

PROV. T 16-59

T
16
104

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

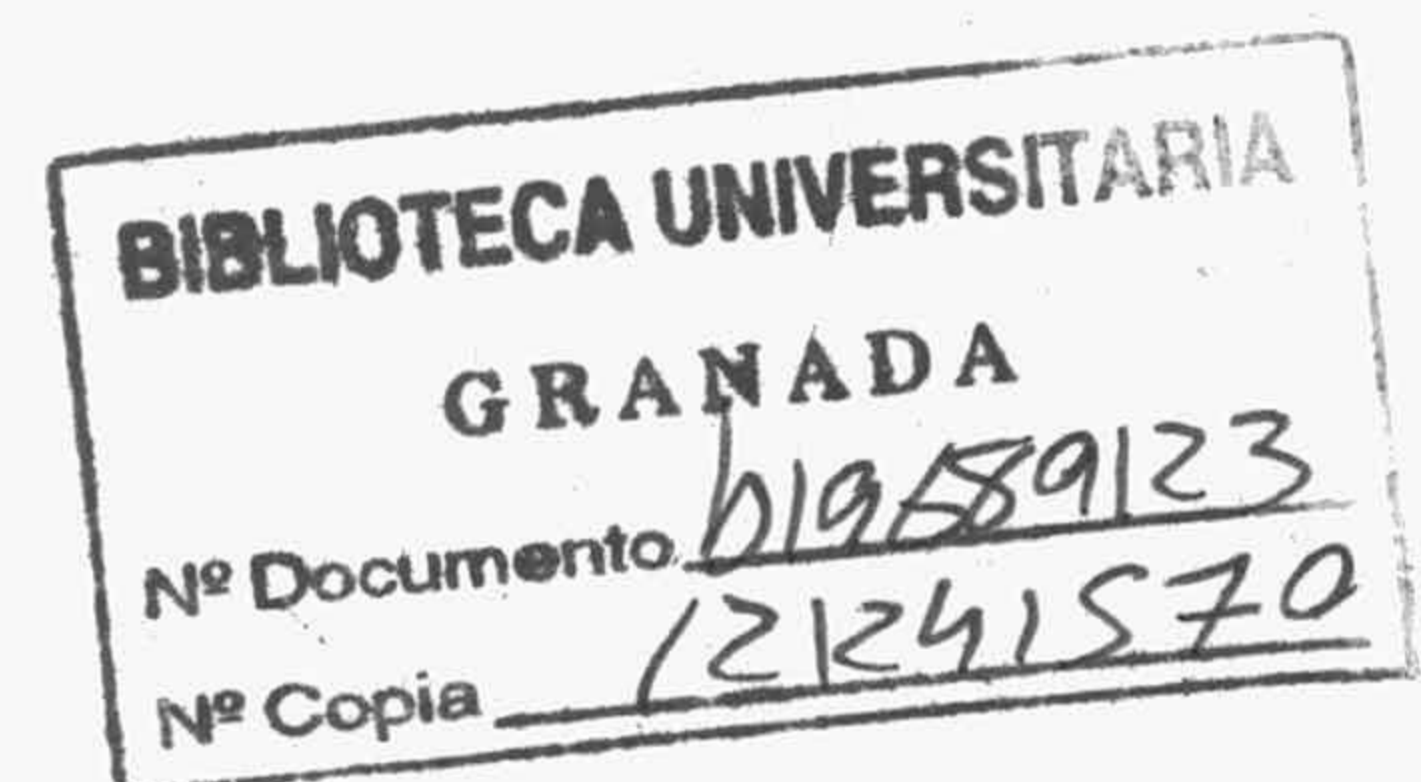
Departamento de Física Aplicada

NUEVAS APORTACIONES A LA INTERACCION DE
ONDAS ELECTROMAGNETICAS TRANSITORIAS
CON ESTRUCTURAS CONDUCTORAS

ALFONSO SALINAS EXTREMERA

TESIS DOCTORAL

GRANADA, 1991



NUEVAS APORTACIONES A LA INTERACCION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS
TRANSITORIAS CON ESTRUCTURAS CONDUCTORAS.

D. Rafael Gómez Martín, Doctor en Ciencias Físicas y Catedrático del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada; y Dña. Amelia Rubio Bretones, Doctora en Ciencias Físicas y Profesora Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

MANIFIESTAN: Que la presente Memoria, presentada por Alfonso Salinas Extremera para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, ha sido realizada bajo nuestra dirección en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Con esta fecha autorizamos la presentación de la misma.

Granada, a 31 de Abril de 1991.



Fdo. Rafael Gómez Martín.



Fdo. Amelia Rubio Bretones.

Memoria presentada por Alfonso Salinas Extremera para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.



Fdo. Alfonso Salinas Extremera.

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos que,
directa o indirectamente, me han ayudado a llevar a cabo este
trabajo.

A mis Padres, por todo su sacrificio.

A Ana, por todo su amor.

A Safwan, por todo lo que nos dejo.

Prefacio	1
Capítulo 1. ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS TEORICOS	5
1.1 Introducción	6
1.2 Posibles dominios de análisis	6
1.3 Posibles enfoques del estudio de OEMT en DT	9
1.4 Posibles planteamientos numéricos del estudio en DT de la dispersión de OEMT	10
1.5 Ecuaciones integrales EFIE y MFIE	11
1.5.1 Formulación de la ecuación integral para el campo eléctrico EFIE	12
1.5.2 Formulación de la ecuación integral para el campo magnético MFIE	15
1.5.3 Consideraciones sobre las ecuaciones integrales EFIE y MFIE	15
1.6 Aproximación de hilo delgado: Núcleo reducido y extendido	17
1.6.1 Aproximación de núcleo reducido	19
1.6.2 Aproximación de núcleo extendido	21
1.7 Una nueva perspectiva de la aproximación de hilo delgado	22
1.7.1 Ecuación integral para el campo eléctrico a partir de la condición de contorno extendida	23
Capítulo 2. EL HILO RECTO	33
2.1 Introducción	34
2.2 Consideraciones numéricas	35
2.3 Método numérico	37
2.3.1 Discretización espacio-temporal	37
2.3.2 Funciones base interpolación lagrangiana	40
2.4 Interpolación de la densidad lineal de carga	43
2.5 Expresión numérica de la ecuación EFIE	45
2.6 Discretización y tratamiento de los extremos	47
2.7 Desarrollo explícito de los términos F, C, T y S	49
2.8 Algoritmo de inversión matricial	54
2.9 Resultados	56

2.10 Listado del algoritmo de cálculo de las integrales y de inversión matricial	68
Capítulo 3. UNIONES DE HILOS	71
3.1 Introducción	72
3.2 Planteamiento general	74
3.3 Unión de dos hilos coaxiales de diferentes radios	76
3.3.1 Contribución de la unión	76
3.3.2 Ecuación de continuidad para la unión	77
3.4 Uniones de hilos con orientación y radios arbitrarios	79
3.5 Programa Fortran desarrollado	80
3.6 Resultados	81
3.6.1 Uniones de hilos de diferente radio	81
3.6.2 Unión de dos hilos en ángulo	85
3.6.3 Unión de cuatro hilos en forma de cruz	90
3.6.4 Malla de 12 hilos	92
Capítulo 4. ECUCION MFIE	95
4.1 Introducción	96
4.2 Derivación de la ecuación integral	97
4.2.1 Principio de equivalencia	97
4.2.2 Valor principal de la integral de superficie	99
4.2.3 Ecuación MFIE	103
4.3 Resolución numérica de la ecuación MFIE	104
4.3.1 Discretización de la ecuación	104
4.3.2 Funciones base	105
4.3.3. La ecuación MFIE numérica	106
4.4 Comportamiento numérico de la ecuación MFIE	107
4.4.1 Influencia del modelado	108
4.4.2 Elección del intervalo temporal	113
4.4.3 Orden de interpolación	116
4.5 Resultados	124
4.5.1 RCS de la esfera y del cilindro capeado	124
4.5.2 Blancos ocultos de radar	129

Capítulo 5. ANALISIS DE INESTABILIDADES NUMERICAS	131
5.1 Introducción	132
5.2 Acumulación del error en el proceso de solución escalonado en el tiempo	132
5.3 Filtro de altas frecuencias	135
5.4 Método de relajación	135
5.5 Método de subdivisión	136
5.6 Resultados	137
5.6.1 Filtro de altas frecuencias	138
5.6.2 Método de relajación	141
5.6.3 Técnica de subdivisión	144
 Conclusiones	 149
 Bibliografía	 155

PREFACIO

En la actualidad los métodos numéricos constituyen una herramienta fundamental para abordar el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras. La disponibilidad de ordenadores potentes y fácilmente accesibles ha abierto un enorme campo de posibilidades en el electromagnetismo aplicado y ha hecho factible resolver una variedad de problemas que eran considerados inaccesibles hace sólo unos pocos años, y al mismo tiempo, plantea problemas nuevos derivados del propio método de solución.

Esta situación ha dado lugar al desarrollo del denominado Electromagnetismo Computacional que intrínseca y rutinariamente hace uso del análisis numérico; y que se añade como una tercera herramienta fundamental a las dos clásicas basadas en la observación experimental y análisis matemático.

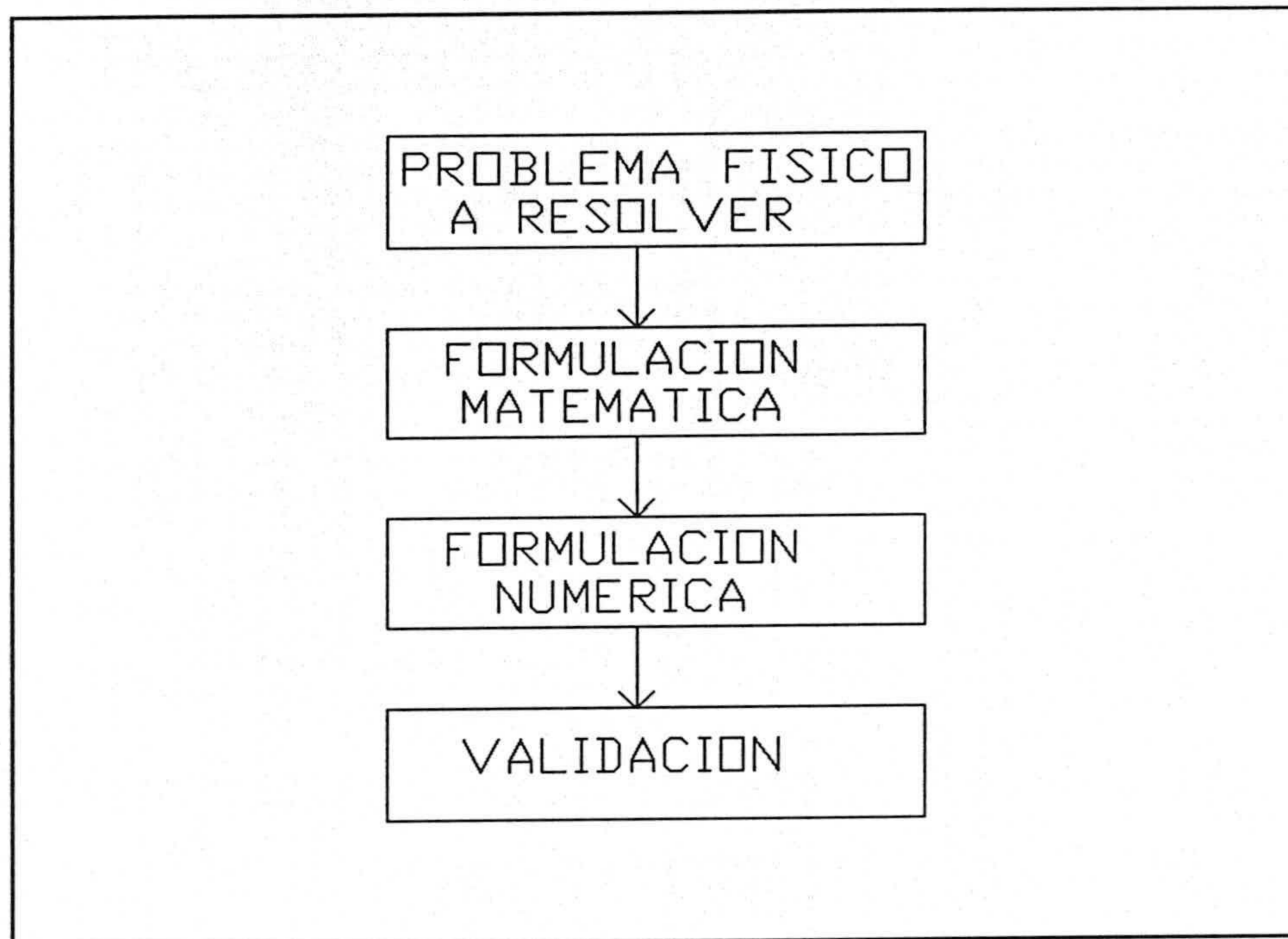
Dentro de este contexto, el objetivo general de esta Tesis es el desarrollo de los fundamentos teóricos y numéricos necesarios para la elaboración de dos programas generales basados en el método de los momentos en el dominio del tiempo con la finalidad de:

i) Desarrollar la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE), para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas transitorias con estructuras conductoras modeladas por mallas de hilo. De forma especial se han estudiado los finales de hilos, uniones de hilos de distinto radio y uniones de varios hilos en general.

ii) Estudiar, utilizando la ecuación integral para el campo magnético (MFIE), la interacción de ondas electromagnéticas transitorias con estructuras conductoras cerradas modeladas por parches. También se estudian diversos métodos para evitar o reducir la influencia en la solución de inestabilidades numéricas que aparecen al resolver la ecuación integral MFIE.

El diagrama siguiente indica de una forma simplificada los pasos a seguir para la solución numérica de prácticamente cualquier problema básico. La descripción de los diferentes bloques determina el contenido de los diferentes apartados o

capítulos de esta memoria.



Concretamente, en el primer capítulo comentaremos el interés del problema electromagnético a resolver, las posibles alternativas de su formulación matemática y la opción concreta que se ha elegido.

En el segundo capítulo se desarrolla numéricamente la ecuación EFIE para el hilo recto aislado, pues, ésta geometría es la base para el modelado de cualquier estructura compleja.

En el tercer capítulo se analizan las uniones de hilos rectos de diferentes radios, y uniones arbitrarias de hilos rectos.

Los capítulos cuarto y quinto se dedican al análisis numérico de la ecuación MFIE y de su solución.

CAPITULO 1. ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS TEORICOS

1.1 Introducción.

La disponibilidad actual de medios de cálculo muy potentes y el desarrollo de la tecnología necesaria para generar pulsos cortos de gran amplitud (hasta 10^3 V) con tiempos de subida muy pequeños (anchos del pulso de orden de 1 ns) y de la consiguiente instrumentación de medida compatible con este tipo de señales tales como osciloscopios de muestreo y digitalizadores de señales transitorias han hecho posible por un lado, que pueda abordarse la solución numérica de las complejas ecuaciones que resultan al plantear la interacción de señales electromagnéticas transitorias (OEMT)¹ con estructuras (blancos o antenas) [1]-[12] y por otro, la aplicación práctica de los resultados a áreas tan importantes como son el estudio, clasificación e identificación de blancos de radar [13], prevención de los efectos de pulsos nucleares electromagnéticos (NEMP) [14],[15] y rayos (LEMP) [16], y a un mejor entendimiento de la radiación e interferencias en sistemas digitales de alta velocidad [17].

1.2 Posibles dominios de análisis.

Desde el punto de vista numérico y debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell el estudio de OEMT se plantea usualmente en el dominio de la frecuencia (DF), esto es, haciendo uso de la simplificación matemática de imponer que todas las magnitudes físicas varíen armónicamente con el tiempo lo que en notación compleja se expresa mediante el factor exponencial $e^{j\omega t}$. La enorme ventaja de este planteamiento, justificado porque cualquier ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo admite autofunciones de la forma $e^{j\omega t}$, es que de esta forma sólo tenemos que resolver un conjunto de ecuaciones en las variables espaciales en DF en contraposición a tener que resolver en DT ecuaciones en variables espaciales y temporales.

¹ Denominamos OEMT a señales electromagnéticas que tienen un contenido espectral que se extiende desde frecuencias cero o muy pequeñas hasta la región de las microondas.

El análisis en DF puede extenderse a fuentes con variación temporal arbitraria mediante el cálculo de soluciones armónicas sobre el rango de frecuencias adecuado y posteriormente haciendo uso de la transformada de Fourier. Una alternativa a este enfoque es plantear el problema directamente en DT y resolver para las variables espaciales mediante un proceso de cálculo escalonado en el tiempo de forma que se verifique el principio de causalidad.

Naturalmente, y a la inversa, pueden obtenerse resultados en DF a partir de DT mediante la transformada de Fourier [17]-[20]. De hecho puede resultar en algunos casos más conveniente y económico desde el punto de vista computacional conseguir resultados en DF vía DT.

La conveniencia de utilizar un tipo de análisis u otro no debe fundamentarse exclusivamente en la comparación del coste computacional de ambos métodos ya que existen problemas que por su propia naturaleza pueden ser muy ventajosamente, e incluso exclusivamente, tratados planteando su solución en DT. A continuación citamos algunos ejemplos.

a) Mayor eficiencia en la solución de determinados problemas.

El análisis en el dominio del tiempo es intrínsecamente capaz de suministrar información, vía FFT, en una amplia zona del espectro correspondiente a armónicos de la excitación con suficiente energía.

Para obtener la misma información en DF es necesario resolver para muestras consecutivas del espectro de frecuencias. Por tanto es necesario elegir a priori aquellas frecuencias donde se piensa que la estructura tendrá un comportamiento interesante. Si se ecoge incorrectamente debe proseguirse el análisis hasta conseguir la información necesaria y poder estar razonablemente convencido de que han sido obtenidos los aspectos principales del problema. Este es especialmente el caso cuando se trata de estudiar estructuras que tienen resonancias muy estrechas o un factor de calidad Q muy alto [21]-[25]

b) Problemas no lineales.

El comportamiento de antenas y dispersores o blancos puede ser modificado significativamente mediante cargas no lineales. Tales no linealidades pueden ser debidas por ejemplo a una impedancia dependiente de la intensidad de corriente o a una variación temporal de la impedancia. Aunque tales problemas podrían ser analizados en el dominio de la frecuencia [26] su estudio resulta más sencillo y natural en DT [18], [21]-[29].

c) Obtención de las frecuencias complejas de resonancia del objeto.

Fundamentalmente, todos los métodos de identificación de blancos de radar están basados en la adaptación de los parámetros obtenidos de la señal dispersada por el blanco con los correspondiente a modelos de los posibles blancos esperados (librería de firmas). El modelo almacenado cuyo conjunto de parámetros sea más próximo en un sentido preestablecido al obtenido de la señal reflejada por el blanco real se considera que es el blanco detectado. Esta operación de correlación es muy problemática en la práctica a menos que los parámetros sean independiente del aspecto que el blanco presente a la señal-radar. En este sentido resulta fundamental el resultado demostrado por Baum de que las frecuencias complejas de resonancia o polos del blanco presentan esta independencia (Singularity Expansion Method) [30]-[36].

d) Separación temporal (Time gating).

Una característica que resulta muy atractiva en el tratamiento en el dominio del tiempo es la separación temporal con que aparece la contribución de los centros de radiación y eco de las diferentes partes de un objeto. Esta separación temporal ocurre debido a la velocidad finita de la propagación de la luz (principio de causalidad) y puede ser explotada tanto experimental como computacionalmente para incrementar la calidad de los datos y la eficiencia de la solución. En la experimentación en el dominio del tiempo se pueden obtener, haciendo uso de la separación temporal, medidas no contaminadas

dentro del 'tiempo limpio' previo a la llegada de reflexiones al sistema de medida. En el dominio de la frecuencia esto se traduce en desplazamientos de fase que dan lugar a efectos de interferencias [11], [12], [17], [37].

e) Mayor claridad en la interpretación de algunos fenómenos electromagnéticos.

El análisis en DT está mucho más próximo a la realidad física que en DF y por tanto ofrece una perspectiva diferente que permite profundizar y obtener un mayor entendimiento de muchos fenómenos electromagnéticos [1]-[4], [27], [38]-[43].

1.3 Posibles enfoques del estudio de OEMT en DT.[18]-[19].

Desde la perspectiva del análisis en DT de OEMT es posible elegir entre diferentes formas de abordar el problema. Estas incluyen:

a) Técnicas de aproximación.

Muchos de los primeros trabajos de análisis en DT y que motivaron el estudio posterior mediante métodos más potentes están basados en la aproximación de la física óptica [44].

b) Análisis teórico.

Algunos problemas básicos pueden ser resueltos de forma analítica. Son ejemplos el análisis de los campos asociados a sistemas radiantes elementales o antenas de hilo recto [1], [45]-[53].

c) Métodos numéricos.

Es bien conocido el tremendo impacto que el desarrollo de los modernos ordenadores ha tenido sobre muchas áreas de la ciencia y la tecnología. Gracias a ellos ha sido posible resolver problemas científicos y técnicos que de otra forma serían o bien inabordables o bien áreas exclusivas de métodos

experimentales. Dentro de estas áreas se encuentran muchos problemas electromagnéticos y concretamente la radiación y dispersión de OEMT. Efectivamente, si queremos conocer el resultado de la interacción de OEMT con estructuras más realistas que las elementales mencionadas anteriormente, los métodos analíticos resultan inviables y se ha de recurrir necesariamente al desarrollo de métodos numéricos que permitan resolver las ecuaciones del modelo matemático que describe el problema físico que tenemos planteado.

d) Métodos experimentales.

Junto al desarrollo de los ordenadores y de los métodos numéricos ha tenido lugar el de la tecnología necesaria para generar señales electromagnéticas transitorias y el de la instrumentación compatible necesaria para tomar medidas directas de la respuesta a OEMT de diferentes antenas y blancos [1]-[12].

1.4 Posibles planteamientos numéricos del estudio en DT de la dispersión de OEMT.

Todos los fenómenos electromagnéticos derivan de las ecuaciones de Maxwell por lo que éstas suponen el punto de partida lógico a la hora del planteamiento de un determinado problema. Desde este punto de vista hay que recordar que las ecuaciones de Maxwell pueden postularse en dos formas básicas, la diferencial original y la integral en términos de fuentes. A la hora de elegir una u otra formulación juega un papel importante la forma, composición y tamaño eléctrico del objeto.

La diferencia fundamental entre ambos es el propagador de campo empleado. La forma diferencial usa las ecuaciones rotacionales para propagar los campos, lo que en un sentido computacional significa que el campo en un punto es un 'promedio pesado' de los campos vecinos. Por otra parte la forma integral usa la función de Green como propagador, en cuyo caso el campo en un punto viene determinado por una integración sobre las fuentes que lo causan.

Debido al carácter local del operador diferencial los métodos basados en la formulación diferencial permiten un tratamiento del problema más general en términos de las propiedades del medio comparado con las posibilidades que presenta la formulación integral en la que el operador tiene carácter más global. Como contrapartida estos métodos son computacionalmente muy costosos [54] y además no llevan implícita la condición de radiación por lo que para problemas abiertos se hace necesario aproximar dicha condición para que sea posible truncar la red en la que se resuelven las ecuaciones diferenciales.

La formulación integral lleva implícita la condición de radiación y se caracteriza por el uso de la función de Green del problema. Presenta la ventaja de que cuando se conoce la función de Green apropiada al problema, éste puede reducirse en una dimensión (una excepción es un cuerpo penetrable inhomogeneo donde no es posible la reducción) e incluso permite transformar un problema tridimensional en monodimensional mediante la modelación por una malla de hilos de la superficie del objeto cuya interacción con una señal electromagnética queremos conocer. Esta aproximación es especialmente válida para cuerpos conductores. Consecuentemente la formulación integral y su solución mediante el método de los momentos (MM) se considera como la forma más efectiva para tratar problemas de interacción de OEM con estructuras que cumplan que su dimensión máxima L sea menor o igual que 3λ (zona de resonancia) y cuya función de Green pueda ser utilizada eficientemente como es el caso de superficies conductoras en el espacio libre. Para el caso de más altas frecuencias aunque el MM es aplicable en principio, su uso en la práctica es inviable incluso para los ordenadores más modernos debido a la gran cantidad de información que es necesario manejar para tener en cuenta la interacción mutua entre diferentes partes de la estructura.

1.5 Ecuaciones integrales EFIE y MFIE.

El problema general que nos planteamos en esta memoria es estudiar en DT la interacción de una OEMT con una estructura conductora arbitraria siendo el medio que rodea a dicha

estructura el espacio libre. El contenido espectral de la OEMT se extiende desde frecuencias cero o bajas hasta frecuencias máximas correspondientes a la región de resonancia del objeto, esto es, tales que $L/\lambda \approx 3$. Esta situación presenta gran interés práctico porque en ella se encuentran muchos problemas relacionados con el estudio de antenas y características de blancos de radar. De hecho es el rango de frecuencias correspondientes a longitudes de onda comenzando con la mitad del tamaño del objeto e incrementando hasta varias veces su máxima dimensión, el que transporta la información esencial con respecto a la dimensión total, forma aproximada y composición material de objeto [55] por lo que resulta el más adecuado para la determinación de las características físicas de la estructura. La razón es que a estas frecuencias tiene lugar la máxima interacción entre las diferentes partes del objeto. La región de resonancia también resulta fundamental para el estudio de problemas de compatibilidad electromagnética, como es el caso de la interacción de pulsos electromagnéticos nucleares y rayos con estructuras de interés práctico como por ejemplo aviones [14]-[16],[56].

De acuerdo con lo expuesto en el apartado 1.4, desde el punto de vista numérico la forma más adecuada de abordar el problema que nos planteamos es el de la formulación integral y su solución mediante el MM.

Dentro de este enfoque es posible elegir diversas alternativas que corresponden a la posibilidad de plantear las condiciones de contorno en términos del campo magnético (ecuación integral para el campo magnético MFIE) o el eléctrico (ecuación integral para el campo eléctrico EFIE).

1.5.1 Formulación de la Ecuación Integral para el Campo Eléctrico EFIE.

El problema planteado es el cálculo de la densidad de corriente inducida en un cuerpo conductor arbitrario cuando sobre él incide una OEMT y consiguientemente el campo electromagnético que lo rodea, fig. 1.1.

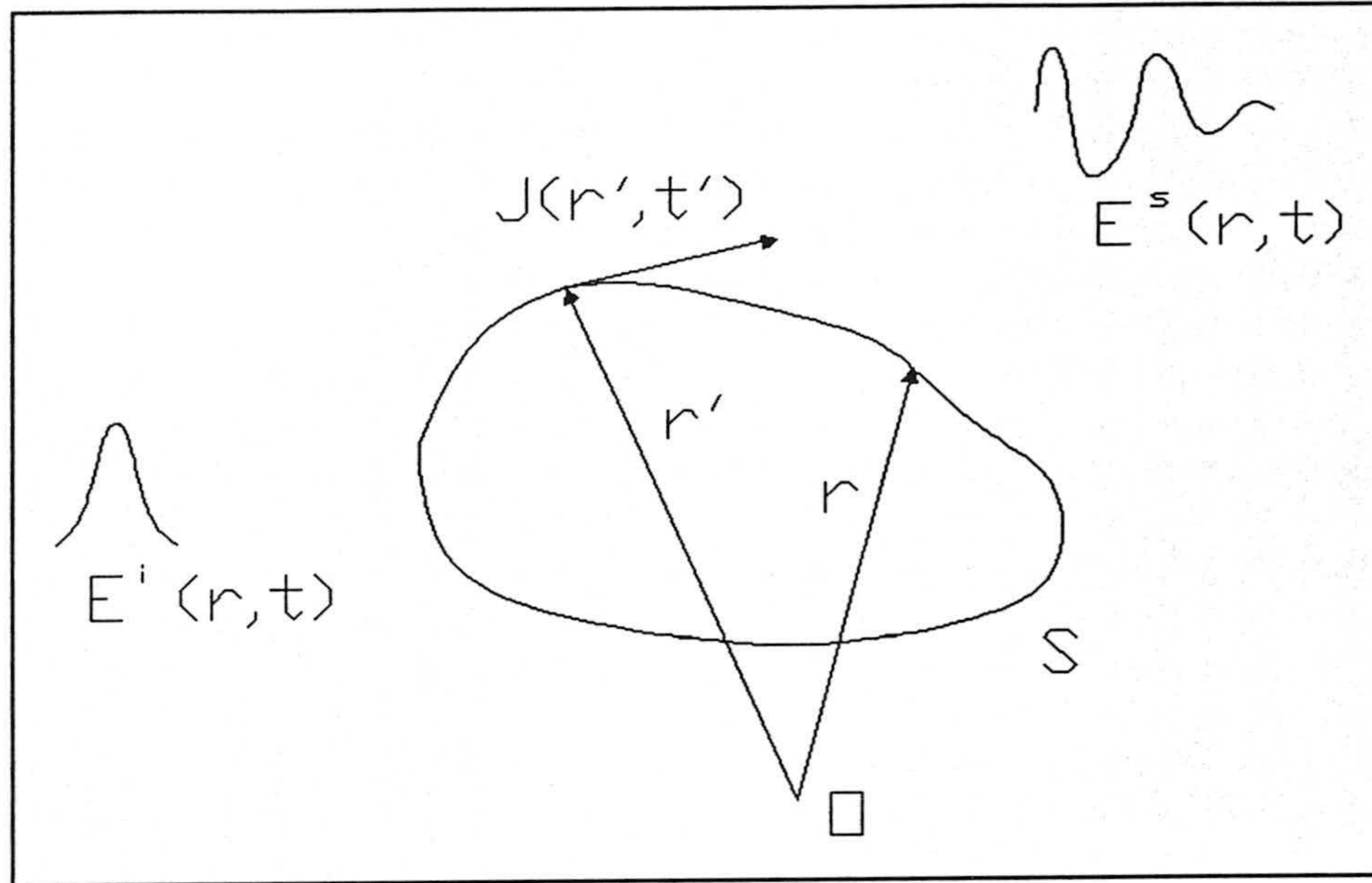


Fig. 1.1. Problema general de dispersión electromagnética.

La ecuación integral para el campo eléctrico se obtiene de imponer la condición de que la componente tangencial a S' del campo eléctrico total \vec{E} , sea nula, esto es:

$$\hat{n} \wedge [\vec{E}(\vec{r}, t)] - \hat{n} \wedge [\vec{E}^s(\vec{r}, t) + \vec{E}^i(\vec{r}, t)] = 0, \quad \vec{r} \in S' \quad (1.1)$$

donde \vec{E}^s es el campo eléctrico dispersado y cuya fuente es la densidad superficial de corriente eléctrica inducida en S' ; \vec{E}^i es el campo incidente y \vec{E} es el campo total, que en general,

para cualquier punto del espacio vendrá dado por:

$$\alpha \vec{E} - \vec{E}^s + \vec{E}^i \quad (1.2)$$

siendo $\alpha \equiv \{0, 1/2, 1\}$ según \bar{r} esté en el interior, superficie ó exterior del dispersor.

Expresando \vec{E}^s en términos de los potenciales integrales retardados, eléctrico V y magnético \vec{A} , se obtiene la ecuación integral:

$$\hat{n} \wedge \left[\epsilon_0 \vec{E}^i - \nabla V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.3)$$

donde \vec{A} viene dado por:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{s'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{R} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{s'} \frac{[\vec{J}]}{R} dS' \quad (1.4)$$

y V se expresa como:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{s'} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{R} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{s'} \frac{[\rho]}{R} dS' \quad (1.5)$$

En estas ecuaciones las magnitudes entre corchetes $[\rho]$ y $[\vec{J}]$ representan las densidades superficiales de carga y corriente retardados respectivamente. Estas magnitudes deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t' = t - R/c$. En general usaremos el convenio de escribir con prima las coordenadas espacio-temporales de los puntos fuentes (fig. 1.1).

La ecuación (1.3) denominada, por razones obvias, de los potenciales, puede expresarse exclusivamente en función del potencial vector haciendo uso de la ligadura de Lorentz [25]

$$\nabla \cdot \vec{A} - \frac{\partial V}{\partial t} = - \int_{-\infty}^t \nabla \cdot \vec{A} dt' \quad (1.6)$$

con lo que resulta la denominada ecuación integral para el potencial vector:

$$\hat{n} \wedge \left[\epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (1.7)$$

ó

$$\hat{n} \wedge \left[\epsilon_0 \vec{E}^i(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \int_{-\infty}^t \vec{A}(\vec{r}, t') dt' - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = 0 \quad (1.8)$$

1.5.2 Formulación de la ecuación integral para el campo magnético MFIE.

El problema a considerar es el mismo que en el apartado anterior (fig. 1.1), pero restringido a superficies cerradas. La ecuación MFIE se deriva haciendo que la componente tangencial a S' del campo magnético total sea igual a cero justo dentro de S :

$$-\hat{n} \wedge \vec{H}^s(\vec{r}, t) - \hat{n} \wedge \vec{H}^i(\vec{r}, t) \quad (\text{justo en el interior de } S') \quad (1.9)$$

Expresado \vec{H}^s en términos del potencial vector magnético y tomando el límite cuando el punto campo se aproxima a la superficie desde el exterior de S , obtenemos la ecuación integral para el campo magnético MFIE [57], [58]:

$$\hat{n} \wedge \vec{H}^i = -\hat{n} \wedge (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (1.10)$$

1.5.3 Consideraciones sobre las ecuaciones integrales EFIE y MFIE.

Desde el punto de vista teórico y de acuerdo con el teorema de unicidad puede utilizarse la ecuación EFIE o MFIE

para hallar la corriente inducida en la superficie del cuerpo. Sin embargo desde el punto de vista numérico la elección de la ecuación EFIE (ecuación de Fredholm de primera clase) o de la MFIE (ecuación de Fredholm de segunda clase) está condicionada por el tipo de problema que nos planteemos. En principio la MFIE puede parecer preferible porque la función incógnita aparece a la vez fuera y dentro de la integral, y su núcleo no contiene derivadas espaciales y presenta singularidades del tipo $1/R^n$ de menor orden. Sin embargo, en el caso de hilos y superficies muy delgadas, con aberturas o con radios de curvaturas pequeños la MFIE no es aplicable. Esto es debido, en el caso de superficies delgadas o con aberturas al hecho de que la discontinuidad del campo magnético está asociada a la diferencia de valores de las densidades de corriente eléctrica inducida en ambas caras de la superficie y en el de hilos delgados a que en el núcleo de la integral aparecen senos de ángulos muy pequeños. Para superficies de curvatura muy pequeña la causa se debe a la dificultad analítica de evaluar la integral para puntos con $R \rightarrow 0$ [58].

La ecuación para el campo eléctrico es sin embargo aplicable a cualquier tipo de estructura. Esto es debido por un lado a que el campo eléctrico es continuo a través de una densidad de corriente eléctrica y por otro a que no aparecen los problemas de la MFIE para superficies con pequeña curvatura o para hilos de pequeños radios.

Por otro lado, una técnica muy versátil y fructífera para estudiar la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras complejas consiste en modelar la estructura mediante una red apropiada de hilos delgados. Naturalmente de acuerdo con lo comentado más arriba este tipo de problema sólo puede abordarse utilizando la EFIE.

En contrapartida el núcleo de la ecuación integral para el campo eléctrico presenta un mayor grado de singularidad y complejidad, y lleva implícitamente contenido o bien la carga o la ecuación de continuidad. Como consecuencia para resolver la ecuación EFIE mediante el método de los momentos (MM) hace falta utilizar funciones base más suaves (orden de polinomio mayor) con objeto de eliminar discontinuidades abruptas en la

densidad de corriente lo que se traduciría en distribuciones de carga tipo δ de Dirac y por tanto en singularidades de los campos.

1.6 Aproximación de hilo delgado: Nucleo reducido y extendido.

Como se comentó en el apartado anterior una técnica muy utilizada en la práctica, tanto para superficies reales como para ser analizadas numéricamente, es la de sustituirlas por una red o malla apropiada de hilos rectos eléctricamente delgados (un hilo curvo puede aproximarse una una poligonal, [39], [59]-[61], interconectadas entre sí, fig. 1.2.

A la hora de desarrollar los algoritmos correspondientes y con objeto de obtener una solución numérica suficientemente precisa para la distribución de corriente, se hace necesarios prestar especial atención a las zonas donde existen interconexión de varios hilos, radios de curvatura pequeños en el eje un hilo o cambio abrupto del radio del hilo. Estas tres clases de discontinuidades constituyen lo que se denomina uniones. Otro problema íntimamente relacionado con los anteriores y que también requiere una atención especial son los extremos del hilo.

El elemento base de una estructura de malla es pues el hilo recto cuyos extremos pueden estar conectados a otros hilos o al espacio libre. Es por esta razón que el hilo recto puede considerarse, desde el punto de vista numérico, como un problema canónico.

Todos los algoritmos utilizados en el desarrollo de métodos numéricos basados en este tipo de modelación utilizan como aproximación básica la denominada de hilo delgado en la que realmente cabe distinguir dos niveles de aproximación denominadas de núcleo reducido (o normal) y extendido.

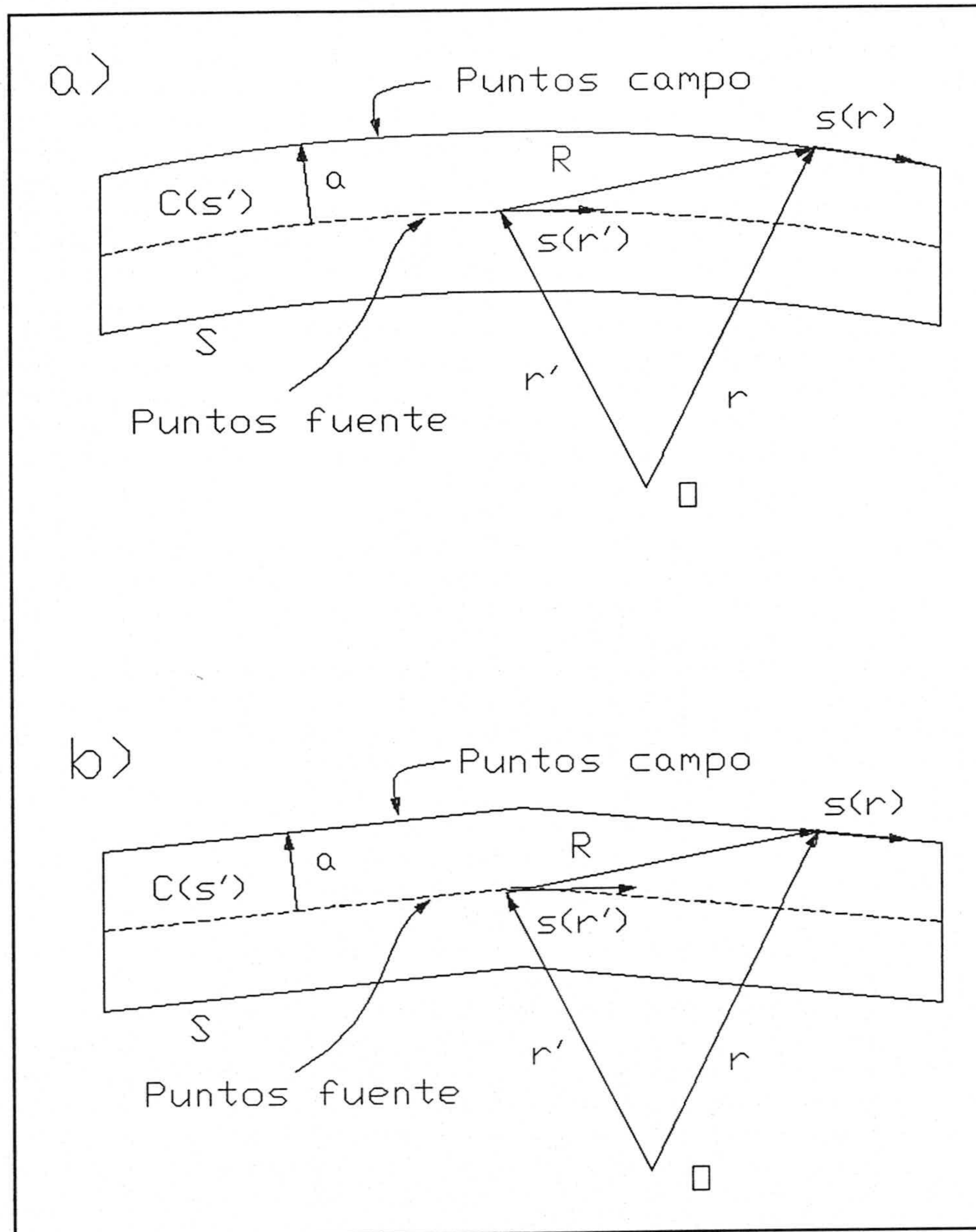


Fig. 1.2. Coordenadas para la estructura de hilo delgado.

a) Estructura real.

b) Modelación mediante una poligonal.

1.6.1 Aproximación de núcleo reducido.

La aproximación de núcleo normal supone, para un hilo aislado que

i) Las corrientes azimutales son despreciables.

ii) Se desprecia la dependencia azimutal de la corriente.

iii) El núcleo exacto de la ecuación se sustituye por un núcleo aproximado que reduce la integral de superficie a una integral de línea a lo largo del eje del hilo. Esto equivale a suponer las fuentes eléctricas inducidas sobre la superficie como localizadas en el eje de los hilos dando por tanto lugar a una representación filamentera de la corriente.

iv) La condición de contorno del campo eléctrico se aplica sobre la superficie del conductor.

v) La corriente al final del hilo se toma como cero, independientemente del diámetro del hilo.

Para considerar aceptable esta aproximación se requiere:

i) El diámetro del hilo debe ser menor que la menor longitud de onda. Generalmente se usa como cota para el diámetro 0.2λ .

ii) El cociente longitud entre extremos o uniones de la estructura y diámetro (L/D) debe ser mayor que 10 ó 20, puesto que en caso contrario pueden afectar significativamente a la distribución de corriente [62]-[64].

En resumen, en la aproximación de núcleo reducido para el hilo delgado se considera la corriente axialmente dirigida y centrada en el eje del hilo. Con ello se consigue (fig. 1.2):

i) Separar los puntos campos y fuentes por lo que en el núcleo de la integral desaparecen las singularidades.

ii) Evitar la evaluación de las integrales de superficie que aparecen en la ecuación (1.7). Esta ecuación para el hilo con

geometría indicada en la fig. 1.2, queda reducida a:

$$\hat{s} \cdot \epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(s, t) = \hat{s} \cdot \left[-\partial_s^2 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \vec{A}(s, t) \quad (1.11a)$$

$$\vec{A}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{C(s')} \frac{I(s', t')}{R} ds' \quad (1.11b)$$

$$I(s', t') = a \int_{-\pi}^{\pi} \vec{J}_s(s' \hat{s}' + a \hat{\rho}, t) d\phi' \quad (1.11c)$$

donde los distintos parámetros representan:

$C(s')$ la trayectoria seguida por las cargas.

s y s' coordenadas locales en el punto campo y fuente respectivamente. Esto es, $s(r) = s$ y $s(r') = s'$.

\hat{s} y \hat{s}' los vectores unitarios tangentes a $C(s')$ en \underline{r} y \underline{r}' .

$t' = t - R/c$ el tiempo retardado.

$R = |\underline{r} - \underline{r}'|$, distancia entre el punto fuente en el eje del hilo y el punto campo en la superficie del hilo.

$E^i(r, t)$ el campo incidente ó aplicado.

a es el radio del hilo.

ϕ' el ángulo azimutal en una sección transversal de hilo.

Para el estudio de las discontinuidades que tienen lugar en las uniones, el planteamiento usual es suponer que el tamaño eléctrico de estas discontinuidades es pequeño. Con esta condición el problema puede tratarse utilizando la aproximación cuasiestática [25], esto es, suponiendo que no existe acumulación de carga en las uniones o extremos del hilo. Esto se traduce en que las corrientes satisfacen la ley de Kirchhoff en las uniones y que la carga o derivada de la corriente sobre cada hilo en la unión debe ser proporcional a

$$\Psi_i = \ln \left(\frac{2}{ka_i} - \gamma \right)^{-1} \quad (1.12)$$

donde a_i es el radio del hilo i y $\gamma=0.5772$ [65]. A esta condición se le denomina de Wu-King.

1.6.2 Aproximación de núcleo extendido.

El otro nivel de aproximación, denominado de núcleo extendido, supone la densidad de corriente uniformemente distribuida sobre la superficie S' del hilo. Como consecuencia, los puntos campo y fuente se encuentran sobre S' (fig. 1.4). La densidad de corriente a lo largo del hilo se aproxima por:

$$\vec{J}(s) = \frac{I(s, t)}{2\pi a} \hat{s} \quad (1.13)$$

Sustituyendo (1.13) en (1.7) y teniendo en cuenta la geometría de la figura 1.3, se obtiene:

$$\hat{s} \cdot \epsilon_0 \partial_t \vec{E}^i(s, t) = \left(-\partial_s^2 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \int_{c(s')}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{I(s', t-R/c)}{4\pi^2 R} d\varphi' ds' \quad (1.14)$$

donde

$$R = \sqrt{(s-s')^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi'}$$

Para evaluar esta ecuación integral evitando la singularidad inherente al valor $R=0$, se desarrolla el integrando en serie de potencias del radio del hilo. El primer término de la serie, que es independiente del radio, es idéntico al obtenido con el núcleo reducido, mientras que el segundo término extiende la precisión a valores mayores del radio [60], [63], [66]-[67]. Su distribución tubular de corriente da lugar a cargas anulares cuando los extremos de los segmentos no están alineados como ocurre en los diferentes tipos de uniones. El campo debido a estas cargas anulares degrada la precisión de la solución. Por esta razón los segmentos próximos a uniones se considera siempre el núcleo normal. Como consecuencia las condiciones impuestas en la unión coinciden con las comentadas para la aproximación de núcleo reducido.

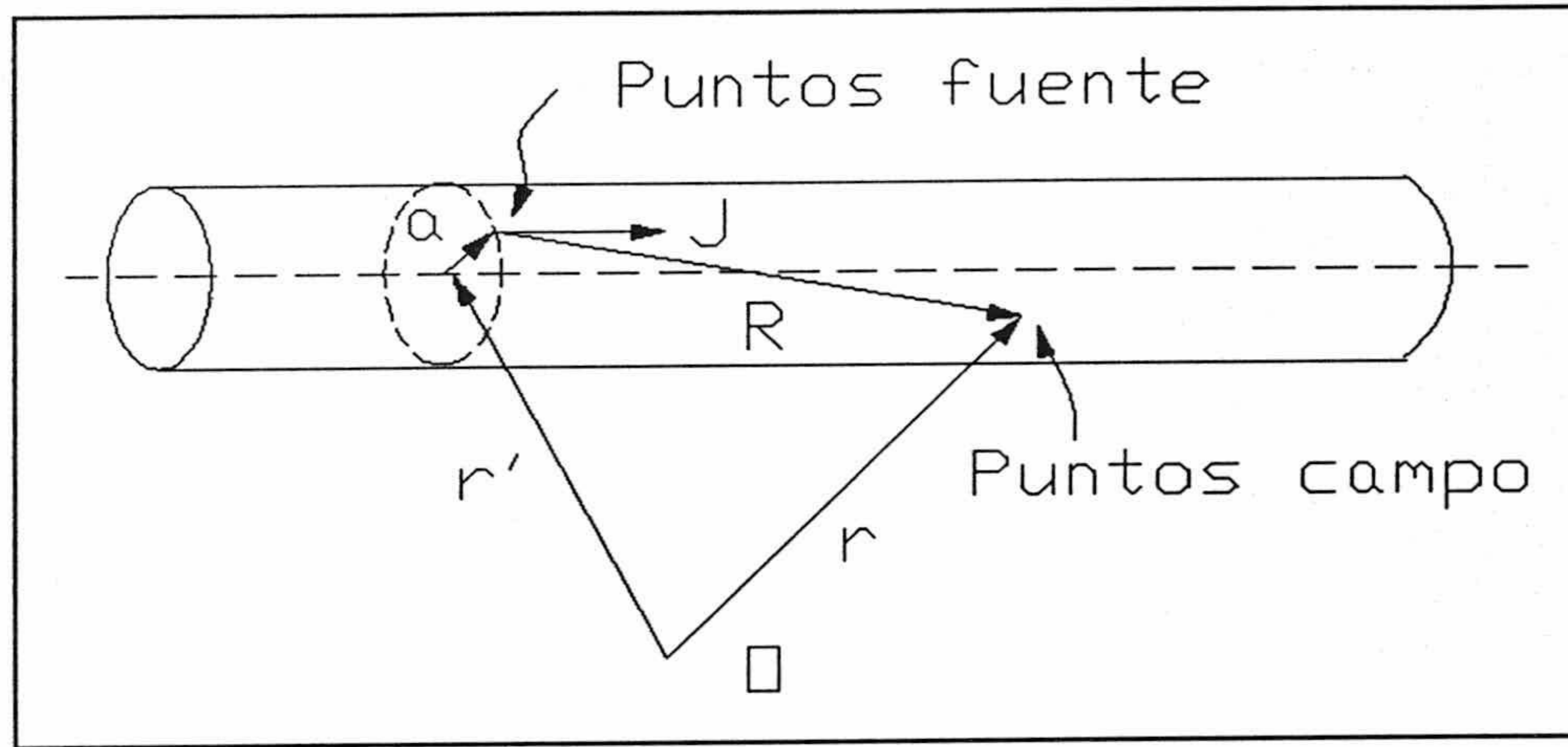


Fig. 1.3. Coordenadas para un hilo recto delgado aislado. Núcleo extendido.

En las dos aproximaciones solo se consideran corrientes en la dirección axial. La validez de esta suposición depende tanto del tamaño eléctrico del radio (relación a/λ siendo a el radio del hilo y λ la longitud de onda) como de la tendencia de la excitación a producir corriente circunferencial. El tratamiento más común y usual y al que se adapta la mayoría de los casos prácticos es el de núcleo normal [59]-[63].

1.7 Una nueva perspectiva de la aproximación de hilo delgado.

En este apartado vamos a demostrar a la luz del denominado teorema de la condición de contorno extendida que paradójicamente, la aproximación de núcleo reducido puede ser más exacta que la de núcleo extendido [67].

La condición de contorno extendida establece, basándose en la continuidad analítica de la ecuación integral, que es rigurosamente válido imponer la condición de contorno al campo en el eje del hilo en vez de en la superficie ya que lo primero conlleva implícitamente lo segundo [61], [66], [68]. Para que este teorema sea estrictamente aplicable, es necesario que la superficie sea cerrada. Esto en el caso del hilo delgado, implica que ha de cerrarse para incluir el efecto de las cargas y corrientes en las tapas del hilo y en las superficies

anulares en los cambios de radio. También han de añadirse el efecto debido a las tapas cuando se considera como excitación para el hilo, fuente de voltaje.

El análisis del efecto de las tapas y de las uniones (intrínsecamente relacionado) de una forma rigurosa es un problema muy complejo [61]. De hecho es en las proximidades de estas zonas y en las que existen segmentos muy próximos donde se comete el máximo error al suponer la simetría axial de la corriente y donde ésta presenta variaciones más rápidas.

Afortunadamente, como se expuso en el apartado anterior, en la mayoría de los casos prácticos no es necesario tratar rigurosamente un problema tan complejo, debido a que sus dimensiones son eléctricamente pequeñas y es posible resolver imponiendo condiciones cuasiestáticas. Sin embargo, es posible, dentro del necesario tratamiento simplificado, distinguir entre la posibilidad de considerar el efecto de los extremos de los hilos en un orden de aproximación mayor que el usual, y generalmente suficiente, de suponer nula la intensidad de corriente en los extremos. En este nuevo grado de aproximación se tiene en cuenta, para el cálculo del campo total en el eje del conductor, el efecto de la carga cuasiestática debida a la discontinuidad en la tapa. Este efecto puede ser importante para el cálculo, en el caso de una antena de tamaño de resonancia y diámetro en el límite de la aproximación de hilo delgado, de su campo cercano y parámetros asociados tal como la impedancia de entrada.

1.7.1 Ecuación integral para el campo eléctrico a partir de la condición de contorno extendida.

Teniendo en cuenta el teorema de la condición de contorno extendida la ecuación integral (1.7) forzada al eje del hilo de la figura 1.4, queda:

$$-e_0 \partial_t E_L^i(\vec{r}, t) = \partial_s \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_L(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in C(s) \quad (1.15a)$$

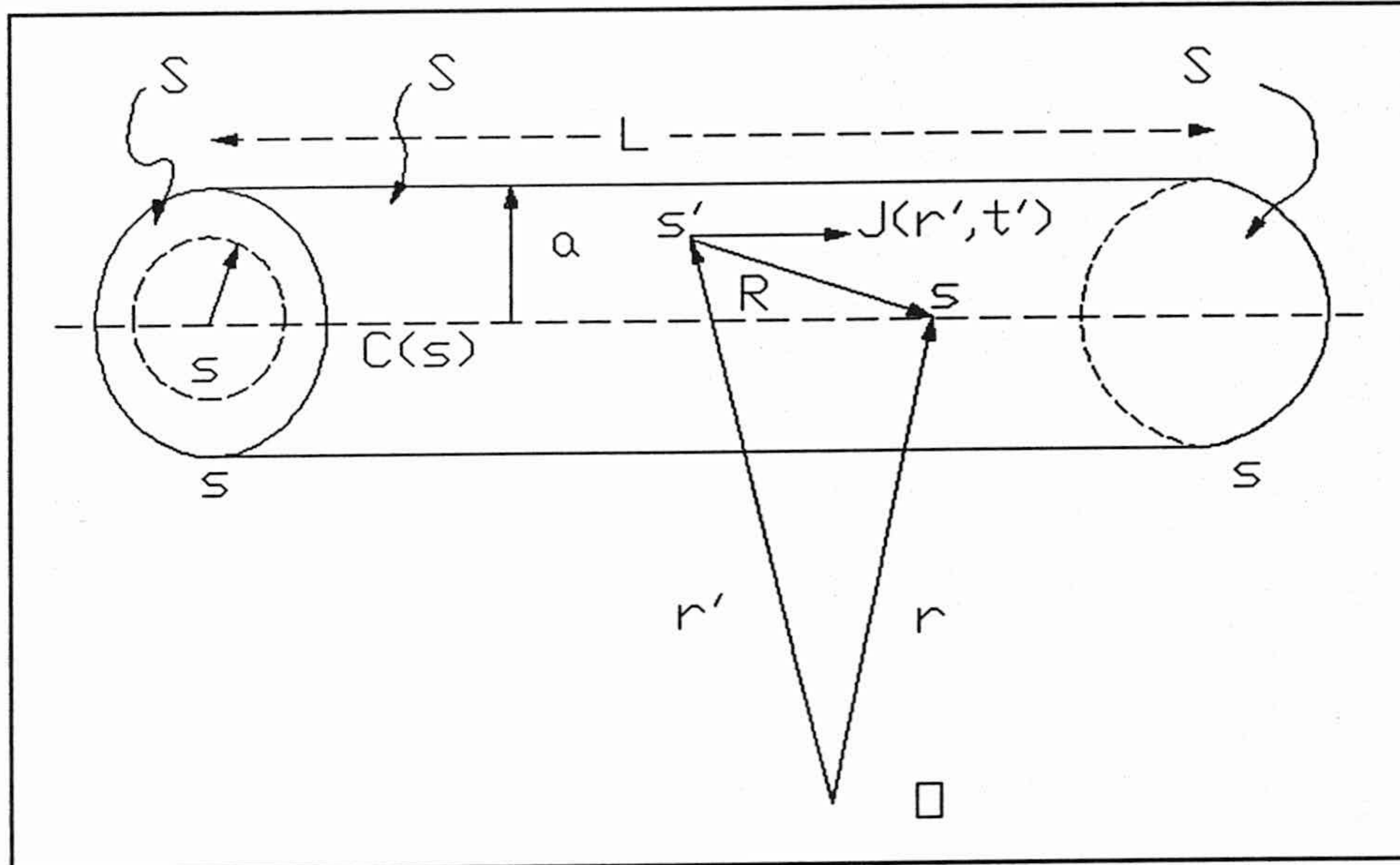


Fig. 1.4. Coordenadas para un hilo recto delgado aislado.

o utilizando coordenadas locales:

$$-\epsilon_0 \partial_s E_L^i(s, t) = \partial_s \nabla \cdot \vec{A}(s, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A_L(s, t) \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (1.15b)$$

La integral para el potencial vector debe extenderse a la superficie total \$S'\$ del hilo dada por

$$S' = \bigcup_{i=1}^3 S'_i \quad (1.16)$$

donde \$S_1'\$ y \$S_2'\$ son las tapas y \$S_3'\$ la superficie lateral.

Existen dos diferencias esenciales entre la ecuación (1.15) y las (1.11) y (1.14):

i) la ecuación (1.15) tal y como se ha planteado no lleva asociado ningún tipo de aproximación y por tanto es rigurosamente correcta.

ii) Desde el punto de vista analítico la diferencia radica en que en la ecuación (1.15) existen derivadas transversales con respecto a \$s\$ del potencial vector \$\vec{A}\$.

Desarrollaremos ahora la ecuación (1.15) para cada una de las superficies de (1.16). Las superficies de unión las consideraremos de medida nula al no ser singular la densidad de corriente.

A) Tratamiento de la superficie envolvente.

Descomponiendo el operador divergencia en (1.15) en su componente tangencial y longitudinal a S' , se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla_T \cdot \vec{A} + \partial_s (\vec{A} \cdot \hat{s}) \quad (1.17)$$

donde el subíndice T indica coordenadas transversales ρ y φ .

Teniendo en cuenta la definición del potencial vector dada en (1.4), se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla_T \vec{A}(\vec{r}, t) &= \nabla_T \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dS_3 \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \left\{ \frac{-\partial_t \vec{J}(\vec{r}', t')}{cR} - \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R^2} \right\} \nabla_T R dS_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

como

$$\nabla_T R = a \frac{\hat{\rho} - \hat{\rho}'}{R} \quad (1.18)$$

y para puntos del eje $\vec{\rho} = 0$ y $\hat{\rho}'$ es perpendicular a \vec{J} , y en todo punto de S_3' queda:

$$\nabla_T \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.19)$$

Por tanto sólo queda la contribución de la componente longitudinal de la divergencia:

$$\begin{aligned} \partial_s(\vec{A} \cdot \hat{s}) &= \partial_s(A_L(s, t)) = \partial_s \int_{s_3'} \frac{J_L(\vec{r}', t')}{4\pi R} dS_3 = \\ & \partial_s \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(\vec{r}', t')}{4\pi R} ds' = \partial_s \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds' \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde se ha definido

$$I(s', t') = \int_0^{2\pi} a J_s(s' \hat{s}' + a \hat{p}', t') d\varphi' \quad (1.21)$$

con

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(s - s')^2 + a^2} \quad (1.22)$$

Cambiando el operador ∂_s por $\partial_{s'}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_s A_L(s, t) &= - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial_{s'} I(s', t')}{4\pi R} ds' - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial_{t'} q(s', t')}{4\pi R} ds' = \\ &= - \left[\frac{I(s', t')}{4\pi R} \right]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial_{t'} q(s', t')}{4\pi R} ds' \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde

$$q(s, t) = - \int_0^t a \int_0^{2\pi} \partial_s J_L(s, t'') dt'' d\varphi' - \int_0^t \partial_s I(s, t'') dt' \quad (1.24)$$

Derivando una segunda vez:

$$\begin{aligned} \partial_s^2 A_L(s, t) &= \frac{s - s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_t + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{s_1}^{s_2} + \\ &+ \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_t + \frac{1}{R} \right\} \partial_t q(s', t') ds' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds' \end{aligned} \quad (1.25)$$

por tanto, para S_3' , la ecuación integral queda:

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon_0 \partial_t E_L^i(s, t) - \frac{s-s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_t + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{s_2}^{s_2} + \\
 & + \int_{s_1}^{s_2} \frac{(s-s')}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_t + \frac{1}{R} \right\} \partial_t q(s', t') ds' \quad (1.26) \\
 & - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds'
 \end{aligned}$$

B) Tratamiento de la superficie de las tapas.

La ecuación (1.15) particularizada para S_1' ó S_2' se reduce a:

$$-\epsilon_0 \partial_t E_L(s, t) - \partial_s \nabla_T \cdot \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \vec{r}' \in S_1' \text{ o } S_2' \quad (1.27)$$

Sea $s_0 = s_1, s_2$ según integremos en S_1' ó S_2' . El flujo de corriente superficial a través de la circunferencia C de radio ρ centrada en el eje del hilo, viene dado por:

$$I_\rho(s_0, \rho, t) = \oint_C J_\rho(s_0, \rho, t) \rho d\phi \quad 0 \leq \rho \leq a \quad (1.28)$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell y el teorema de Stokes se obtiene:

$$(1.29) \quad I_\rho(s_0, \rho, t) = \epsilon_0 \partial_t \int_{S_0} E_L(s_0, \rho, t) dS \quad 0 \leq \rho \leq a$$

donde S_0 es el area sustentada por la circunferencia C.

Como se ha mencionado anteriormente, debido a la complejidad de un tratamiento riguroso de las tapas, se hace necesario imponer condiciones simplificadoras para la función intensidad de corriente $I(s_0, \rho, t)$. Dada que nuestra intención es considerar un grado de aproximación mayor que la usual de imponer $I(s_0, \rho, t) = 0$, supondremos una de primer orden en la que

la densidad superficial de carga es uniforme en la tapa, $\sigma(s_0, t) = \text{Cte}(t)$.

Esta hipótesis se justifica debido al pequeño tamaño eléctrico de las tapas. Además, un desarrollo de σ en potencias de ρ sólo contendrá potencias pares, por lo que una aproximación lineal carece de sentido [61], [66].

Si se considera la densidad superficial de carga constante en toda la tapa, tendremos que la componente L del campo eléctrico también lo es y por tanto:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a E_L(s_0, \rho, t) \rho d\rho d\varphi \approx \int_0^{2\pi} \int_0^a E_L(s_0, 0, t) \rho d\rho d\varphi = -\pi a^2 E_L(s_0, 0, t) \quad (1.30)$$

Debido a la discontinuidad que presenta la componente L del campo eléctrico en la superficie, la contribución de la tapa en un punto situado en s_0 , es decir, en la propia superficie será la mitad del valor dado en (1.30):

$$\frac{1}{2} E_L(s_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi a^2 \epsilon_0} \int_0^t I_\rho(s_0, a, t'') dt'' \quad (1.31)$$

De la ecuación de continuidad en el borde de la unión de S_1' o S_2' con S_3' se tiene:

$$\begin{aligned} I(s_1, t) &= -I_\rho(s_1, a, t) \\ I(s_2, t) &= I_\rho(s_2, a, t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Así pues para el punto de adaptación (point-matching) situado en la misma superficie S_1' o S_2' , la contribución de la superficie al campo viene determinada por (1.31).

Para calcular la contribución de las tapas al campo E_L^s en la ecuación (1.15a), sólo hay que tener en cuenta el término:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{r' \in S'_1 \cup S'_2} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'_1 \cup S'_2} \nabla_T \cdot \left[\frac{\vec{J}}{R} \right] dS' = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_{S'_1 \cup S'_2} \nabla_T \cdot \left[\frac{\vec{J}}{R} \right] dS' - \int_{S'_1 \cup S'_2} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.33}$$

Aplicando el teorema de la divergencia para la primera integral, queda:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{r' \in S'_1 \cup S'_2} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_p(s_1, a, t')}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} - \int_{S'_1} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_p(s_2, a, t')}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} - \int_{S'_2} \frac{\partial_{t'} \sigma}{R} dS' \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Es evidente que el primer término de esta ecuación cancela el análogo que aparece en (1.26) y por tanto, los extremos del hilo contribuyen al campo eléctrico únicamente a través del potencial escalar.

Un nuevo grado de aproximación que simplifica considerablemente los cálculos es suponer $R \approx R_a$ en (1.34) con lo que esta se reduce a:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_T \cdot \vec{A}]_{r' \in S'_1 \cup S'_2} &\approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_p(s_1, a, t')}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} - \frac{\partial_{t'} Q_{s_1}}{\sqrt{(s-s_1)^2 + a^2}} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{I_p(s_2, a, t')}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} - \frac{\partial_{t'} Q_{s_2}}{\sqrt{(s-s_2)^2 + a^2}} \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.35}$$

donde

$$Q_{(1 \text{ ó } 2)} = \int_{S_{(1 \text{ ó } 2)}} \sigma dS$$

La aproximación $R \approx R_a$ es tanto más válida cuanto más alejado del extremo esté el punto campo, fig 1.5. Como consecuencia para puntos situados a una distancia de la tapa, $s \gg a$, la contribución al campo de las tapas es equivalente al de un anillo de carga.

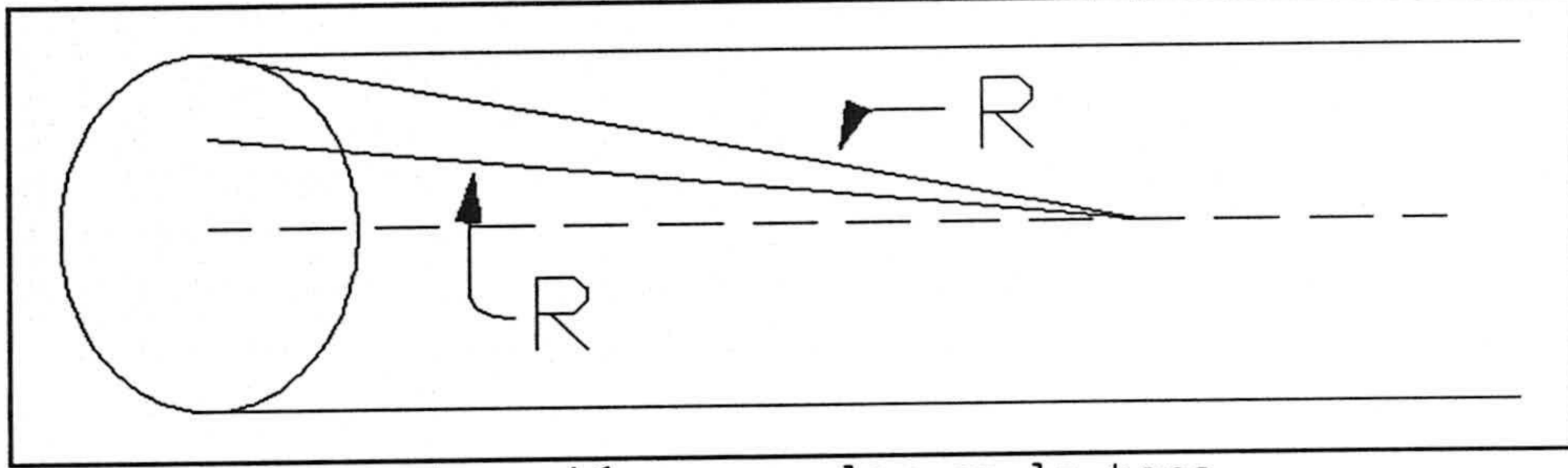


Fig. 1.5. Aproxiamación monopolar en la tapa.

Como consecuencia de todos los razonamientos anteriores, la ecuación EFIE monodimensional teniendo en cuenta la contribución de las tapas, viene dada por:

$$\begin{aligned}
 -\epsilon_0 \partial_t E_L^i(s, t) &= \frac{s-s'}{4\pi R^2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} [I(s', t')]_{s_1}^{s_2} + \\
 &+ \int_{s_1}^{s_2} \frac{s-s'}{4\pi R} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} \partial_{t'} q(s', t') ds' - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{I(s', t')}{4\pi R} ds' \quad (1.36) \\
 &- \frac{1}{2\pi a^2} I(s_1, t) \delta(s-s_1) - \frac{1}{2\pi a^2} I(s_2, t) \delta(s-s_2)
 \end{aligned}$$

e integrando respecto a t:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 E_L^i(s, t) &= \\
 &- \frac{1}{4\pi c^2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial_{t'} I(s', t')}{R} ds' + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{c} \partial_{t'} + \frac{1}{R} \right\} q(s', t') ds' \\
 &- \frac{s-s'}{4\pi R^2} [I(s', t')]_{s_1}^{s_2} - \frac{s-s'}{4\pi R^3} \int_0^{t'} [I(s', t'')]_{s_1}^{s_2} dt'' \\
 &+ \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^t \{ I(s_1, t'') \delta(s-s_1) + I(s_2, t'') \delta(s-s_2) \} dt'' \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{S} \cdot \vec{E}_L^1(s, t) = \\
& - \frac{\hat{S}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\hat{S}' \partial_{t'} I(s', t')}{c^2 R} + \frac{\vec{R}}{cR^2} \partial_{s'} I(s', t') - \frac{\vec{R}}{R^3} q(s', t') \right] ds' \\
& - \frac{\hat{S} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} [I(s', t')]_{s_1}^{s_2} - \frac{\hat{S} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^{t'} [I(s', t'')]_{s_1}^{s_2} dt'' \\
& + \frac{\hat{S} \cdot \vec{R}}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^t \{ I(s_1, t'') \delta(s-s_1) + I(s_2, t'') \delta(s-s_2) \} dt''
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Es interesante observar que en el caso de radio muy pequeño y dado el valor finito de E_L , se tiene, de (1.31), que

$$I_p(s_0, a, t') = 0(a^2), \quad \rho \rightarrow 0 \tag{1.39}$$

o bien, de (1.32), que

$$I(s_1, t) - I(s_2, t) = 0 \tag{1.40}$$

Sorprendentemente, bajo estas condiciones la ecuación (1.36) se hace idéntica a la que se obtiene directamente de (1.11), es decir, a la ecuación de hilo delgado con núcleo reducido. Como consecuencia cabe entender, que estrictamente, en el desarrollo de la ecuación de núcleo normal o extendido, la única aproximación ha sido la inclusión de (1.40). Desde otro punto de vista queda pues más justificada, para hilos muy delgados, la aproximación de núcleo reducido que la de extendido [67].

La aproximación de núcleo extendido puede interpretarse como una aproximación basada en una modelación de hilo mediante un tubo conductor con una densidad de corriente dada por (1.13) [67].

CAPITULO SEGUNDO. EL HILO RECTO

2.1 Introducción.

En este capítulo resolveremos numéricamente la ecuación EFIE en la forma (1.38) para el hilo recto, estableceremos el método numérico, su comportamiento y sus limitaciones. Este capítulo y el tercero deben considerarse como una unidad, separados únicamente por la claridad en la presentación.

Nos interesa estudiar a fondo la resolución de la ecuación EFIE para hilo recto por las siguientes razones:

i) Cualquier estructura se puede modelar por hilos rectos interconectados. En la modelación se deben de respetar básicamente tres puntos: *a)* Fidelidad geométrica del modelo con respecto a la figura modelada. *b)* Tamaño eléctrico pequeño de los huecos respecto a la longitud de onda más pequeña de la iluminación. *c)* La superficie total de los hilos ha de representar entre una o dos veces la superficie real.

Los dos últimos puntos hacen que el modelado por hilos sea una tarea muy complicada, si se la compara con la modelación por parches, pero el hecho de utilizar la ecuación EFIE implica que se pueda resolver cualquier estructura abierta o cerrada.

Queda claro por tanto que el estudio del hilo recto debemos plantearlo para el máximo rango posible de valores de radio y de longitud, así como establecer este rango de aplicación, puesto que, cuando resolvamos la ecuación mediante un proceso escalonado en el tiempo, cualquier punto mal condicionado puede llevar a desestabilizar la solución, y por tanto a invalidarla.

ii) Del tratamiento numérico que se dará a los finales del hilo extraeremos las pautas a seguir para tratar las uniones de hilos de diferentes radios y uniones de varios hilos arbitrarias. En todo aplicaremos una aproximación de primer orden y el hilo recto será el primer test de su validez

numérica. Además, debido a la sencillez geométrica podremos sacar algunas conclusiones acerca del comportamiento numérico de la ecuación EFIE para los distintos casos que se nos pueden presentar.

2.2 Consideraciones numéricas. [17], [19], [20], [39]

El método de los momentos discretiza la ecuación integral para transformarla en un sistema lineal de ecuaciones. Esta discretización espacio-temporal supone la primera limitación en la validez de la solución.

Para el muestreo temporal, el teorema de Shannon establece la frecuencia de muestreo mínima como el doble de la máxima frecuencia de la señal de excitación con contenido energético apreciable.

La señal de excitación que usaremos es un pulso gaussiano en la forma:

$$G(t) = e^{-t^2 g^2} \quad (2.1)$$

cuyo espectro en frecuencias viene dado por:

$$\tilde{G}(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{g} e^{-\pi^2 \frac{f^2}{g^2}} \quad (2.2)$$

Si definimos como ancho de banda efectivo, la frecuencia a la que (2.2) alcanza la décima parte de su valor máximo, tendremos:

$$f_{\max} = 0.5 g$$

Si Δt es el periodo de muestreo temporal tendremos:

$$f_{\max} \leq \frac{1}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta t \approx \frac{1}{g}$$

Para el muestreo espacial Δs , se establece que para una longitud de onda λ , se debe verificar:

$$\Delta s \leq \frac{1}{N} \quad (2.3)$$

donde N oscila entre 6 y 10 para lograr un diez por ciento de exactitud en hilos rectos, anillos circulares y otras estructuras con curvatura suave, y puede alcanzar el valor de 20 en estructuras más complejas [6], [20]. Como tomaremos que $\Delta s = c\Delta t$:

$$f_{\max} \leq \frac{c}{N\Delta s} = \frac{1}{N\Delta t} \Rightarrow \Delta t \approx \frac{2}{gN} \quad (2.4)$$

Nos quedariamos, por tanto con este último valor de Δt , dando un valor a N en función del tipo de geometría.

También, hemos de tener en cuenta muestrear el pulso de excitación suficientemente. Puesto que la décima parte de su valor máximo se alcanza en $t \approx 1.5g$, tendremos que el mínimo número de muestras viene dado por:

$$\frac{t}{\Delta t} \approx \frac{1.5N}{2}$$

2.3 Método numérico.

El M.M. lo desarrollaremos con funciones base polinomios de interpolación lagrangiana de orden dos y funciones peso δ de Dirac. La razón de esta elección se fundamenta en [69].

Ahora se nos plantean dos posibles alternativas: centrar las funciones peso en el centro de cada intervalo espacio-temporal, o bien en los extremos de los mismos. Esta segunda posibilidad es preferible por lo siguiente [67]:

i) Se evitan discontinuidades en la función a desarrollar en los límites de los intervalos. Estas discontinuidades generarían acumulaciones de carga singulares.

No obstante la primera derivada es discontinua. Para evitar ésto sería necesario, o bien ampliar el orden de interpolación, o bien interpolar con splines de un orden determinado. Ambas opciones son actualmente demasiado costosas computacionalmente.

ii) Los puntos campo (o point-matching) se sitúan de forma privilegiada para el tratamiento de extremos que vamos a aplicar.

2.3.1 Discretización espacio-temporal.

Tendremos para las variables s y s' una discretización en la forma, figura 2.1:

$$\begin{aligned} s_u &= (u-1) \Delta s \quad u=1, \dots, N_s+1 \\ s_i &= (i-1) \Delta s \quad i=1, \dots, N_s+1 \\ t_v &= (v) \Delta t \quad v=0, 1, \dots, N_t \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\Delta s = c \Delta t$$

donde N_s es el número de segmentos en que se divide el hilo y N_T es el número de instantes temporales de la solución. N_T debe ser lo suficientemente grande para que la solución haya tenido tiempo de tender a cero.

Esto nos determina unas variables locales:

$$s' = s'_i(s''_i) = s'_i + s''_i \quad (2.6)$$

$$t' = t_j + t''_j$$

Tomaremos el instante de observación $t = v\Delta t + a/c$ (donde a es el radio del hilo), para que la evaluación de la corriente caiga lo más cerca posible de $v\Delta T$.

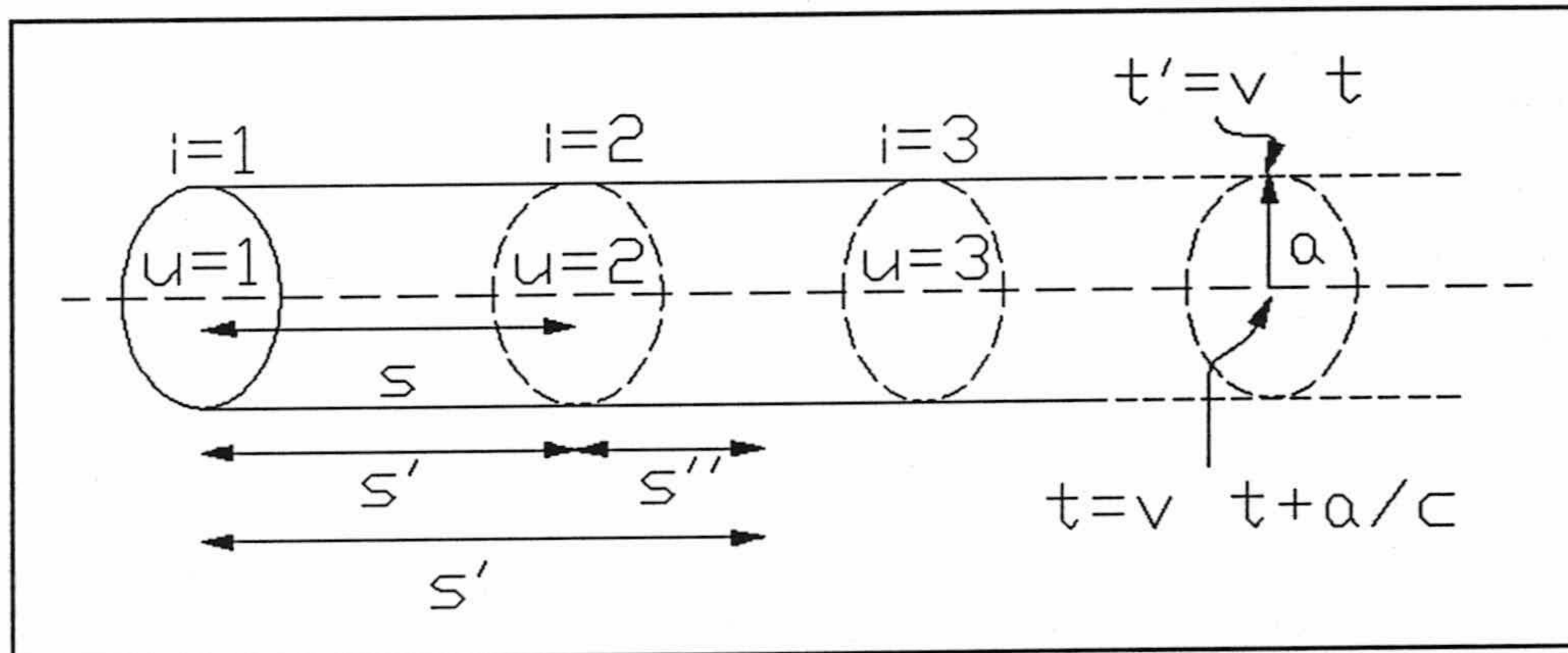


Figura 2.1. Coordenadas locales definidas en el proceso de discretización.

Entonces:

$$t' = t - \frac{R}{c} = v\Delta t + \frac{a}{c} - \frac{R}{c} \quad (2.7)$$

y definimos j como el entero mayor y más cercano a $t'/\Delta t$:

$$\begin{aligned} j &= \text{EMMC}\left[\frac{t'}{\Delta t}\right] = \text{EMMC}\left[v - \frac{R}{c\Delta t} + \frac{a}{c\Delta t}\right] = \\ &= v - \text{truncar}\left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t}\right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} t_j'' &= t' - t_j = \\ &= v\Delta t + \frac{a}{c} - \frac{R}{c} - v\Delta t + \Delta t \cdot \text{truncar}\left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t}\right] = \\ &= r_{iu}\Delta t - \frac{R}{c} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$r_{iu} = \text{truncar}\left[\frac{R}{c\Delta t} - \frac{a}{c\Delta t}\right] + \frac{a}{c\Delta t} \quad (2.8)$$

En este punto podemos explicar la elección de igualdad entre segmentos temporales y espaciales. Esta relación implica una limitación muy grande a la hora de modelar estructuras complejas. Sin embargo está justificada porque de no hacerlo así, no podemos considerar un instante único retrasado j en cada intervalo espacial en donde integraremos. Esto conllevaría una descomposición del intervalo espacial en subintervalos para los que j estaría definido. Esto complica enormemente el algoritmo, por lo que hemos optado por dejarlo a un lado y plantearlo como un objetivo futuro. Actualmente constituye un problema abierto en la literatura.

Por otra parte, lo que sí es fundamental es que j sea constante en el intervalo donde está colocado el punto campo, debido a que nos condiciona la matriz de impedancias. Esto lo tenemos asegurado tomando el instante temporal actual en el punto campo como $t = v\Delta t + a/c$.

Si introducimos la discretización espacio-temporal en la ecuación (1.38) tendremos:

$$\begin{aligned}
& (4\pi\epsilon_0 c) \cdot E_L^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) - \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\frac{\partial_{t_j''} I_{ij}(s_i'', t_j'')}{cR_{iu}(s_i'')} \right] ds_i'' \\
& - \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^2(s_i'')} \partial_{t_j''} - \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^3(s_i'')} c \right\} q_{ij}(s_i'', t_j'') \right] ds_i'' - \\
& \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^{\Delta s} \left[\left\{ \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{i,u}^2(s_i'')} \partial_{t_j''} - \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^3(s_i'')} c \right\} q_{ij}(s_i'', t_j'') \right] ds_i'' - \\
& \left[\left\{ \frac{(s_u - s_i'(s_i''))}{R_{i,u}^2} - \frac{(s_u - s_i')}{R_{iu}^3} c \int_0^{t'} d\tau \right\} I(s_i', \tau) \right]_{i-1}^{i=N_s+1} \quad (2.11) \\
& + \frac{2}{a^2} c \int_0^{t'} \left[I(s_1', \tau) \delta(s_u - s_1') + I(s_{N_s+1}', \tau) \delta(s_u - s_{N_s+1}') \right] d\tau
\end{aligned}$$

2.3.2 Funciones base interpolación lagrangiana.

Las funciones base en que desarrollamos la función intensidad son polinomios de interpolación lagrangiana bidimensional de orden dos:

$$I_{ij}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{ij}^{(l,m)} I_{i+1,j+m} \quad (2.12)$$

donde

$$B_{ij}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq l}}^{k+2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p}}{s_{i+1} - s_{i+p}} \frac{t_j'' + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (2.13)$$

Tomaremos $n=-2$ si $v=j$ y $n=-1$ si $v>j$, para no interpolar con puntos no calculados.

Los límites en la interpolación espacial serán $k=0$ para $i=1$; $k=-1$ si $i=N_s$. Para puntos distintos (es decir $1<i<N_s$) podemos elegir $k=0$ y $k=-1$, pues ambas posibilidades son igualmente válidas. Por ésto, tomaremos ambos desarrollos y efectuaremos la media aritmética. Naturalmente esto conlleva un incremento en tiempo de computo, pero da mayor estabilidad a la solución al corregir pequeñas asimetrías surgidas de tomar $k=0$ ó $k=-1$.

El desarrollo espacial se efectua en los N_s segmentos en que hemos dividido el hilo, aunque intervienen las N_s+1 incognitas correspondientes a los mismos puntos campo en donde se fuerzan las condiciones de contorno.

Al evaluar la contribución de las tapas del hilo las intensidades I_1 e I_{N_s+1} deben desarrollarse en la variable temporal. Utilizaremos los mismos polinomios quedandonos solamente con esta variable.

Definiremos

$$D_{ij}^{(l,m)} = \prod_{\substack{p=k \\ p \neq 1}}^{k+2} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (s_{i+l} - s_{i+p}) (t_{j+m} - t_{j+q})$$

$$SP_i^l = \sum_{\substack{p=k \\ p \neq 1}}^{k+2} (s_i + s_{i+p})$$

$$PP_i^1 = \prod_{\substack{p=k \\ p+1}}^{k+2} (s_i - s_{i+p})$$

$$SQ_j^m = \sum_{\substack{q=n \\ q+m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q})$$

$$PQ_j^m = \prod_{\substack{q=n \\ q+m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q})$$

Por tanto (2.12) queda:

$$B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (s_i''^2 + SP_i^1 s_i'' + PP_i^1) \cdot (t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PP_j^m) \quad (2.14)$$

La actuación de los diferentes operadores que aparecen en la ecuación (1.38) vendrá definida por:

$$\partial s_i'' B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (s_i'' + SP_i^1) (t_j''^2 + SQ_j^m t_j'' + PP_j^m) \quad (2.15)$$

$$\partial t_j'' B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (s_i''^2 + SP_i^1 s_i'' + PP_i^1) (t_j'' + SQ_j^m) \quad (2.16)$$

$$\int \partial s_i'' B_{ij}^{(1,m)} dt_j'' = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (s_i'' + SP_i^1) \cdot (2.17)$$

$$\left(\frac{t_j''^3}{3} + SQ_j^m \frac{t_j''^2}{2} + PP_j^m t_j'' \right)$$

Cuando tengamos que desarrollar en la variable temporal únicamente, utilizaremos la misma notación, pero con subíndices y superíndices correspondientes a esta variable.

2.4 Interpolación de la densidad lineal de carga. [70]

El segundo y tercer sumando del segundo miembro de la ecuación (2.17) corresponde al término de carga. Estos términos, rápidamente variables con la distancia, toman valores apreciables en su contribución a los campos cercanos, por lo que tienen un peso muy importante en la ecuación (2.11)

Por la ecuación de continuidad, la carga puede expresarse como función de la intensidad:

$$q(s, t) = - \int_0^t \partial_s I(s, \tau) d\tau \quad (2.18)$$

Descomponemos la integral en suma de integrales extendidas a los intervalos temporales:

$$q(s, t) = - \sum_{s=1}^{v-1} \int_{-\Delta t}^0 \partial_s I(s, \tau) d\tau - \int_{-\Delta t}^{t''} \partial_s I(s, \tau) d\tau \quad (2.19)$$

Sustituyendo los coeficientes de interpolación (2.12) en (2.19):

$$q_{ij}(s''_i, t''_j) = - \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{ij}^{(l,m)} I_{i+1, s+m} \\ - \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{ij}^{(l,m)} I_{i+1, j+m} = \quad (2.20)$$

$$= - \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''} B_{is}^{(l,m)} I_{i+1, s+m} + \int_{-\Delta t}^{t''_j} \partial_{s''} B_{ij}^{(l,m)} I_{i+1, j+m} \right\}$$

Nos aparecen dos términos en la interpolación de la carga. Uno que depende de t'' y otro que no. El primero aparece en la contribución a la integral del intervalo temporal j , el cual debe verificar el principio de causalidad: $t_v - t_j = t_j'' + R_{iu}/c$ debe ser un múltiplo entero de Δt , con lo que nos aparece una ligadura entre s_i'' y t_j'' que obliga a que ambos aparezcan en la ecuación en el intervalo temporal j . Por el contrario el otro término, que no depende de t'' , corresponde a la suma de todos los intervalos anteriores al j . Durante estos intervalos temporales han interactuado por completo los intervalos espaciales relacionados con (s_u, t_v) por el principio de causalidad.

Esta forma de interpolación de la carga es distinta a la que hacen otros autores, [19], [39]. Estos se basan en una descomposición de la integral temporal de la forma:

$$\sum_{ij} - \sum_{k=1}^j \int_{\Delta t} [I_{ik}(s_i'', t_j'')]_{s_i''=0}$$

y a partir de estos coeficientes se efectúa una nueva interpolación:

$$\sum_{ij} (s_i'', t_j'') = \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} B_{ij}^{(l,m)} \sum_{i+1, j+m}$$

Al hacer esto estamos evaluando unos coeficientes que vienen a ser el valor de la carga en los centros de los intervalos. Pero en el proceso estamos despreciando la ligadura que existe entre s_i'' y t_j'' y quitando toda dependencia en estas variables para volver a tomarla con una nueva interpolación.

2.5 Expresión numérica de la ecuación EFIE.

Si en la ecuación (2.11) introducimos (2.12) y (2.20) resulta:

$$\begin{aligned}
 (4\pi\epsilon_0 c) E_l^i(u, v\Delta t + \frac{a}{c}) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \int_0^{\Delta s} \\
 &\left[\frac{1}{cR_{iu}(s_i'')} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^2(s_i'')} + c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} \right] B_{ij}^{(1,m)} I_{i+1,j+m} ds_i'' + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^{j-1} \int_0^{\Delta s} \left[c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^3} (s_i'') \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} \right] B_{is}^{(1,m)} ds_i'' + \quad (2.21) \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{m=2}^{n+2} \left[\beta_i \frac{s_u - s_i'}{R_{iu}^2} + \beta_i c \frac{s_u - s_i'}{R_{iu}^3} \int_{-\Delta t}^{t_j''} + \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i') \int_{-\Delta t}^{t_j''} \right] B_j^{(m)} I_{i,j+m} + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{m=n}^{n+2} \sum_{s=1}^{j-1} \left[\beta_i \frac{s_u - s_i'}{R_{iu}^2} + \beta_i c \frac{s_u - s_i'}{R_{iu}^3} \int_{-\Delta t}^0 - \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s_i') \int_{-\Delta t}^0 \right] B_s^{(m)} I_{i,s+m}
 \end{aligned}$$

con $\beta_i=1$ si $i=1$; $\beta_i=-1$ si $i=N_s+1$.

Sustituyendo $j=v-r_{iu}+a/(c\Delta t)=v-\tilde{r}_{iu}$ y teniendo en cuenta que los coeficientes B no dependen del instante j debido a que todos los intervalos temporales son iguales, podemos definir:

$$\begin{aligned}
 F_{i,u,l,m} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left\{ \frac{1}{cR_{iu}(s_i'')} \partial_{t_j''} + \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^2(s_i'')} + \right. \\
 &+ \left. c \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^3(s_i'')} \int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} \right\} B_{ij}^{(1,m)} ds_i'' \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

$$C_{i,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\Delta s} \left[C \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{iu}^3} (s''_i) \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} B_{is}^{(l,m)} ds''_i \right] ds''_i \quad (2.23)$$

$$T_{i,u,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s'_i}{R_{iu}^2} + \beta_i C \frac{s_u - s'_i}{R_{iu}^3} \int_{-\Delta t}^{t''_j} + \right. \\ \left. + \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s'_i) \int_{-\Delta t}^{t''_j} \right\} B_j^{(m)} \quad (2.24)$$

$$S_{i,u,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \beta_i \frac{s_u - s'_i}{R_{iu}^2} + \beta_i C \frac{s_u - s'_i}{R_{iu}^3} \int_{-\Delta t}^0 + \right. \\ \left. + \frac{2}{a^2} c \delta(s_u - s'_i) \int_{-\Delta t}^0 \right\} B_s^{(m)} \quad (2.25)$$

$$Y_{i,j} = \sum_{s=1}^j I_{i,s} \quad (2.26)$$

Y la ecuación (2.21) queda en la forma:

$$E_L^i \left(u, v \Delta t + \frac{a}{c} \right) = \\ = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{l=k}^{k+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,u,l,m} I_{i+1,r-\tilde{r}_{iu}+m} + C_{i,u,l,m} Y_{i+1,v-\tilde{r}_{iu}-1+m} \right\} + \\ \sum_{i=1}^{i-1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ T_{i,u,m} I_{i,v-\tilde{r}_{iu}+m} + S_{i,u,m} Y_{i,v-\tilde{r}_{iu}-1+m} \right\} \quad (2.27)$$

En la ecuación (2.27) está implícito el algoritmo numérico. Despejando los términos en v , es decir, intensidades no calculadas, queda el sistema lineal de dimensión N_s+1 .

Los términos F , C , T y S se evalúan antes de iniciar el proceso de solución, y a partir de ellos se forma la matriz del sistema o matriz de impedancias (solamente contribuyen los términos F y T) que se invierte también antes de iniciar los cálculos para cada instante. El vector de términos independientes se evalúa en cada instante con los valores de las corrientes en instantes anteriores.

2.6 Discretización y tratamiento de los extremos.

Si en la ecuación (2.27) hacemos I_1 e I_{N_s+1} igual a cero, ésta se hace formalmente igual a la que se obtiene en [19], [39], [70]. Sin embargo su comportamiento numérico es bien distinto. En lo que sigue nos referiremos a la ecuación (2.27) como ecuación EFIE extremal y a la planteada en la literatura como ecuación EFIE centrada.

Para la condición de intensidad cero en los extremos del hilo, la ecuación EFIE centrada considera una interpolación de los valores de la intensidad en los puntos campo más cercanos a los finales (esto es, a $\Delta s/2$ de los finales) con una intensidad cero en el final mismo del hilo [70], figura 2.2. La ecuación EFIE extremal puede efectuar la misma aproximación, pero sitúa el punto campo más cercano al final a una distancia Δs , con lo que la corriente evaluada será menos sensible a la aproximación efectuada.

Otra diferencia entre la ecuación EFIE extremal y la centrada es que esta última tiene implícita la aproximación de hilo delgado. La aplicación de las condiciones de contorno extendidas a la ecuación EFIE centrada conlleva simplemente sustituir el instante actual del punto campo t_v por t_v+a/c . Al hacer esto la ecuación se vuelve inestable como veremos en la presentación de resultados. Esto implica que su limitación

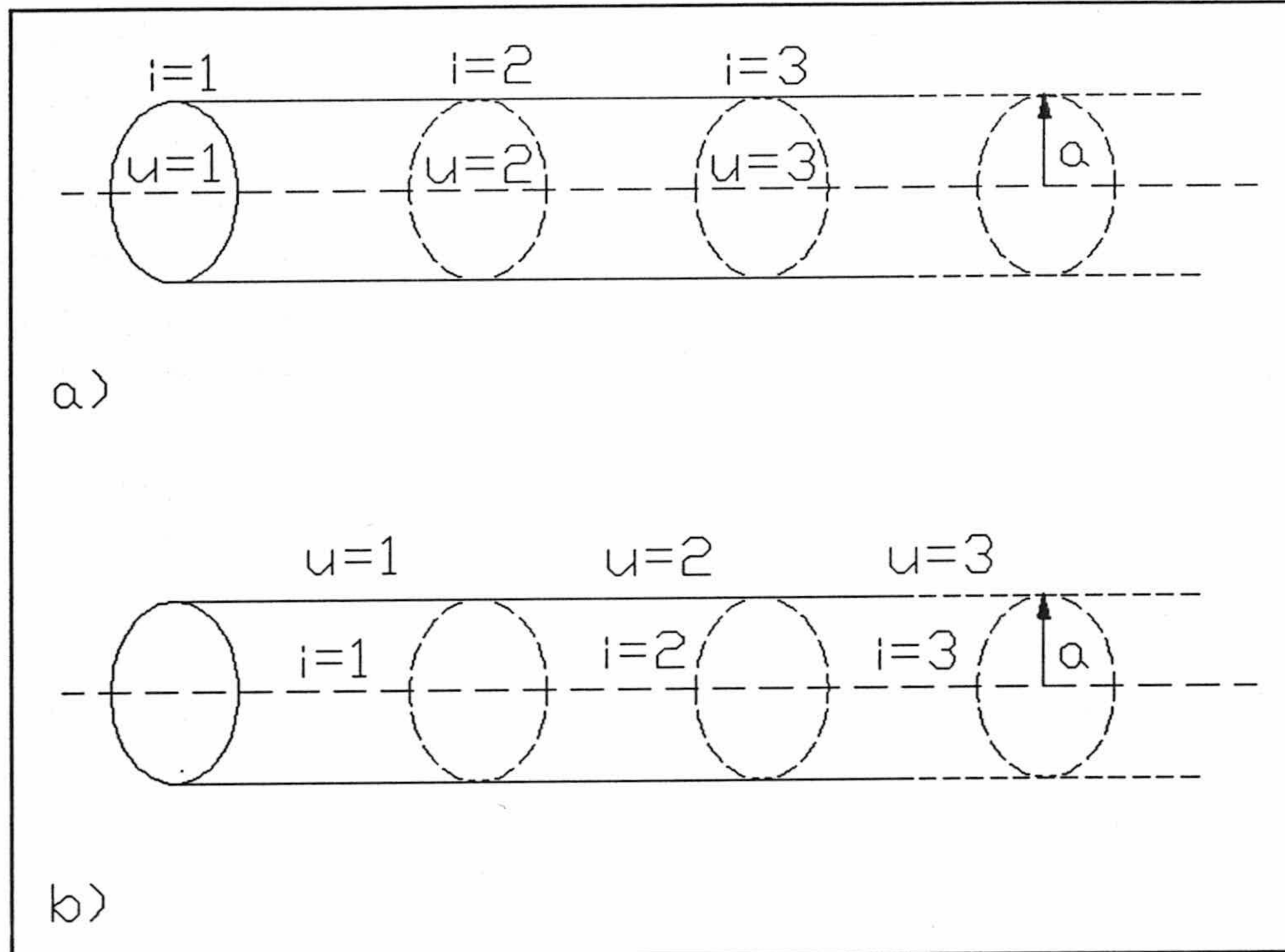


Figura 2.2. Situación de los puntos campo y fuente para: (a) EFIE extremal. (b) EFIE centrada.

viene dada por las limitaciones impuestas por la aproximación de hilo delgado y por tanto aplicable a hilos con parámetro de antena $\Omega=2\ln(L/a)$ entre 10 y 14. La ecuación EFIE extremal resuelve antenas con parámetros superiores a 7.

Por último señalar que por todo lo dicho anteriormente la ecuación EFIE central es incapaz de abordar el tratamiento de extremos de forma diferente a imponer la condición de intensidad cero. Por el contrario la discretización efectuada en la ecuación EFIE extremal nos da la clave para el tratamiento efectuado al poder situar un punto campo en la misma tapa. Aunque en esta memoria se ha tomado la simplificación de densidad superficial constante en la tapa y consideración numérica de la misma en forma de anillo de carga, el camino queda abierto para la corrección de estas aproximaciones.

2.8 Desarrollo explícito de los términos F, C, T, y S.

Una de las mayores dificultades que presentan los algoritmos planteados en DT en base a ecuaciones integrales, es que las variables espacial y temporal están relacionadas de forma íntima a través del principio de causalidad. La solución numérica suele ser muy sensible a las aproximaciones efectuadas que afectan a esta relación, esto es, que violen o alteren el principio de causalidad.

Para la ecuación EFIE esta relación viene dada por las funciones base elegidas. Así pues el siguiente paso a dar es introducir (2.9) en (2.15)-(2.17):

$$\partial_{t_j''} B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (s_i''^2 + SP_i^1 s_i'' + PP_i^1) \left(-\frac{2R(s_i'')}{c} - B_{iu}^m \right) \quad (2.28)$$

donde:

$$B_{iu}^m = -SQ_j^m - 2r_{iu} \Delta t$$

$$\partial_{s_i''} B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (2s_i'' + SP_i^1) \left[\frac{R(s_i'')^2}{c^2} + \frac{R(s_i'')}{c} B_{iu}^m + A_{iu}^m \right] \quad (2.29)$$

con:

$$A_{iu}^m = \Delta t^2 r_{iu}^2 + SQ_j^m \Delta t r_{iu} + PQ_j^m$$

$$\int_{-\Delta t}^0 \partial_{s_i''} B_{ij}^{(1,m)} dt'' = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (2s_i'' + SP_i^1) K^m \quad (2.30)$$

donde:

$$K^m = \frac{\Delta t^3}{3} - SQ_j^m \frac{\Delta t^2}{2} + PQ_j^m \Delta t$$

Y por último:

$$\int_{-\Delta t}^{t_j''} \partial_{s_i''} B_{ij}^{(1,m)} dt'' = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} (2S_i'' + SP_i^1) \quad (2.31)$$

$$\left[-\frac{R^3(s_i'')}{3c^3} - \frac{R^2(s_i'')}{2c^2} B_{iu}^m - \frac{R(s_i'')}{c} A_{iu}^m + E_{iu}^m \right]$$

en donde hemos definido:

$$E_{iu}^m = \frac{\Delta t^3 r_{iu}^3}{3} + SQ_j^m \frac{r_{iu}^2 \Delta t^2}{2} + PQ_j^m r_{iu} \Delta t + K^m$$

Si sustituimos (2.28)-(2.31) en (2.27) tendremos para cada término, una vez agrupadas las variables:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{cR(s_i'')} \partial_{t_j''} B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} \left\{ -\frac{s_i''^2}{R_{iu}(s_i'')} \frac{B_{iu}^m}{c} - \frac{s_i''}{R_{iu}(s_i'')} \frac{SP_i^1 B_{iu}^m}{c} \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_{iu}(s_i'')} \frac{PP_i^1 B_{iu}^m}{c} - s_i'' \frac{2}{c^2} - s_i'' \frac{2SP_i^1}{c^2} - \frac{2PP_i^1}{c^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{s_u - s_i'(s_i'')}{R_{iu}^2(s_i'')} \partial_{s_i''} B_{ij}^{(1,m)} = \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} \left\{ \frac{s_i''^2}{R_{iu}(s_i'')} (-2A_{iu}^m) \right. \\ & \left. + \frac{s_i''}{R_{iu}^2(s_i'')} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) A_{iu}^m + \frac{1}{R_{iu}^2(s_i'')} (s_u - s_i) SP_i^1 A_{iu}^m \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s_i^{//2}}{R_{iu}(s_i^{//})} \left(-2 \frac{B_{iu}^m}{c}\right) + \frac{s_i^{//}}{R_{iu}(s_i^{//})} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) \frac{B_{iu}^m}{c} \\
& + \frac{1}{R_{iu}(s_i^{//})} (s_u - s_i) SP_i^1 \frac{B_{iu}^m}{c} + s^2 \left(-\frac{2}{c^2}\right) \\
& + s_i^{//} \left\{ \frac{2(s_u - s_i) - SP_i^1}{c^2} + (s_u - s_i) \frac{SP_i^1}{c^2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
& c \frac{(s_u - s_i'(s_i^{//}))}{R_{iu}^3(s_i^{//})} \int_{-\Delta t}^{\tau''} \partial_{s_i^{//}} B_{ij}^{(1,m)} - \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} \left\{ \frac{s_i^2}{R_{iu}^3(s_i^{//})} (-2cE_{iu}^m) \right. \\
& + \frac{s_i^{//}}{R_{iu}^3(s_i^{//})} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) cE_{iu}^m + \frac{1}{R_{iu}^3(s_i^{//})} ((s_u - s_i) SP_i^1 cE_{iu}^m) \\
& + \frac{s_i^{//2}}{R_{iu}^2(s_i^{//})} (2A_{iu}^m) + \frac{s_i^{//}}{R_{iu}^2(s_i^{//})} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) (-A_{iu}^m) \\
& + \frac{1}{R_{iu}^2(s_i^{//})} (-(s_u - s_i) SP_i^1 A_{iu}^m) + \frac{s_i^{//2}}{R_{iu}(s_i^{//})} \left(2 \frac{B_{iu}^m}{2c}\right) \\
& + \frac{s_i^{//}}{R_{iu}(s_i^{//})} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) \left(-\frac{B_{iu}^m}{2c}\right) \\
& + \frac{1}{R_{iu}(s_i^{//})} ((s_u - s_i) SP_i^1) \left(-\frac{B_{iu}^m}{2c}\right) \\
& + s_i^{//2} \left(\frac{2}{3c^2}\right) + s_i^{//} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) \left(-\frac{1}{3c^2}\right) \\
& \left. + (s_u - s_i) SP_i^1 \left(-\frac{1}{3c^2}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
& c \frac{s_u - s'_i(s''_i)}{R_{iu}^3(s''_i)} \int_{-\Delta t}^0 \partial_{s''_i} B_{ij}^{(1,m)} - \frac{1}{D_{ij}^{(1,m)}} \left\{ \frac{s^2}{R_{iu}^3(s''_i)} (-2cK^m) \right. \\
& \left. + \frac{s''_i}{R_{iu}^3(s''_i)} (2(s_u - s_i) - SP_i^1) ck^m + \frac{1}{R_{iu}^3(s''_i)} (SP_i^1 cK^m (s_u - s_i)) \right\}
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

Las ecuaciones (2.32)-(2.34) nos definen el término $F_{i,u,l,m}$ y la ecuación (2.35) el término $C_{i,u,l,m}$, una vez integradas en la variable local s_i'' . Estas integrales tienen la forma:

$$I(p, q) = \frac{x^p}{[x^2 + bx + c]^{q/2}}$$

con $p=0,1,2$; $q=0,1,2,3$. Al final de capítulo se presenta el listado del programa que evalúa estas integrales.

Podemos expresar, en términos de las integrales $I(p, q)$, los términos F y C como:

$$F_{i,u,l,m} = \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^3 F(p, q) I(p, q)$$

$$C_{i,u,l,m} = \sum_{p=0}^2 C(p, 3) I(p, 3)$$

donde

$$F(2, 3) = -2cE_{iu}^m$$

$$F(1,3) = (2(s_u - s_i) - SP_i^1) cE_{iu}^m$$

$$F(0,3-) = (s_u - s_i) SP_i^1 cE_{iu}^m$$

$$F(2,2) = 0$$

$$F(1,2) = 0$$

$$F(0,2) = 0$$

$$F(2,1) = -\frac{2B_{iu}^m}{c}$$

$$F(1,1) = \left(-\frac{3}{2}SP_i^1 + (s_u - s_i)\right) \frac{B_{iu}^m}{c}$$

$$F(0,1) = \left(-PP_i^1 + \frac{1}{2}SP_i^1(s_u - s_i)\right) \frac{B_{iu}^m}{c}$$

$$F(2,0) = -\frac{10}{3c^2}$$

$$F(1,0) = \frac{-8SP_i^1 + 4(s_u - s_i)}{3c^2}$$

$$F(0,0) = -\frac{2PP_i^1}{c^2} + \frac{2}{3} \frac{(s_u - s_i)}{c^2} SP_i^1$$

$$C(2,3) = -2cK^m$$

$$C(1,3) = (2(s_u - s_i) - SP_i^1) cK^m$$

$$C(0,3) = SP_i^1 (s_u - s_i) cK^m$$

Para evaluar los términos T y S tendremos:

$$-\frac{(s_u - s_i')}{R_{iu}^2} B_j^m - \frac{s_u - s_i}{D_j^m} \left\{ \frac{1}{c^2} + \frac{B_{iu}^m}{cR_{iu}} + \frac{A_{iu}^m}{R_{iu}^2} \right\} \quad (2.36)$$

$$-\frac{(s_u - s_i')}{R_{iu}^3} c \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^m - \frac{s_u - s_i}{D_j^m} \left\{ \frac{1}{3c^2} + \frac{B_{iu}^m}{2cR_{iu}} + \frac{A_{iu}^m}{R_{iu}^2} - \frac{cE_{iu}^m}{R_{iu}^3} \right\} \quad (2.37)$$

$$\frac{2c}{a^2} \int_{-\Delta t}^{t_j''} B_j^m - \frac{2c}{a^2 D_j^m} E_{iu}^m \quad (2.38)$$

Sumando (2.36)-(2.38) obtenemos $T_{i,u,m}$.

$$-\frac{(s_u - s_i')}{R_{iu}^3} c \int_{-\Delta t}^0 B_j^m - \frac{cK^m}{D_j^m R_{iu}^3} (s_u - s_i') \quad (2.39)$$

$$\frac{2c}{a^2} \int_{-\Delta t}^0 B_s^m - \frac{2c}{a^2 D_s^m} K^m \quad (2.40)$$

La suma de (2.39) y (2.40) nos define $S_{i,u,m}$.

2.8 Algoritmo de inversión matricial.

Como se ha comentado anteriormente, el proceso de solución escalonado en el tiempo sólo requiere invertir la matriz del sistema una sola vez. El algoritmo de inversión que

hemos utilizado se basa en la diagonalización de un sistema formado por la matriz del sistema y la matriz identidad [71].

Este algoritmo ha sido perfeccionado en los siguientes puntos:

i) Sin costo computacional alguno se puede invertir una matriz, resolver un sistema, evaluar los autovalores y calcular el determinante.

ii) No se necesita ninguna memoria de trabajo.

Por otra parte el algoritmo es de los más eficientes en cuanto a tiempo de cálculo, pues sólo necesita operar N^3 veces (siendo N el orden del sistema), mientras que los algoritmos habituales necesitan N^4 operaciones.

Al final del capítulo se da un listado de la subrutina con salidad de inversión matricial.

2.9 Resultados.

Como se comentó en el apartado 2.7, la ecuación EFIE centrada tiene un comportamiento numérico inestable cuando se le aplican las condiciones de contorno extendidas. Este hecho está relacionado únicamente al tipo de discretización efectuada.

Así pues tengamos un hilo recto de 1 m de longitud y radio $a=6.74$ mm ($\Omega=10$). La alimentamos con un pulso gaussiano de tensión con parámetro $g=3 \cdot 10^9$ s⁻¹ en su centro, y la dividimos en 60 intervalos. Si resolvemos la ecuación EFIE centrada para la aproximación de hilo delgado (a) y aplicando condiciones de contorno extendidas (b) obtenemos una corriente en la alimentación que se muestra en la figura 2.3.

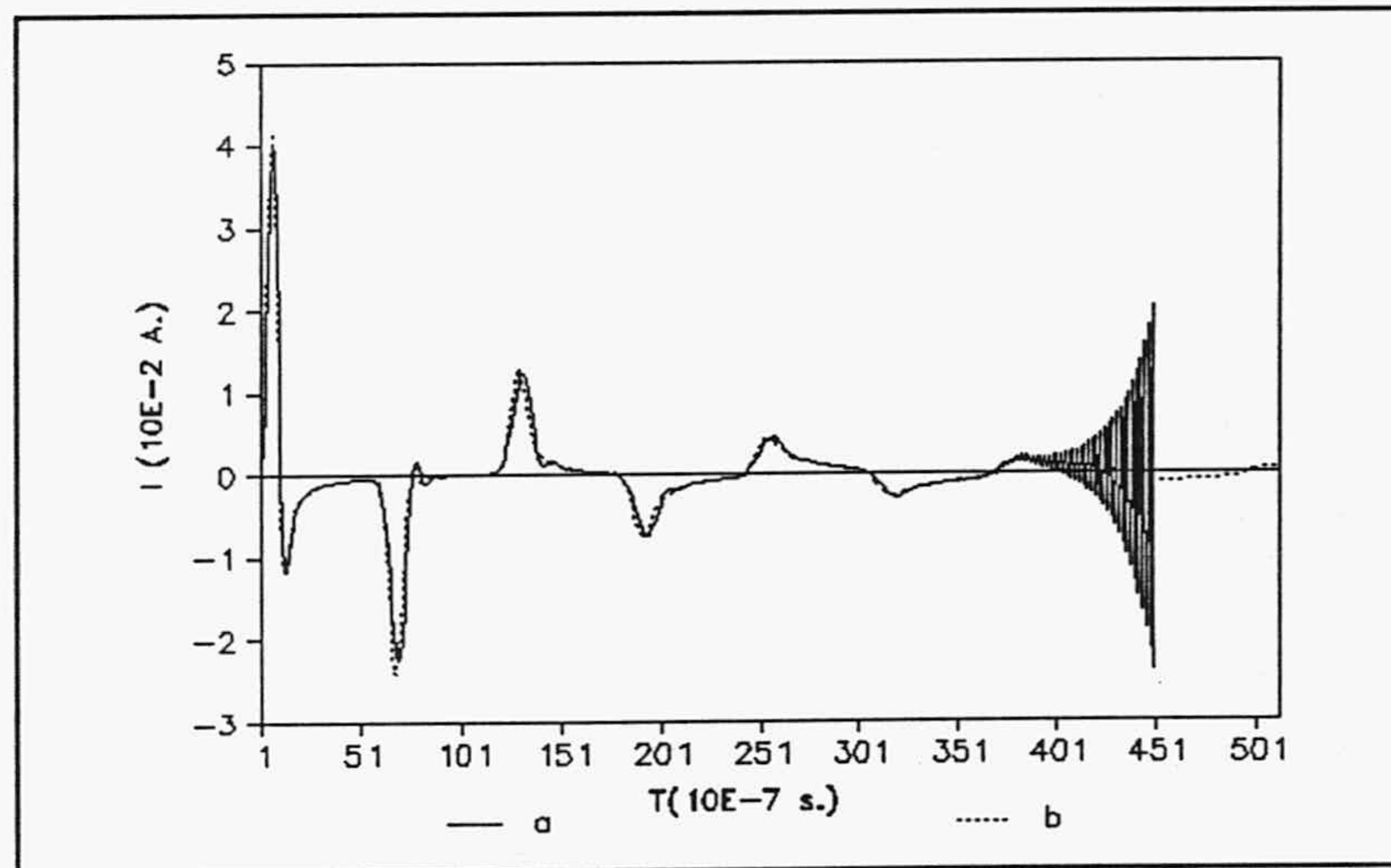


Figura 2.3. Corriente en la alimentación de una antena lineal. Ecuación EFIE centrada, (a) Aproximación de hilo delgado. (b) Condiciones de contorno extendidas.

Vemos como las inestabilidades aparecen en (b) cuando la señal va tendiendo a cero. En el resto de la curva, tanto (a) como (b) se asemejan, excepto en pequeñas anomalías que

aparecen próximas a los cortes por cero, y una vez que el pulso de alimentación ha tenido tiempo de propagarse a través de toda la antena.

Para encontrar la causa de esta inestabilidad hemos analizado las matrices de impedancias formadas para: (a) ecuación EFIE centrada con condiciones de contorno extendidas; (b) ecuación EFIE centrada con la aproximación de hilo delgado; (c) ecuación EFIE extremal; (d) ecuación EFIE extremal con intensidad cero en los extremos. Con la subrutina de inversión hemos obtenido los autovalores normalizados a un valor central. En la figura 2.4 se muestran los 8 primeros autovalores. Para el caso (c) faltaría el autovalor correspondiente al punto campo en la misma tapa. Su valor es 2.9 y no se muestra por claridad en la gráfica.

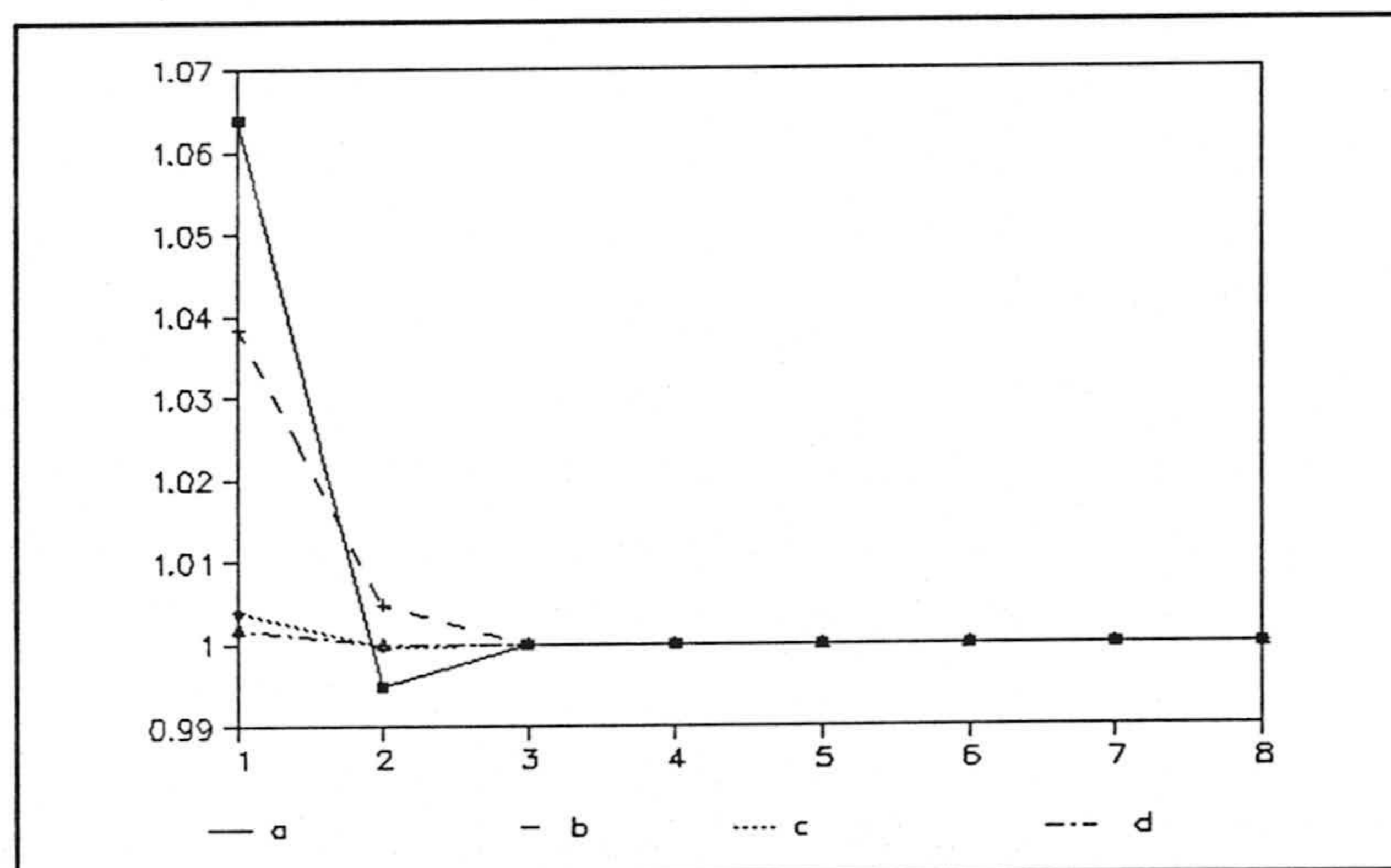


Figura 2.4. Autovalores de la matriz de impedancias. (a) Ec. EFIE(centrada)-CCE. (b) Ec. EFIE(centrada)-AHD. (c) Ec. EFIE extremal. (d) Ec. EFIE extremal con la aproximación de intensidad cero.

Vemos en la figura 2.4 como (a) presenta un comportamiento anómalo en el segundo autovalor. Aunque se

podría considerar pequeña esta anomalía, el proceso de solución escalonado en el tiempo la va amplificando, terminando por reventar la solución.

Este tipo de inestabilidades se estudiarán en detalle en el Capítulo 5.

La aproximación de hilo delgado limita la aplicación de la ecuación EFIE centrada para hilos con parámetros de antena entre 10 y 14. Tomemos una antena con parámetro de antena 8 y dividámosla en 60 segmentos. Claramente estamos fuera de la aproximación de hilo delgado. Si analizamos la matriz de impedancias para (a) ecuación EFIE centrada con la aproximación de hilo delgado (AHD); (b) ecuación EFIE extremal; (c) ecuación EFIE extremal con intensidad cero en los extremos (AICE), a partir de sus autovalores, figura 2.5, vemos como (a) presenta un primer autovalor anormalmente pequeño. Por el contrario (b) y (c) no presentan ninguna anomalía.

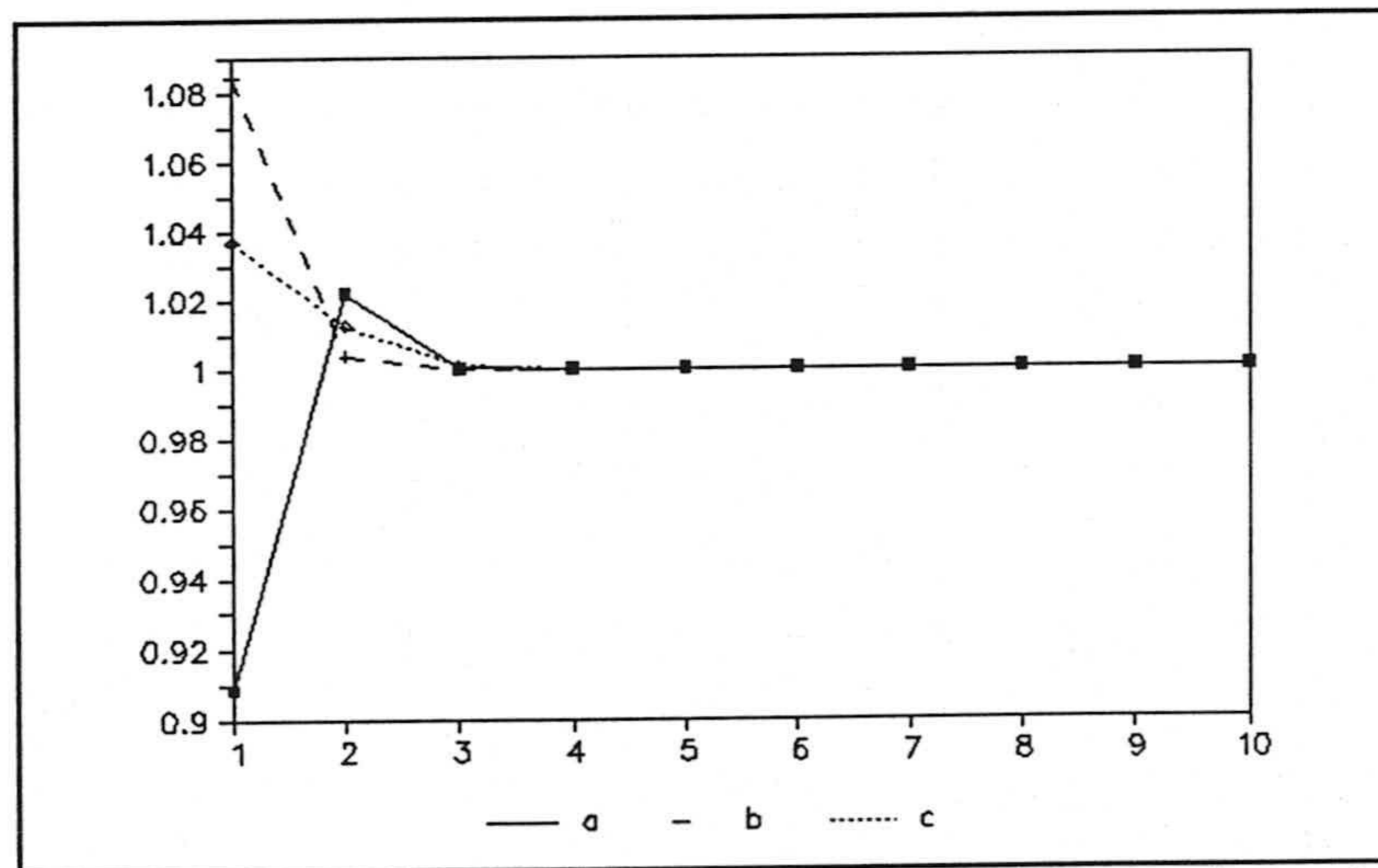


Figura 2.5. Autovalores de la matriz de impedancias. (a) Ec. EFIE(centrada)-AHD. (b) Ec. EFIE(extremal). (c) Ec. EFIE(extremal) con la aproximación de intensidad cero.

Si comparamos las figuras 2.4 y 2.5 para la ecuación EFIE extremal, vemos como para hilos delgados el segundo autovalor que aparece en las figuras tiende a situarse al mismo nivel que el autovalor 3 y siguientes. De hecho para hilos muy delgados presenta el mismo comportamiento inestable que (a) en la figura 2.4. Sin embargo se pueden evitar estas inestabilidades aumentando el número de segmentos en que se divide el hilo. Para la ecuación EFIE extremal las integrales son más singulares que para la ecuación EFIE centrada a causa de los límites de integración.

Otra de las diferencias numéricas de la ecuación EFIE centrada (con la aproximación de hilo delgado) y extremal es su convergencia en función del número de segmentos en que se divide la antena. Tengamos una antena de 1 m y $\Omega=10$. En la figura 2.6 se muestra la admitancia (a) y susceptancia (b) de entrada obtenidas mediante transformada de Fourier de la corriente en la alimentación dividida por la transformada de la señal de excitación. Se representan para varios valores de N_s . La misma representación se hace para la ecuación EFIE extremal en la figura 2.7.

Analizando estas figuras vemos que:

i) Se produce una variación en los máximos y mínimos. Esto se debe al tipo de alimentación aplicada, que depende del tamaño de los segmentos en que dividimos la estructura. Al variar el tamaño de estos se varía la zona alimentada.

ii) En la figura 2.6 la impedancia y la susceptancia tienen frecuencias de resonancia diferentes dependiendo del número de segmentos N_s . Estas frecuencias de resonancia se identifican por los máximos de la admitancia y cortes por cero de la susceptancia. Su localización en el espectro depende únicamente de la geometría de la estructura y no del tipo de alimentación. Por tanto las frecuencias de resonancia no deben depender del número de segmentos en que se divida el hilo. Esto lo verifica la ecuación EFIE extremal, según se muestra en la figura 2.7.

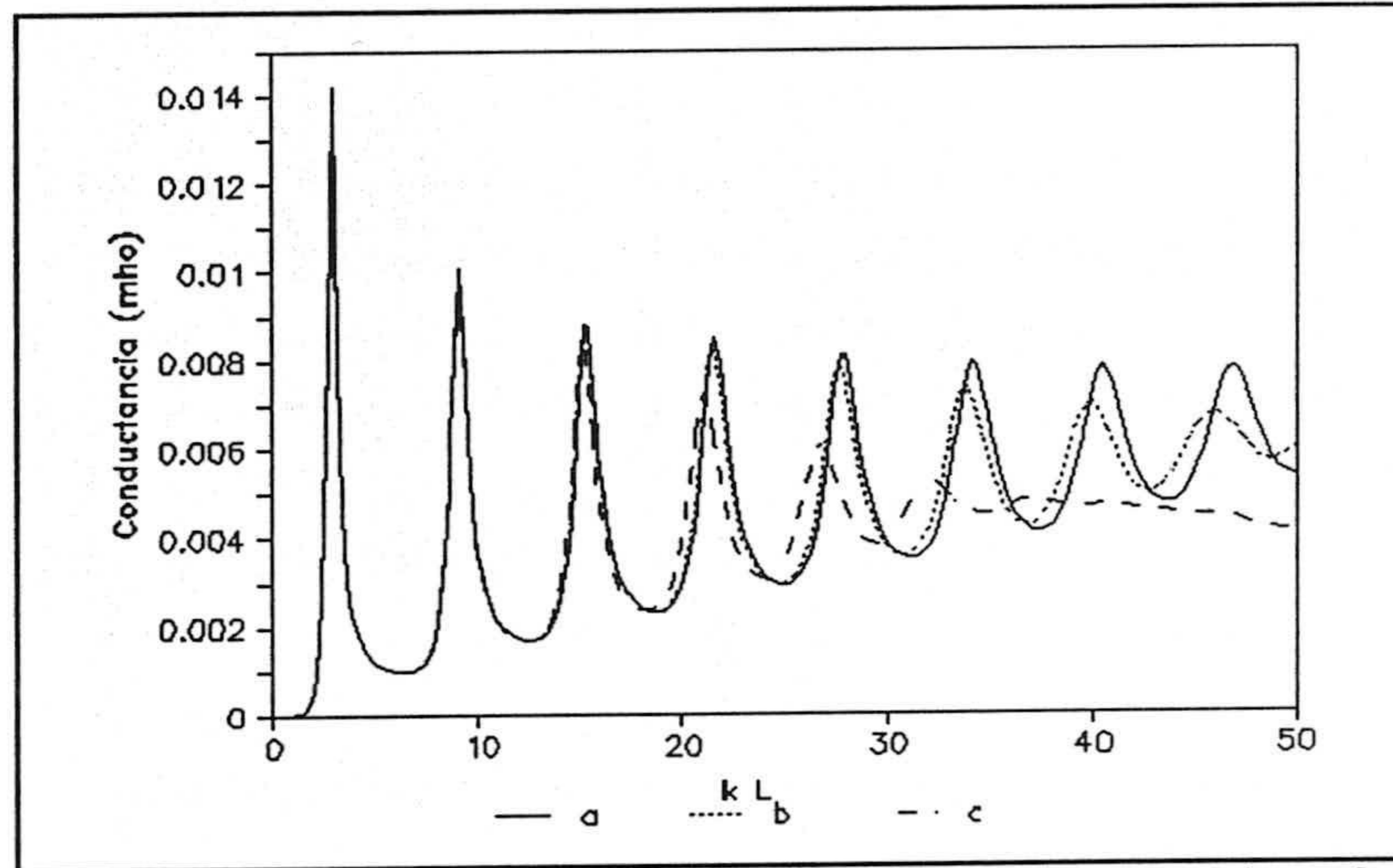


Figura 2.6a. Conductancia de una antena lineal. Ec. EFIE(centrada)-AHD. (a) $N_s=80$. (b) $N_s=50$. (c) $N_s=30$.

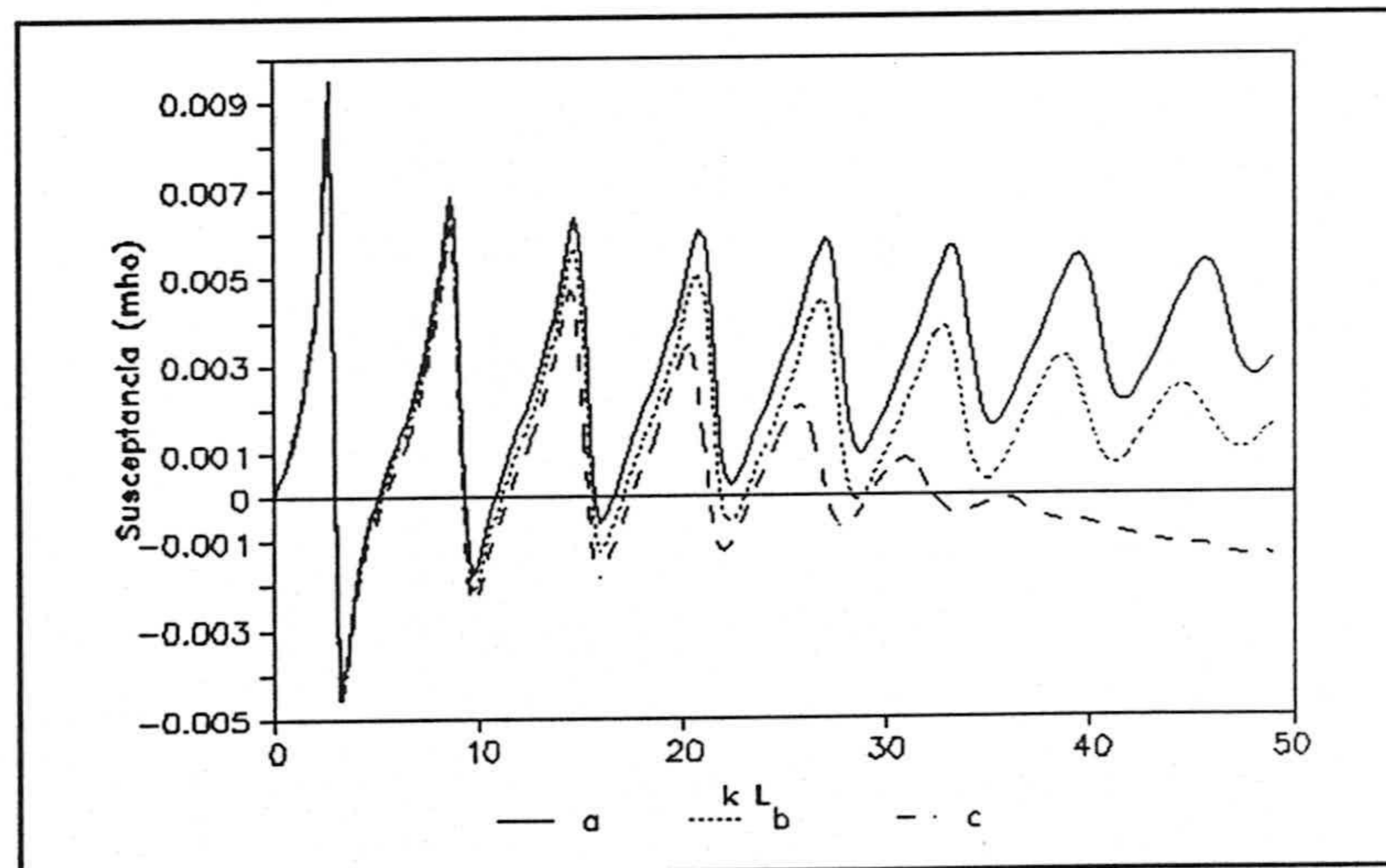


Figura 2.6b. Susceptancia de una antena lineal. Ec. EFIE(centrada)-AHD. (a) $N_s=80$. (b) $N_s=50$. (c) $N_s=30$.

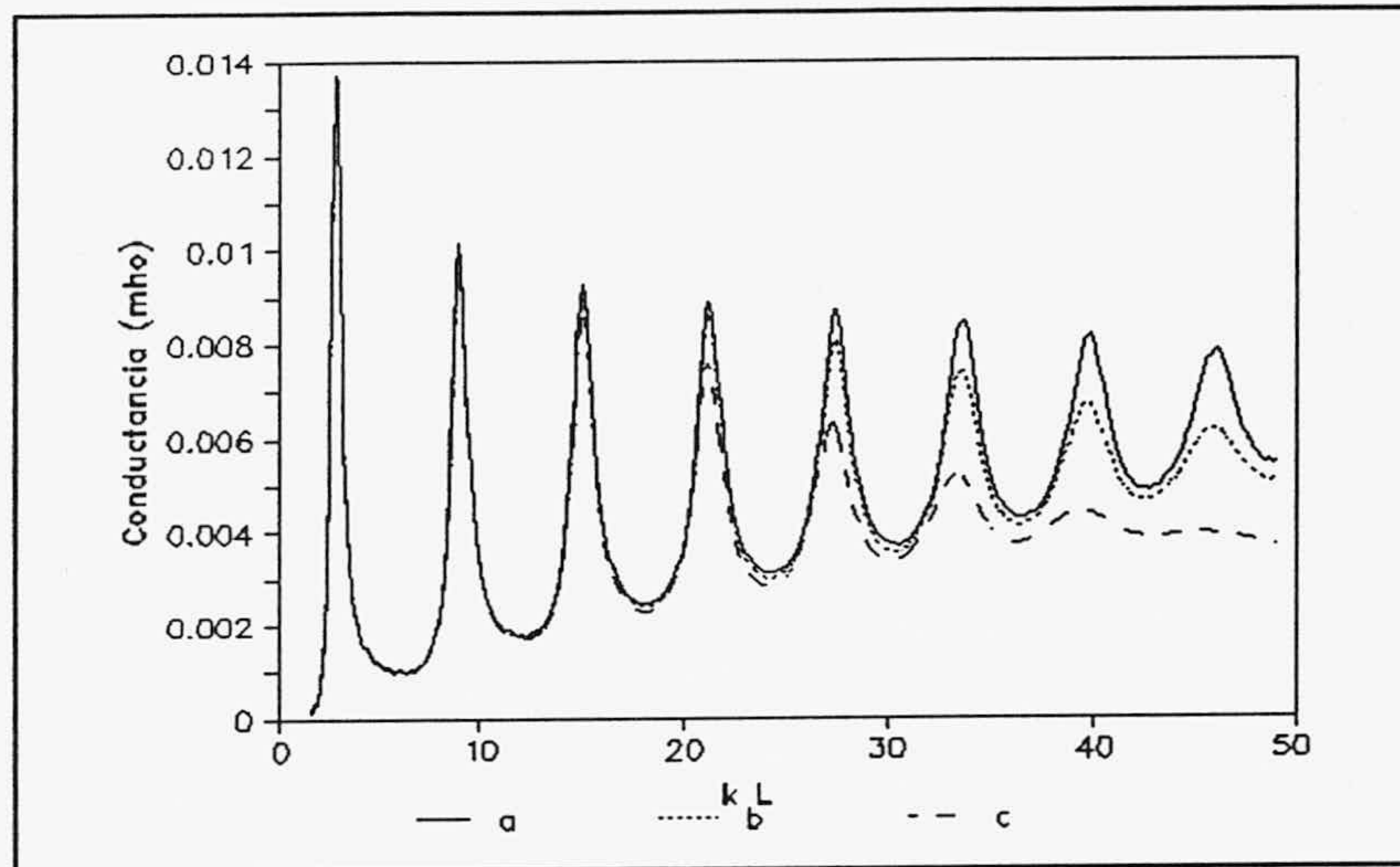


Figura 2.7a. Conductancia de una antena lineal. Ec. EFIE(extremal). (a) $N_s=81$. (b) $N_s=61$. (c) $N_s=41$.

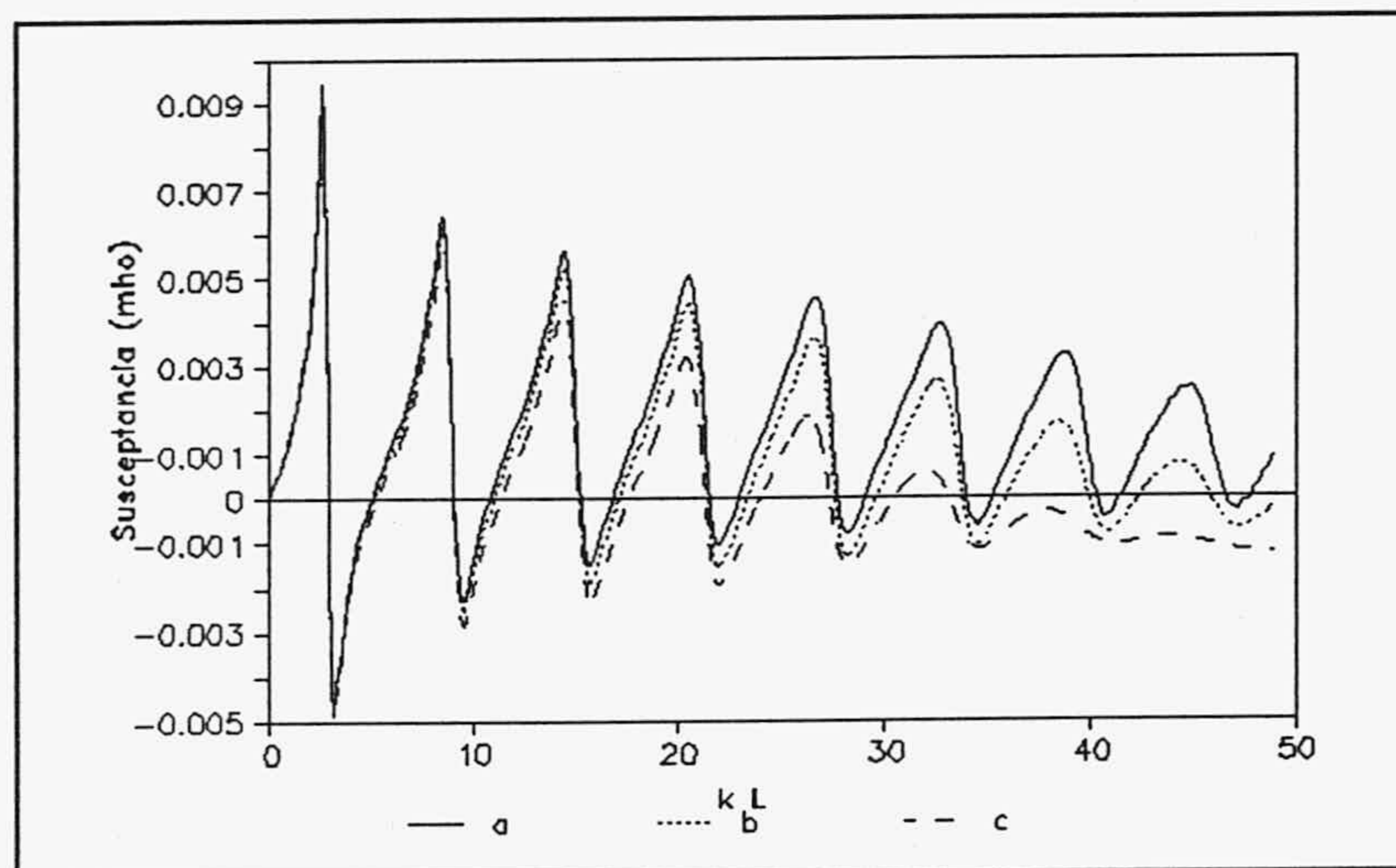


Figura 2.7b. Susceptancia de una antena lineal. Ec. EFIE(extremal). (a) $N_s=81$. (b) $N_s=61$. (c) $N_s=41$.

En las figuras 2.8a y 2.8b se compara la conductancia y susceptancia de una antena lineal alimentada en su centro para distintos métodos. La antena tiene una longitud de 1 m y $\Omega=7$.

La ecuación EFIE extremal se ha resuelto dividiendo la estructura en 41 segmentos, lo que de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2.2, el valor de $k_{\max}L$ se sitúa en torno a 43.

Esta ecuación se ha resuelto con y sin aproximación de intensidad cero en los extremos. Se comparan estos resultados con los obtenidos directamente en el dominio de la frecuencia por NEC-2 [63] y King-Middleton [72]. El primero resuelve la ecuación EFIE dividiendo la estructura en 15 segmentos, pues considera la aproximación de hilo delgado. Establece el margen de garantía de validez de los resultados hasta kL de aproximadamente 11. Los resultados obtenidos por King-Middleton son teóricos, aunque considera la aproximación de intensidad cero en los extremos (al igual que NEC-2). Sin embargo, para parámetros de antena 7 y 8, estos resultados son poco precisos.

Las figuras 2.9a y 2.9b son análogas a las anteriores pero con $\Omega=8$. En este caso NEC-2 resuelve con 28 segmentos y la ecuación EFIE extremal mantiene los 41 segmentos.

En las figuras 2.10a y 2.10b, la representación se hace con $\Omega=10$. NEC-2 utiliza 55 segmentos, y la ecuación EFIE extremal se ha resuelto dividiendo el hilo en 81 segmentos. En estas figuras no se ha representado la opción de intensidad cero en los extremos del hilo, para la ecuación EFIE extremal, por no haber diferencia con respecto a la curva que no la considera.

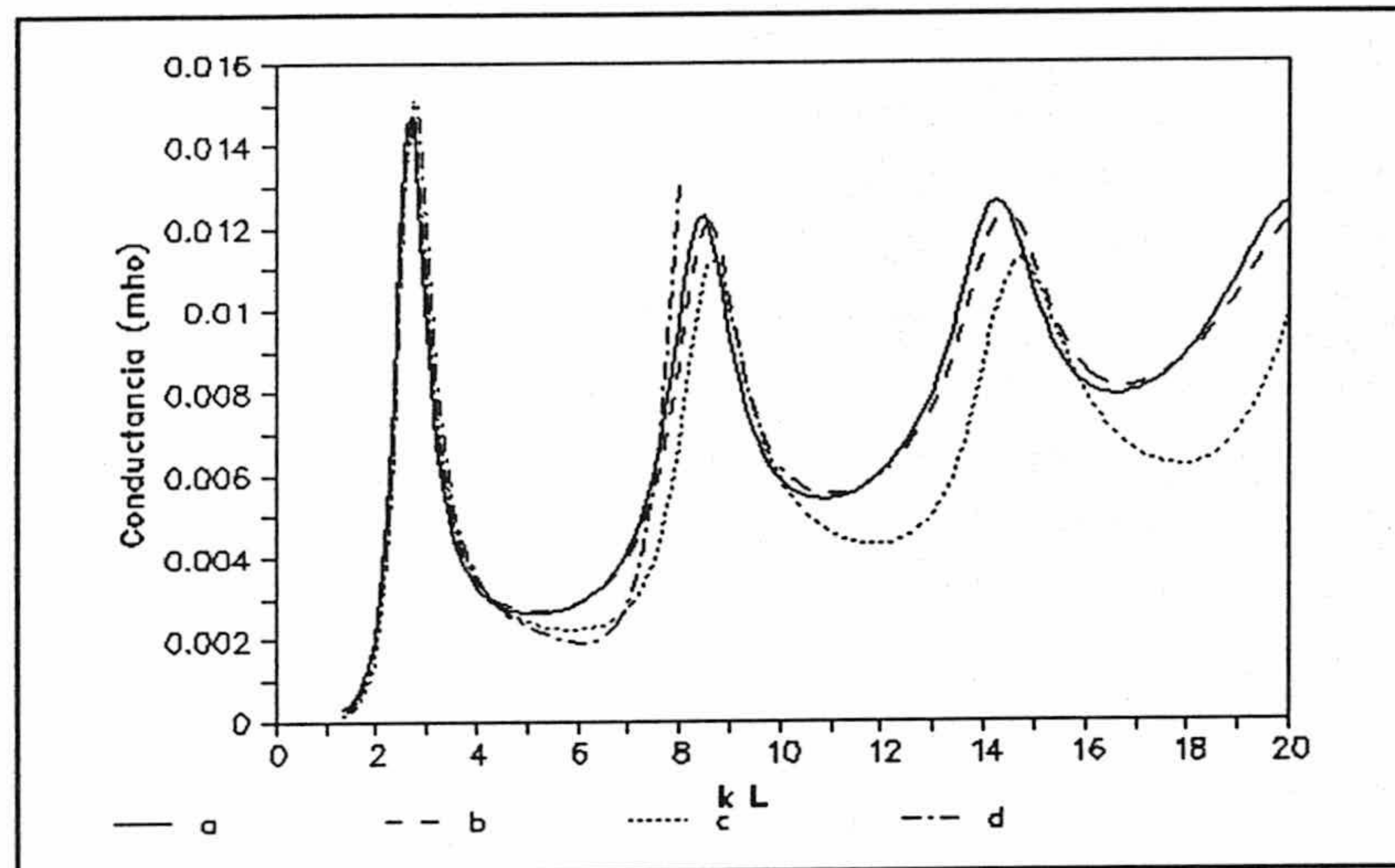


Figura 2.8a. Conductancia de una antena lineal con $\Omega=7$. (a) Ec. EFIE(extremal). (b) Ec. EFIE(extremal)-AICE. (c) NEC-2. (d) King-Middleton.

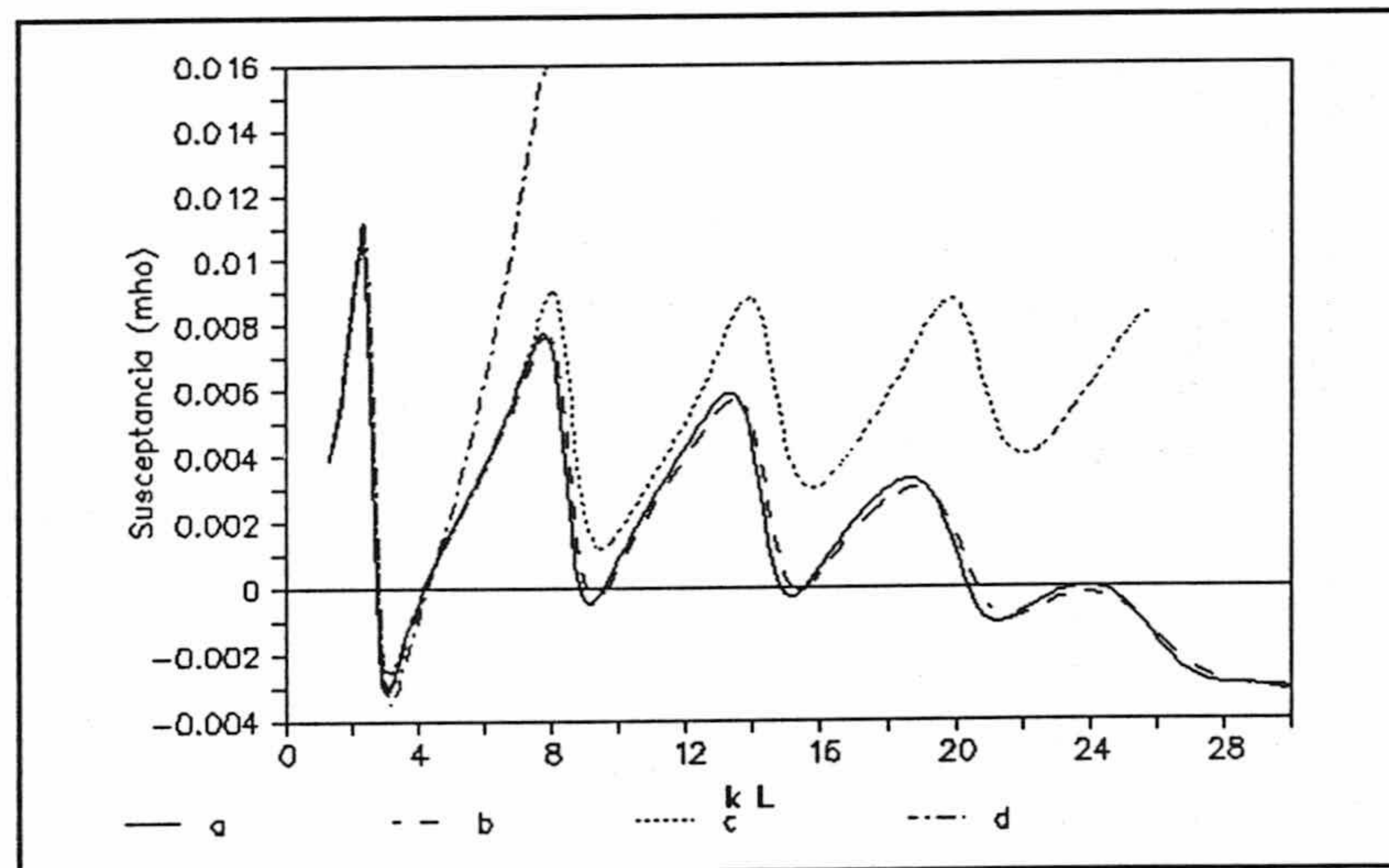


Figura 2.8b. Susceptancia de una antena lineal con $\Omega=7$. (a) Ec. EFIE(extremal). (b) Ec. EFIE(extremal)-AICE. (c) NEC-2. (d) King-Middleton.

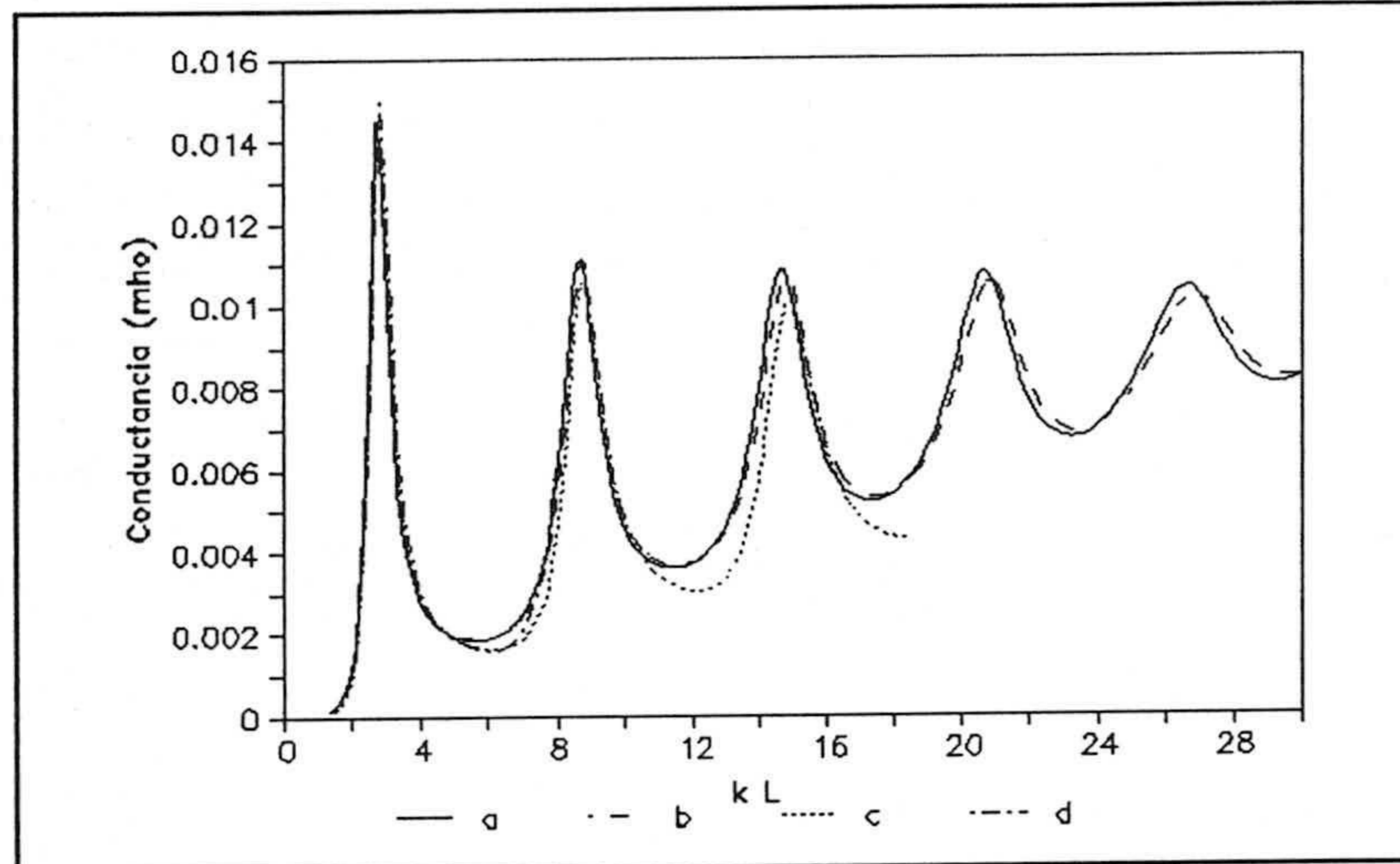


Fig. 2.9a. Conductancia de una antena lineal con $\Omega=8$. (a) Ec. EFIE (extremal). (b) Ec. EFIE (extremal)-AICE. (c) NEC-2. (d) King-Middleton.

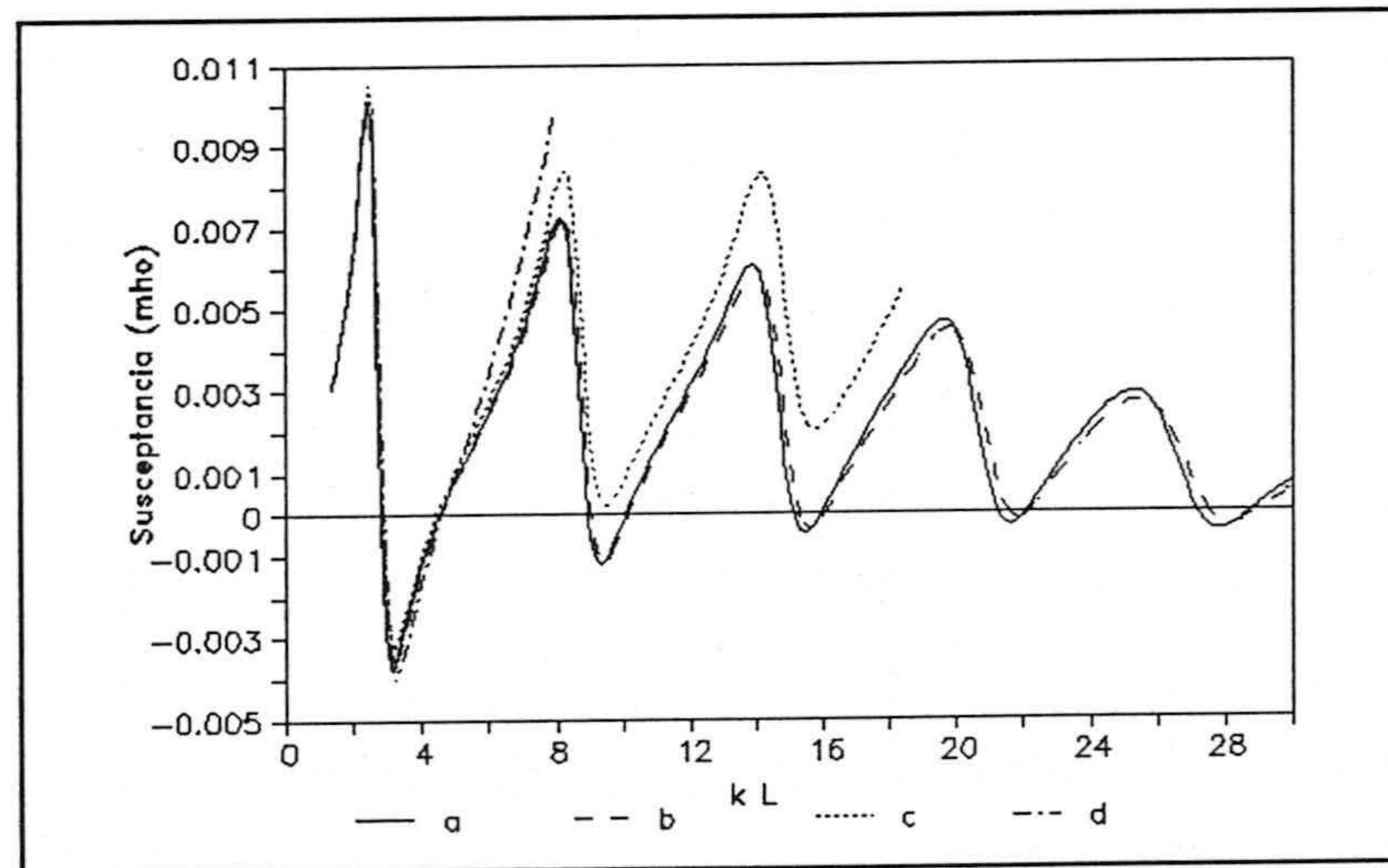


Figura 2.9b. Susceptancia de una antena lineal con $\Omega=8$. (a) Ec. EFIE(extremal). (b) Ec. EFIE(extremal)-AICE. (c) NEC-2. (d) King-Middleton.

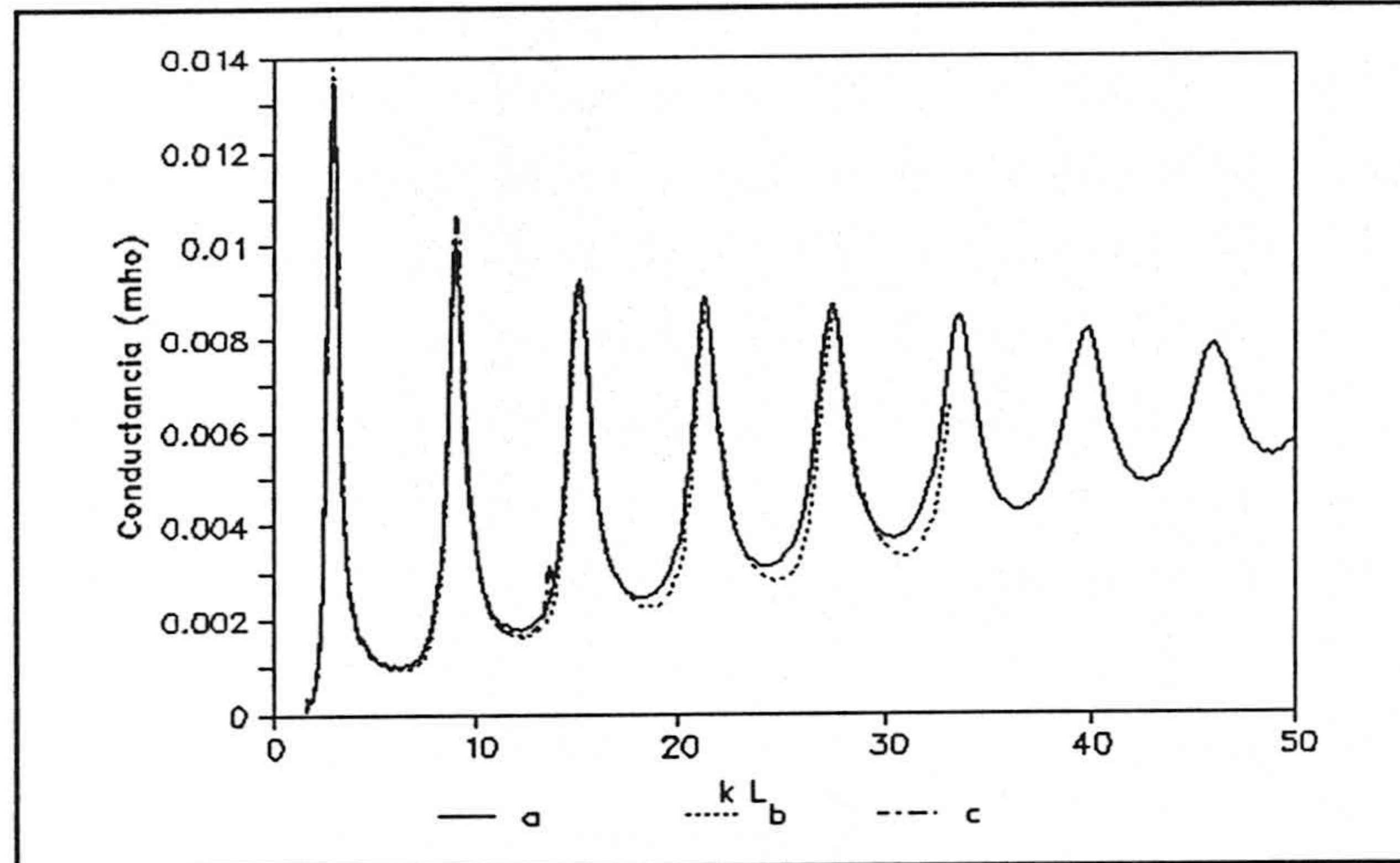


Fig. 2.10a. Conductancia de una antena lineal con $\Omega=10$. (a) Ec. EFIE(extremal). (b) NEC-2. (c) King-Middleton.

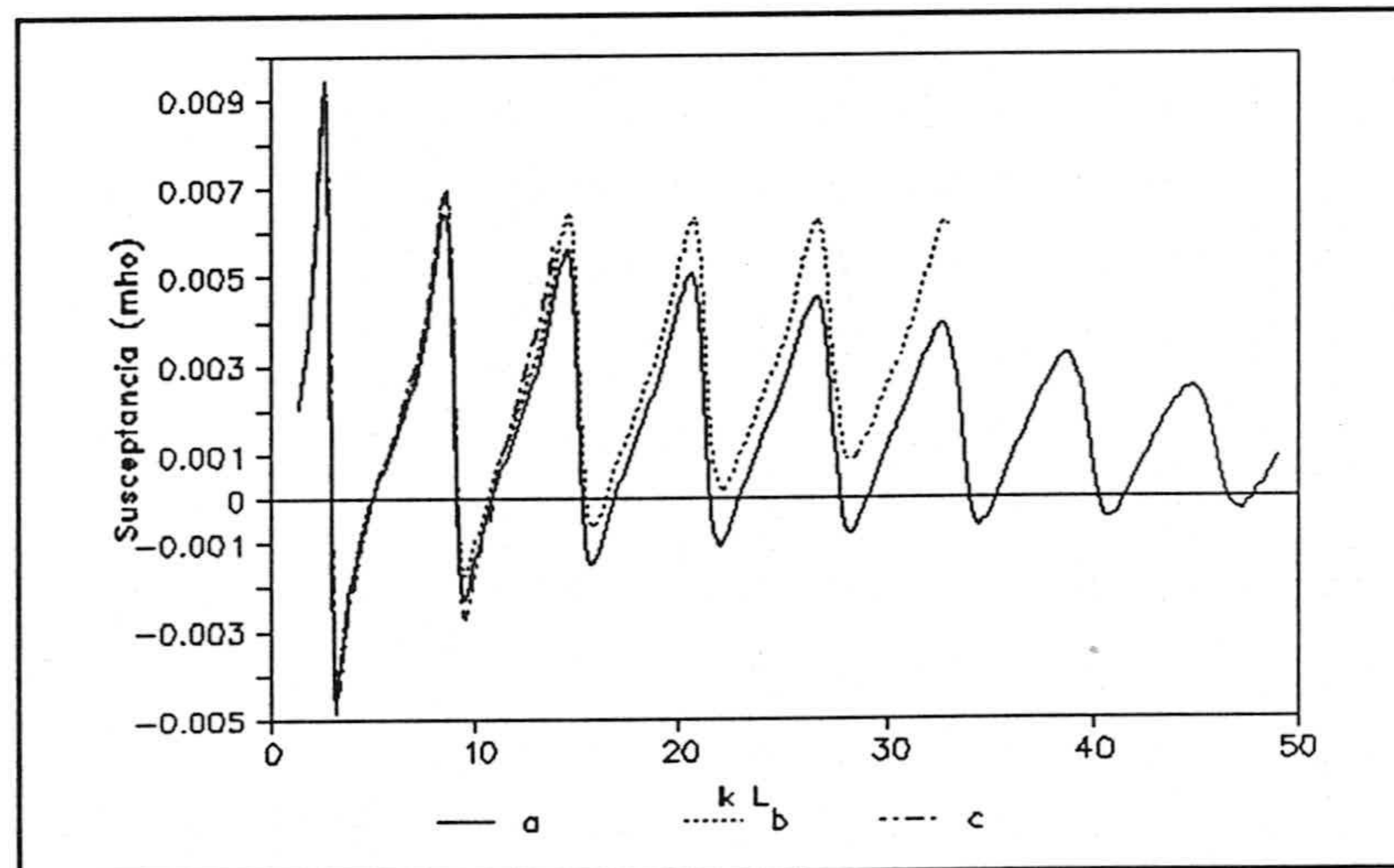


Fig. 2.10a. Susceptancia de una antena lineal con $\Omega=10$. (a) Ec. EFIE(extremal). (b) NEC-2. (c) King-Middleton.

Comparando estas gráficas podemos deducir que:

i) La aproximación de intensidad cero en los extremos del hilo se cumple bien para parámetros de antena 9 o superiores, en todo el rango en frecuencias. Para Ω de 7 u 8 aparecen diferencias en frecuencias intermedias y altas. Estas diferencias se traducen en un desplazamiento de la frecuencia de resonancia hacia frecuencias mayores y una disminución en la amplitud de los picos.

ii) Para $\Omega=7$ tenemos que $a=30$ mm, mientras que $\Delta s=25$ mm, es decir, estamos totalmente fuera del margen de validez para la aproximación de hilo delgado. Puesto que la ecuación EFIE extremal no hace uso de ella, no está limitada en este sentido.

iii) Los resultados para los tres métodos se asemejan para parámetro de antena de 10. En este caso NEC-2 garantiza la validez de los resultados hasta $kL=35$. Para los resultados obtenidos con la ec. EFIE extremal, la limitación viene impuesta por el contenido espectral del pulso de alimentación.

De hecho, el desarrollo adoptado a partir de las condiciones de contorno extendidas y el tratamiento de extremos constituyen mejoras que se adoptan en la versión 4 de NEC.

iv) Se requiere un estudio de la modelización de las fuentes de alimentación en DT. Este estudio lo permite la ecuación EFIE extremal, debido al tratamiento de extremos que hemos planteado, pero no se ha hecho en esta memoria.

Por último, en la figura 2.11 se muestra la intensidad en el final de una hilo recto de $L=1$ m y $\Omega=10$, cuando se ilumina con una onda plana, con vector eléctrico paralelo al eje del hilo, en forma de pulso gaussiano con $g=3 \cdot 10^9$ s⁻¹. Vemos como su orden de magnitud es muy pequeño, comparado con las corrientes inducidas en el resto de la antena, que son del orden de miliamperios.

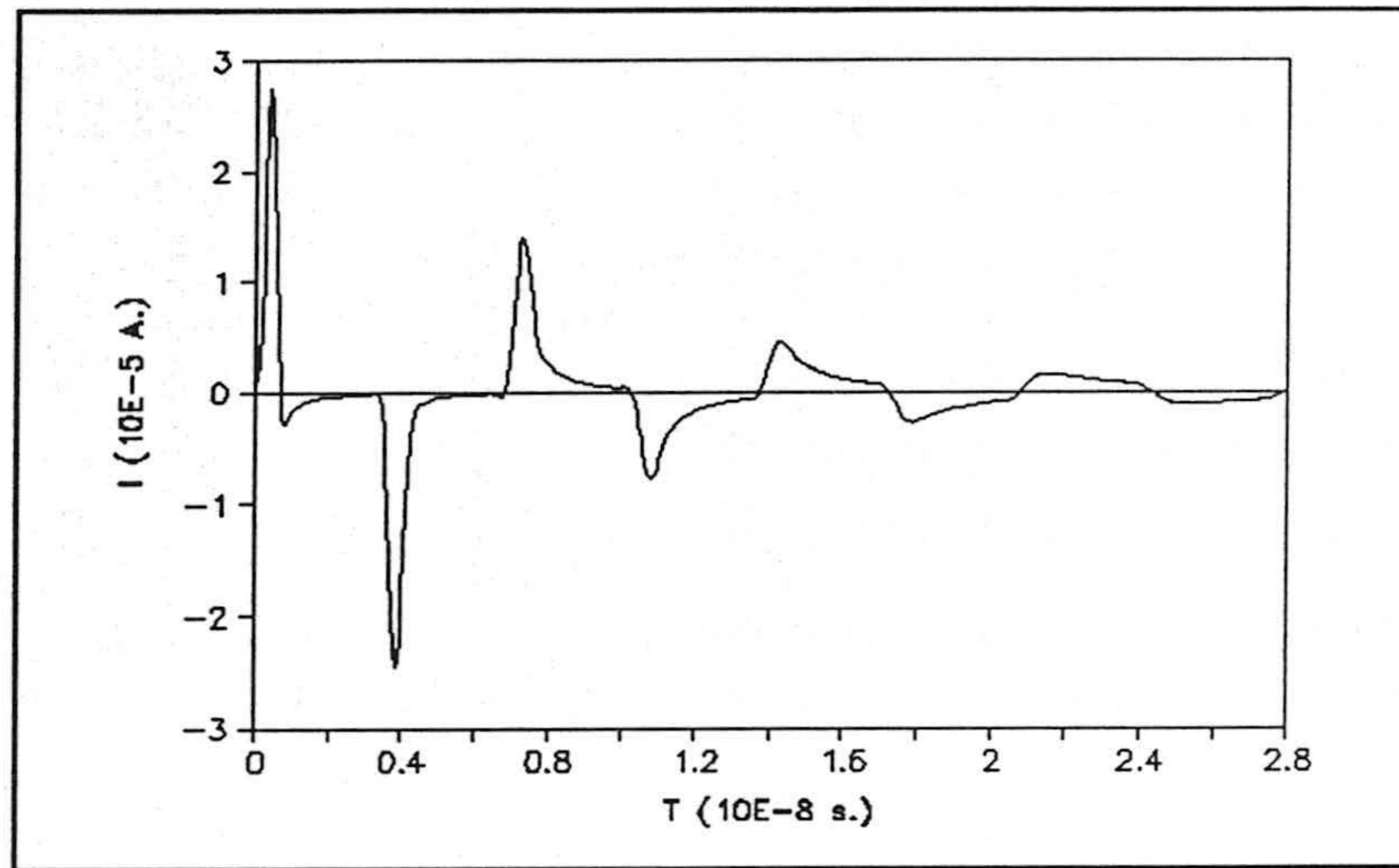


Figura 2.11. Corriente inducida en un extremo del hilo recto.


```

subroutine funintl(int,b,c,xs,xi)
integer u,i
real*8 int(0:4,0:5),b,c,xs,xi,re,r,i0,i1,i2,
#i3,i4,i5,i10,i12,i13,i14,i15,i20,i21,i24,
#i25,i30,i31,i35,i40,i41,i43,i45,a
r(a)=dsqrt((a*a)+b*a+c)
i0(a)=a
i1(a)=dlog(dabs(2.0d0*(r(a)+a)+b))
i2(a)=datan((2.0d0*a+b)/dsqrt(re))
i3(a)=(4.0d0*a+2.0d0*b)/(re*r(a))
i4(a)=i3(a)/(2.0d0*r(a))
i5(a)=i3(a)/(3.0d0*r(a)**2)
i10(a)=a*a/2.0d0
i12(a)=dlog(r(a))
i13(a)=-(2.0d0*b*a+4.0d0*c)/(re*r(a))
i14(a)=i13(a)/(2.0d0*r(a))
i15(a)=-1.0d0/(3.0d0*r(a)**3)
i20(a)=a**3/3.0d0
i21(a)=(a/2.0d0-3.0d0*b/4.0d0)*r(a)
i24(a)=-a/r(a)**2
i25(a)=i24(a)/(2.0d0*r(a))
i30(a)=a**4/4.0d0
i31(a)=(a*a/3.0d0-b*a*5.0d0/12.0d0+5.0d0*b*b/
#8.0d0-2.0d0*c/3.0d0)*r(a)
i35(a)=-a*a/r(a)**3
i40(a)=a**5/5.0d0
i41(a)=(a**3*r(a))/4.0d0
i43(a)=a**3/(2.0d0*r(a))
i44(a)=a**3/r(a)**2
i45(a)=-a**3/(3.0d0*r(a)**3)
re=4.0d0*c-b*b
int(0,0)=i0(xs)-i0(xi)
int(0,1)=i1(xs)-i1(xi)
int(0,2)=2.0d0/dsqrt(re)*(i2(xs)-i2(xi))
int(0,3)=i3(xs)-i3(xi)
int(0,4)=i4(xs)-i4(xi)+2.0d0/re*int(0,2)
int(0,5)=i5(xs)-i5(xi)+8.0d0/(3.0d0*re)*int(0,3)
int(1,0)=i10(xs)-i10(xi)
int(1,1)=r(xs)-r(xi)-b/2.0d0*int(0,1)
int(1,2)=dlog(r(xs)/r(xi))-b/2.0d0*int(0,2)
int(1,3)=i13(xs)-i13(xi)
int(1,4)=i14(xs)-i14(xi)-b/re*int(0,2)
int(1,5)=i15(xs)-i15(xi)-b/2.0d0*int(0,5)
int(2,0)=i20(xs)-i20(xi)
int(2,1)=i21(xs)-i21(xi)+(3.0d0*(b*b)-4.0d0*c)/
#8.0d0*int(0,1)
int(2,2)=xs-xi-b*dlog(r(xs)/r(xi))+(b*b-2.0d0*c)/
#2.0d0*int(0,2)

```



```
int(2,3)=int(0,1)-b*int(1,3)-c*int(0,3)
int(2,4)=i24(xs)-i24(xi)+c*int(0,4)
int(2,5)=i25(xs)-i25(xi)-b/4.d0*int(1,5)+c/2.d0*int(0,5)
int(3,0)=i30(xs)-i30(xi)
int(3,1)=i31(xs)-i31(xi)-(5.d0*b**3/16.d0-3.d0*c*b/4.d0)
#*int(0,1)
int(3,2)=-c*int(1,2)-b*int(2,2)
int(3,3)=int(1,1)-b*int(2,3)-c*int(1,3)
int(3,4)=int(1,2)-c*int(1,4)-b*int(2,4)
int(3,5)=i35(xs)-i35(xi)+b/2.d0*int(2,5)+2.d0*c*int(1,5)
int(4,0)=i40(xs)-i40(xi)
int(4,1)=i41(xs)-i41(xi)-7.d0/8.d0*b*int(3,1)-3.d0/4.d0
# *c*int(2,1)
int(4,2)=int(2,0)-b*int(3,2)-c*int(2,2)
int(4,3)=i43(xs)-i43(xi)-5.d0/4.d0*b*int(3,3)
#-1.5d0*c*int(2,3)
int(4,5)=i45(xs)-i45(xi)-b/2.d0*int(3,5)+int(2,3)
return
end
```


70

```
          SUBROUTINE LIBRO(C,N,M)
          REAL*8 C(M,M),T,R
9          DO 1 KK=1,N
            K=KK
            DO 13 I=1,N
              IF(I.EQ.K) GOTO 13
              R=C(I,K)/C(K,K)
              DO 14 J=1,N
                IF(J.EQ.K)GOTO 14
                C(I,J)=C(I,J)-R*C(K,J)
14          CONTINUE
              C(I,K)=-R
13          CONTINUE
              R=C(K,K)
              C(K,K)=1.DO
              DO 12 J=1,N
                C(K,J)=C(K,J)/R
12          CONTINUE
1          CONTINUE
          RETURN
          END
```

CAPITULO 3. UNIONES DE HILOS

3.1. Introducción.

Llamaremos unión a la estructura física donde se conectan entre sí hilos rectos con características de longitud y radios generales.

Así pues un tratamiento riguroso de la unión implica un conocimiento exacto de su geometría. Sin embargo, si el tamaño eléctrico de la unión es pequeño podemos plantear unas aproximaciones que hagan que su estudio sólo dependa de la geometría de los hilos que la determinan, es decir, de sus radios y de sus orientaciones relativas.

El tratamiento de uniones efectuado hasta ahora en DT [74]-[76] traslada un método planteado en DF [62], [73]. Consiste en sustituir la unión por unos segmentos adicionales de solapamiento de unos hilos con otros. De esta manera cada hilo tiene ambos finales libres y por tanto se puede imponer la condición de intensidad cero.

Además, estos solapamientos se eligen de manera que se verifiquen estas dos condiciones [61], [62], [65], [66], [77]:

i) La primera ley de Kirchhoff que establece que la suma de las corrientes que entran a la unión es igual a la suma de las que salen. Es decir considera cuasiestáticos a los campos cercanos a la unión.

ii) Conservación de la componente tangencial del campo eléctrico en la unión. Esta condición establece la igualdad del producto $q_i \psi_i$ para cada hilo que converge en la unión. q_i es la densidad lineal de carga y ψ_i viene dado por [65]:

$$\psi_i = 2 \left[\ln \left(\frac{2}{ka_i} \right) - 0.5772 \right] \quad (3.1)$$

a_i es el radio del hilo y k el número de ondas. Esta expresión se particulariza para hilos muy finos y con diferencia de radios pequeña, por lo que la evaluación final es la igualdad de las densidades de carga, esto es, igualdad de las derivadas parciales de las intensidades respecto a la variable espacial local de cada hilo.

La primera condición es aplicable cuando la excitación tiene un espectro pequeño y cuando la unión se puede considerar como suave. Por ejemplo en la unión de hilos rectos formando un ángulo de 90 grados tiene lugar una acumulación de carga importante, al igual que en la unión de hilos de radios diferentes.

La segunda condición en su formulación inicial es válida para uniones de hilos de radios diferentes. En su forma final conlleva además una simetría que puede ser válida en DF en donde todas las corrientes han alcanzado su estado estacionario, pero no en DT en donde el transitorio viene determinado por la iluminación, que puede inducir corrientes en una parte de la estructura y en otras no.

Para el caso de unión de dos hilos rectos de radios diferentes estos se consideran como un solo hilo y se desprecia cualquier tratamiento de la superficie de unión.

Recientemente se ha propuesto [78], [79] un tratamiento numérico alternativo que conlleva las mismas hipótesis pero sin considerar solapamientos. Básicamente el método consiste en sustituir el solapamiento por una interpolación de la corriente en el final de cada hilo que converge a la unión con la suma de las corrientes finales del resto de los hilos. Corriente final quiere decir corriente en el punto más cercano a la unión. Estas condiciones añaden ecuaciones al sistema por lo que su inclusión se efectúa a través del promedio que supone multiplicar el sistema por la matriz traspuesta. Este método da idénticos resultados que el método de solapamientos para estructuras sencillas. Estructuras más complicadas, esto es,

con más uniones, sobrecondiciona demasiado al sistema y la solución empeora.

El método que se propone en esta memoria no tiene en cuenta la estructura física de la unión, pero sí la de los hilos que la determina. Constituye pues un modelo de la unión que podemos considerar más físico de la unión, comparándolo con el modelo más numérico del método de solapamientos.

Por otra parte, no se considera ninguna de las condiciones del modelo de solapamientos. El método propuesto distingue distintos modelos de unión:

i) Uniones de hilos en que algunos son paralelos, teniendo éstos igual radio.

ii) Uniones de hilo en que algunos son paralelos, pero con distinto radio.

iii) El resto.

3.2 Planteamiento general.

Consideremos una unión donde convergen N_H hilos. El campo eléctrico total vendrá determinado por:

$$\alpha \vec{E} = \vec{E}^i + \sum_{j=1}^{N_H} \vec{E}_j^s + \vec{E}_U \quad (3.2)$$

donde \bar{E}_j^s es el campo dispersado por cada hilo y \bar{E}_u es el campo creado por la estructura física de la unión. El coeficiente α tiene el mismo significado que en la ecuación 1.2.

Si particularizamos para el eje del hilo k podemos desarrollar \bar{E}_k^s como se ha expuesto en el apartado 1.7. El campo dispersado por el resto de los hilos lo obtenemos a partir del potencial aproximado, esto es, con la aproximación de hilo delgado. El campo dispersado por la unión lo dejaremos sin desarrollar por ahora.

Si discretizamos las ecuaciones obtenidas según el desarrollo expuesto en el Capítulo 2, podemos generalizar la ecuación (2.27) en la forma:

$$\begin{aligned}
 & E_{Lk}^i\left(u, v\Delta t + \frac{a}{c}\right) + E_{Lk}^u\left(u, v\Delta t + \frac{a}{c}\right) = \\
 & - \sum_{j=1}^{N_H} \left\{ \sum_{i=1}^{N_{s_j}} \sum_{l=k}^{k+1} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,u,l,m}^{k,j} I_{i+1,v-\tilde{r}_{iu}+m}^j \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + C_{i,u,l,m}^{k,j} Y_{i+1,v-\tilde{r}_{iu}-1+m}^j \right\} \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{i=1 \\ i=N_{s_j}+1}}^{n+2} \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ T_{i,u,m}^{t,j} I_{i,v-\tilde{r}_{iu}+m}^j + S_{i,u,m}^{k,j} Y_{i,v-\tilde{r}_{iu}-1+m}^j \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

El entero k denota el hilo donde resolvemos la ecuación. Los superíndices k, j en los términos F, C, T y S denotan puntos campo en el hilo k y fuentes en el hilo j . E_{Lk}^u denota el campo generado por la unión en el eje del hilo k .

El siguiente paso a dar es obtener el valor del campo generado por la unión para cada caso particular de los expuestos en el apartado 3.1.

3.3 Unión de dos hilos coaxiales de diferentes radios.

3.3.1 Contribución de la unión.

Sean a_1 y a_2 , L_1 y L_2 los radios y longitudes respectivas de sendos hilos. Dividamos los hilos en N_{s1} y N_{s2} segmentos de igual longitud. Estos segmentos nos determinan $N_{s1}+1$ y $N_{s2}+1$ puntos campo situados en el eje de la estructura.

En el plano de unión se sitúan dos puntos campo, que coinciden en el espacio pero que formalmente pertenecen a hilos diferentes, y llevan asociadas como incógnitas las intensidades de hilo confluyentes en la unión. Sean $I_{N_{s1}+1}^1 = I_1$ y $I_1^2 = I_2$ estas corrientes.

Para evaluar la contribución de la superficie lateral de unión S_U aplicamos los mismos razonamientos que en la tapa final del hilo, apartado 1.7. Distinguiendo esta contribución para puntos campo situados en el plano de unión y puntos fuera de él, tendremos que:

i) La tapa no da contribución a la componente axial del campo eléctrico en ambos puntos campo situados en el plano de unión, puesto que ahora la densidad superficial de carga está definida para $a_1 < \rho < a_2$, suponiendo $a_1 < a_2$.

ii) Para los puntos campo situado fuera del plano, podemos recoger la contribución de la tapa en forma de anillos de carga con radios a_1 y a_2 . Para demostrar ésto, sólo hay que aplicar la ecuación (1.35) a esta situación.

Así pues, el campo generado por la tapa de unión podemos tomarla en la ecuación (3.3) a través de los operadores T y S que como vimos contienen el término de carga anular.

3.3.2 Ecuación de continuidad para la unión.

En el plano de unión coinciden dos puntos campo correspondientes a las corrientes confluyentes en la unión. Puesto que los hilos son coaxiales las ecuaciones de ambos puntos coinciden por lo que el sistema es singular. Se requiere por tanto una condición que de cuenta de la continuidad de las corrientes, o lo que es igual, de la continuidad de la densidad de carga en todas las superficies.

Sean I_1 e I_2 a las corrientes confluyentes en la unión, la primera entrando en la unión, y la segunda saliendo, y ambas positivas. Definimos:

$$\vec{J}_1 = \frac{I_1}{2\pi a_1} \hat{\rho} \quad (3.4a)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{I_2}{2\pi a_2} \hat{\rho} \quad (3.4b)$$

La densidad lineal de carga en la superficie de unión la podemos expresar como:

$$q(\rho, t) = - \int_0^{2\pi} \rho \int_0^t \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho J_\rho) d\phi dt = \quad (3.5)$$

$$= - \int_0^t \int_0^{2\pi} \partial_\rho (\rho J_\rho) = - \int_0^t 2\pi \partial_\rho (\rho J_\rho)$$

Si hacemos una aproximación lineal para la densidad de carga tendremos:

$$J_\rho(\rho) = \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} \rho + \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1} \quad (3.6)$$

y por tanto, si sustituimos (3.6) en (3.5) podemos escribir:

$$-\partial_t q(\rho \rightarrow a_1) = -4\pi a_1 \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} - 2\pi \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1}$$

$$-\partial_t q(\rho \rightarrow a_2) = 4\pi a_2 \frac{J_2 - J_1}{a_2 - a_1} + 2\pi \frac{J_1 a_2 - J_2 a_1}{a_2 - a_1}$$

Que expresadas en términos de I_1 e I_2 :

$$-\partial_t(\rho \rightarrow a_1) = \frac{I_1 \left(2 - \frac{a_2}{a_1}\right) - I_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{a_2 - a_1} \quad (3.7a)$$

$$-\partial_t(\rho \rightarrow a_2) = \frac{I_2 \left(2 - \frac{a_1}{a_2}\right) - I_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)}{a_2 - a_1} \quad (3.7b)$$

Ahora efectuaremos el mismo límite por cada hilo. Es decir evaluamos:

$$\left[\frac{\partial I_{ij}}{\partial s_i''} \right]_{\substack{s_i'' \rightarrow 0 \\ s_i'' \rightarrow \Delta s}}$$

Sustituyendo los coeficientes de interpolación tendremos:

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' = \Delta s} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{1}{2} I_{N_{s_1}-1}^1 + 2 I_{N_{s_1}}^1 + \frac{3}{2} I_{N_{s_1}+1}^1 \right) \quad (3.8a)$$

$$\left[\frac{\partial I_2}{\partial s_i''} \right]_{s_i'' = 0} = \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{3}{2} I_1^2 - 2 I_2^2 + \frac{1}{2} I_3^2 \right) \quad (3.8b)$$

Tenemos dos posibles ecuaciones, igualando (3.7a) y (3.8a), y por otra parte (3.7b) y (3.8b). Ambas ecuaciones son válidas. Como sólo necesitamos una ecuación, aplicaremos aquella que tiene más peso, y según (3.1) será aquel límite por el hilo más grueso. Si los dos hilos tienen el mismo radio la ecuación de continuidad viene definida igualando (3.8a) y (3.8b).

3.4 Uniones de hilos con orientación y radios arbitrarios.

Tengamos una unión formada por N_H hilos con características totalmente generales. El problema es determinar su contribución al campo dispersado en la ecuación (3.3). Para ello vamos a tener en cuenta las siguientes consideraciones:

i) La unión física se compone de una superficie limitada por las circunferencias definidas por los extremos de los hilos que convergen en la unión.

ii) Si repetimos el razonamiento implícito en las ecuaciones (1.33)-(1.35) podemos recoger la contribución de la unión en forma de anillos de densidad lineal de carga que aparecen en los términos T y S de la ecuación (3.3).

iii) Los N_H puntos campo situados en la misma unión tienen la misma coordenada y se sitúan en el punto central de todos los anillos de carga.

Con todo lo anterior podemos establecer el sistema de ecuaciones (3.3) teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

i) Si los hilos no son coaxiales, el sistema formado es totalmente independiente.

ii) Si aparecen hilos coaxiales estableceremos una ecuación de continuidad, dependiendo si tienen igual radio o no, según se especificó en el apartado 3.3.2.

Por último señalar la importancia que tiene la discretización que hemos adoptado, pues situa los puntos campo en las condiciones óptimas para el tratamiento numérico desarrollado.

3.5 Programa Fortran desarrollado.

El programa de ordenador desarrollado tiene como entradas:

i) Coordenadas inicial y final de cada hilo.

ii) Radios y número de segmentos en que se dividen los hilos.

iii) Alimentación.

A partir de estos datos el programa determina el número de uniones, hilos que convergen, etc.

La formación de la matriz del sistema, se hace imponiendo en cada caso la condición de continuidad necesaria. Así el programa prueba si existen hilos coaxiales en una unión, si tienen igual radio o no, y sustituye la fila correspondiente por la condición de continuidad. El usuario sólo tiene que establecer el margen de tolerancia para la condición de hilos coaxiales e igualdad de radios.

3.6 Resultados.

Se muestran en este apartado los resultados obtenidos aplicando el tratamiento de uniones expuesto anteriormente. Los resultados se comparan con NEC-2 y con los distintos tratamientos de uniones del DOTIG1 [78], [79].

Las geometrías analizadas han sido: unión de hilos de distinto radio, unión de dos hilos en ángulo, unión de cuatro hilos en cruz, y por último una malla de 12 hilos con 9 uniones.

3.6.1 Uniones de hilos de diferente radio.

Tengamos dos hilos rectos coaxiales de radios diferentes, figura 3.1.

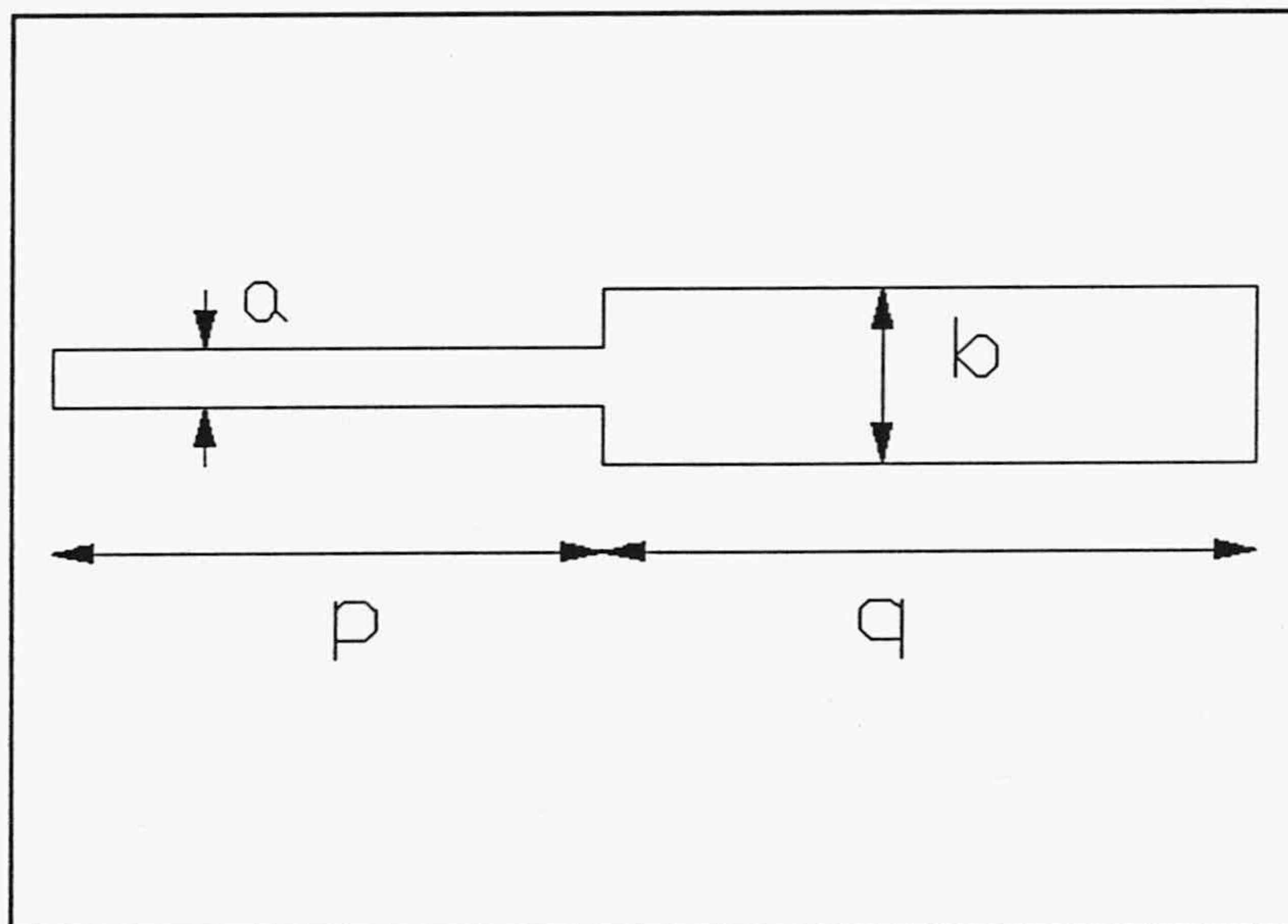


Fig. 3.1. Unión de hilos coaxiales de diferentes radios.

Se han analizado los siguientes casos:

i) $a=0.002$ m., $b=0.004$ m., $p=0.3$ m., $q=0.2$ m.

La excitación es una onda plana en forma de pulso gaussiano con parámetro $g=5 \cdot 10^9$ s⁻¹. El vector campo eléctrico es paralelo al eje de los hilos y con sentido del hilo grueso al fino.

En la figura 3.2 se muestra la corriente inducida en el hilo pequeño en un punto muy próximo a la unión. Se comparan los resultados obtenidos con los distintos tratamientos de uniones en el DOTIG1: (a) solapamientos, (b) medio-segmento, (c) suma. La curva (d) corresponde al tratamiento de unión planteado en esta memoria.

Al ser el grueso de los hilos uno doble del otro las diferencias que aparecen son pequeñas. Sólomente para tiempos avanzados se observa que el nuevo tratamiento se desfasa con respecto al DOTIG1.

En la figura 3.3 se representa el módulo de la transformada de las curvas de la figura 3.2 y se compara con NEC-2 (d). Vemos como NEC-2 y DOTIG1 se asemanan, mientras que (e) se diferencia algo del resto, pero no en demasía.

Así pues podemos concluir que para diferencias pequeñas de radio los resultados se asemejan para todos los tratamientos de uniones.

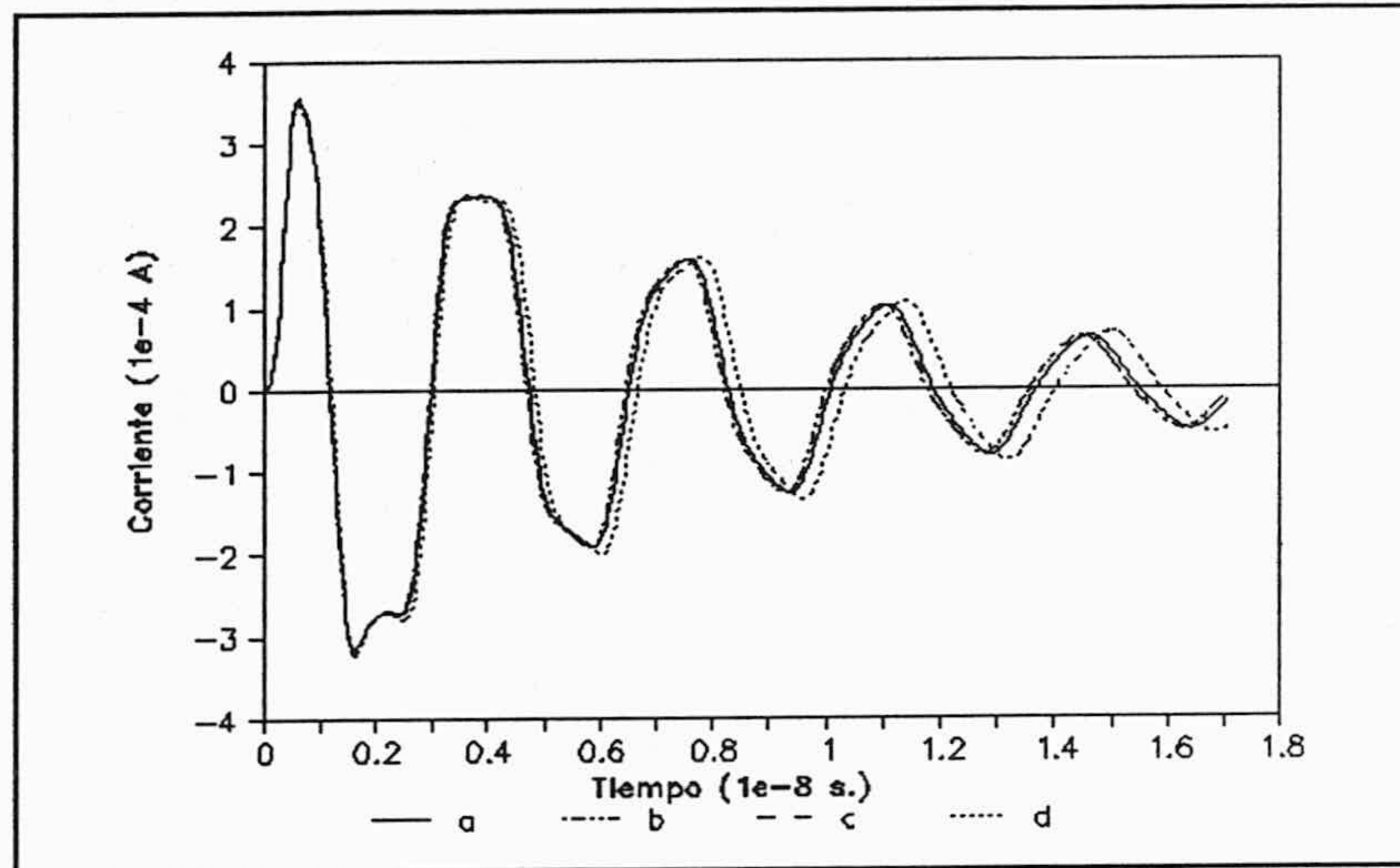


Fig. 3.2. Unión de hilos de diferentes radios. (a) DOTIG1 solapamientos. (b) DOTIG1 medio-segmento. (c) DOTIG1 suma. (d) Nuevo tratamiento.

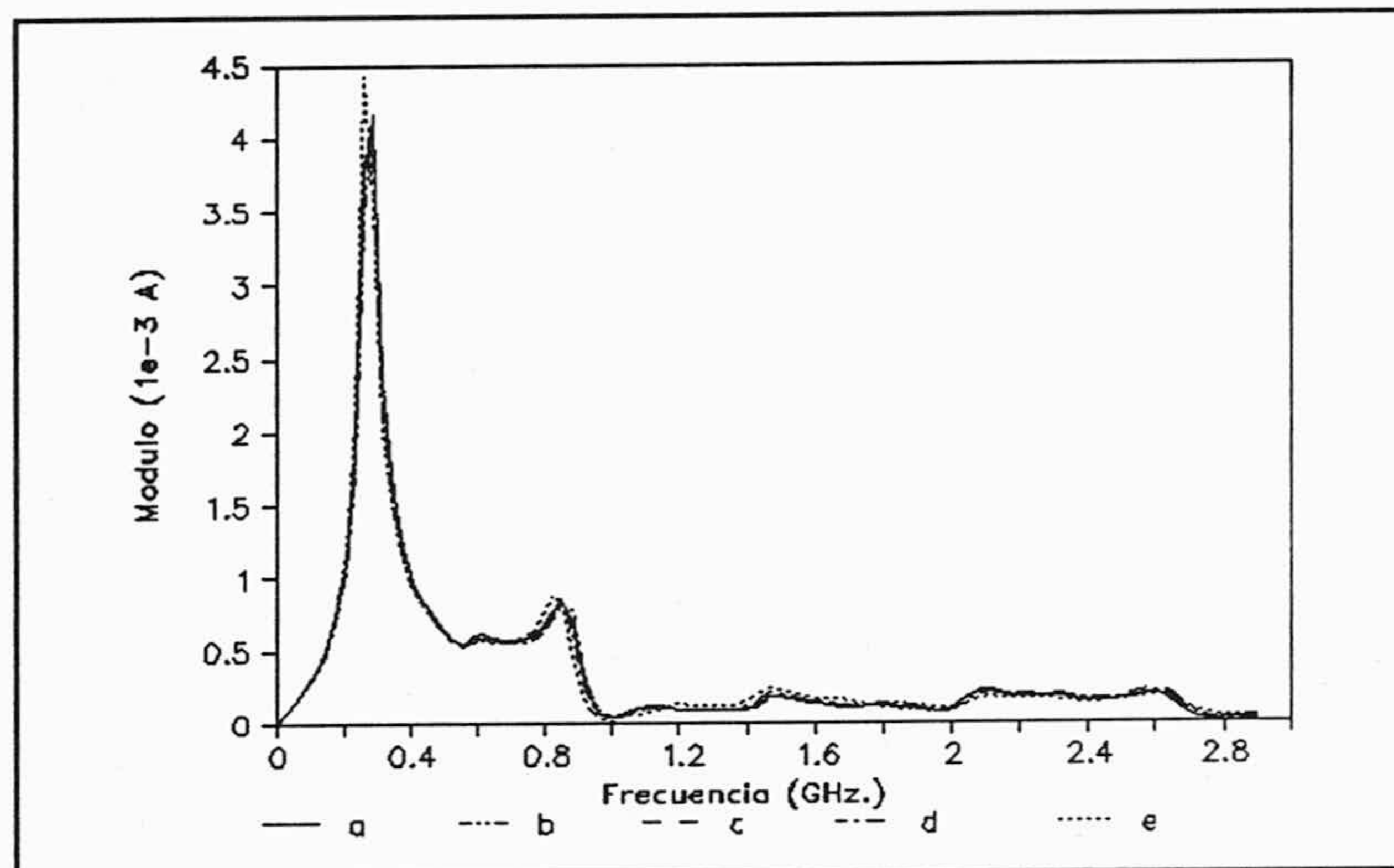


Fig. 3.3. Módulo de la transformada de la figura 3.2.

ii) $a=0.002$ m., $b=0.02$ m., $p=0.3$ m., $q=0.2$ m.

La excitación es la misma que en el caso *i*). Observese que la diferencia entre diámetros es de un factor 10. Este valor está fuera del rango de NEC-2. DOTIG1, con cualquier tratamiento de uniones, da una señal inestable e incoherente desde los primeros instantes del proceso de solución. Con el nuevo tratamiento se obtienen los resultados que se muestran en la figura 3.4. En ella se representan las corrientes para distintos puntos de la estructura. Así (a) corresponde al hilo fino y a una distancia de un intervalo espacial de la unión (la estructura se ha dividido en 50 segmentos). (b) corresponde a la corriente en la unión en el hilo fino. (c) es la corriente en la unión en el hilo grueso. (d) es la corriente en el hilo grueso y a una distancia de un segmento de la unión.

A partir de la figura podemos ver como se produce una fuerte acumulación de carga en el hilo grueso, cosa que no ocurre en el hilo fino, lo que concuerda con el análisis planteado en [65].

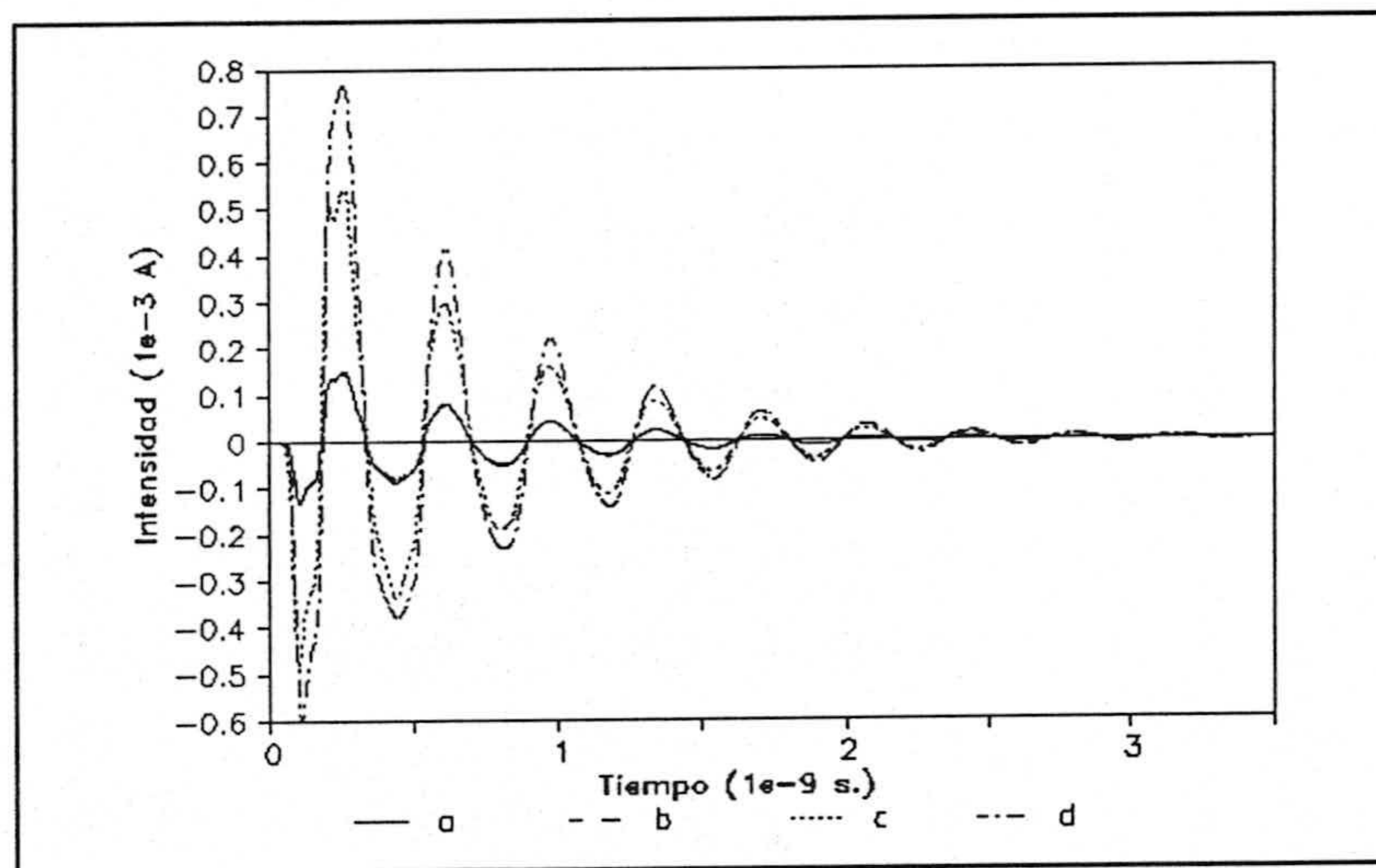


Fig. 3.4. Corriente inducida en distintos puntos próximos a la unión de hilos coaxiales de radio uno 10 veces el otro. Véase texto.

3.6.2 Unión de dos hilos en ángulo.

Tengamos dos hilos rectos de diámetro $a=0.013$ m. y longitud de 0.5 m. La iluminación es una onda plana en forma de pulso gaussiano análogo al utilizado en el apartado anterior. El campo eléctrico se orienta paralelamente al eje de uno de los hilos y apuntando hacia la unión. Como valores del ángulo m se han tomado 90, 60 y 30 grados, figura 3.5.

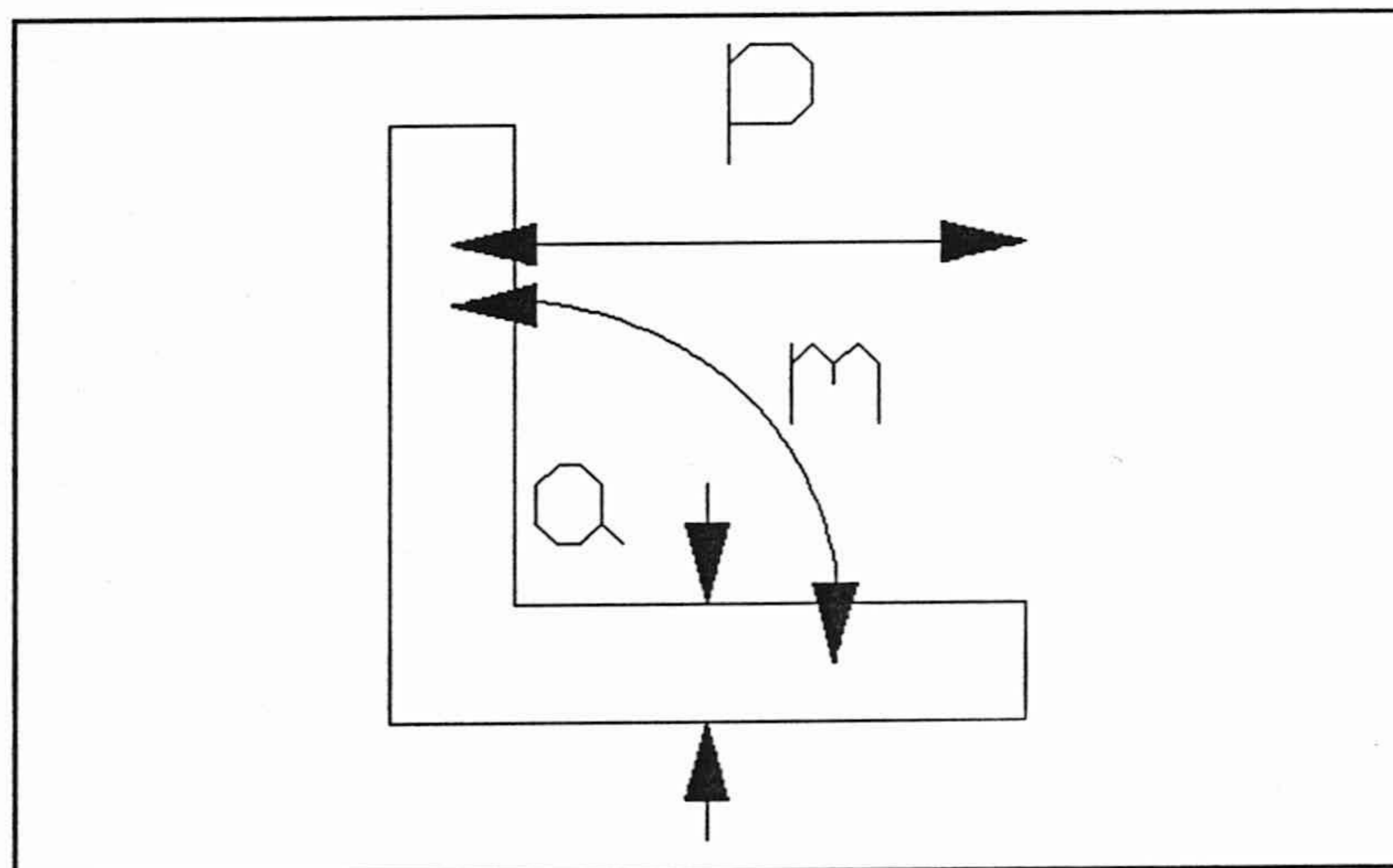


Fig. 3.5. Unión de dos hilos en ángulo.

En las figuras 3.6, 3.8 y 3.10 se representa la corriente en un punto muy próximo a la unión en el brazo paralelo al campo eléctrico incidente, para el nuevo tratamiento de uniones y para DOTIG1, que considera a los dos hilos como uno solo. Corresponden a $m=90$, 60 y 30 grados respectivamente.

Las figuras 3.7, 3.9, 3.11 se muestran las transformadas de estas corrientes (en módulo) y se comparan con NEC-2.

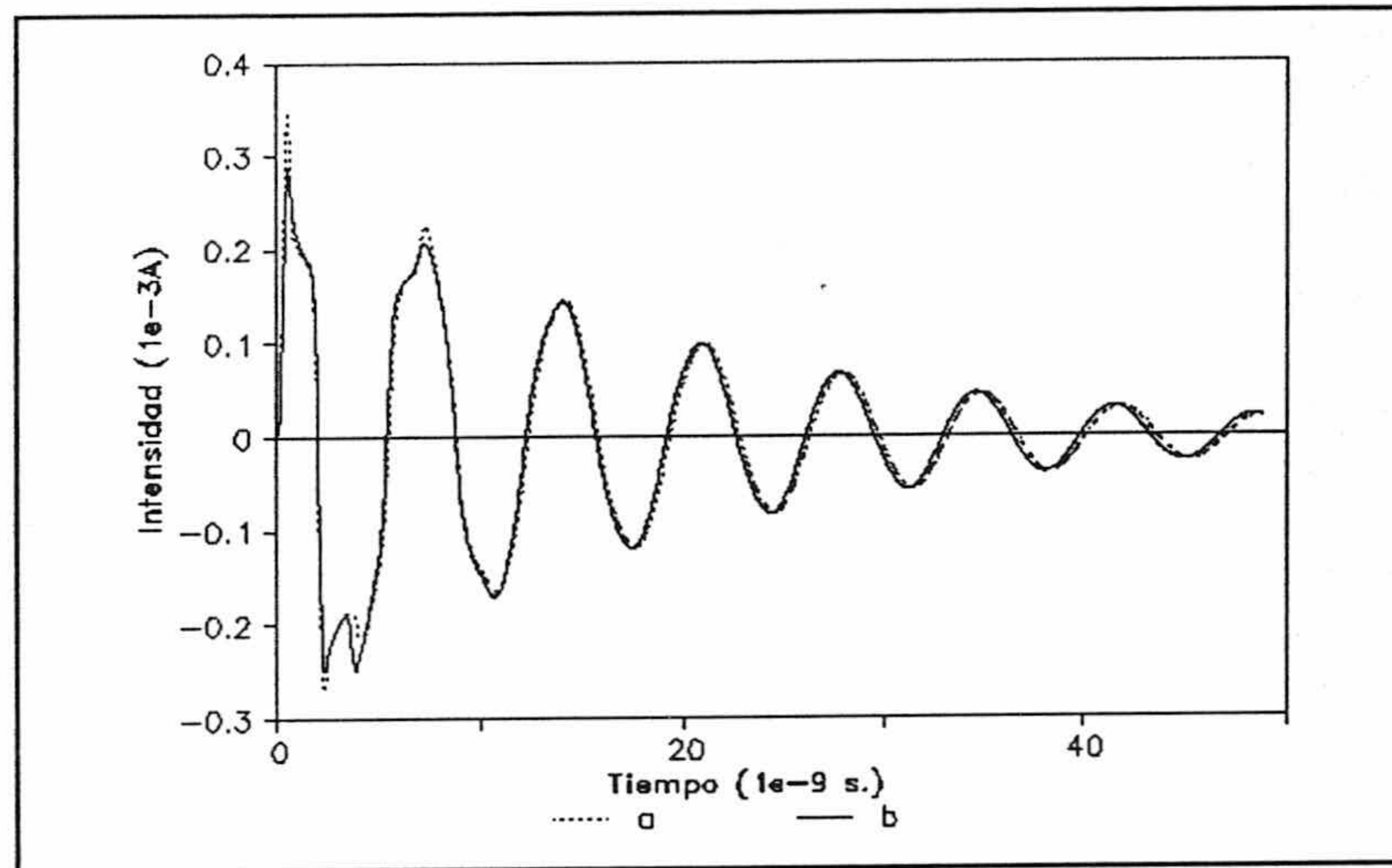


Fig. 3.6. Corriente inducida en un punto próximo a la unión de dos hilos en ángulo de 90 grados. (a) Nuevo tratamiento. (b) DOTIG1.

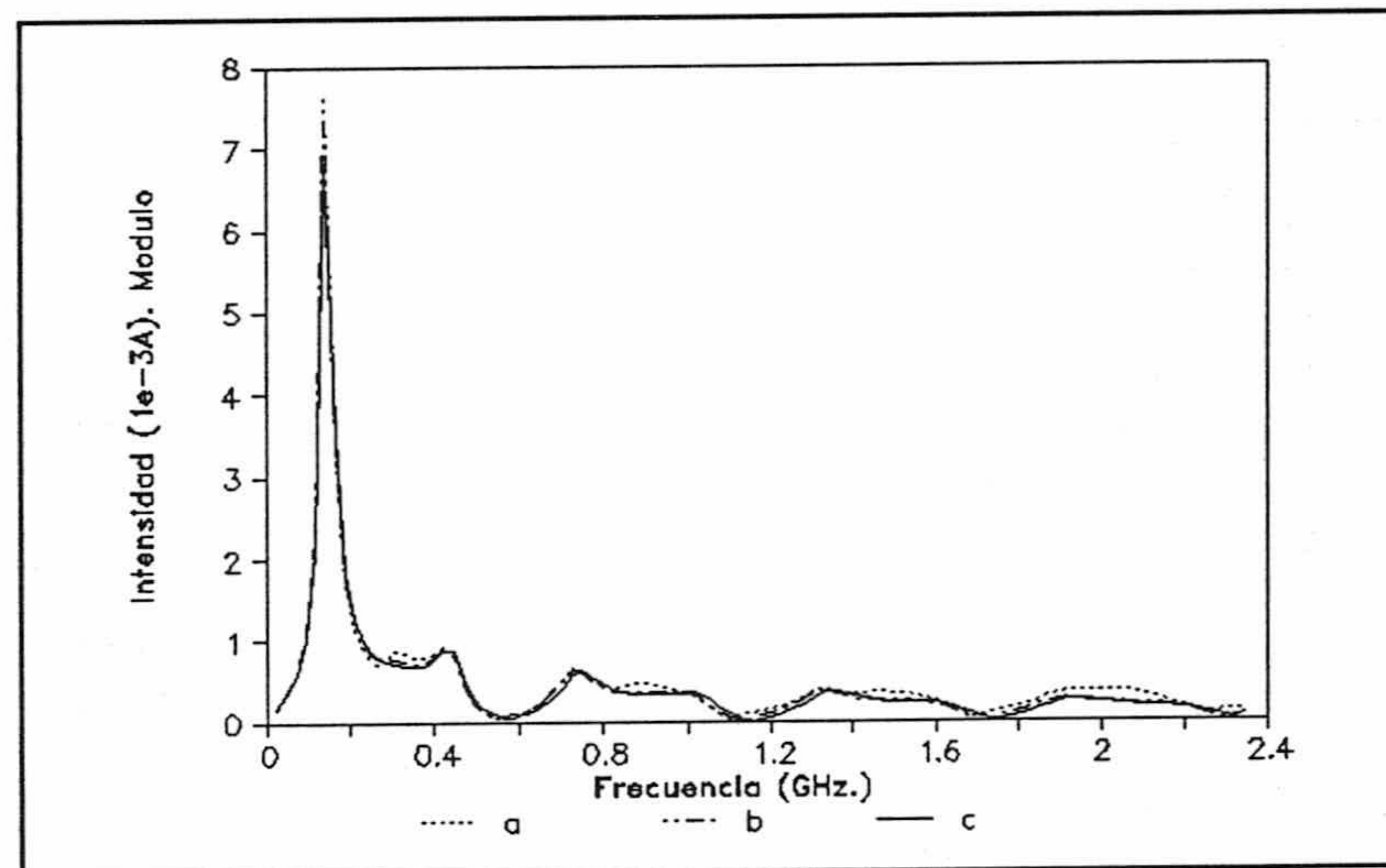


Fig. 3.7. Módulo de la transformada de la figura 3.6. (a) Nuevo tratamiento. (b) NEC-2. (c) DOTIG1.

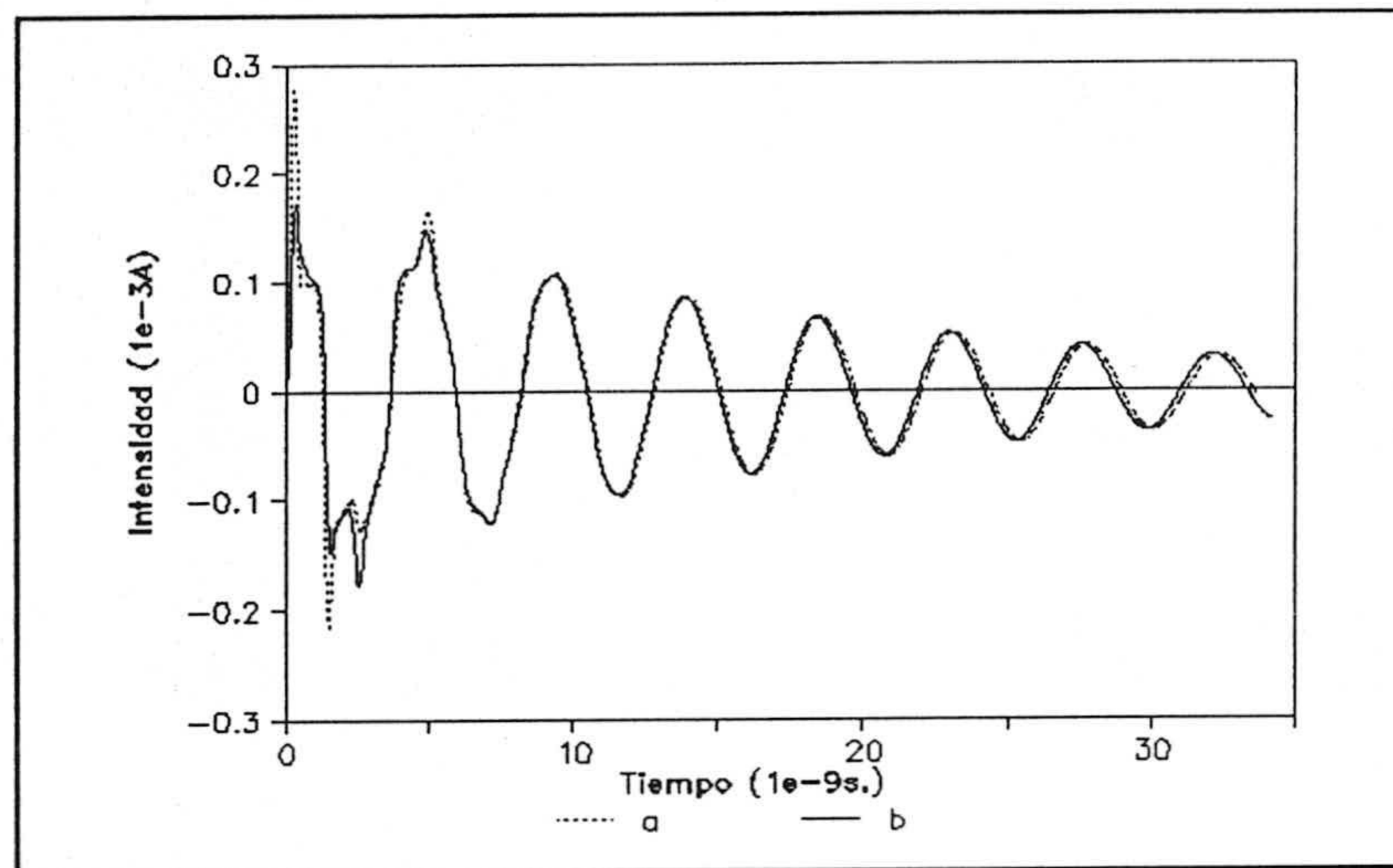


Fig. 3.8. Corriente inducida en un punto próximo a la unión de dos hilos en ángulo de 60 grados. (a) Nuevo tratamiento. (b) DOTIG1.

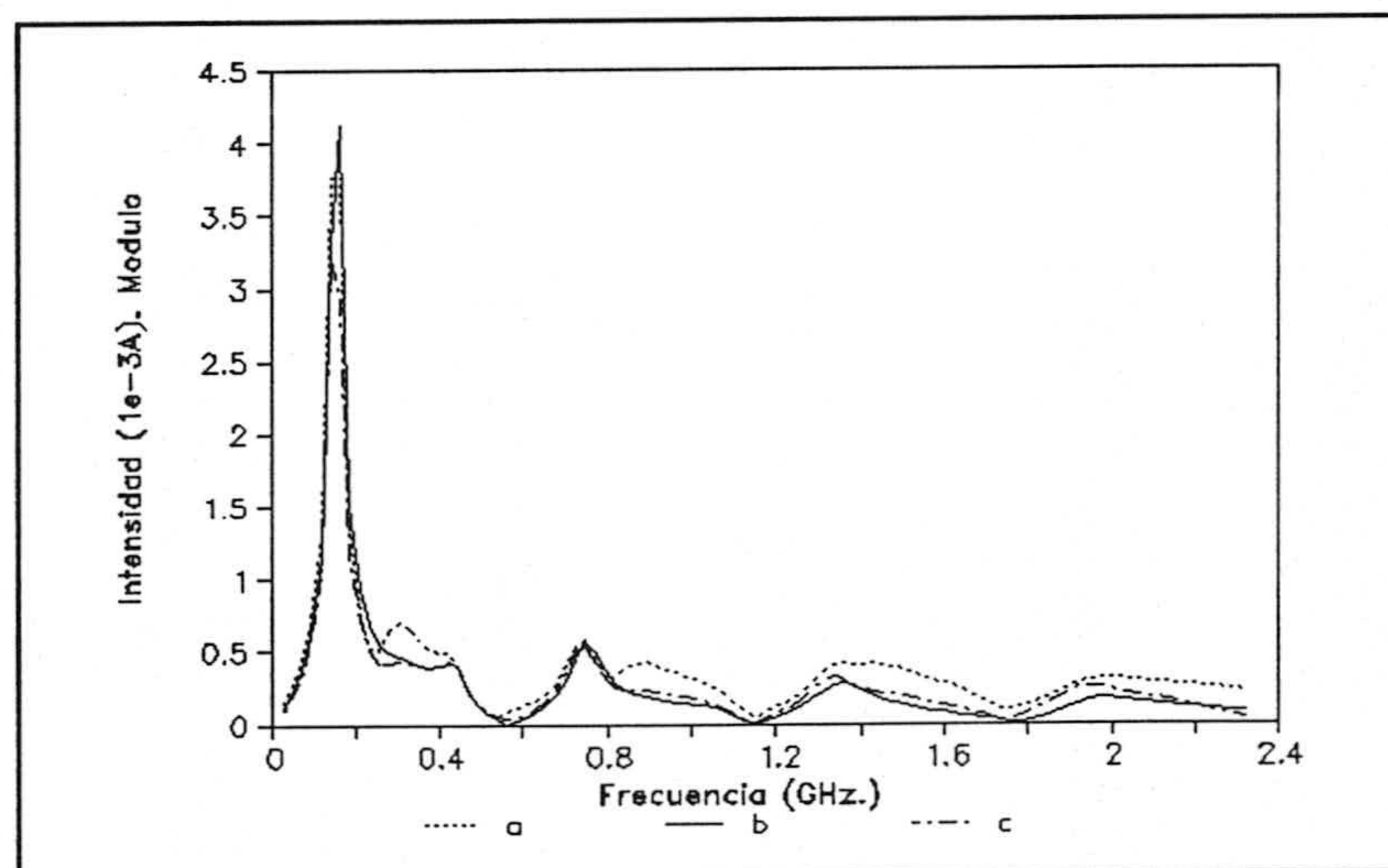


Fig. 3.9. Módulo de la transformada de la figura 3.8. (a) Nuevo tratamiento. (b) DOTIG1. (c) NEC-2.

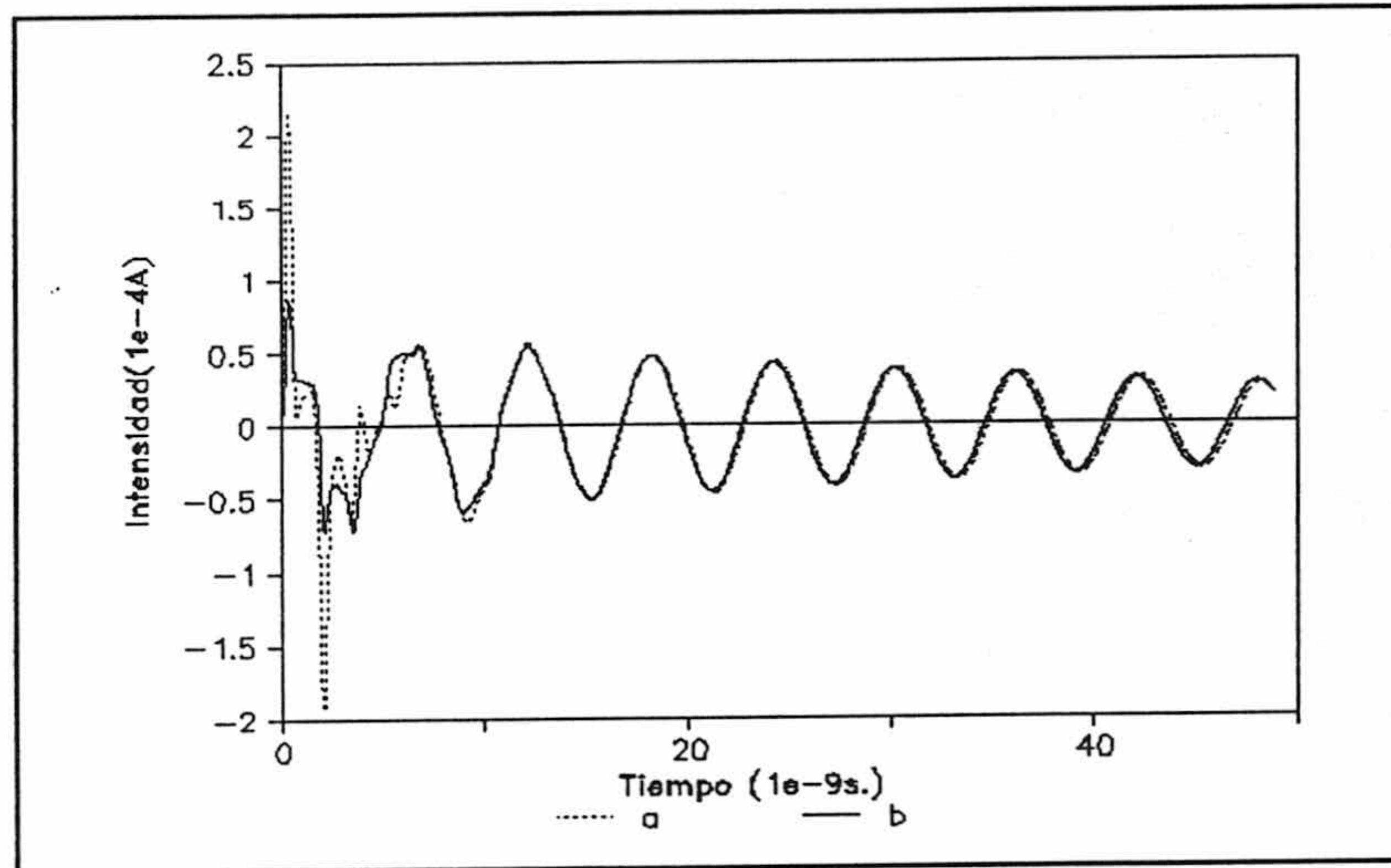


Fig. 3.10. Corriente inducida en un punto próximo a la unión de dos hilos en ángulo de 30 grados. (a) Nuevo tratamiento. (b) DOTIG1.

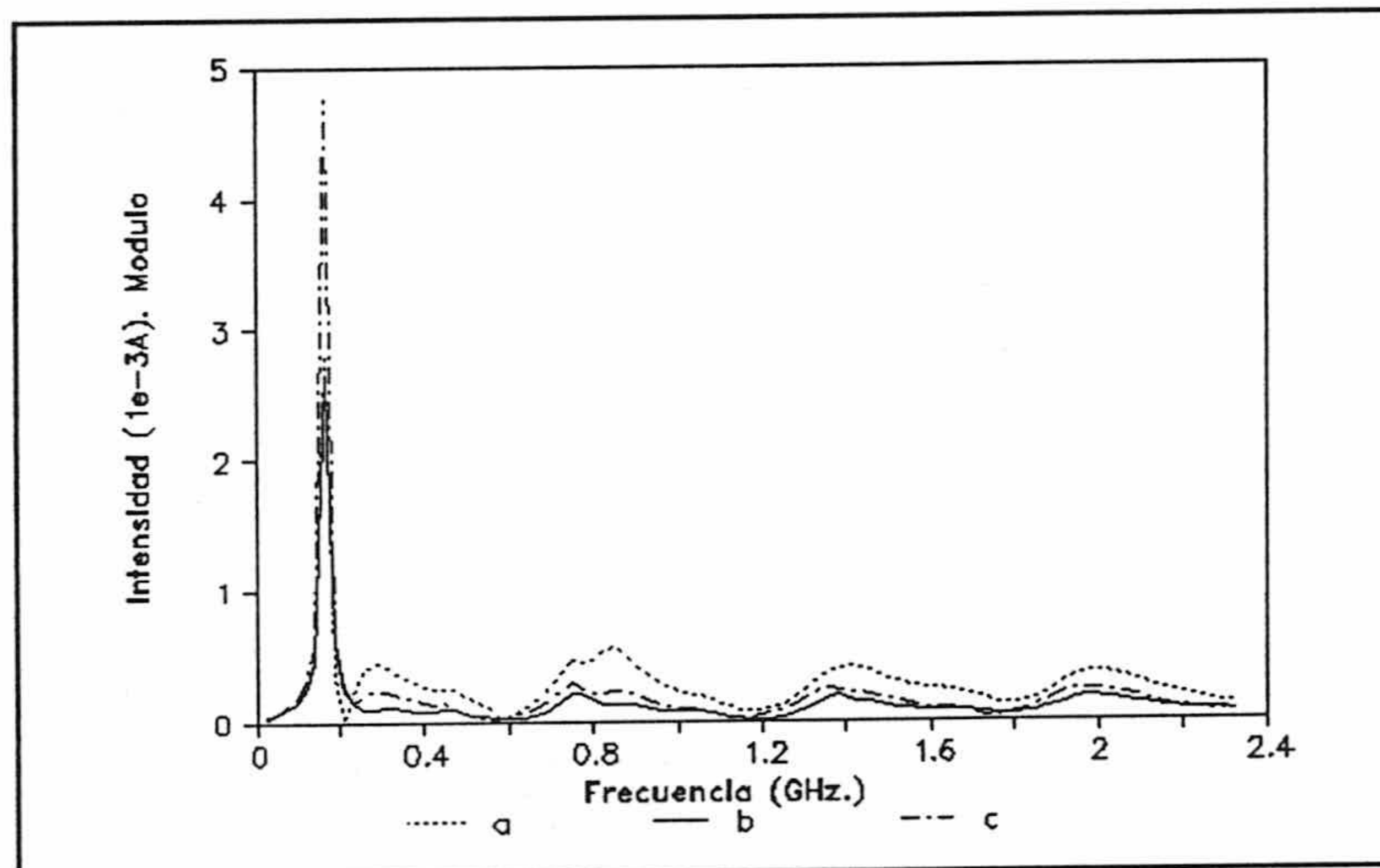


Fig. 3.11. Módulo de la transformada de la figura 3.10. (a) Nuevo tratamiento. (b) DOTIG1. (c) NEC-2.

A partir de estas figuras vemos como para ángulos más pequeños las diferencias entre DOTIG1 y el nuevo tratamiento se hace más acusada, lo que es lógico si tenemos en cuenta que al disminuir el ángulo mayor es la acumulación de carga en la unión y por tantos los tratamientos se diferencian más.

Esta diferencia aparece en los primeros instantes, que es cuando el campo incidente está forzando unas corrientes grandes. La evolución posterior es igual para DOTIG1 y el nuevo tratamiento, aunque aparece el desfase que ya hemos comentado anteriormente.

Comparando con NEC-2 vemos que entre este y DOTIG1 la diferencia es muy pequeña, mientras que el nuevo tratamiento se separa de ambos conforme disminuye el ángulo que forman los hilos.

3.6.3. Unión de cuatro hilos en forma de cruz.

La siguiente figura analizada ha sido una cruz con un brazo desigual, figura 3.12.

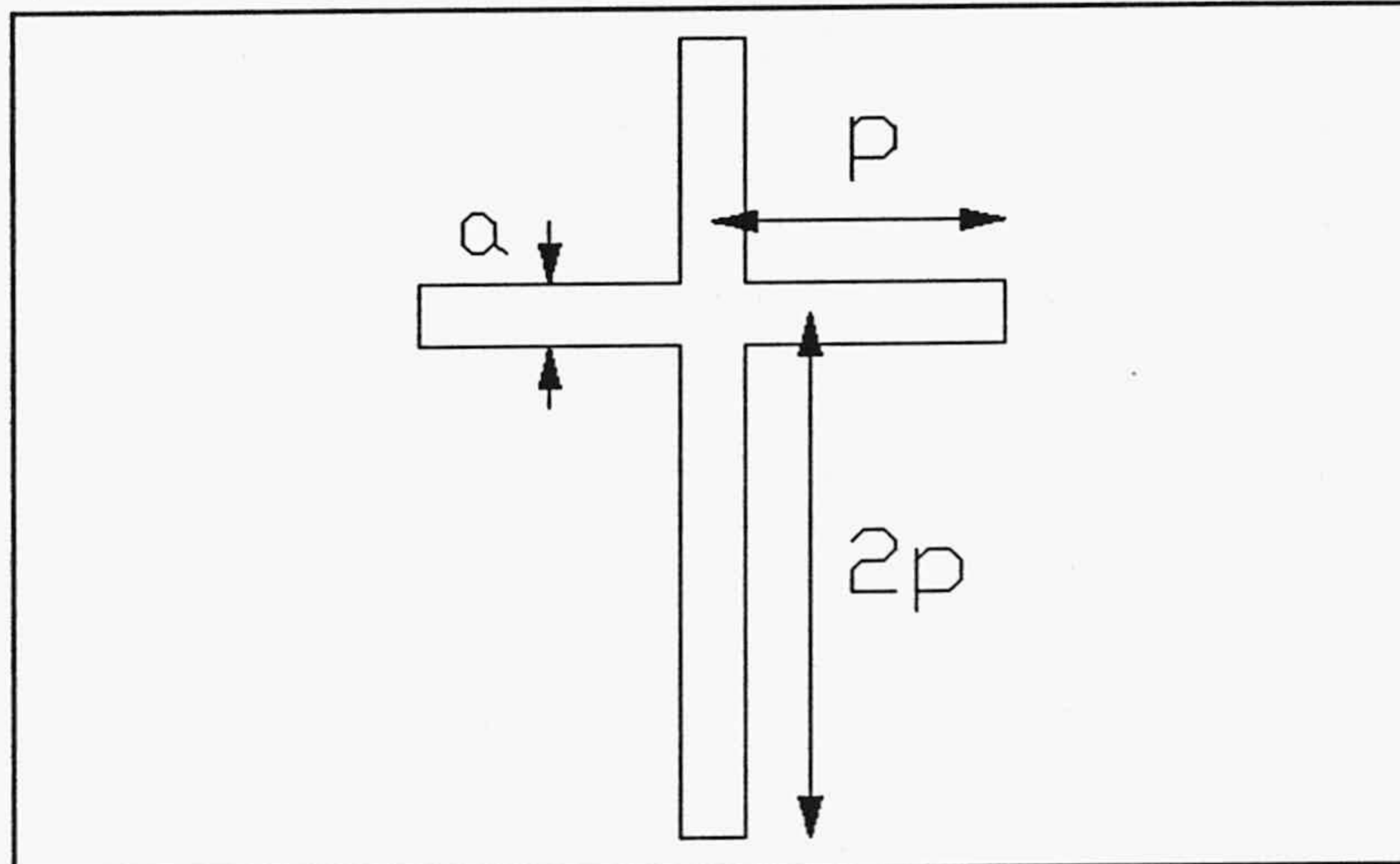


Fig. 3.12. Unión de cuatro hilos en forma de cruz.

Los brazos cortos tienen una longitud 0.11 m. El diámetro es común y vale 0.0044 m. La iluminación es análoga a los casos anteriores, e incide propagándose perpendicularmente al plano de la figura y con campo eléctrico paralelo al brazo largo y apuntando hacia la unión.

Este caso es muy interesante porque según el nuevo tratamiento de uniones no debe aparecer acumulación de carga en la unión. Efectivamente, en la figura 3.13 se representa la corriente en un punto próximo a la unión (punto O de la figura 3.12). Vemos como excepto el tratamiento de medio-segmento de DOTIG1, todos los demás tratamientos coinciden. La transformada de esta figura se muestra en la figura 3.14 en donde se compara con NEC-2. De nuevo excepto el caso (b) todos los demás coinciden, como era de preveer puesto que todos los tratamientos dan igual respuesta para este caso particular.

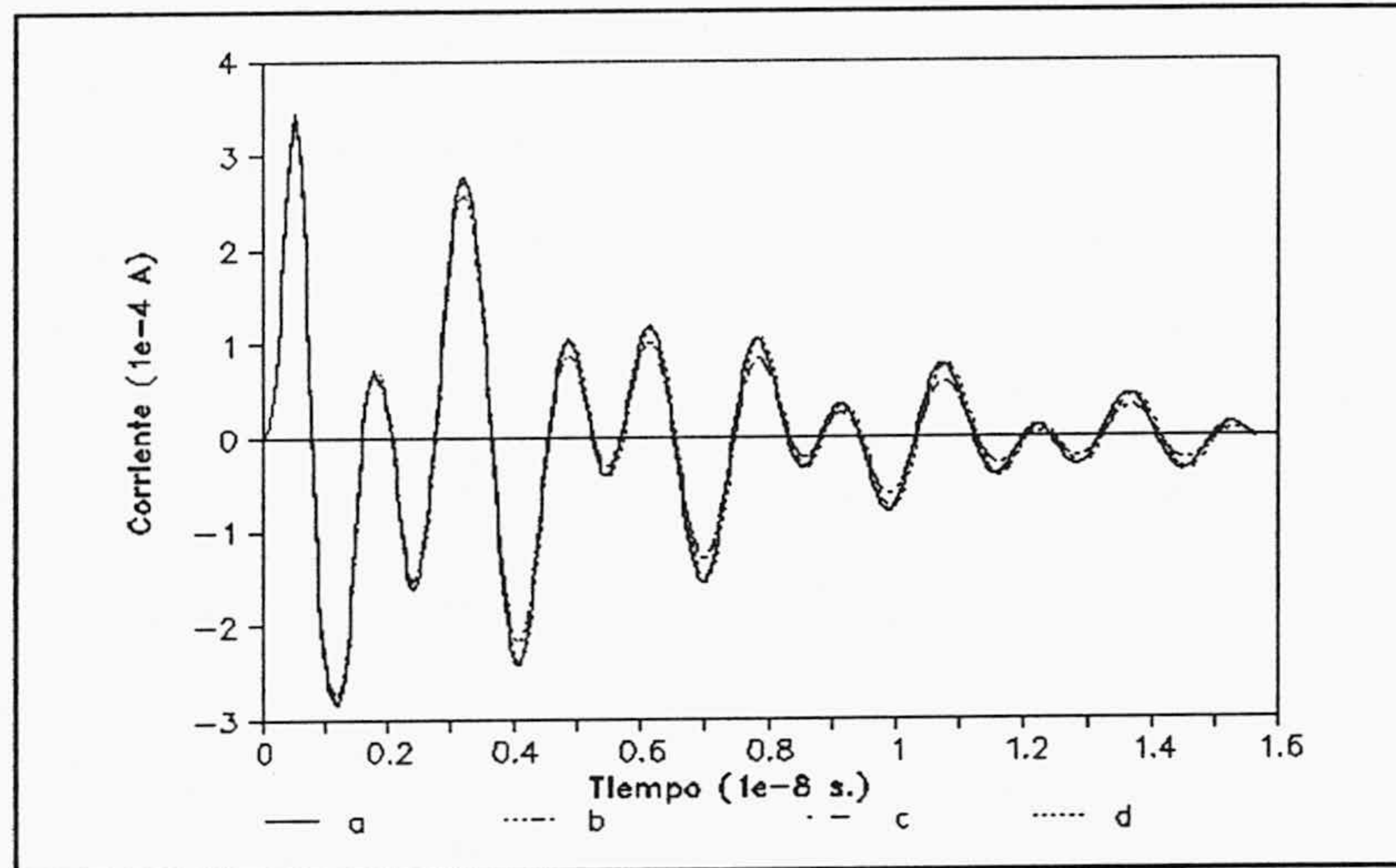


Fig. 3.13. Corriente inducida en un punto próximo a la unión de cuatro hilos en forma de cruz. (a) DOTIG1 solapamientos. (b) DOTIG1 medio-segmento. (c) DOTIG1 suma. (d) Nuevo tratamiento.

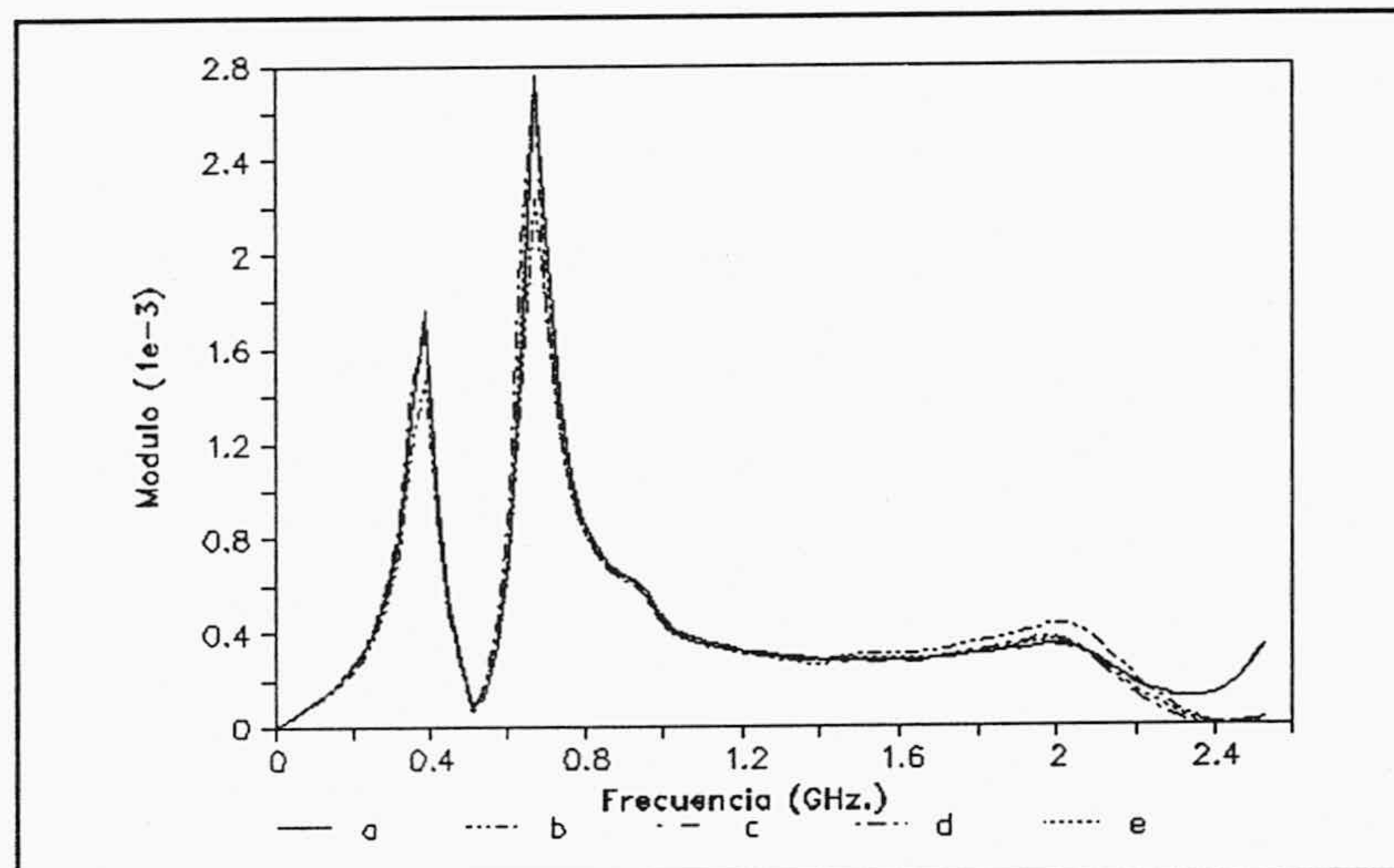


Fig. 3.14. Módulo de la transformada de la figura 3.13. (a) DOTIG1 solapamientos. (b) DOTIG1 medio-segmento. (c) DOTIG1 suma. (d) NEC-2. (e) Nuevo tratamiento.

3.6.4. Malla de 12 hilos.

En la figura 3.15 se muestra la malla analizada con $p=0.2$ m. y $a=0.0135$ m.

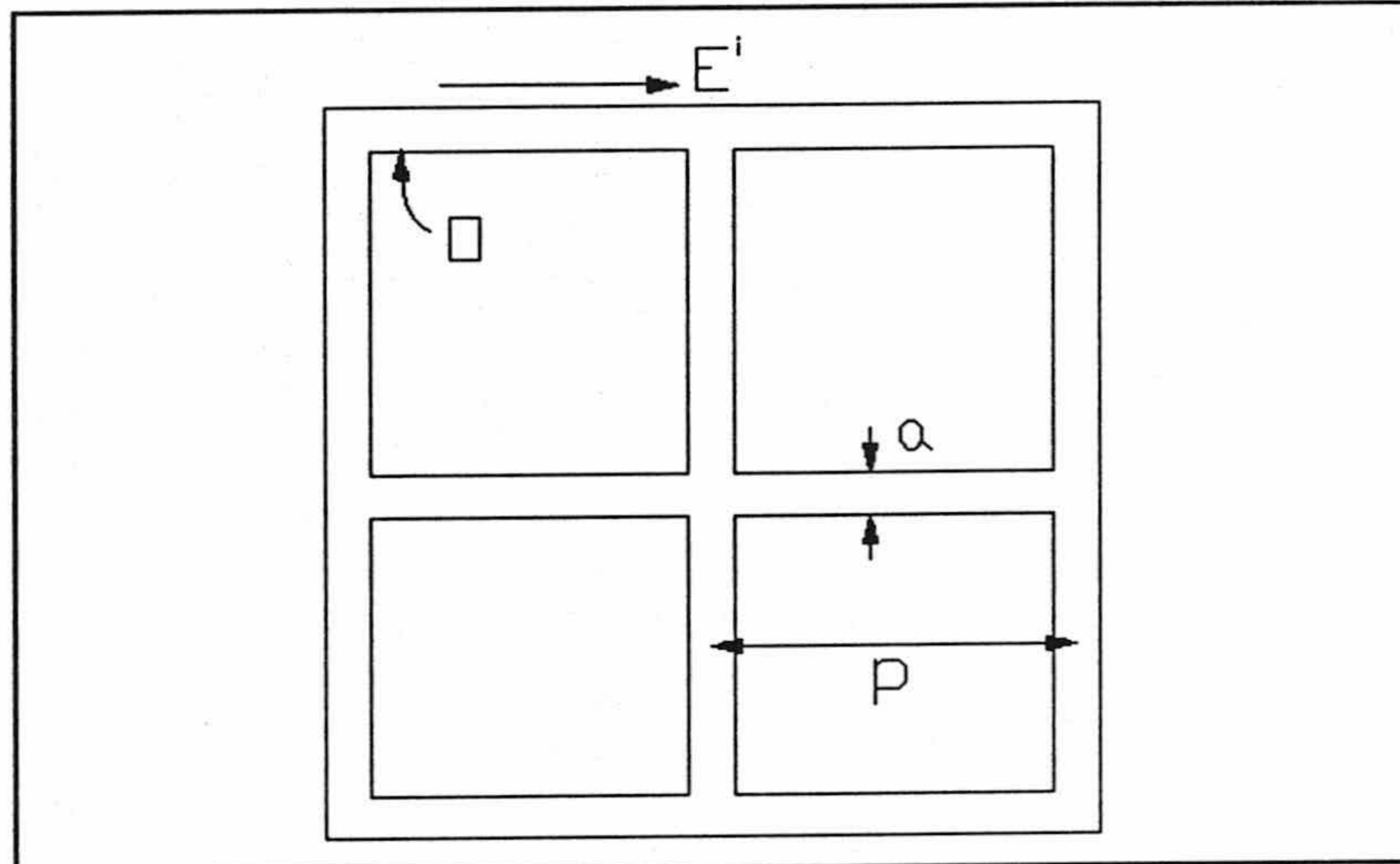


Fig. 3.15. Malla de doce hilos y nueve uniones.

En este caso la iluminación tiene la forma de derivada del pulso gaussiano normalizado a la unidad, para evitar las componentes de continua. El parámetro del pulso es análogo a los casos anteriores y se propaga en dirección perpendicular al plano de la figura con el campo eléctrico en la dirección mostrada en la figura.

En la figura 3.17 se muestra la corriente obtenida en el punto O de la figura 3.16.

Vemos ahora como la diferencia entre el nuevo tratamiento y DOTIG1 se manifiestan tanto al principio como al final. En este caso también aparecen diferencias notables entre los dos tratamientos efectuados por DOTIG1.

Comparando con NEC-2 la transformada de la figura 3.17, figura 3.18, vemos como solamente el tratamiento de solapamientos coincide aproximadamente con NEC-2. El nuevo

tratamiento se separa claramente de ambos.

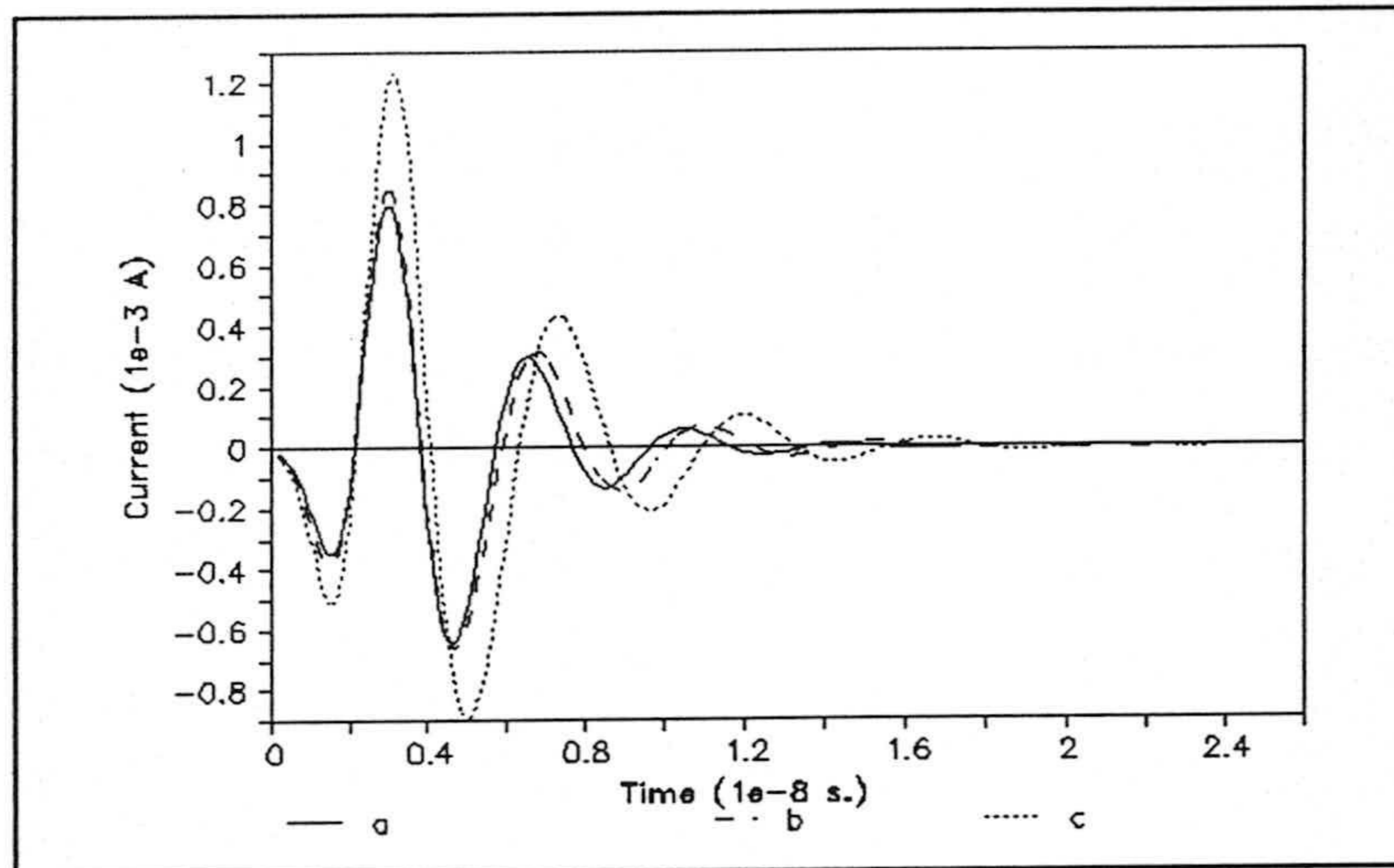


Fig. 3.17. Corriente inducida en un punto de la malla. (a) DOTIG1 solapamientos. (b) DOTIG1 suma. (c) Nuevo tratamiento.

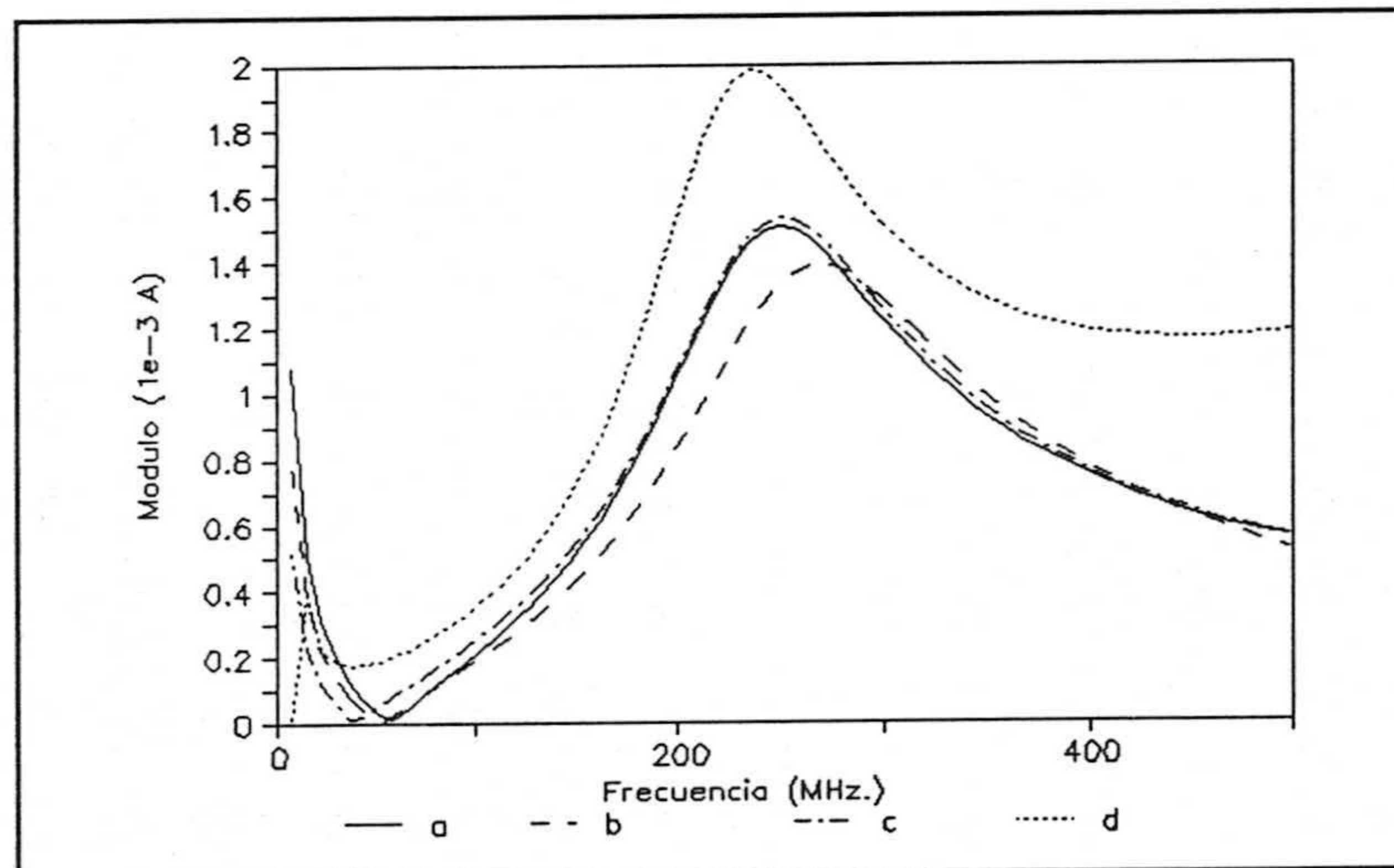


Fig. 3.18. Módulo de la transformada de la figura 3.17. (a) DOTIG1 solapamientos. (b) DOTIG1 suma. (c) NEC-2. (d) Nuevo tratamiento.

CAPITULO 4. ECUACION MFIE

4.1 Introducción.

En este capítulo analizaremos y desarrollaremos numéricamente la ecuación integral para el campo magnético (MFIE) que, junto con la ecuación EFIE, constituye el soporte teórico de la aplicación del método de los momentos al problema de la dispersión de señales electromagnéticas por estructuras conductoras.

La ecuación MFIE se aplica únicamente a estructuras cerradas (en esta memoria se desarrollará para cuerpos tridimensionales) puesto que en este caso podemos aplicar la condición de contorno de campo magnético nulo en el interior del conductor. Esto limita la validez de aplicación a estructuras reales, sin embargo, si solamente estamos interesados en un espectro no demasiado amplio (longitud de onda mínima del orden de la mitad de la dimensión máxima del dispersor), la ecuación MFIE nos dará bastante información sobre la sección recta de radar (RCS) de la estructura modelada.

En relación con el modelado, como comentamos en los capítulos anteriores, la modelación por hilos supone una tarea que en la mayoría de los casos prácticos es inabordable. Por otra parte actualmente no se dispone de ningún programa que efectue este modelado y mantenga las condiciones necesarias para representar al objeto desde un punto de vista electromagnético. Sin embargo, la modelación por parches es relativamente fácil aún en el caso de estructuras muy complejas como pueden ser prototipos de aviones.

Para evaluar la RCS de una estructura es de gran interés conocer la respuesta en la zona baja y media del espectro. Esta información la suministra el programa que se ha desarrollado a partir de la ecuación MFIE. Para las altas frecuencias la estructura se divide en zonas de comportamiento electromagnético similar, a las que se le aplica distintos métodos específicos de altas frecuencias.

4.2 Derivación de la ecuación integral. [57]

4.2.1 Principio de equivalencia.

Supongamos que una señal electromagnética transitoria incide sobre un cuerpo conductor cerrado. El campo total, en cualquier punto exterior del cuerpo vendrá dado por:

$$\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s \quad (4.1)$$

donde \vec{H}^i es el campo incidente y \vec{H}^s es el campo dispersado por el cuerpo conductor. Las fuentes de este último campo son las densidades de carga y corrientes inducidas en el conductor.

Para poder hacer uso del teorema de Green para la solución de la ecuación de ondas utilizamos el principio de equivalencia, consecuencia inmediata del teorema de unicidad, que nos permite sustituir la superficie dispersora por unas corrientes equivalente que fluyen en el espacio libre, y el conductor se sustituye por una región de campo nulo. Las corrientes vienen determinadas por las condiciones de contorno. Como consecuencia, la ecuación integral se plantea en términos de las corrientes superficiales equivalentes. Una vez determinadas, es posible calcular el campo en cualquier punto del espacio.

Entonces tendremos:

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

donde

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dS' \quad (4.3)$$

siendo S' la superficie del cuerpo dispersor. \vec{r} es el vector de posición del punto campo. \vec{r}' es el vector de posición del punto fuente. $R = \vec{r} - \vec{r}'$.

Evaluando:

$$\nabla \wedge \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \wedge \vec{J} + \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \vec{J} \quad (4.4a)$$

$$\nabla \wedge \vec{J} = -\frac{\vec{R}}{RC} \wedge \partial_{t'} \vec{J} \quad (4.4b)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad (4.4c)$$

Sustituyendo (4.4) en (4.2) tendremos:

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.5)$$

Para el campo total tendremos:

$$\vec{H} = \vec{H}^i + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.6)$$

Para evaluar \vec{J} a partir de (4.6) tenemos que plantear la condición de contorno relativa a la componente tangencial del campo magnético \vec{H} , y por tanto evaluar el campo total en la propia superficie conductora, como un límite por el exterior. Esto implica que el núcleo de la integral se hace singular, por lo que tenemos que hacer una evaluación cuidadosa de la integral en este punto.

4.2.2 Valor principal de la integral de superficie.

Según lo comentado anteriormente debemos evaluar el límite:

$$\vec{I}(\vec{r}'', t) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.7)$$

donde \vec{r}'' está situado en la superficie y \vec{r} es un punto exterior a la misma.

Si descomponemos:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

donde

$$\vec{I}_1 = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S' - S'_e} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.8)$$

$$\vec{I}_2 = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_e} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.9)$$

donde S_ϵ' es un trozo pequeño de superficie que rodea a \bar{r}'' .

El límite planteado en (4.8) no contiene singularidades y viene definido por el valor de la función en el punto \bar{r}'' :

$$\vec{I}_1(\vec{r}'', t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_\epsilon'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.10)$$

El límite en (4.9) lo haremos suponiendo S_ϵ' como una superficie circular (plana) y aproximando por la dirección perpendicular a esta superficie.

Descomponiendo (4.9) en los dos sumandos:

$$\vec{I}_{2a} = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_\epsilon'} \frac{\partial_t'}{R} \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

$$\vec{I}_{2b} = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_\epsilon'} \frac{\vec{J}}{R^2} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

Sea \hat{n} el vector normal a la superficie. A partir de las condiciones de contorno:

$$\vec{J}(\vec{r}'', t') = \hat{n} \wedge \vec{H}(\vec{r}'', t')$$

$$\partial_{t'} \vec{J}(\vec{r}'', t') = \hat{n} \wedge \partial_{t'} \vec{H}(\vec{r}'', t')$$

A partir de la figura 4.1 tendremos:

$$R = \sqrt{\rho'^2 + \delta^2}$$

$$\vec{R} = -\rho' \hat{\rho}' + \delta \hat{n}$$

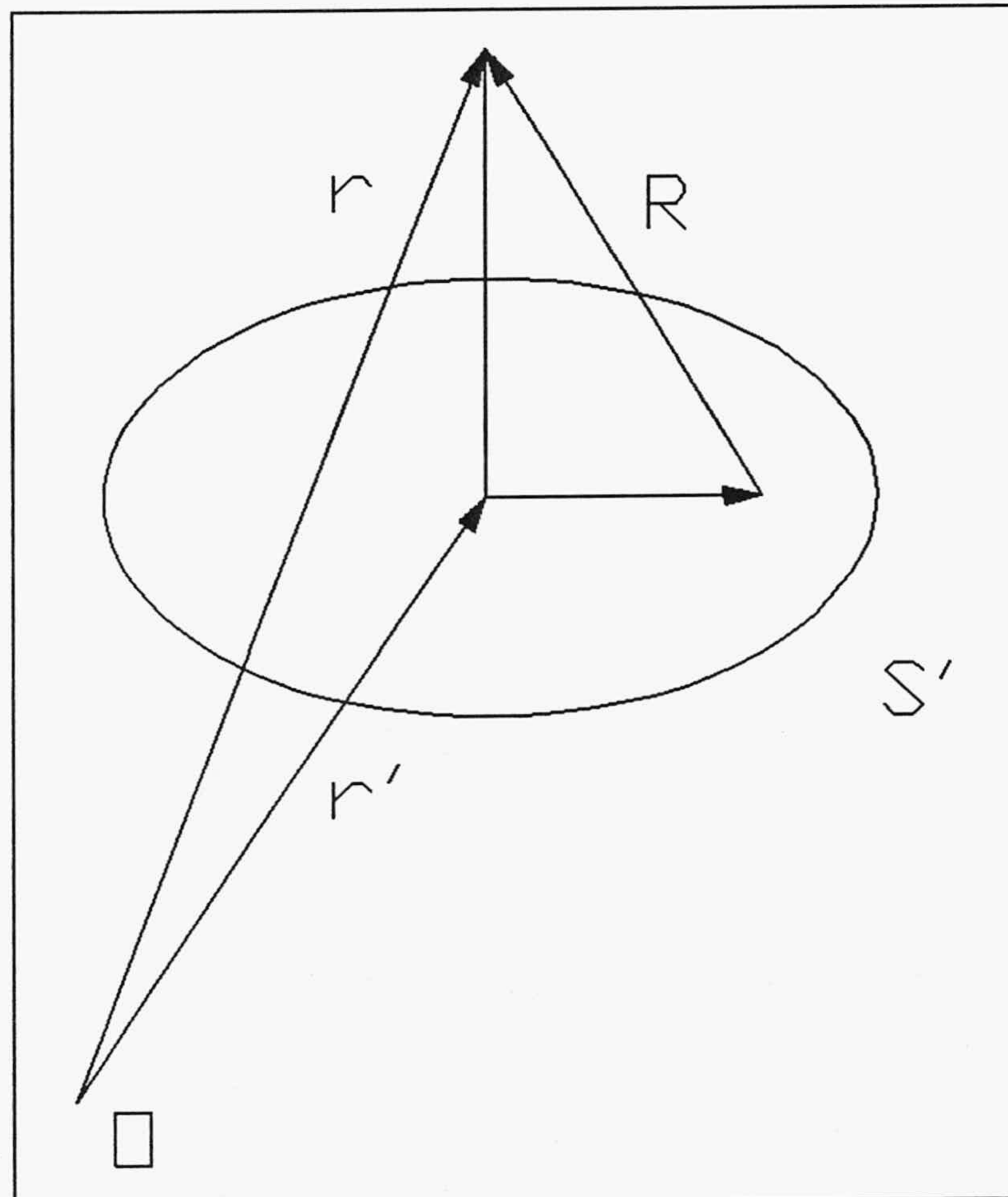


Figura 4.1. Coordenadas locales.

Descomponiendo el doble producto vectorial, nos aparecen cuatro sumandos:

$$\vec{I}_2^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_e} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \hat{n} \right] \partial_{t'} \vec{H} ds'$$

$$\vec{I}_2^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_e} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \partial_{t'} \vec{H} \right] \hat{n} ds'$$

$$\vec{I}_2^3 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_e} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \hat{n} \right] \vec{H} ds'$$

$$\vec{I}_2^4 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_e} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{H} \right] \hat{n} ds'$$

descomponiendo \vec{H} en su componente tangencial y perpendicular a la superficie, y evaluando el campo magnético como constante en S'_e tendremos:

$$\vec{I}_2^1 = 0$$

$$\vec{I}_2^2 = 0$$

$$\vec{I}_2^3 = \frac{\vec{H}}{2}$$

$$\vec{I}_2^A = \frac{\vec{H} \cdot \hat{n}}{2}$$

y por tanto

$$\vec{I}_2 = \frac{H_t}{2}$$

donde H_t es la componente tangencial del campo magnético.

Sustituyendo en (4.6) y teniendo en cuenta que la componente normal del campo magnético se anula en la superficie:

$$\frac{1}{2} H_t = \hat{n} \cdot \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \cdot}{4\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.11)$$

4.2.3 Ecuación MFIE.

La ecuación MFIE se obtiene aplicando la condición de contorno para el campo magnético:

$$\vec{J} = 2\hat{n} \cdot \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \cdot}{2\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (4.12)$$

Respecto a esta ecuación, se puede comentar:

i) La aproximación óptica evalúa la corriente inducida a partir del primer sumando, considerando solamente la parte iluminada del objeto. De hecho, es una primera estimación de la RCS del objeto para frecuencias elevadas.

ii) Vemos, a partir de la forma de la ecuación, que no existe interacción entre corrientes que fluyen en un mismo plano.

iii) Debido al principio de causalidad la corriente que fluye en un punto de la superficie del dispersor es función de corrientes retrasadas. Discretizando convenientemente la ecuación, no es necesario invertir ninguna matriz.

iv) Puede resultar paradójico que si el campo incidente tiene componente perpendicular a la superficie, esta se tenga que compensar con el campo creado por corrientes retrasadas. No hay tal paradoja si pensamos que al alcanzar la señal incidente al dispersor, lo hace primeramente de forma tangencial.

v) Para evaluar el campo de radiación, basta hacer el límite de $R \rightarrow r$ en la ecuación (4.12), con lo que tendremos:

$$\vec{r} \cdot \vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \oint_{S'} \partial_{t'} \vec{J}(\vec{r}', t') \wedge \frac{\vec{r}}{r} dS' \quad (4.13)$$

4.3 Resolución numérica de la ecuación MFIE. [57]

4.3.1 Discretización de la ecuación.

Dividiremos la superficie del dispersor en parches de area aproximadamente igual, y lo suficientemente pequeños para considerarlos planos. Igualmente, la variable temporal la dividiremos en intervalos temporales:

$$S' = \bigcup_{i=1}^{N_s} S'_i$$

$$t = v\Delta t + t''$$

Para no tener que invertir elegimos $\Delta t \leq R_{\min}/c$; donde R_{\min} es la distancia más pequeña entre centros de parches. De esta manera podemos expresar la corriente en el instante actual a partir de corrientes ya calculadas.

Así pues, la ecuación se forzará en los centros de los intervalos espacio-temporales mediante funciones peso δ de Dirac.

4.3.2 Funciones base.

La función densidad superficial de corriente la desarrollaremos en funciones base para las dos variables.

En el espacio, desarrollaremos con funciones base pulsos. Esto supone que la corriente es constante en cada parche, lo que conlleva:

- i) Las líneas de corriente no son cerradas.
- ii) Los límites de los parches forman singularidades de carga.

Estos dos puntos tendrán su repercusión en la solución numérica, como luego veremos.

En el tiempo desarrollaremos en base a polinomios de interpolación lagrangiana de orden k . Como mínimo k debe ser uno para que podamos efectuar la derivada temporal:

$$\vec{J}_j(t_j) = \sum_{m=n}^{n+k} B_j^{(m)} \vec{J}_{j+m}$$

donde n se define para interpolar con términos no posteriores al actual.

Con esta elección de las funciones base tenemos una violación clara del principio de causalidad. No podemos suponer que la densidad de corriente es constante en cada parche, y utilizar un polinomio de interpolación de orden distinto de cero para desarrollar en la variable temporal. Veremos como este hecho puede generar inestabilidades en el proceso de solución.

La elección de las funciones base y peso solamente tiene justificación por consideraciones numéricas relativas al costo computacional.

4.3.3. La ecuación MFIE numérica.

Según lo comentado en los dos apartados anteriores, podemos escribir la ecuación (4.12) en la forma:

$$\vec{J}_{ij} = 2\hat{n}_i \wedge \vec{H}_{ij}^i + \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_s} \left[\frac{\partial_{t''}}{cR_{ip}} + \frac{1}{R_{ip}^2} \right]. \quad (4.14)$$

$$\cdot \left(\sum_{m=n}^{n+k} B_q^{(m)} \vec{J}_{p, q+m} \right) \wedge \frac{\vec{R}_{ip}}{R_{ip}} S_p$$

donde q es el entero más próximo a $t_v - R_{ip}/c$.

4.4 Comportamiento numérico de la ecuación MFIE.

En este apartado efectuaremos un estudio sistemático del comportamiento numérico de la ecuación MFIE teniendo en cuenta los grados de libertad que permite el tratamiento numérico adoptado:

i) Influencia en la solución del modelado de la superficie. El modelado ideal es aquel que hace que todos los parches sean aproximadamente planos, de igual superficie y de forma tal que todos los centros se sitúen a igual distancia entre sí. Sin embargo la forma más simple de modelación consiste en seguir un criterio de radio de curvatura aproximadamente constante, lo que conlleva que los parches en zonas con curvatura mayor tengan un tamaño menor que los correspondientes a aquellas zonas más planas.

Debido a la simplicidad numérica con que se ha tratado la ecuación MFIE se facilita en gran medida la tarea del modelado pues sólo se necesita las coordenadas del centro, superficie y componentes del vector normal en cada parche. Necesitamos por tanto determinar el margen de flexibilidad del tratamiento numérico en el tamaño relativo de los parches. Veremos que este margen es bastante amplio.

ii) Debido a las funciones base elegidas, el valor del incremento temporal no está determinado rígidamente, sino que sólo tiene como cota superior la distancia mínima entre centros de parches, que a su vez viene definida por el modelado. Es por tanto necesario determinar la influencia que tiene elegir un valor mayor o menor.

A priori, elegir un valor mayor o menor en el incremento temporal no supone un mayor contenido espectral en la solución puesto que éste viene limitado por las funciones base pulsos elegidas para el desarrollo de la variable espacial. Sin embargo la elección puede ser importante en la evaluación de las corrientes equivalentes en la zona de sombra del dispersor

en donde se evalúa una diferencia de cantidades grandes y similares. Además juega un papel importante en la estabilidad numérica de la solución.

iii) El orden del polinomio en que desarrollamos la variable temporal no condiciona mucho el algoritmo numérico puesto que no es necesario integrar en cada parche.

Veremos que la influencia del orden de interpolación en la solución es muy grande y que es necesario un orden elevado para recoger bien la forma temporal de la solución.

4.4.1 Influencia del modelado.

Hemos estudiado distintas figuras canónicas: esfera, conoesfera, cilindro capeado y cilindro recto. Estas se han modelado de diferentes formas teniendo como base distintos modelados de una esfera. Así los resultados que presentamos se refieren a ésta.

En la figura 4.2 se presentan los tres tipos de modelado empleados. En todos el incremento angular según la variable θ es constante. La subdivisión de estas bandas se hace de diferente forma en cada caso:

a) La subdivisión de cada banda se hace de manera que la distancia entre centros sea aproximadamente constante. Así la primera banda se divide en 4 parches, la segunda en 8, la tercera en 12 y así sucesivamente.

La distribución de los puntos campo se hace por tanto de manera uniforme. A este modelado nos referiremos como proporcional.

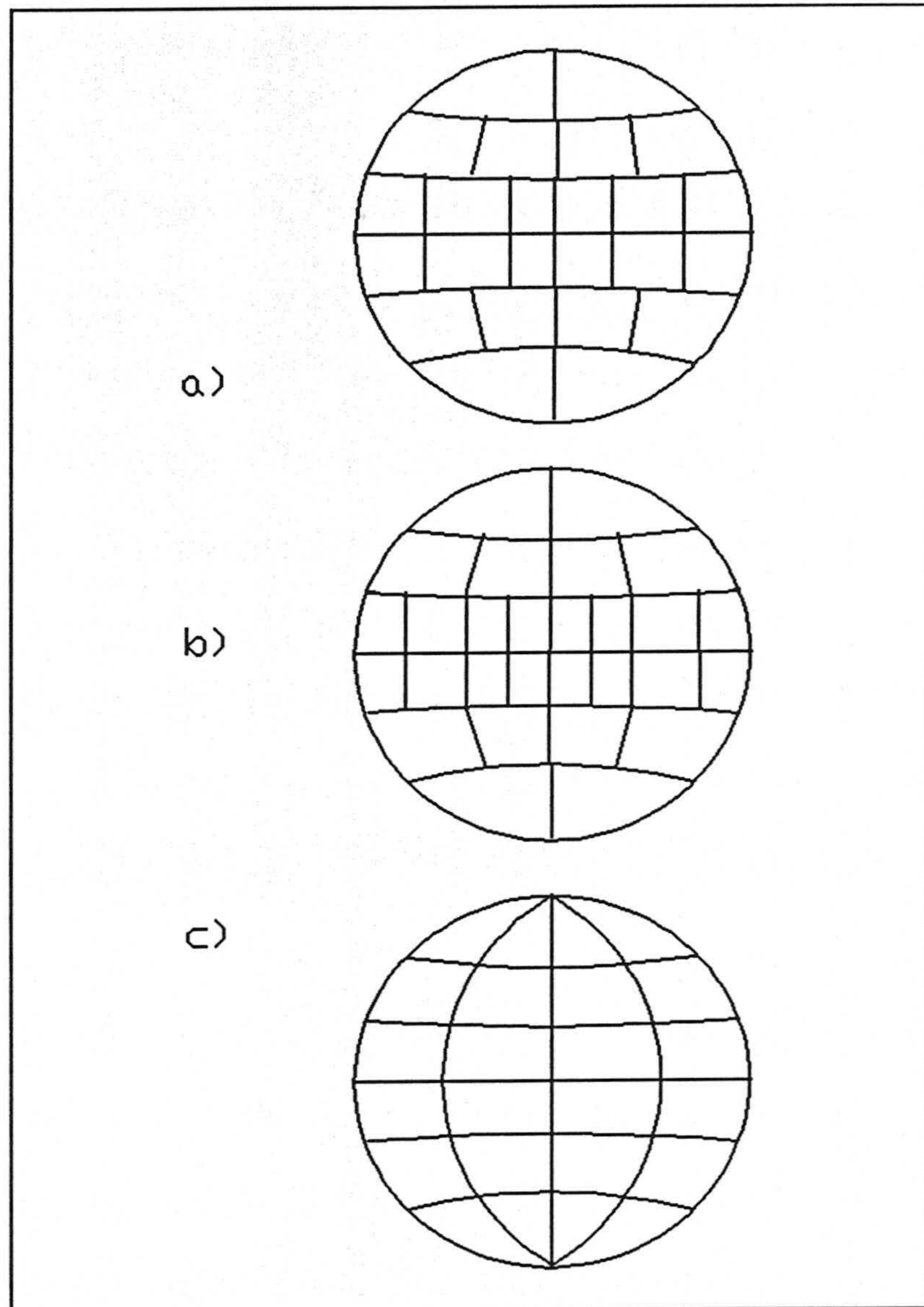


Fig. 4.2 Distintos modelados de una esfera.

b) La división de las bandas se hace de forma geométrica: la primera banda se divide en 4, la segunda en 8, la tercera en 16 y así sucesivamente. Resulta por tanto una concentración de parches en el ecuador de la esfera. A este modelado nos referiremos como geométrico.

c) La división se realiza de manera uniforme mediante meridianos. La concentración de puntos es mayor en los polos de la figura, mientras que en el ecuador la distancia entre puntos es muy grande. Llamaremos uniforme a este modelado.

Parece claro que de los tres modelados sólo el proporcional podemos considerarlo como bueno.

En la figura 4.3 se muestra el campo dispersado por una esfera de radio $a=1m$, en función del número de ondas. La iluminación se ha hecho con un pulso gaussiano con contenido espectral hasta $k \cdot a \approx 6$. Para (a) se ha modelado de forma proporcional con 32 bandas y un total de 1088 parches. La superficie mínima es de $0.0076 m^2$ y la máxima de $0.013 m^2$. El incremento temporal que se aproxima a la distancia mínima entre puntos es de $0.08 s \cdot c^1$. En el caso (b) el modelado también es proporcional pero con 12 bandas y 168 parches. En este caso la superficie del parche oscila entre 0.05 y $0.08 m^2$. Se ha elegido como incremento temporal 0.20 . Para (c) el modelado es geométrico con 8 bandas y 120 parches y el incremento temporal es 0.20 . La superficie de los parches oscila en este caso entre 0.17 y $0.075 m^2$. Por último, para (d) el modelado es uniforme con 10 bandas y 120 parches. Ahora se agudiza el margen de superficie de parches entre 0.16 y $0.026 m^2$. Esto obliga a elegir un incremento temporal de 0.08 .

Estos resultados se comparan con los teóricos en el dominio de la frecuencia presentados por [57], (e).

¹ La unidad temporale se toma como el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro, y se representa por $s \cdot c$.

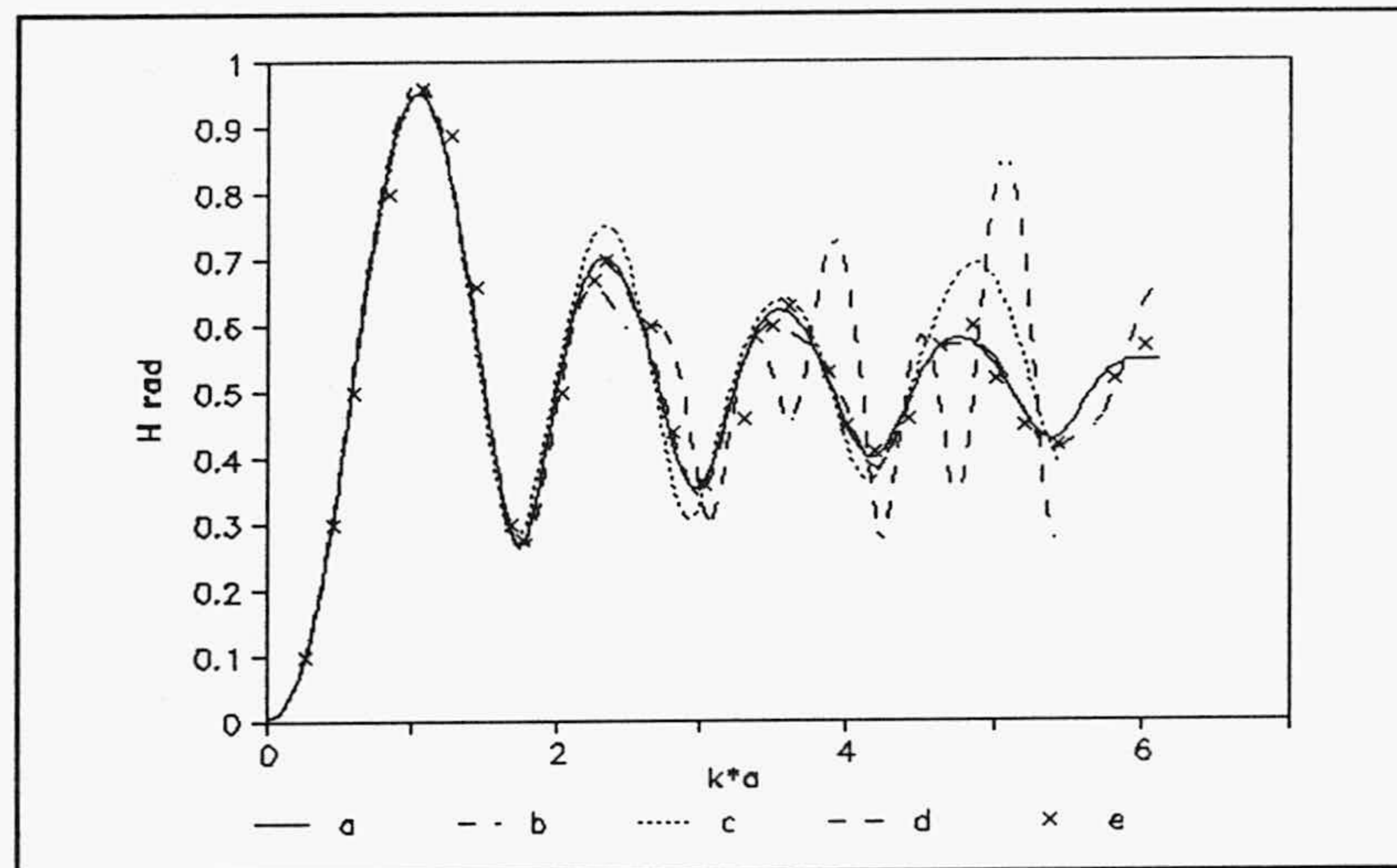


Fig.4.3 Módulo del campo dispersado por una esfera.

En la figura vemos como el caso (a) y (b) coinciden entre sí y coinciden con los valores teóricos a pesar de la diferencia en el número de parches en que se ha dividido el dispersor. En el caso (c) se recoge bien las frecuencias de resonancia pero no tan bien su valor, sobre todo para frecuencias elevadas. Para el caso (d) ya aparecen diferencias acusadas a partir de la segunda resonancia. De todas formas las diferencias entre el área de los parches está en un factor 5 para este último caso.

Estos resultados se han obtenido transformando los valores en el dominio del tiempo del campo dispersado, que se muestran en las gráficas 4.4 y 4.5.

La transformada se ha realizado eliminando los puntos en donde la señal se supone que ha tendido a cero (valor casi-cero). Es decir se ha transformado hasta $t \approx 12$ s*c.

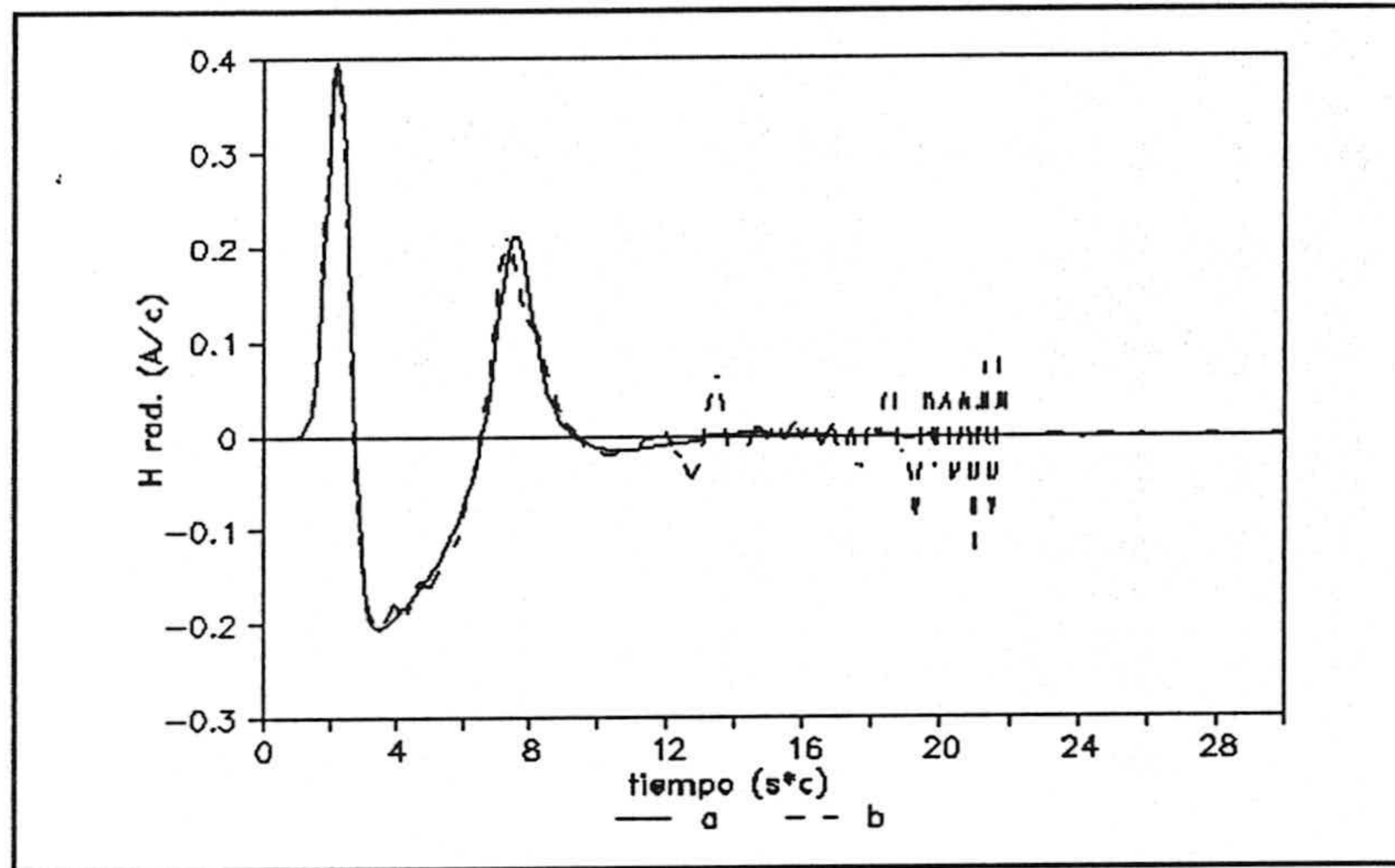


Fig. 4.4. Campo dispersado por una esfera. a) 32 bandas-proporcional. b) Uniforme.

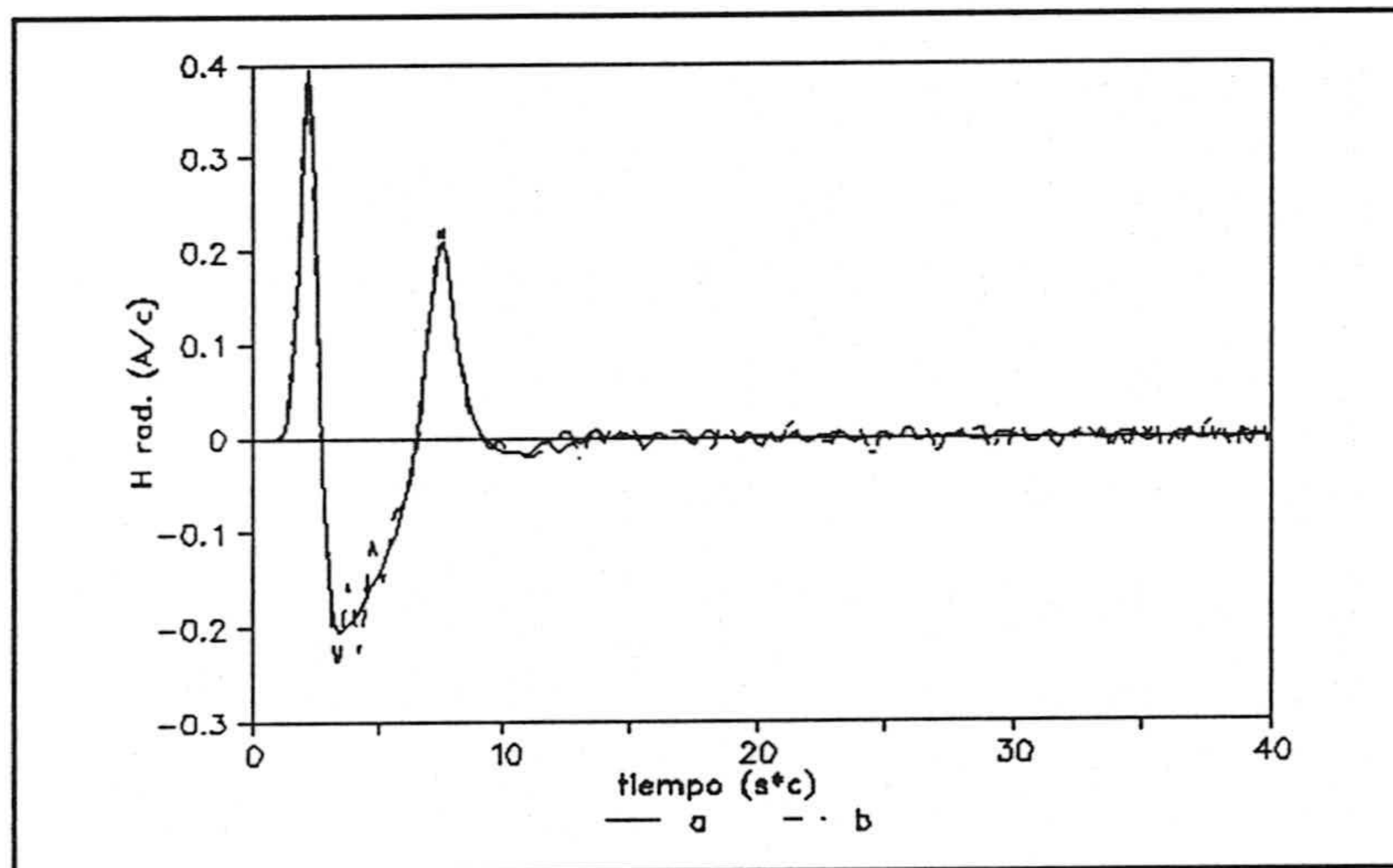


Fig. 4.5. Campo dispersado por una esfera. a) 12 bandas-proporcional b) geométrico.

Por tanto, después de lo dicho y comparando 4.4 y 4.5 podemos concluir que:

i) El modelado tiene suficiente margen. La diferencia entre superficie de parches puede llegar a ser el doble. Subdividiendo suficientemente los parches se puede obtener resultados muy buenos (en el caso (a) de 4.3 la diferencia de superficies es casi del doble).

ii) Para un buen modelado, esto es, igualdad en la superficie de los parches y estos aproximadamente cuadrados, seguir subdividiendo conlleva eliminar el rizado de la señal en la zona de valor casi-cero.

iii) En 4.4.b aparecen inestabilidades que terminan reventando la solución. Estas aparecen en la zona de valor casi-cero de la señal.

4.4.3. Elección del intervalo temporal.

La relación que existe entre el area de los parches y el incremento temporal es que este último no puede exceder la distancia entre puntos para no tener que invertir ningún sistema de ecuaciones. En principio no tenemos cota inferior por lo que es necesario analizar el comportamiento numérico de la ecuación MFIE en función de este parámetro.

Las conclusiones de todos los casos analizados son las mismas que las que se extraen de las figuras 4.6 y 4.7.

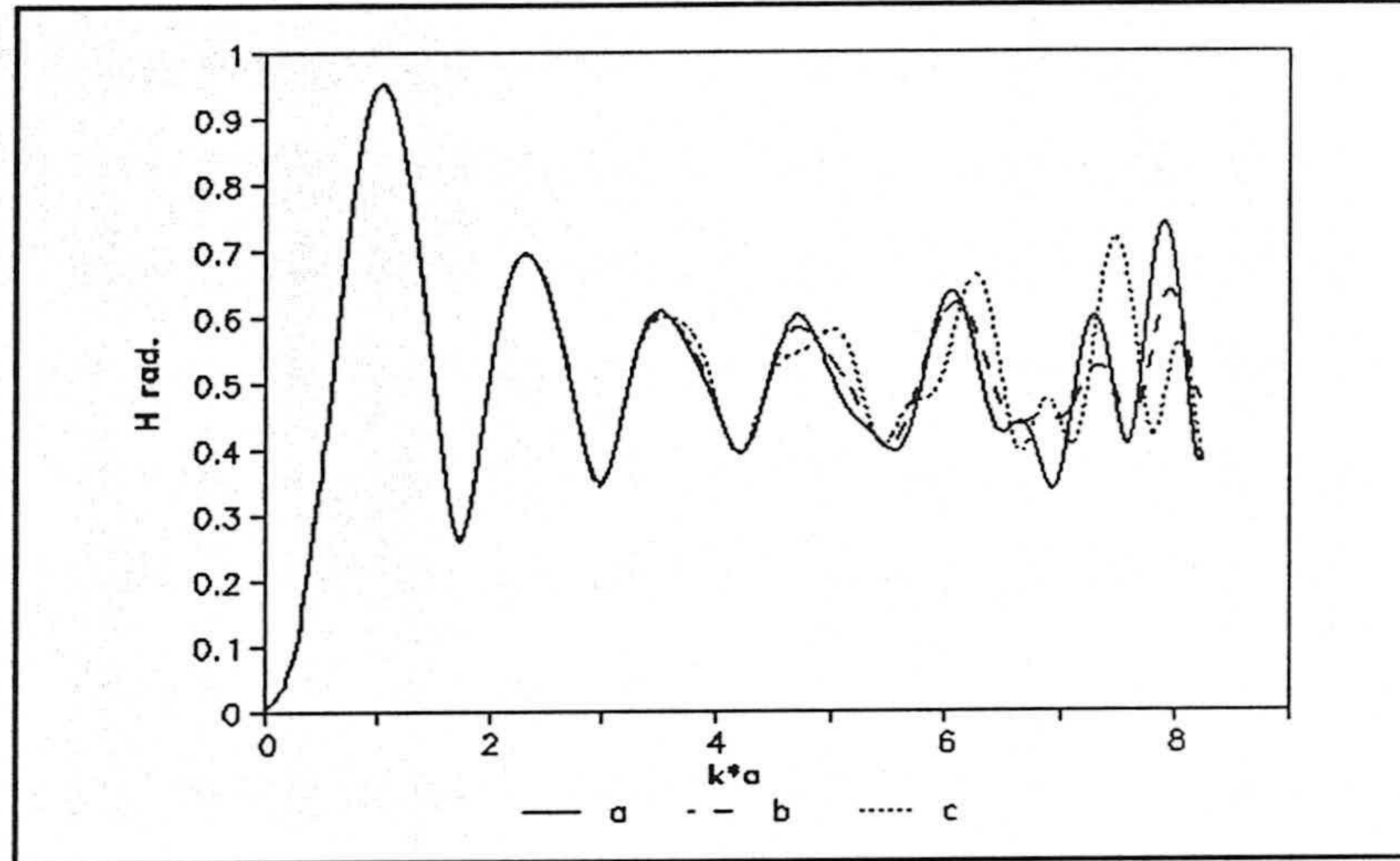


Fig. 4.6. Campo dispersado por la esfera (dividida en 12 bandas). (a) $\Delta t=0.20$. (b) $\Delta t=0.18$. (c) $\Delta t=0.13$.

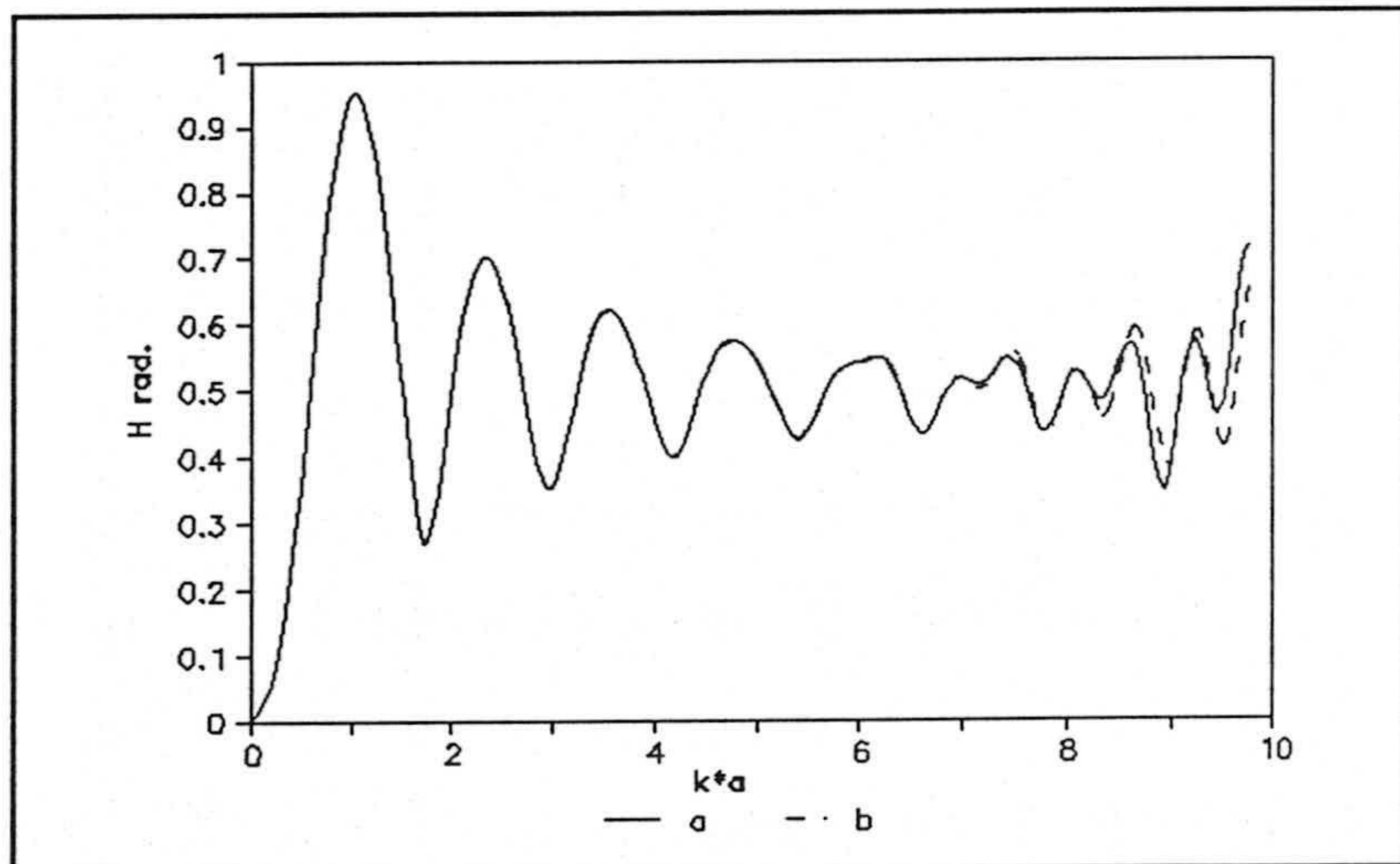


Fig. 4.7. Campo dispersado por una esfera (dividida en 24 bandas). (a) $\Delta t=0.10$. (b) $\Delta t=0.08$.

En ambas figuras se representa el campo dispersado por una esfera de radio $a=1m$. En 4.6 se ha dividido en 12 bandas mientras que en 4.7 se divide en 24, y en ambos casos con mallado proporcional. Para el primer caso la distancia mínima entre puntos es de 0.18 m y 0.09 m para el segundo. Vemos que todos los resultados coinciden hasta $k \cdot a \approx 6$ (límite de contenido espectral del pulso de alimentación) excepto en el caso (c) en 4.6. Por tanto podemos concluir:

i) Pequeñas variaciones del incremento temporal respecto a la distancia mínima entre puntos no modifica la solución. Solamente si existe una diferencia acusada se observan pequeñas diferencias pero a altas frecuencias.

ii) En las figuras 4.8 y 4.9 se representa el campo dispersado en el dominio del tiempo para los casos representados en la figura 4.7. De nuevo la transformada se ha efectuado para $t \approx 13$. Vemos como en la figura 4.9, es decir para $\Delta t = 0.08$ aparecen inestabilidades en la zona de señal casi-cero.

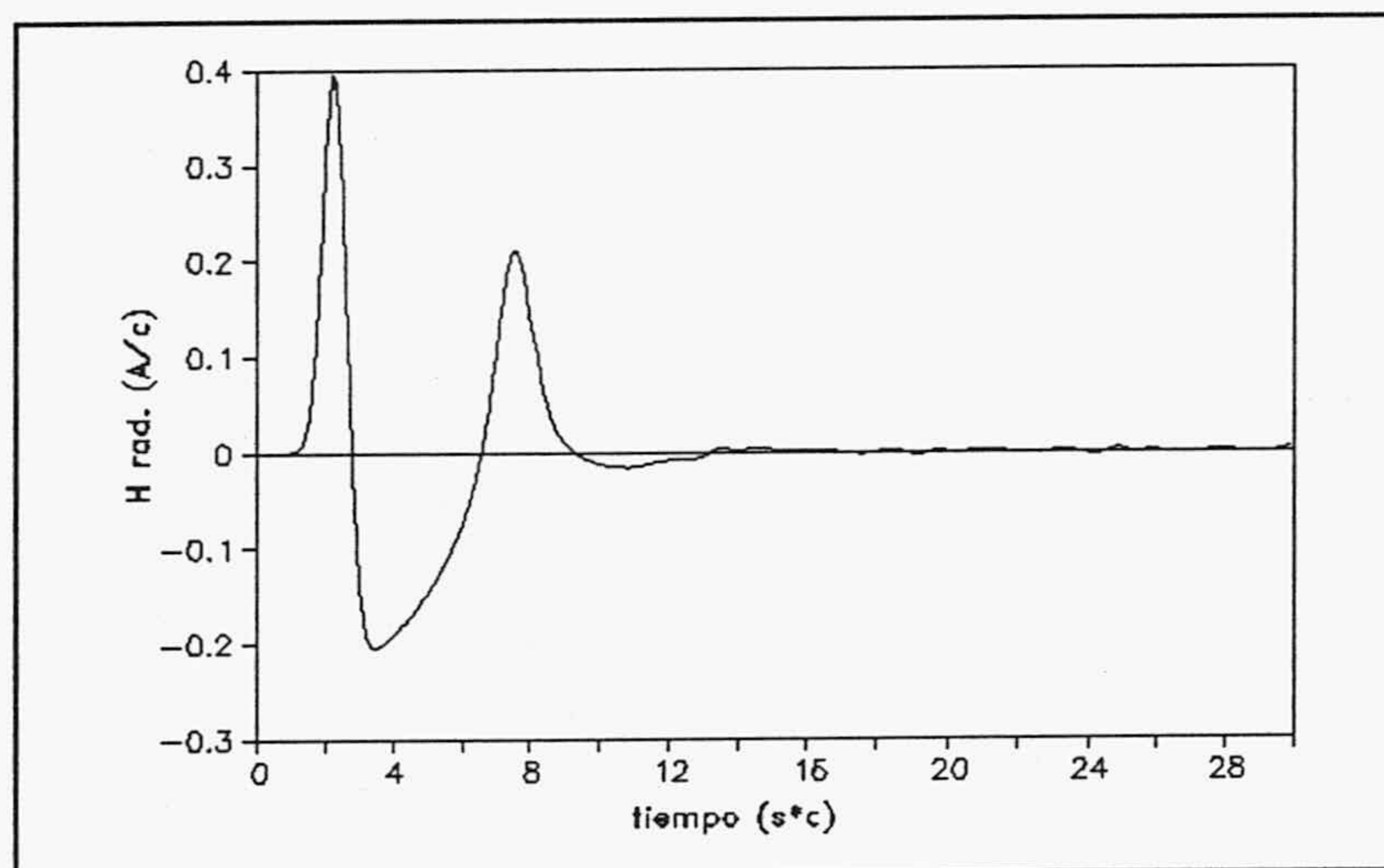


Fig. 4.8. Señal en el dominio del tiempo correspondiente a la Fig. 4.7.a.

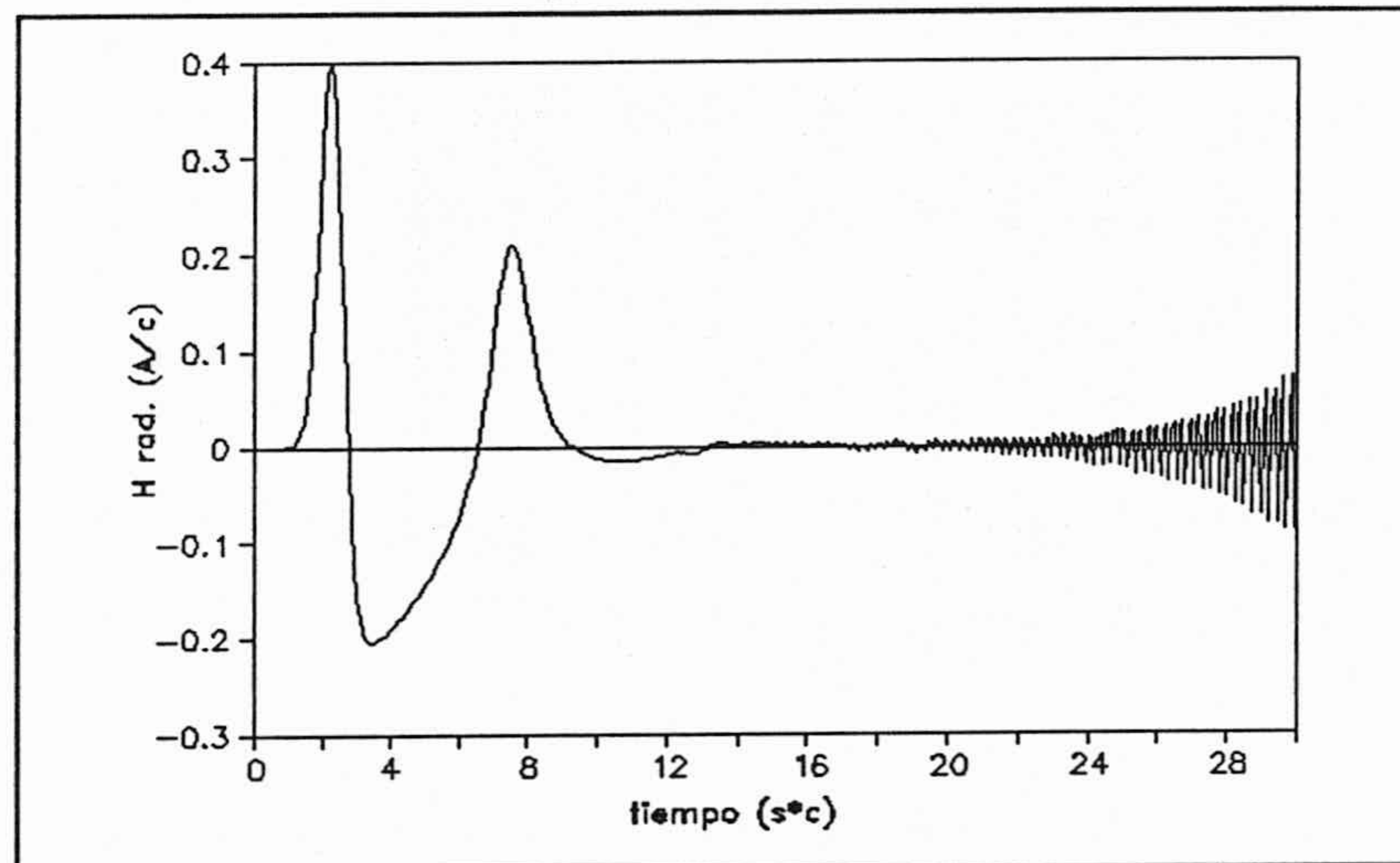


Fig. 4.9. Señal en el dominio del tiempo correspondiente a la Fig. 4.7.b.

4.4.4 Orden de interpolación.

Debido a la simplificación que supone que las variables temporal y espacial están desligadas en el planteamiento numérico, podemos plantearnos la influencia del orden de interpolación en la variable temporal. Es evidente que un orden bajo supone menor coste computacional que un orden alto.

Los resultados que se exponen se refieren de nuevo a la esfera, pero recogen las conclusiones obtenidas para otras figuras canónicas.

Dividimos la esfera en 12 bandas con mallado proporcional y elegimos Δt como 0.20, 0.18 y 0.13 para ordenes de interpolación 4, 2 y 1. (Figuras 4.10, 4.11, 4.12; a, b, c respectivamente). La transformada de estas curvas eliminado la parte casi-cero, se muestra en las figuras 4.13, 4.14 y 4.15.

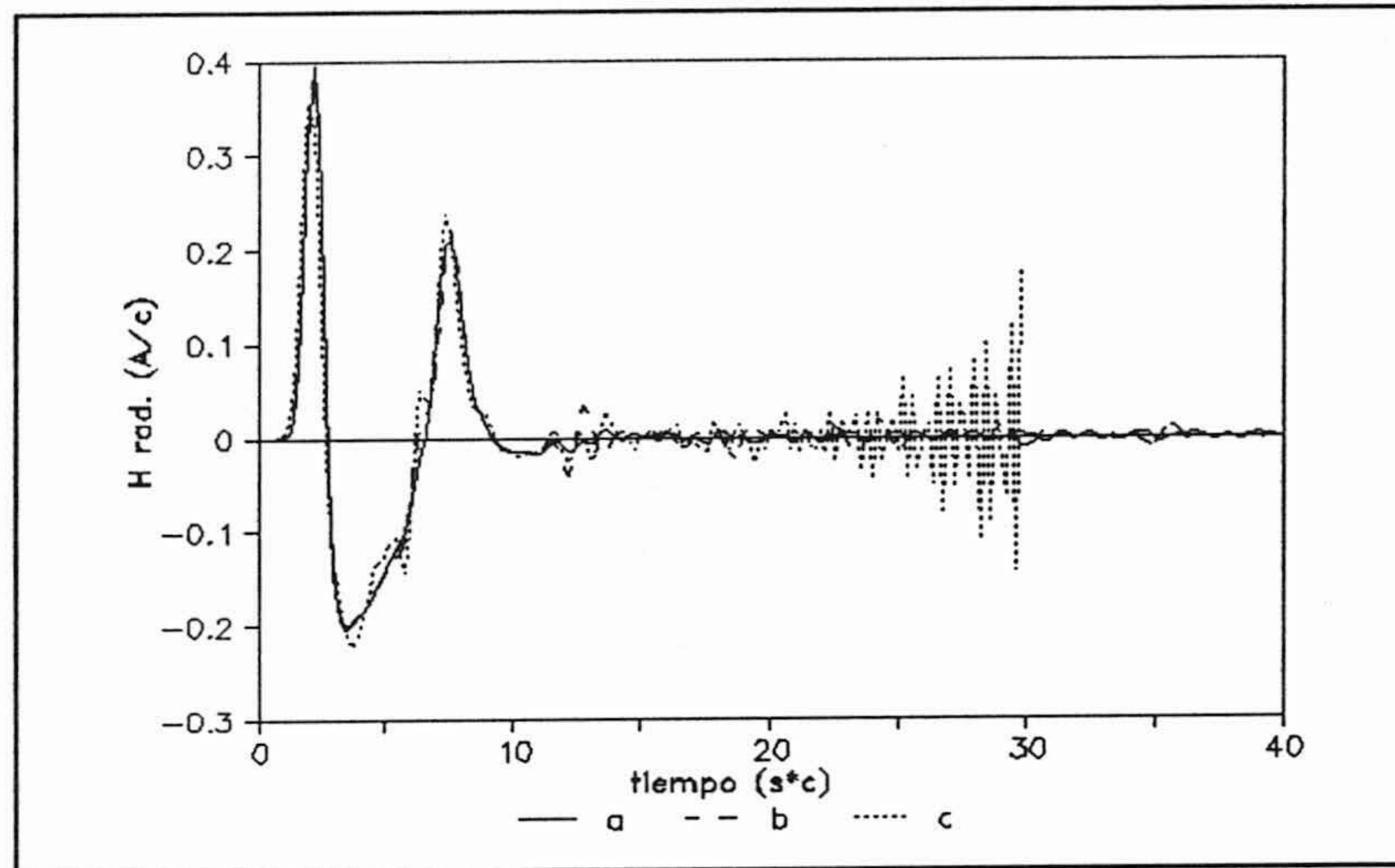


Fig. 4.10. Campo dispersado por la esfera (12 bandas) para distintos ordenes de interpolación. $\Delta t=0.20$.

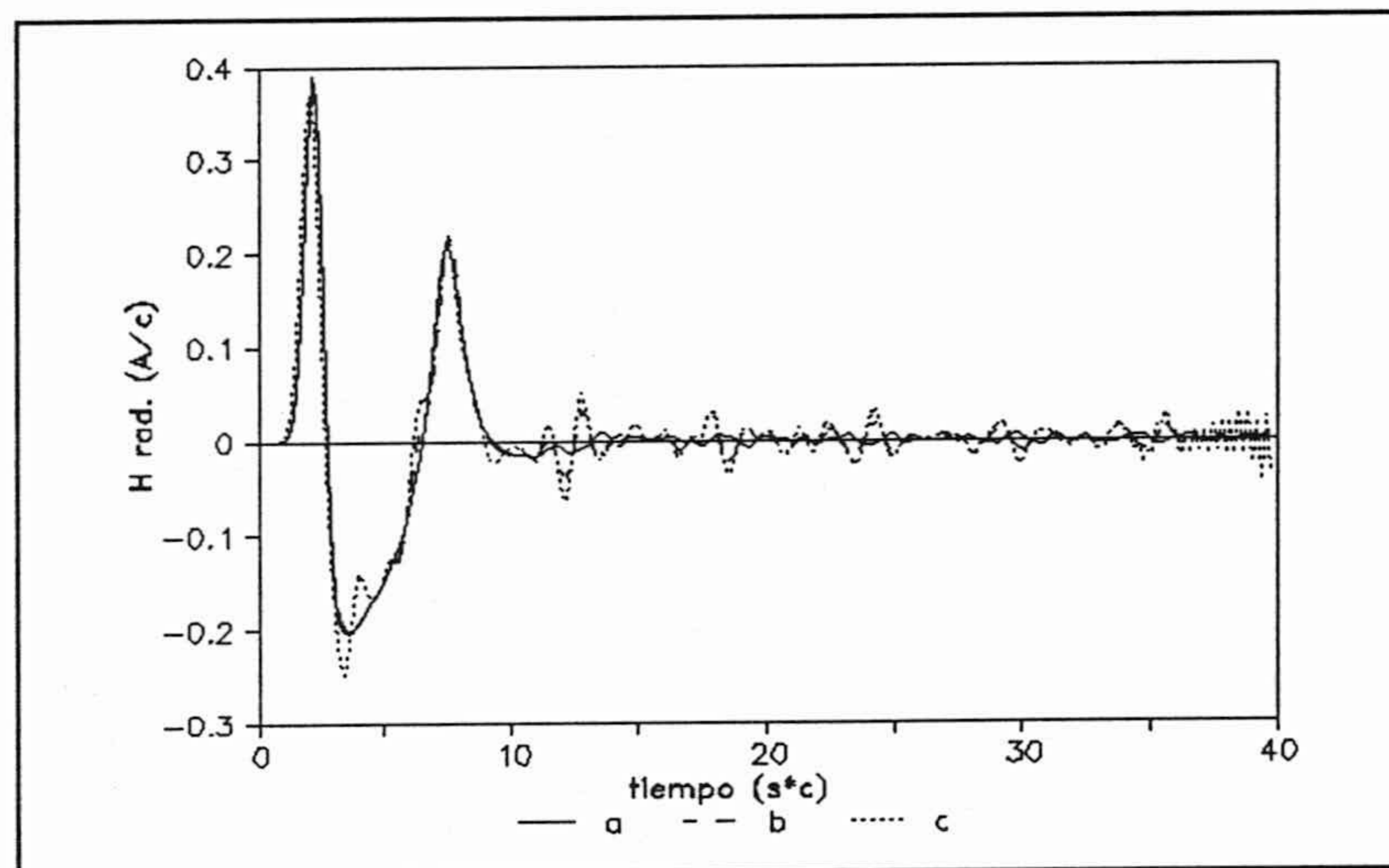


Fig. 4.11. Campo dispersado por una esfera (12 b andas) para distintos ordenes de interpolación. (a) O.I.=4. (b) O.I.=2. (c) O.I.=1. $\Delta t=0.18$.

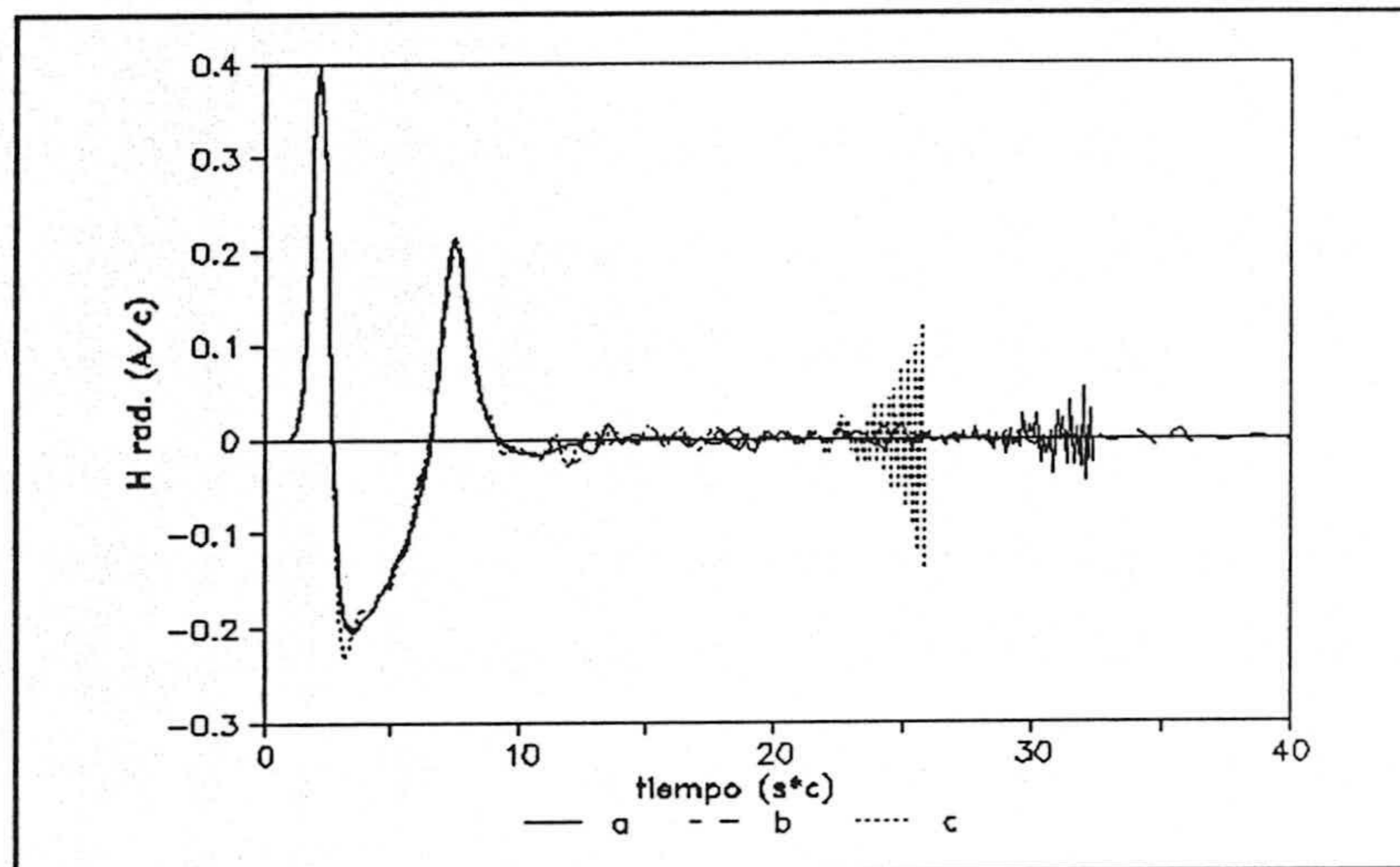


Fig. 4.12. Campo dispersado por una esfera (12 bandas) para distintos ordenes de interpolación. (a) O.I.=4. (b) O.I.=2. (c) O.I.=1. $\Delta t=0.13$.

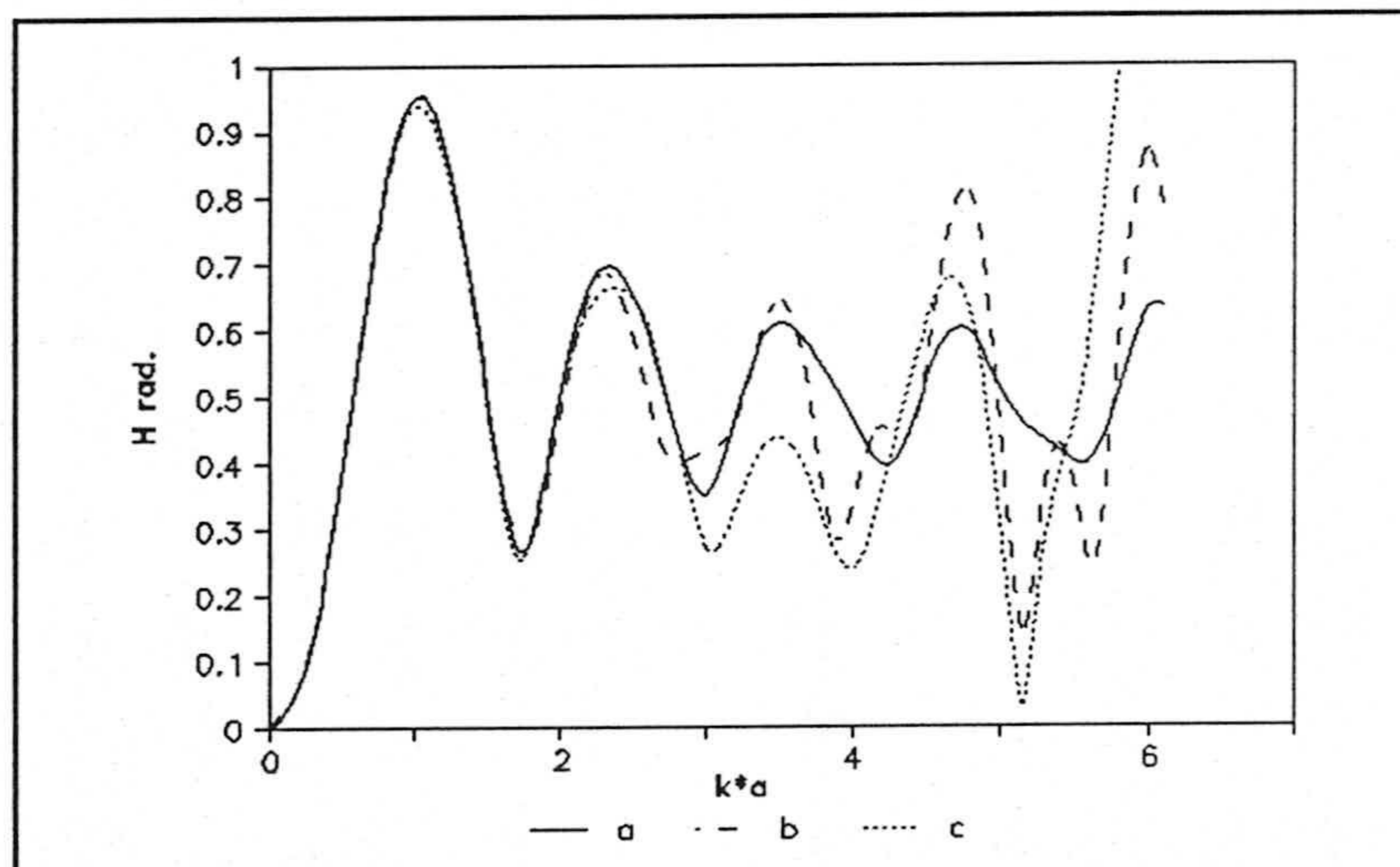


Fig. 4.13. Transformada de la Fig. 4.10.

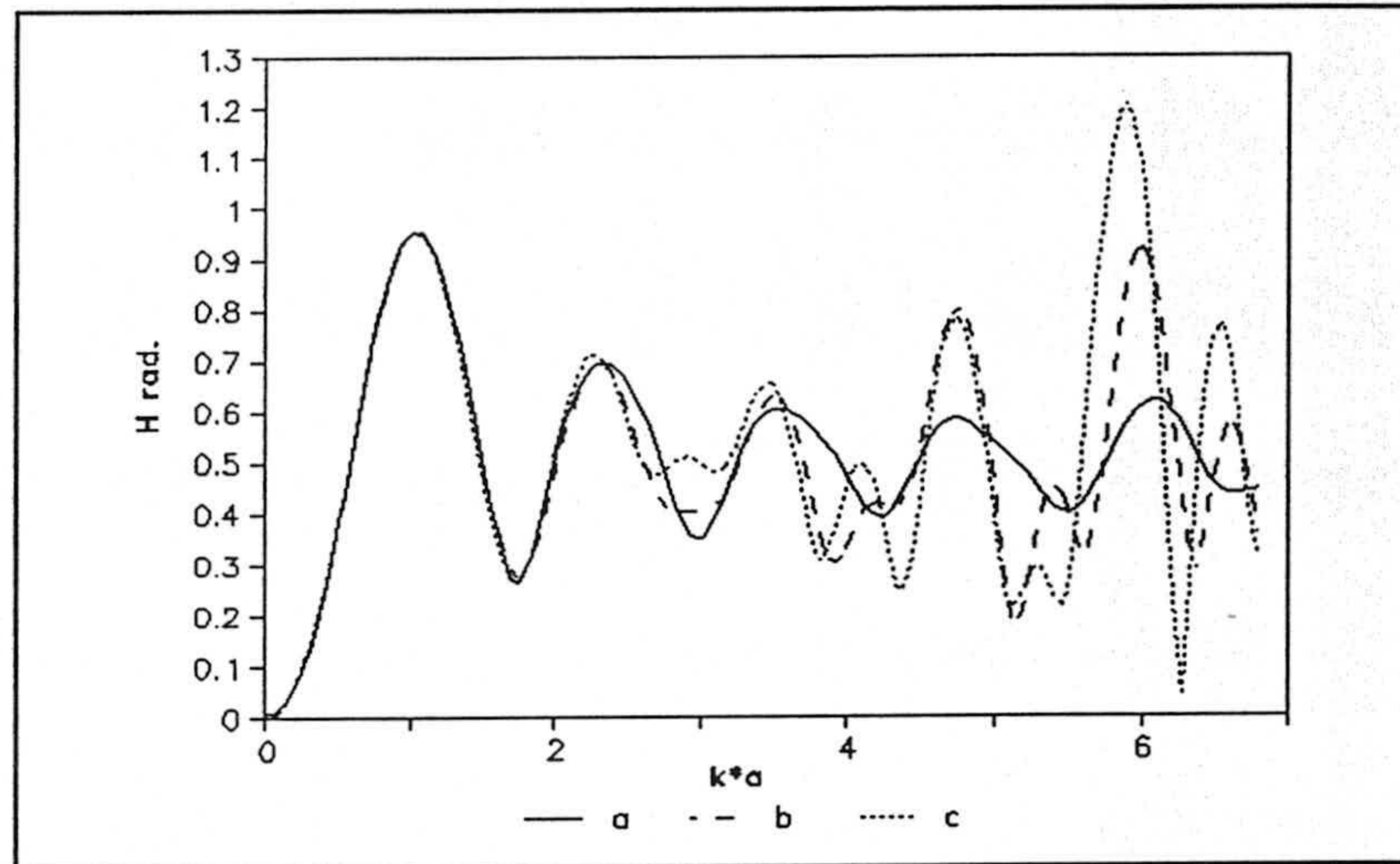


Fig. 4.14. Transformada de la Fig. 4.11.

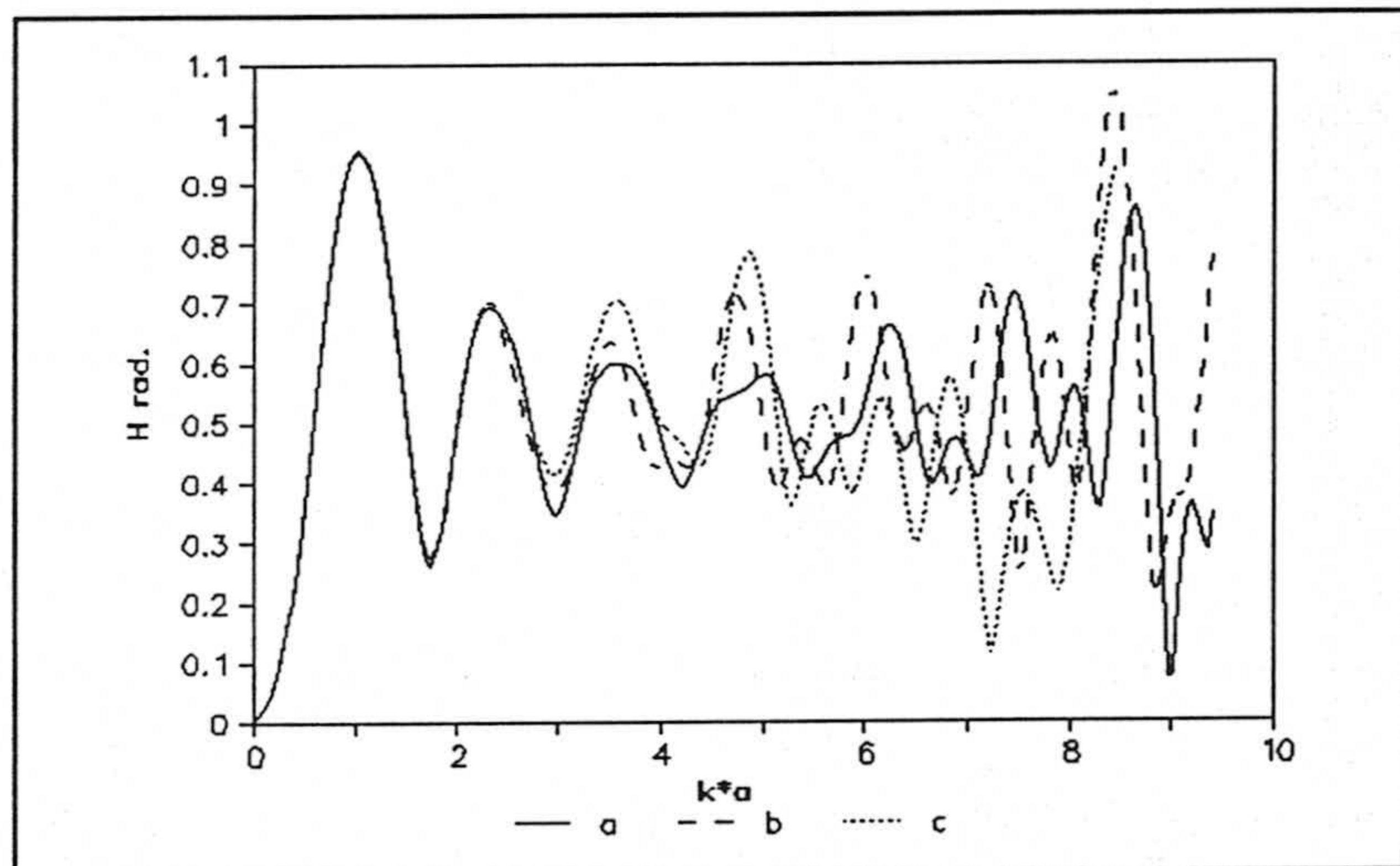


Fig. 4.15. Transformada de la Fig. 4.12.

Analizando estas figuras podemos concluir:

i) El orden de interpolación no es determinante de estabilidad de la solución. Esto se ve en la Fig. 4.12 en donde para orden de interpolación 4 aparecen inestabilidades. Desde luego, orden de interpolación 1 conlleva inestabilidades en todos los casos estudiados.

ii) Independientemente de la aparición de inestabilidades, el orden de interpolación afecta mucho a la forma de la señal a partir del pulso inicial. Es de destacar que para $\Delta t=0.13$, es decir, bastante inferior a la distancia mínima entre puntos (0.2), la influencia del orden de interpolación es menor.

iii) La zona de la curva comprendida entre el primer mínimo y donde se puede considerar cero es fundamental en la forma que presenta la transformada de la señal. Así vemos a partir de las figuras 4.13, 4.14 y 4.15 que sólo para orden de interpolación 4 tenemos garantizada una forma sensata de la señal. Incluso para orden 2 la diferencia empieza a surgir en la segunda resonancia.

Idénticos resultados se obtienen cuando dividimos al dispersor en más parches. En las figuras 4.16 y 4.17 hemos representado el campo dispersado por la esfera para 20 y 28 bandas eligiendo un incremento temporal igual a la menor distancia entre puntos. Las conclusiones son similares, aunque las diferencias se van haciendo menores. En este caso sólo se han representado para ordenes de interpolación 4 y 1.

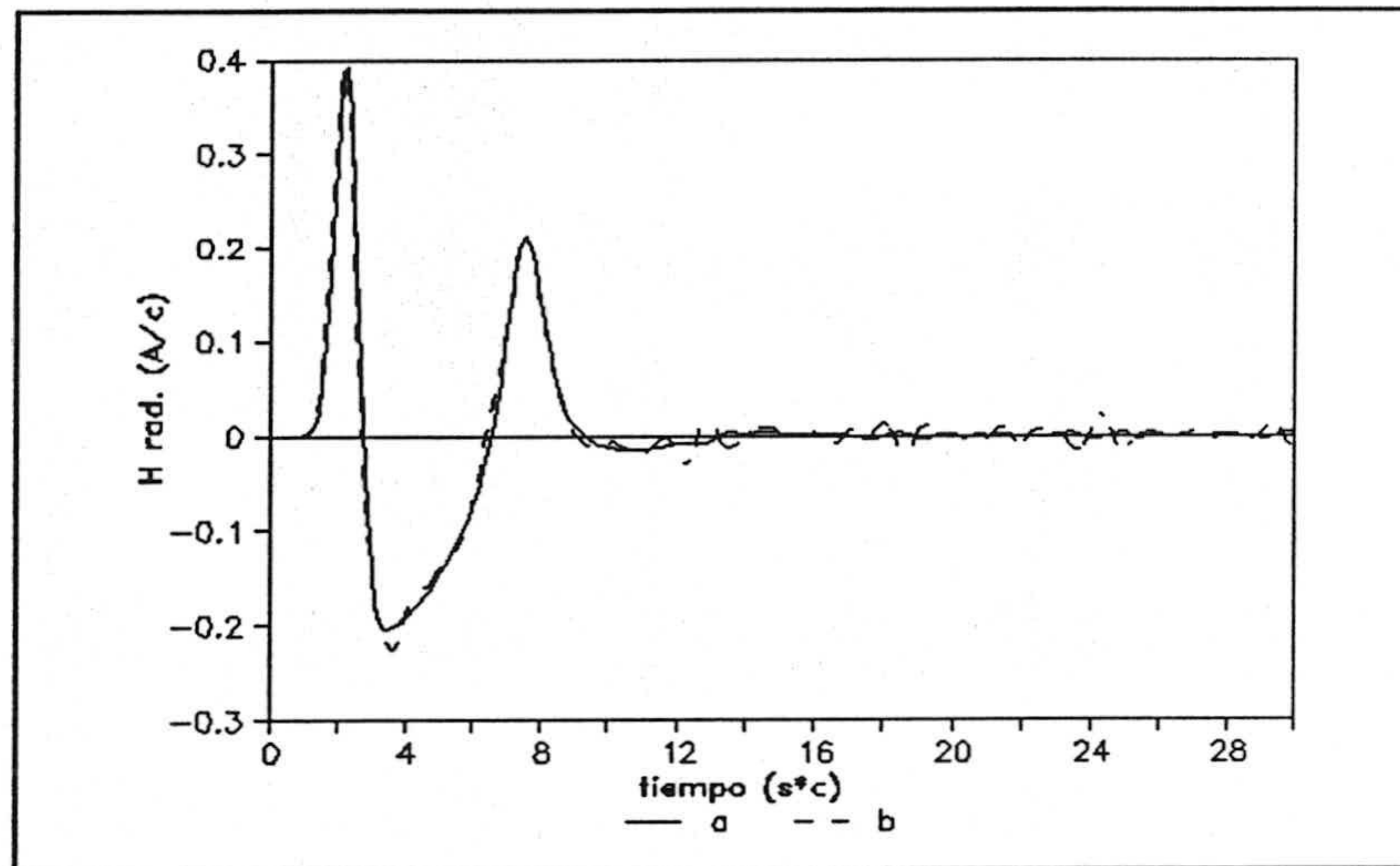


Fig. 4.16. Campo dispersado por una esfera (20 bandas). (a) O.I.=4. (b) O.I.=1. $\Delta t=0.12$.

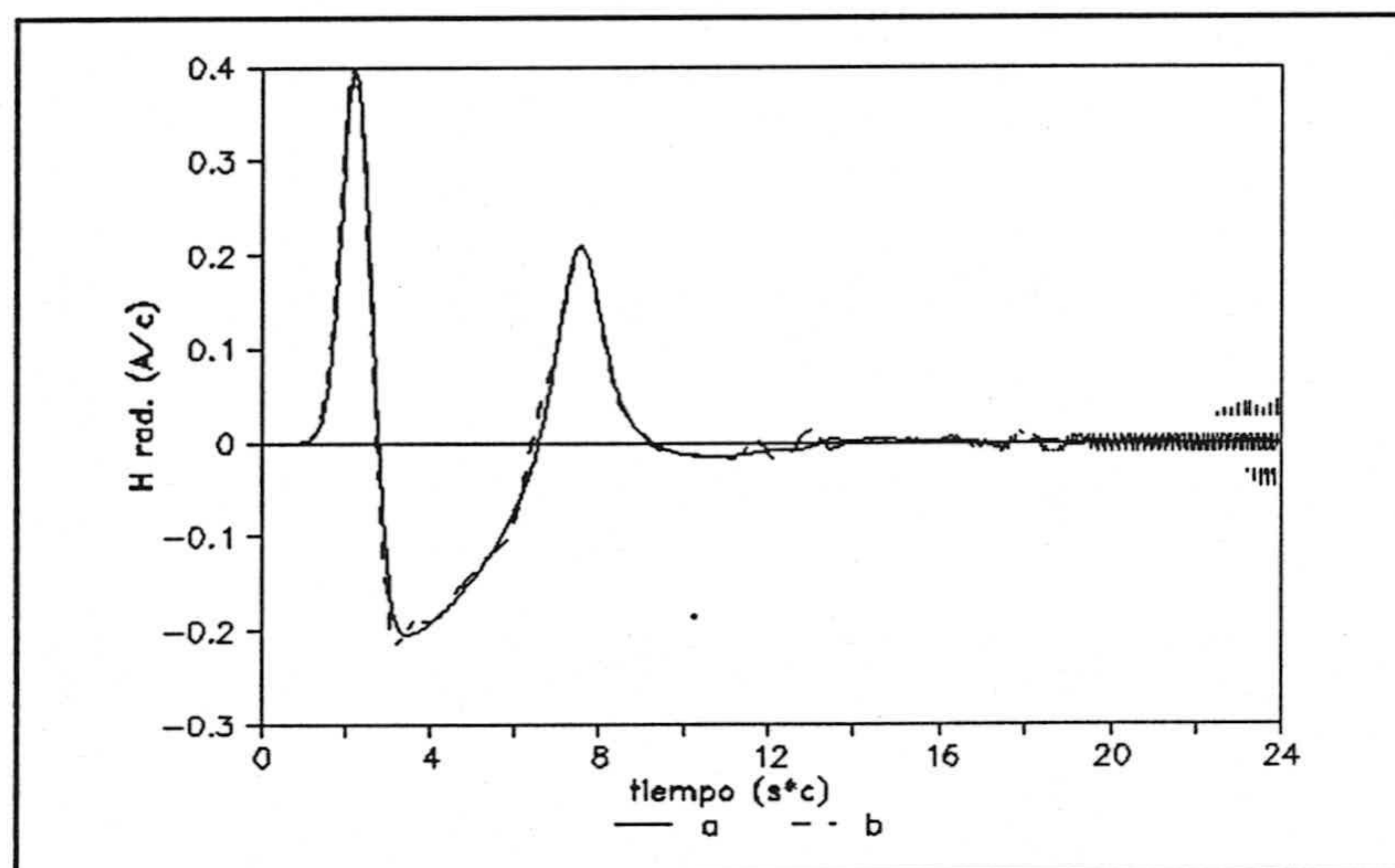


Fig. 4.17. Campo dispersado por una esfera (20 bandas). (a) O.I.=4. (b) O.I.=1. $\Delta t=0.08$.

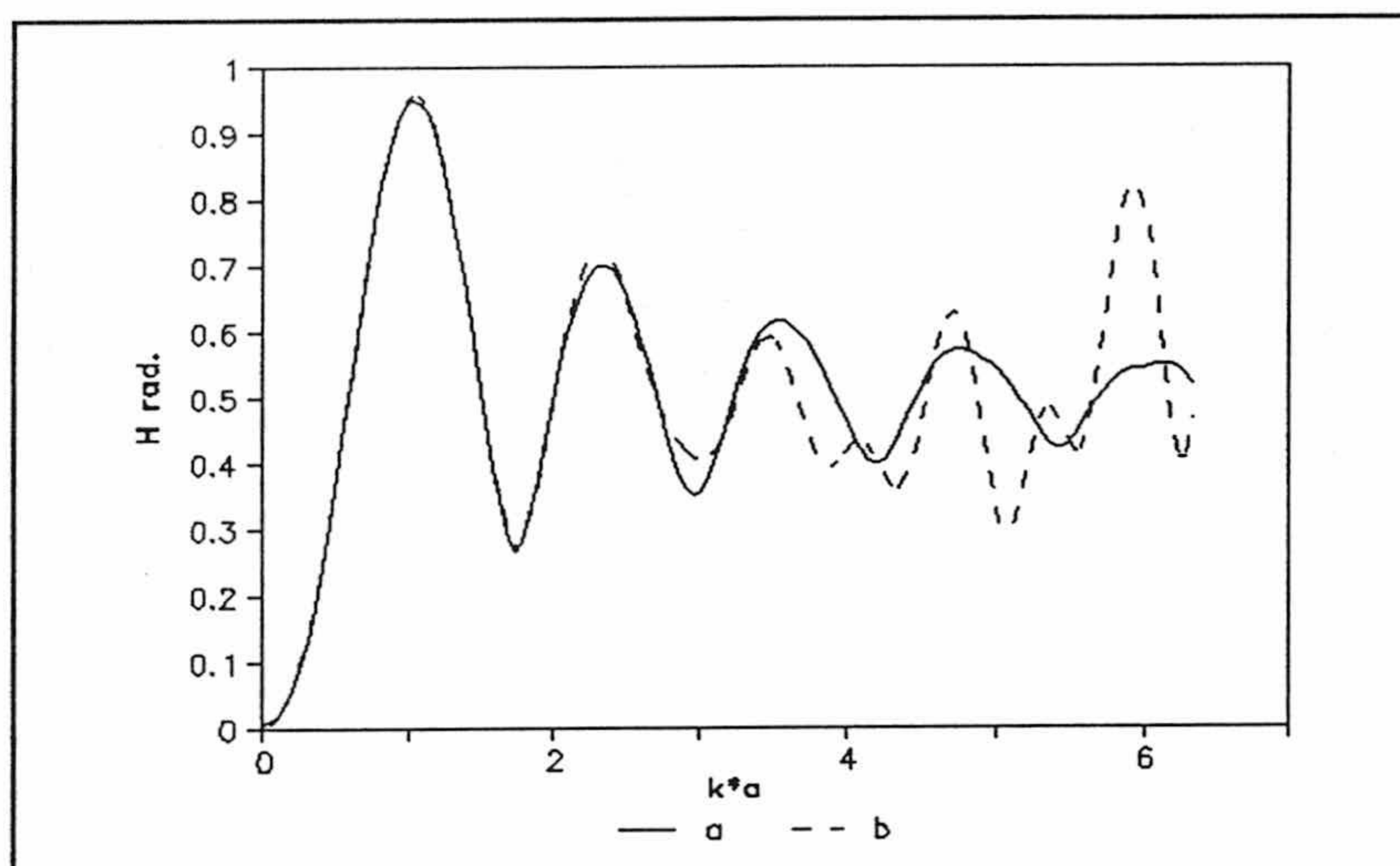


Fig. 4.18. Transformada de la Fig. 4.16.

Es de destacar que la presencia de inestabilidades no la hemos podido asignar a ningún valor de algún parámetro. Otro hecho que tampoco está relacionado con ningún valor de algún parámetro es el valor del campo magnético perpendicular a la superficie. Este campo, que teóricamente debe ser cero, no lo es, y además presenta un comportamiento que es independiente del orden de interpolación y del número de parches en que se divide la esfera. En la figura 4.20 se representa el error cuadrático medio de la componente normal del campo para todos los puntos de la superficie. Se representa para divisiones de la esfera en 8, 10, ..., 24 bandas con el modelado proporcional, y variando el orden de interpolación con los valores 1, 2 y 4. El intervalo temporal es aproximadamente igual a la distancia mínima entre puntos para cada caso.

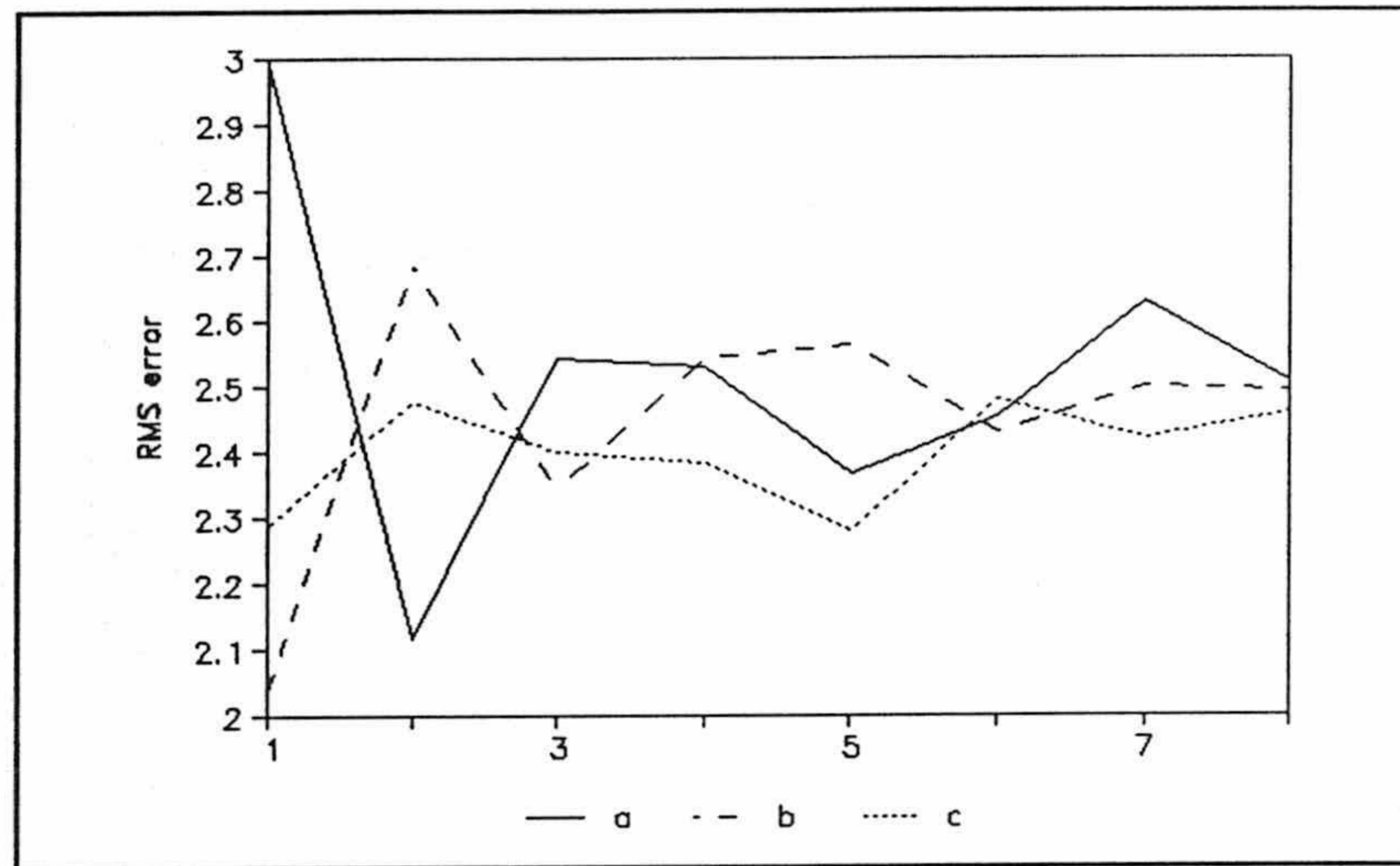


Fig. 4.21. Error cuadrático medio de la componente perpendicular del campo magnético en la superficie de una esfera.

4.5 Resultados.

4.5.1 RCS de la esfera y del cilindro capeado.

Mostramos en este apartado algunos resultados de campo dispersado en dirección inversa y RCS de la esfera y del cilindro capeado. Tomaremos como definición de RCS:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{H^s}{H^i} \right]^2$$

En la figura 4.21 se muestra la RCS en escala logarítmica de una esfera.

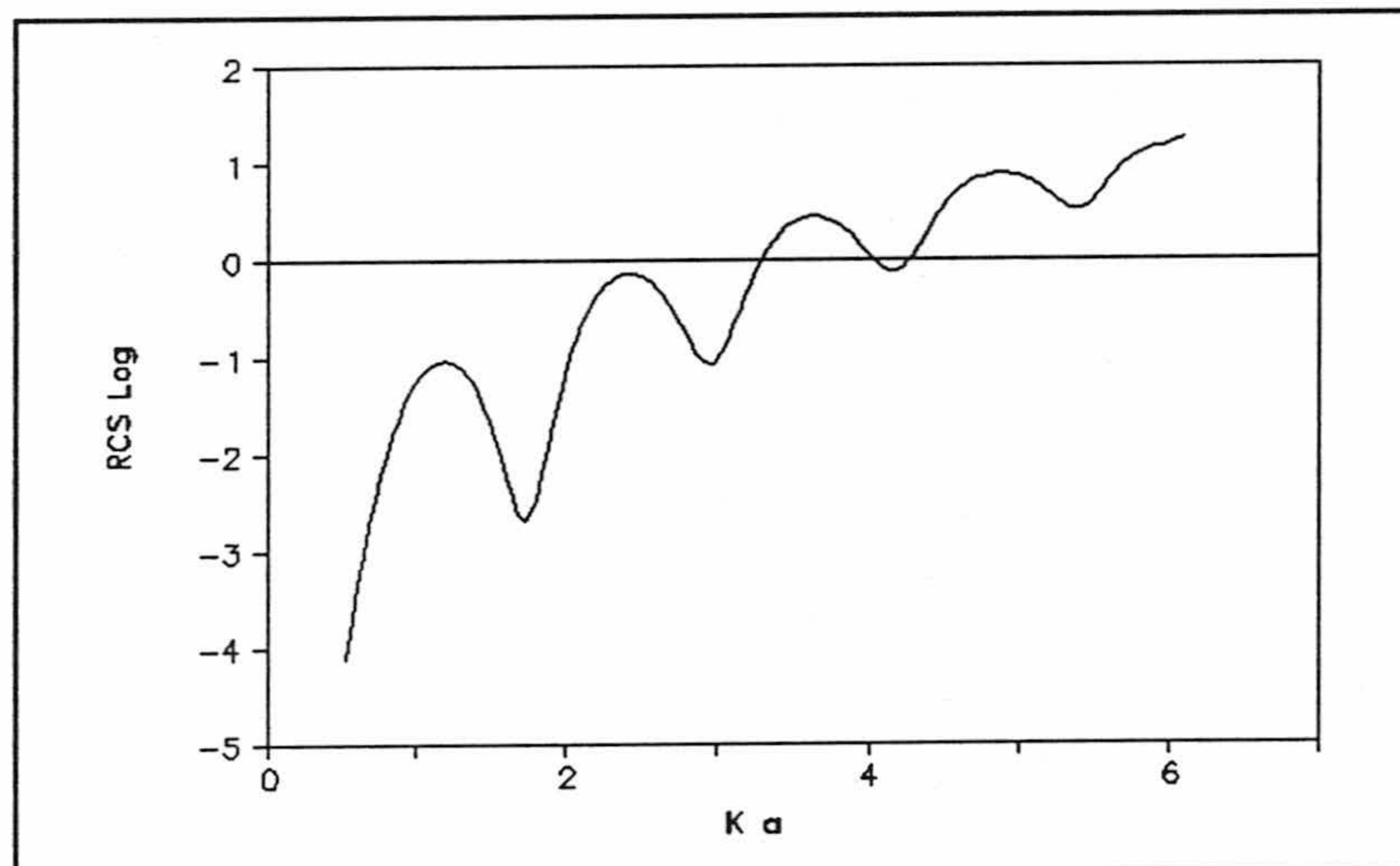


Fig. 4.21. RCS en escala logarítmica de una esfera de radio $a=1m$.

En las figuras 4.22-4.29 se muestra el campo dispersado en dirección inversa y la RCS logarítmica del cilindro capeado de radio $1m$ y longitud $3, 4, 5$ y $6 m$. Se representa en función de $k*a$, siendo a la mitad de la longitud.

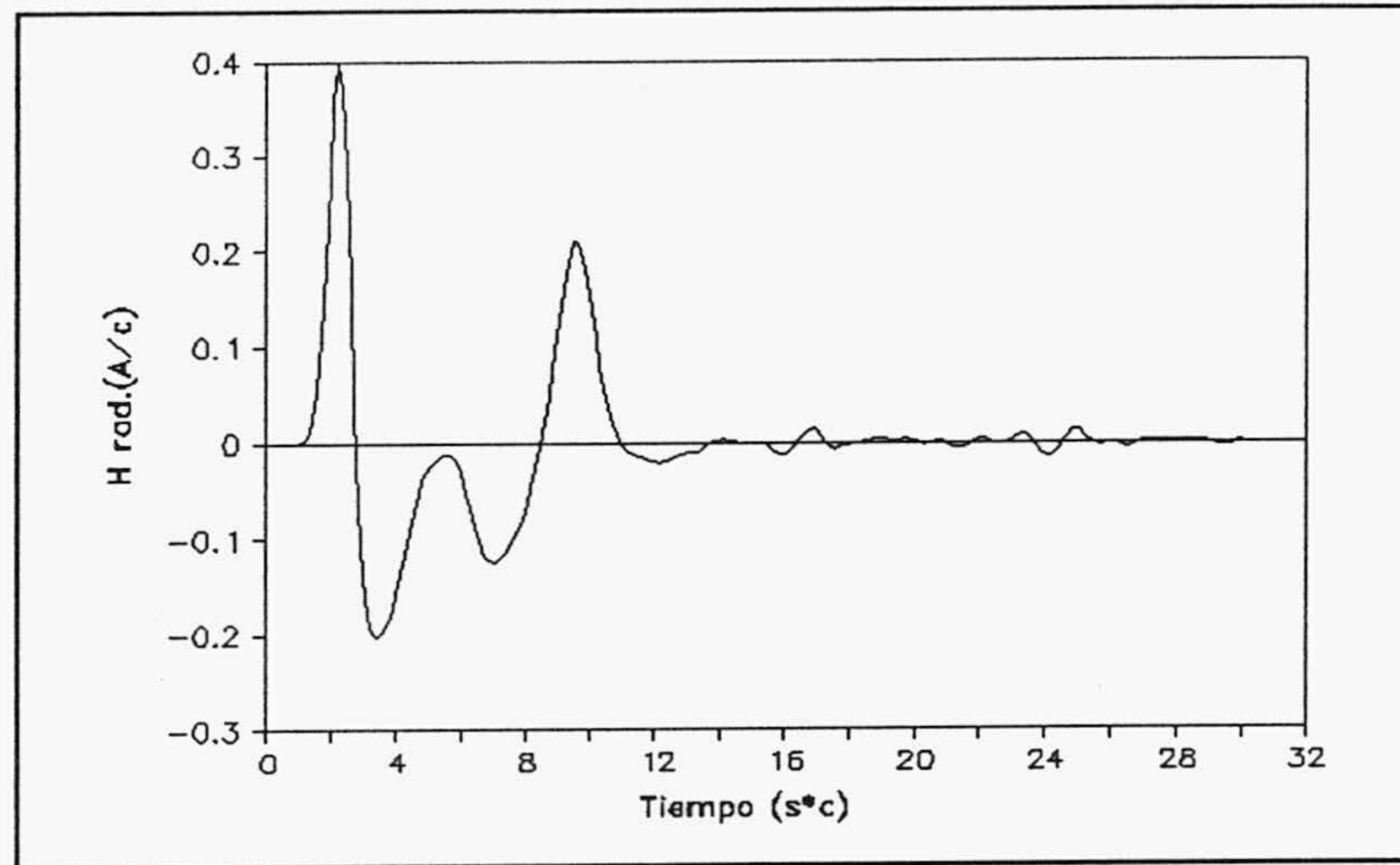


Fig. 4.22. Campo dispersado por un cilindro capeado de longitud 3m.

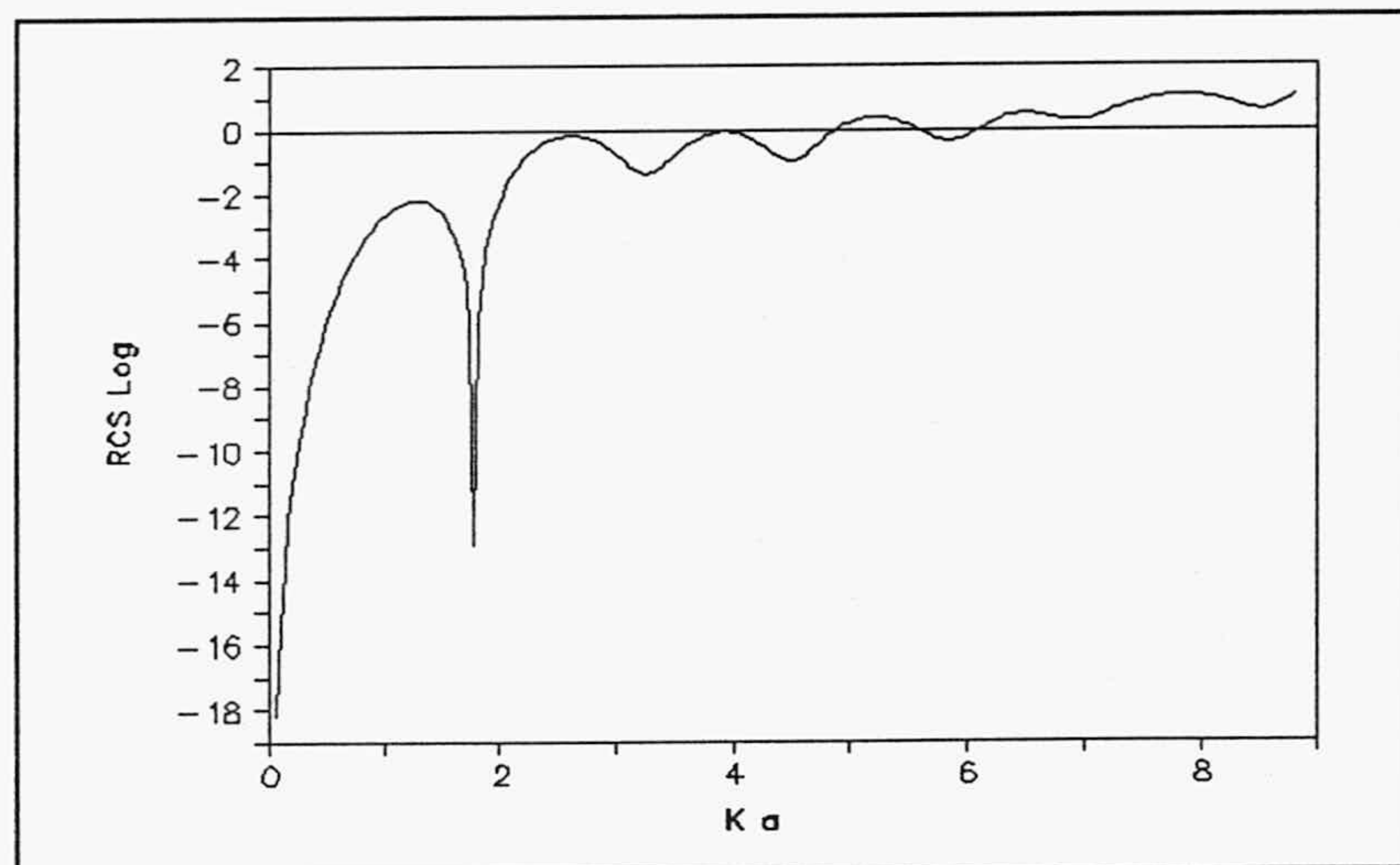


Fig. 4.23. RCS logarítmica de un cilindro capeado de longitud 3m.

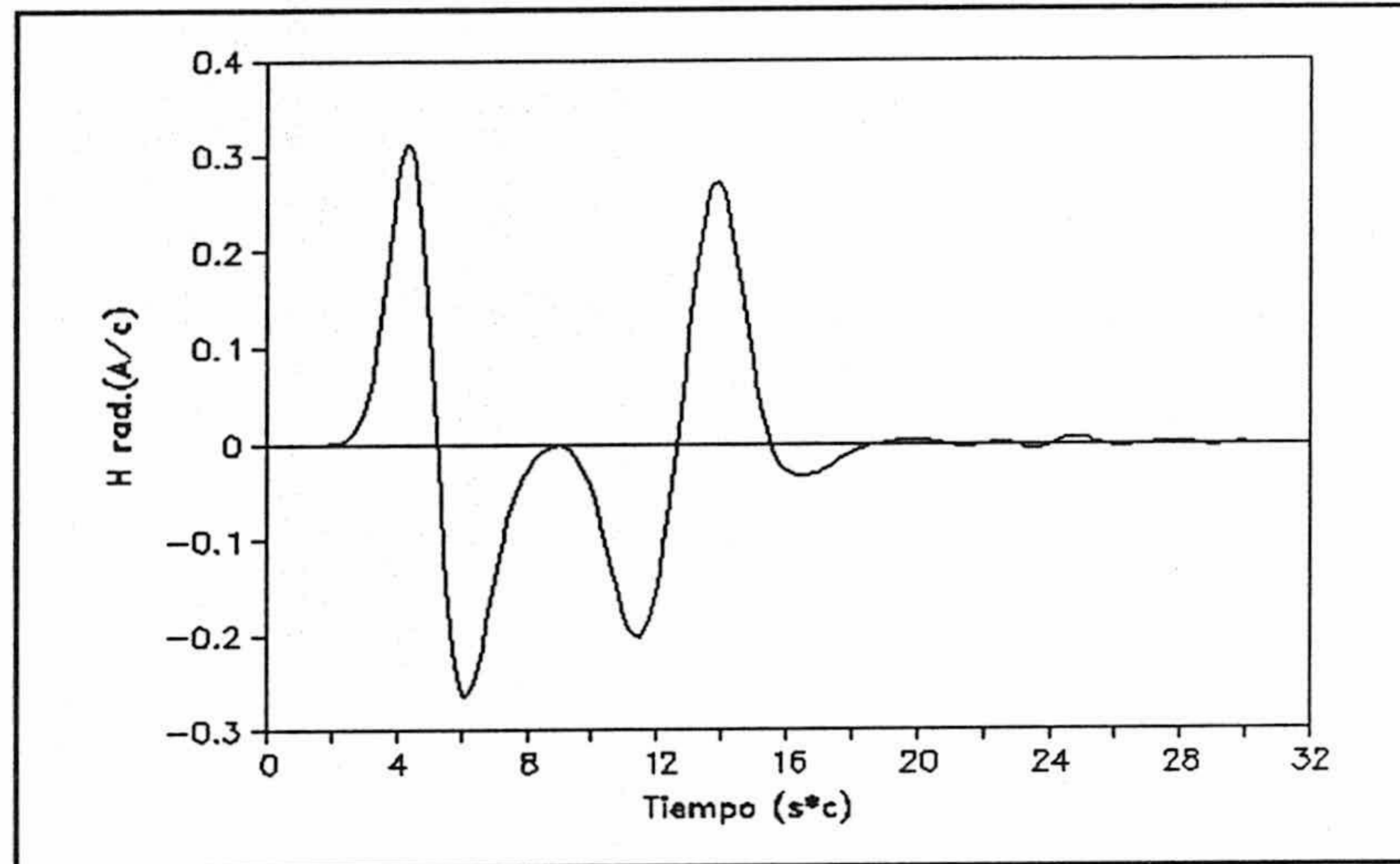


Fig. 4.24. Campo dispersado por un cilindro capeado de longitud 4m.

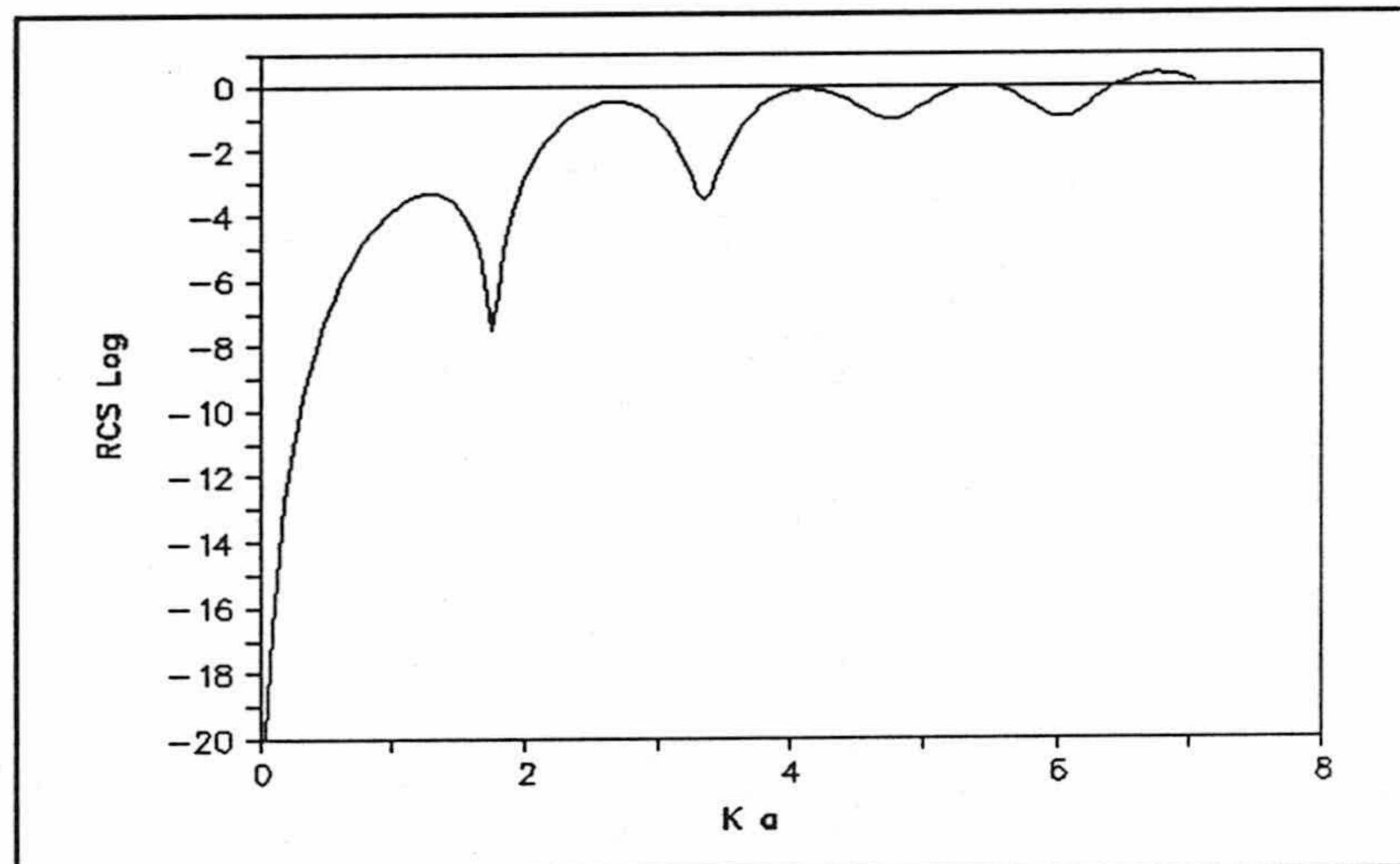


Fig. 4.25. RCS logarítmica de un cilindro capeado de longitud 4m.

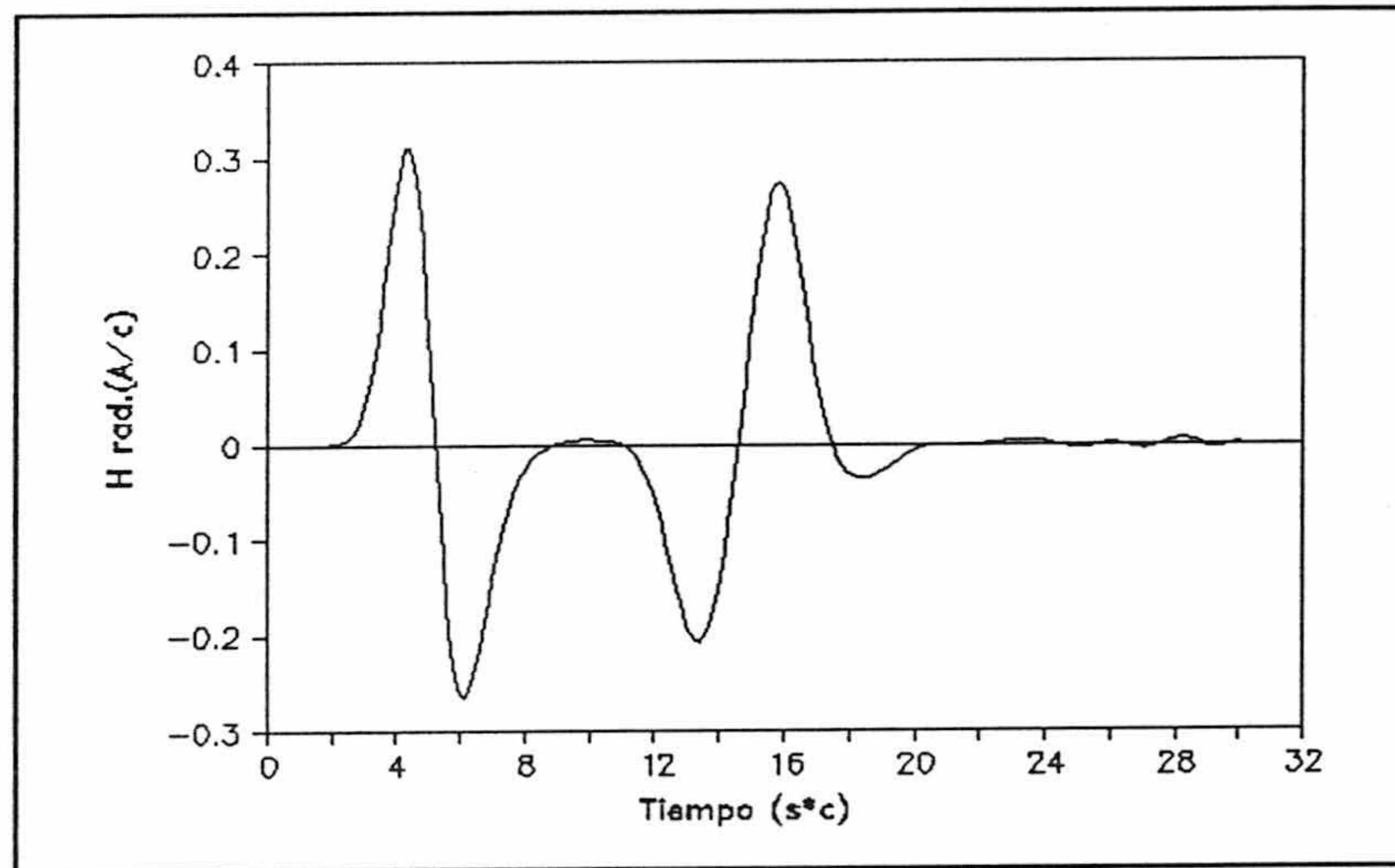


Fig. 4.26. Campo dispersado por un cilindro capeado de longitud 5m.

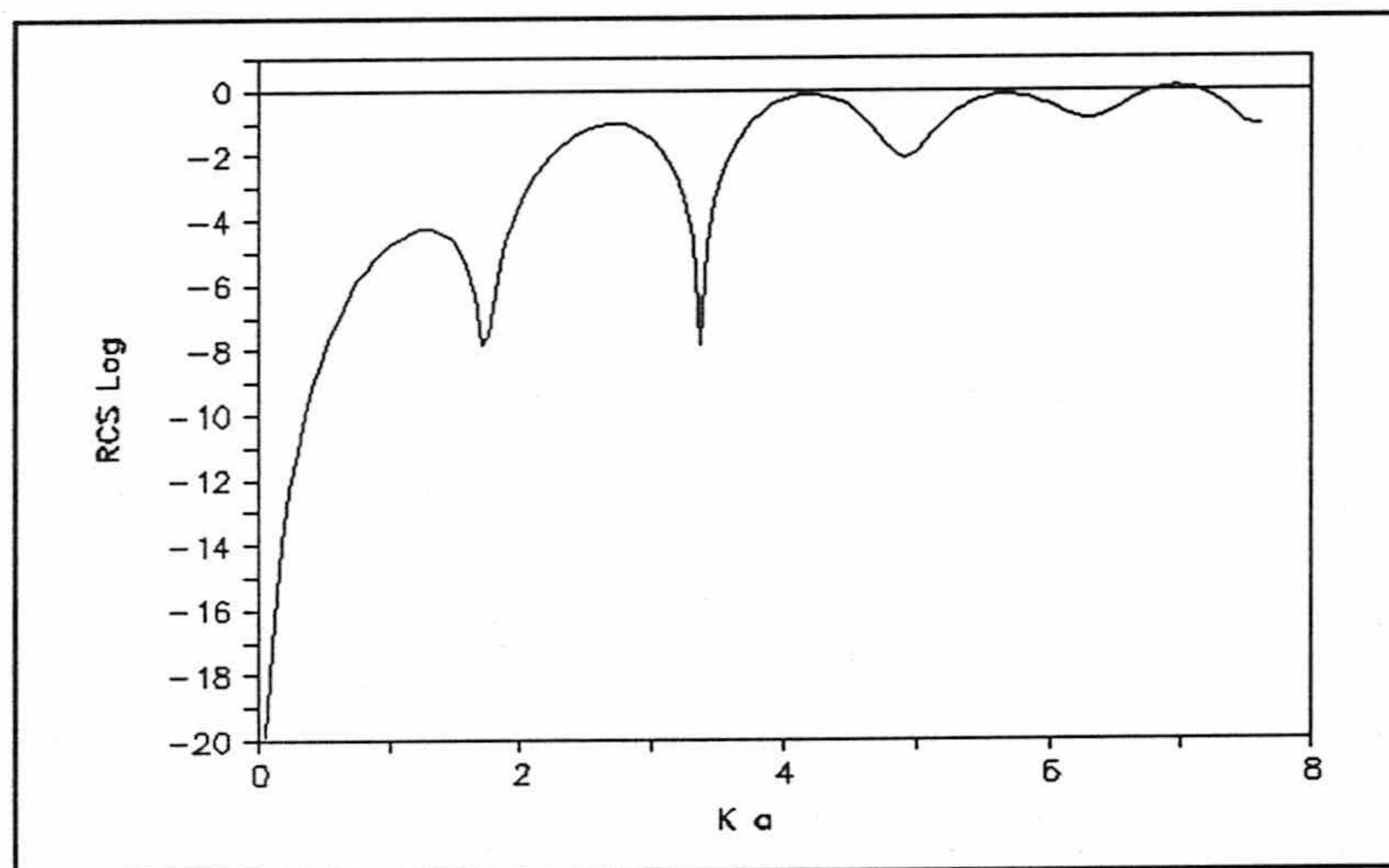


Fig. 4.27. RCS logarítmica de un cilindro capeado de longitud 5m.

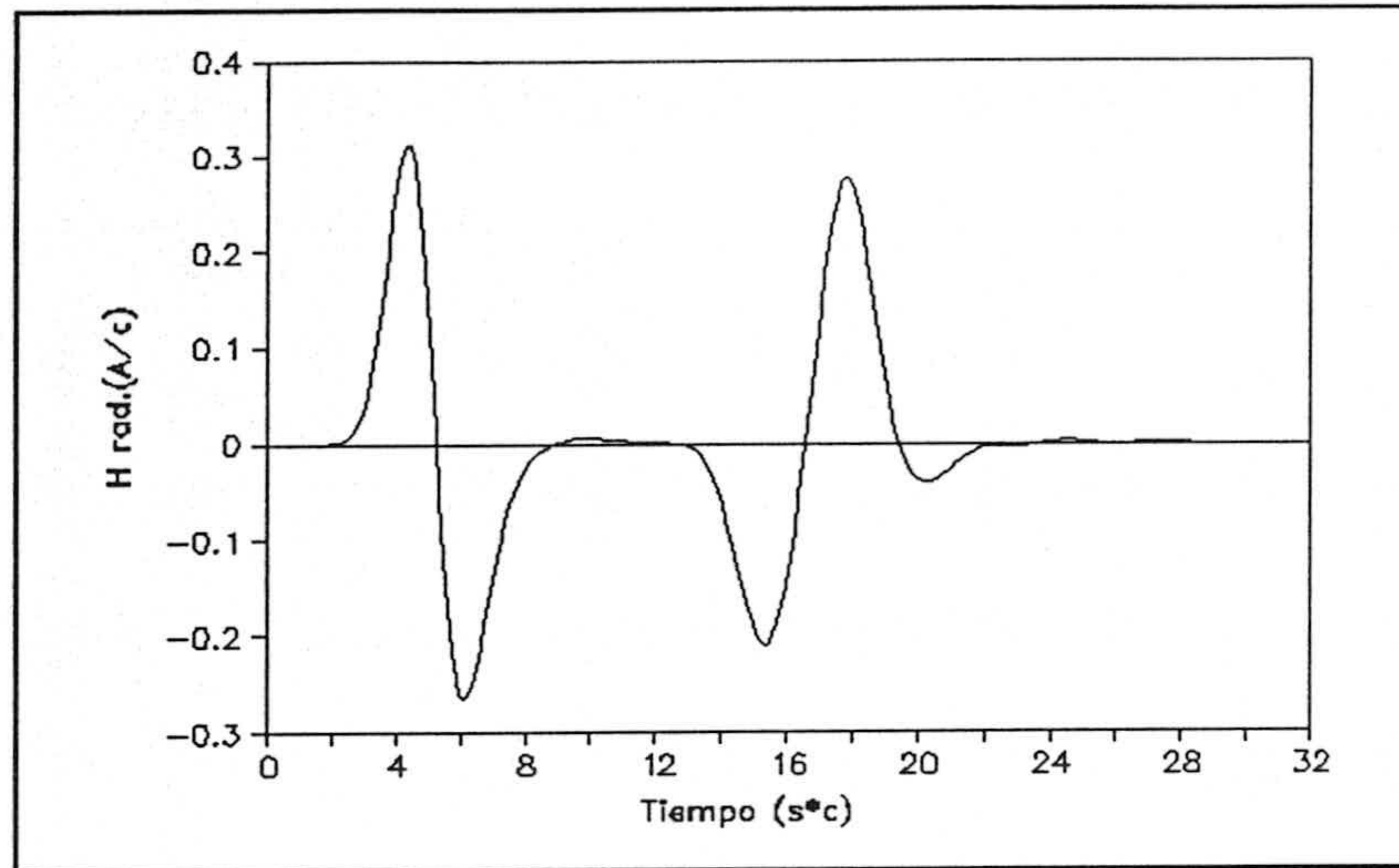


Fig. 4.28. Campo dispersado por un cilindro capeado de longitud 6m.

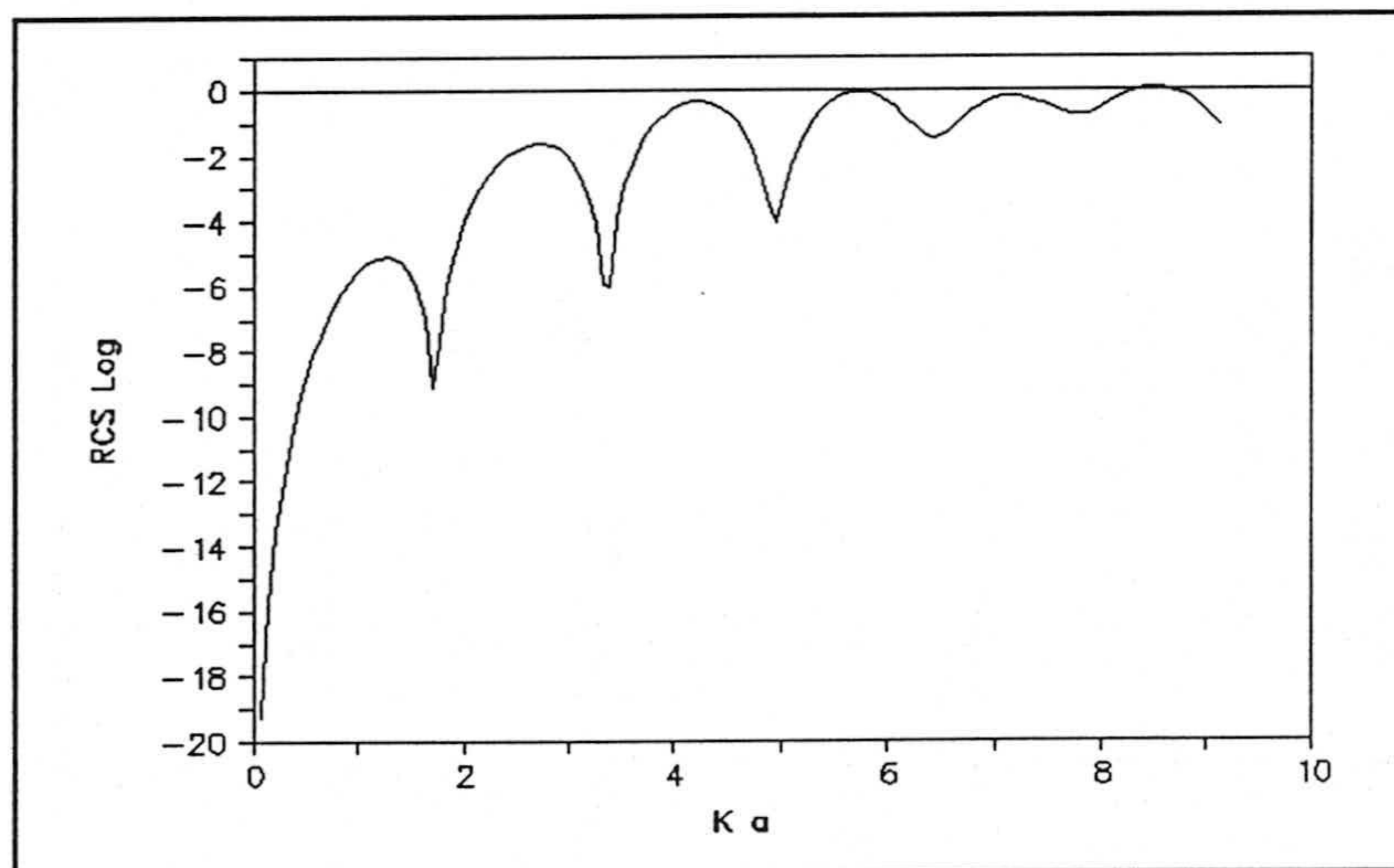


Fig. 4.29. RCS logarítmica de un cilindro capeado de longitud 6m.

4.5.2 Blancos ocultos de radar.

Para estudiar la posible identificación de figuras ocultas, en la señal dispersada, se situaron distintas figuras canónicas detrás de una esfera de radio $a=2\text{m}$. Se hizo un modelado bastante grosero para ver hasta que punto se puede identificar la señal con un máximo de perturbación numérica. La conclusión es la que se esperaba: situando las figuras a distancia suficiente para que la respuesta de la esfera que sirve de pantalla se atenue, la respuesta de la otra figura aparece claramente identificable. Como ejemplo se muestra en la figura 4.21 el campo dispersado cuando se oculta una esfera de radio 1m , con una distancia entre centros de 8 m ; y en la figura 4.22 el mismo campo dispersado cuando la figura oculta es un cilindro capeado de 4m de longitud y 1m de radio, separado su centro del de la esfera una distancia de 9m .

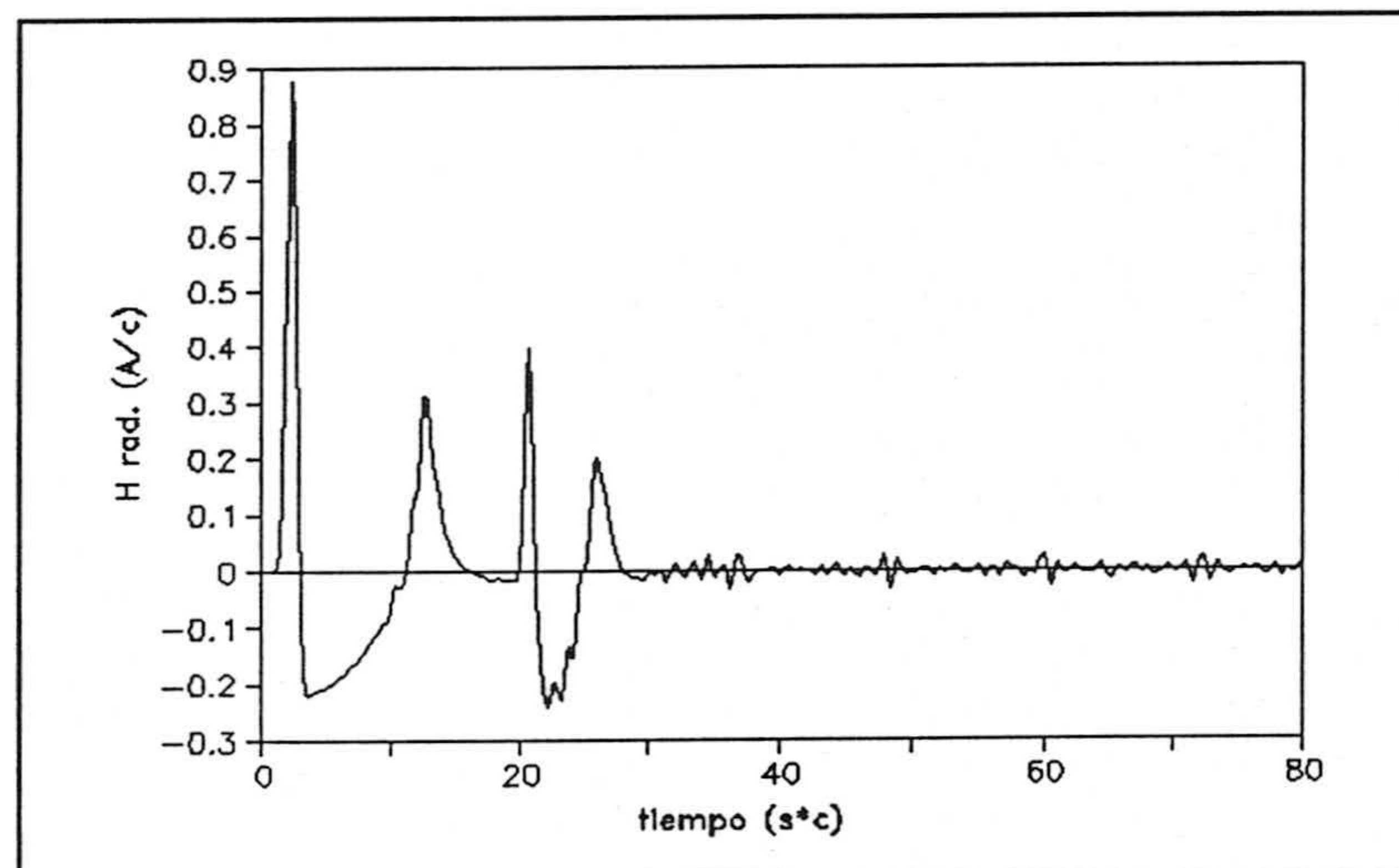


Fig. 4.30. Blancos ocultos de radar. Esfera-esfera.

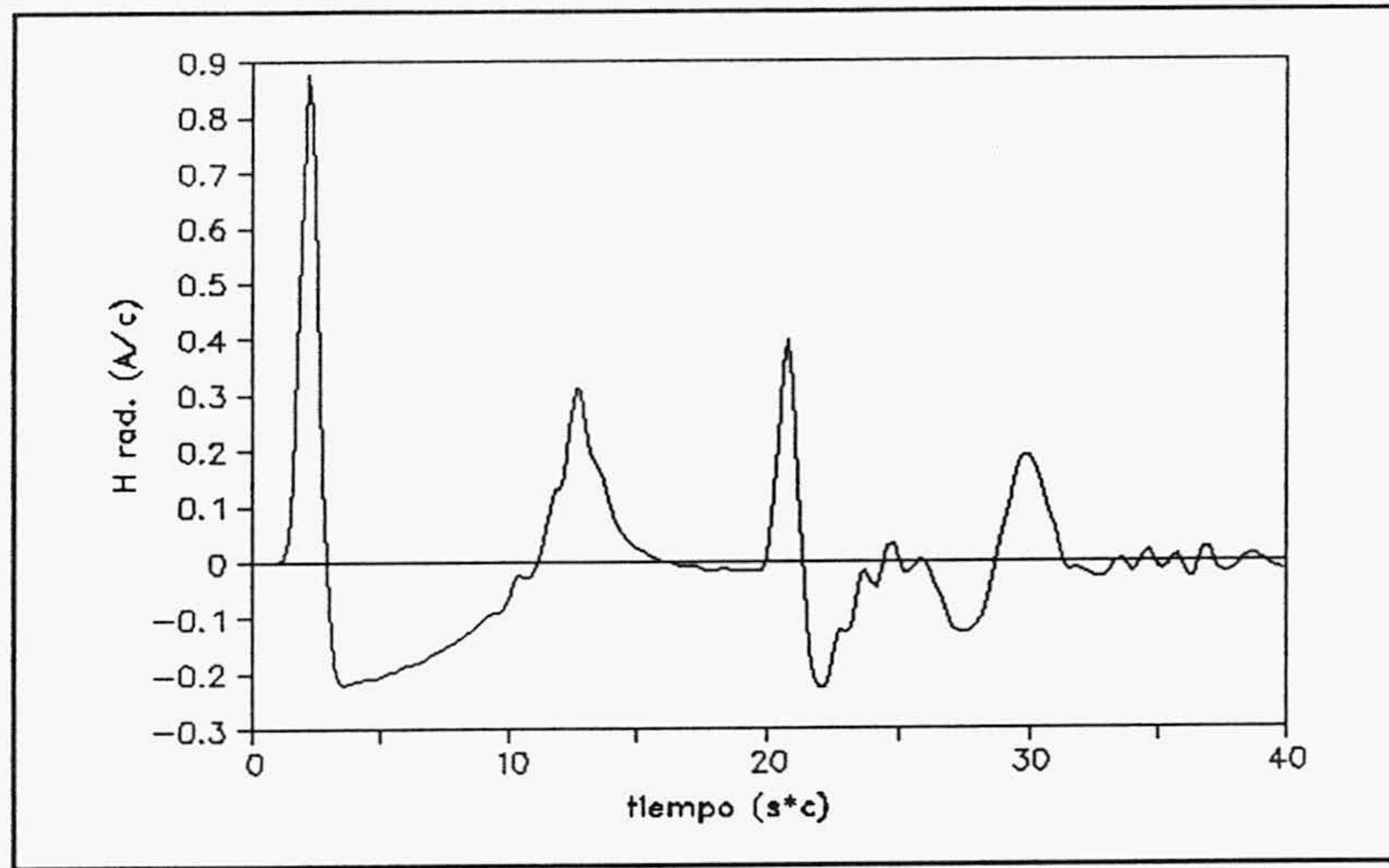


Fig. 4.31. Blancos ocultos de radar. Esfera-cilindro capeado.

CAPITULO 5. ANALISIS DE INESTABILIDADES NUMERICAS

5.1 Introducción.

En este capítulo efectuaremos un análisis de las inestabilidades surgidas en el proceso de solución de la ecuación MFIE. Para ello aplicaremos tres métodos:

i) Filtro de altas frecuencias. Este método ha sido propuesto por [80] y presenta una gran sencillez en su incorporación al método numérico.

ii) Método de relajación, desarrollado por [81]. Presenta una gran potencia en la corrección de la solución.

iii) Método de subdivisión, que se propone en esta memoria. En realidad más que un método para evitar las inestabilidades en la solución, consiste en una prueba del origen de estas inestabilidades.

Naturalmente, estos métodos no logran ampliar el margen de validez de la solución, que debido a lo burdo de la aproximación numérica, solamente con una discretización más fina se mejoran.

5.1 Acumulación del error en el proceso de solución escalonado en el tiempo. [81]

Escribamos la ecuación (4.12) en la forma:

$$\vec{J} = 2\hat{n} \wedge \vec{H}^i - \frac{\hat{n}}{2\pi} \wedge \int \vec{K}(\vec{r}, \vec{r}', t') \vec{J}(\vec{r}', t') dS' \quad (5.1)$$

donde

$$\vec{K} \equiv \left[\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{\partial_{t'} \vec{R}}{R^2} \right] \wedge$$

es la expresión matricial del núcleo de la integral.

Analogamente para la ecuación discretizada (4.14):

$$\vec{J}_{ij} = 2\hat{n}_i \wedge \vec{H}_{ij}^i - \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_s} \sum_{m=n}^{n+k} \vec{K}^m(i, p, q) \vec{J}_{p, q+m} \quad (5.2)$$

Definimos error de discretización como:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{ij} = & \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_s} \sum_{m=n}^{n+k} \vec{K}^m(i, p, q) \vec{J}(\vec{r}'_p, t_{q+m}) \\ & - \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \int \vec{K}(\vec{r}, \vec{r}', t') \vec{J}(\vec{r}', t') ds' \end{aligned} \quad (5.3)$$

Este parámetro recoge el error cometido en el proceso de discretización espacio-temporal de la ecuación MFIE. Es por tanto un valor que está acotado.

En el proceso de solución, el resultado obtenido diferirá de la solución real. Definimos error en la solución como:

$$\Delta \vec{J}(i, j) = \vec{J}(\vec{r}_i, t_j) - \vec{J}_{ij} \quad (5.4)$$

La evolución del error en la solución viene dado por:

$$\begin{aligned} & \Delta \vec{J}(i, j) - \Delta \vec{J}(i, j-1) - \vec{D}(i, j) - \vec{D}(i, j-1) \\ & - \frac{\hat{N}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p-1 \\ p+i}}^{N_2} \sum_{m-n}^{n+k} \vec{K}(i, p) (\Delta \vec{J}(p, q) - \Delta \vec{J}(p, q-1)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde

$$\vec{K}(i, p, q) = \vec{K}(i, p, q-1) = \vec{K}(i, p)$$

puesto que el intervalo temporal es constante.

Es decir, la evolución del error en la solución viene determinada por la propia ecuación MFIE discretizada, haciendo el papel de campo incidente la diferencia en el error de discretización entre dos instantes sucesivos.

Como la señal de excitación tiene una duración finita, las corrientes en el dispersor también serán finitas en el tiempo y por lo tanto lo mismo ocurre con el error de discretización, así como con su diferencia entre dos instantes sucesivos.

Por tanto el comportamiento inestable de la ecuación discretizada hay que buscarlo en ciertos autovectores que se introducen en el proceso de discretización que no son solución de la ecuación integral. Los autovalores asociados a estos autovectores no tienen por qué ser muy grandes, sino que basta con que su valor sea ligeramente distinto de cero. El proceso de solución escalonado en el tiempo va amplificando su influencia en la solución.

La identificación de estos autovalores no es tarea fácil puesto que la matriz del sistema recogería todos los intervalos temporales además de los espaciales. Se recurre por tanto, por lo general, a actuaciones más o menos globales sobre la solución de la ecuación, como por ejemplo un filtro de altas

frecuencias, aunque se corre el riesgo de modificar la solución en direcciones contrarias a la dirección de la solución real.

Pasemos a plantear los distintos métodos para corregir las inestabilidades numéricas.

5.3 Filtro de altas frecuencias. [80]

Este método somete a la señal numérica a un proceso de suavizado mediante un promedio de la corriente en cada instante con el valor en instantes anterior y posterior:

$$\vec{J}_{i,j}^* = \frac{1}{4} (2\vec{J}_{i,j} + \vec{J}_{i,j-1} + \vec{J}_{i,j+1}) \quad (5.6)$$

En cada instante hay que evaluar la solución dos veces. El filtro se puede intercalar en cualquier instante del proceso de solución, por lo que su costo computacional se puede reducir.

5.4 Método de Relajación. [81]

Este método minimiza el error cuadrático definido por:

$$\left[\vec{J}_\alpha(i, j) - 2\hat{n}_i \wedge \vec{H}_{ij} + \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_s} \sum_{m=n}^{n+k} \vec{K}^m(i, p) \vec{J}_\alpha(p, q+m) \right]^2$$

$$+ p^2 [\vec{J}_\alpha(i, j) - \vec{J}_{\alpha-1}^*(i, j)]^2$$

donde $\bar{J}_\alpha^*(i,j)$ es el valor de la corriente en el intervalo espacio-temporal i,j en la iteración α ; $\bar{J}_{\alpha-1}^*(i,j)$ es la corrección efectuada al valor de la corriente en la iteración anterior, para el mismo intervalo espacio-temporal. Si la corrección se hace únicamente para los autovectores impropios, el proceso deja inalterada la solución para los autovectores propios de la solución. p es el parámetro de relajación.

Diferenciando el error cuadrático respecto a cada componente de $\bar{J}_\alpha(i,j)$ tenemos el siguiente sistema lineal:

$$\vec{J}_\alpha(i,j) = \frac{p^2}{1+p^2} \vec{J}_{\alpha-1}^*(i,j) + \frac{1}{1+p^2} \left\{ 2\hat{n}_i \wedge \vec{H}_{ij}^i - \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p-1 \\ p^*i}}^{n+k} \sum_{m=n} \vec{K}^m(i,p) \vec{J}_\alpha(p,q+m) \right\} \quad (5.7)$$

5.5 Método de subdivisión.

Al resolver la ecuación MFIE discretizada, el núcleo de la integral y la variable se evalúan en los centros de los intervalos espacio-temporales. Las funciones base elegidas son pulsos para la variable espacial, e interpolación lagrangiana de orden k en el tiempo.

Una correcta evaluación de la ecuación discretizada implica la evaluación de la integral con el tiempo retrasado en cada punto del parche y no solamente en su centro.

La técnica de subdivisión divide el parche en parches más pequeños en donde el integrando y la densidad de corriente se evalúan en el centro de estos subparches, pero manteniendo constante la dirección de la densidad superficial de corriente.

5.6 Resultados.

Presentamos en este apartado los resultados obtenidos al aplicar estos tres métodos en el tratamiento numérico de la ecuación MFIE. Como señalamos en el capítulo 1, la ecuación EFIE en determinados casos también puede presentar un comportamiento inestable, sin embargo, como hemos probado, la elección más lógica en el tratamiento numérico resulta estable. Sin embargo, la ecuación MFIE con el tratamiento numérico adoptado presenta, como hemos vistos en el capítulo anterior, un comportamiento claramente inestable y no asociado a unos valores de los parámetros del algoritmo numérico.

En todos los casos analizados, es decir, para todas las figuras canónicas, si elegimos un modelado no muy malo, un incremento temporal acorde con el modelado, y un orden de interpolación bueno (ésto es, 4) las inestabilidades no aparecen hasta un tiempo muy superior al que emplea la señal en converger a cero.

Esto simplifica el problema: si la señal debe ser cero, basta con tomarla cero y analizar la parte significativa. Sin embargo, no podemos aceptar este argumento por falta de generalidad. Así, puede ser necesario analizar cuerpos cuya superficie presenta singularidades. En principio la ecuación MFIE no es apliable en un sentido estricto. Sin embargo si otorgamos una medida nula a estas singularidades y aceptamos una posible incertidumbre en los resultados para superficies con radios de curvatura pequeños podemos aplicar el algoritmo numérico al problema. En estos casos, las inestabilidades pueden presentarse en un tiempo demasiado temprano, con lo que no se obtiene ninguna señal significativa. Para preveer estos casos es necesario aplicar estos métodos y determinar su influencia y el modo óptimo de utilización.

5.1 Filtro de altas frecuencias.

Como ya dijimos anteriormente, el filtro de altas frecuencias produce un suavizado de la señal que anula por tanto la brusca variación de las inestabilidades. Sin embargo si la señal de excitación tiene un tiempo de subida muy corto, es decir, tiene un contenido espectral suficientemente grande, el filtro también provoca un recorte en la amplitud de los picos que se traduce en una disminución en el valor de pico del campo dispersado.

Como ejemplo se muestra en las figuras 5.1 y 5.2 el campo dispersado (en función del tiempo y del número de ondas respectivamente) por una esfera de radio $a=1m$ dividida en 12 bandas con mallado proporcional. El orden de interpolación es 1 y el incremento temporal de $0.20 s*c$.

Comparando la solución directa y la obtenida mediante aplicación del filtro tendremos:

i) Las inestabilidades en la solución han desaparecido.

ii) Se produce un recorte en la amplitud de los picos.

iii) Aparecen aumentadas las rugosidades en la zona de subida del segundo pulso en la señal. Esto se pone claramente de manifiesto en la figura 5.2, en donde se ha transformado hasta $t \approx 13 s*c$ de la señal de la figura 5.1. Este hecho también se da con orden de interpolación 4 (figuras 5.3 y 5.4).

Este último punto supone un grave inconveniente para la aplicación del método. Una primera solución puede ser aplicar el filtro cuando la respuesta haya tendido a cero. Pero como señalamos anteriormente esto supone una pérdida de generalidad. La solución está en que la aplicación del filtro debe hacerse cuando el pulso de excitación ha sobrepasado la estructura.

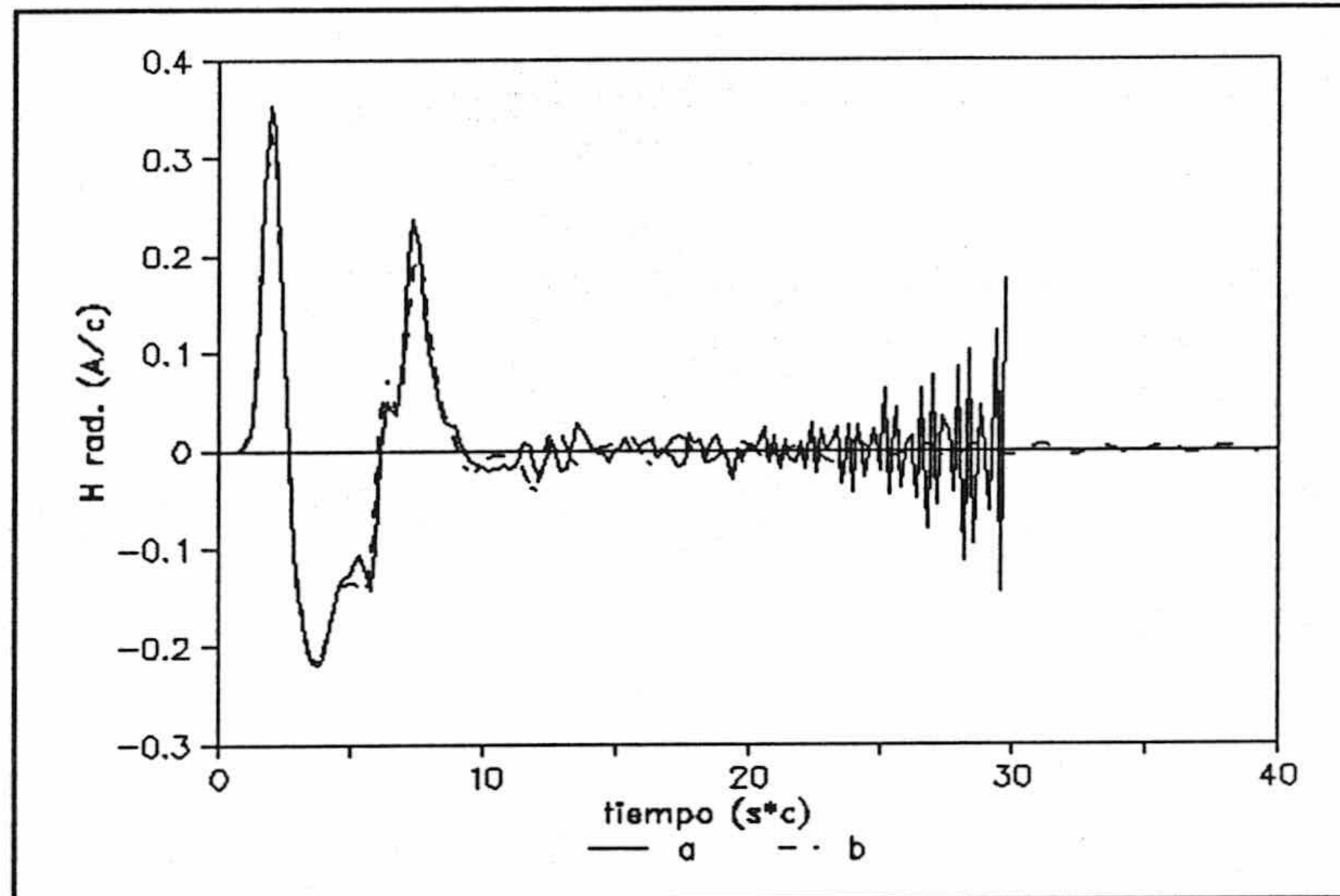


Fig. 5.1. Campos dispersado por una esfera. (a) Solución directa. (b) Aplicando filtro de altas frecuencias.

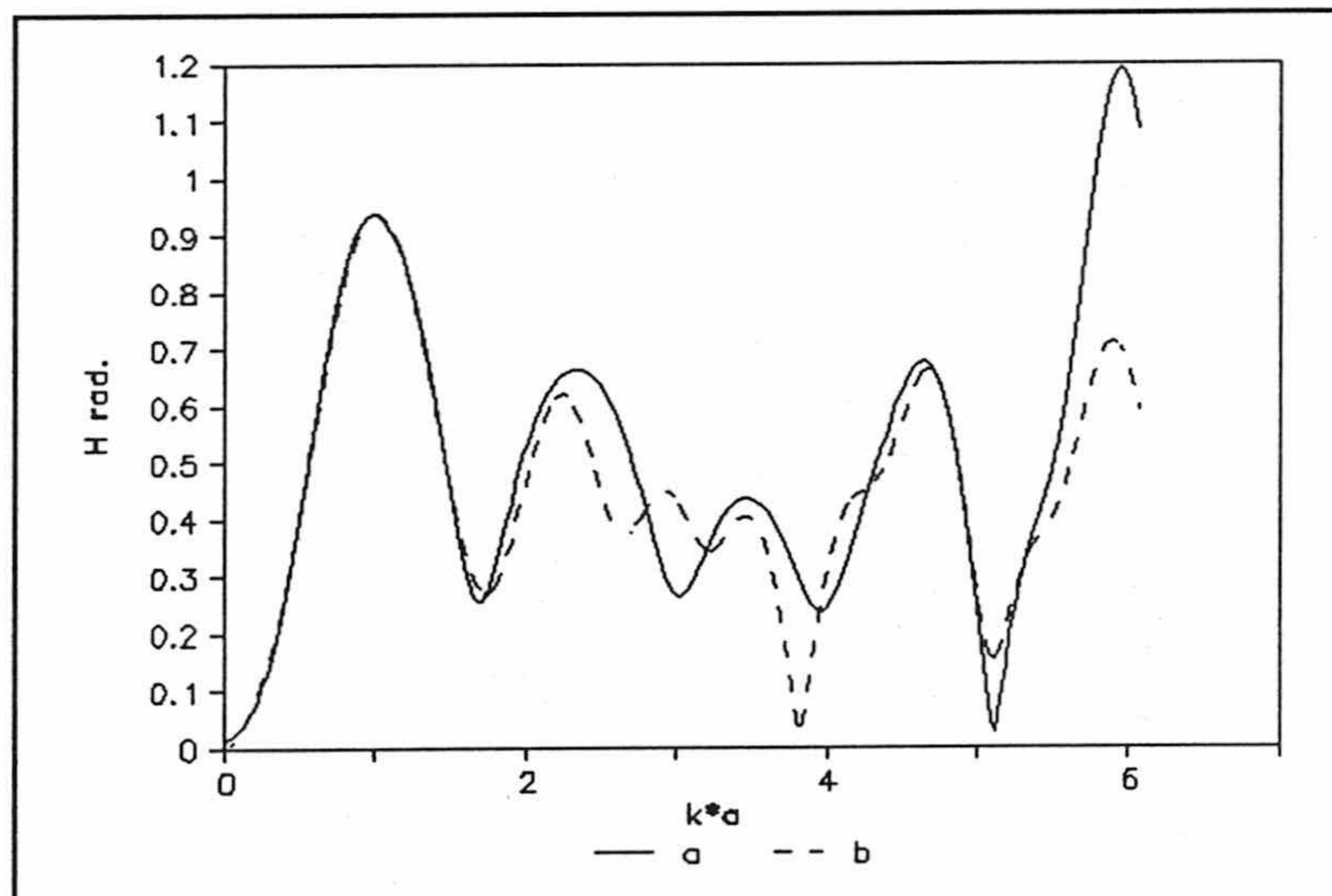


Fig. 5.2. Transformada de la fig.5.1.

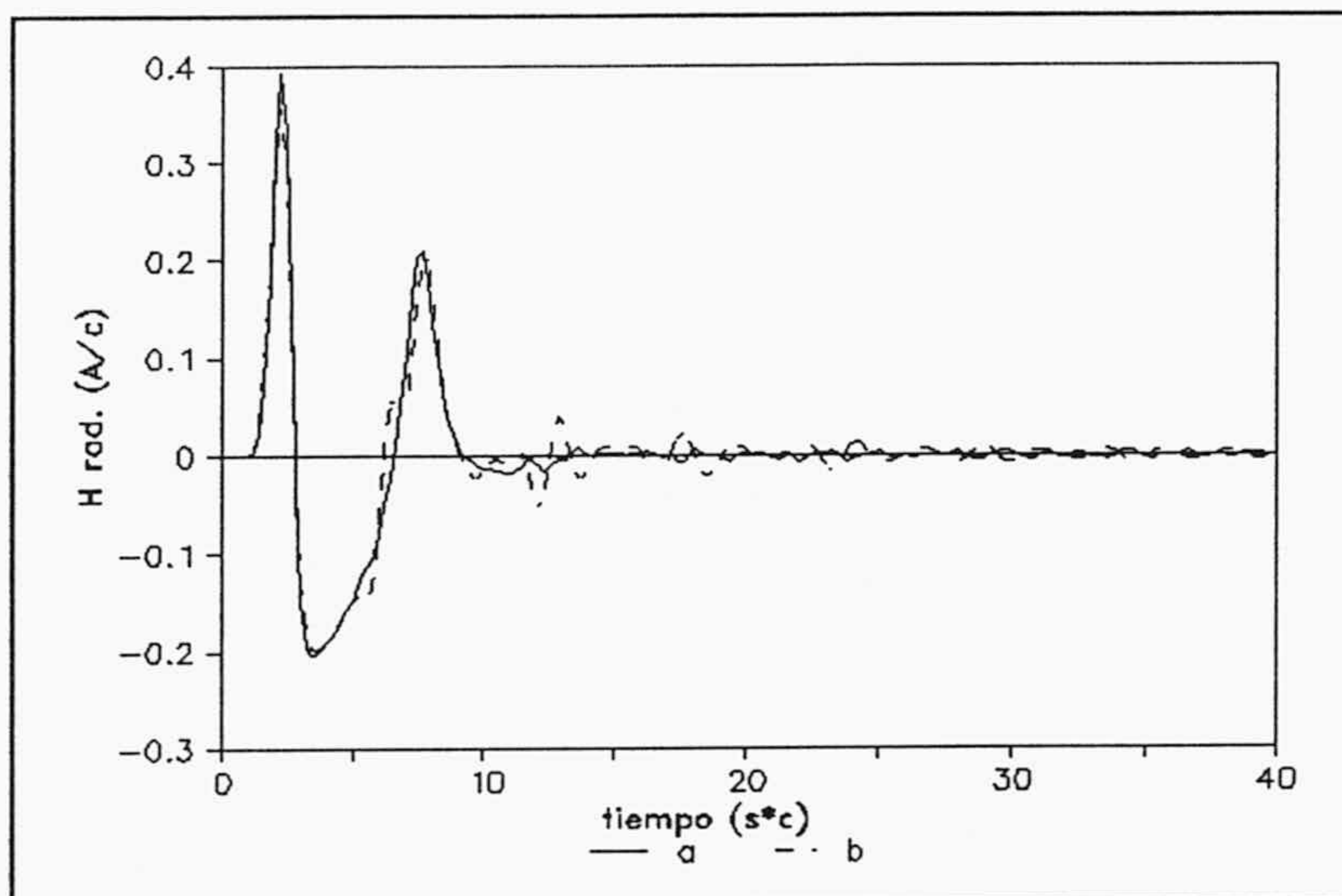


Fig. 5.3. Campo dispersado por una esfera. (a) Solución directa. (b) Filtro de altas frecuencias.

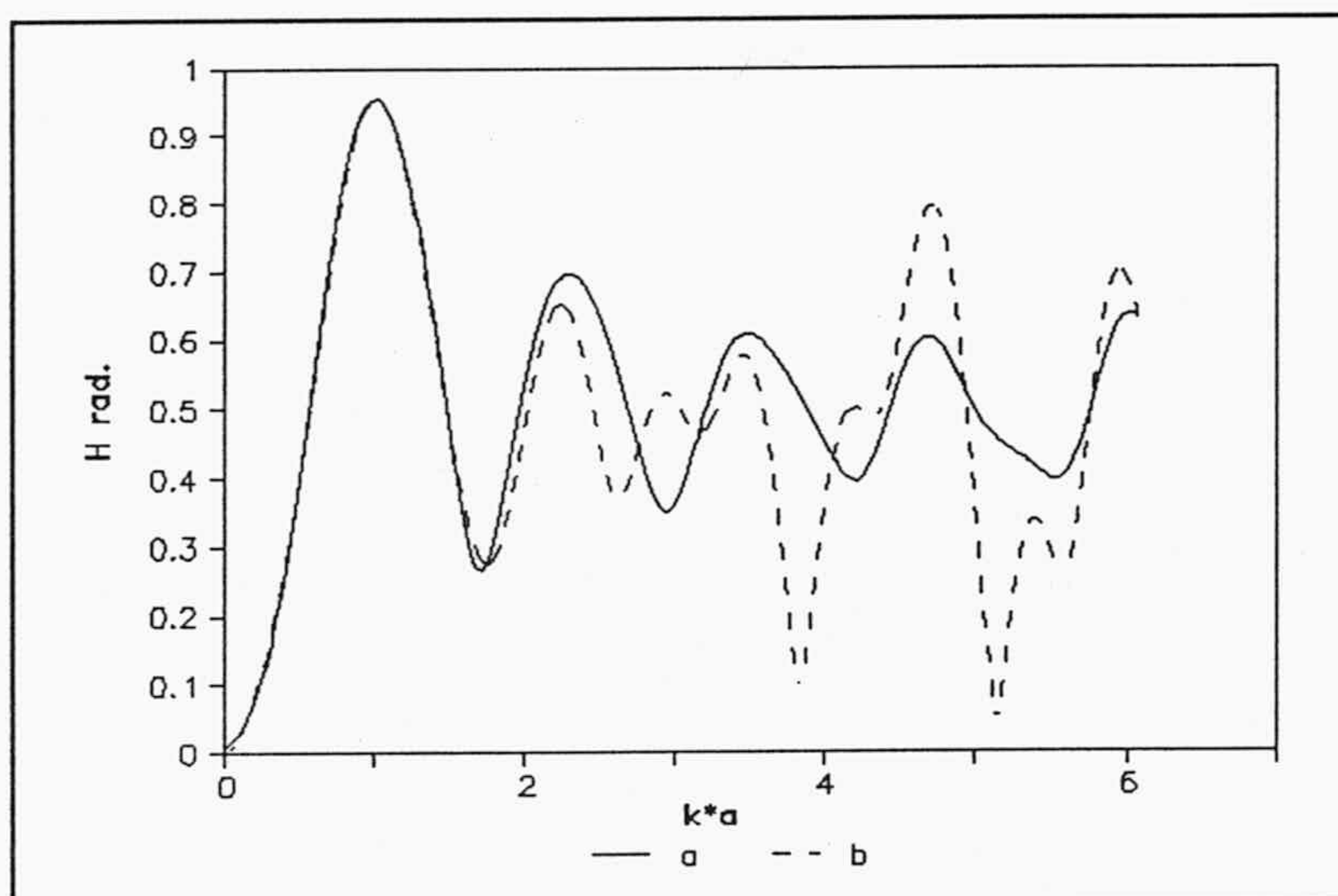


Fig. 5.4. Transformada de la Fig. 5.3.

Este hecho se pone de manifiesto en la figura 5.5 en donde se representa la señal dispersada por la esfera con los mismos parámetros que en la figura 5.3, pero aplicando el filtro a partir del instante 6.4 que es cuando el pulso de excitación ha sobrepasado al objeto. Vemos como ahora sólo se produce una reducción poco significativa en los picos de la señal.

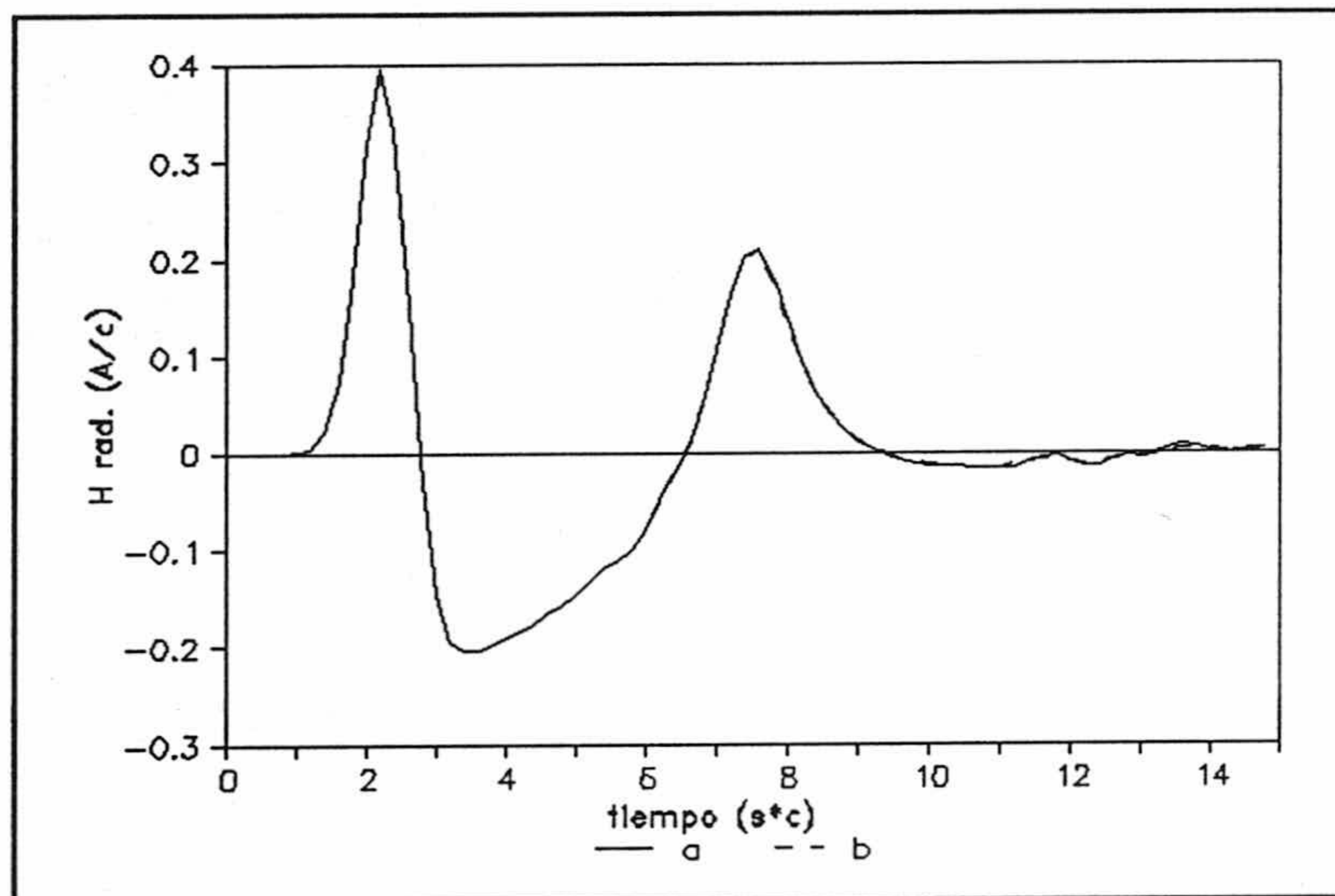


Fig. 5.5. Aplicación del filtro de altas frecuencias en el instante 6.4. (a) Directo. (b) Filtro.

5.6.2 Método de Relajación.

La incorporación de un método iterativo al algoritmo de solución en el dominio del tiempo conlleva un enorme gasto en tiempo de computo. Esto es así porque debemos resolver toda la ecuación para todos los instantes el número de veces necesarias para garantizar la convergencia. Este problema se acentúa aun más en el caso de cuerpos tridimensionales.

Las razones que nos llevan a aplicar el método de relajación a la solución de la ecuación MFIE en el dominio del

tiempo para cuerpos tridimensionales son:

i) Como hemos visto, el filtro de altas frecuencias es un método eficaz para evitar las inestabilidades en la solución numérica. Es decir, numéricamente hablando es un método bueno. Sin embargo, desde un punto de vista teórico la introducción del filtro en el proceso mismo de solución conlleva la modificación del sistema y puede modificar también el espectro donde la solución se comporta bien.

Por el contrario el método de relajación sólo modifica la zona del espectro donde el sistema se comporta mal. Esto se consigue actuando sobre toda la solución, es decir en todos los instantes, filtrandola de manera conveniente, en cada iteración. Hacia esta solución, que no contiene componentes en autovalores que no están en la ecuación no discretizada, debe converger el método. El método de relajación con filtro de altas frecuencias nos garantiza la actuación del mismo sobre la señal, en componentes de altas frecuencias solamente.

ii) Podemos aplicar el método de relajación para cualquier parte de la curva. Al igual que el filtro de altas frecuencias por sí solo, el método puede empezar a actuar en la zona de la curva donde estimemos conveniente.

iii) El parámetro de relajación nos da un grado de libertad para la influencia de la solución modificada en el proceso de convergencia.

iv) Podemos aplicar cualquier filtro, e incluso no utilizar ninguno. Partiendo de un valor cero para las corrientes y eligiendo un valor del parámetro de relajación conveniente, la solución converge sin inestabilidades.

Por todo esto merece la pena gastar tiempo de computo frente a la gran potencia que suministra este método para corregir la solución. De hecho queda abierta la puerta para poder conjugar métodos de altas frecuencias con el método de

los momentos.

Hemos aplicado este método a la resolución de la esfera. El primer paso ha sido estudiar la convergencia del método para distintos valores del parámetro de relajación. Así, hemos dividido la esfera en 12 bandas con $\Delta t=0.2$ y orden de interpolación 1. Hemos supuesto como solución buena la mostrada en la figura 4.3.a para definir el error cuadrático medio. En la figura 5.6. se representa este error para distintos valores del parámetro de relajación.

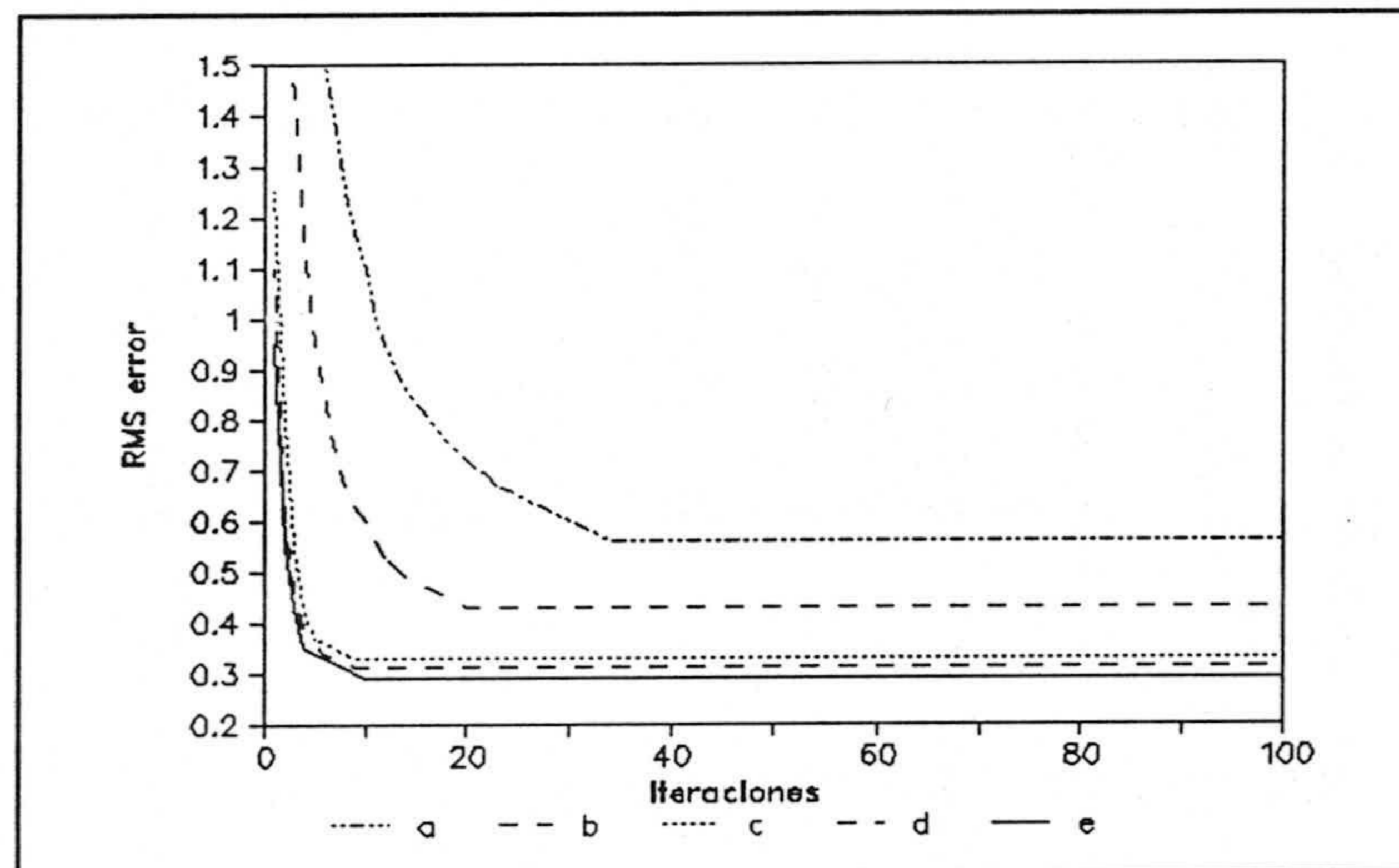


Fig. 5.6. Convergencia del método de relajación.

A partir de la figura, tendremos que:

i) La convergencia está asegurada para cualquier valor del parámetro de relajación estudiado. Vemos como para valores pequeños del parámetro la convergencia va siendo mayor.

ii) Es usual que la convergencia en los métodos iterativos sólo se de en un margen del número de iteraciones y que para iteraciones posteriores diverja. Vemos que en nuestro caso esto no ocurre.

iii) Aunque para cada valor del parámetro de relajación la convergencia es buena, esta no se produce al mismo punto, sino que cada curva converge a un valor claramente distinto. Es decir, se nos presenta el mismo problema que al aplicar el filtro de altas frecuencias intercalado en el proceso de solución. Así de nuevo aplicamos el mismo argumento y la misma solución: aplicar el método cuando el pulso de excitación tiene un valor despreciable en cualquier punto de la superficie del dispersos.

Los resultados se muestran en la figura 5.7 para orden de interpolación 4, 30 iteraciones y valores 1, 2 y 3 para el parámetro de relajación.

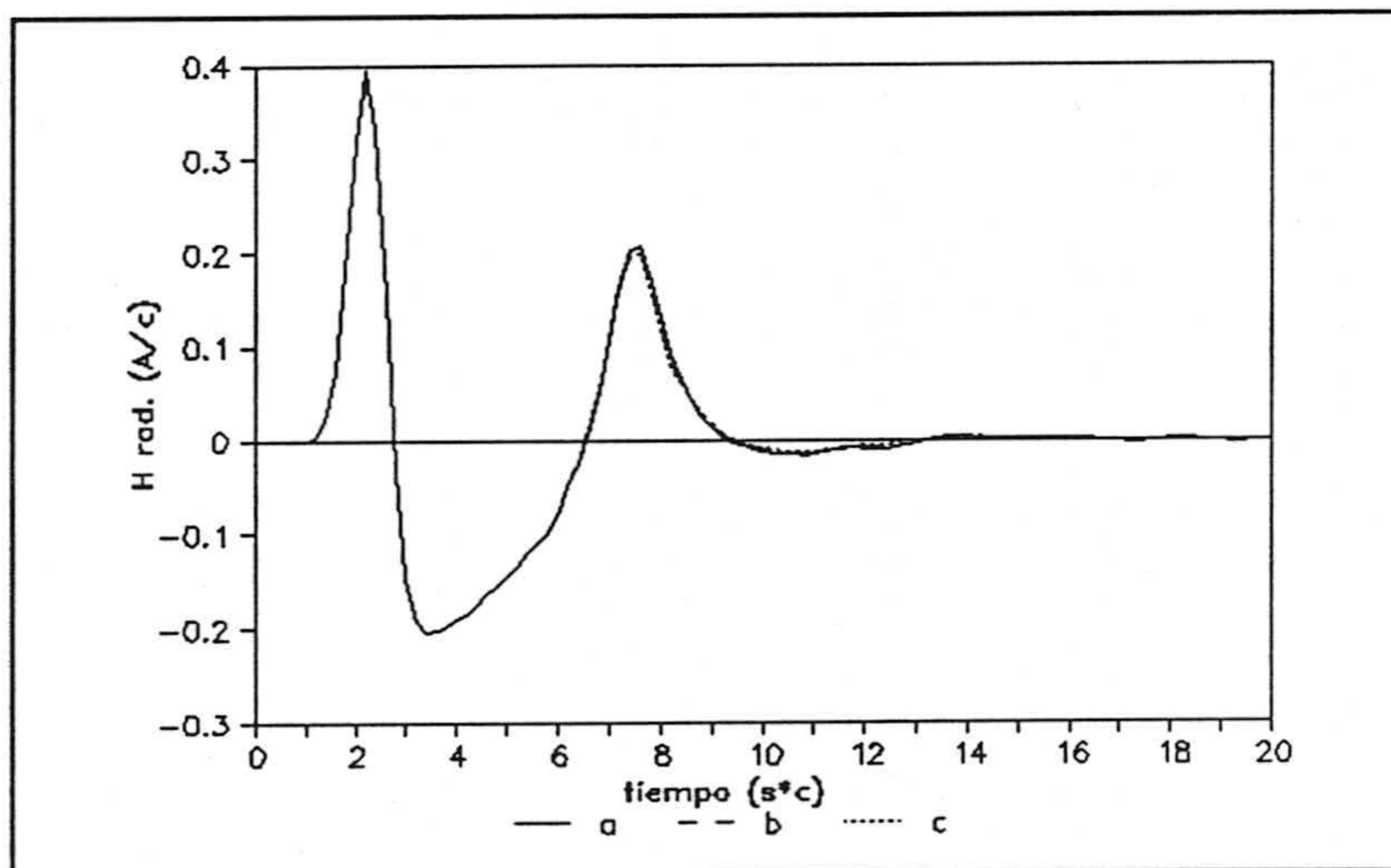


Fig. 5.7. Curva a la que converge el método de relajación para distintos valores de parámetro de relajación.

5.6.3 Técnica de subdivisión.

Como ejemplo de aplicación de la técnica de subdivisión, presentamos el mismo caso que el analizado para los otros métodos. Así, tengamos una esfera de radio $a=1m$, dividida en 12 bandas con el mallado proporcional, y utilizemos un

incremento temporal de 0.20 (s*c) y un orden de interpolación de 1. En la figura 5.8 se muestra el campo dispersado en dirección inversa, y en la figura 5.9 la transformada.

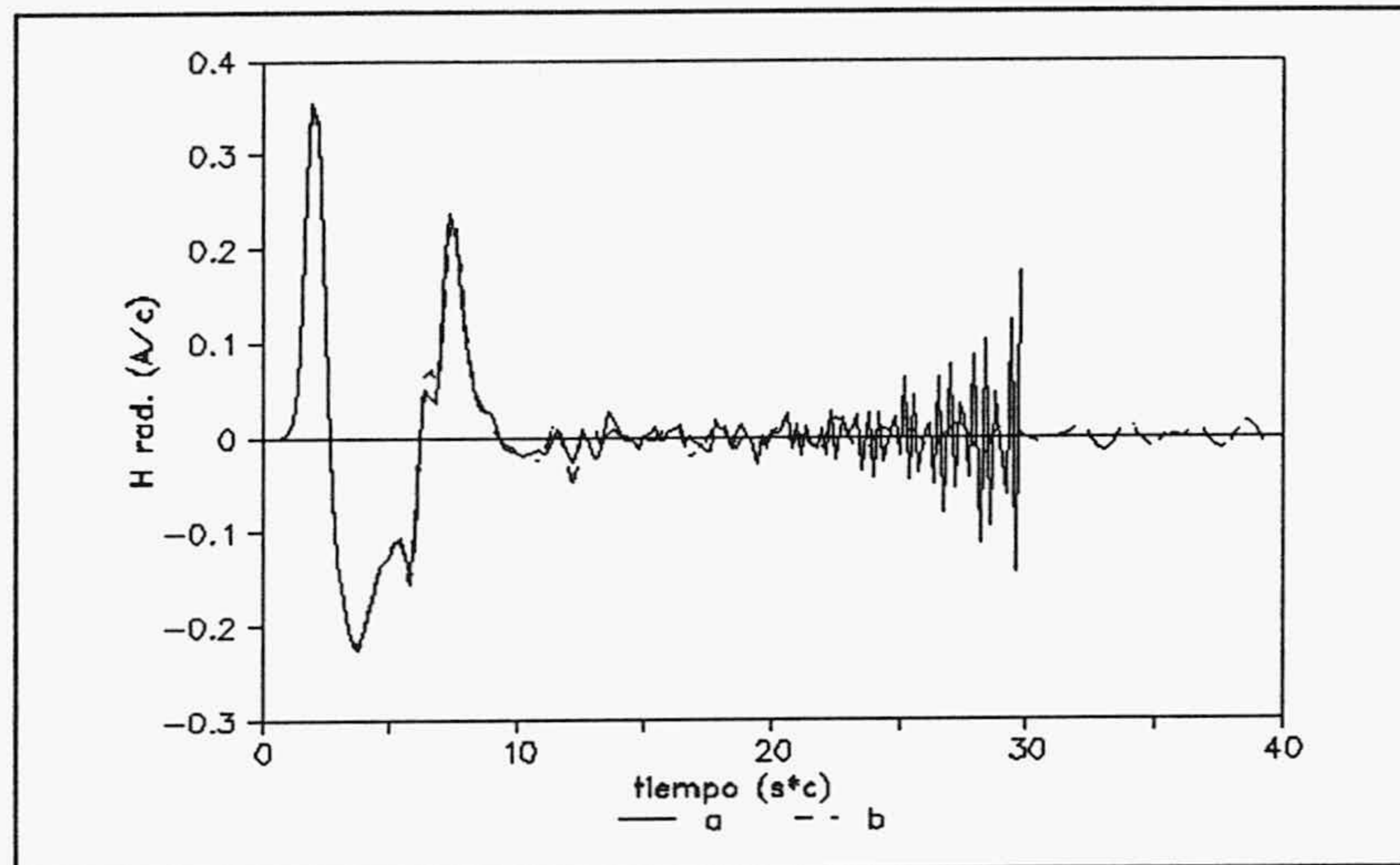


Fig. 5.8. Campo dispersado por una esfera aplicando la técnica de subdivisión. (a) Directo. (b) T. de subdivisión.

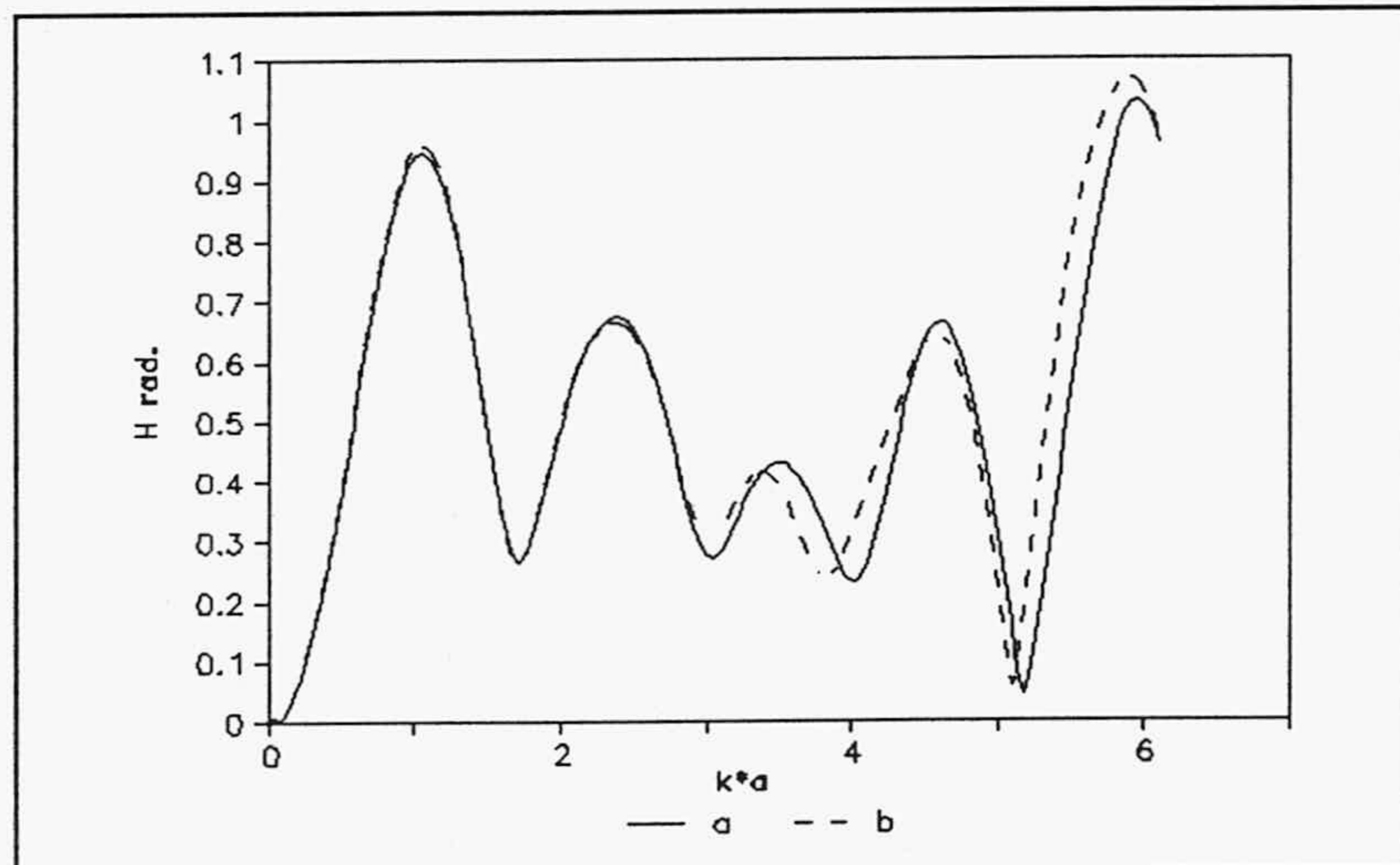


Fig. 5.9. Transformada de la figura 5.8. (a) Directo. (b) T. de subdivisión.

Vemos como la técnica de subdivisión anula las inestabilidades, pero sin introducir ninguna perturbación en los instantes primeros de la señal. Únicamente en la parte de la señal que teóricamente es cero se observa un aumento del rizado. Este hecho es general y se presenta en todos los casos que hemos analizado.

Por tanto, la técnica de subdivisión, permite reducir las inestabilidades, aunque debido al rizado que introduce en la señal en los tiempos posteriores es aconsejable utilizar para estos instantes alguno de los otros métodos expuestos.

Por último presentamos dos ejemplos en donde comparamos los tres métodos. En el primero, figura 5.10, se muestra el campo dispersado por una esfera en dirección inversa para una división de 24 bandas con mallado proporcional, y un incremento temporal de 0.08 (s*c). Tanto el filtro de altas frecuencias, como el método de relajación se han aplicado a partir del instante en que el pulso sobrepasa al dispersor.

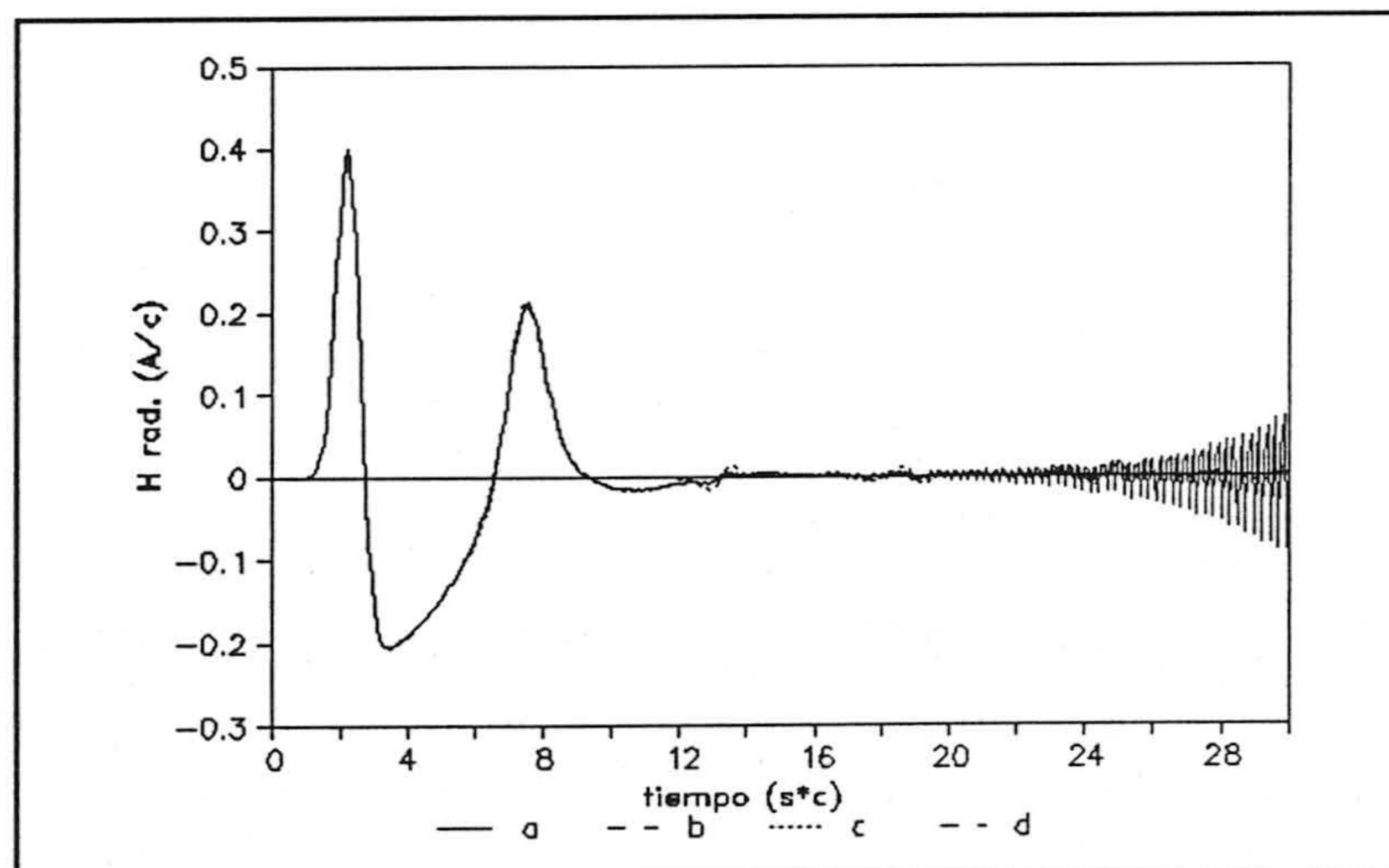


Fig. 5.10. Campo dispersado por una esfera modelada con 24 bandas. (a) Directo. (b) Filtro de altas frecuencias. (c) Técnica de subdivisión. (d) Método de relajación.

El segundo ejemplo es una conoesfera de longitud 5 m ($a=2.5$ m), y radio de la esfera 1m. Estas dimensiones son superiores a las presentadas en la bibliografía puesto que presenta un comportamiento fuertemente inestable. Así, en la figura 5.11 se muestra el campo dispersado en dirección inversa cuando el pulso incide apuntando hacia el pico de la conoesfera y podemos ver como la señal obtenida directamente presenta inestabilidades en los primeros tiempos. Esto hace que no se pueda obtener ninguna información, por lo que los métodos para reducir inestabilidades juegan un papel muy importante. Así, hemos aplicado la técnica de subdivisión, el filtro de altas frecuencias desde los primeros instantes y el método de relajación con parámetro de relajación 2, ya que con parámetro 1 no se reducían las inestabilidades. Para este último método se muestra el campo obtenido en la iteración 30.

En la figura 5.12 se muestra la RCS logarítmica, normalizada con la longitud de onda al cuadrado obtenida a partir de la técnica de subdivisión.

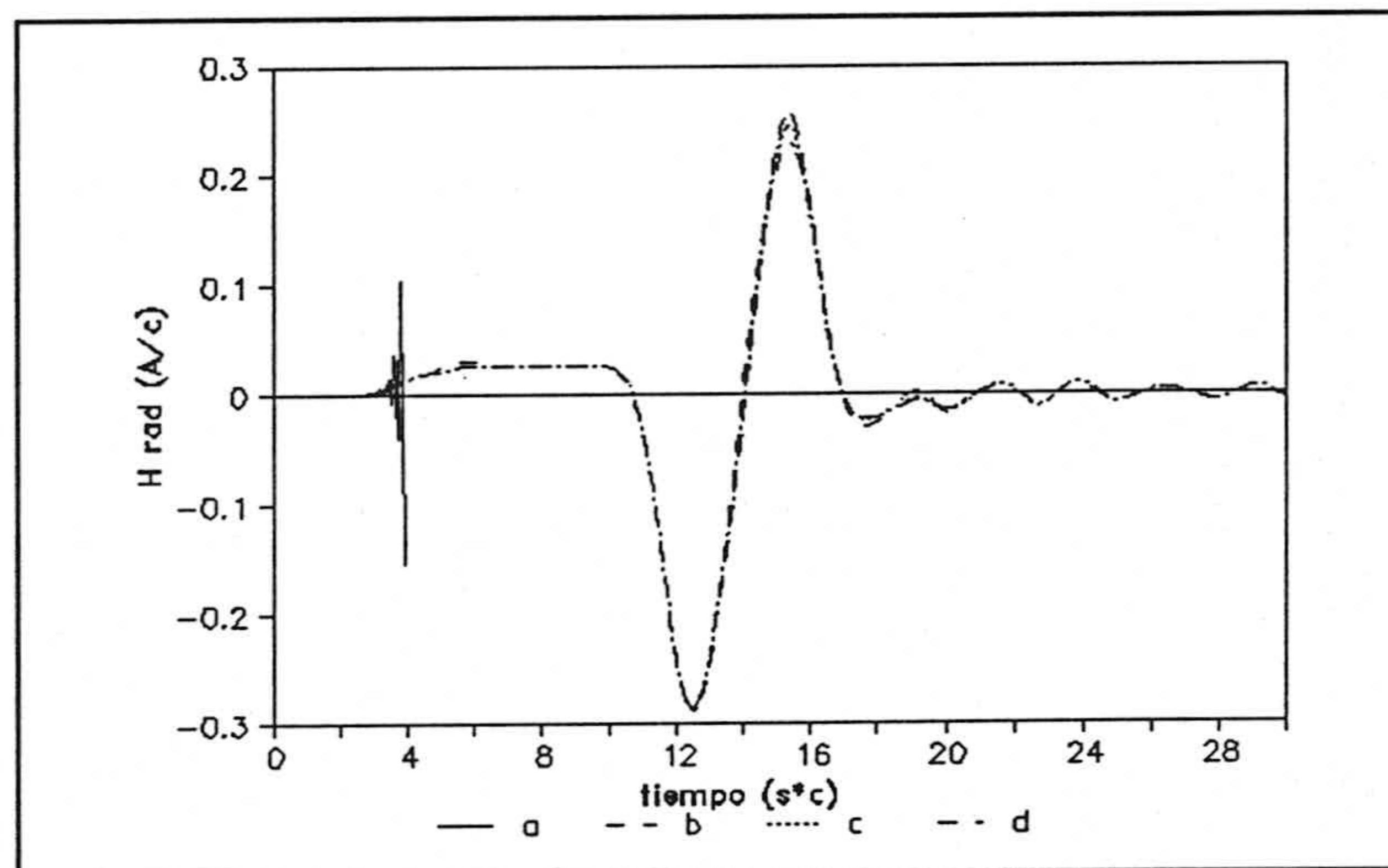


Fig. 5.11. Campo dispersado por una conoesfera. (a) Directo. (b) Técnica de subdivisión. (c) Filtro de altas frecuencias. (d) Método de relajación.

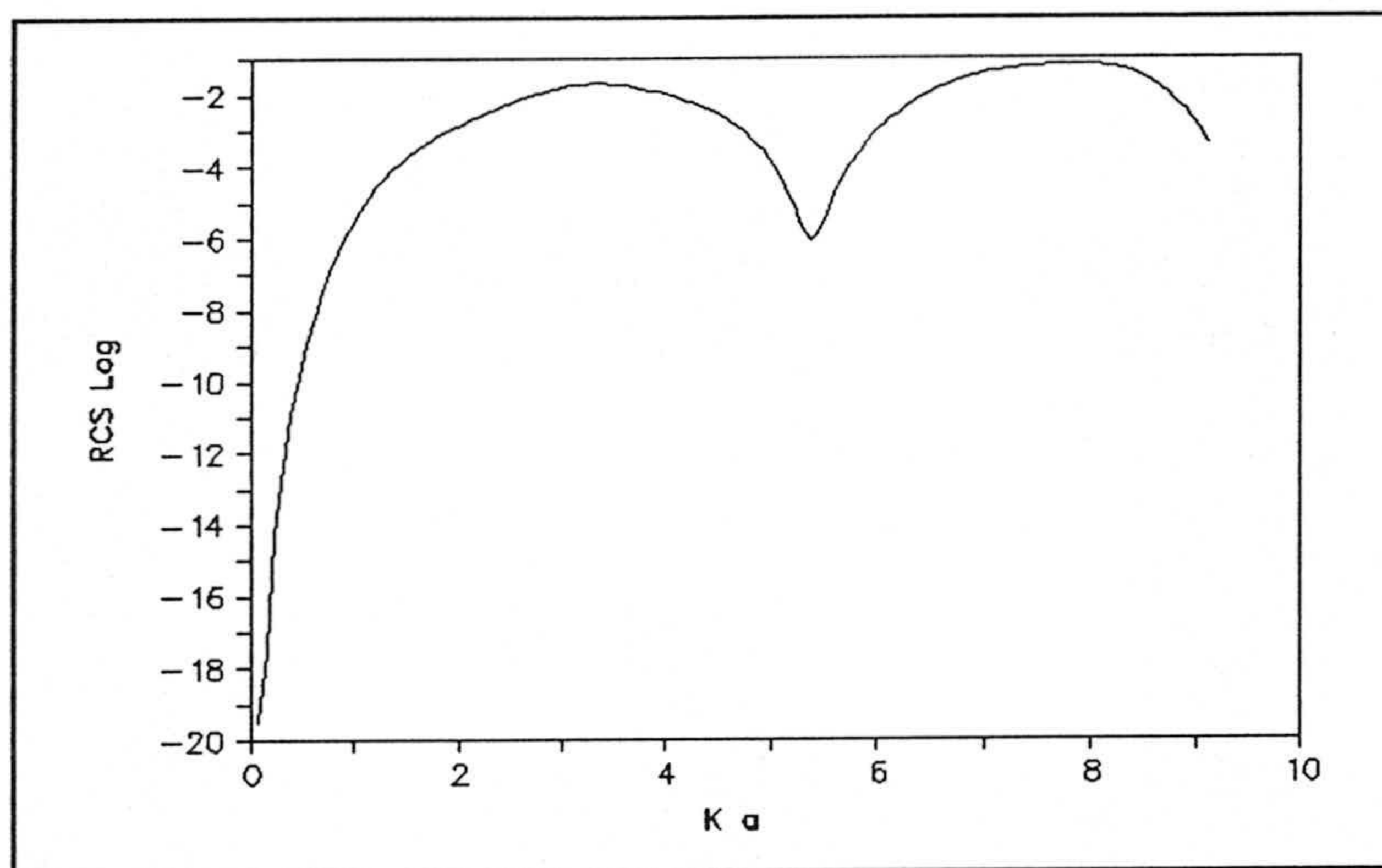


Fig. 5.12. RCS logaritmica de una conoesfera de longitud 5m y radio 1m.

CONCLUSIONES

Conclusiones.

En esta memoria se resuelven en el dominio del tiempo las ecuaciones integrales EFIE y MFIE para cuerpos conductores perfectos con el método de los momentos.

Las aportaciones efectuadas han sido:

i) Un nuevo tratamiento teórico y numérico del hilo recto que mejora el utilizado hasta ahora (que fué desarrollado en [70] y que constituye la base del programa DOTIG1 [74]). El nuevo tratamiento teórico se fundamenta en la condición de contorno extendida; y el numérico en la colocación de los puntos campo en los extremos de los intervalos espacio-temporales. Todo esto permite:

a) Ampliar el parámetro de antena de los hilos analizados hasta por lo menos $\Omega=7$.

b) Hacer que las frecuencias de resonancia obtenidas sean independientes del número de segmentos en que se divida el hilo.

c) Hacer una aproximación de primer orden en los finales de hilo, frente a la aproximación de orden cero que supone considerar la intensidad cero. La diferencia entre estas dos aproximaciones es apreciable para hilos gruesos ($\Omega < 9$).

d) Se pueden estudiar distintos tipos de alimentación y hacer un modelo más realista de este problema. Hasta ahora sólo se puede aplicar en DT el modelo de alimentación uniforme en los segmentos. Este punto no ha sido desarrollado en esta memoria.

ii) Un nuevo tratamiento teórico y numérico de las uniones que permite efectuar una aproximación de primer orden en su estudio. Es decir, considera que en la unión se puede acumular carga. Este tratamiento difiere de los planteados

hasta ahora tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo que consideran las corrientes cuasiestacionarias en la unión. El nuevo tratamiento diferencia distintos casos:

a) Hilos coaxiales de distinto radio, en los que se calcula una distribución lineal de densidad de carga en la tapa de unión. Esto permite resolver diferencias de radio de hasta por lo menos en un factor 10.

b) Hilos no coaxiales, en que se sustituye la unión por distribuciones de carga anulares al final de cada hilo.

iii) Se ha efectuado un estudio del comportamiento numérico de la ecuación MFIE. El desarrollo numérico adoptado ha sido el presentado en [57] que presenta una gran sencillez de programación aunque da resultados muy inestables y con varios parámetros numéricos sin fijar. Estos parámetros son: el orden de interpolación, el incremento temporal y la forma de modelar.

Así se ha estudiado el comportamiento de la ecuación al variar estos parámetros y hemos concluido que:

a) Un orden de interpolación elevado es el que mejor solución da. Concretamente hemos estudiado los ordenes 1, 2 y 4, siendo este último el más adecuado.

b) La elección del incremento temporal debe estar lo más próximo posible a la distancia mínima entre puntos campo. Este parámetro afecta mucho a la aparición o no de inestabilidades numéricas en la solución.

c) Hemos determinado que en el modelado es importante que los puntos campo equidisten entre sí, aunque las superficies de los parches se diferencien incluso hasta un factor 2.

Además, aumentar el número de parches conlleva esencialmente reducir el rizado que aparece en la zona de valor

cero de la respuesta.

En general, la solución de la ecuación MFIE con las funciones base y peso elegidas presenta mucha casuística, sobre todo en lo que se refiere a la aparición de inestabilidades.

Este estudio se ha centrado en figuras canónicas cuyo modelado se ha hecho de forma analítica. Concretamente se ha estudiado la esfera, el cilindro capeado y la conoesfera. Sin embargo el programa desarrollado permite el estudio de cualquier estructura modelada por parches, con un mínimo de datos iniciales. Además se ha incorporado al algoritmo una matriz de sistema que acelera en gran medida el proceso de solución.

Por último se ha aplicado el programa a blancos ocultos de radar. Concretamente, a una esfera y a un cilindro capeado ocultos tras una esfera. Se puede apreciar claramente la separación de efectos en la señal dispersada en dirección inversa.

iv) Con el fin de evitar inestabilidades en la solución se ha estudiado la incorporación al algoritmo de un filtro de altas frecuencias [80], del método de relajación [81], y además se propone un método nuevo, la técnica de subdivisión, que además de evitar la aparición de inestabilidades, da la clave de su origen. Como conclusiones referentes a estos métodos tenemos:

a) La aplicación del filtro de altas frecuencias y el método de relajación con filtro de altas frecuencias pueden provocar en determinados casos, además de un recorte en los picos de la respuesta, una distorsión de la misma. Esto se evita aplicando el método una vez que el pulso de excitación ha sobrepasado al dispersor.

b) Aunque computacionalmente es costoso, el método de relajación abre la posibilidad de conjugar el método de los momentos con otros métodos, por ejemplo, el de altas

frecuencias.

c) La técnica de subdivisión elimina, o al menos, retrasa la aparición de inestabilidades y no introduce alteración alguna en la señal, salvo un ligero incremento del rizado de la señal en los instantes avanzados.

d) Mediante estos métodos podemos aplicar la ecuación MFIE a estructuras cuya solución directa resulta reventada por las inestabilidades en tiempos muy tempranos.

Por último quisiera señalar que frente a todo lo presentado en esta memoria queda una larga tarea de validación que sólo el tiempo y el uso son capaces de llevarla a cabo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E.K. Miller and J.A. Landt
"Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires"
Proc. IEEE, vol. 68, pp. 1396-1423, 1980.
- [2] A.M. Nicolson, C.L. Bennett, D. Lamensdorf, and L. Susman
"Applications of time domain metrology to the automation of broad band measurements"
IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT 20, pp. 3-9, Jan. 1972.
- [3] R.M. Bevensee, F.J. Deadrick, E.K. Miller, and J.T. Okada
"Validation and calibration of the LLL transient-electromagnetic measurement facility"
Lawrence Livermore Laboratory, Livermore CA, UCRL-52225, 1977
- [4] C.L. Bennett
"Time-domain electromagnetics and its applications"
Proc. IEEE, vol. 66, pp. 299-317, 1978.
- [5] C.E. Baum
"Emerging technology for transient and broad-band analysis and synthesis of antennas and scatterers"
Proc. IEEE, vol. 64, pp. 1598-1615, 1976.
- [6] R. Mittra
"Integral equation methods for transient scattering"
Topics in Applied Physics, vol. 10, cap. 2, New York: Springer-Verlag, 1976.
- [7] T.K. Sarkar, D.D. Weiner, V.K. Jain and S.A. Dianat
"Impulse response determination in the time-domain theory"
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 30, pp. 657-664, 1982.
- [8] P. Van Etten
"The present technology of impulse radars"
Proc. Int. Conf. Radar, pp. 535-539, London, 1972.

- [9] H.F. Harmuth
"Antennas and Waveguides for Nonsinusoidal Waves"
New York: Academic Press, 1984.
- [10] H.F. Harmuth
"Antennas for nonsinusoidal waves. III. Arrays"
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 25, pp. 346-357, 1983.
- [11] M.A. Morgan
"Time-Domain Scattering Measurement"
IEEE Antennas and Prop. Society Newsletter, pp. 5-10, 1984.
- [12] E.K. Miller
"Time-Domain Measurements in Electromagnetics"
Van Nostrand Reinhold Company, NY, 1986.
- [13] C.E. Baum
"The singularity expansion method"
Topics in Applied Physics, vol. 10, cap. 3, New York: Springer
Verlag, 1976.
- [14] "Special joint issue on the nuclear electromagnetic pulse"
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 26, 1978.
- [15] K.S.H. Lee, Ed.
EMP Interaction
Report no AFWL-TR-80-402, 1980.
- [16] R.A. Perala, T. Rudolph and F. Eriksen
"Electromagnetic interaction of lightning with aircraft"
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 24, pp. 173-203, 1982.
- [17] E.K. Miller
"An overview of Time-Domain Integral Equations Models in
Electromagnetics"
Journal of Electromagnetic waves and Application, 269-293,
1987.

- [18] R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas
"Time-Domain Analysis of an array of straight-wire"
Electronics Letters, 316-318, 1986.
- [19] E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke
"An integro-differential equation technique for the Time-Domain
analysis of thin-wire structures
Part. I. The numerical method"
J. Comput. Phys., vol. 12, pp. 24-48, 1973.
- [20] E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke
"An integro-differential equation technique for the Time-Domain
analysis of thin-wire structures
Part. II. Numerical results"
J. Comput. Phys., vol. 12, pp. 210-233, 1973.
- [21] R.F. Harrington
"Field Computation by Moment Methods"
New York: McMillan, 1968.
- [22] R.F. Harrington
"Time-Harmonic Electromagnetic Fields"
New York: McGraw-Hill, 1961.
- [23] W.L. Stuzman and G.A. Thiele
"Antenna Theory and Design"
New York: John Wiley, 1981.
- [24] J.D. Kraus
"Antennas"
New York: McGraw-Hill, 1950.
- [25] R. Gómez Martín
"Campo Electromagnético. Propagación y Radiación"
Granada: Publicaciones de la Universidad, 1984.
- [26] T.K. Sarkar and D.D. Weiner
"Scattering analysis of straight wire scatterers and antennas"

IEEE Trans. on Antennas and Prop., AP-24, 125- 131, 1976.

[27] R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas
"Applications of the monopulse technique to a planar array of
nonlinear loaded straight-wire coupled antennas"
IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, 169-174, May
1987.

[28] R. Gómez Martín, J.A. Morente and A. Salinas
"Monopulse technique for an array of linear wire antennas"
8th Int. Symposium on Electromagnetic Compatibility, June,
Wroclaw, Poland 1986.

[29] J.A. Landt and E.K. Miller
"Time-Domain modeling of non-linear loads"
IEEE Trans., AP-31, pp. 121-125, 1983.

[30] C.E. Baum
"On the singularity expansion method for the solution of
electromagnetic interaction problems"
Interaction note 88, 1971.

[31] S.M. Kay and S.L. Marple
"Spectrum analysis -a modern perspective"
Proc. IEEE, 1981, 69, pp. 1380-1419.

[32] M.L. Van Blaricum
"An analysis of existing Prony's method techniques"
1977 Spring Fulmen Meeting, 1977.

[33] R. Gómez Martín and M.C. Carrión
"Prony's method applied to processing electromagnetic transient
data"
EMC-86 international Wroclaw symposium on electromagnetic
compatibility, Poland 1986.

[34] S. Al Khouri Ibrahim, R. Gómez Martín and B. García Olmedo
"New contributions to the spectral estimation by means of

parametric modelling using rational transfer functions"
Signal Processing, 12, pp. 231-241, 1987.

[35] R. Gómez Martín, M.C. Carrión
"Extended Prony Method Applied to Noisy Data"
Electronics Letters, vol. 22, pp. 613-614, 1986.

[36] R. Gómez Martín, M.C. Carrión, S. Al Khoury, B. García Olmedo
"Application of maximum entropy spectral analysis to estimation of parameters of ARMA models by the ITIF method"
Electronics Letter, 611-613, Jul. 1985.

[37] E.F. Knott, J.F. Shaeffer and M.T. Tuley
"Radar Cross Section"
Artech House, 1985.

[38] R. Gómez Martín, J.A. Morente and B. García Olmedo
"Some thoughts about the radiation of the antennas excited by non-sinusoidal currents"
Int. J. Electronics, vol. 57, pp. 617-625, 1984.

[39] J.A. Morente
"Estudio de la radiación y dispersión de pulsos electromagnéticos (EMP) en el dominio del tiempo"
Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1985.

[40] J.A. Morente and R. Gómez Martín
"Arrays para señales no sinusoidales"
IV Congreso de la U.R.S.I. española, pp. 123- 128, Sevilla, 1984.

[41] J.A. Morente and R. Gómez Martín
"Comments on antennas for nonsinusoidal waves. Radiators"
IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 26, pp. 50, 1984.

[42] R.Gómez Martín y J.A. Morente
"Radiación y propagación de señales no sinusoidales"

IV Congreso de la U.R.S.I. española, pp. 117- 122, Sevilla, 1984.

[43] R.Gómez Martín y J.A. Morente
"Analysis of the electric quadrupole radiation in time domain: application to the large-current radiator"
Int. J. Electronics, vol. 58, pp. 921-931, 1985.

[44] Kennaugh and Moffat
"Transient and Impulse approximation"

[45] R.Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones "Arrays of hertzian electric dipoles for nonsinusoidal signals"
Int. J. Electronics, vol. 59, pp. 435-438, 1985.

[46] R. Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones
"An approximate analysis of transient radiation from linear antennas"
Int. J. Electronics, vol. 61, no 3, pp. 343-353, 1986.

[47] R. Gómez Martín, J.A. Morente and A.R. Bretones
"Array of matched, linear antennas fed by pulsed signals"
Int. J. Electronics, vol. 61, no 5, pp. 639-646, 1986.

[48] E.K. Miller and M.L. Van Blaricum
"The short-pulse response of a straight wire" IEEE
Trans. Antennas Propagat., vol. 21, pp. 396-398, 1973.

[49] G. Franceschetti and C.H. Pappas
"Pulsed antennas"
IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-22, pp. 651, 1974.

[50] L.B. Felsen
"Diffraction of the pulsed field from an arbitrarily oriented electric or magnetic dipole by a perfectly conducting wedge"
SIAM J. Appl. Math., vol. 26, no 2, p. 306, 1973.

- [51] L.B. Felsen and N. Marcuvitz
"Radiation and Scattering of Waves"
Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall, 1973.
- [52] V.H. Weston
"Pulse return from a sphere"
IEEE Trans. Antennas Propagat (Special Supplement), vol. AP 7,
p. S43-S51, 1959.
- [53] D.L. Sengupta and Y.P. Liu
"Analytical investigation of wave forms radiation by a
resistively loaded linear antenna excited by a Gaussian pulse"
Radio Sci., vol. 9, no 6, pp. 621-630, June 1974.
- [54] ???
- [55] H. Lin and A.A. Ksienski
"Optimum frequencies for aircraft classification"
IEEE Trans. on aerospace and electronic systems, vol. AES-17,
no 5, pp. 656-665, 1981.
- [56] R. Gómez Martín, A. Salinas, A. Rubio, J. Fornieles y M.
Martín
"Time domain integral equations for EMP analysis"
Aceptado en International Journal of Numerical Modelling.
- [57] C.L. Bennett, Jr. and W.L. Weeks
"A technique for computing approximate electromagnetic impulse
response of conducting bodies"
Purdue University Report TR-EE68-11.
- [58] A.J. Poggio and E.K. Miller
"Integral equation solution of three-dimensional scattering
problems"
Computer Techniques for Electromagnetics. Cap. 4, New York:
Pergamon Press, 1973.
- [59] A.R. Djordjevic, M.B. Bazdar, G.M. Vitosevic, T.K. Sarkar,

- R.F. Harrington
"Analysis of wire antennas and scatterers".
Artech House, Boston. \$\$\$\$
- [60] R. Perez Leal
"Estudio de antenas helicoidales y antenas filiformes sobre plano de masa".
Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, 1986.
- [61] B.D. Popovic, M.B. Dragovic and A.R. Djordjevic
"Analysis and Synthesis of Wire Antennas"
London: Research Studies Press, 1982.
- [62] J. Moore and R. Pizer
Moment Methods in Electromagnetics. Techniques and Applications
- [63] G.J. Burke
The numerical electromagnetic code NEC. Application of the method of moment to electromagnetic fields.
The SCEE Press, 1980.
- [64] C.W. Trueman and S.J. Kubina.
"Verifying wire-grid model integrity with program CHECK"
ACES Journal, Winter 1990, vol. 5, no 2, pgs. 17-42.
- [65] T.T. Wu and R.W.P. King
"The Tapered Antenna and Its Application to the Junction Problem for Thin-Wires"
IEEE Trans. on Antennas and Propagat., vol. AP- 24, no 1, 1976.
- [66] G.J. Burke.
"An improved treatment for wire junctions in the Method of Moments Code NEC".
Comunicación privada.
- [67] A.G. Tijhuis, P. Zhongqiu and A. R. Bretones
"Transient Excitation of a Straight Thin-Wire Segment: A New

Look at on Old Problem".

Enviado a IEEE Trans. Antennas Propagat.

[68] C.D. Taylor, D.R. Wilton

"The extended boundary condition solution of dipole antenna of revolution".

IEEE Trans., Ap-20, 1972, pp. 772-776.

[69] J. Porti

Estudio Comparativo de Diferentes Ecuaciones Integrales para el campo eléctrico en el dominio del tiempo. Aplicación al cálculo del campo de cercanías.

Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1988.

[70] A. Salinas

Aplicación de la técnica monopulso a una agrupación plana de antenas lineales excitadas por pulsos electromagnéticos.

Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1986.

[71] J.P. Pelletier

Techniques numériques appliquées au calcul scientifique.

Masson et Cie. Editeurs. Paris 1971.

[72] R.W.P. King

The Theory of Linear Antennas

Harvard University Press. 1956.

[73] E.K. Miller, R.M. Bevensee, A.J. Poggio, R. Adams and F.J. Deadrick

"An evaluation of computer programs using integral equations for the electromagnetic analysis of thin wire structures"

Interaction Notes, Note March 1974.

[74] A.R. Bretones

DOTIG1, un programa para el estudio en el dominio del tiempo de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras de hilo.

Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1988.

[75] A.R. Bretones, R. Gómez Martín and A. Salinas.
"DOTIG1, a Time-Domain Numerical Code for the Study of the
Interaction of Electromagnetic Pulses with Thin-Wire
Structures".
COMPEL, vol. 8, no 1, 1989. pp. 39,61.

[76] A.R. Bretones, A. Salinas, R. Gómez Martín and A. Perez.
"The Comparison of a Time-Domain Numerical Code (DOTIG1) with
Several Frequency-Domain Codes Applied to the Case of
Scattering from a Thin-Wire Cross".
ACES. Special Issue on Electromagnetics Computer Code
Validation. 1989. pp. 121-129.

[77] C.M. Butler, B.M. Duff, R.W.P. King and E. Yung
"Theoretical and experimental investigations of thin-wire
structures: Junction conditions, Currents and charges"
Interaction Notes, Note 238, February 1975.

[78] A.R. Bretones, A. Salinas y R. Gómez Martín.
"Sobre el tratamiento de uniones de hilo en el DOTIG1".
V Symposium nacional de URSI. Vigo, 1990.

[79] A.R. Bretones, A. Salinas and R. Gómez Martín.
"Comparison of Different Junction Treatments in the DOTIG1
Code".
Seventh International Conference on Antennas and Propagation.
ICAP 91. York, U.K. 1991.

[80] P.D. Smith.
"Instabilities in Time Marching Methods for Scattering: Cause
and Rectification".
Enviado a Electromagnetics.

[81] A.G. Tijhuis
"Iterative Techniques for the Solution of Integral Equations
in Transient Electromagnetic Scattering".
Contribution to: Application of Conjugate Gradient Methods to
Electromagnetics and Signal Analysis. Edited by T. Sarkar.

DILIGENCIA!

Reunido el Tribunal examinador en el día de
la fecha, constituido por:

- D. Manuel Hornos Montaña
- D. Luis José Roca
- D. Anton J. Tyhuis
- D. Rafael Torres Giménez
- D. Bernardo García Olmedo

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado Don

Alfonso Salinas Estremosa
e acordó por unanimidad otorgar la califica-
ción de Apto Cum-Laude

y para que conste, se extiende firmada por los
componentes del Tribunal, la presente diligen-
cia.

Granada, a 7 de Junio de 1921.

El Secretario,

El Presidente,

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,