La enseñanza determinista de la probabilidad

The deterministic teaching of probability

Giovanni Sanabria Brenes

Tecnológico de Costa Rica- Universidad de Costa Rica

Resumen

El presente trabajo analiza las respuestas que proponen nueve docentes en formación, que ya cursaron un curso sobre probabilidad y son estudiantes del TEC de Costa Rica, en un cuestionario sobre situaciones-problema de probabilidad con el fin de valorar el manejo que hacen de la aleatoriedad. En las respuestas se evidencia que algunos no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis que se necesitan para utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias, es decir piensan que hay una única respuesta correcta. ¿Será que se enseña la probabilidad de forma determinista?

Palabras clave: formación de profesores, probabilidad, determinismo, aleatoriedad

Abstract

This paper analyzes the solutions proposed by nine Costa Rica prospective teachers who have already taken a course of probability and are students of the Instituto Tecnológico de Costa Rica, TEC, in a questionnaire with probability problems, in order to assess the way they manage randomness. The answers show that some teachers do not know how to make explicit the sample space or the random experience, neglect the hypotheses needed to use probability as a model and give deterministic answers to random situations. Is it possible that they teach probability in a deterministic way?

Keywords: teacher training, probability, determinism, randomness.

1. Introducción

La probabilidad tiene su origen en la aleatoriedad, que no es un concepto sencillo pues implica la existencia del azar, que, como se ha evidenciado en muchas investigaciones (por ejemplo Gonzales (2013)) es difícil de comprender para los estudiantes a nivel universitario. Sin embargo, es indispensable para abordar el estudio de las probabilidades. Al respecto, Batanero y Serrano (1995, p. 24) señalan que

> a pesar de las dificultades filosóficas y psicológicas descritas, las situaciones aleatorias revisten una gran importancia. El problema de asegurar que una sucesión sea aleatoria sigue teniendo una gran actualidad debido a sus aplicaciones.

En Costa Rica, la enseñanza de la probabilidad, tanto en secundaria como a nivel universitario, está a cargo de docentes, generalmente graduados en enseñanza de la matemáticas o matemáticas. Esto conlleva un gran inconveniente, pues la matemática es una ciencia exacta, que no da pie a la incertidumbre necesaria en probabilidad, y se suele presentar de forma muy determinista, salvo en los cursos dedicados a probabilidad que son cortos o escasos. Así, la formación que reciben los docentes en formación en matemática centrada en el método axiomático deductivo, puede convertirse en un obstáculo para comprender la aleatoriedad. Al respecto, Batanero (2000) sugiere que:

> La misma naturaleza de la estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas. Un indicador de ello es que aun hoy día prosiguen las controversias filosóficas sobre la interpretación y aplicación de conceptos tan básicos como los de probabilidad, aleatoriedad, independencia o contraste de hipótesis, mientras que estas controversias no existen en álgebra o geometría (Batanero, 2000, p.7)

Sanabria, G, (2019). La enseñanza determinista de la probabilidad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Además, en la formación actual de los futuros docentes es indispensable incluir el pensamiento aleatorio. Al respecto, Elizarrarás (2014) señala que:

> Sin duda, el desarrollo de un pensamiento matemático integral no sólo debe enfocarse al pensamiento determinista sino también y de forma conjunta e interactiva debe incluir el pensamiento estocástico; sólo así, se requiere de incorporar el pensamiento complejo de una forma real. Cabe señalar el desarrollo del pensamiento estocástico corresponde a una forma distinta de aprender porque la idea de azar implica reconocer ciertas sutilezas que permiten la advertencia de lo posible, lo cual no es trivial, requiere de tiempo. (p.26)

Dado lo anterior, ¿cómo estamos formando a los futuros docentes en el pensamiento aleatorio? ¿Logran resolver con éxito situaciones que involucren aleatoriedad? ¿Tienen un manejo sutil del concepto de aleatoriedad? En este trabajo nos proponemos analizar las respuestas a cinco situaciones-problemas resueltas por nueve docentes de matemáticas en formación. En las soluciones a los problemas se analizará el manejo que hacen de la aleatoriedad con el fin de obtener algunas implicaciones a considerar en su enseñanza.

2. Metodología

En el diseño de las situaciones-problemas se tomó en cuenta algunas características inherentes a la resolución de problemas en probabilidad, como son: identificación de un suceso aleatorio, requisitos de una situación aleatoria para que sea probabilizable, interpretación de una probabilidad y toma de decisiones con base en los resultados de una probabilidad. Las situaciones-problemas que conforman el cuestionario se formularon con base en la experiencia del autor y como limitación no fueron sometidos a una validación. Como protocolo de aplicación del cuestionario en el encabezado del mismo se indicó: Estimado estudiante, le solicitó su colaboración para responder al siguiente cuestionario, cuyo objetivo es analizar la enseñanza de la probabilidad. No se requiere que ponga nombre y no tiene ninguna validez para el curso. Agradezco su colaboración.

El cuestionario se aplicó a nueve futuros graduados en enseñanza de la matemática con entornos tecnológicos de la universidad. Estos estudiantes cuentan con cierta formación previa en estadística y probabilidad. Concretamente, cursaron en el segundo semestre del 2017 el curso “elementos del análisis de datos y probabilidad” y en el momento de realizar la investigación cursaban “didáctica de la estadística”.

3. Resultados

El cuestionario que se aplicó consta de cinco situaciones problema. Seguidamente presentamos los resultados a las respuestas dadas por los docentes en formación a cada una de ellas.

3.1. Primer problema

> **Situación 1.** En una canasta hay 10 bolas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una bola par? Justifique su respuesta.

Como respuesta correcta a esta situación hay dos opciones, pues la simple respuesta de ½ no se considera correcta:

- No aleatoriedad. Consiste en asignar una probabilidad del 100% (pues si hay una canasta simplemente me fijo en sus bolas y tomó una bola par). Esto se debe a que la situación no tiene la restricción que la bola deba elegirse al azar.

- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va asumir la hipótesis de que la bola es elegida al azar y que bajo esta hipótesis la probabilidad es ½.

Tabla 1. Respuestas a la situación 1

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

En la Tabla 1 se presentan los resultados de la primera situación planteada. Dentro de las respuestas incorrectas hay siete respuestas similares a la dada por el estudiante 2: “1/2 o 5/10 pues 5 bolas son pares y son 10 en total”. El estudiante 6 considera la situación como aleatoria (ver Figura 1) y explicita el número de casos favorables y posibles En la respuesta del estudiante 9 (Figura 2) podemos observar que este estudiante tiene un manejo inadecuado de la regla de Laplace.

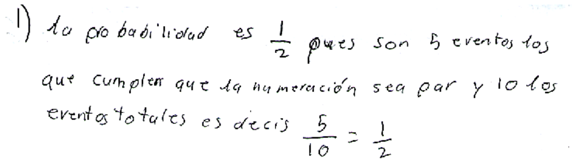


Figura 1. Respuesta del estudiante 6

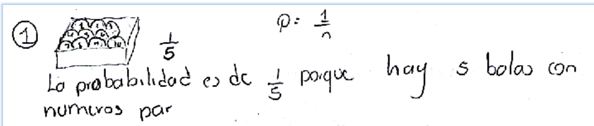


Figura 2. Respuesta del estudiante 9

Normalmente, en un curso de probabilidad teórica, y en la mayoría de los libros de texto, se indica que no todos los procesos o experimentos aleatorios pueden ser descritos por la probabilidad, sino solo aquellos que cumplan tres requisitos (Sanabria, 2012):

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento.
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en el experimento.
3. El experimento puede repetirse.

A estas hipótesis se deben agregar dos más, si se quiere aplicar la Ley de Laplace, que son las siguientes: a) La cantidad de posibles resultados es finita; b) Los posibles resultados son equiprobables. Sin embargo, muchas veces esos requisitos quedan relegados al primer día de clase y no se reafirman a lo largo del proceso de enseñanza. Particularmente, esta situación tiene que ver con que, si no hay aleatoriedad, los posibles resultados se reducen a uno y nos encontramos ante una situación determinista. Además, es indispensable al utilizar el modelo probabilístico para resolver un problema, indicar los supuestos en los que se basa ese modelo.

3.2. Segundo problema

Situación 2. Juan tiene cinco camisas: dos son nuevas, tres camisas son viejas. Este domingo va a elegir una para ir a ver a la novia, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo ande con una camisa vieja? Justifique su respuesta.

Este problema es similar al anterior pero se trata de ser más evidente: si Juan va a ver la novia y es domingo, lo más lógico es que elija una camisa nueva. La simple respuesta de 3/5 no se considera correcta. Las respuestas que se consideran correctas son las siguientes:

- No aleatoriedad. Consiste en sugerir la probabilidad del 0%. Igual con un buen supuesto se puede considerar que 100% es una respuesta correcta (por ejemplo suponer que Juan solo usa las camisas viejas)
- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va asumir la hipótesis de que la camisa es elegida al azar y que bajo esta hipótesis se tiene que la probabilidad es 3/5.

Tabla 2. Respuestas a la pregunta 2

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Dentro de las respuestas incorrectas hay siete respuestas similares a la dada por el estudiante 4: "3/5 Pues son 5 camisas de las cuales tres son viejas". El estudiante 9 mantiene el patrón presentado en la pregunta anterior (ver Figura 9)

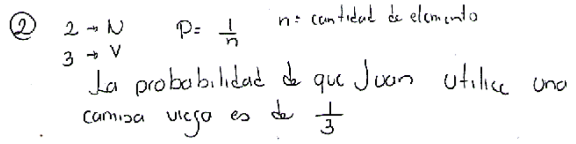


Figura 3. Respuesta del estudiante 9

El único estudiante cuya respuesta se considera correcta es el 6, que muestra dar importancia a la aleatoriedad, a diferencia de sus compañeros (ver Figura 4). Los resultados en esta pregunta reafirman lo observado en la anterior, ya que la mayoría de los estudiantes no prestan atención a las hipótesis que se deben asumir al aplicar la probabilidad. Esto es esencial cuando se aplica la probabilidad en diferentes ámbitos (ciencias sociales, finanzas, etc.).

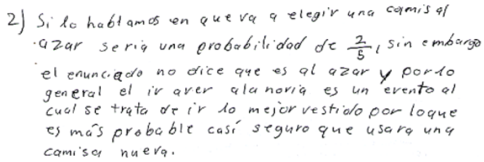


Figura 4. Respuesta del estudiante 6

3.3. Tercer problema

Situación 3. En un examen de secundaria, en el desarrollo, se presenta el siguiente problema con un valor de 5 puntos: *En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugaría DADOS A SEIS? Un estudiante A calculo correctamente la probabilidad del evento G (ganar el juego), utilizando la siguiente tabla, para representar los posibles resultados al lanzar dos dados y calculando: P(G)=((15)/(36))≈0.416*

Dado 2

			+	1	2	3	4	5	6
			1	2	3	4	5	6	7
			2	3	4	5	6	7	8
Dado1			3	4	5	6	7	8	9
			4	5	6	7	8	9	10
			5	6	7	8	9	10	11
			6	7	8	9	10	11	12

El estudiante respondió al problema indicando que jugaría DADOS A SEIS.

a. ¿Cuántos puntos de los 5 puntos que valía el problema le da a la solución de la respuesta A? Justifique su respuesta.
b. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

Recordemos que la probabilidad es un insumo para la toma de decisiones, pero no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar. Así, esta situación introduce un concepto importante en la aplicación de probabilidades que usualmente se evade en su enseñanza: el concepto de riesgo.

Para esta situación en la pregunta a), se considera como respuesta correcta el dar entre 3 y 4 puntos, pues calculó correctamente la probabilidad, pero no se justificó su respuesta. Y es que la probabilidad de un 41.6% puede ser atractiva para arriesgarse a jugar dados a seis. Si se piensa que la única respuesta correcta es no jugar dados a seis pues la probabilidad es menor al 50%, es reducir el problema al determinismo. No hay respuestas correctas a situaciones aleatorias, hay respuestas con cierto grado de certeza.

Tabla 4. Respuestas a la pregunta 3a

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

Las respuestas incorrectas obtenidas fueron clasificadas (no fue una clasificación a-priori establecida) en:

- Opinión personal (estudiantes: 1, 2). Consideran que la decisión es una opinión personal ajena a la probabilidad. Por ejemplo, el estudiante 2 indica que “los cinco, pues la pregunta es si jugaría y él en su opinión sí jugaría”.
- Incompletas (estudiantes: 4, 5, 7, 8). Dan menos de cinco puntos a la respuesta dada pero no justifican. Por ejemplo, el estudiante 8 afirma que “le daría 3.5 puntos, pues hizo el cálculo de probabilidad”
- Determinismo (estudiantes:3, 6, 9). Dan menos puntos pues consideran que la respuesta correcta es no jugar. En este sentido, el estudiante 9 propone la siguiente respuesta (ver Figura 5)

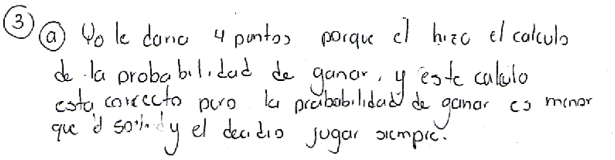

3 a Yo le daria 4 puntos porque el hizo el calculo de la probabilidad de ganar, y este calculo esta correcto pero la probabilidad de ganar es menor que el 50% y el decidio jugar siempre.

Figura 5. Respuesta del estudiante 9

La siguiente tabla resume los resultados de la pregunta 3b: Las respuestas incorrectas se clasifican en la forma siguiente:

- Determinismo. Los estudiantes 2, 6, 7, 8 y 9 consideran que la respuesta es no jugar, pues la probabilidad de ganar es menor al 50%. Llama la atención que algunos estudiantes, que dieron respuesta incompleta en a), tenían una posición determinista de acuerdo a su respuesta en b) (Estudiantes 7 y 8)
- No responde. Los estudiantes 3 y 5 no responden a la pregunta.

Tabla 5. Respuestas a la pregunta 3b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	2	7

Los estudiantes 1 y 4 dan respuestas que se pueden considerar correctas. Por ejemplo, la respuesta del estudiante 1 es casi correcta, quizás el defecto es que considera que la pregunta planteada no es habitual para un examen, debido a su incertidumbre en la respuesta.

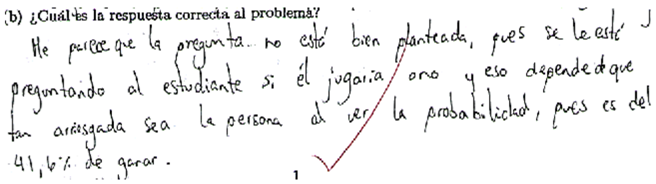

(b) ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?
Me parece que la pregunta no está bien planteada, pues se le está preguntando al estudiante si él jugaría o no y eso depende de que tan arriesgada sea la persona al ver la probabilidad, pues es del 41,6% de ganar.

Figura 6. Respuesta del estudiante 1

Seguidamente se presenta la respuesta del estudiante 4. Note como en su respuesta considera que no puede haber una respuesta única correcta (respuesta determinista) a una situación aleatoria.

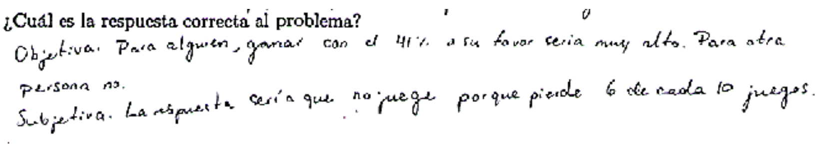

¿Cuál es la respuesta correcta al problema?
Objetiva. Para alguien, ganar con el 41% a su favor sería muy alto. Para otra persona no.
Subjetiva. La respuesta sería que no juege porque pierde 6 de cada 10 juegos.

Figura 7. Respuesta del estudiante 4

En evaluación, por lo general, la mayoría de los problemas de probabilidad se centran en su cálculo y no en toma de decisiones, para reducir la incertidumbre en las respuestas, posiblemente por mera tradición. Sin embargo, esta forma de evaluar limita el potencial aplicativo de la probabilidad. Actualmente, han surgido otras opciones de evaluar, como la evaluación por medio en proyectos, que el caso de la probabilidad debería tomar en cuenta la variación en las respuestas.

3.4. Cuarto problema

Situación 4. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen dos autopistas: C_1 y C_2. Considere los eventos: E_1: sufrir un accidente en C_1; E_2:Sufrir un accidente en C_2. Suponga que: E_1 y E_2 son independientes, y además,$P(E_1 \cup E_2) = 0.08, P(E_1) = 0.05$

a. Determine $P(E_2)$. Sugerencia: Recuerde que si A y B son independientes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

b. Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2. ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta.

El problema 4a no es objeto de este estudio, sino un distractor para no dar directamente las probabilidades de los eventos E_1 y E_2. La solución al problema 4a es: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2)$

$$\Rightarrow 0.08 = 0.05 + P(E_2) - 0.05 \cdot P(E_2) \ \Rightarrow P(E_2) = 0.315$$

Por lo tanto, hay una mayor probabilidad de sufrir un accidente en la autopista C_1.

Sin embargo, para el problema 4b no se puede decir que la decisión de Juan sea la correcta, si es la más correcta en términos de probabilidad. De repente, Juan se va por esa autopista y sufre un accidente. Así, no podemos hablar de una única respuesta correcta. Además, las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares. Así, la respuesta correcta a 4b, es indicar que no se puede asegurar que la decisión de Juan es la correcta pero si es la más correcta. Esto se puede relacionar con el concepto de aceptación y rechazo que es indispensable en estadística inferencial, por ejemplo si debó juzgar la decisión de Juan, la aceptaría pues tomó la decisión más correcta. En cambio otras decisiones se rechazarían.

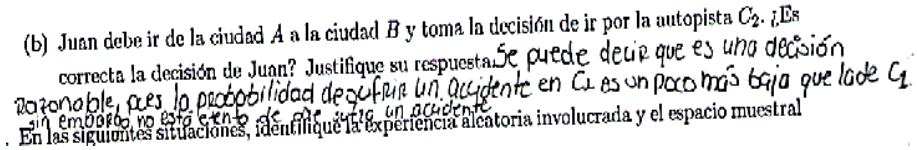
Tabla 6. Respuestas a la pregunta 4b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Las respuestas incorrectas se clasifican en la forma siguiente:

- Determinismo. Los estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9 consideran que la decisión de Juan es la correcta pues la probabilidad lo indica.
- No responde. El estudiante 3 no responde a la pregunta.

El estudiante 8 (Figura 8) da una respuesta correcta al problema Dado que las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares, en la vida real pueden pesar otros factores para tomar la decisión como: experiencia del conductor, si el trayecto es más corto que otro. Si bien, los factores inherentes a la propia carretera se supone que se consideraron para valorar la probabilidad de accidente en la misma, hay conceptos intuitivos de la probabilidad propios del contexto que no pueden ser cuantificables.


(b) Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2. ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta. Se puede decir que es una decisión razonable, pues la probabilidad de sufrir un accidente en C_2 es un poco más baja que la de C_1. sin embargo, no está cierto de que sufra un accidente

En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral

Figura 8. Respuesta del estudiante 8

El conocimiento informal que tenga los involucrados en la situación, junto con el riesgo que se esté dispuesto a asumir, nutre la toma de decisión. Esto hace que para tomar decisiones, además del cálculo de probabilidades, se debe tomar el contexto de los datos. ¿Sera que el contexto, del cual se toman los datos de un problema, y el conocimiento informal de los involucrados debe ser considerado como parte de la enseñanza de la probabilidad? Esto haría introducir en la enseñanza de la probabilidad problemas de tipo “análisis de casos” donde la probabilidad se confronte con un contexto en aras de tomar una decisión. Esto no es ajeno al trabajo que se realiza al realizar una investigación utilizando la estocástica, donde muchas veces el contexto le da sentido o refuta algún análisis realizado. Sin lugar a duda las investigaciones y trabajos que se realizan en torno a la enseñanza basada en proyectos (Batanero y Díaz, 2004) y el razonamiento inferencial intuitivo (García y Sánchez, 2014) favorecen una enseñanza de la probabilidad donde el contexto suele tener un papel importante.

3.5. Quinto problema: experiencias aleatorias

Situación 5. En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral (no resuelva los problemas):

a. Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA?
b. Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10.

¿Cuál es la probabilidad de que queden más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par?

c. En la POPS se tienen 10 sabores de helados distintos. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoja su helado favorito?

Recordemos que una experiencia aleatoria, es una experiencia donde interviene el azar. Es decir, una experiencia que al realizar genera un resultado que varían dentro de un conjunto de posibles resultados y no se puede predecir. El espacio muestral es el conjunto de posibles resultados de una experiencia aleatoria. En este problema, las experiencias aleatorias para cada situación son, respectivamente:

a. Lanzar una moneda. Espacio muestral: {corona, escudo}

b. Sentar al azar siete personas en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. Espacio muestral: conjunto de maneras de sentar a las personas

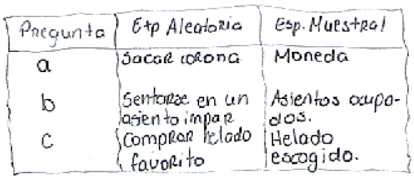
c. Se puede decir que no cuenta con experiencia aleatoria. Es un problema abierto. Otra opción, es decir que la experiencia aleatoria es: elegir un helado al azar de la POPS, donde el helado favorito tiene una mayor probabilidad de ser elegido. Este caso, el espacio muestral es el conjunto de sabores de helados que vende esa sucursal de la POPS.

Los resultados de las respuestas de los nueve estudiantes se resumen en la siguiente tabla, donde la mayoría de las respuestas correctas se dieron en la situación 5a y fueron idénticas a la dada anteriormente. Los estudiantes 1 y 5 identificaron correctamente el espacio muestral para esta situación, pero no la experiencia aleatoria. El estudiante 5 no indicó la experiencia aleatoria y el estudiante 1 indicó “exp. Aleatoria: Corona”.:

Tabla 7. Respuestas a la pregunta 5

Ítems	Experiencia aleatoria		Espacio Muestral	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
5a	3	6	5	4
5b	0	9	0	9
5c	2	7	4	5

Para la 5c, se consideró correcto indicar como experiencia: elegir un helado y como espacio muestral los diez sabores de helado. Los estudiantes 1, 5, 7 y 9 indicaron correctamente el espacio muestral pero los estudiantes 1 y 7 indicaron que la experiencia aleatoria es que Ana elija su helado favorito. Una respuesta incorrecta, es la del estudiante 8 (Figura 9). Por ejemplo considera erróneamente la experiencia aleatoria como un resultado de la misma. Además, se observa que confunde el espacio muestral con el instrumento utilizado en la experiencia aleatoria:



Pregunta	Exp Aleatoria	Esp. Muestral
a	Sacar corona	Moneda
b	Sentarse en un asiento impar	Asientos ocupados.
c	Comprar helado favorito	Helado escogido.

Figura 9. Respuesta del estudiante 8

Con esta situación se evidencia el poco manejo que tiene los estudiantes de los conceptos de experiencia aleatoria y de espacio muestral. Estos conceptos operacionalizan otro complejo pero indispensable para entender las probabilidades: el concepto de aleatoriedad. Usualmente estos conceptos se estudian al inicio de un curso de probabilidad, pero conforme avanza el curso se suelen olvidar, no se les da la importancia que merecen y pocas veces se evalúan.

4. Conclusiones

De manera general, las respuestas dadas por los docentes en formación indican que pocos estudiantes de la muestra saben hacer explícito el espacio muestral o la experiencia aleatoria, otros descuidan las hipótesis a asumir al utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias.

Sobre el planteo de la resolución de un problema, al resolver los problemas primero y segundo, se evidenció como algunos aplican la regla de Laplace sin verificar que la situación involucre una experiencia aleatoria o sin suponer una experiencia aleatoria o recrearla, como parte de la resolución del problema. La aleatoriedad es indispensable para hablar de probabilidad. En muchas aplicaciones de la probabilidad, sobre todo en problemas de las ciencias sociales, se parte de supuestos, entre ellos, la existencia de la aleatoriedad.

Sobre la parte final, al tomar una decisión por medio de la probabilidad, las respuestas a los problemas tercero y cuarto evidencia como una gran mayoría de ellas reflejan una respuesta única a situaciones azarosas y consideran como incorrectas otras decisiones por ser menos probables. Quizás el ver la estocástica como parte de la matemática, como se mencionó en la introducción, influya en este tipo de respuestas de los estudiantes.

Además, se evidencia un poco apreciación del azar en las situaciones planteadas, y su relación, a nivel intuitivo, con los siguientes conceptos ligados a la probabilidad:

- Concepto de riesgo. En un problema de toma de decisiones, la decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que se está dispuesto a tomar. El concepto de riesgo es indispensable en aplicaciones de probabilidad a las finanzas, por ejemplo.
- Conceptos de aceptación y rechazo. Una decisión no es correcta o incorrecta, más bien se acepta o se rechaza de acuerdo a lo que me indique la probabilidad, pues no sabes con certeza cuál será la mejor decisión. Estos conceptos son indispensables en estadística inferencial y sería importante que desde el estudio de las probabilidades se introduzca su uso.

En el problema quinto se evidencia el poco manejo de los conceptos de experiencia aleatoria y espacio muestral.

Por otro lado, producto del análisis realizado a los problemas presentados en el cuestionario, se advierte la posibilidad de valorar otras formas de enseñar en probabilidad, pues por lo general las tareas que se plantean en la enseñanza y aprendizaje del tema y su consecuente evaluación se han centrado en el cálculo de probabilidades. Estas formas son:

- Evaluación por medio de proyectos. Por medio de proyectos de investigación se evidencie que el estudiante asume supuestos, considera la variación en las respuestas, tome en cuenta el contexto de los datos y rechace o acepte sus hipótesis de investigación.
- Evaluación por medio de “análisis de casos”. Se le planteen casos al estudiante,

reales (tomados de investigaciones) o ficticios, donde el estudiante debe confrontar la probabilidad con un contexto en aras de tomar una decisión, e incluso analice las posibles decisiones y sus repercusiones.

Estas formas de enseñanza y aprendizaje requieren más investigación para concretarlas, aunque es importante indicar que el uso de proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estocástica no es algo nuevo (Batanero y Díaz, 2004, 2011).

En general, como producto de las respuestas anteriores, se debe realizar una investigación más amplia para determinar en qué medida la enseñanza de la probabilidad se reduce a un algoritmo: es decir, no interesa el planteamiento inicial del problema (supuesto de aleatoriedad, experiencia aleatoria y espacio muestral), ni la variación en la respuesta (consideración de riesgo, aceptación o rechazo de afirmaciones), solo interesa aplicar posiblemente la regla de Laplace. De ser así, se pierde la posibilidad del desarrollo del pensamiento probabilístico y la enseñanza de la probabilidad se vuelve determinista.

Referencias

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix, 15*(2), 13-18.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno, 5*, 15-28.

Elizarrarás, B. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docentes para la educación básica: viabilidad, trascendencia y pertinencia. Trabajo presentado en el *Segundo Congreso Internacional: Espacio Común de Formación Docente*. México. Disponible en: http://www.uaimlosmochis.org/ECFD/index.php/2014/2/paper/viewFile/18/12.

García, V. N y Sánchez, E. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 345-354). Salamanca: SEIEM.

Gonzales, A. O. (2013). El uso de las situaciones aleatorias en la enseñanza de la probabilidad. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, (2), 251-256

Sanabria, G. (2012). *Comprendiendo las probabilidades*. Costa Rica: Editorial Tecnológica.