Uma abordagem didática do problema de Monty Hall

A didactic approach to the Monty Hall problem

Lisbeth K Cordani[1]e Doris Satie Fontes[2]

[1]IME Universidade de São Paulo, [2]CONRE, São Paulo, Brasil

Resumo

A inserção de elementos de estatística e probabilidade ainda está caminhando a passos lentos na escola básica brasileira (fundamental I e II e ensino médio - de 6 a 17 anos). Com essa preocupação as autoras têm oferecido algumas atividades sob a forma de oficinas para diferentes públicos, tentando mostrar abordagens mais convidativas para apresentar os conceitos básicos ligados à área. Para o público do ensino médio em diante, uma das atividades oferecidas é o conhecido problema de Monty Hall, que desafiou inclusive grandes matemáticos no passado e que continua a intrigar alunos e professores de vários níveis de escolaridade. Nossa proposta aqui é apresentar uma abordagem didática ao problema, de forma a aproximar alunos, professores e pessoas em geral, discutindo aspectos de probabilidade e risco envolvido na tomada de decisão. Trazemos também resultados empíricos coletados pelas autoras em 2018, em uma atividade de natureza científica no nordeste brasileiro, com mais de 600 pessoas.

Palavras-chave: Monty Hall, probabilidade básica, oficina de estatística, diagrama de árvore.

Abstract

The insertion of elements of probability and statistics is still walking at a slow pace in the Brazilian basic school (which includes fundamental I, fundamental II and high school - ranging from 6 to 17 years of age). With this concern, the authors have offered some activities in the form of workshops for different audiences, trying to show approaches that are more attractive, in order to introduce the basic concepts related to the area. For the public of high school on, one of the activities is the well-known Monty Hall problem, which defied even great mathematicians in the past and continues to intrigue students and teachers of various levels of schooling. Our purpose here is to present a didactic approach to the problem, in order to approach students, teachers and people in general, discussing aspects of probability and risk involved in decision-making. We also present empirical results collected by the authors in 2018, in a scientific activity in the northeast of Brazil, with more than 600 people.

Keywords: Monty Hall, basic probability, statistical workshop, tree diagram.

1.Introdução

No cotidiano da escola básica, em que os alunos são confrontados com várias ciências, seria natural que o tema probabilidade aparecesse em diferentes contextos e que fosse debatido pelos professores. De fato, o ensino de probabilidade na escola básica brasileira já está previsto há algum tempo nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 1999) mas nem sempre apresenta aos alunos desafios interessantes para discussão. Os livros texto apresentam resultados instrumentais (geralmente num capítulo posterior ao da análise combinatória – o que por si só é um desserviço para o ensino das ideias básicas tanto da probabilidade como da estatística) e a discussão tampouco liga as áreas de probabilidade com a de estatística.

De uma maneira informal podemos definir probabilidade como "a medida de nossa incerteza frente a um acontecimento futuro".

Cordani, L. K. e Satie, D. (2019). Uma abordagem didática do problema de Monty Hall. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Para cada situação estabelecemos essa medida de modo conveniente de forma a obedecer aos axiomas. Seu ensino começa geralmente a partir de conceitos fundamentais, definindo espaço amostral e apresentando definições e axiomas.

A probabilidade é uma ferramenta para ajudar na tomada de decisão em problemas que envolvem incerteza, pois muitas vezes nos encontramos diante de informações incompletas, tanto na vida profissional como na pessoal e temos que decidir por uma estratégia ou outra. Um exemplo prosaico poderia ser: "vou sair - levo guarda-chuva ou não?". A decisão racional se baseia nas previsões da meteorologia, apoiadas por probabilidade. Essa decisão afetaria somente a pessoa que tanto corre o risco de se molhar, caso *não leve o guarda-chuva e chova* como o risco de levar um peso adicional inutilmente, caso *leve o guarda-chuva e não chova.* Mas em casos mais gerais a decisão afeta muitas pessoas e a probabilidade precisa fazer parte do conhecimento do cidadão para que a tomada de decisão seja feita usando a melhor estratégia. Não há dúvida de que este conhecimento tem que ser discutido no ambiente escolar. No entanto, nem sempre a decisão é racional, como discutido no artigo de Oliveira e Cordani (2016) que apresenta vieses relacionados à cognição em situações de decisão em problemas que envolvem probabilidade, vieses esses que influenciam o comportamento humano.

O início do aprendizado das noções básicas de probabilidade pode ser feito de várias maneiras, mas em nossa opinião não deve começar a ser discutida pelos seus aspectos formais, sendo que as motivações são bem-vindas para instigar o raciocínio dos alunos. Uma atividade que as autoras têm apresentado aos visitantes de feiras de ciências é o famoso problema de Monty Hall ou problema das três portas. Monty Hall é o nome artístico de um apresentador de um programa de auditório nos EUA, nos idos de 1970, que mantinha um quadro chamado "Let's make a deal": "Vamos fazer uma aposta". Este problema (que a partir daí se tornou conhecido como o problema de Monty Hall) além chamar a atenção na televisão, tornou-se ainda mais famoso quando proposto numa coluna de um magazine norte-americano escrita por Marilyn vos Savant, no final do século XX. Grande parte das respostas que chegavam pelo correio ou por outros meios, mesmo de proeminentes matemáticos, não estava correta, e como essas pessoas tinham uma certa arrogância sobre a certeza de seu conhecimento, escreviam à coluna, depois que a reposta correta havia sido dada por Marilyn, contestando a solução dada por ela. Em muitos casos, demorou algum tempo para que aceitassem a solução. Muitas dessas situações estão descritas em Mlodinow (2008).

É um problema simples de ser enunciado e fácil de ser apresentado aos alunos da escola básica que visitam esta atividade na referida feira. Além disso, o fato de envolver ganhos e perdas, atrai a atenção, criando um ambiente em que o aluno se sente desafiado a tomar uma decisão que a ele lhe pareça favorável. O "problema de Monty Hall" pode a nosso ver pode ser aplicado no ensino médio e possibilita uma discussão de natureza didática sobre probabilidade condicional. Muitos autores trabalharam com esse problema, alguns mais formais e outros menos, geralmente para estudantes de nível universitário (como por exemplo, Batanero et al., 2009; Tubau et al., 2015); mas como nosso intuito é o estudante da escola básica, ou seja, pré-universitário, vamos apresentar aqui uma discussão que a nosso ver facilita o processo de aprendizagem. Na descrição usaremos os termos aluno (para o indivíduo) e professor (para o apresentador).

2. O problema

São apresentadas a um aluno 3 portas fechadas (A, B, C), como mostra a Figura 1. Atrás de duas delas não há nada e atrás da outra há um prêmio (por ex., um carro). O objetivo da atividade é acertar a porta em que o carro está em até quatro passos: o que ele escolhe, onde está o carro de fato, a porta aberta pelo professor e a decisão de trocar ou não.

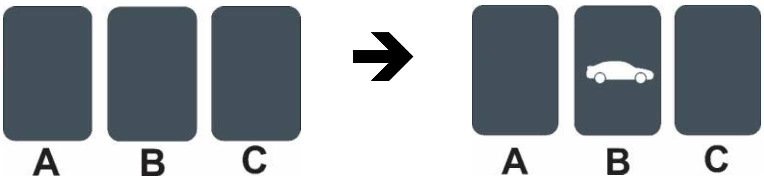

Figura 1. Situação inicial de Monty Hall

- *Passo 1.* O aluno deve escolher uma porta dentre três que lhe são apresentadas: A ou B ou C.
- *Passo 2.* O professor, depois que uma porta foi escolhida pelo aluno, abre uma outra porta em que não há nada (ou seja, onde o carro não está), como na Figura 2. Obs. Neste momento temos duas portas em "uso": uma que foi a escolhida pelo aluno (mas permanece fechada) e outra que foi aberta pelo professor, indicando que não há nada atrás dela. Mas há também a terceira porta que não foi escolhida por ninguém. Ou seja, até este passo, duas portas estão fechadas e uma só está aberta.
- *Passo 3.* O professor pergunta ao aluno, que agora sabe qual é uma das portas em que não está o carro, se prefere manter sua escolha inicial ou se prefere trocar de porta.
- *Passo 4.* Depois da resposta do aluno – trocando ou não – o professor mostra o que tem atrás da porta definitivamente escolhida.

O desafio é discutir com os alunos a melhor estratégia para ganhar o prêmio e em termos probabilísticos a pergunta seria: qual das duas estratégias fornece maior probabilidade de ganhar o prêmio – *trocar ou não trocar a primeira escolha*?

Figura 2. Aposta do aluno e porta aberta pelo professor

Uma das respostas mais comuns (e errada) advém do uso incorreto do princípio da equiprobabilidade: se o aluno escolher uma porta (digamos a porta A) e o professor mostrar que na porta B não está o carro, o aluno deverá decidir por uma dentre duas portas – ou a porta A, que já escolheu, ou a C que ainda não foi aberta. Então o prêmio pode estar ou na escolhida previamente, a porta (A), ou na outra, a porta (C) - muitas vezes o aluno intuitivamente conclui que tanto faz trocar ou não, pois sendo duas as portas ele atribui 50% de probabilidade de acertar aquela que esconde o prêmio (viés da equiprobabilidade).

Por que estaria errado este raciocínio que parece tão intuitivo? O aluno, ao raciocinar pela equiprobabilidade, não percebe que o professor sabe em que porta está o prêmio e que, portanto, não abre a porta ao acaso. Isso mostra que a intuição nem sempre vai a nosso favor e que, em situações de incerteza, é preciso ter cautela nas conclusões!

3. Resoluções

A seguir colocamos algumas (serão 3) das resoluções que oferecemos aos alunos que visitaram a atividade, partindo do princípio que o aluno quisesse ganhar o carro. Neste formato de exposição para centenas de pessoas, não houve tempo para mudanças do problema. Isso seria viável como discussão em sala de aula.

Resolução 1. Quando o aluno escolhe uma porta, digamos a porta A, existe a priori uma probabilidade de 1/3 de o carro estar ali mesmo (porta A) e 2/3 de probabilidade de que o carro não esteja na porta A (ele estaria ou na porta B ou na porta C). Então, saber onde *não* está o carro deposita todo o valor 2/3 sobre a outra porta oculta. Não há uma ação direta sobre a porta escolhida pelo aluno mas há uma ação premeditada (e determinística) ao abrir a porta sem o carro (o professor tem esse conhecimento). Esta última ação, ao dar *a* informação, atualiza a probabilidade anterior, que “perde” a possibilidade de conter o carro, ou seja a probabilidade de a porta aberta pelo professor conter o carro é obviamente zero!   Ao comparar o 1/3 inicial com os 2/3 da porta oculta verifica-se que é vantagem trocar, pois assim o aluno aumenta a probabilidade de ganhar o carro. Importante dizer que ter maior probabilidade não significa que o aluno ganhará com certeza: há sempre um risco associado à escolha feita!

Resolução 2. Apresentar cenários visuais aos alunos conforme a Figura 3, e discutir em quais situações deveríamos trocar e em quais não deveríamos trocar, para avaliar a frequência de situações ganhadoras. Assim, se o aluno escolher a porta A e o cenário for com o carro em A, o professor vai mostrar a ele ou a B ou a C. Neste caso, para ganhar o carro, o aluno não deveria trocar.

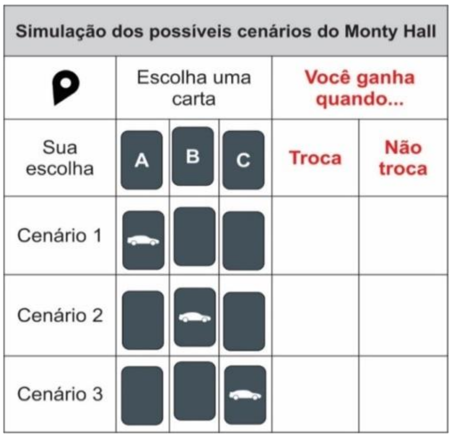

Figura 3. Cenários para serem discutidos

Mas se o cenário fosse com o carro em A e ele escolheu a porta B, a porta mostrada seria a C e ele deveria trocar para ganhar. Por outro lado, se o cenário continuasse com o carro em A e o aluno escolheu C, a porta mostrada pelo professor seria a B e ele também deveria trocar para ganhar. Ou seja, se o carro estiver na porta A, o aluno ganha se não trocar na única situação em que ele escolheu também a porta A e ganha se trocar nas duas outras situações (escolheu ou B ou C). Assim, dado o carro em A, há 3 possibilidades de escolha, e o aluno ganha em duas delas (trocando). Portanto em 2/3 das vezes ele ganha se trocar. O raciocínio é análogo nas demais colocações do carro (ou em B ou em C) e a probabilidade de o aluno ganhar quando troca é sempre maior (na verdade o dobro!) do que a probabilidade de ganhar quando não troca (2/3 vs 1/3).

Resolução 3. Diagrama de árvore e uso da probabilidade condicional. Nesta abordagem vamos escolher uma construção passo a passo do diagrama, associando probabilidades às etapas, o que de certa forma esquematiza a Resolução 2 acima. O diagrama de árvore é uma ferramenta muito útil no ensino da probabilidade pois tem um componente visual que acompanha o passo a passo do raciocínio envolvido no problema. Como diz Moore (2001, p. 383), numa tradução livre, " O diagrama de árvore organiza a informação para fornecer um modelo probabilístico sob a forma gráfica".

Nossa premissa: o aluno escolheu a porta A**.** Em seguida, o professor vai escolher uma porta para abrir, numa ação quase premeditada (pois ele sabe onde está o carro). Dizemos *quase* pois em uma única situação, que será discutida depois do diagrama, ele pode fazer uma escolha. Vamos, pois, buscar resposta à seguinte pergunta:

Se o aluno escolher a porta A e em seguida o professor mostrar a porta B, ele (aluno) deve permanecer na sua escolha inicial ou trocar de porta? (1)

O diagrama de árvore, construído na Figura 4, é quase autoexplicativo e descreve os vários passos que serão usados (local do carro, porta aberta pelo professor) e suas respectivas probabilidades. Isto para decidir qual a melhor estratégia a ser seguida pelo aluno que quer ganhar o carro.

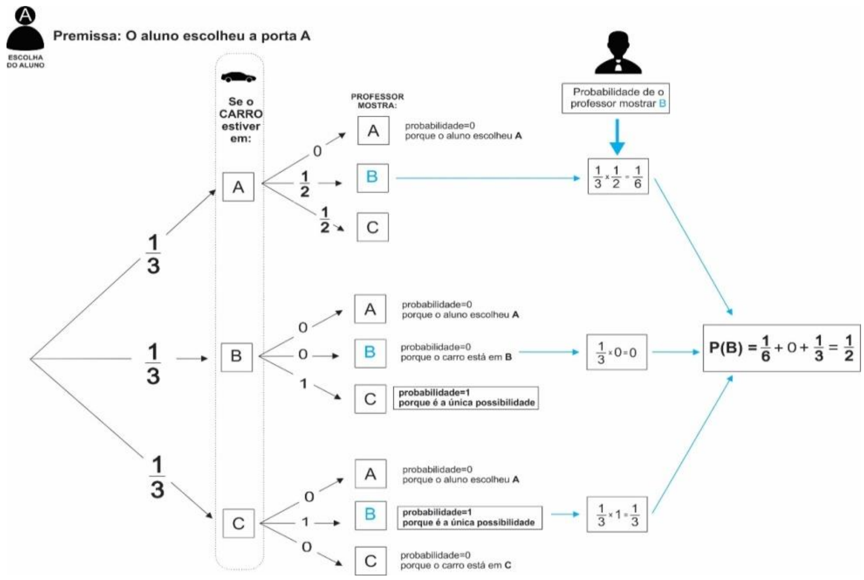

Figura 4. Diagrama de árvore para Monty Hall

Lembrando sempre que a *escolha inicial do aluno foi a porta A*, vem:

1. Si o carro estiver de fato em A, o professor pode abrir ou a porta B ou a porta C. É razoável supor que o professor escolha aleatoriamente entre as duas, o que sugere colocar a probabilidade de escolha igual a ½, ou para B ou para C, conforme está descrito na continuação da primeira "flecha" da Figura 4. Neste caso a probabilidade de o professor escolher a porta B dado que o carro está em A é ½. E a probabilidade de o carro estar em A e o professor mostrar a B é (½ x ⅓) = ⅙ (produto das probabilidades desse caminho A → B). É imediato ver essas relações na Figura 4. Em notação probabilística, usando P para probabilidade (não necessariamente usada

pelo professor na primeira descrição do problema), tem-se:

P (mostrar B | carro em A) = ½ (conforme comentado em *)

P (carro em A *e* professor mostrar B) = (½ x ⅓) = ⅙.

2. A parte do meio da Figura 4 mostra a situação de o carro estar de fato em B. Como o aluno escolheu a porta A, temos que se o carro estiver em B, o professor só tem a possibilidade de abrir a porta C, o que acontece então com probabilidade 1 (ou seja, com certeza). As outras possibilidades de abertura pelo professor têm probabilidade zero de acontecer, como mostra a Figura 4, na parte correspondente à segunda "flecha" inicial. Assim, na notação probabilística já usada no item anterior, tem-se

   P (mostrar B | carro em B) = 0

   P (carro em B *e* professor mostrar B) = ⅓ x 0 = 0.

3. Na última "flecha" do início da Figura 4 (dado <u>sempre</u> que o aluno escolheu a porta A) temos a situação em que o carro está, de fato, em C e, portanto, o professor só poderá abrir a porta B, já que o carro está em C e o aluno escolheu A. Novamente temos uma situação com probabilidade 1 (com certeza) o que pode ser colocado em notação probabilística como

   P (mostrar B | carro em C) = 1

   P (carro em C *e* professor mostrar B) = ⅓ x 1 = ⅓ .

Depois dessa análise em três etapas, e supondo sempre que <u>o aluno escolheu a porta A</u>, vemos que são três os caminhos alternativos que *servem* para a configuração relativa ao professor mostrar a porta B e, portanto, representando por suas respectivas probabilidades, vem (como já mostrado na Figura 4):

P(carro em A e professor mostrar B)+ P(carro em B e professor mostrar B)+ P(carro em C e professor mostrar B)=⅙ + 0 + ⅓ = ½.

Retomando a pergunta (1) podemos inicialmente calcular a probabilidade representada por P (carro em A <u>dado que</u> professor mostrou porta B). Isto porque, sem saber onde está o carro, se o aluno escolheu inicialmente a porta A e o professor mostrou a porta B, se soubermos a probabilidade de isto acontecer podemos estudar uma estratégia de maximizar a *chance* de o aluno ganhar! Aqui estamos usando coloquialmente o termo em itálico (*chance*) que faz parte do jargão escolar para probabilidade.

A expressão <u>dado que</u> (condicionado a) é simbolizada em probabilidade condicional (ver Magalhães e Lima, 2011) por um traço | , e a pergunta pode ser reescrita como → P (carro estar em A | porta aberta foi a B) =?

Neste ponto fazemos uma pausa com os alunos (não neste texto) para discutir o conceito de probabilidade condicional (ver Magalhães e Lima, 2011), cuja expressão para dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral, com P(B)>0, tem a forma

$$P(A|B) = \frac{P(A \; e \; B)}{P(B)}.$$

Observação. A nosso ver, este conceito fica mais fácil de ser compreendido pelos alunos se for apresentado através de tabelas de dupla entrada. Assim, para calcular a probabilidade condicional em (2) tem-se

$$P\;(carro\;estar\;em\;A\;|\;porta\;aberta\;\acute{e}\;B) =$$

$$= \frac{P(carro\ em\ A\ e\ porta\ aberta\ B)}{P(porta\ aberta\ B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

O que esse resultado nos mostra? O mesmo que foi apresentado anteriormente, ou seja, se o aluno escolher inicialmente a porta A e o professor mostrar o que há atrás da porta B, ou seja *nada*, a probabilidade de o carro estar em A é 1/3. Isto indica que para uma escolha inicial do aluno em A, se ele permanecer com esta escolha, mesmo depois de o professor mostrar a porta B, a probabilidade de o carro estar de fato em A é só 1/3 enquanto que se ele mudar de escolha a probabilidade de ganhar o carro dobra (para 2/3)! Esta situação sugere fortemente a troca. Nessa situação, podemos dizer que a probabili*dade de o carro estar em C é duas vezes maior do que aquela de o carro estar em A. Assim, mesmo levando em conta que o aluno não tem certeza de ganhar, a sugestão de troca oferece menos risco já que a probabilidade de ganhar, trocando, é maior!

Em resumo, toda vez que uma porta for escolhida pelo aluno, o professor abrirá uma outra vazia (por isto essa etapa não caracteriza um processo aleatório) e a estratégia de trocar de porta dobra a probabilidade de acertar a porta em que o carro está. Ou seja, trocando o aluno tem probabilidade 2/3 (cerca de 70%) de ganhar o carro e não trocando tem probabilidade 1/3 (cerca de 30%), que é a mesma probabilidade inicial. Interessante notar que grande parte das pessoas acha que saber qual porta foi aberta não traz informação adicional, e que uma vez dada essa informação tanto faz trocar como não trocar, e que a probabilidade de ganhar o carro é a mesma (1/2), como já discutido anteriormente, com o viés da equiprobabilidade. No entanto é justamente o contrário: saber a porta aberta informa que trocar a primeira escolha dobra a chance do aluno. Não se trata de saber a resposta certa, mas sim a mais provável. Analogamente, obteríamos resultados semelhantes para a escolha inicial do aluno ou pela porta B ou pela porta C (com as correspondentes escolhas do professor), cujos resultados também mostrariam que, para ganhar o carro, trocar é mais favorável do que não trocar (2/3 vs 1/3).

4. Resultados observados

As autoras têm oferecido, ao longo dos últimos anos, em vários pontos do Brasil, uma série de atividades simultâneas em forma de oficinas, num ambiente de visitação de escolas de nível básico, dentro de uma grande exposição de ciências. Grande parte tem acontecido em Reuniões Anuais da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC – www.sbpcnet.org.br) e esse espaço tem sido chamado de Tenda da Estatística. São montadas uma série de Estações, geralmente entre 5 e 6, dispostas em mesas separadas, cada uma com uma atividade, seja de estatística seja de probabilidade dirigidas para o ensino básico: Monty Hall é uma delas. Essas atividades são concentradas geralmente em uma semana, com visitas de escolas e seus professores, tanto do fundamental quanto do médio, público para o qual é dirigida essa parte da reunião, denominada de SBPC JOVEM. Mas temos constatado que circula pela reunião muito público universitário também, além de cidadãos interessados em ciência em geral.

Durante a 70ª. Reunião Anual da SBPC realizada em julho de 2018 na UFAL, Maceió, Alagoas, Brasil, a atividade Monty Hall foi apresentada durante uma semana a 621 pessoas de diversos níveis de escolaridade. Não foi feita nenhuma estratificação pela escolaridade e nem pelo eventual conhecimento prévio da solução do problema. A cada pessoa que se apresentasse espontaneamente era apresentado o problema e uma vez escolhida a porta inicial fazia-se o procedimento já descrito acima. Os resultados foram marcados em uma planilha (Figura 5) e estão transpostos para a Tabela 1.

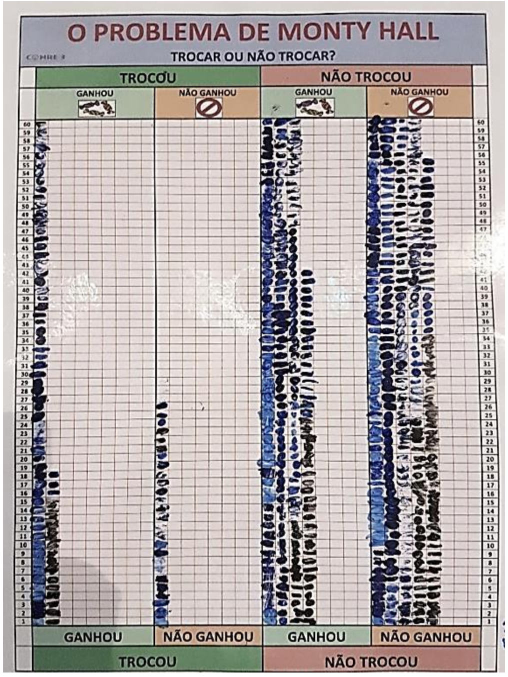

Figura 5. Marcação da atividade

Tabela 1. Resultados da atividade (percentuais linha)

	Ganhou	Não Ganhou	Total
Trocou	78 (75%)	26 (25%)	104 (100%)
Não Trocou	222 (43%)	295 (57%)	517 (100%)
Total	300	321	621

É importante destacar que o que está em jogo é a estratégia de trocar ou não trocar o que, como já vimos, deverá afetar a probabilidade de ganhar ou não ganhar. Assim, vamos comparar percentuais condicionais, ou seja, verificar as frequências relativas de ganhou ou não ganhou, dado que trocou ou não trocou. Assim, os totais de referência são os totais marginais e a Tabela 1 apresenta os percentuais para cada caso. Se tomarmos a frequência relativa, calculada a partir do número de vezes de *ganhou* em relação ao número de vezes em que *trocou* como estimativa da correspondente probabilidade condicional, observamos uma razoável aproximação dos valores teóricos (0,33 vs 0,67), obtidos no início do artigo, com estes obtidos na atividade (0,25 vs 0,75), tendo em vista que estes valores foram obtidos de um estudo observacional, sem interferência do operador. Enfatizamos que não faz sentido comparar as frequências relativas com relação ao total geral, pois o que se quer é saber qual a probabilidade de ganhar dada a estratégia usada de trocar ou não (ou seja, um esquema condicional). A Figura 6 foi construída com os valores condicionados aos totais marginais das linhas da Tabela 1. Pelo gráfico apresentado na Figura 6 é imediato perceber que trocar favorece ganhar.

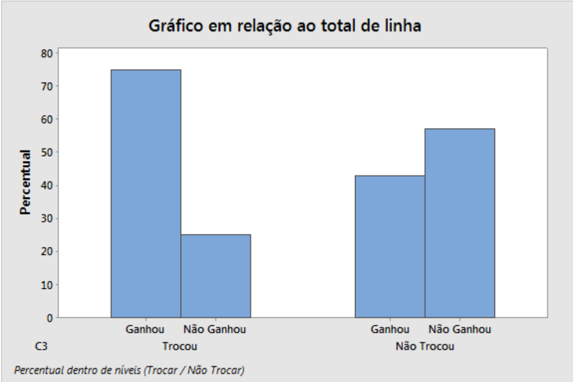

Figura 6. Gráfico de barras com os dados da Tabela 1

5. Comentários de natureza cognitiva

Batanero, Fernándes e Contreras (2009) sugerem fazer simulações deste problema, para observar experimentalmente os resultados derivados teoricamente, uma vez que o aluno, ao ver suas intuições indo de encontro aos resultados esperados, tem que resolver um conflito cognitivo, o que pode encaminhá-lo para a solução correta. Neste artigo apresentamos o que podemos chamar de resultados empíricos, tomados ao longo de uma semana, que poderiam também servir para que os alunos se convençam do resultado. Mas nossa experiência mostrou que mesmo tendo esse conhecimento, as pessoas se apegam à sua primeira escolha.

O acompanhamento do comportamento das pessoas que tomavam parte na atividade era surpreendente: embora não tenhamos quantificado, muitas eram as vezes em que as pessoas retornavam para jogar... *e não trocavam*! Ou seja, mesmo levando em conta os resultados da tabela empírica ou as resoluções 1 e 2 já descritas aqui, que sugerem a troca, ainda assim preferiam ficar com sua opinião inicial, o que Tubau et al. (2015) descrevem como viés cognitivo de caráter emocional. Além de incorrerem no viés da equiprobabilidade, que induz a pensar que tanto faz trocar como não trocar, os participantes preferem permanecer com a opção original para evitar arrependimento futuro, pela superestimação das situações em que, apesar de trocarem, perderam o carro! Os mesmos autores comentam que é considerado pior trocar e perder do que não trocar e perder, parecendo mais recompensador ganhar quando não trocou do que ganhar quando trocou. Poderíamos até pensar que a primeira escolha teria um efeito ligado ao amor próprio...não abandono o jogo enquanto não mostrar que posso ganhar com a minha primeira escolha!

Interessante notar também que a probabilidade de ganhar o prêmio na primeira escolha permanece invariante (1/3), enquanto que ganhar com a segunda escolha é o dobro da anterior.

6. Observações finais

Há na literatura sobre o Monty Hall, algumas maneiras de construir o diagrama de árvore, associando a probabilidades aos diversos passos. Aqui supusemos, para facilitar, que o aluno escolheu a porta A e derivamos o raciocínio para a probabilidade de o carro estar primeiro em A, depois em B e depois em C, atribuindo as probabilidades correspondentes. Há demonstrações mais formais e elegantes, já citadas no início, que podem ser adicionadas posteriormente para os alunos com gosto especial pelos aspectos mais teóricos. Mas a nosso ver, uma apresentação inicial discursiva e com o auxílio do diagrama de árvore, com um sistema passo a passo, pode ajudar os professores a orientarem os alunos que não se sentem confortáveis com uma abordagem formal para iniciar a compreensão do problema.

Observe que o diagrama de árvore pode ser usado de várias maneiras e que um diagrama de rede também pode ser mais transparente para o aluno.

Além disso, se esses aspectos ligados à cognição forem levados em conta pelos professores, certamente haverá uma sensível melhora no ambiente de ensino-aprendizagem.

Nas atividades mencionadas, as autoras tiveram contato com uma diversidade de alunos e professores e pessoas em geral, muitos deles se espantando em como é possível discutir probabilidade e estatística de maneira informal. Para esse programa contamos com a colaboração de monitores, geralmente alunos da licenciatura em matemática ou do bacharelado em estatística, que também se surpreendem pelo mesmo motivo. Recebemos alguns relatos manuscritos (sem identificação) dos monitores (alunos da UFAL) que participaram desta TENDA, dos quais destacamos os seguintes:

> Aluno 1: Ensinar sempre foi uma paixão... e poder fazer isso de modo dinâmico é gratificante. Definitivamente é algo que eu faria mil vezes se pudesse.

> Aluno 2: Participar da tenda da estatística foi para mim um grande ganho. Pude ver que a forma de explicar algo nem sempre é igual para todos... há ações que pessoas entendem facilmente e outras não. Pude também aprender bastante com os diversos públicos.

> Aluno 3: Foi uma experiência incrível. Perceber que é possível tornar a área de estatística acessível a todas as pessoas, independente da idade e da escolaridade, acrescentou bastante na minha formação de futuro professor.

Referências

Batanero C., Fernandes, J. A e Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma 62*, 11-18.

Magalhães e de Lima (2011). *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp.

Ministério da Educação (1999). *Parâmetros curriculares nacionais. Ensino médio*. Brasília: MEC

Mlodinow, L. (2008). *O andar do bêbado*. Rio de Janeiro: Zahar.

Moore, D. S. (2001). *Statistics: concepts and controversies*. 5ª. ed. New York: Freeman.

Oliveira, C. R. e Cordani, L.K. (2016). Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1265-1289.

Tubau, E., Aguilar-Lleyda, D. e Johnson, E.D. (2015). Reasoning and choice in the Monty Hall Dilemma (MHD): Implications for improving Bayesian reasoning. *Frontiers in Psychology, 6*, 353. DOI: *10.3389/fpsyg.2015.00353*