estrictamente convexa  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  existe. El Corolario 3.2.3 garantiza la existencia de estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos en cualquier dirección  $v \in \mathbb{S}^2$ . Por tanto, el Teorema 3.4.2 aplicado a las tres direcciones de simetría de  $\mathcal{H}$  asegura que  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  está contenida en una región compacta de  $\mathbb{R}^3$ . Por ser  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  propia en  $\mathbb{R}^3$  y estar en una región acotada,  $\Sigma_{\mathcal{H}}$  es compacta. Ahora el Corolario 1.4.6 implica que  $\Sigma_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  (salvo traslaciones), lo que prueba el resultado.  $\square$

Notemos que si en el Teorema 3.4.6 solo imponemos  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  como regularidad a  $\mathcal{H}$ , entonces no tenemos garantizada la existencia de una  $\mathcal{H}$ -esfera, ya que el teorema de Guan-Guan 1.4.5 asegura la existencia de tal  $\mathcal{H}$ -esfera supuesta regularidad  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ . No obstante, si  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$  es rotacionalmente simétrica y cumple  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ , en el Teorema 2.3.1 probamos la existencia de una  $\mathcal{H}$ -esfera rotacionalmente simétrica. Si además  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ , esta  $\mathcal{H}$ -esfera coincide con  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ .

**Corolario 3.4.7.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$  rotacionalmente simétrica cumpliendo  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ . Entonces, toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y a lo sumo un final es la  $\mathcal{H}$ -esfera rotacional y estrictamente convexa asociada a  $\mathcal{H}$ , con eje de rotación paralelo a  $v$ .*

Notemos que el ejemplo de la Figura 2.12 muestra que el Teorema 3.4.6 no es cierto si solo suponemos que la función predeterminada  $\mathcal{H}$  es invariante con respecto a dos reflexiones geodésicas independientes en  $\mathbb{S}^2$ . Del mismo modo, usando el mismo ejemplo, el Corolario 3.4.7 no es cierto si la función  $\mathcal{H}$  no se supone par.



## Capítulo 4

---

# Estabilidad de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies

---

*Este capítulo está dedicado al estudio de la estabilidad de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Este concepto se definirá por medio del operador de estabilidad de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, operador que surge al linearizar el operador curvatura media predeterminado. Por ser este operador de tipo Schrödinger generalizado, nos centraremos en el análisis espectral de este tipo de operadores, análisis que nos permitirá definir la estabilidad de una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie. Tras probar que todo  $\mathcal{H}$ -grafo es estable y la no existencia de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies estables y compactas, obtendremos una estimación de curvatura para  $\mathcal{H}$ -superficies estables en  $\mathbb{R}^3$ .*

### 4.1. Estabilidad de las hipersuperficies con curvatura media constante

Para comenzar, recordaremos cómo surge el concepto de estabilidad de una hipersuperficie con curvatura media constante, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La notación y terminología están motivados por el trabajo de Meeks, Pérez y Ros [MPR].

Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su aplicación de Gauss. Sea  $\Omega$  un dominio relativamente compacto de  $\Sigma$  y sea  $f \in C_0^2(\Sigma)$  tal que

$\text{sop}(f) \subset \Omega$ , donde  $\text{sop}(f)$  es el *soporte* de  $f$  definido como el conjunto de puntos en los que  $f$  no se anula. En estas condiciones, existe  $\varepsilon > 0$  y una aplicación  $\Psi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  la aplicación  $p \mapsto \Psi(p, t)$  es una inmersión cumpliendo

1.  $\Psi(p, 0) = p, \forall p \in \Sigma$ .
2.  $\Psi(p, t) = p, \forall (p, t) \in (\Sigma - \Omega) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ .
3.  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, 0) = f(p)\eta_p, \forall p \in \Sigma$ .

A la aplicación  $\Psi$  se le llama *variación normal de  $\Sigma$  de soporte compacto con campo variacional  $f\eta$* , y para  $t_0$  fijo la imagen  $p \in \Sigma \mapsto \Psi(p, t_0)$  la denotaremos por  $\Sigma_{t_0}$ . En estas condiciones podemos definir los funcionales área y volumen de la variación  $\Psi$  como

$$\text{Área}(t) = \int_{\Sigma_t} dA_t, \tag{4.1}$$

$$\text{Vol}(t) = \int_{\Sigma \times [0, t]} \text{Jac}(\Psi) dV,$$

donde  $dA_t$  denota el elemento de área de  $\Sigma_t$  y  $dV$  el elemento de volumen en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Es un hecho bien conocido que las hipersuperficies con curvatura media constante  $H$ , inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son puntos críticos del funcional  $\mathcal{J}(t) = \text{Área}(t) - nH\text{Vol}(t)$ . Concretamente, una hipersuperficie  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H$  si y solo si  $\mathcal{J}'(0) = 0$  para toda variación normal de  $\Sigma$  de soporte compacto.

Para estudiar las hipersuperficies con curvatura media constante como puntos críticos del funcional  $\mathcal{J}$ , el siguiente paso lógico es calcular la segunda derivada de tal funcional. Si  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H$ , dada una variación normal de soporte compacto con campo variacional  $f\eta$ , se tiene

$$\mathcal{J}''(0) = - \int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma} f + |\sigma_{\Sigma}|^2 f) f dA, \quad \forall f \in C_0^2(\Sigma), \tag{4.2}$$

donde  $\Delta_\Sigma$ ,  $|\sigma_\Sigma|^2$  denotan, respectivamente, el operador de Laplace-Beltrami y la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$ .

Motivados por la expresión anterior, se define el *operador de estabilidad* u *operador de Jacobi* de una hipersuperficie  $\Sigma$  con curvatura media constante como el operador diferencial lineal  $L := \Delta_\Sigma + |\sigma_\Sigma|^2$ . Por medio de este operador podemos expresar la ecuación (4.2) como

$$\mathcal{J}''(0) = - \int_\Sigma f L f dA, \quad \forall f \in C_0^2(\Sigma).$$

En vista de lo anterior, se define el concepto de hipersuperficie estable:

**Definición 4.1.1.** Una hipersuperficie  $\Sigma$  con curvatura media constante  $H$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  se dice estable si el operador  $-L$  es no negativo, esto es, si para toda variación normal  $\Psi$  de soporte compacto con campo variacional  $f\eta$ , se tiene

$$- \int_\Sigma (\Delta_\Sigma f + |\sigma_\Sigma|^2 f) f dA \geq 0.$$

El operador  $L$  es conocido por ser un *operador de Schrödinger*, esto es, un operador de la forma  $\Delta_\Sigma + q$ , con  $q \in C^2(\Sigma)$ . El estudio de la *teoría espectral* de este tipo de operadores está íntimamente relacionado con el concepto de estabilidad dado en la Definición 4.1.1.

El hecho de que  $-L$  sea no negativo se puede caracterizar mediante el siguiente criterio debido a Fischer-Colbrie [Fis], el cual es de gran utilidad. Véase el Lema 2.1 en [MPR].

**Lema 4.1.2.** Sean  $\Sigma$  una hipersuperficie con curvatura media constante, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, equivalen:

1. El operador  $-L$  es no negativo.
2. Existe una función  $u > 0$  en  $\Sigma$  tal que  $Lu \leq 0$ .

## 4.2. El operador de estabilidad de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies

Esta sección está dedicada a dar un concepto de operador de estabilidad para las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies, tomando como punto inicial el caso en el que  $\mathcal{H}$  es una función constante.

En la sección anterior recordamos que el operador de estabilidad  $L = \Delta_\Sigma + |\sigma_\Sigma|^2$  de las hipersuperficies con curvatura media constante aparece al estudiar un problema variacional en el que se ven involucrados los funcionales geométricos área y volumen. Igualmente, el operador de estabilidad  $L$  aparece como el *operador curvatura media linealizado*. Concretamente, consideremos una variación normal

$$(p, t) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto p + tf(p)\eta_p, \quad (4.3)$$

de una hipersuperficie  $\Sigma$  orientada, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , donde  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$  y  $f \in C_0^2(\Sigma)$ . Entonces, si para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  denotamos por  $H(t) := H_{\Sigma_t}$  la función curvatura media de  $\Sigma_t$  para  $t$  fijo, se tiene

$$\Delta_\Sigma f + |\sigma_\Sigma|^2 f = nH'(0). \quad (4.4)$$

Supongamos ahora que  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie, para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  arbitraria. En general, las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies no son solución de un problema variacional que involucra funcionales geométricos como el área y el volumen tal y como ocurre cuando  $\mathcal{H}$  es una función constante, y por tanto debemos cambiar el enfoque de este problema. Aún así, podemos definir un operador de estabilidad mediante el cálculo del linealizado de la ecuación (1.1). Este es el contenido de la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $f \in C_0^2(\Sigma)$  y para cada  $t$  suficientemente pequeño denotemos por  $\Sigma_t$  a la hipersuperficie dada por (4.3), donde  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ . Definamos  $\widehat{H}(t) := H(t) - \mathcal{H}(\eta_t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $H(t)$  y  $\eta_t$  denotan, respectivamente, la curvatura media y la aplicación de Gauss de cada  $\Sigma_t$ . Entonces,*

$$n\widehat{H}'(0) = \mathcal{L}f, \quad \mathcal{L}f := \Delta_\Sigma f + \langle X_{\mathcal{H}}, \nabla_\Sigma f \rangle + |\sigma_\Sigma|^2 f, \quad (4.5)$$

donde  $X_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  viene dado para cada  $p \in \Sigma$  por  $X_{\mathcal{H}}(p) := n\nabla_{\mathbb{S}^n}\mathcal{H}(\eta(p))$ ; aquí  $\nabla_{\mathbb{S}^n}$  denota el operador gradiente en  $\mathbb{S}^n$ , y  $\Delta_{\Sigma}, \nabla_{\Sigma}, |\sigma_{\Sigma}|$  denotan, respectivamente, el operador de Laplace-Beltrami, el gradiente y la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  respecto de su métrica inducida.

*Demostración.* A partir de ahora trabajaremos en cierto  $p \in \Sigma$  fijo pero arbitrario, el cual omitiremos para simplificar la notación. De la relación  $\widehat{H}(t) = H(t) - \mathcal{H}(\eta_t)$  y en vista de la Ecuación (4.4), para cualquier variación de  $\Sigma$  con campo variacional  $f\eta$ , se tiene

$$\begin{aligned} n\widehat{H}'(0) &= \Delta_{\Sigma}f + |\sigma_{\Sigma}|^2f - n \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathcal{H}(\eta_t)) \\ &= \Delta_{\Sigma}f + |\sigma_{\Sigma}|^2f - n \left\langle \nabla_{\mathbb{S}^n}\mathcal{H}(\eta(p)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\eta_t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal positivamente orientada de direcciones principales de  $\Sigma$  en  $p$ . Entonces, para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esta base se transforma mediante (4.3) en la base positivamente orientada  $\{e_1^t, \dots, e_n^t\}$  en  $\Sigma_t$  dada por

$$e_i^t = (1 - tf\kappa_i)e_i + tdf(e_i)\eta, \quad (4.7)$$

donde  $\kappa_i$  es la curvatura principal de  $\Sigma$  en  $p$  asociada a la dirección  $e_i$ . De la ecuación (4.7) tenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e_1^t \wedge \dots \wedge e_n^t) = -nH_{\Sigma}f\eta + \sum_{i=1}^n df(e_i)e_i = -nH_{\Sigma}f\eta + \nabla_{\Sigma}f.$$

Notemos que  $\eta_t = (e_1^t \wedge \dots \wedge e_n^t) / |e_1^t \wedge \dots \wedge e_n^t|$  y por tanto se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\eta_t) = \nabla_{\Sigma}f. \quad (4.8)$$

Ahora es claro que de las ecuaciones (4.6), (4.7), (4.8) obtenemos (4.5). Esto finaliza la prueba de la Proposición 4.2.1.  $\square$

La Proposición 4.2.1 junto a la ecuación (4.4) justifican la siguiente definición:

**Definición 4.2.2.** Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para alguna  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . El operador de estabilidad de  $\Sigma$  se define como el operador  $\mathcal{L}$  en  $\Sigma$  actuando sobre cada  $f \in C_0^2(\Sigma)$  de la forma

$$\mathcal{L}f := \Delta_\Sigma f + \langle X_{\mathcal{H}}, \nabla_\Sigma f \rangle + |\sigma_\Sigma|^2 f, \quad X_{\mathcal{H}}(p) := n \nabla_{\mathbb{S}^n} \mathcal{H}(\eta(p)). \quad (4.9)$$

La primera observación es que, cuando  $\mathcal{H}$  es una función constante, esta definición de operador de estabilidad coincide con el operador de estabilidad  $L = \Delta_\Sigma + |\sigma_\Sigma|^2$  de las hipersuperficies con curvatura media constante. Igualmente, esta definición de operador de estabilidad también coincide en el caso en el que  $\Sigma$  es un solitón de traslación del flujo por curvatura media; véanse los trabajos [Esp, ImRi, Gua, SpXi, Gro], donde se estudia la estabilidad de estos solitones.

Ya que la propiedad de ser una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie es invariante por traslaciones de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tenemos:

**Corolario 4.2.3.** Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para alguna  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su aplicación de Gauss, fijemos  $a \in \mathbb{S}^n$  y definamos  $\nu = \langle \eta, a \rangle \in C^2(\Sigma)$ . Entonces  $\mathcal{L}\nu = 0$ , donde  $\mathcal{L}$  es el operador de estabilidad (4.9) de  $\Sigma$ .

*Demostración.* Consideremos la variación de  $\Sigma$

$$(p, \lambda) \in \Sigma \times \mathbb{R} \mapsto p + \lambda a$$

y denotemos por  $\Sigma_\lambda := \Sigma + \lambda a$ . Por el teorema de la función implícita podemos escribir esta variación en un entorno de cada  $(p_0, 0) \in \Sigma \times \mathbb{R}$  como una *variación normal* de la forma (4.3). De forma específica, para cualquier  $p$  cercano a  $p_0$  en  $\Sigma$  y para cualquier  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, podemos escribir

$$p + tf(p)\eta(p) = \phi(p, t) + \lambda(t)a \quad (4.10)$$

donde  $f$  es una función diferenciable definida en un entorno de  $p_0$  en  $\Sigma$ ,  $\phi(p, t) \in \Sigma$  para todo  $(p, t)$  y  $\lambda(t)$  es una función diferenciable satisfaciendo  $\lambda(0) = 0$  y  $\lambda'(0) \neq 0$ .

Tomando la componente normal de la derivada de (4.10) con respecto a  $t$  en  $t = 0$  y usando que  $\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \eta \rangle = 0$ , tenemos

$$f = \lambda'(0)\langle \eta, a \rangle = \lambda'(0)\nu. \tag{4.11}$$

La Proposición 4.2.1 implica que  $\mathcal{L}f = 0$  ya que todas las hipersuperficies  $\Sigma_\lambda$  (y en consecuencia todas las hipersuperficies dadas por  $t = \text{constante}$  en (4.10)) tienen la misma curvatura media predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . En estas condiciones, la ecuación (4.11) asegura que  $\mathcal{L}\nu = 0$ , concluyendo la prueba.  $\square$

### 4.3. Operadores elípticos generalizados y $\mathcal{H}$ -hipersuperficies estables

El operador  $\mathcal{L}$  introducido en la Definición 4.2.2 en general no es un operador de tipo Schrödinger, y en consecuencia la teoría elíptica clásica de operadores auto-adjuntos no se puede aplicar en el estudio de la estabilidad de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. En esta sección introducimos una clase general de operadores lineales elípticos, en los cuales se enmarca el operador de estabilidad  $\mathcal{L}$  de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies. Como nos supone el mismo esfuerzo, trabajaremos en una variedad riemanniana abstracta.

**Definición 4.3.1.** *Sea  $\Sigma$  una variedad riemanniana. Un operador de Schrödinger generalizado  $L$  en  $\Sigma$  es un operador elíptico de la forma*

$$L = \Delta_\Sigma + \langle X, \nabla_{\Sigma \cdot} \rangle + q, \tag{4.12}$$

donde  $q \in C^2(\Sigma)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , y  $\Delta_\Sigma, \nabla_\Sigma$  denotan el operador de Laplace-Beltrami y el operador gradiente en  $\Sigma$ , respectivamente.

En el caso particular  $X = \nabla_\Sigma \phi$  para alguna  $\phi \in C^2(\Sigma)$ , entonces  $L$  se dice que es un *operador de Schrödinger de tipo gradiente*, véase por ejemplo [Esp]. En particular, si  $X = 0$ ,  $L$  es un operador de Schrödinger clásico. Notemos que el operador de estabilidad

(4.9) para hipersuperficies con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es un operador de Schrödinger generalizado.

Estos operadores de Schrödinger generalizados aparecen en el estudio de la segunda variación de ciertos funcionales geométricos definidos en familias de superficies inmersas en determinados espacios ambiente. Este es el caso cuando se estudia la estabilidad de las *superficies marginalmente atrapadas hacia el exterior*, las cuales se conocen en la literatura como MOTS (del inglés, *marginally outer trapped surfaces*). En las referencias [AEM, AMS, AnMe, Car, GaSc] se puede encontrar un desarrollo de esta teoría.

Tenemos que hacer hincapié en dos problemas clave a la hora de trabajar con el operador de estabilidad  $\mathcal{L}$  de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies dado por (4.9); primero, en general  $\mathcal{L}$  no es auto-adjunto y por tanto no es diagonalizable, y segundo,  $\mathcal{L}$  en general no se puede definir por medio de un problema variacional tal y como ocurre en el caso en el que  $\mathcal{H}$  es constante.

La siguiente definición viene motivada por la Definición 4.1.1 y el criterio de Fischer-Colbrie 4.1.2.

**Definición 4.3.2.** *Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , y sea  $\mathcal{L}$  su operador de estabilidad. Diremos que  $\Sigma$  es estable si existe una función positiva  $u \in C^2(\Sigma)$  tal que  $\mathcal{L}u \leq 0$ .*

Esta noción de estabilidad coincide en el caso en el que  $\mathcal{H}$  es una función constante. Igualmente, esta definición de estabilidad coincide en el caso de los solitones de traslación del flujo por curvatura media (para esto último, véase por ejemplo la Proposición 2 en [SpXi]). De la misma forma, la noción de estabilidad dada en la Definición 4.3.2 es consistente con la noción de *estabilidad exterior* (*outermost stability* en inglés) en la teoría de los MOTS, véase por ejemplo [AEM, Definición 3.1].

Sigamos justificando la Definición 4.3.2. Sea  $L$  un operador de Schrödinger generalizado (4.12) definido en una variedad riemanniana  $\Sigma$  y sea  $\Omega \subset \Sigma$  un dominio relativamente compacto y diferenciable. Aunque  $L$  no es auto-adjunto, es sabido que existe un valor propio real  $\lambda_0(\Omega)$  de  $-L$  en  $\Omega$  llamado *valor propio principal*, el cual es

el único número real que soluciona el problema con condiciones Dirichlet

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

y que satisface  $\lambda_0(\Omega) \leq \Re(\mu(\Omega))$  para cualquier otro valor propio complejo  $\mu(\Omega)$  de  $-L$  en  $\Omega$ . En estas condiciones, la *función propia*  $\psi_0$  correspondiente a  $\lambda_0(\Omega)$ , la cual es única salvo multiplicación por constantes no nulas, es siempre distinta de cero; véase por ejemplo la Sección 5 de [AnMe]. Normalmente omitiremos la dependencia de  $\lambda_0(\Omega)$  del dominio  $\Omega$  y escribiremos simplemente  $\lambda_0$  si no hay dudas posibles.

El siguiente análisis está motivado por la Observación 5.2 en [AnMe]. Sea  $\lambda_0$  el valor propio principal de  $-\mathcal{L}$  en un dominio  $\Omega \subset \Sigma$  relativamente compacto, y sea  $-\mathcal{L}^*$  el operador adjunto de  $-\mathcal{L}$ . Entonces, por ser  $\lambda_0$  real, el primer valor propio de  $-\mathcal{L}^*$  es exactamente  $\lambda_0$ . Sea  $\psi_0^* > 0$  la función propia de  $-\mathcal{L}^*$  asociada a  $\lambda_0$ , y sea  $u > 0$  tal que  $\mathcal{L}u \leq 0$  (tal  $u$  existe por ser  $\mathcal{L}$  estable, en virtud de la Definición 4.3.2). Entonces,

$$\int_{\Omega} u \mathcal{L}^* \psi_0^* \, dA = -\lambda_0 \int_{\Omega} u \psi_0^* \, dA = \int_{\Omega} \psi_0^* \mathcal{L}u \, dA.$$

Por ser  $\psi_0^* > 0$ ,  $u > 0$  y  $\mathcal{L}u \leq 0$ , tenemos que  $\lambda_0 \geq 0$ . Por tanto la definición 4.3.2 es equivalente a que el valor propio principal  $\lambda_0$  sea no negativo, justificando de nuevo la definición de estabilidad elegida para las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies.

La Definición 4.3.2 tiene la siguiente interpretación geométrica. Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie estable y sea  $\Omega$  un dominio relativamente compacto y diferenciable de  $\Sigma$ , cuyo borde está contenido en un dominio relativamente compacto y diferenciable mayor  $\Omega' \subset \Sigma$ . Por ser  $\Sigma$  estable, el valor propio  $\lambda_0(\Omega')$  del operador de estabilidad  $-\mathcal{L}$  restringido a  $\Omega'$  es no negativo. Por la monotonía del valor propio principal con respecto de la inclusión de dominios (véase por ejemplo [Pad]), deducimos que  $\lambda_0(\Omega) > 0$ .

Consideremos ahora  $\{\Omega_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$  una variación diferenciable en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta (con borde)  $\Omega_0 := \bar{\Omega}$ , de forma que su borde se queda fijo por la variación, esto es  $\partial\Omega_t = \partial\Omega$  para todo  $t$ . Supongamos además que todas las hipersuperficies  $\Omega_t$  son también  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas con borde para la misma

$\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ . Los argumentos realizados en la Proposición 4.2.1 aseguran que existe una función  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , que no es idénticamente nula, satisfaciendo  $\mathcal{L}u = 0$  en  $\Omega$  con  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . En particular,  $\lambda = 0$  es un valor propio de  $\mathcal{L}$ , lo cual es contradictorio con  $\lambda_0(\Omega) > 0$ . Por tanto tal deformación de  $\Omega$  no puede existir.

Geoméricamente: *es imposible deformar una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie estable con borde por medio de variaciones de la forma (4.3), de forma que su borde quede fijo y tal que todas las hipersuperficies asociadas a la variación en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tengan la misma curvatura media predeterminada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$* . Este hecho, conocido en el caso de hipersuperficies con curvatura media constante, justifica de nuevo la noción de estabilidad escogida para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies.

El Corolario 4.2.3 asegura que todo  $\mathcal{H}$ -grafo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie estable. En general, tenemos:

**Corolario 4.3.3.** *Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para alguna  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$ , sea  $\eta : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$  su aplicación de Gauss y supongamos que  $\langle \eta, a \rangle > 0$  para algún  $a \in \mathbb{S}^n$ . Entonces,  $\Sigma$  es estable. En particular, todo  $\mathcal{H}$ -grafo es estable.*

Para el caso de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas, tenemos otra consecuencia trivial:

**Corolario 4.3.4.** *No existen  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas (sin borde) y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demostración.* Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta sin borde y estable, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sea  $\mathcal{L}$  su operador de estabilidad. Entonces, el Corolario 4.2.3 tiene como consecuencia que el núcleo de  $\mathcal{L}$  tiene dimensión al menos  $n + 1$ , y en particular 0 es un valor propio para  $-\mathcal{L}$  que no es simple (aquí no fijamos condiciones Dirichlet, ya que  $\partial\Sigma = \emptyset$ ). En consecuencia, el valor propio principal  $\lambda_0(\Sigma)$  de  $-\mathcal{L}$  en  $\Sigma$ , el cual es simple y por tanto no puede ser 0, es negativo. Por tanto,  $\Sigma$  no es estable.  $\square$

## 4.4. Estimaciones del radio y la curvatura de $\mathcal{H}$ -superficies

El siguiente resultado es esencialmente debido a Galloway y Schoen [GaSc]:

**Lema 4.4.1.** *Sea  $\Sigma$  una variedad Riemanniana, y sea  $L = \Delta_\Sigma + \langle X, \nabla_\Sigma \cdot \rangle + q$  un operador de Schrödinger generalizado en  $\Sigma$ ; aquí  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  y  $q \in C^0(\Sigma)$ .*

*Supongamos que existe  $u \in C^2(\Sigma)$ ,  $u > 0$ , tal que  $Lu \leq 0$ . Entonces, el operador de Schrödinger*

$$\bar{L} := \Delta_\Sigma + Q, \quad Q := q - \frac{1}{2}\operatorname{div}(X) - \frac{|X|^2}{4}, \quad (4.14)$$

*satisface que  $-\bar{L}$  es no negativo, esto es,  $-\int_\Sigma f \bar{L} f \geq 0$  para toda  $f \in C_0^2(\Sigma)$ .*

*Demostración.* La condición  $Lu \leq 0$  para  $u > 0$  se puede reescribir como

$$\Delta_\Sigma u + \frac{u}{4}|X + 2\nabla_\Sigma \log u|^2 - \frac{u}{4}|X|^2 - u|\nabla_\Sigma \log u|^2 + qu \leq 0. \quad (4.15)$$

Por ser  $u > 0$  positiva, si escribimos  $u = e^\phi$  tenemos de (4.15)

$$\Delta_\Sigma \phi + \frac{1}{4}|X + 2\nabla_\Sigma \phi|^2 - \frac{|X|^2}{4} + q \leq 0.$$

Sumando y restando  $\frac{1}{2}\operatorname{div}X$  obtenemos

$$\operatorname{div}(\nabla_\Sigma \phi + X/2) + |\nabla_\Sigma \phi + X/2|^2 - \frac{|X|^2}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{div}X + q \leq 0. \quad (4.16)$$

Si definimos el campo  $Y := \nabla \phi + X/2$  y  $Q := q - \frac{|X|^2}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{div}X$ , se tiene de (4.16)

$$|Y|^2 + Q \leq -\operatorname{div}Y. \quad (4.17)$$

Si consideramos ahora  $f \in C_0^2(\Sigma)$ , la ecuación (4.17) implica

$$\begin{aligned} f^2|Y|^2 + f^2Q &\leq -f^2\operatorname{div}Y \\ &= -\operatorname{div}(f^2Y) + 2f\langle \nabla_\Sigma f, Y \rangle \\ &\leq -\operatorname{div}(f^2Y) + 2|f||\nabla_\Sigma f||Y| \\ &\leq -\operatorname{div}(f^2Y) + |\nabla_\Sigma f|^2 + f^2|Y|^2. \end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que  $f$  tiene soporte compacto, concluimos

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 - Qf^2 \geq 0, \quad \forall f \in C_0^2(\Sigma),$$

lo cual es equivalente a que el operador  $-\bar{L}$  sea no negativo. Esto completa la prueba del Lema 4.4.1.  $\square$

El siguiente resultado para  $n = 2$  fue probado de forma implícita en [LoRo] como una variación de los argumentos introducidos por Fischer-Colbrie en [Fis]; véase el Teorema 2.8 en [MPR].

**Lema 4.4.2.** *Sea  $\Sigma$  una superficie Riemanniana y supongamos que el operador de Schrödinger  $-(\Delta_{\Sigma} - K_{\Sigma} + c)$  es no negativo para alguna constante  $c > 0$ ; aquí  $K_{\Sigma}$  denota la curvatura de Gauss de  $\Sigma$ . Entonces, para todo  $p \in \Sigma$  se tiene*

$$d(p, \partial\Sigma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3c}},$$

*esto es, el radio de toda bola geodésica (abierta) centrada en  $p$ , relativamente compacta en  $\Sigma$ , es a lo sumo  $2\pi/\sqrt{3c}$ .*

Como consecuencia del Lema 4.4.1 y el Lema 4.4.2 podemos deducir una estimación de distancia para  $\mathcal{H}$ -superficies estables en  $\mathbb{R}^3$ , con  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ . En lo que sigue,  $\nabla_{\mathbb{S}^2}$ ,  $\Delta_{\mathbb{S}^2}$  y  $\nabla_{\mathbb{S}^2}^2$  denotarán, respectivamente, los operadores gradiente, Laplaciano y Hessiano en la esfera unidad  $\mathbb{S}^2$ .

Debemos enfatizar en las hipótesis del Teorema 4.4.3 a continuación que el análisis realizado en la Sección 2.4 nos permitió probar la existencia de  $\mathcal{H}$ -grafos completos, rotacionales de curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  en  $\mathbb{R}^3$ , para ciertas funciones rotacionalmente simétricas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathcal{H} > 0$ ; véase el ejemplo en la Figura 2.14. Por tanto, como dichos grafos son estables, la condición (4.18) en el Teorema 4.4.3 no puede eliminarse del todo o simplemente sustituirse por la condición más débil  $\mathcal{H} > 0$ . Véase el problema 19 en el Capítulo 5.

**Teorema 4.4.3.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisface en  $\mathbb{S}^2$  la desigualdad*

$$3\mathcal{H}^2 + \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}) + \mathcal{H}\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H} - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}|^2 - \frac{1}{4}(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H})^2 \geq c > 0 \quad (4.18)$$

para alguna constante  $c > 0$ . Entonces, para toda  $\mathcal{H}$ -superficie estable  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  y para todo  $p \in \Sigma$ , se tiene

$$d(p, \partial\Sigma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3c}}.$$

*Demostración.* Definamos

$$Q_{\mathcal{H}} := |\sigma_{\Sigma}|^2 - \frac{1}{2}\operatorname{div}_{\Sigma}(X_{\mathcal{H}}) - \frac{|X_{\mathcal{H}}|^2}{4}, \quad X_{\mathcal{H}} := 2\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta) \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (4.19)$$

Aquí  $|\sigma_{\Sigma}|$  denota, como de costumbre, la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  y  $\eta$  es su aplicación de Gauss. Denotemos por  $\mathcal{L}$  al operador de estabilidad de  $\Sigma$ , definido en (4.9). Por ser  $\Sigma$  estable, el Lema 4.4.1 implica que el operador  $-\bar{\mathcal{L}} := -(\Delta_{\Sigma} + Q_{\mathcal{H}})$  es no negativo en  $\Sigma$ . Supongamos por el momento que se cumple la desigualdad

$$Q_{\mathcal{H}} \geq -K_{\Sigma} + c, \quad (4.20)$$

donde  $K_{\Sigma}$  es la curvatura de Gauss de  $\Sigma$ . En este caso, el operador  $-(\Delta_{\Sigma} - K_{\Sigma} + c)$  será también no negativo y el Teorema 4.4.3 sería una consecuencia directa del Lema 4.4.2.

Por tanto, es suficiente probar (4.20). Para hacer esto, primero calculamos la expresión  $\operatorname{div}_{\Sigma}(X_{\mathcal{H}})$ . Notemos que si  $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  y  $\nabla_{\Sigma}, \nabla$  denotan las conexiones riemannianas de  $\Sigma$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{\Sigma})_V X_{\mathcal{H}}, V \rangle &= 2\langle (\nabla_{\Sigma})_V (\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)), V \rangle = 2\langle \nabla_V (\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)), V \rangle \\ &= 2\langle d(\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H})_{\eta}(d\eta(V)), V \rangle = 2\langle (\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H})_{\eta}(V, d\eta(V)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

La última igualdad es consecuencia de que por ser  $\langle \eta, V \rangle = 0$ , entonces tanto  $V$  como  $d\eta(V)$  son tangentes a  $\mathbb{S}^2$  en el punto  $\eta$ .

Consideremos en cualquier  $p \in \Sigma$  una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de direcciones principales de  $\Sigma$  y sean  $\kappa_1, \kappa_2$  las curvaturas principales asociadas. La ecuación (4.21) implica que en  $p$  se cumple

$$\operatorname{div}_\Sigma(X_{\mathcal{H}}) = \sum_{i=1}^2 \langle (\nabla_\Sigma)_{e_i} X_{\mathcal{H}}, e_i \rangle = -2 \sum_{i=1}^2 \kappa_i \alpha_i, \quad \alpha_i := (\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H})_{\eta(p)}(e_i, e_i). \quad (4.22)$$

Por tanto, por (4.19), (4.22) y la identidad  $|\sigma_\Sigma|^2 = 4H_\Sigma^2 - 2K_\Sigma$ , obtenemos en  $p$ :

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{H}} &= 4H_\Sigma^2 - 2K_\Sigma - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)|^2 + \kappa_1 \alpha_1 + \kappa_2 \alpha_2 \\ &= 3H_\Sigma^2 - K_\Sigma + \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)|^2 \\ &\quad + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} + \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \\ &= 3H_\Sigma^2 - K_\Sigma - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)|^2 + \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right)^2 \\ &\quad + H_\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2) - \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ahora, la definición de  $\alpha_i$  en (4.22) implica  $\alpha_1 + \alpha_2 = \Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)$ , y

$$\left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right)^2 \leq \frac{(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta))^2}{4} - \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H})_\eta. \quad (4.24)$$

Por tanto, las ecuaciones (4.23) y (4.24) y la relación  $H_\Sigma = \mathcal{H}(\eta)$  aseguran

$$Q_{\mathcal{H}} + K_\Sigma \geq 3\mathcal{H}(\eta)^2 + \mathcal{H}(\eta) \Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta) - \frac{(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta))^2}{4} + \det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H})_\eta - |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(\eta)|^2. \quad (4.25)$$

Ya que por hipótesis  $\mathcal{H}$  satisface (4.18) en  $\mathbb{S}^2$ , concluimos por medio de (4.25) que  $Q_{\mathcal{H}} + K_\Sigma \geq c$  se cumple, lo cual no es más que (4.20). Esto termina la demostración del Teorema 4.4.3.  $\square$

A continuación enunciamos dos hechos simples que aclaran las propiedades de la condición (4.18).

**Observación 4.4.4.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ . Entonces, existe  $H_0 > 0$  tal que para todo  $\alpha > H_0$ , la función  $\mathcal{H}^* := \mathcal{H} + \alpha \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisface la condición (4.18).*

**Observación 4.4.5.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisfaciendo (4.18). Entonces,  $\mathcal{H}(x) \neq 0$  en todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . De hecho, si  $\mathcal{H}(x) = 0$  la ecuación (4.18) en  $x$  tiene la expresión*

$$\det(\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H})_x - \frac{(\Delta_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(x))^2}{4} \geq c + |\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}(x)|^2 > 0,$$

lo cual es imposible, ya que el miembro de la izquierda de esta desigualdad es siempre no positivo.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 4.4.3 y generaliza el resultado bien conocido de que no existen superficies con curvatura media constante positiva, completas y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

**Corolario 4.4.6.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisfaciendo la condición (4.18). Entonces, no existen  $\mathcal{H}$ -superficies completas y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .*

Recordemos que todo  $\mathcal{H}$ -grafo en  $\mathbb{R}^3$  es estable. Por tanto, tenemos una consecuencia inmediata del Teorema 4.4.3:

**Corolario 4.4.7.** *Sea  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisfaciendo la condición (4.18). Entonces, para todo  $v \in \mathbb{S}^2$  existen estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos en  $\mathbb{R}^3$  en la dirección  $v$  (recordemos que el concepto de estimación de altura uniforme fue dado en la definición 3.2.1).*

Recordemos que en el Corolario 3.2.4 obtuvimos estimaciones de altura uniformes para  $\mathcal{H}$ -grafos que satisfacen hipótesis parecidas a la del Corolario 4.4.6. En efecto, dada  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  probamos que definiendo la función  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + H_0$ , siendo  $H_0 > \max \mathcal{H} - 2 \min \mathcal{H}|_{\mathbb{S}^1}$ , existe una estimación de altura uniforme para  $\mathcal{H}^*$ -grafos. La Observación 4.4.4 nos permite aplicar el Corolario 4.4.6 para  $H_0$  suficientemente grande, obteniendo

un resultado en cierto modo más general ya que da una estimación de distancia al borde para todas las  $\mathcal{H}$ -superficies estables, y en particular una estimación de altura para todos los  $\mathcal{H}$ -grafos.

El resultado final de este capítulo, y por tanto de la memoria, es una estimación de curvatura para  $\mathcal{H}$ -superficies estables en  $\mathbb{R}^3$  para el caso en el que  $\mathcal{H}$  satisface la condición (4.18). Este resultado puede entenderse como una extensión al ámbito de las  $\mathcal{H}$ -superficies de estimaciones de curvatura clásicas para superficies estables de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ ; véase [Scho] para el caso mínimo y [BeHa] para el caso constante  $H_0 \neq 0$ .

**Teorema 4.4.8.** *Sean  $a, c > 0$ . Entonces, existe una constante  $C = C(a, c) > 0$  tal que se cumple la siguiente afirmación: si  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisface*

$$|\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}| + |\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}| \leq a \quad (4.26)$$

en  $\mathbb{S}^2$  y  $\Sigma$  es cualquier  $\mathcal{H}$ -superficie estable en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\mathcal{H}$  satisface la condición (4.18) para la constante  $c$ , entonces para todo  $p \in \Sigma$  se cumple la siguiente estimación:

$$|\sigma_{\Sigma}(p)| d_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \leq C.$$

*Demostración.* La prueba se hará por reducción al absurdo. Supongamos pues que existe una sucesión de funciones  $\mathcal{H}_n \in C^2(\mathbb{S}^2)$  satisfaciendo (4.26) para la constante  $a$ , una sucesión  $\Sigma_n$  de  $\mathcal{H}_n$ -superficies estables que satisfacen (4.18) para la constante  $c$  y puntos  $p_n \in \Sigma_n$  satisfaciendo

$$|\sigma_{\Sigma_n}(p_n)| d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n) > n, \quad (4.27)$$

donde  $\sigma_{\Sigma_n}$  denota la segunda forma fundamental de  $\Sigma_n$ . Primero, notemos que la ecuación (4.27) implica que  $|\sigma_{\Sigma_n}(p_n)|$  diverge a  $\infty$ , ya que el Teorema 4.4.3 asegura la existencia para todo  $n$  de una cota superior uniforme  $d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n) \leq d$  para algún  $d > 0$ . En esta situación, podemos usar los argumentos en la prueba del Teorema 3.1.2 con algunas modificaciones.

Sea  $d_n := d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n)$  y consideremos las bolas intrínsecas compactas  $D_n = B_{\Sigma_n}(p_n, d_n/2)$ . Sea  $q_n \in D_n$  el máximo de la función

$$h_n(x) = |\sigma_{\Sigma_n}(x)|d_{\Sigma_n}(x, \partial D_n)$$

en  $\overline{D_n}$ . Claramente,  $q_n$  es un punto interior de  $D_n$  ya que  $h_n$  se anula en  $\partial D_n$ . Entonces, si denotamos por  $\lambda_n = |\sigma_{\Sigma_n}(q_n)|$  y  $r_n = d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)$ , tenemos por (4.27):

$$\lambda_n r_n = h_n(q_n) \geq h_n(p_n) \rightarrow \infty, \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Denotemos por  $H_n$  el máximo de la función curvatura media  $H_{\Sigma_n}$  de  $\Sigma_n$  restringida a  $B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ , y definamos  $\lambda_n^* := \max\{\lambda_n, H_n\}$ . De forma similar a como argumentamos en el Teorema 3.1.2, consideremos las homotecias de factor  $\lambda_n^*$  de las superficies inmersas  $B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2) \subset \Sigma_n$  y denotemos estas superficies homotéticas por  $M_n := \lambda_n^* B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ . Sea  $q_n^* \in M_n$  la imagen de  $q_n \in \Sigma_n$  por medio de la homotecia de factor  $\lambda_n^*$  y consideremos las superficies trasladadas  $M_n^* := M_n - q_n^*$  que llevan los puntos  $q_n^*$  al origen. Notemos que la distancia en  $M_n^*$  del origen a  $\partial M_n^*$  es igual a  $\lambda_n^* r_n/2$  y por tanto diverge a  $\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  como consecuencia de la ecuación (4.28).

Las superficies  $M_n^*$  tienen segunda forma fundamental uniformemente acotada, ya que para todo  $z_n \in B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$  se cumple

$$|\sigma_{M_n^*}(z_n)| = \frac{|\sigma_{\Sigma_n}(z_n)|}{\lambda_n^*} \leq \frac{|\sigma_{\Sigma_n}(z_n)|}{\lambda_n} = \frac{h_n(z_n)}{\lambda_n d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq \frac{d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)}{d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq 2,$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la ecuación (3.4), la cual también se cumple en este caso concreto.

Notemos también que cada  $M_n^*$  es una superficie con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}_n^* \in C^2(\mathbb{S}^2)$ , donde  $\mathcal{H}_n^*(x) := \mathcal{H}_n(x)/\lambda_n^*$ . Por la definición de  $\lambda_n^*$ , tenemos que  $\mathcal{H}_n^* \leq 1$  en la imagen de la aplicación de Gauss  $\Omega_n \subset \mathbb{S}^2$  de  $M_n^*$  en  $\mathbb{S}^2$ , para todo  $n$ . Igualmente, notemos que cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos por (4.26)

$$|\nabla_{\mathbb{S}^2} \mathcal{H}_n^*| + |\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \mathcal{H}_n^*| \rightarrow 0 \quad (4.29)$$

globalmente en  $\mathbb{S}^2$ . En consecuencia, una subsucesión de las funciones  $\mathcal{H}_n^*$  converge en la topología  $C^1(\mathbb{S}^2)$  a una constante  $\mathcal{H}_\infty \in [0, 1]$ . Como consecuencia del Teorema 1.7.1, una subsucesión de las superficies  $M_n^*$  converge uniformemente sobre compactos en la topología  $C^3$  a una superficie completa  $\Sigma^*$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $\mathcal{H}_\infty$  que pasa por el origen, la cual es posiblemente disconexa. Consideremos la componente conexa de  $\Sigma^*$  que pasa por el origen, a la cual seguiremos denotando por  $\Sigma^*$ .

Por ser cada  $\Sigma_n$  estable, se tiene que cada  $M_n^*$  es una  $\mathcal{H}_n^*$ -superficie estable en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, el Lema 4.4.1 (véase también el comienzo de la prueba del Teorema 4.4.3) implica que el operador de Schrödinger  $-\bar{\mathcal{L}}_n := -(\Delta_{\Sigma_n} + Q_{\mathcal{H}_n^*})$  es no negativo en  $M_n^*$ ; aquí  $\Delta_{\Sigma_n}$  denota el operador de Laplace-Beltrami en  $M_n^*$ , y  $Q_{\mathcal{H}_n^*}$  viene dada por (4.19).

Claramente, los operadores de Schrödinger  $\bar{\mathcal{L}}_n$  convergen al operador de Jacobi  $\mathcal{L}_\infty$  de la superficie con curvatura media constante  $\Sigma^*$ . En consecuencia,  $-\mathcal{L}_\infty$  es un operador de Schrödinger no negativo y por tanto  $\Sigma^*$  es una superficie estable. Por ser  $\Sigma^*$  también completa, entonces necesariamente  $\mathcal{H}_\infty = 0$  y por tanto  $\Sigma^*$  es un plano. En particular, la norma de las segundas formas fundamentales de  $M_n^*$  en el origen convergen a cero, lo cual implica que  $\lambda_n/\lambda_n^* \rightarrow 0$ . Por la definición de  $\lambda_n^*$ , para  $n$  suficientemente grande tenemos por tanto que  $\lambda_n^* = H_n$ . Esto implica que  $\mathcal{H}_n^*(x_n) = 1$  para algún  $x_n \in \mathbb{S}^2$ , y para cada  $n$  suficientemente grande. Esto es una contradicción con el hecho de que  $\mathcal{H}_\infty = 0$ , lo cual completa la demostración del Teorema 4.4.8.  $\square$

## Capítulo 5

---

# Problemas abiertos

---

*Para finalizar esta memoria, en el último capítulo enunciaremos algunos problemas abiertos sobre la geometría de las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , los cuales encontramos de especial interés. La gran mayoría están motivados por resultados conocidos en la teoría de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ . Cuando se plantea una cuestión, se pide de forma implícita demostrar su veracidad o encontrar un contraejemplo que desmienta tal afirmación.*

### 5.1. Sobre $\mathcal{H}$ -hipersuperficies compactas en $\mathbb{R}^{n+1}$

1. *Encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para que una función positiva  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  sea la función curvatura media predeterminada de una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Sabemos por la Proposición 1.3.1 que la condición  $\mathcal{H} > 0$  es necesaria, pero tal condición no es suficiente tal y como mostramos en el Corolario 1.3.2. Para el problema de Minkowski una condición necesaria y suficiente para la existencia de una hipersuperficie estrictamente convexa y compacta en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con curvatura de Gauss-Kronecker

dada por  $K_\Sigma = \mathcal{K}(\eta) > 0$  es que  $\mathcal{K} \in C^0(S^n)$  satisfaga  $\int_{S^n} x/\mathcal{K}(x) = 0$ . Una condición integral de este tipo no es conocida para el caso de curvatura media predeterminada; véase por ejemplo [GuGu].

**2.** *Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta, embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^1(S^n)$ . ¿Es  $\Sigma$  difeomorfa a  $S^n$ ?*

Sabemos que este problema tiene una respuesta positiva si  $\mathcal{H}$  es simétrica con respecto a  $n$  reflexiones independientes (véase la Proposición 1.4.2), pero dada  $\mathcal{H} \in C^1(S^n)$  arbitraria no podemos aplicar el método de reflexión de Alexandrov.

**3.** *Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos  $\mathcal{H}$ -esferas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  para cierta  $\mathcal{H} \in C^1(S^2)$ . ¿Difieren  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  en una traslación?*

**4.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(S^2)$  es rotacionalmente simétrica y sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -esfera inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Es  $\Sigma$  una esfera de revolución?*

El problema **3** tiene una respuesta positiva en el caso en el que una de las dos esferas  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sea estrictamente convexa, véase el Teorema 1.4.4. El problema **4** es cierto si la función rotacionalmente simétrica  $\mathcal{H}$  es también invariante con respecto de la reflexión de  $S^2$  que fija la geodésica de  $S^2$  ortogonal al eje de rotación; esto es consecuencia de los Teoremas 1.4.4 y 1.4.5.

Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sea  $\lambda_0(\Sigma) < 0$  el valor propio principal del operador de estabilidad  $-\mathcal{L}$ . Diremos que  $\Sigma$  tiene *índice uno* si no existen valores propios de  $-\mathcal{L}$  cuya parte real se encuentra entre  $\lambda_0$  y 0; notemos que 0 es siempre un valor propio de  $-\mathcal{L}$  con multiplicidad al menos  $n+1$ . En otras palabras,  $\Sigma$  tiene índice uno si  $\lambda_0$  es el único valor propio de  $-\mathcal{L}$  con parte real negativa.

**5.** *¿Es cierto que una  $\mathcal{H}$ -hipersuperficie compacta, inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tiene índice uno si y solo si es una  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa?*

## 5.2. Sobre propiedades generales de las $\mathcal{H}$ -hipersuperficies

6. *¿Para qué elecciones de  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  son las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  soluciones a un problema variacional?*

Sabemos que si  $\mathcal{H}$  es una función lineal  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, v \rangle + b$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{S}^n$ , las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies son soluciones de un problema variacional; véase la Sección 1.2. ¿Hay más elecciones para  $\mathcal{H}$  para las cuales esto es cierto?

7. *¿Existe alguna fórmula de flujo, que sea homológicamente invariante para  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ?*

Cuando  $\mathcal{H}$  es constante esta fórmula fue descrita por Korevaar, Kusner y Solomon [KKS], y es una herramienta fundamental en la teoría de hipersuperficies con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Los casos a considerar a priori serían cuando  $\mathcal{H}$  es lineal y, en general, cuando  $\mathcal{H}$  es rotacionalmente simétrica.

8. *Extender la teoría de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  al caso en el que la variedad ambiente es un grupo de Lie dotado de una métrica invariante a izquierda.*

Tras el Lema 1.1.5, comentamos que es posible la definición de esta clase de hipersuperficies en un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda. En particular, el espacio de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  y la geometría de Thurston homogénea  $\text{Sol}_3$  son de especial interés, ya que son espacios difeomorfos a  $\mathbb{R}^3$  y cuya estructura de grupo de Lie es única. En la última década, la teoría de superficies con curvatura media constante inmersas en variedades homogéneas tridimensionales ha experimentado un importante avance, atrayendo el interés de numerosos geómetras. Véanse por ejemplo [AR1, AR2, CoRo, Dan, DaHa, DaMi, FeMi1, FeMi2, MePe, MMPR1, MMPR2] y las referencias en estos trabajos. Un desarrollo del comienzo de esta teoría se puede encontrar en [DHM, FeMi3].

Para el caso en el que el espacio ambiente es uno de los espacios producto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , en [Bue1, Bue4, Bue5] hemos iniciado el desarrollo de esta teoría.

**9.** Suponiendo que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  es rotacionalmente simétrica, clasificar todas las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

En la Sección 2.3 clasificamos todas las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuando  $\mathcal{H}$  es rotacionalmente simétrica y satisface  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$ . En la Sección 2.5 describimos las  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  en el caso en el que  $\mathcal{H}$  es una función lineal. En esta misma sección y en la Sección 2.2 describimos  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales para funciones predeterminadas  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^n)$  cumpliendo ciertas hipótesis mínimas; por ejemplo, el caso en el que  $\mathcal{H}(-x) = -\mathcal{H}(x)$  y solo se anula en puntos  $x \in \mathbb{S}^n$  tales que  $\langle x, e_{n+1} \rangle = 0$ , o el caso en el que  $\mathcal{H}$  es negativa y se anula en los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ . Véanse la Figura 2.16, la Proposición 2.2.1 y la Proposición 2.2.2.

Una clasificación totalmente general para una  $\mathcal{H}$  arbitraria se vislumbra como un problema bastante complejo. Por ejemplo, si  $\mathcal{H}$  se anula en algún punto la clasificación tendría que tener en cuenta el comportamiento asintótico de  $\mathcal{H}$ -hipersuperficies rotacionales completas, las cuales son solución de un problema de Dirichlet exterior.

**10.** Generalizar al caso  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  técnicas conocidas para construir superficies con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .

Por ejemplo, son de especial interés las técnicas de *pegado* para  $\mathcal{H}$ -superficies invirtiendo el operador de Jacobi, o desarrollar una teoría de *Jenkins-Serrin*. Claramente, algunas herramientas clásicas en el estudio de superficies con curvatura media constante no se pueden aplicar para  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  no constante; por ejemplo, aquellas usando la holomorfía de la *diferencial de Hopf*.

**11.** Estudiar propiedades sobre  $\mathcal{H} \in C^\omega(\mathbb{S}^2)$  bajo las cuales se puede garantizar que las  $\mathcal{H}$ -superficies construidas por medio de la solución del problema de Björling (Teorema 1.6.2) son completas.

En el caso  $\mathcal{H} = 0$  es bien sabida la existencia de una fórmula de representación integral para este problema, y la solución viene dada de forma relativamente explícita en función de extensiones holomorfas de los datos de Björling. El primer caso no trivial

a considerar sería  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ , correspondiente a los solitones de traslación del flujo por curvatura media. En particular, sería interesante estudiar si las cintas de Möbius construidas en la Sección 1.6 son completas.

### 5.3. Sobre $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$

**12.** *Supongamos que existe una  $\mathcal{H}$ -esfera estrictamente convexa  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  en  $\mathbb{R}^3$ , para alguna  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$ . Probar que no existen  $\mathcal{H}$ -superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y un final.*

Este resultado fue probado en el Teorema 3.4.6 en el caso particular en el que  $\mathcal{H}$  es simétrica con respecto de tres reflexiones independientes en  $\mathbb{S}^2$ . La solución de este problema es desconocida, incluso para  $\mathcal{H}$  rotacionalmente simétrica.

**13.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es rotacionalmente simétrica con respecto del eje  $x_3$  y tal que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ . Probar que toda  $\mathcal{H}$ -superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  con topología finita y dos finales es una superficie rotacional.*

Este problema es un resultado clásico en el caso en el que  $\mathcal{H}$  es constante, probado por Korevaar, Kusner y Solomon [KKS]. Véase también [Maz2].

**14.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es rotacionalmente simétrica y positiva. Probar que toda  $\mathcal{H}$ -superficie simplemente conexa, propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  es una superficie rotacional.*

Si  $\Sigma$  es compacta, este problema está relacionado con el problema 2. Si  $\Sigma$  es completa pero no compacta, no hay un problema análogo en la teoría de superficies con curvatura media constante positiva inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , ya que estos ejemplos no existen en este caso. Notemos que por el Corolario 3.4.4, toda  $\mathcal{H}$ -superficie  $\Sigma$  en estas condiciones está contenida en un cilindro sólido de  $\mathbb{R}^3$ . Bajo la hipótesis adicional  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x) > 0$ , el resultado es consecuencia del Corolario 3.4.7.

## 5.4. Sobre $\mathcal{H}$ -superficies estables en $\mathbb{R}^3$

**15.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es rotacionalmente simétrica con respecto del eje  $x_3$  y se anula en algún punto. Sea  $\Sigma$  un  $\mathcal{H}$ -grafo entero en  $\mathbb{R}^3$ . Dar condiciones suficientes sobre  $\mathcal{H}$  bajo las cuales  $\Sigma$  sea un  $\mathcal{H}$ -bowl rotacional, tal y como se construyó en la Proposición 2.2.1.*

Este problema es una versión generalizada del *teorema de Berstein* clásico, el cual prueba que los grafos enteros minimales en  $\mathbb{R}^3$  son planos. Para el caso  $\mathcal{H}(x) = \langle x, e_3 \rangle$ , esto es, solitones de traslación del flujo por curvatura media, Spruck y Xiao han probado recientemente en [SpXi] que todo  $\mathcal{H}$ -grafo entero y *mean convex* es necesariamente el bowl rotacional.

**16.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es una función positiva, rotacionalmente simétrica con respecto del eje  $x_3$  y tal que  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}^2$ . Denotemos por  $S_{\mathcal{H}}^+$  la semiesfera rotacional en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  y sea  $h_0$  la altura máxima que alcanza  $S_{\mathcal{H}}^+$  sobre su borde plano. Sea  $\Sigma$  un  $\mathcal{H}$ -grafo compacto en  $\mathbb{R}^3$  con  $\partial\Sigma \subset \{z = 0\}$ . ¿Es cierto que la altura máxima que un punto de  $\Sigma$  alcanza sobre  $\{z = 0\}$  es  $h_0$ ?*

**17.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es una función positiva, rotacionalmente simétrica con respecto del eje  $x_3$ . Denotemos por  $S_{\mathcal{H}}^+$  la semiesfera rotacional en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media predeterminada  $\mathcal{H}$  y sea  $d_0$  la distancia intrínseca de su polo norte a  $\partial S_{\mathcal{H}}^+$ . Sea  $\Sigma$  una  $\mathcal{H}$ -superficie compacta y estable, inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Es cierto que para todo  $p \in \Sigma$  se tiene  $d_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \leq d_0$ ?*

Ambos problemas son resultados conocidos para el caso en el que  $\mathcal{H}$  es una constante positiva. El problema **16** es la estimación óptima de altura que satisfacen los grafos con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ , véase [Hei]. El problema **17** es un resultado conocido de Mazet [Maz1].

**18.** *Supongamos que  $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$  es rotacionalmente simétrica. Sea  $\Sigma$  un  $\mathcal{H}$ -disco*

*compacto y estable, inmerso en  $\mathbb{R}^3$  y cuyo borde es una circunferencia horizontal. Probar que  $\Sigma$  es una  $\mathcal{H}$ -superficie rotacional.*

Cuando  $\mathcal{H}$  es constante, este resultado fue probado por Alías, López y Palmer en [ALP].

**19.** *Encontrar condiciones suficientes que cumpla  $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{S}^2)$ , las cuales aseguren que no existen  $\mathcal{H}$ -superficies completas y estables, inmersas en  $\mathbb{R}^3$ .*

Por el Corolario 4.4.6, una condición suficiente es la dada por la ecuación (4.18). Debemos hacer hincapié en que *alguna* condición sobre  $\mathcal{H} > 0$  es necesaria, ya que probamos en la Sección 2.4 la existencia de  $\mathcal{H}$ -grafos (y por tanto estables) propios asintóticos a un cilindro. Para el caso particular  $\mathcal{H}(x) = a\langle x, e_3 \rangle + b$ , una condición suficiente mejor que la dada por (4.18) se puede encontrar en el trabajo de Espinar [Esp].



# Bibliografía

- [AR1] U. Abresch, H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *Acta Math.* **193** (2004), 141–174.
- [AR2] U. Abresch, H. Rosenberg, Generalized Hopf differentials, *Mat. Contemp.* **28** (2005), 1–28.
- [ACG] J.A. Aledo, R.M.B. Chaves, J.A. Gálvez, The Cauchy problem for improper affine spheres and the Hessian one equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 9, 4183–4208
- [AEG] J.A. Aledo, J.M. Espinar, J.A. Gálvez, The Codazzi equation for surfaces, *Adv. Math.* **224** (2010), 2511–2530.
- [Ale] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large, I, *Vestnik Leningrad Univ.* **11** (1956), 5–17. (English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* **21** (1962), 341–354).
- [ALP] L.J. Alías, R. López, B. Palmer, Stable constant mean curvature surfaces with circular boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 1195–1200.
- [AlMi] L.J. Alías, P. Mira, A Schwarz-type formula for minimal surfaces in Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ , *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **334** (2002), 389–394.
- [AEM] L. Andersson, M. Eichmair, J. Metzger, Jang’s equation and its applications to marginally trapped surfaces, *Complex Analysis and Dynamical Systems IV: General relativity, geometry, and PDE (Contemporary Mathematics)* **554** (2011), 13–46.

- [AMS] L. Andersson, M. Mars, W. Simon, Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes, *Adv. Theor. Math. Phys.* **12** (2008), no. 4, 853–888.
- [AnMe] L. Andersson, J. Metzger, Curvature estimates for stable marginally trapped surfaces, *J. Diff. Geom.* **84** (2010), 231–265.
- [BCMR] V. Bayle, A. Cañete, F. Morgan, C. Rosales, On the isoperimetric problem in Euclidean space with density, *Calc. Var. Partial Diff. Equations* **31** (2008), 27–46.
- [BeHa] P. Bérard, L. Hauswirth, General curvature estimates for stable  $H$ -surfaces into a space form, *J. Math. Pures Appl.* **78** (1999), 667–700.
- [BNV] H. Berestycky, L. Nirenberg, S. R. S. Varadhan, The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), no. 1, 47–92.
- [BR] H. Berestycki, L. Rossi, On the principal eigenvalue of elliptic operators in  $R^N$  and applications, *J. Eur. Math. Soc.* **8** (2006), no. 2, 195–215.
- [BoTo] R. Böhme, F. Tomi, Zur Struktur der Lösungsmenge des Plateauproblems. *Math. Z.* **133** (1973), 1–29.
- [BrDo] D. Brander, J. F. Dorfmeister, The Björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces, *Communications in Analysis and Geometry* **18** (2010), no. 1, p. 171–194.
- [Bue1] A. Bueno, Translating solitons of the mean curvature flow in the space  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *J. Geom.* **109** (2018), no. 3, art 42, 26pp.
- [Bue2] A. Bueno, Height estimates for constant mean curvature graphs in  $\text{Nil}_3$  and  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ , *Arch. Math.* (2019) <https://doi.org/10.1007/s00013-018-1286-6>
- [Bue3] A. Bueno, The Björling problem for prescribed mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , aparecerá en *Ann. Glob. Anal. Geom.* (2019). arxiv:1805.02251.

- [Bue4] A. Bueno, Prescribed mean curvature surfaces in the product spaces  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ; Analysis of rotational surfaces, existence of spheres and a Delaunay-type classification result, preprint (2018), arxiv:1807.10040.
- [Bue5] A. Bueno, Prescribed mean curvature surfaces in the product spaces  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ; Height estimates and classification results for properly embedded surfaces, preprint (2018), arxiv:1807.10053.
- [Bue6] A. Bueno, Half-space theorems for properly immersed surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with prescribed mean curvature, preprint (2018), arxiv:1901.04343.
- [Bue7] A. Bueno, Existence and uniqueness of hypersurfaces with prescribed mean curvature in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , preprint (2018).
- [BGM] A. Bueno, J.A. Gálvez, P. Mira, The global geometry of surfaces with prescribed mean curvature in  $\mathbb{R}^3$ , preprint (2018), arxiv:1802.08146.
- [CaCa] Luis A. Caffarelli, X. Cabré, Fully Nonlinear Elliptic Equations, *American Mathematical Society: Colloquium publications* **43** (1995), ISSN 0065-9258.
- [Car] A. Carlotto, Rigidity of stable marginally outer trapped surfaces in initial data sets, *Ann. Inst. H. Poincaré* **17** (2016), 2421–2442.
- [Chr] E.B. Christoffel, Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben. *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), 193–209.
- [CSS] J. Clutterbuck, O. Schnurer, F. Schulze, Stability of translating solutions to mean curvature flow, *Calc. Var. Partial Diff. Equations* **29** (2007), no. 3, 281–293.
- [CoRo] P. Collin, H. Rosenberg, Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs, *Ann. Math.* **172** (2010), 1879–1906.
- [Dan] B. Daniel, Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), 87–131.

- [DaHa] B. Daniel, L. Hauswirth, Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, **98** no.2 (2009), 445–470.
- [DHM] B. Daniel, L. Hauswirth, P. Mira, Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds, *Korea Institute for Advanced Study*, Seoul, Korea, 2009.
- [DaMi] B. Daniel, P. Mira, Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in  $\text{Sol}_3$ , *J. Reine Angew. Math.*, **685** (2013), 1–32.
- [DDN] J. Dávila, M. del Pino, X.H. Nguyen, Finite topology self-translating surfaces for the mean curvature flow in  $\mathbb{R}^3$ , *Adv. Math.* **320** (2017), 674–729.
- [DHKW] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, Minimal Surfaces I. *Springer-Verlag, A series of comprehensive studies in mathematics* **295**, 1992.
- [DoVa] M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, On the principal eigenvalue of second-order elliptic differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), no. 6, 595–621.
- [Esp] J.M. Espinar, Gradient Schrödinger Operators, manifolds with density and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **455** (2017), 1505–1528.
- [EGR] J.M. Espinar, J.A. Gálvez, H. Rosenberg, Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces, *Comment. Math. Helv.* **84** (2009) no. 2 , 351–386.
- [FeMi1] I. Fernández, P. Mira, Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *Amer. J. Math.* **129** (2007), 1145–1181.
- [FeMi2] I. Fernández, P. Mira, Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**, no 11, (2009), 5737–5752.
- [FeMi3] I. Fernández, P. Mira, Constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Thurston geometries. In *Proceedings of the International Congress of Mathema-*

- ticians*, Volume II (Invited Conferences), pages 830–861. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010. Preprint at <http://arXiv.org/abs/1004.4752>
- [Fis] D. Fischer-Colbrie, On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), no. 1, 121–132.
- [FiSc] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 2, 199–211.
- [GaSc] G. Galloway, R. Schoen, A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions, *Comm. Math. Phys.* **266** (2006), no. 2, 571–576.
- [GaMi1] J.A. Gálvez, P. Mira, Dense solutions to the Cauchy problem for minimal surfaces, *Bull. Braz. Math. Soc.* **35** (2004), no. 3, 387–394.
- [GaMi2] J.A. Gálvez, P. Mira, The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant surfaces, *Adv. Math.* **195** (2005), no. 2, 456–490.
- [GaMi3] J.A. Gálvez, P. Mira, Embedded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Calc. Var. Partial Diff. Equations* **24** (2005), no. 2, 239–260.
- [GaMi4] J.A. Gálvez, P. Mira, A Hopf theorem for non-constant mean curvature and a conjecture of A.D. Alexandrov, *Math. Ann.* **366** (2016), 909–928.
- [GaMi5] J.A. Gálvez, P. Mira, Uniqueness of immersed spheres in three-manifolds, *Aparecerá en J. Diff. Geom.* arXiv:1603.07153.
- [GiTu] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, *Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin* (2001), Reprint of the 1998 edition.
- [Gro] M. Gromov, Isoperimetry of waists and concentration of maps, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), 178–215.

- [GuGu] B. Guan, P. Guan, Convex hypersurfaces of prescribed curvatures, *Ann. Math.* **156** (2002), 655–673.
- [Gua] Q. Guang, Volume growth, entropy and stability for translating solitons, *Aparecerá en Comm. Anal. Geom.* arXiv:1612.05312.
- [HaWi] P. Hartman, A. Wintner, On the third fundamental form of a surface, *Amer. J. Math.* **75** (1953), 298–334.
- [Hei] E. Heinz, On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.* **35** (1969), 249–252.
- [HoMe] D. Hoffman, W.H. Meeks, The strong halfspace theorem for minimal surfaces, *Invent. Math.* **101** (1990), 373–377.
- [Hop] H. Hopf, Differential Geometry in the Large, *Lecture Notes in Math.* **1000** Springer, Berlin, 1983.
- [Hsi] W. Hsiang, On the generalization of theorems of A. D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature, *Duke Math. J.* **49** (1982) 485–496.
- [Hui1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, *J. Diff. Geom.* **20** (1984) no. 1, 237–266.
- [Hui2] G. Huisken, The volume preserving mean curvature flow, *J. Reine Angew. Math.* **382** (1987), 35–48.
- [HuSi] G. Huisken, C. Sinestrari, Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces, *Acta Math.*, **183** (1993), no. 1, 45–70.
- [Ilm] T. Ilmanen, Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature, *Mem. Amer. Math. Soc.* **108** (1994).
- [ImRi] D. Impera, M. Rimoldi, Rigidity results and topology at infinity of translating solitons of the mean curvature flow, *Comm. Contemp. Math.* **19** (2017),

- [JuLi] H. Ju, Y. Liu, Dirichlet problem for anisotropic prescribed mean curvature equation on unbounded domains, *J. Math. Anal. Appl.* **439** (2016), 709–724.
- [KKS] N. Korevaar, R. Kusner, B. Solomon, The structure of complete embedded surfaces of constant mean curvature, *J. Diff. Geom.* **30** (1989), 465–503.
- [LeRo] C. Leandro, H. Rosenberg. Removable singularities for sections of Riemannian submersions of prescribed mean curvature, *Bull. Sci. Math.* **133** (2009), 445–452.
- [Lew] H. Lewy, On differential geometry in the large, I (Minkowski’s problem), *Trans. Amer. Math. Soc.* **42** (1938), 258–270.
- [Lop] R. López, Invariant surfaces in Euclidean space with a log-linear density, *Adv. Math.* **339** (2018), 285–309.
- [LoRo] F.J. López, A. Ros, Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces, *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), 34–43.
- [Mar] T. Marquardt, Remark on the anisotropic prescribed mean curvature equation on arbitrary domains, *Math. Z.* **264** (2010), 507–511.
- [MPGSHS] F. Martín, J. Pérez-García, A. Savas-Halilaj, K. Smoczyk, A characterization of the grim reaper cylinder, *J. Reine Angew. Math.* **746** (2019), 209–234.
- [MSHS] F. Martín, A. Savas-Halilaj, K. Smoczyk, On the topology of translating solitons of the mean curvature flow, *Calc. Var. Partial Diff. Equations* **54** (2015), no. 3, 2853–2882.
- [Maz1] L. Mazet, Optimal length estimates for stable CMC surfaces in 3-space forms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 8, 2761–2765.
- [Maz2] L. Mazet, Cylindrically bounded constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), 5329–5354.
- [Mee1] W.H. Meeks III, The classification of complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with total curvature greater than  $-8\pi$ , *Duke Math. J.* **48** (1981), 523–535.

- [Mee2] W.H. Meeks, The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), 539–552.
- [MMPR1] W.H. Meeks, P. Mira, J. Pérez, A. Ros, Constant mean curvature spheres in homogeneous three-spheres, preprint (2013) arXiv:1308.2612
- [MMPR2] W.H. Meeks, P. Mira, J. Pérez, A. Ros, Constant mean curvature spheres in homogeneous three-manifolds, preprint (2017), arXiv:1706.09394
- [MePe] W.H. Meeks, J. Pérez, Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups, in *Geometric Analysis*, **570**, pp. 25–110. Contemporary Mathematics, 2012.
- [MPR] W.H. Meeks, J. Pérez, A. Ros, Stable constant mean curvature surfaces. Handbook of geometric analysis. No. 1, 301–380, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [MeWe] W. H. Meeks III, M. Weber. Bending the helicoid, *Math. Ann.* **339** (2007), 783–798.
- [Min] H. Minkowski, Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.* **57** (1903), 447–495.
- [Mir] P. Mira, Complete minimal Möbius strips in  $\mathbb{R}^n$  and the Björling problem, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 1506–1515.
- [Pad] P. Padilla, The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators on Riemannian manifolds, *J. Math. Anal. Appl.* **205** (1997), no. 2, 285–312.
- [Pet] I. G. Petrovsky, Lectures on partial differential equations, *Interscience Publishers*, New York, 1954.
- [Pog] A.V. Pogorelov, Extension of a general uniqueness theorem of A.D. Aleksandrov to the case of nonanalytic surfaces (in Russian), *Doklady Akad. Nauk SSSR* **62** (1948), 297–299.

- [RoRo] A. Ros, H. Rosenberg, Properly embedded surfaces with constant mean curvature, *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. 6, 1429–1443.
- [RST] H. Rosenberg, R. Souam, E. Toubiana, General curvature estimates for stable  $H$ -surfaces in 3-manifolds and applications, *J. Diff. Geom.* **84** (2010), 623–648.
- [Scho] R. Schoen, Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds, volume 103 of *Ann. Math.* Princeton University Press, 1983.
- [Schw] H.A. Schwarz, Gesammelte mathematische abhandlungen, *Band I*, Springer, Berlin, 1890.
- [Smi] G. Smith, On complete embedded translating solitons of the mean curvature flow that are of finite genus, preprint, arXiv:1501.04149 .
- [SpXi] J. Spruck, L. Xiao, Complete translating solitons to the mean curvature flow in  $\mathbb{R}^3$  with nonnegative mean curvature, preprint, arXiv:1703.01003.
- [Tru] N. Trudinger, Fully Nonlinear PDEs in Geometry, *CBMS Lecture Notes. Australian National University* (2004).
- [Wen] H. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.* **121** (1986), 193–243.