

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE GEODINAMICA

T  
14  
49

Prov. t. 13/39

SIMULACION GEOESTADISTICA DE VARIABLES GEOLOGICAS  
POR METODOS ESPECTRALES

Tesis Doctoral que presenta  
el Lcdo. Eulogio Pardo Igúzquiza  
para optar al Grado de Doctor en  
Ciencias por la Universidad de  
Granada.

V° B° del Director

Fdo. Mario Chica Olmo  
Prof. Titular de Geología de Minas  
Universidad de Granada

<b>BIBLIOTECA UNIVERSITARIA</b>	
<b>GRANADA</b>	
Nº Documento	<u>019663250</u>
Nº Copia	<u>121212260</u>

Granada, mayo de 1991



"Al encontrar que el mundo no se acomodaba a la teoría, decidió sabiamente acomodar la teoría al mundo"

Washington Irving

Historia de Nueva York de Knickerbocker



*A mis padres*

*A Sali*

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no puede concebirse sin la actuación de un director que me ha guiado en el mundo de la Geostatística y de la Informática Geológica desde mis inicios en este campo de investigación fascinante. Por ello, por haber dirigido puntualmente la investigación, por las ideas que me ha ido proponiendo y por haberme "aguantado" durante los últimos cinco años, mi más sincero agradecimiento y reconocimiento al Dr. D. Mario Chica Olmo, director de la presente Tesis Doctoral.

Asimismo, agradecer a todos los compañeros del Grupo "Geostatística y Teledetección", que comparten conmigo el interés por estos temas, su apoyo prestado en todo momento.

Agradezco igualmente al Dr. Peter Dowd por su amable acogida durante mi estancia en el Department of Mining and Mineral Engineering de la Universidad de Leeds.

Existen muchas más personas que, de un modo u otro, han colaborado en la finalización de este trabajo, a todos ellos mi más sincera gratitud.

Vaya también mi agradecimiento a los miembros del tribunal por haber aceptado gentilmente a formar parte del mismo.

Esta Tesis Doctoral ha podido ser realizada gracias a la beca predoctoral en España del Plan de Formación de Personal Investigador en Recursos Geológicos, concedida por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.



# INDICE

## CAPITULO I. INTRODUCCION

1. INTRODUCCION .....	1
2. MOTIVACIONES Y OBJETIVOS .....	6
3. COMPOSICION DE LA MEMORIA .....	10

## CAPITULO II. NOCIONES BASICAS DE LA TEORIA DE VARIABLES REGIONALIZADAS

1. INTRODUCCION .....	13
2. CONCEPTOS BASICOS	
2.1. Campo geométrico .....	14
2.2. Soporte .....	15
2.3. Función aleatoria .....	16
2.4. Características de las funciones aleatorias .....	16
2.5. Funciones aleatorias estacionarias .....	18
2.5.1. Estacionaridad de segundo orden e hipótesis intrínseca .....	19
2.5.2. Ergodicidad .....	23
2.6. Función de densidad espectral .....	24
2.7. Regularización o procesos integrados .....	27

3. ANALISIS VARIOGRAFICO .....	29
4. SIMULACION CONDICIONAL GEOESTADISTICA .....	37

CAPITULO III. METODOS ESPECTRALES DE SIMULACION NO  
CONDICIONAL DE FUNCIONES ALEATORIAS  
ESTACIONARIAS

1. INTRODUCCION .....	42
2. SIMULACION UNIDIMENSIONAL	
2.1. Técnicas en el dominio del espacio .....	45
2.2. Técnicas en el dominio de la frecuencia .....	47
2.2.1. Método de Shinozuka (1970) .....	47
2.2.2. Método de Rice (1954) .....	55
2.2.3. Técnicas que hacen uso de la FFT .....	95
2.2.3.1. Método de la integral de Fourier .....	101
2.2.3.2. Simulación mediante filtrado de un ruido blanco .....	113
3. SIMULACION BIDIMENSIONAL	
3.1. El Método de las Bandas Rotantes (MBR) .....	127
3.2. Método espectral directo (MED) .....	148
3.3. Comparación entre el MBR y el MED .....	154
4. SIMULACION TRIDIMENSIONAL .....	162



## CAPITULO IV. CASOS PARTICULARES DE SIMULACION NO CONDICIONAL

1. INTRODUCCION .....	177
2. SIMULACION DE FUNCIONES ALEATORIAS ANISOTROPAS	
2.1. Introducci3n .....	179
2.2. Transformaci3n de coordenadas cartesianas .....	180
2.3. MBR con un generador espectral unidimensional .....	181
2.4. M3todo espectral directo .....	182
4. SIMULACION DE VALORES MEDIOS SOBRE UN SOPORTE NO PUNTUAL	
4.1. Introducci3n .....	188
4.2. Valores medios a partir de la simulaci3n puntual ..	189
4.3. Simulaci3n de valores medios mediante m3todos espectrales .....	191
4.4. El modelo gaussiano discreto .....	217
3. SIMULACION DE FUNCIONES ALEATORIAS NO ESTACIONARIAS	
3.1. Introducci3n .....	219
3.2. Metodolog3a de Krigeaje Universal .....	224
3.3. Metodolog3a FAIK .....	236
3.4. Metodolog3a del Krigeaje Residual .....	261
4. SIMULACION MULTIVARIABLE	



4.1. Introducción .....	270
4.2. El modelo lineal de correogionalización .....	275
4.3. Simulación espectral multivariable .....	280
5. SIMULACION DE LA FUNCION INDICATRIZ	
5.1. Introducción .....	345
5.2. Metodología de la simulación .....	347
CAPITULO V. CONDICIONAMIENTO Y RESTITUCION DE LOS VALORES SIMULADOS	
1. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO	
1.1. Introducción .....	385
1.2. Condicionamiento por krigeaje .....	386
2. EL MODELO DE SIMULACION SOBRE LA VARIABLE REAL : ANAMORFOSIS GAUSIANA	
2.1. Introducción .....	410
2.2. Función de distribución de probabilidad experimental .....	412
2.3. Anamorfosis gráfica .....	414
2.4. Función de anamorfosis hermitiana .....	419
RESUMEN Y CONCLUSIONES .....	430
BIBLIOGRAFIA .....	441
APENDICE I .....	449



# CAPITULO I

## INTRODUCCION

### 1. INTRODUCCION

Un carácter distintivo de un gran número de variables geológicas lo constituye el hecho de estar íntimamente asociadas a una localización espacial, esto es, el valor numérico de la variable está coligado con las coordenadas geográficas en las cuales ha sido tomada la medida. Es una realidad, ampliamente extendida, la presentación de datos geológicos sobre mapas geográficos o bien almacenados en ficheros donde a cada dato experimental le acompañan unas coordenadas de referencia. *MATHERON (1965)* introduce el concepto de variable regionalizada para cualificar dichos parámetros espaciales. La fuente de ejemplos de variables regionalizadas en el campo de las Ciencias de la Tierra es inagotable. Así, por ejemplo en Minería, si se trabaja en un yacimiento de sulfuros masivos polimetálicos, los parámetros leyes en Pb, Zn, Ag, % mineral, proporción de estéril, densidad, espesor de recubrimiento, espesor mineralizado, ... son algunos ejemplos de variables regionalizadas.

Al considerar diferentes puntos de referencia, modificación de la localización espacial, el valor de la variable regionalizada experimenta una variación. Dicho cambio es consecuencia de un elevado número de factores que originaron y condicionaron un determinado fenómeno geológico. Así, por ejemplo, las características hidrodinámicas de un acuífero detrítico son una consecuencia última de los



condicionantes sedimentológicos de la cuenca de deposición que da lugar a una sucesión de estratos, y de la historia geológica de dichos materiales desde su formación hasta la actualidad.

La heterogeneidad espacial de un parámetro geológico puede caracterizarse desde un punto de vista cualitativo mediante los estudios geológicos clásicos; pero cuando se pasa al campo cuantitativo, las conclusiones de los estudios anteriores son, a todas luces, insuficientes. Desde la óptica numérica, los modelos geológicos de tipo constitutivo y genético no llegan al nivel de precisión requerido y, si bien, se pueden utilizar como información adicional de control, no permiten directamente un tratamiento numérico de la información experimental.

En general, en la modelización cuantitativa o numérica de una variable geológica, el enfoque determinista no constituye una metodología adecuada de trabajo por diferentes razones, entre las que se pueden citar la complejidad de las relaciones de tipo causa-efecto que originaron el fenómeno y la ausencia de información imprescindible en este tipo de planteamientos. El enfoque más pausable es el de tipo probabilístico fundamentado en la Teoría de Probabilidades. La hipótesis básica de trabajo consiste en considerar a los fenómenos naturales como procesos aleatorios. Esta aleatoriedad, y por consiguiente la aplicabilidad de la Teoría de Probabilidades, puede ser inherente a la estructura o génesis del proceso, o bien puede ser una consecuencia de razones anteriormente mencionadas como son su complejidad o falta de conocimiento experimental. Muchas son las argumentaciones, principalmente filosóficas, que se han dado para aceptar o rehusar la hipótesis básica. En cualquier caso, la mejor justificación a favor de las técnicas probabilísticas es su aplicabilidad y los resultados obtenidos en la resolución de problemas reales.

La Geoestadística puede ser considerada como la ciencia que se basa en la aplicación de la Teoría de Probabilidades



en el estudio de las variables regionalizadas. Esceptuando la hipótesis básica, el hecho más remarcable y fundamento de la Geoestadística es que la variabilidad espacial de una variable geológica está estructurada, y dicha pauta de variación espacial es susceptible de ser inferida y modelizada. Con esta nueva hipótesis de trabajo obtenemos el modelo geoestadístico en el marco del cual una variable geológica se considera como un proceso aleatorio con un patrón de variabilidad espacial (Figura 1.1).

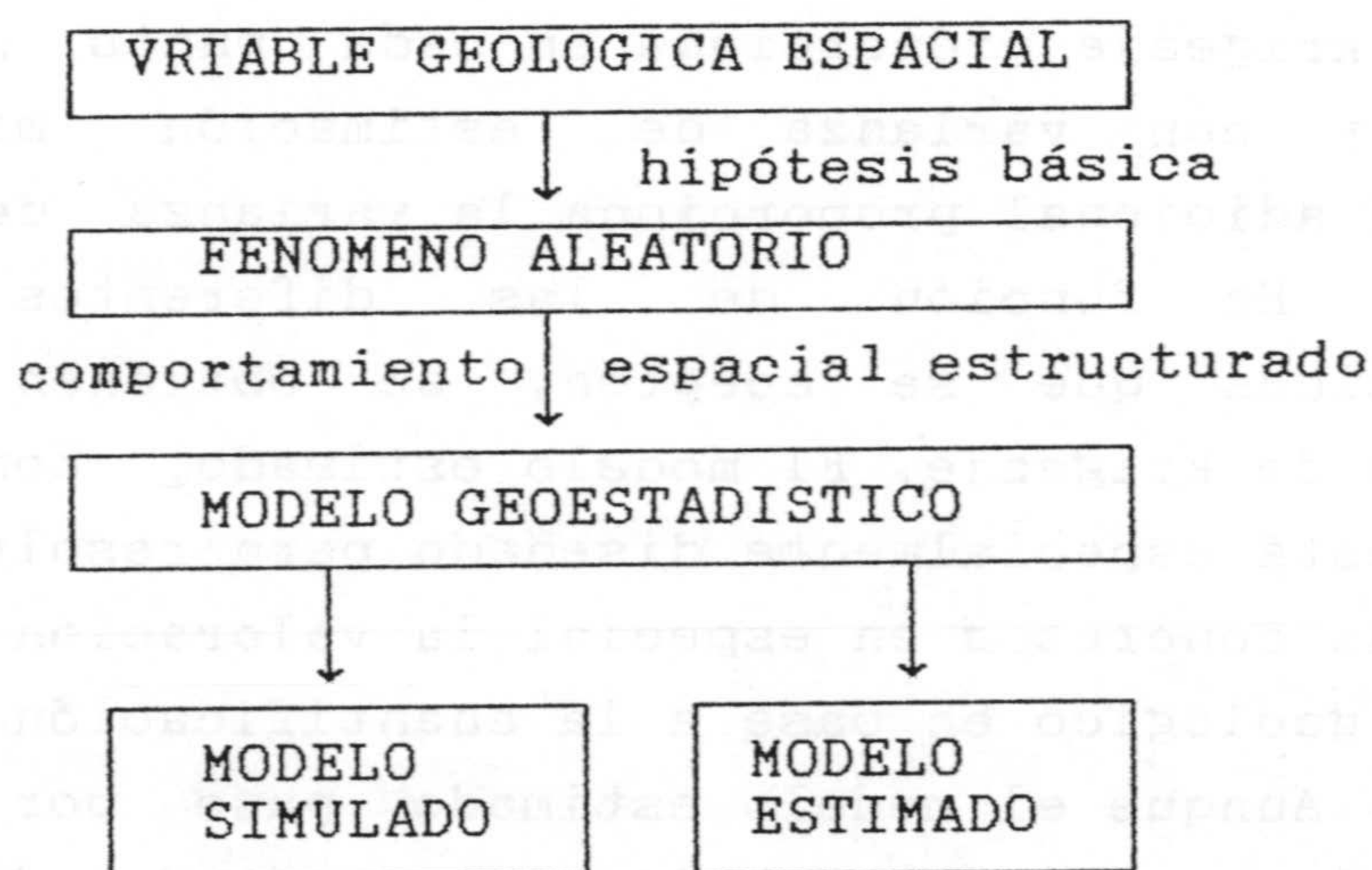


Figura 1.1. Modelo conceptual geoestadístico.

Dentro de los modelos geoestadísticos cabe distinguir básicamente dos tipos: modelo estimado y modelo simulado. Ambos tipos de modelos están contruidos en base a la información experimental de que se dispone, la cual constituye el único conocimiento certero de la realidad. Piénsese por ejemplo en un perfil de sondeos que atraviesan una capa geológica en el subsuelo. La potencia real de dicha capa sólo se conoce en los puntos sondeados. Existen infinitos puntos en los cuales se desconoce la potencia de la



capa. Con ayuda de las técnicas geoestadísticas se puede reconstruir la capa geológica apoyándose en la información experimental y en una serie de hipótesis de tipo probabilístico.

El primer tipo de reconstrucción de una variable geológica en los puntos no muestreados, es el modelo construido por valores estimados, esto es, por los valores con mayores probabilidades de ocurrir. Cada valor estimado lleva aparejado un error de estimación, el cual es desconocido. La técnica geoestadística de estimación denominada kriging proporciona en cada punto un estimador insesgado y con varianza de estimación mínima. Como información adicional proporciona la varianza del error de estimación. En función de las diferentes asunciones geoestadísticas que se acepten, se obtienen diferentes modalidades de kriging. El modelo estimado, construido por kriging, está especialmente diseñado para resolver un tipo de problemas concretos en especial la valoración económica de un recurso geológico en base a la cuantificación de recursos y reservas. Aunque el modelo estimado pase por los puntos experimentales, por ser el kriging un método de estimación exacto, el hecho de minimizar la varianza de estimación hace que el modelo no sea un fiel reflejo de la variabilidad experimental y no se podrá utilizar para resolución de problemas en los cuales es crítico tener en cuenta dicha variabilidad.

El modelo geoestadístico simulado, en contraposición al anterior, no sustituye a la realidad por su valor más probable, sino por una serie de valores posibles y coherentes con la información experimental en el sentido siguiente: si se muestrea el modelo simulado a una escala tan fina como se desee, se obtienen las mismas características experimentales de tipo estadístico y geoestadístico. De este modo, el modelo simulado constituye una "versión", de las infinitas posibles, de la realidad. Adicionalmente se va a imponer que el modelo simulado pase por los puntos experimentales, operación que se



conoce con el nombre de condicionamiento del modelo. En base a este último hecho, realidad experimental y modelo numérico resultan indistinguibles con la ventaja adicional de que la información experimental es fragmentaria mientras que el modelo simulado se conoce en cualquier punto; bien entendido que, a escala puntual, la coincidencia entre simulación y realidad, para puntos distintos a los experimentales, es una mera cuestión de azar. Sólo a escala global, realidad y modelo simulado se muestran coincidentes en cuanto a sus parámetros geoestadísticos.

La utilidad práctica del modelo simulado es manifiesta, principalmente en dos tipos de aplicaciones: estudios de planificación y estudios de sensibilidad.

Los estudios de planificación abarcan todo tipo de aplicaciones en las cuales sólo es necesaria una única simulación que constituye el modelo numérico básico sobre el cual se opera. Los he denominado estudios de planificación porque una de las primeras y más importantes aplicaciones de un modelo geoestadístico simulado ha sido la simulación de yacimientos minerales para planificación de la explotación minera.

En los estudios de sensibilidad se utiliza un elevado número de simulaciones, en general no inferior a cien, y se trata de evaluar el impacto de la variabilidad posible sobre un cierto sistema determinístico. Como ejemplo, baste citar en hidrogeología estocástica, la resolución de las derivadas parciales estocásticas que describen el flujo subterráneo puede solventarse empleando un elevado número de modelos simulados de los parámetros hidrogeológicos.

En resumen, en muchas disciplinas de las Ciencias de la Tierra es particularmente útil el disponer de modelos numéricos de variables geológicas que reproduzcan adecuadamente la variabilidad experimental. Cada simulación se puede considerar como una versión posible de la realidad y



puede ser tratada como tal en todo tipo de aplicaciones donde la heterogeneidad natural de un parámetro geológico sea el factor crítico que condicione las características que se pretenden investigar.

La presente tesitura radica en el desarrollo metodológico de la construcción de dichos modelos simulados de un fenómeno natural, de modo que reflejen lo más fielmente posible la realidad, imponiendo que el modelo simulado respete todos los parámetros estadísticos y geoestadísticos que sea posible inferir a partir de la información experimental de trabajo.

## 2. MOTIVACIONES Y OBJETIVOS

En las aplicaciones prácticas de la Teoría de Variables Regionalizadas, el punto de vista del análisis espectral ha tenido un interés muy limitado. Ello ha venido motivado porque el principal objetivo de la geoestadística ha sido la estimación de los valores de una función aleatoria en puntos no muestreados experimentalmente. Para poder efectuar la estimación probabilística bien conocida del krigeaje, es imprescindible el disponer de un modelo de variabilidad representado por el variograma o, su equivalente, la covarianza, como función caracterizadora de la correlación espacial. Es raro el disponer a priori del modelo de variabilidad que rige el comportamiento espacial de un parámetro geológico por lo que ha de ser inferido a partir de la información experimental.

Aunque la covarianza y la función de densidad espectral son dos funciones equivalentes que forman, desde un punto de vista matemático, un par transformado de Fourier, interesa principalmente el comportamiento de la covarianza en las



proximidades del origen, o equivalentemente el comportamiento de la función de densidad espectral en el infinito. En general no es fácil comprobar el comportamiento de una curva experimental en el infinito, lo que limita considerablemente el uso del análisis armónico en la estimación del variograma o de la covarianza (MATHERON, 1970).

Contrariamente, al abordar problemas de simulación geoestadística se asume conocida la función de covarianza, que se desea imponer a las realizaciones de una función aleatoria que representa la variable en estudio y que, en la práctica, se estima de la información experimental.

El análisis espectral de una función aleatoria estacionaria de orden dos, proporciona un método con fundamento teórico general para generar realizaciones de una función aleatoria con covarianza impuesta.

No obstante en el ámbito geoestadístico, JOURNEL (1974,b) limita el uso práctico del análisis armónico a una dimensión justificando que las integrales de Fourier en dos o tres dimensiones, que definen el proceso aleatorio y la covarianza, son laboriosas de tratar.

SHINOZUKA (1970) proporciona un método de simulación espectral general para simular procesos multidimensionales y multivariados. El método es aplicado en Hidrología por MEJIA y RODRIGUEZ-ITURBE (1974) para simulación univariada en el plano.

SHINOZUKA y JAN (1972) en base al trabajo de RICE (1954), proponen un nuevo método de simulación que difiere del anterior en el modo de involucrar la función de densidad espectral en el proceso generador.

En el ámbito geoestadístico, el método más utilizado para simulación multidimensional es el Método de las Bandas Rotantes (MATHERON, 1973) para cuya aplicación sólo es



necesario disponer de un generador unidimensional a lo largo de líneas que reparten homogéneamente el espacio a simular.

MANTOGLOU y WILSON (1981, 1982) muestran como el método de simulación de las Bandas Rotantes es más eficiente si se utiliza como generador unidimensional uno de tipo espectral.

BORGMAN, TAHERI y HAGAN (1984) proponen la simulación tridimensional de variables geológicas en base a simulaciones bidimensionales, por obtención de coeficientes de Fourier aleatorios e inversión de dichos coeficientes para obtener la simulación.

FOX (1987) hace uso del mismo fundamento al de los autores anteriores para generar realizaciones de una función aleatoria unidimensional con espectro de amplitud de la forma  $A = a f^b$  ( $A$  : amplitud,  $f$  = frecuencia,  $a$  = constante,  $b$  = dimensión fractal).

En base a las referencias anteriores la principal tesis que pretendo defender es que el análisis armónico puede constituir un enfoque muy eficiente para abordar problemas de simulación condicional geoestadística, en el caso de funciones aleatorias estacionarias de segundo orden. Para ello voy a analizar sus ventajas y desarrollar la metodología adecuada para llevar a cabo las operaciones de simulación en  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

La simulación unidimensional recibe una especial atención por mi parte pues el motivo de interés que suscita es doble. Por una parte está la propia problemática unidimensional muy bien representada por las series temporales, que aparecen en diferentes ámbitos de las Ciencias de la Tierra. El tratamiento de perfiles (información espacial unidimensional) es asimismo foco de atención de la comunidad geocientífica como por ejemplo en litoestratigrafía o geofísica.



El otro aspecto que hace atractivo el disponer de métodos de simulación unidimensional eficientes proviene del hecho, ya mencionado con anterioridad, de que el método más difundido para simulación multidimensional en el ámbito geoestadístico como es el Método de las Bandas Rotantes, se basa en una composición espacial de simulaciones unidimensionales.

Por ello me planteo como objetivo analizar diferentes métodos de simulación espectral unidimensional y desarrollar un método óptimo en función de diferentes criterios que posteriormente se aportarán.

El segundo objetivo es el desarrollo de una metodología eficiente de simulación espectral en el plano. Un gran rango de variables geológicas tienen una ocurrencia espacial que se analiza en base a coordenadas  $X$ ,  $Y$ .

Para este caso me planteo desarrollar una metodología eficiente para simulación de funciones aleatorias isótropas y anisótropas, simulación de la función aleatoria de valores puntuales y medios así como la simulación multivariable.

Pretendo demostrar como la simulación de procesos integrados de valores medios es extremadamente sencilla en base a métodos espectrales, a diferencia de lo que ocurre con otros métodos de simulación clásicos.

En cuanto a la simulación multivariable, el objetivo que me he marcado ha sido desarrollar una metodología eficiente y más flexible que el modelo lineal de correogionalización, respetando, obviamente, la condición de definido-positivo de la matriz de correlación cruzada.

Para tres dimensiones es válido todo lo dicho anteriormente, pretendo investigar las limitaciones del método espectral en este ámbito 3D y aportar una solución favorable.



Aunque no estrictamente en el marco del análisis espectral, pretendo cubrir también dos apartados sumamente interesantes en este dominio de la simulación: por un lado la simulación de funciones aleatorias no estacionarias, analizando las alternativas existentes, y por otra parte la simulación de la función indicatriz donde el objetivo es la simulación de la función indicatriz sobre soporte bloque y de otro lado la metodología para la simulación de la función indicatriz con dos cortes, o equivalentemente con tres códigos.

Por último, para finalizar las diferentes etapas de construcción de un modelo numérico por simulación condicional se ha analizado el condicionamiento y la restitución del histograma experimental.

Cubriendo los objetivos señalados se abordan todas las etapas de la simulación condicional, y en un variado caso de situaciones que tiene su reflejo en la práctica; y que permitirán a los investigadores, no necesariamente geoestadísticos, que hacen uso de modelos de variabilidad de fenómenos geológicos, el disponer de una metodología eficiente para construir modelos que representen lo más fielmente posible la realidad experimental con el objeto de obtener resultados precisos, fiables y realistas.

Con el ánimo anteriormente expuesto comencé en su día el presente trabajo de investigación que presento como tesis doctoral y que se expone en los capítulos siguientes.

### 3. COMPOSICION DE LA MEMORIA

La presente memoria consta de cinco capítulos, las conclusiones finales de la investigación, la bibliografía



referenciada en el texto y un anexo.

En el primer capítulo, después de una introducción general se abordan aspectos generales del trabajo como la motivación y los objetivos de la investigación.

El segundo capítulo es un breve repaso a los aspectos generales más interesantes de la Teoría de Variables Regionalizadas y que constituyen la base teórica de los modelos desarrollados.

En el tercer capítulo paso a abordar específicamente la generación de realizaciones de una función aleatoria con covarianza impuesta por métodos espectrales en una, dos y tres dimensiones. Se analizan métodos ya existentes y se propone nueva metodología, obviamente, buscando siempre los resultados más favorables.

El cuarto capítulo es el más variado en contenido; en él se tratan cuestiones que pretenden refinar la simulación no condicional para tratar diversas situaciones teórico prácticas que se apartan de la situación básica más sencilla: regionalización isótropa univariable. Se acomete la simulación de funciones aleatorias anisótropas, simulación de procesos integrados o funciones aleatorias sobre soporte no puntual y simulación de corregionalizaciones, todo ello en el ámbito del dominio frecuencial, analizando las ventajas que ofrece trabajar con la función de densidad espectral y mostrando la metodología diseñada.

En este mismo capítulo se tratan dos aspectos sumamente interesantes y de gran utilidad práctica, la simulación de funciones aleatorias no estacionarias desde tres ópticas diferentes, y la simulación de la función indicatriz sobre soporte puntual y sobre soporte bloque, así como la simulación de la función indicatriz con tres valores de código.



En el quinto y último capítulo, abordo dos apartados clásicos en la simulación condicional geoestadística: el condicionamiento y la restitución del histograma experimental. Dos procesos que como se apreciará incrementan la robustez del modelo numérico simulado. El condicionamiento hace que el modelo pase por las localizaciones experimentales y la restitución permite que el modelo reproduzca todos los estadísticos univariantes experimentales.

En el apartado de conclusiones se exponen los resultados alcanzados, en que modo los objetivos han sido cubiertos y las deducciones más significativas que es posible obtener de los capítulos de la memoria.

La bibliografía que se referencia en el texto constituye el soporte medular de muchas de las afirmaciones, teoremas utilizados y en definitiva las herramientas indispensables para obtener los resultados finales alcanzados.

Por último, en el anexo I, al ser en definitiva todas las técnicas presentadas variantes, ciertamente particulares, del método básico de simulación de Monte Carlo, se chequean los números pseudoaleatorios utilizados en los diferentes ejemplos numéricos que se presentan en el texto.



## CAPITULO II

# NOCIONES BASICAS DE LA TEORIA DE VARIABLES REGIONALIZADAS

### 1. INTRODUCCION

La Teoría de Variables Regionalizadas, en base a conceptos clásicos de la Teoría de Probabilidades, manipula desde un punto de vista probabilístico variables dependientes de su localización espacial y/o temporal (a todos los efectos el tiempo se puede considerar como un espacio unidimensional).

Dicha estructura de variabilidad espacial es el pilar básico de la Geoestadística tratando sacar el máximo provecho de ella en la resolución de problemas prácticos. Cada variable regionalizada tiene su propio patrón de variabilidad espacial, que no se conoce a priori y ha de inferirse a partir de los valores experimentales. Para que dicha inferencia sea posible han de mediar ciertas hipótesis estadísticas cuyo cumplimiento es difícil, sino imposible, de verificar. La efectividad de la metodología probabilística se obtiene a posteriori, mediante los resultados de aplicar dichas técnicas a casos de estudio reales.

En los siguientes apartados se repasa la nomenclatura y conceptos básicos sobre los cuales se desarrollan los capítulos sucesivos.



## 2. CONCEPTOS BASICOS

### 2.1. Campo geométrico

El campo geométrico de una variable regionalizada es el dominio en el cual está definida dicha variable. En las Ciencias de la Tierra, el campo geométrico coincide con una región del espacio o bien con un intervalo de tiempo. Un acuífero, un yacimiento minero, una serie temporal o cualquier área de estudio, son ejemplos de campos geométricos. La región  $A$  de la figura II.1 representa un campo geométrico donde están definidas una o varias variables regionalizadas; por ejemplo, puede suponerse que se trata de un acuífero donde se estudian la permeabilidad, porosidad, pluviometría y nivel piezométrico. Los límites del campo geométrico pueden tener un significado físico claro, por ejemplo bordes impermeables del acuífero, o pueden establecerse arbitrariamente en base a algún criterio físico. El caso práctico más frecuente consiste en limitar el campo geométrico a la zona muestreada, esto es, con valores experimentales.

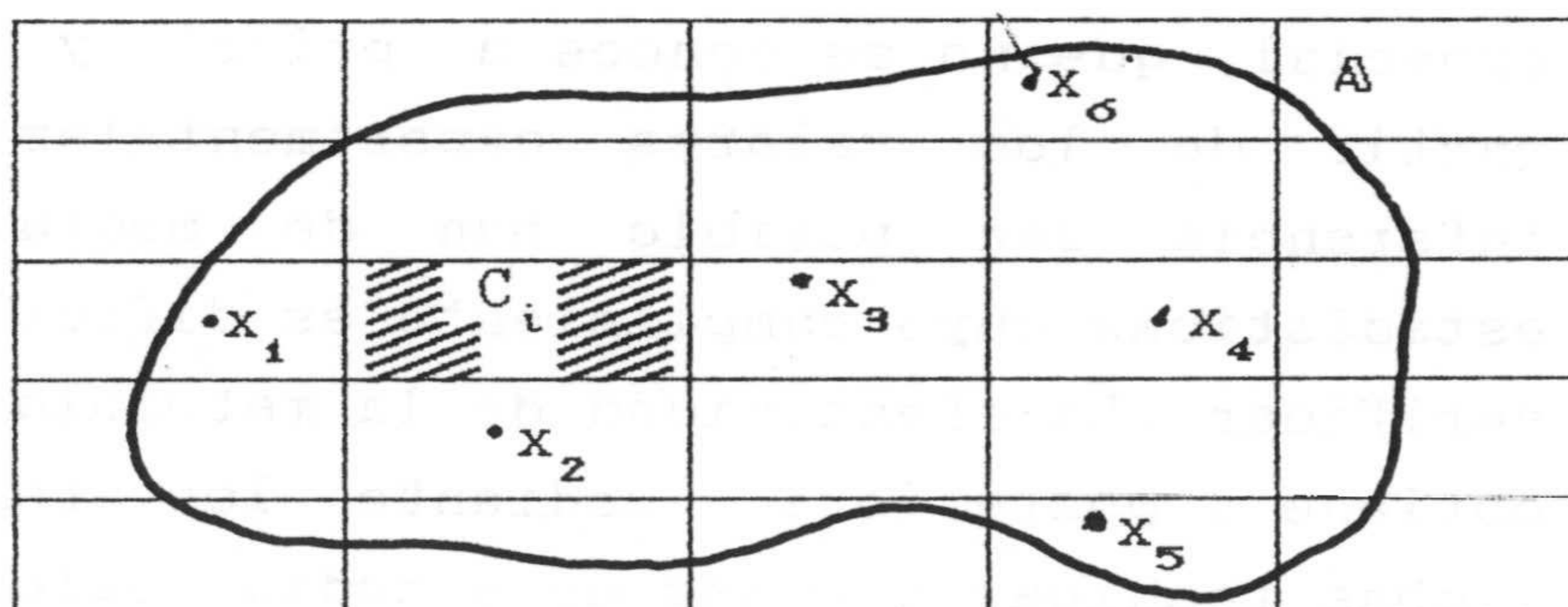


Figura II.1. Campo geométrico.



## 2.2. Soporte

El soporte se puede definir como el segmento, área o volumen físico, según se trate de un espacio uni-, bi- o tridimensional, sobre el cual se observa el valor de la variable regionalizada. Cuando el tamaño del soporte es insignificante frente al tamaño del campo geométrico en el cual está integrado, el soporte se considera puntual. Siguiendo con el ejemplo anterior, los valores medidos en piezómetros o sondeos, cuando se estudia un acuífero de dimensiones hectométricas a kilométricas, se pueden considerar valores puntuales y el campo geométrico consta de un número infinito de dichos valores:

$$A = \int_A dx$$

$x = (X,Y)$  : localización espacial en el plano.

En otros casos, si se divide el acuífero en celdillas  $C_i$ , el soporte de la regionalización es el área de cada celdilla que queda dentro de los límites del campo geométrico de modo que se trabaja con valores medios de la variable regionalizada en dicho área. En este caso, el número de soportes que componen el campo geométrico es finito:

$$A = \sum_{i=1}^N C_i$$

Si se incrementa sucesivamente el soporte puede llegarse a hacer tan grande que coincida con el campo geométrico.



### 2.3. Función aleatoria

Sea  $Z$  una variable regionalizada definida en un campo geométrico  $\mathbb{A}$ . En cada punto  $x$  del campo geométrico se puede considerar a  $Z(x)$  como una variable aleatoria, esto es, una variable que toma su valor numérico  $z(x)$  de acuerdo a una cierta función de distribución de probabilidad. Al conjunto de todas las variables aleatorias  $Z(x)$  para todos los valores posibles de  $x$  dentro del campo geométrico  $\mathbb{A}$ ,  $\{Z(x); \forall x \in \mathbb{A}\}$  se le denomina función aleatoria y también se notará por  $Z(x)$ .

Si  $x$  representa un soporte puntual,  $Z(x)$  es una función aleatoria puntual, mientras que si representa un área  $Z(x)$  será una función aleatoria integrada, función aleatoria de valores medios áreales o función aleatoria con soporte no puntual, diferente de la primera pero íntimamente relacionadas.

### 2.4. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES ALEATORIAS

Cada variable aleatoria  $Z(x)$  está completamente definida por su función de distribución de probabilidad que depende de  $x$ :

$$F(x_1; z(x_1)) = P( Z(x_1) < z(x_1) )$$

donde:

$F(.)$  : función de distribución de probabilidad.

$P(.)$  : probabilidad.

$Z(x_1)$  : variable aleatoria definida en  $x_1$ .

$z(x_1)$  : realización o valor particular que puede tomar la variable aleatoria.



Si se consideran dos argumentos diferentes al mismo tiempo,  $x_1, x_2$ , se puede definir la función de distribución de probabilidad conjunta:

$$F(x_1, x_2; z(x_1), z(x_2)) = P(Z(x_1) < z(x_1); Z(x_2) < z(x_2))$$

Teóricamente se puede ir incrementando el número de argumentos  $x_i$ , definiendo la función de distribución conjunta de órdenes más elevados de un modo similar a la definición para orden dos expresada con anterioridad:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k; z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_k)) = \\ P(Z(x_1) < z(x_1); Z(x_2) < z(x_2); \dots; Z(x_k) < z(x_k))$$

En el límite, el orden más alto de la función de distribución define de modo exhaustivo la función aleatoria. En las aplicaciones que se encuentran en las Ciencias de la Tierra es prácticamente imposible trabajar con funciones de distribución como la definida en la expresión anterior. En general, es suficiente con conocer los dos primeros momentos de la función aleatoria.

Momento de primer orden.

Esperanza matemática

$$E\{Z(x)\} = m(x)$$



Momentos de segundo orden.

Varianza

$$\text{Var} \{Z(\mathbf{x})\} = E\{[Z(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})]^2\}$$

Covarianza

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\{[Z(\mathbf{x}_1) - m(\mathbf{x}_1)] [Z(\mathbf{x}_2) - m(\mathbf{x}_2)]\}$$

Variograma

$$\gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \text{Var}\{Z(\mathbf{x}_1) - Z(\mathbf{x}_2)\}$$

En el caso multivariable, cuando se tienen en cuenta más de una función aleatoria al mismo tiempo, se pueden definir los momentos de segundo orden cruzados que revelan la correlación intervariable entre cada pareja de funciones aleatorias  $\{Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)\}$ :

Covarianza cruzada

$$C_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\{[Z_i(\mathbf{x}_1) - m(\mathbf{x}_1)] [Z_j(\mathbf{x}_2) - m(\mathbf{x}_2)]\}$$

Variograma cruzado

$$\gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \text{Var} \{Z_i(\mathbf{x}_1) - Z_j(\mathbf{x}_2)\}$$

## 2.5. FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS

En la mayoría de los casos prácticos no se conocen los



diferentes momentos de la función aleatoria  $Z(\mathbf{x})$ , por lo que es preciso estimarlos a partir de los datos experimentales. Para ello es necesario observar un número suficientemente grande de realizaciones de la función aleatoria y a partir de ellas calcular los diferentes estadísticos.

En el estudio de variables geológicas, al tratar de aplicar el modelo conceptual probabilístico se presenta un problema de difícil solución: en general, sólo se dispone de una única realización de la función aleatoria correspondiente.

La estimación de las características estadísticas de una función aleatoria, cuando sólo se dispone de una única realización, no puede abordarse si no es mediando ciertas hipótesis como son la de estacionaridad y ergodicidad de dicha función aleatoria.

La hipótesis ergódica supone la asunción de que los estadísticos medios que se obtendrían de un elevado número de realizaciones (estadísticos de conjunto) son los mismos a los estadísticos medios espaciales (o temporales) obtenidos de una única realización.

La hipótesis de estacionaridad lleva consigo la asunción de la independencia de los estadísticos espaciales medios con respecto a una localización espacial concreta. A continuación se desarrollan brevemente el significado de estas importantes hipótesis que hacen posible la inferencia estadística a partir de una realización.

#### 2.5.1. Estacionaridad de segundo orden e hipótesis intrínseca

Dada  $z(\mathbf{x})$  una realización cualquiera de una función aleatoria estacionaria  $Z(\mathbf{x})$ , para toda pareja de dos puntos cualesquiera  $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\}$  la diferencia entre los valores  $z(\mathbf{x}_i)$  y



$z(x_j)$  no depende de la localización de los puntos  $x_i, x_j$ , sino de la distancia que los separa  $h = x_i - x_j$ . De este modo, cada pareja de valores separados por la misma distancia  $h$ , se puede considerar como una realización diferente del par de variables aleatorias  $\{Z(x), Z(x+h)\}$  siendo así posible la inferencia de las funciones covarianza y variograma, *JOURNAL y HUIJBREGTS (1978)*.

Matemáticamente, la estacionaridad de segundo orden implica:

1) Existe la esperanza matemática  $E\{Z(x)\}$  y no depende de la localización  $x$ :

$$E\{Z(x)\} = m \quad ; \quad \forall x$$

2) Existe la covarianza para cada par de variables aleatorias  $\{Z(x), Z(x+h)\}$  y sólo depende de la distancia que las separa  $h$ , y no de la localización de  $x$  y  $(x + h)$ :

$$C(h) = E\{Z(x+h) Z(x)\} - m^2 \quad ; \quad \forall x$$

La estacionaridad de la covarianza implica la estacionaridad de la varianza y variograma, deduciéndose las siguientes relaciones:

$$\text{Var}\{Z(x)\} = E\{[Z(x) - m]^2\} = C(0) \quad ; \quad \forall x$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \quad ; \quad \forall x$$



La hipótesis de estacionaridad de segundo orden implica la existencia de covarianza y por consiguiente de varianza experimental. La existencia de la función variograma representa una hipótesis menos estricta que la existencia de covarianza. En ocasiones, el fenómeno regionalizado tiene una capacidad infinita de dispersión por lo que no se puede definir la función covarianza, pero si la función variograma; la función aleatoria  $Z(x)$  no es estacionaria, pero si lo son las diferencias de primer orden de dicha función aleatoria lo cual se denomina hipótesis intrínseca.

La estacionaridad de segundo orden implica la hipótesis intrínseca, pero la inversa no es cierta, MYERS (1989) proporciona ejemplos en ambos sentidos.

En ocasiones, en la práctica, la función covarianza o variograma se utilizan sólo para distancias  $|h| < d$ , donde  $d$  representa el diámetro de un determinado entorno dentro del cual la esperanza y covarianza se pueden considerar como estacionarios y, si existen suficientes datos experimentales, se puede realizar la inferencia estadística de dichas funciones. Esta condición se denomina cuasiestacionaridad o estacionaridad local, al limitarse la hipótesis de estacionaridad de segundo orden a estos dominios de diámetro menor o igual a  $d$ .

Un proceso estacionario de segundo orden se denomina isótropo si la covarianza no depende de la situación del vector de distancia  $h$  sino sólo de la magnitud de dicho vector. En caso contrario el proceso recibe el nombre de anisótropo. Se puede notar:

$$C(h) = C(r)$$

donde:

$$r = |h|$$



En el caso multivariable, dadas  $N$  funciones aleatorias  $\{Z_i(\mathbf{x}); i = 1, \dots, N\}$  estacionarias de segundo orden, los momentos de segundo orden cruzados pueden escribirse:

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = E\{[Z_i(\mathbf{x}+\mathbf{h}) Z_j(\mathbf{x})]\} - m_i m_j \quad ; \quad \forall \mathbf{x}$$

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{[Z_i(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Z_i(\mathbf{x}_i)] [Z_j(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Z_j(\mathbf{x})]\} \quad ; \quad \forall \mathbf{x}$$

El variograma cruzado es simétrico en  $(i,j)$  y  $(h,-h)$ :

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \gamma_{ji}(-\mathbf{h})$$

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \gamma_{ij}(-\mathbf{h})$$

lo cual no es necesariamente cierto para la covarianza cruzada:

$$C_{ij}(\mathbf{h}) \neq C_{ji}(\mathbf{h})$$

$$C_{ij}(\mathbf{h}) \neq C_{ij}(-\mathbf{h})$$

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = C_{ji}(-\mathbf{h})$$

La relación que liga variograma y covarianza directo y cruzado puede expresarse:



$$\gamma(h) = C(\emptyset) - C(h)$$

$$2 \gamma_{ij}(h) = 2 C_{ij}(\emptyset) - C_{ij}(h) - C_{ji}(h)$$

Como es conocido, el coeficiente de correlación entre las variables  $i$  y  $j$  vale:

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}(\emptyset)}{\sqrt{C_{ii}(\emptyset) C_{jj}(\emptyset)}} = \rho_{ji}$$

### 2.5.2. Ergodicidad

Como se expuso anteriormente, en el estudio de variables geológicas es muy frecuente disponer de una única realización de la función aleatoria estacionaria que representa dicha variable. En estas circunstancias resulta interesante conocer cuales son las condiciones necesarias para que los parámetros que se calculan de una única realización coincidan con los parámetros que se calculan de un elevado número de realizaciones. Estas condiciones se conocen como condiciones de ergodicidad y así, un proceso estocástico se denomina ergódico si sus medias de conjunto (muchas realizaciones) son iguales a medias espaciales apropiadas (una realización).

Se puede demostrar que la condición suficiente para que una función aleatoria estacionaria sea ergódica con respecto a la esperanza matemática es que la función de correlación tienda a cero cuando el argumento tiende a infinito, PUGACHEV (1973), PAPOULIS (1984).



$$\lim_{h \rightarrow \infty} C(h) = 0$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(h)| dh < \infty$$

Para juzgar acerca de la ergodicidad de una función aleatoria estacionaria con respecto a la función correlativa, es suficiente con conocer el momento de orden cuarto de la función aleatoria. En particular, si la función aleatoria estacionaria está distribuida normalmente, se puede mostrar (PUGACHEV, 1973) como la condición suficiente de ergodicidad para la función correlativa, y por consiguiente ergodicidad con respecto a la varianza, es la misma condición vista con anterioridad para la ergodicidad con respecto a la media.

## 2.6. FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

La relación manifiesta entre la estructura interna de un proceso aleatorio y la forma de la función covarianza correspondiente enlaza con el concepto de composición espectral de una función aleatoria.

Un proceso aleatorio estacionario se puede considerar como suma de oscilaciones armónicas donde las amplitudes de las oscilaciones son variables aleatorias.

El espectro de un proceso aleatorio es una función que da la distribución de las amplitudes para las diferentes frecuencias. Del mismo modo, el espectro de una función aleatoria estacionaria describe como se distribuyen las varianzas para las distintas frecuencias.



Se puede considerar así una nueva característica de las funciones aleatorias estacionarias como es su función de densidad espectral  $S(\omega)$ , que representa la densidad de probabilidad de la varianza según las frecuencias, VENTSEL (1973), (figura II.2)

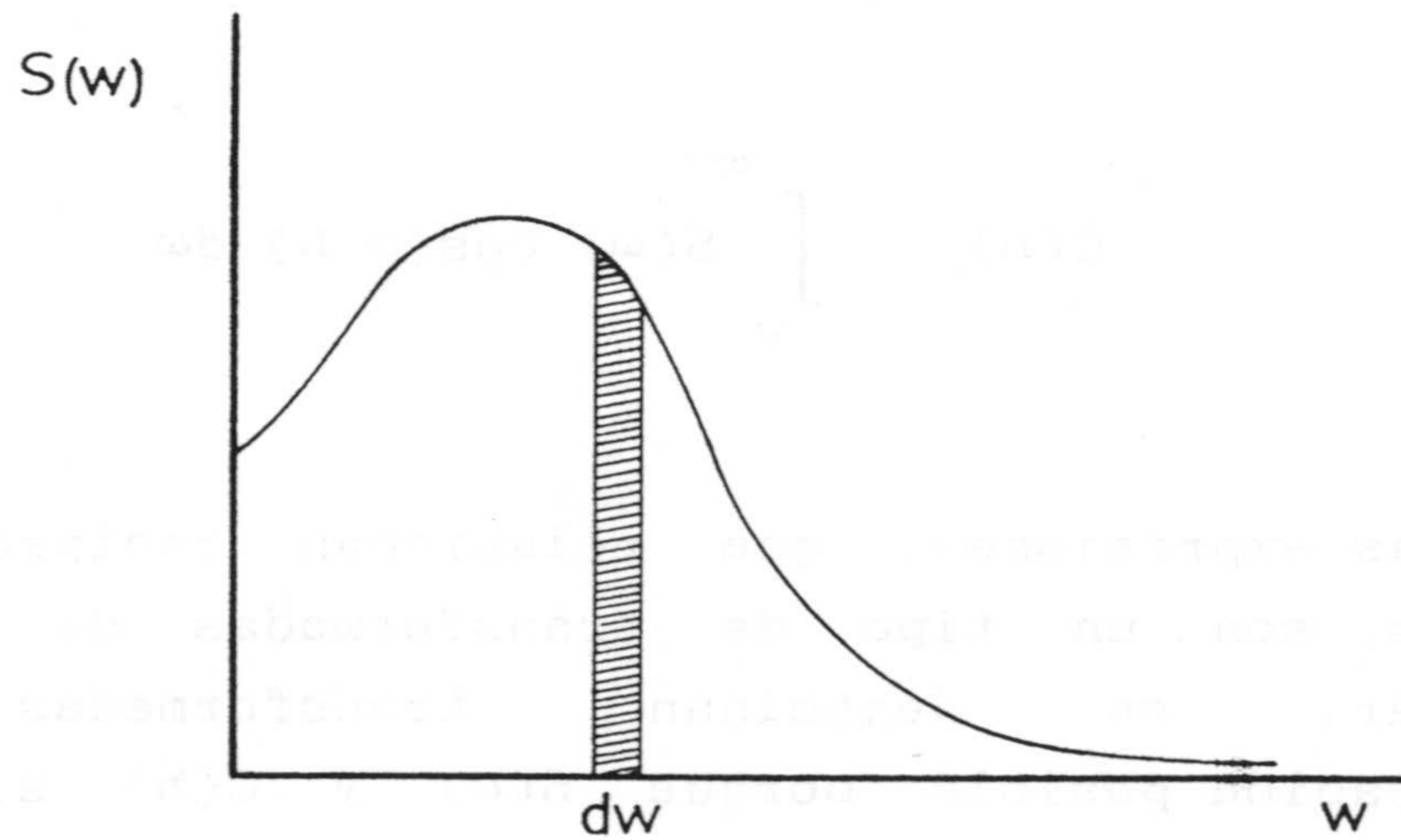


Figura II.2. Función de densidad espectral  $S(\omega)$ .

La superficie limitada por  $S(\omega)$  es igual a la varianza de la función aleatoria  $Z(x)$ .

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

La función de densidad espectral está enteramente determinada por la función covarianza del proceso estudiado según la relación:



$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C(h) \cos(\omega h) dh$$

Y la función de covarianza también se puede obtener a partir de la función de densidad espectral:

$$C(h) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega$$

Ambas expresiones, que relacionan reciprocamente dos funciones, son un tipo de transformadas de Fourier; en particular, se denominan transformadas cosenos, simplificación posible porque  $S(\omega)$  y  $C(h)$  son funciones pares.

En el ámbito multivariable, para cada pareja de funciones aleatorias estacionarias  $(Z_i, Z_j)$  con función de correlación cruzada  $C_{ij}(h)$  se puede definir la función de densidad espectral cruzada:

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(h) e^{-i\omega h} dh$$

y reciprocamente:

$$C_{ij}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\omega) e^{i\omega h} d\omega$$



La función de densidad espectral cruzada da la repartición de la correlación entre dos funciones aleatorias en función de la frecuencia.

Por las propiedades enunciadas anteriormente para los momentos cruzados, se tiene que:

$$S_{ij}(\omega) = S_{ji}^*(\omega)$$

donde:

\* : complejo conjugado.

## 2.7. REGULARIZACION o PROCESOS INTEGRADOS.

En la práctica, se presenta frecuentemente el caso de trabajar sobre valores medios de la función aleatoria  $Z(x)$  sobre un soporte físico  $v(x)$  centrado en el punto  $x$  (figura II.3).

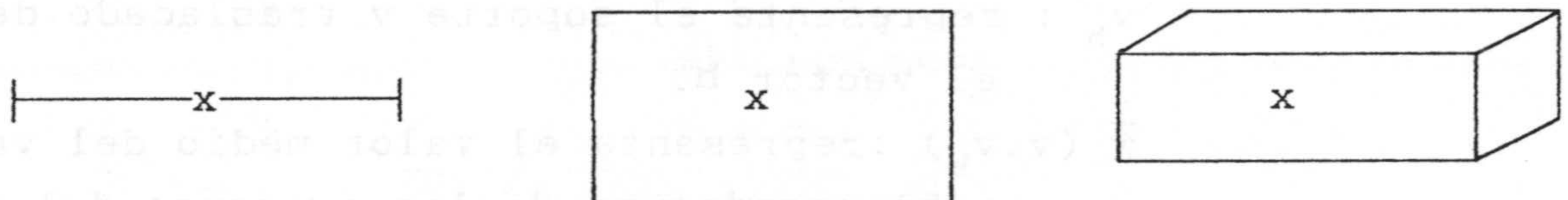


Figura II.3. Ejemplos de soportes en una, dos y tres dimensiones.



El valor medio  $z_v(x)$  de la función aleatoria puntual  $Z(y)$  sobre el soporte  $v(x)$ , esto es:

$$z_v(x) = \frac{1}{v} \int_{v(x)} z(y) dy$$

se denomina valor regularizado para el soporte  $v(x)$ , y la función aleatoria  $Z_v(x)$  se denomina función aleatoria regularizada, función aleatoria de procesos medios o proceso estocástico integrado.

En particular, si la función aleatoria puntual  $Z(y)$  es estacionaria de segundo orden, con esperanza matemática  $m$  y función de covarianza  $C(h)$ , o variograma  $\gamma(h)$ , la regularización de esta función aleatoria sobre el soporte  $v(x)$  es también una función aleatoria estacionaria de segundo orden con la misma esperanza  $m$  y variograma (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978):

$$\gamma_v(h) = \bar{\gamma}(v, v_h) - \bar{\gamma}(v, v)$$

donde:

$v_h$  : representa el soporte  $v$  trasladado desde  $v$  por el vector  $h$ .

$\bar{\gamma}(v, v_h)$  : representa el valor medio del variograma  $\gamma(h)$  cuando uno de los extremos del vector  $h$  describe el soporte  $v$  y el otro extremo describe independientemente el soporte  $v_h$ .

En la práctica, para distancias de  $h$  muy grandes en comparación con las dimensiones del soporte  $v$ , el valor medio  $\bar{\gamma}(v, v_h)$  es muy próximo al valor  $\gamma(h)$ , con lo que:



$$\gamma_v(h) \simeq \gamma(h) - \bar{\gamma}(v,v) \quad ; h \gg v$$

Si los datos puntuales tienen varianza experimental  $\text{Var}\{Z(\mathbf{y})\} = C(\emptyset)$ , la varianza experimental regularizada  $C_v(\emptyset)$  y la covarianza regularizada  $C_v(h)$ , se pueden escribir en términos de la covarianza puntual  $C(h)$ :

$$\text{Var}\{Z_v(\mathbf{x})\} = C_v(\emptyset) = \bar{C}(v,v)$$

De este modo, si el variograma experimental es del tipo de transición, con un valor meseta igual a la varianza experimental  $\gamma(\infty) = C(\emptyset) = \text{Var}\{Z(\mathbf{y})\}$ , el variograma regularizado  $\gamma_v(h)$  es también del tipo de transición con un valor de meseta igual a la varianza experimental regularizada.

$$\gamma_v(\infty) = C_v(\emptyset) = \text{Var}\{Z_v(\mathbf{x})\}$$

### 3. ANALISIS VARIOGRAFICO

Como se dijo anteriormente, el variograma describe desde un punto de vista estadístico la estructuración de la variabilidad espacial del fenómeno regionalizado.

Dicha función variograma, en general, no se conoce a priori por lo que es preciso inferirla estadísticamente en base a la información experimental disponible.

El llamado análisis variográfico, etapa primera y



fundamental en todo estudio geoestadístico, tiene por objetivo modelizar la estructura de variabilidad espacial de los datos experimentales para lo cual se sigue un proceso clásico en tres etapas:

- 1) Cálculo del variograma experimental.
- 2) Ajuste de un modelo teórico al variograma experimental, previamente calculado.
- 3) Validación del modelo teórico ajustado. Si la validación no resulta satisfactoria se vuelve a la etapa anterior.

El cálculo del variograma experimental depende directamente de la información experimental disponible, constituida por un conjunto de datos experimentales procedentes de una serie de mediciones de una o varios parámetros del fenómeno geológico. Los factores referentes a la información experimental que más influyen en el cálculo del variograma experimental son *PARDO (1989)*:

- 1). Número de datos experimentales.
- 2). Disposición espacial de los puntos experimentales.
- 3). "Outliers" o datos extremos.
- 4). Transformación (logarítmica, gaussiana, ...) de los datos experimentales.

Para la estimación del variograma:



$$\gamma(h) = \frac{1}{A} \int_A [Z(x+h) - Z(x)]^2 dx$$

por la aproximación discreta:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2 NP(h)} \sum_{i=1}^{NP(h)} [Z(x_i+h) - Z(x_i)]^2$$

es fundamental que  $NP(h)$ , número de parejas formadas entre datos experimentales a una distancia  $h$ , sea alto para obtener una buena estimación de  $\gamma(h)$ , *JOURNEL y HUIJBREGTS (1978)*.

En cuanto a la disposición espacial de los datos experimentales, la situación más favorable es que los puntos experimentales se repartan de modo homogéneo, cubriendo todo el área de prospección. *MUÑOZ-PARDO (1987)* muestra como la malla de muestreo regular cuadrada es óptima para la inferencia de la media, varianza y variograma de una función aleatoria, en el sentido de que los errores de estimación (valor regional menos valor experimental) tienen esperanza matemática próxima a cero y la varianza de estimación es la más pequeña para las estrategias de muestreo más habitualmente empleadas en la práctica.

Un efecto indeseable y desgraciadamente frecuente cuando la campaña de muestreo no se ha planificado optimamente, es la presencia de agrupaciones o clusters de datos experimentales, que hacen que un área esté muestreada con gran densidad en detrimento de otras áreas submuestreadas.

Es asimismo frecuente que el espaciado entre los datos



sea irregular y que no estén alineados en una dirección. Por esto para el cálculo práctico de  $\gamma(h)$  hay que operar dando un paso  $h$  con una holgura tanto de distancia como de ángulo, CHICA-OLMO (1987).

Para paliar el efecto de los clusters se pueden utilizar diferentes técnicas de desagrupación, DAVID (1988), DEUTSCH (1989).

Por otra parte la inspección de los valores experimentales y la interpretación de su significado físico puede llevar a considerar a determinados datos como extremadamente grandes (outliers) por lo que pudieran deberse a un error de medida o bien a una realización muy poco probable.

En el trabajo de KRIGE y MAGRI (1982) se muestra como la presencia de outliers cuando el número de datos es pequeño, enmascara la estructura del variograma y resulta crítica su eliminación para que la estructura se muestre con claridad. Cuando el número de datos experimentales es muy grande, la eliminación de outliers no conlleva una mejora significativa en la estructura del variograma ya que su efecto de distorsión se minimiza al formarse un gran número de parejas para calcular  $\gamma(h)$ .

En determinadas aplicaciones, como en prospección geoquímica o metales preciosos, los outliers son precisamente el objetivo de la investigación. Para el cálculo del variograma se puede utilizar una transformación de los valores experimentales, como por ejemplo la transformación logarítmica, o bien cabe la posibilidad de utilizar estimadores robustos del variograma (CRESSIE y HAWKINS, 1982; SRISVASTAVA y PARKER, 1988).

En lo referente a la segunda etapa del análisis variográfico, es necesario por razones de consistencia matemática ( $\gamma(h)$  es una función positiva definida) encontrar



un modelo teórico de variograma que resulte operativo en las diferentes operaciones geoestadísticas.

En *JOURNEL* y *HUIJBREGTS* (1978) se presentan los modelos de variograma más usuales en la práctica geoestadística.

Entre los modelos más interesantes destacan (figura II.4):

### 1. Comportamiento lineal en el origen.

Modelo esférico.

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \left[ \frac{3h}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right] & h \in [0, a] \\ \sigma^2 & h \geq a \end{cases}$$

Modelo exponencial

$$\gamma(h) = \sigma^2 [1 - \exp(-h/a)]$$

### 2. Comportamiento parabólico en el origen.

Modelo gaussiano

$$\gamma(h) = \sigma^2 [1 - \exp(-h^2/a^2)]$$



### 3. Modelo aleatorio puro.

$$\text{Efecto de pepita} = \sigma_0^2$$

Además de los modelos anteriores, válidos en una, dos y tres dimensiones cabe considerar otros modelos válidos en una dimensión como :

Modelo triangular

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 (h/a) & h \in [0, a] \\ \sigma^2 & h > a \end{cases}$$

Asimismo, en el análisis de series unidimensionales, especialmente las temporales, es muy frecuente la presencia de periodicidades que se manifiestan en el variograma por el denominado "efecto pozo" (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978).

Para modelizar el efecto pozo he considerado dos modelos teóricos:

Modelo pozo I (figura II.5)

$$\gamma(h) = \sigma^2 (h/a) \exp(-h/a)$$

Modelo pozo II (figura II.6 y II.7)

$$\gamma(h) = \sigma^2 (1 - \exp(-h/a) \cos(hb))$$



Donde la función coseno es la función que imprime el caracter oscilante y la función exponencial tiene un efecto amortiguador. La gráfica del variograma varia según domine el efecto oscilante (figura II.6) o el efecto amortiguador (figura II.7. donde se compara con un modelo esférico).

En las expresiones anteriores:

$\gamma(h)$  : función variograma;  $h$  : paso el variograma.  
 $a$  : alcance;  $\sigma^2$  : meseta o varianza experimental.  
 $\sigma_0^2$  : valor del efecto de pepita;  $b$  : constante.

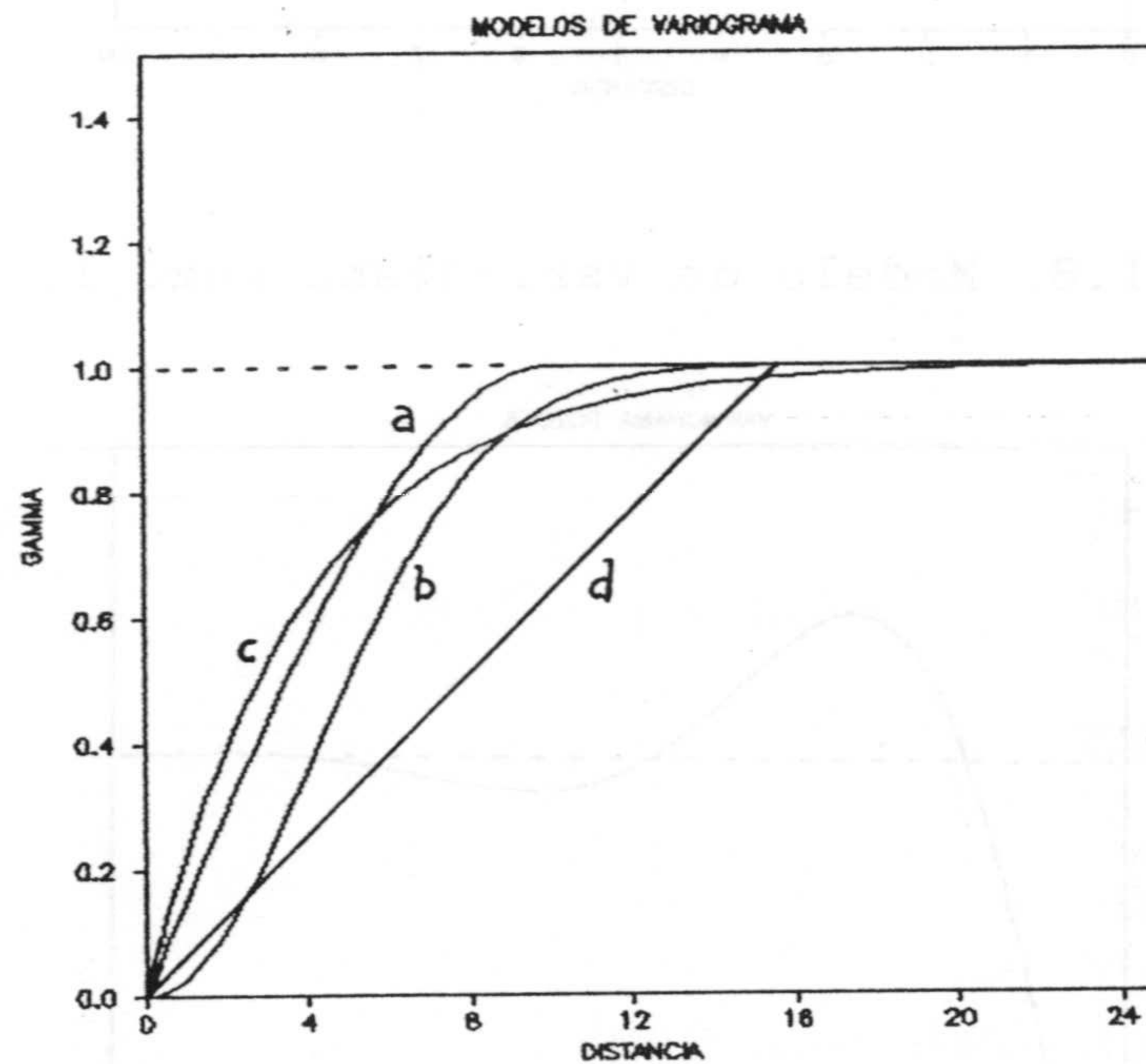


Figura II.5. Modelos más frecuentes de variograma.  
a. Esférico. b. Gausiano. c. Exponencial.  
d. Triangular.



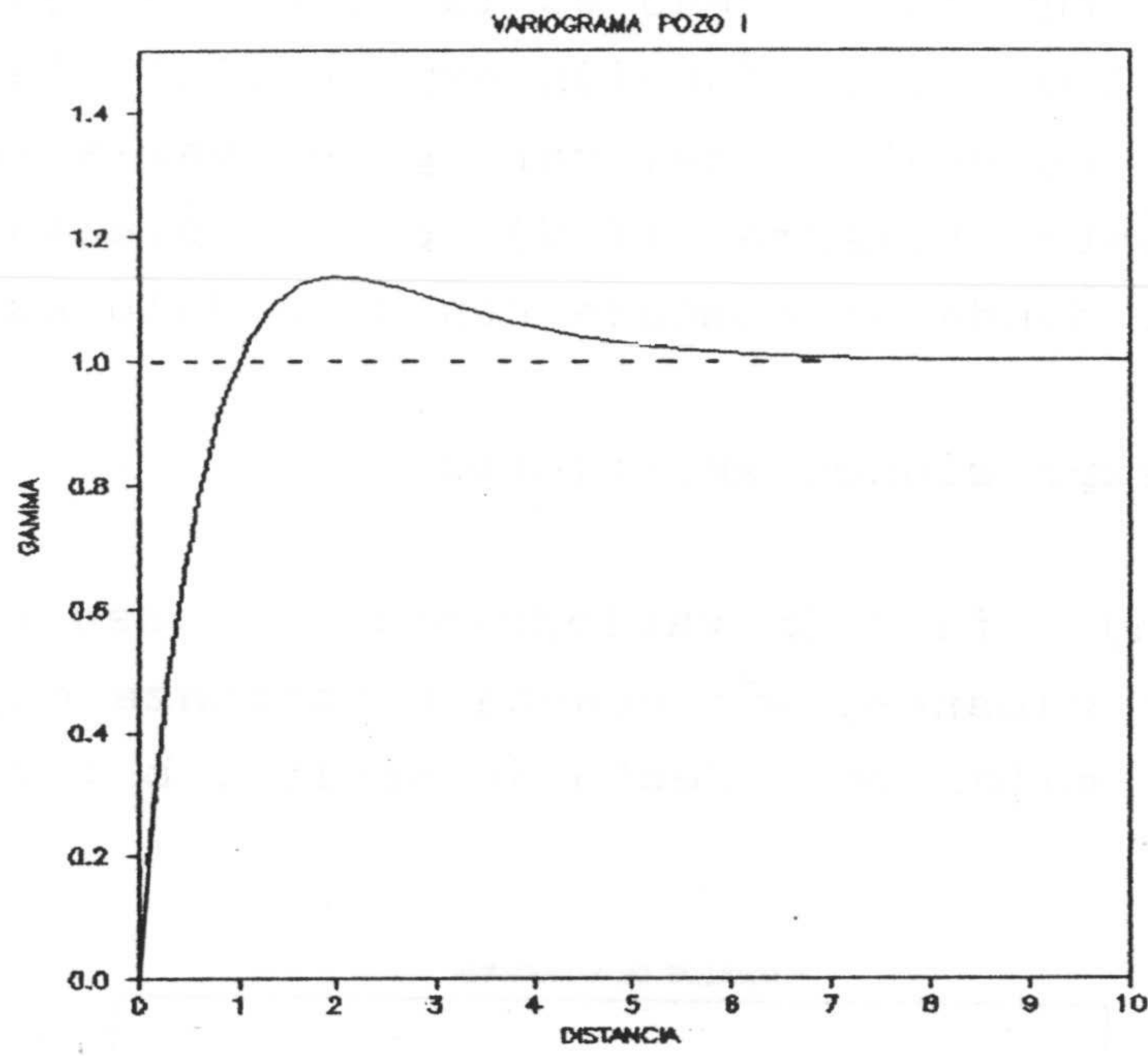


Figura II.6. Modelo de variograma pozo I. ( $\sigma^2 = 1$ ,  $a = 1$ ).

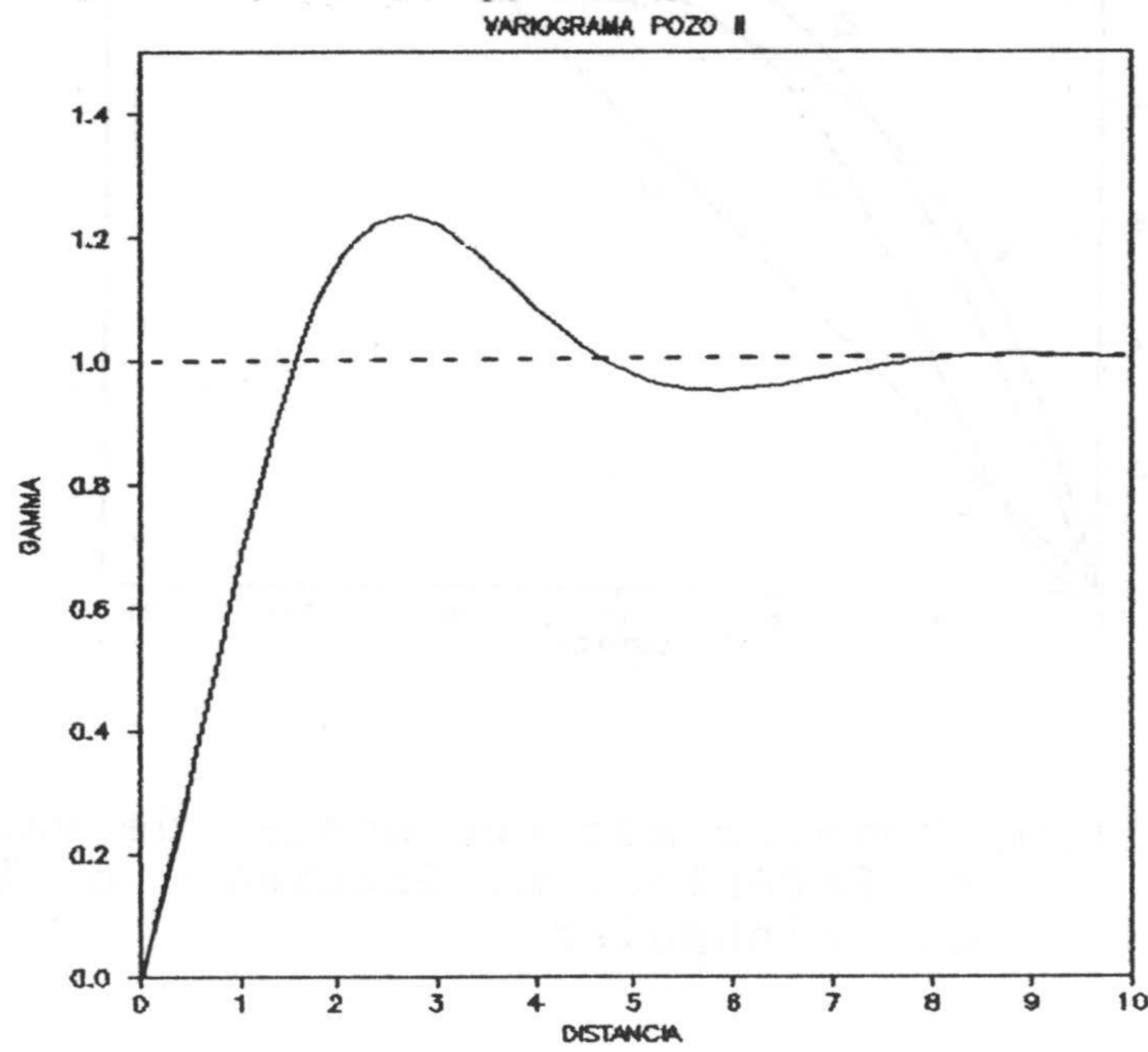


Figura II.6. Modelo de variograma pozo II.  $\sigma^2 = 1$ .  $a = b = 1$ .



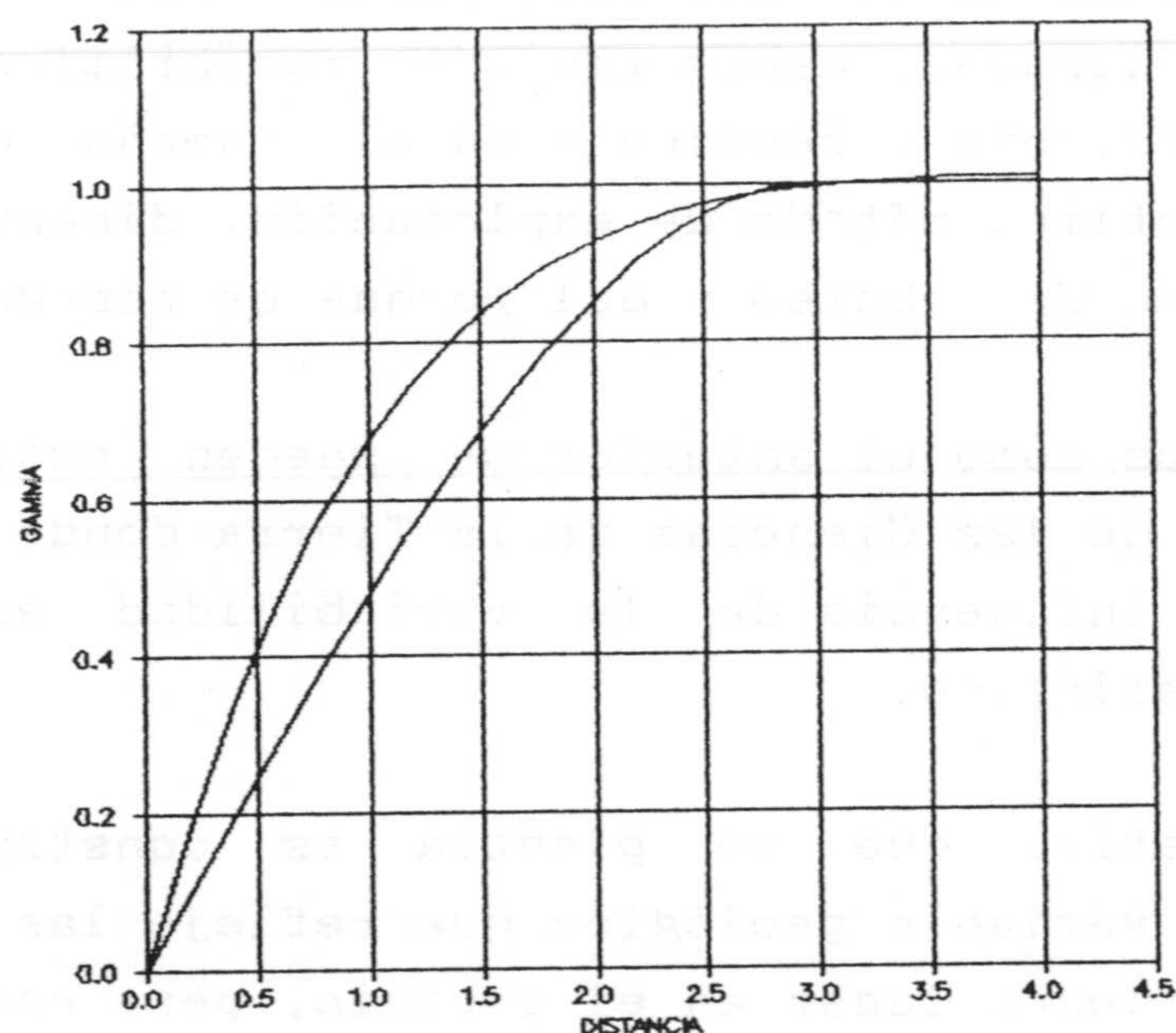


Figura II.7. A. Modelo de variograma pozo II.  
 $\sigma^2 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.5$  B. Esférico.

Por último, el variograma experimental no siempre presenta una estructura clara y fácil de modelar, pudiendo incluso existir duda entre varios modelos que parecen a priori se correctos y entre los que hay que discernir. Para decidir de un modo más objetivo sobre qué modelo representa mejor la estructura de variabilidad, se emplea el método conocido de validación cruzada, si bien su interés principal está en las aplicaciones, CHUA y BRAS (1980), PARDO (1989).

#### 4. SIMULACION CONDICIONAL GEOESTADISTICA

Cuando se diseña un proyecto minero para una explotación, uno de los principales problemas consiste en



efectuar una previsión de la dispersión que van a tener las características de la mineralización. Esta fluctuación de leyes mineralizadas, espesores de recubrimiento, espesores mineralizados, etc., repercute en el tamaño del bloque de selección óptimo, método de explotación, dimensionamiento de la maquinaria de laboreo y del parque de homogenización, ...

Ejemplos como el anterior se pueden extraer de otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra donde es interesante examinar la influencia de la variabilidad espacial de un parámetro geológico.

El objetivo que se plantea es construir un modelo numérico de variable geológica que refleje las fluctuaciones reales que tienen lugar en el espacio, pero con la ventaja de que, a diferencia de la realidad que sólo se conoce en los puntos experimentales, el modelo simulado se conoce en todos los puntos del espacio.

Lo primero que es interesante destacar es que las técnicas de estimación no son adecuadas para tratar este tipo de problemas. En efecto, un valor estimado no es un valor real, sino que, en una localización determinada, la estimación da el valor más probable, por lo tanto la variabilidad que existe entre valores estimados es menor a la variabilidad entre datos reales. La estimación efectúa un alisado de la realidad.

Incluso el krigeaje, que es un método de estimación óptimo (insesgado, preciso y con varianza de estimación mínima), tiene un efecto de alisado de modo que dicha estimación no refleja las fluctuaciones reales.

$$D_k^2(v, G) \leq D^2(v, G)$$



$D^2(v,G)$  : valor verdadero de la varianza de la ley de bloque  $v$  en  $G$ .

$D_K^2(v,G)$  : varianza de los valores estimados.

Como consecuencia el histograma de los valores krigeados tiene más valores en torno a la media y menos valores extremos que el histograma de las leyes verdaderas.

Desechados los métodos de estimación, queda claro que se debe buscar una metodología nueva para construir realizaciones  $z(x)$  de una función aleatoria  $Z(x)$  que cumplan las siguientes características:

La media de los valores simulados coincide con la media obtenida de los datos experimentales.

$$E\{Z_s(x)\} = E\{Z(x)\}$$

Las varianzas son asimismo coincidentes.

$$\sigma_s^2 = \sigma^2$$

El variograma de los datos simulados es coincidente con el variograma de los datos experimentales, lo que asegura un mismo modelo de variabilidad espacial.

$$\gamma_s(h) = \gamma(h)$$



El histograma de los datos simulados es similar al histograma de los datos experimentales.

$$F_s(z) = F(z)$$

Además de las características precedentes, se va a imponer un condicionamiento del modelo a los valores experimentales; es decir, en un punto experimental, el valor simulado y el valor experimental coinciden.

$$z_s(x) = z(x) \quad \forall x \in \text{Información}$$

Las etapas que es preciso cubrir para obtener el modelo numérico simulado partiendo de la información experimental, son clásicas y se resumen a continuación (figura II.8):

- 1). Análisis variográfico experimental y tratamiento estadístico.
- 2). Operación de anamorfosis inversa y análisis variográfico sobre los datos gaussianos.
- 3). Simulación no condicional.
- 4). Condicionamiento de la simulación con respecto a los valores experimentales.
- 5). Restitución del histograma experimental.

La investigación realizada hace especial referencia al punto 3 (capítulos III y IV).



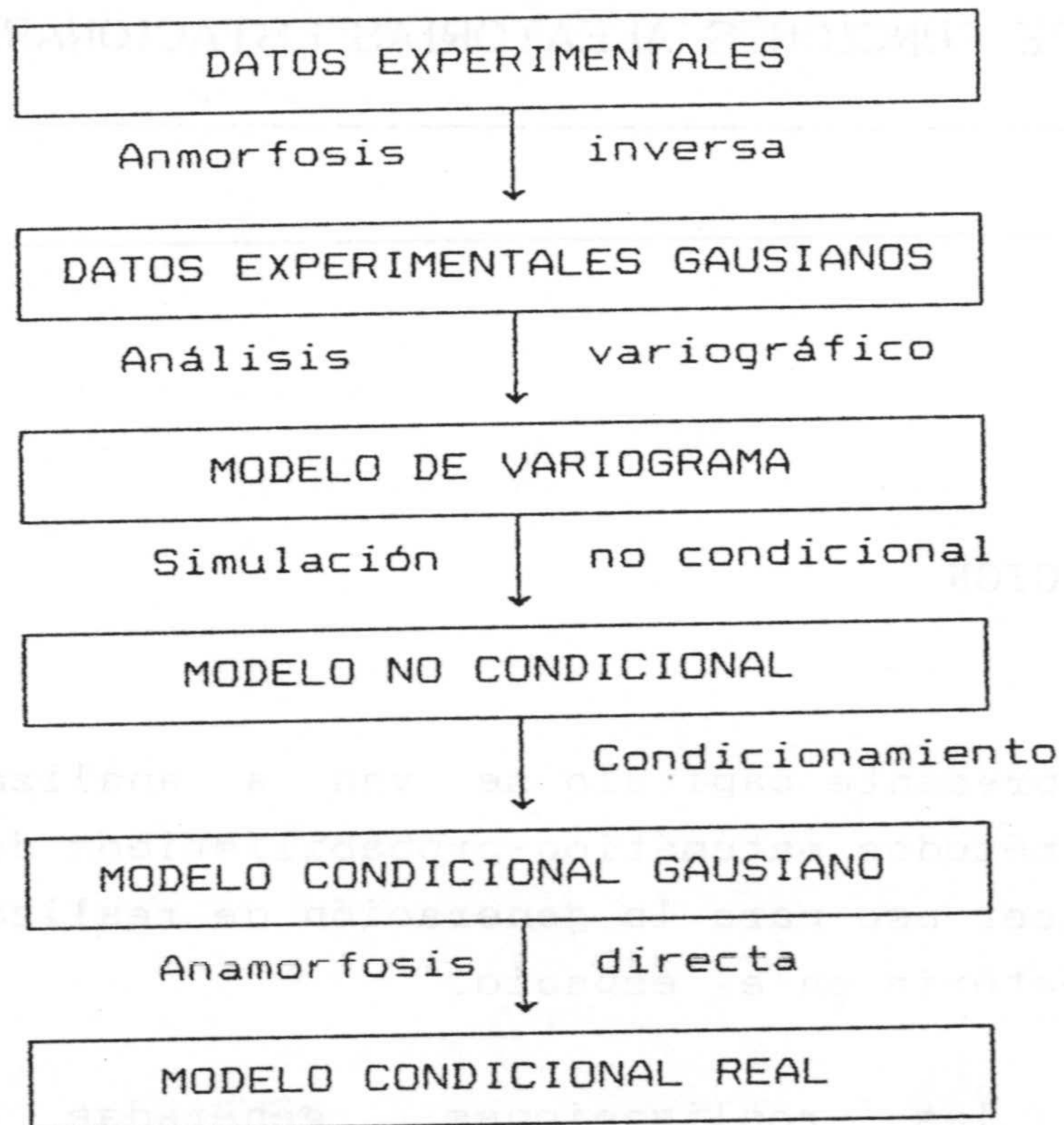


Figura II.8. Etapas básicas de la simulación condicional



CAPITULO III  
METODOS ESPECTRALES DE SIMULACION NO CONDICIONAL  
DE FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS

1. INTRODUCCION

En el presente capítulo se van a analizar diferentes técnicas y métodos matemático-probabilísticos de los cuales se puede hacer uso para la generación de realizaciones de una función aleatoria en el espacio.

Todas las realizaciones generadas tienen la particularidad de que cumplen determinadas propiedades estadísticas que se enunciarán seguidamente pero, en los puntos de información, el valor simulado no tiene porqué coincidir con el valor experimental observado, sólo es una cuestión del azar el que coincidan, de ahí el calificativo que se atribuye a estas realizaciones de no condicional.

Sea  $Z(x)$  la función aleatoria a simular, donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son las coordenadas de un punto en el espacio considerado. Para variables geológicas que es el dominio de aplicación por el que nos interesamos el valor de  $n$  será siempre menor o igual a tres ( $n \leq 3$ ).

Las características que se desea que cumpla la función aleatoria a simular  $Z(x)$  y que se asumen en principio como hipótesis son las siguientes:



1). Se trata de una función aleatoria estacionaria e isótropa. La estacionaridad se considera de segundo orden, esto es, estacionaridad de covarianza y por consiguiente de varianza y media. La isotropía conlleva el que no existan direcciones preferentes de variabilidad, siendo esta la misma en todas las direcciones.

2). Los valores de la función aleatoria simulada siguen la función de distribución de probabilidad gaussiana centrada reducida  $N(0,1)$ .

3). Se conoce la función de covarianza  $C(h)$  o variograma  $\gamma(h)$  de la función aleatoria a simular.

Las técnicas empleadas en la generación de los valores simulados se pueden englobar en un apartado más general de métodos de simulación de Montecarlo, esto es, empleando números aleatorios o pseudoaleatorios. Todos los valores aleatorios se han obtenido a partir de números al azar que siguen una distribución uniforme en el intervalo  $(0,1)$ . Dichos valores uniformemente distribuidos se han producido mediante el generador de *SCHRAGE* (1979); un chequeo de dichos números pseudoaleatorios se puede encontrar en el anexo I.

## 2. SIMULACION UNIDIMENSIONAL

La simulación de una función aleatoria en un espacio unidimensional tiene una doble importancia; por un lado como tal simulación unidimensional permite generar realizaciones a lo largo de un perfil o de un sondeo o generar una serie temporal, etc., por otro lado, como se comentará posteriormente, las simulaciones unidimensionales se pueden componer de algún modo determinado con el fin de obtener realizaciones bi- y tridimensionales.

Para la simulación de un proceso unidimensional con



covarianza impuesta  $C(h)$  existen en teoría de procesos estocásticos diferentes métodos probabilísticos que se pueden agrupar en dos apartados básicos:

- 1). Técnicas en el dominio del espacio (o tiempo).
- 2). Técnicas en el dominio de la frecuencia o técnicas espectrales.

Antes de pasar a la descripción de dichas metodologías, es conveniente decir que el control de la calidad del generador lo he hecho considerando un número elevado de simulaciones ( en particular he tomado 100 ); se comparan los estadísticos teóricos con los estadísticos medios de las 100 realizaciones. Adicionalmente se calcula la varianza de dichos estadísticos con respecto a su valor medio. Para el variograma se calcula el coeficiente de variación con el fin de normalizar su varianza para diferentes pasos.

A medida que aumenta el número de simulaciones los estadísticos medios de las realizaciones tienden a parecerse más a los teóricos, no obstante me he limitado a considerar siempre 100 realizaciones para establecer los estadísticos de conjunto y poder comparar diferentes generadores.

Si se analiza una única realización se corre el riesgo de que la función covarianza simulada esté afectada por la generación de números aleatorios; al considerar un número elevado de simulaciones las distorsiones motivadas por el efecto de los números aleatorios se compensa y los estadísticos experimentales tienden hacia los teóricos.

Por otra parte, cuanto menor es el coeficiente de variación del variograma medio de las 100 simulaciones implica que mayor es la probabilidad de que ,al tomar una única realización al azar, las diferencias entre valores teóricos y valores simulados sean menores.



## 2.1. Técnicas en el dominio del espacio

Las realizaciones unidimensionales se producen directamente a partir de la función de covarianza del proceso.

Dentro de este dominio la técnica más extendida en Geoestadística consiste en expresar la función de covarianza como el producto de convolución de una función  $f(v)$  y su función traspuesta  $f(-v)$ , tomada de modo adecuado, *JOURNAL* (1974 a, b):

$$C_1(r) = \int_{\mathbb{R}^1} f(v) f(v+r) dv$$

El proceso unidimensional se simula como un proceso de medias móviles (MA) con una función de ponderación  $f(v)$ :

$$z(t) = \sum_{k=-N}^N f(k \Delta t) u(t+k)$$

donde  $u(t+k)$  son realizaciones independientes a intervalos regulares  $\Delta t$  de variables aleatorias  $U(t)$  con la misma distribución de media cero y varianza conocida.

El número de términos finito, en el proceso de medias móviles, se debe a razones de operatividad y a que, en la práctica, la función de ponderación  $f(v)$  tiende a cero cuando el argumento  $v$  tiende a infinito.

El principal inconveniente del método de medias móviles radica en calcular la función de ponderación  $f(v)$ . El cálculo



analítico es muy complicado cuando la expresión de la función de covarianza es muy compleja y se han propuesto métodos numéricos alternativos, *BLACK* y *FREYBERG* (1990).

En un apartado posterior se muestra que el método de medias móviles se puede asimilar al paso de un ruido blanco (proceso aleatorio puro) a través de un filtro y puede resolverse sencillamente si se trabaja en el dominio de la frecuencia.

Otra técnica de simulación en el dominio del espacio consiste en utilizar un proceso autorregresivo (AR), *SHARP* (1982), *SHARP* y *AROAIN* (1985), *CHRISTAKOS* (1987), *SEN* (1990):

$$z(t) = \sum_{j=1}^k a_j z(t-j) + w_t$$

donde:

- $a_j$  : coeficientes.
- $w_t$  : valores gaussianos de media cero y varianza dada.

El estado  $\{z(t-j); j = t-1, t-2, \dots, t-k\}$  se debe determinar antes de que comience la recursión.

También cabe la posibilidad de utilizar conjuntamente procesos autorregresivos y de medias móviles (ARMA).

Aunque mediante procesos AR y ARMA se pueden generar una amplia variedad de variogramas, *SHARP* (1982), esta metodología presenta dos inconvenientes principales:

1). Se introducen periodicidades que se muestran notoriamente al representar el variograma simulado.



2). No es inmediato generar los modelos de covarianza más usuales en la práctica geoestadística (esférico, exponencial, gaussiano, pozo) con un control del alcance (longitud de correlación) en función de los parámetros del modelo (coeficientes  $a_j$ ).

Esta metodología es adecuada para la generación de modelos ARMA en el análisis de series temporales, BRAS y RODRIGUEZ-ITURBE (1984).

Para finalizar con el repaso a las técnicas de simulación en el dominio del espacio, con mayor difusión en ámbito geoestadístico, mencionar el método de la descomposición LU de la matriz de covarianza, DAVIS (1983), ALABERT (1987), PARDO (1989). La principal limitación de este método es que el número de puntos a simular es relativamente pequeño.

## 2.2. Técnicas en el dominio de la frecuencia

Estas técnicas también son denominadas técnicas espectrales y el común denominador de todas ellas es que, de un modo u otro, utilizan el concepto de función de densidad espectral. La función de densidad espectral, como se comentó, es la transformada de Fourier de la función covarianza y representa, para funciones aleatorias estacionarias, la repartición de la varianza en función de la frecuencia.

### 2.2.1. Método de SHINOZUKA (1970).

Este método ha sido aplicado especialmente en hidrología por MEJIA y RODRIGUEZ-ITURBE (1974), BRAS y RODRIGUEZ-ITURBE (1976), y consiste en expresar el valor simulado por una



serie de funciones coseno de igual amplitud:

$$z(x) = \sigma \left( \frac{2}{N} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k x + \phi_k)$$

donde:

$z(x)$  : valor numérico simulado en el punto  $x$ .

$\sigma^2$  : varianza del proceso.

$N$  : número de armónicos utilizado.

$\omega_k$  : ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) frecuencia correspondiente al  $k$ -ésimo armónico.

$\phi_k$  : ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) ángulos aleatorios uniformemente distribuidos entre  $0$  y  $2\pi$ .

Aunque todas las oscilaciones armónicas del generador tienen la misma amplitud, las frecuencias  $\omega_k$  no tienen una distribución uniforme sino que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según un modelo probabilístico con función de densidad de probabilidad igual a la función de densidad espectral normalizada.

Las variables aleatorias  $\omega_k$  y  $\phi_l$  ( $k, l = 1, 2, \dots, N$ ) son independientes.

El Teorema Central del Límite asegura la normalidad de  $z(x)$ .

La autocorrelación temporal tiene la expresión, SHINOZUKA (1970):

$$C(h) = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k h)$$



Aunque la función covarianza aparece como una serie de funciones coseno, no es periódica ya que las frecuencias no están tomadas a intervalos regulares.

La aleatoriedad de la simulación está dada por los ángulos de fase inicial  $\phi$ ; para obtener diferentes realizaciones de una función aleatoria con la misma covarianza, resulta suficiente modificar dichos ángulos.

Las desventajas de este método son:

1). El proceso es asintóticamente ergódico sólo cuando el número de armónicos  $N$  tiende a infinito; para obtener resultados aceptables, el número de armónicos ha de ser como mínimo igual a 500, SHINOZUKA (1970).

2). La función de covarianza simulada converge muy lentamente, como  $1/\sqrt{N}$ , hacia la covarianza teórica, MANTOGLOU y WILSON (1982).

3). La metodología requiere cálculos adicionales al conocimiento de la función de densidad espectral; así la función de distribución espectral  $\Phi(\omega)$  se expresa:

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S(v) dv = 1. - \int_{\omega}^{\infty} S(v) dv$$

donde  $S(v)$  es la función de densidad espectral normalizada y se asume que representa una función de densidad de probabilidad. Conocida la función de distribución espectral  $\Phi(\omega)$  es necesario generar valores aleatorios según dicha función de distribución.

Para chequeo de esta metodología he simulado 100 realizaciones de una serie de 1000 puntos con equidistancia



unidad e imponiendo una función de covarianza exponencial de alcance cuatro unidades y meseta igual a uno.

$$C(h) = \sigma^2 e^{-h/a}$$

donde:

$\sigma^2$ : varianza.

h : distancia.

a : alcance o longitud de correlación.

La función de densidad espectral correspondiente a un modelo de covarianza exponencial vale (VENTSEL, 1973):

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{b}{b^2 + \omega^2}$$

donde:

b = 1/a : inverso del alcance

$\omega$  : frecuencia en radianes por unidad de medida espacial.

Operando, he llegado a la siguiente expresión para la función de distribución espectral:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan \left[ \frac{\omega}{b} \right]$$

Para generar variables aleatorias según dicha función de distribución se ha utilizado el método de transformación inversa (LAW y KENTON, 1985) con:



$$W = b \tan [\pi (U - 0.5)]$$

donde:

$W$  : variable aleatoria con función de distribución de probabilidad  $\Phi(\omega)$ .

$U$  : variable aleatoria con función de distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $(0,1)$ .

En el generador se han utilizado 100 armónicos y los resultados de los valores medios de las 100 realizaciones se presentan en las figuras 3.1 y 3.2. La figura 3.1 representa el variograma medio simulado donde se observa como se reproducen perfectamente los primeros pasos y a medida que se va alcanzando la meseta, los valores simulados tienden a ser ligeramente superiores a los valores teóricos. La figura 3.2 representa el coeficiente de variación para cada paso del variograma experimental:

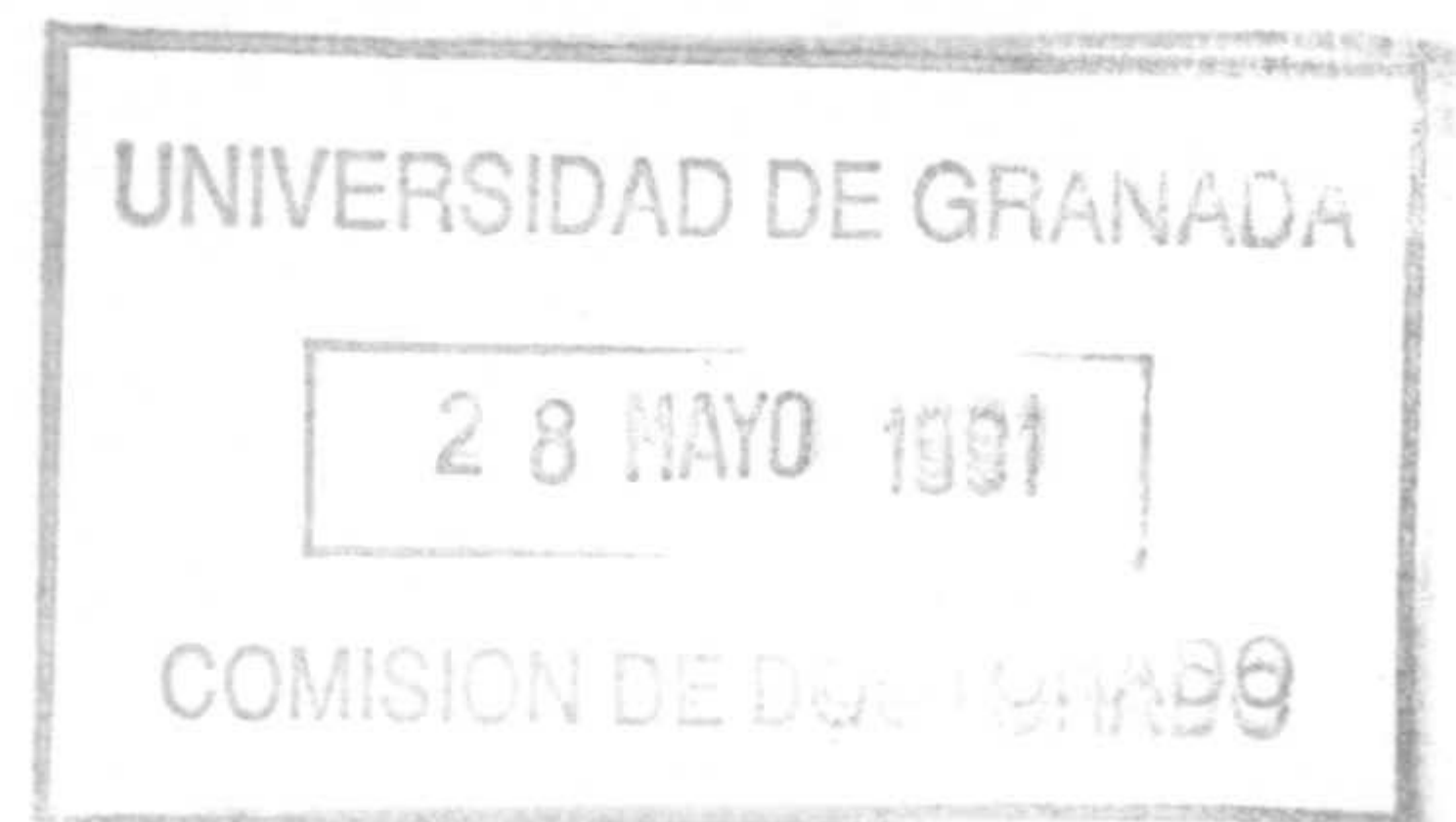
$$C.V.(h) = \frac{\sigma_{\gamma(h)}}{\gamma_m(h)}$$

donde:

$\gamma_m(h)$  : variograma medio de 100 realizaciones.

$\sigma_{\gamma(h)}^2$  : varianza del variograma medio.

donde es de destacar que los valores del coeficiente de variación se mantienen más o menos constantes en torno a un valor de 0.15 (15%), lo que comparado con el coeficiente de variación de otros generadores se puede considerar un valor alto. Este valor alto del C.V. implica que si se toma al azar una única realización, como es el caso de la representada en la figura 3.3, el variograma simulado prodrá tener desviaciones notorias con respecto al modelo teórico. En la tabla 3.I se presentan los resultados obtenidos para la media y varianza.





	MEDIA	VARIANZA
TEORICO	0.0	1.0
UNA REALIZACION	0.0151	0.9678
MEDIA DE CIEN REALIZACIONES	-0.0071	1.0121
VARIANZA DE CIEN REALIZACIONES	0.0076	0.0099

Tabla 3.I. Estadísticos teóricos y simulados.

En la figura 3.4 he representado la función de correlación simulada para un número de pasos muy grande con el fin de observar como se comporta el variograma simulado para grandes distancias; en particular la expresión de la función covarianza como una serie de funciones coseno prodría hacer pensar en periodicidades. En la figura se muestra como no existen periodicidades notorias al no estar tomadas las frecuencias a intervalos regulares.



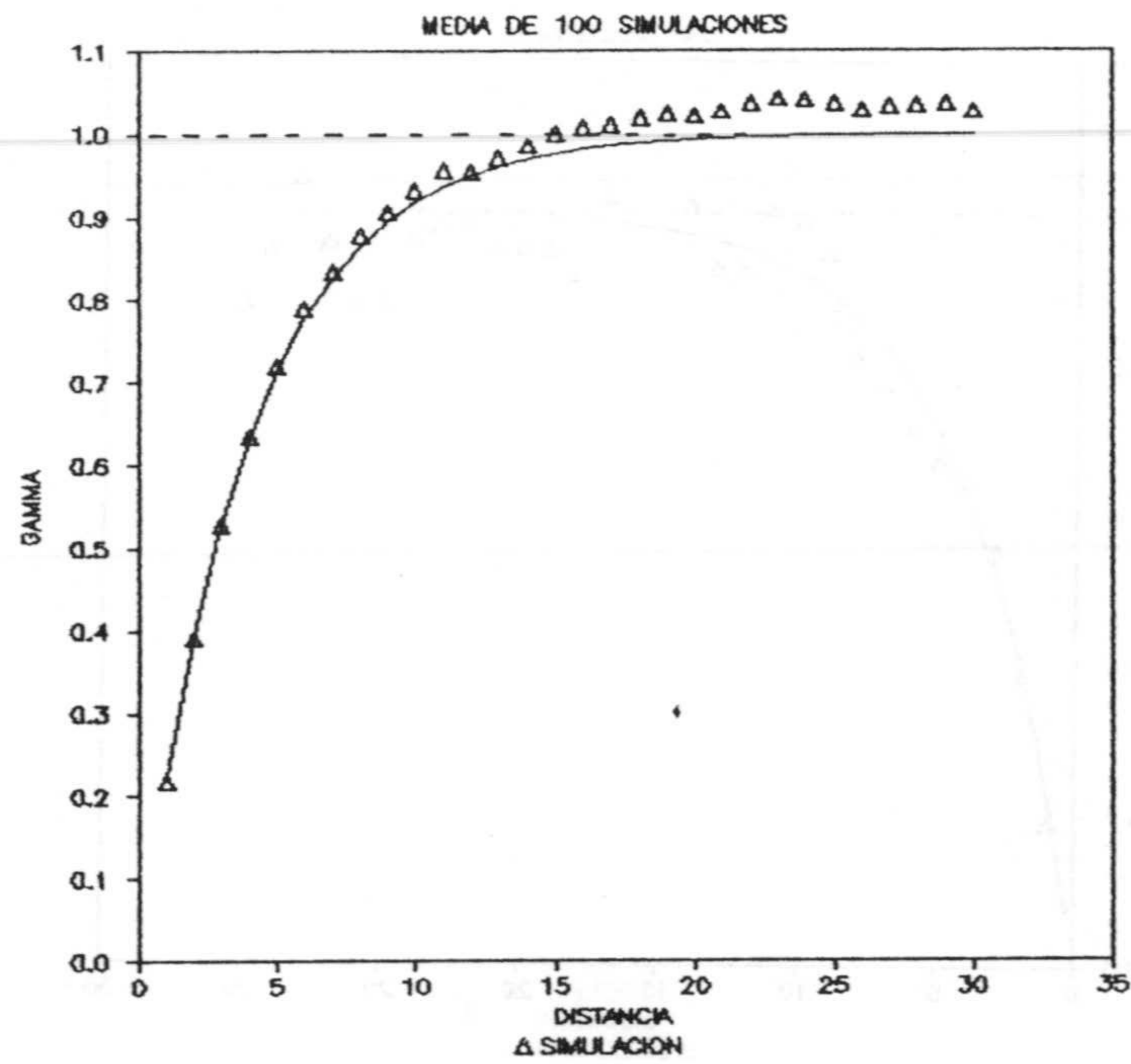


Figura 3.1. Variograma medio simulado en 100 realizaciones.

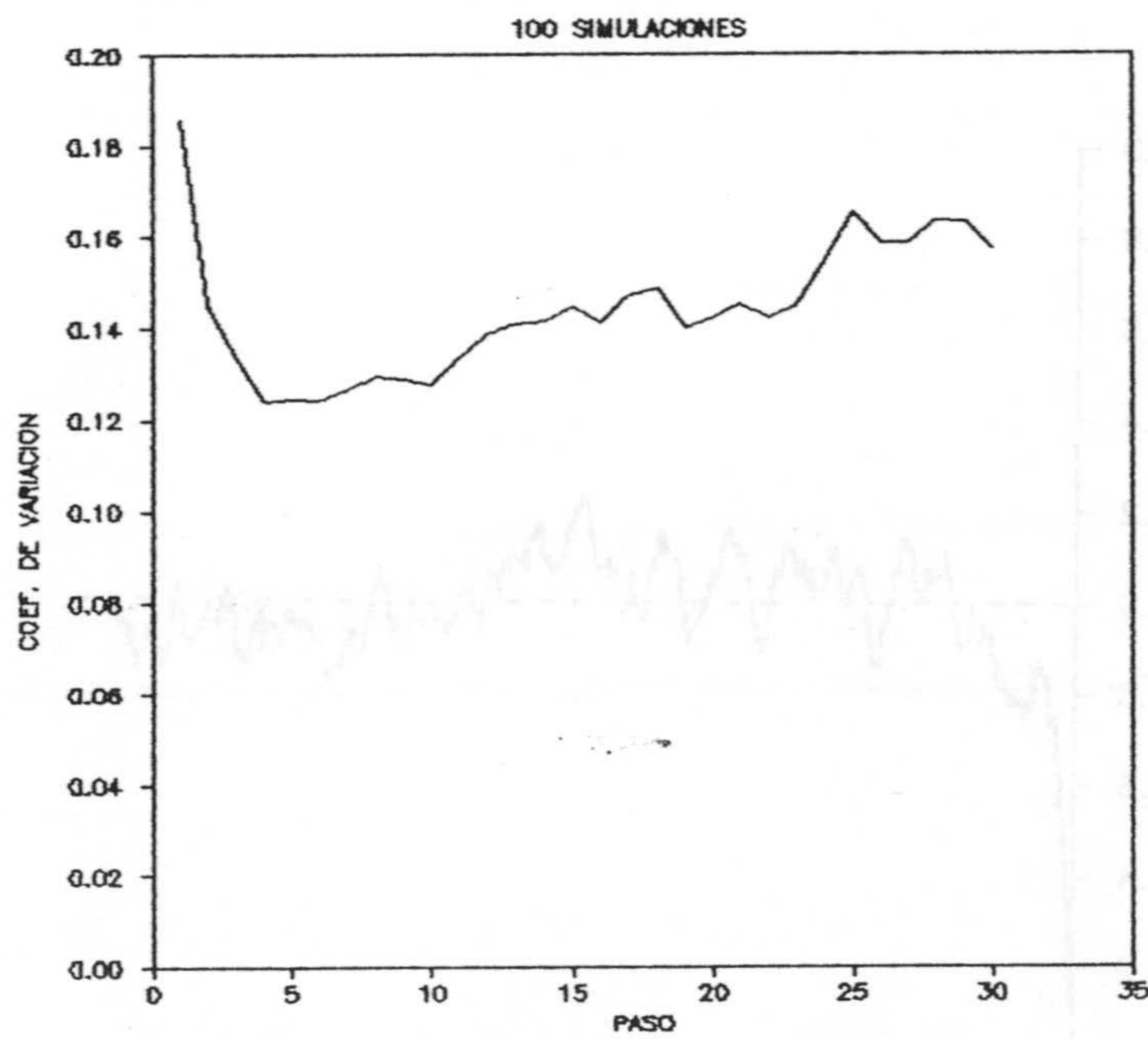


Figura 3.2. Coeficiente de variación del variograma medio.



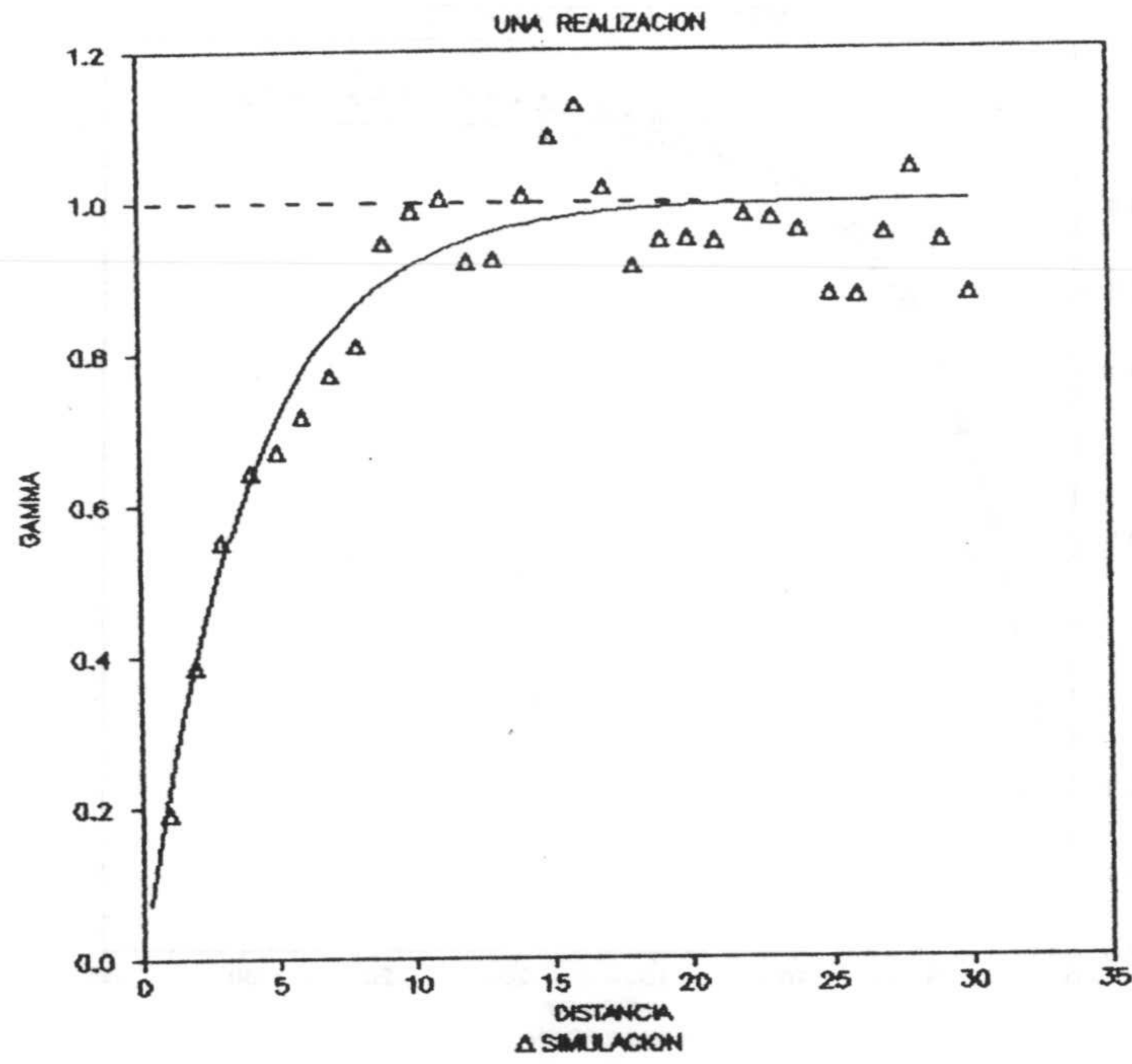


Figura 3.3. Variograma simulado en una realización.

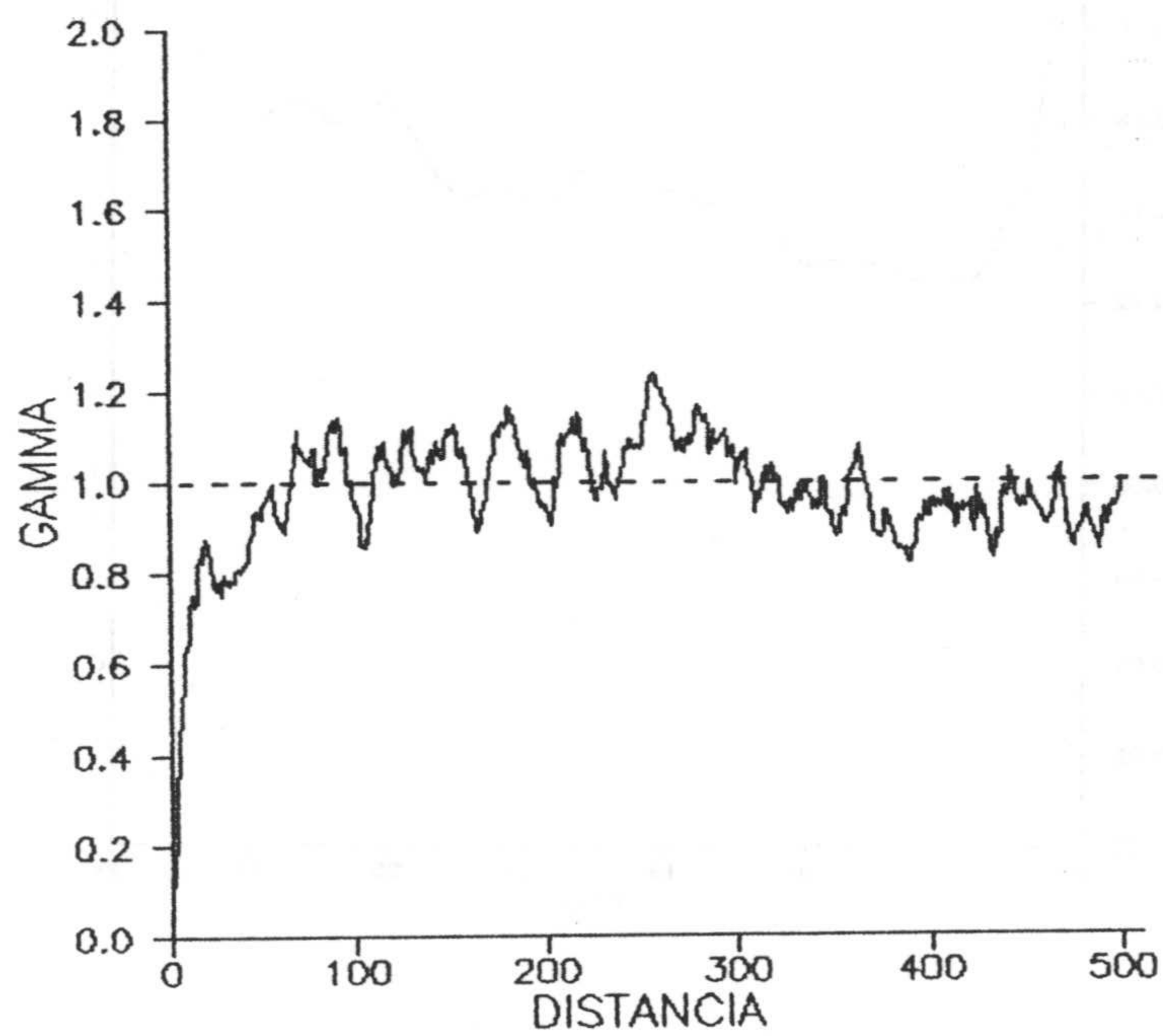


Figura 3.4. Variograma simulado en una realización para grandes distancias.



### 2.2.2. Método de RICE (1954).

En este método el valor simulado se expresa como una serie de funciones coseno cuya amplitud está modulada por la función de densidad espectral. De este modo y a diferencia del método anterior, las frecuencias para cada armónico se toman según un intervalo constante de discretización mientras que las amplitudes no son constantes.

En el método de SHINOZUKA (1970) la función de densidad espectral se utiliza para obtener las frecuencias correspondientes a cada armónico, mientras que en el de RICE (1954) la función de densidad espectral gobierna la amplitud.

El método ha sido difundido por SHINOZUKA y JAN (1972) con aplicaciones en Ingeniería Civil, y más recientemente se ha aplicado por MANTOGLOU y WILSON (1982); MUÑOZ-PARDO (1987) como generador unidimensional en el Método de las Bandas Rotantes para simulación de variables hidrológicas en el plano.

El generador tiene la siguiente expresión:

$$z(x) = 2 \sum_{k=1}^N \left[ S(\omega_k) \Delta\omega \right]^{1/2} \cos(\omega'_k x + \phi_k)$$

donde:

$z(x)$  : valor simulado en la localización  $x$ .

$S(\cdot)$  : función de densidad espectral.

$\omega_k = (k-0.5) \Delta\omega$  : frecuencia del  $k$ -ésimo armónico.

$\Delta\omega$  : intervalo de discretización para las frecuencias.

$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{N}$$

$N$  : número de armónicos.



$\Omega$  : frecuencia espectral máxima. La función de densidad espectral  $S(\omega)$  se considera despreciable fuera del intervalo  $[-\Omega, \Omega]$ .

$$\omega'_k = \omega_k + \delta\omega$$

$\delta\omega$  : pequeña frecuencia aleatoria añadida para evitar periodicidades. Esta frecuencia está distribuida uniformemente en el intervalo  $[-\Delta\omega'/2, \Delta\omega'/2]$  donde  $\Delta\omega' \ll \Delta\omega$ .

Como se dijo,  $S(\omega)$  es la función de densidad espectral o potencia espectral de la función de covarianza  $C(h)$  formando un par transformado de Fourier:

$$C(h) \longleftrightarrow S(\omega)$$

La representación de  $S(\omega)$  frente a la frecuencia se denomina espectro de amplitud y da, para cada frecuencia, el porcentaje de variabilidad, o varianza, que puede ser explicada por una onda sinusoidal con dicha frecuencia. Es por esto que las realizaciones del proceso se pueden construir combinando componentes sinusoidales con amplitudes apropiadas derivadas de la función de densidad espectral. La función de densidad espectral es una función par por lo que se puede considerar la función de densidad espectral con sólo frecuencias positivas (figura 3.5). El área bajo la curva es igual a la varianza del proceso.



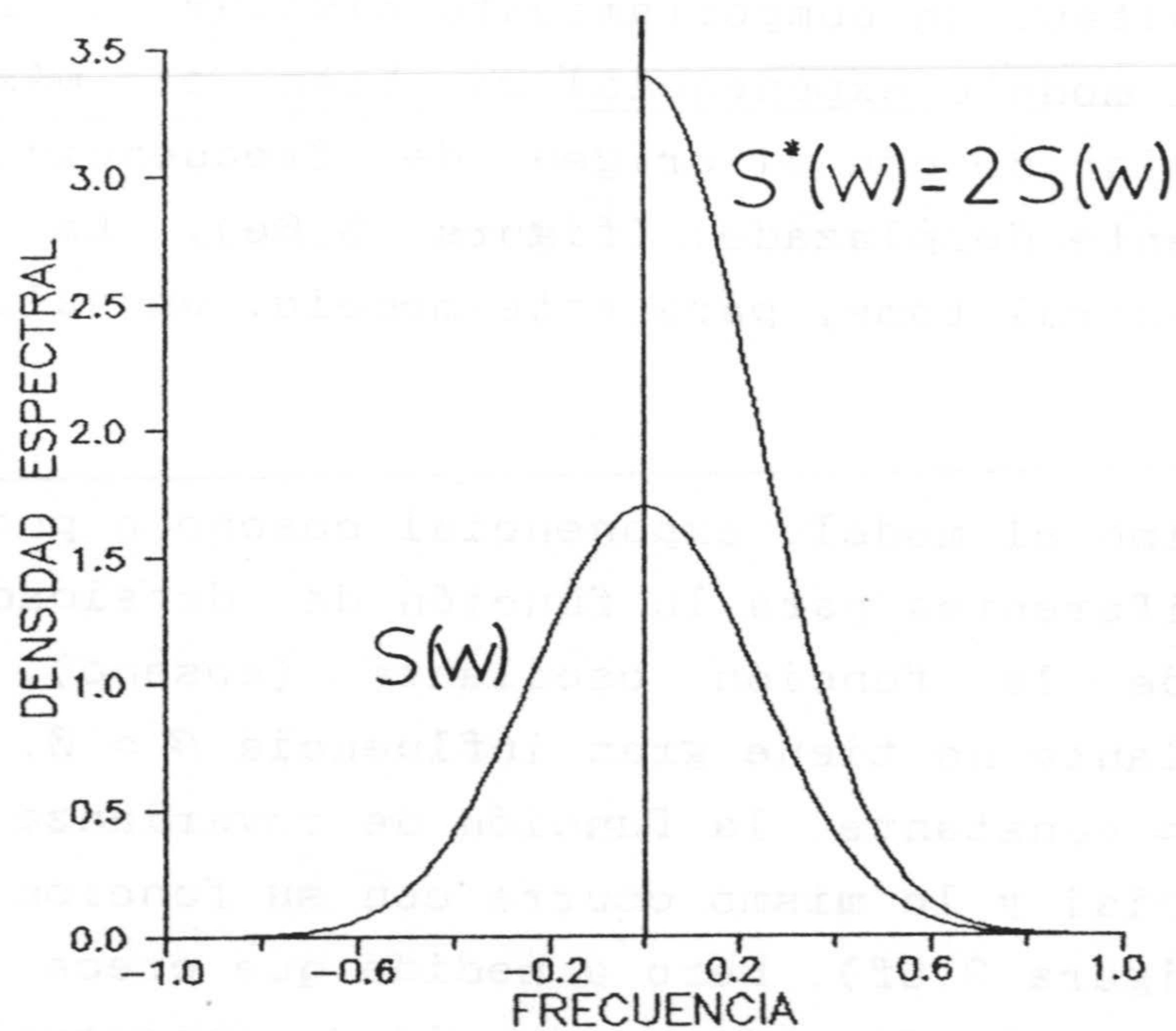


Figura 3.5. Función de densidad espectral.

En las figuras 3.6a a 3.6g he representado las funciones de densidad espectral para los modelos de variograma más frecuentes en la práctica geoestadística unidimensional. Existe una relación manifiesta entre la forma de la función espacial (variograma o covarianza) y la función frecuencial (espectro de amplitud). Así, la función de densidad espectral para los modelos de covarianza esférico y exponencial tiende asintóticamente a cero para frecuencias altas y muestran su máximo en el origen de frecuencias (figuras 3.6a, 3.6c).

Los modelos triangular y gaussiano también presentan su máximo en el origen de frecuencias; el primero manifiesta para frecuencias altas una cola oscilante que se atenúa asintóticamente (figura 3.6b), a diferencia de la densidad espectral gaussiana que tiene una terminación neta siendo cero para frecuencias altas (figura 3.6d).



El modelo exponencial-triangular o pozo I tiene, para frecuencias altas, un comportamiento similar a la densidad espectral del modelo exponencial si bien el máximo de la función no coincide con el origen de frecuencias sino que está ligeramente desplazado (figura 3.6e). La función de densidad espectral toma, para este modelo, un valor nulo en el origen.

Por último el modelo exponencial coseno o pozo II, tiene formas muy diferentes para la función de densidad espectral dependiente de la función oscilante (coseno). Cuando la función oscilante no tiene gran influencia  $\beta \simeq 0$ , es decir,  $\cos(.) \simeq 1$ ,  $\simeq$  constante, la función de covarianza es similar a la exponencial y lo mismo ocurre con su función de densidad espectral (figura 3.6f). Pero a medida que crece la función oscilante  $\beta > 0$ , la función de densidad espectral tiene un máximo en  $+\beta$  conservando la cola que asintóticamente tiende a cero (figura 3.6g). Este máximo se hace más acentuado conforme crece en importancia la componente coseno.

En conclusión, una repartición más o menos homogénea de la función de densidad espectral para las diferentes frecuencias y con importancia predominante de las frecuencias bajas es típico de funciones aleatorias estacionarias no periódicas (modelos de variograma esférico, triangular, exponencial y gaussiano). Cuando la función aleatoria presenta una componente de periodicidad, la repartición de varianzas en función de la frecuencia no es homogénea desplazándose el máximo de la función desde el origen hacia la frecuencia predominante (modelo exponencial-triangular y principalmente modelo exponencial-coseno).

En la tabla 3.II se registran las expresiones analíticas de la función de densidad espectral y en la tabla 3.III están registrados los valores que toma dicha función en el origen de frecuencias.

A continuación voy a analizar más detalladamente los



parámetros que intervienen en el generador y que son cuatro, a saber, frecuencia espectral máxima ( $\Omega$ ), número de armónicos ( $N$ ), intervalo de discretización en las frecuencias ( $\Delta\omega$ ), y la pequeña frecuencia aleatoria ( $\delta\omega$ ).

C(h)	S( $\omega$ )	
Esférica	$\frac{3 \sigma^2 b^2}{2 \pi \omega^3} \left[ A + \frac{b}{\omega} (B - 1) \right]$	(a)
Triangular	$\sigma^2 b \frac{(1 - \cos(\omega / b))}{\pi \omega^2}$	(b)
Exponencial	$\frac{\sigma^2}{\pi} \frac{b}{(b^2 + \omega^2)}$	(b)
Gausiano	$\frac{\sigma^2}{2 \sqrt{\pi} b} \exp \left[ - (\omega / 2b)^2 \right]$	(b)
Pozo I	$\frac{\sigma^2}{\pi} \frac{b}{(b^2 + \omega^2)} \left[ 1 - \cos \left[ 2 \operatorname{artg}(\omega / b) \right] \right]$	(a)
Pozo II	$\frac{\sigma^2}{2 \pi} \left[ \frac{b}{b^2 + (\omega + b)^2} + \frac{b}{b^2 + (\omega - b)^2} \right]$	(b)

Tabla 3.II. Expresiones aníticas de la función de densidad espectral.  $A = \operatorname{sen}(\omega / b)$ ;  $B = \operatorname{cos}(\omega / b)$ ;  $b = 1/a$ ;  $a = \text{alcance}$   
 $\sigma^2$  : varianza;  $\beta$  : parámetro del modelo pozo II. (a) PARDO (1989); (b) VENTSEL (1973).



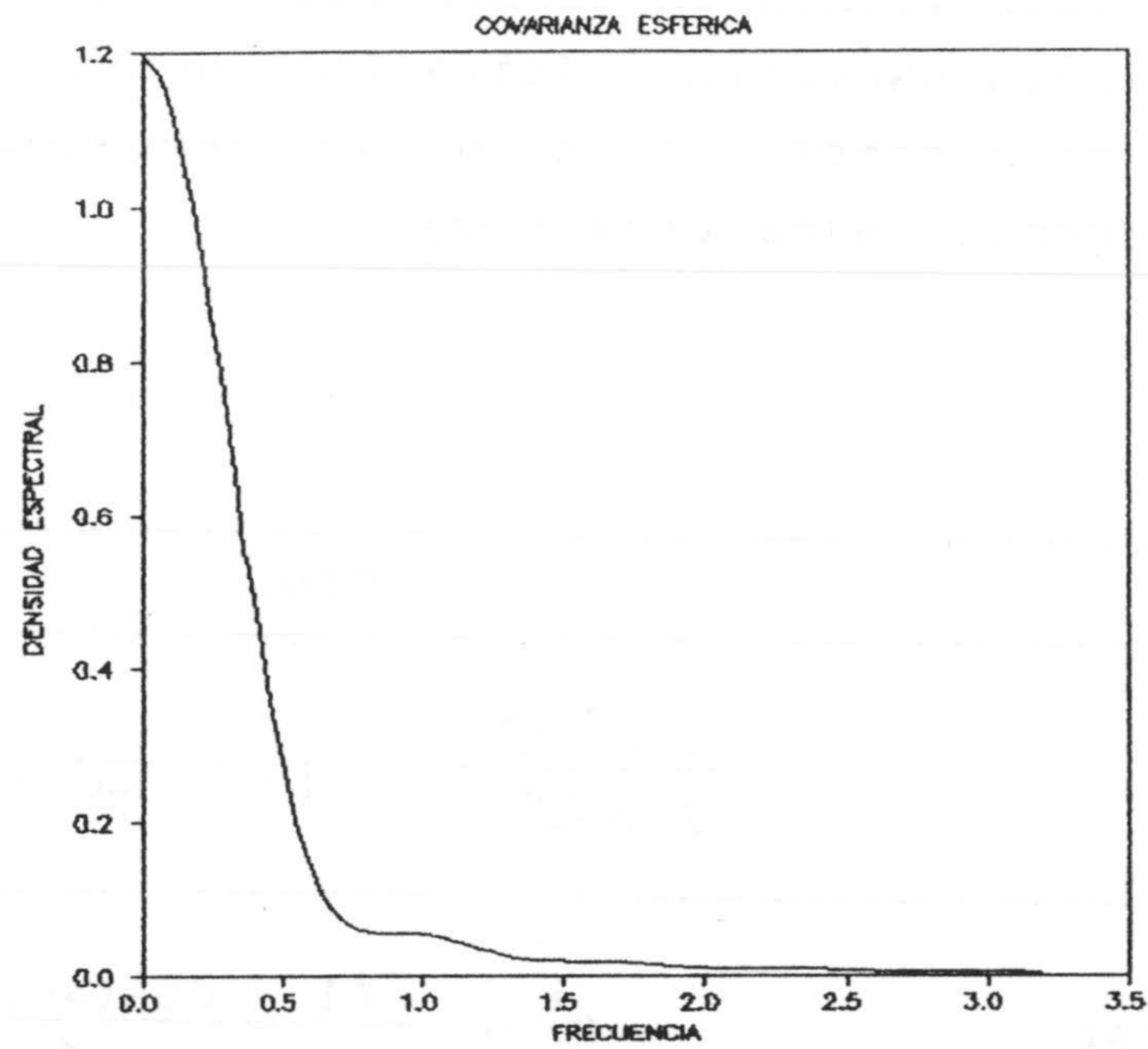


Figura 3.6a. Función de densidad espectral para un variograma esférico (alcance 10, meseta 1)

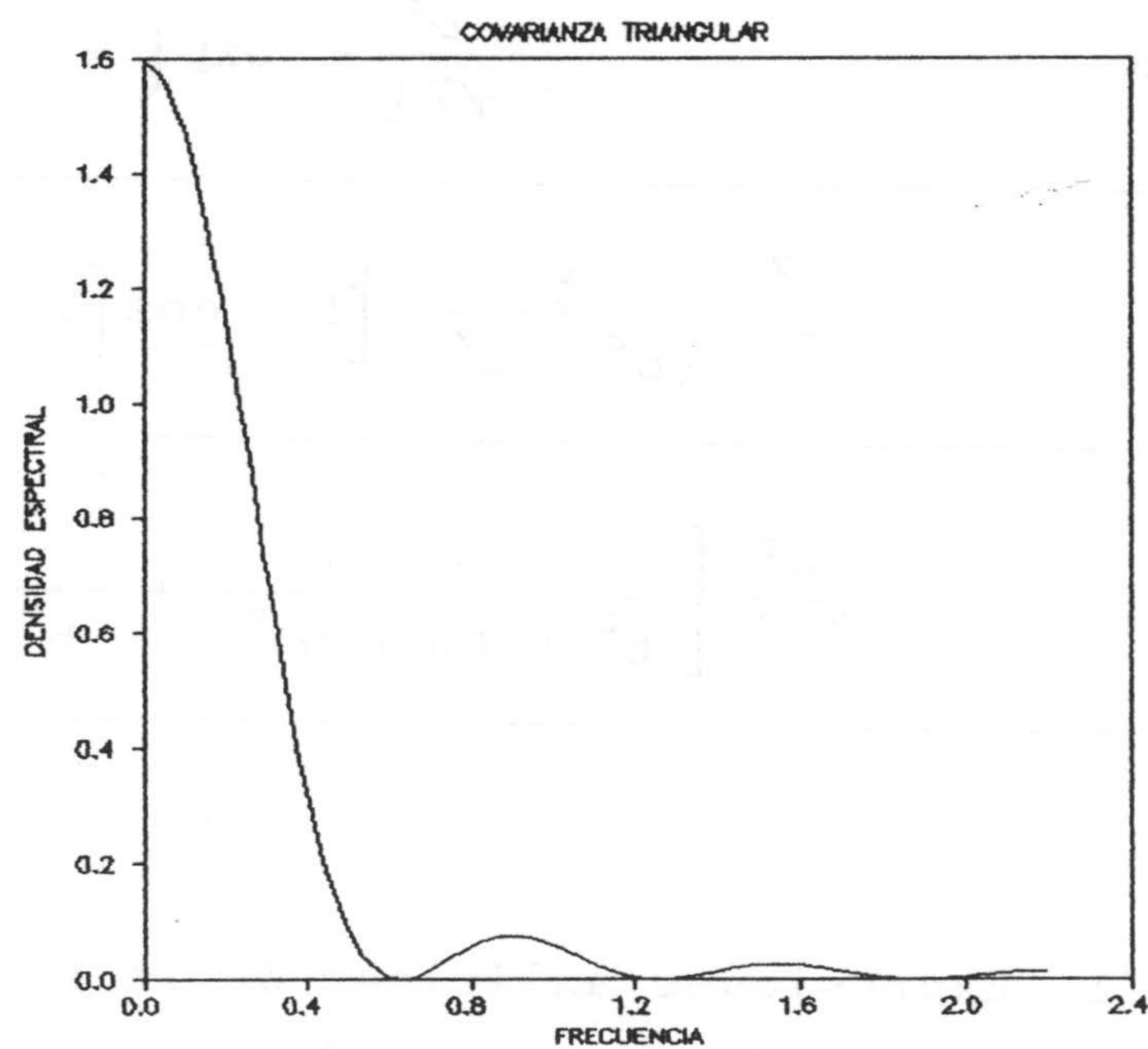


Figura 3.6b. Densidad espectral para un variograma triangular (alcance 10, meseta 1).



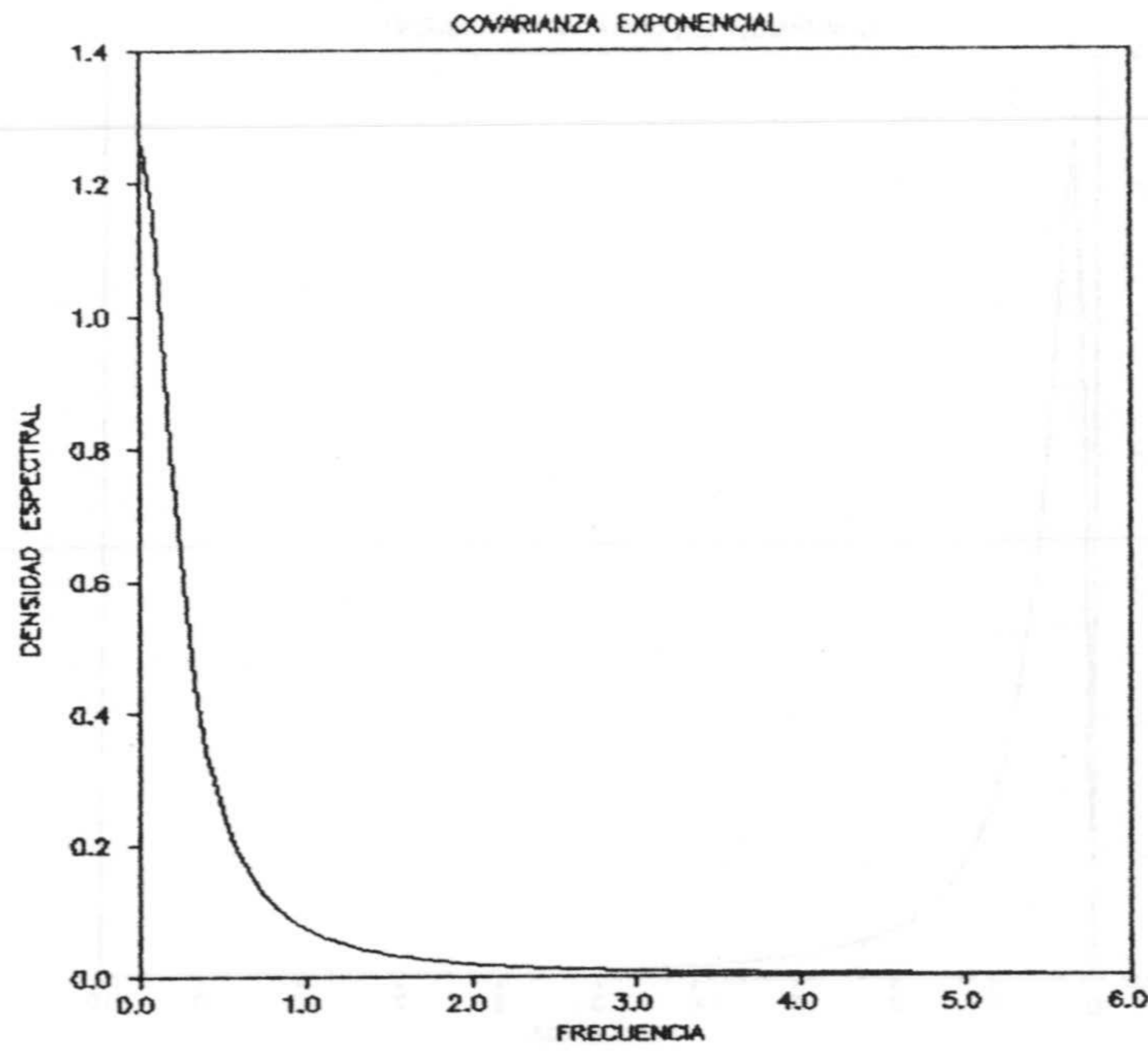


Figura 3.6c. Densidad espectral para un variograma exponencial (alcance 4, meseta 1).

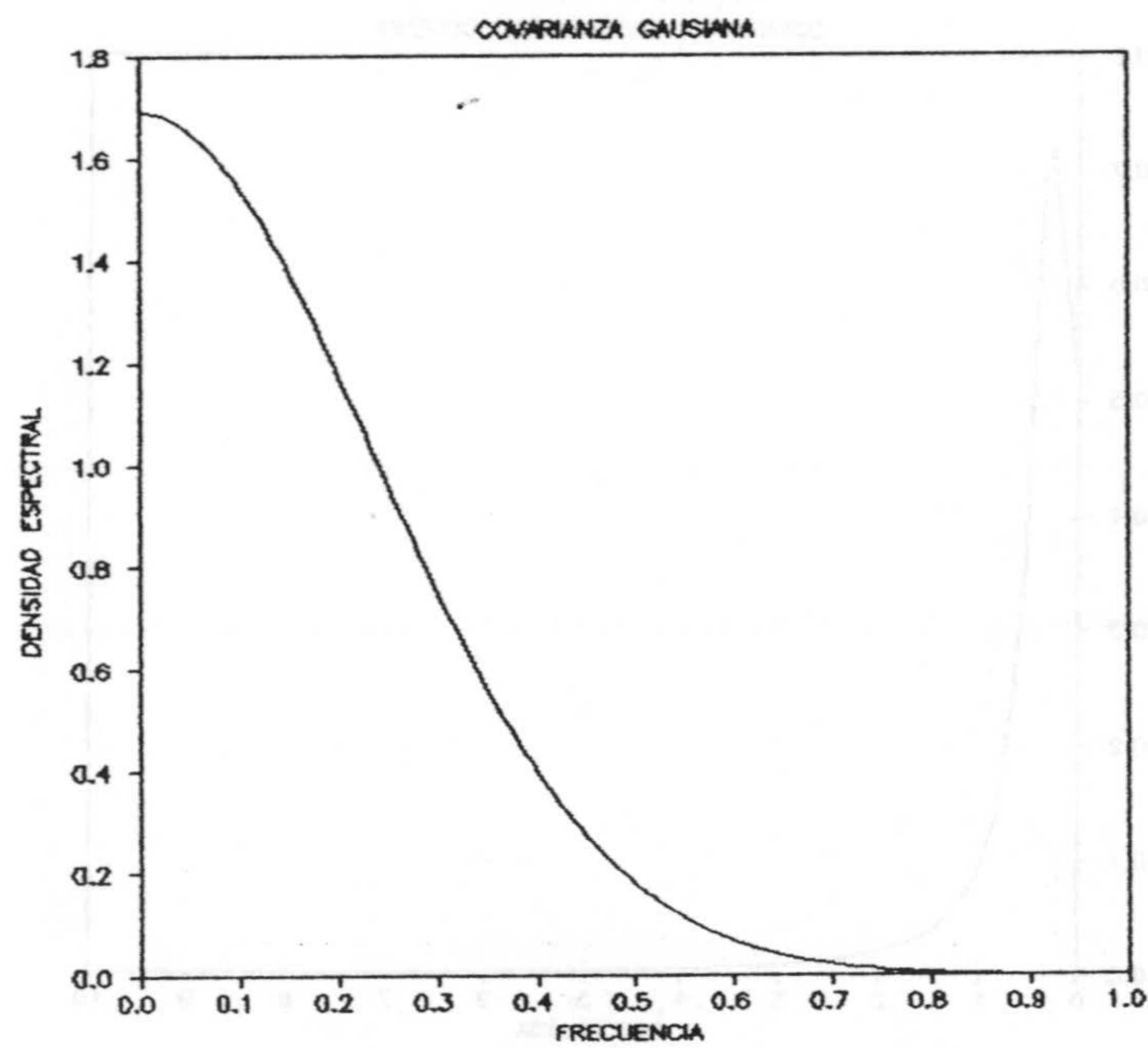


Figura 3.6d. Densidad espectral para un variograma gaussiano (alcance 6, meseta 1).



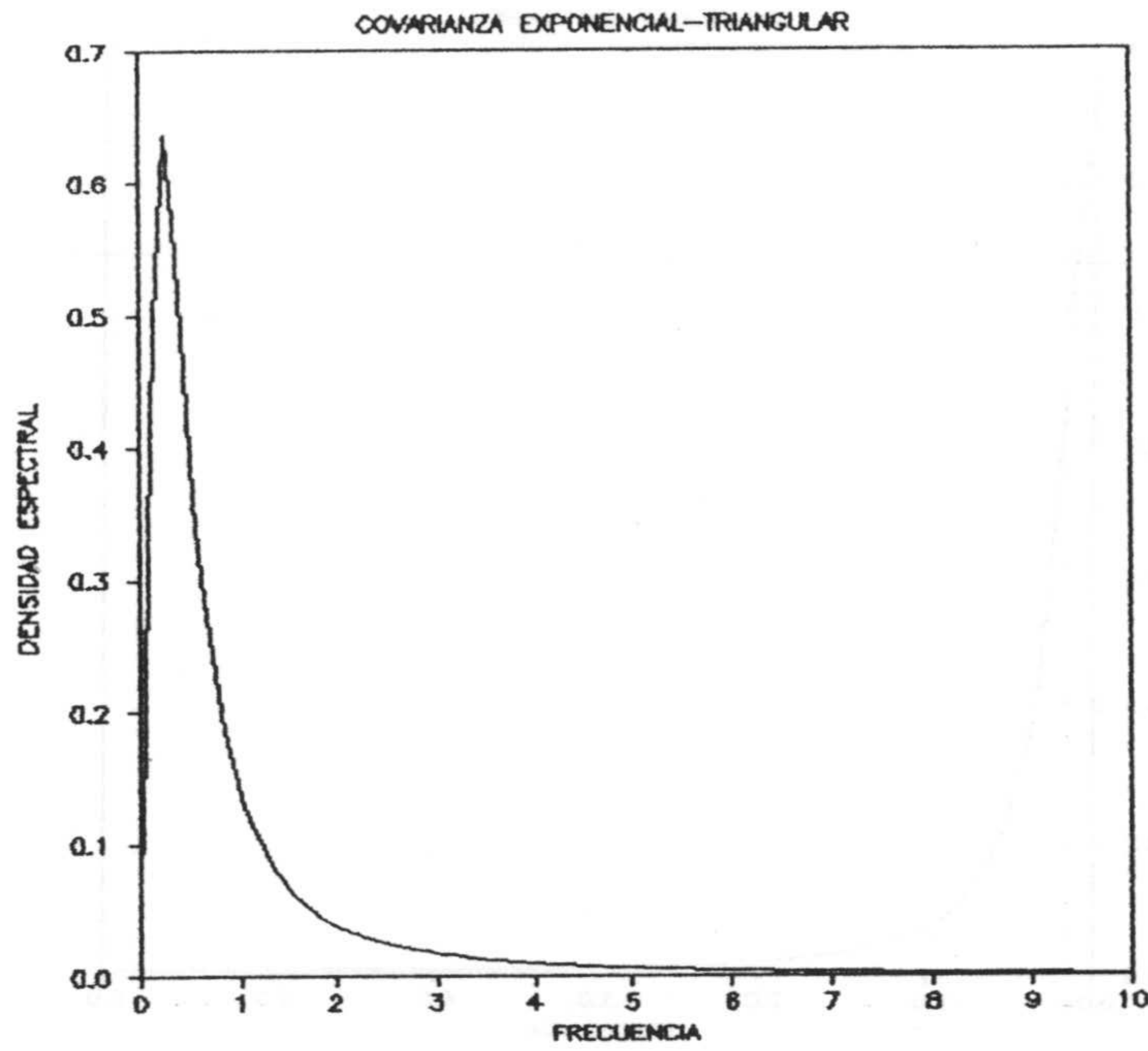


Figura 3.6e. Densidad espectral para un variograma pozo I (alcance 4, meseta 1).

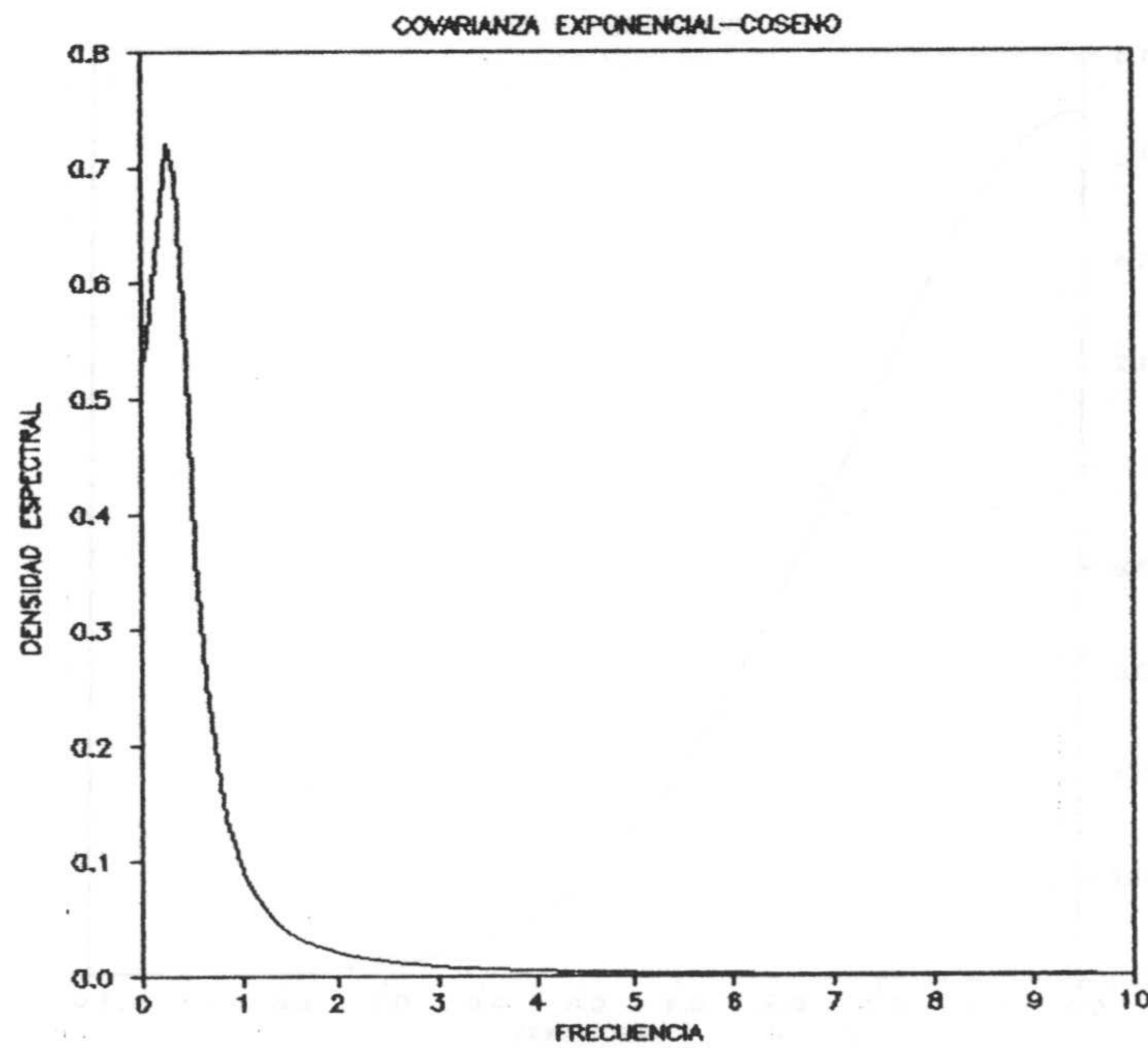


Figura 3.6f. Densidad espectral para un variograma pozo II (alcance 4,  $\beta = 0.3$ , meseta 1).



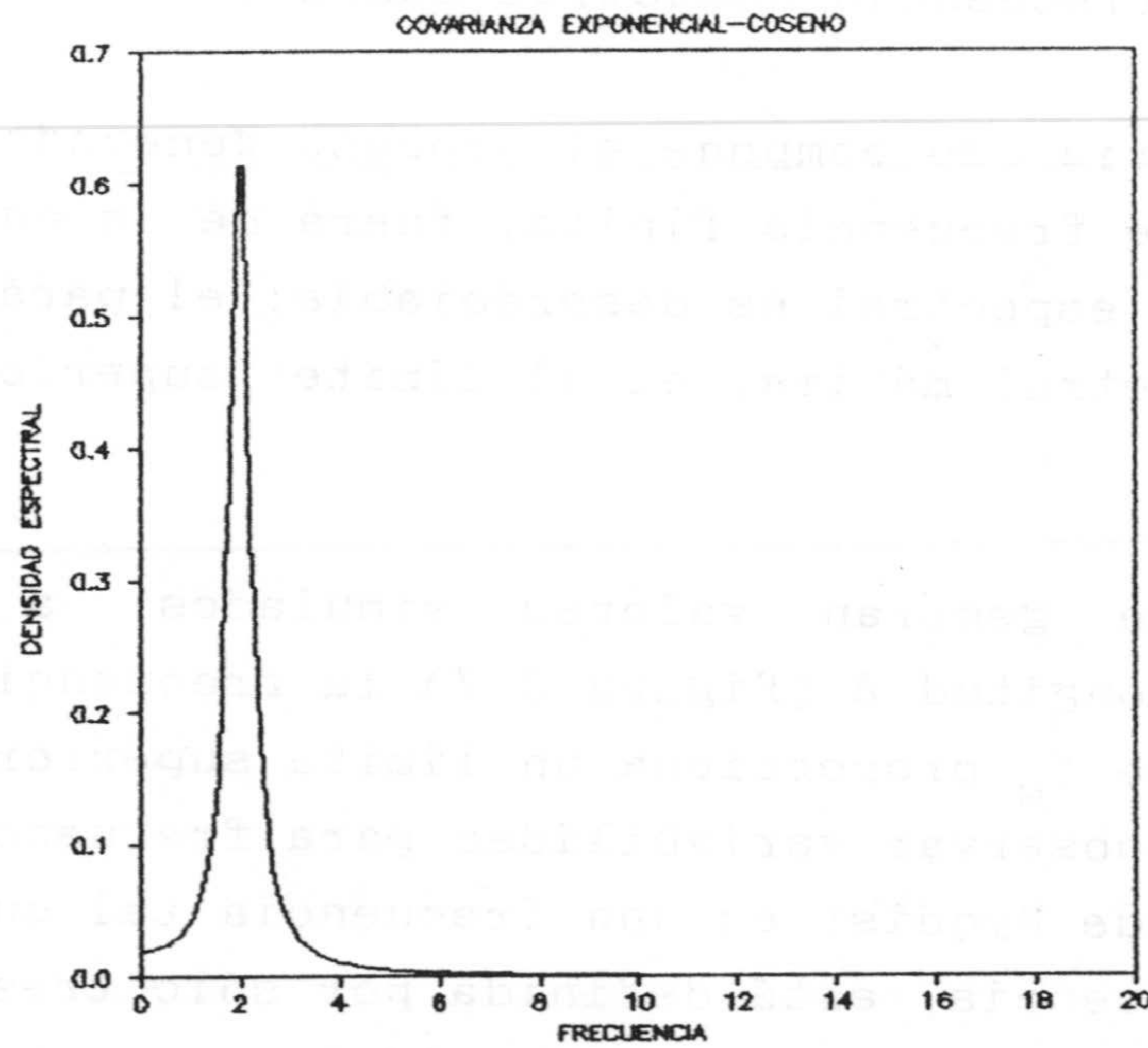


Figura 3.6g. Densidad espectral para un variograma pozo II (alcance 4,  $\beta = 2$ , meseta 1).

COVARIANZA	$S(0)$
Esférica.	$\frac{3 \sigma^2}{8 \pi b}$
Triangular	$\frac{\sigma^2}{2 \pi b}$
Exponencial	$\frac{\sigma^2}{\pi b}$
Gausiana	$\frac{\sigma^2 \pi^{-1/2}}{2 b}$
Exponencial-triangular	$0$
Exponencial-coseno	$\frac{b}{\pi (b^2 + \beta^2)}$

Tabla 3.III. Función de densidad espectral en el origen.



Parámetro  $\Omega$ . (Frecuencia espectral máxima).

La sumatoria que compone el proceso generador hace uso de una banda de frecuencia finita, fuera de la cual el valor de la densidad espectral es despreciable; el parámetro  $\Omega$ , o frecuencia espectral máxima, es el límite superior de dicha banda.

Cuando se generan valores simulados a intervalos discretos de longitud  $\Delta$  (figura 3.7) la frecuencia de Nyquist correspondiente  $f_N$  proporciona un límite superior  $\Omega$ ; ya que no es posible observar variabilidad para frecuencias mayores. La frecuencia de Nyquist es una frecuencia tal que cada onda, para esta frecuencia, está definida por sólo tres puntos; es imposible definir una onda sinusoidal por menos de tres puntos. Así, la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de Nyquist  $\lambda_N$  vale  $2\Delta$ , y por consiguiente la frecuencia máxima observable vale  $0.5$  (ciclos/ $\Delta$ ) o  $\pi$  (radianes/ $\Delta$ ).

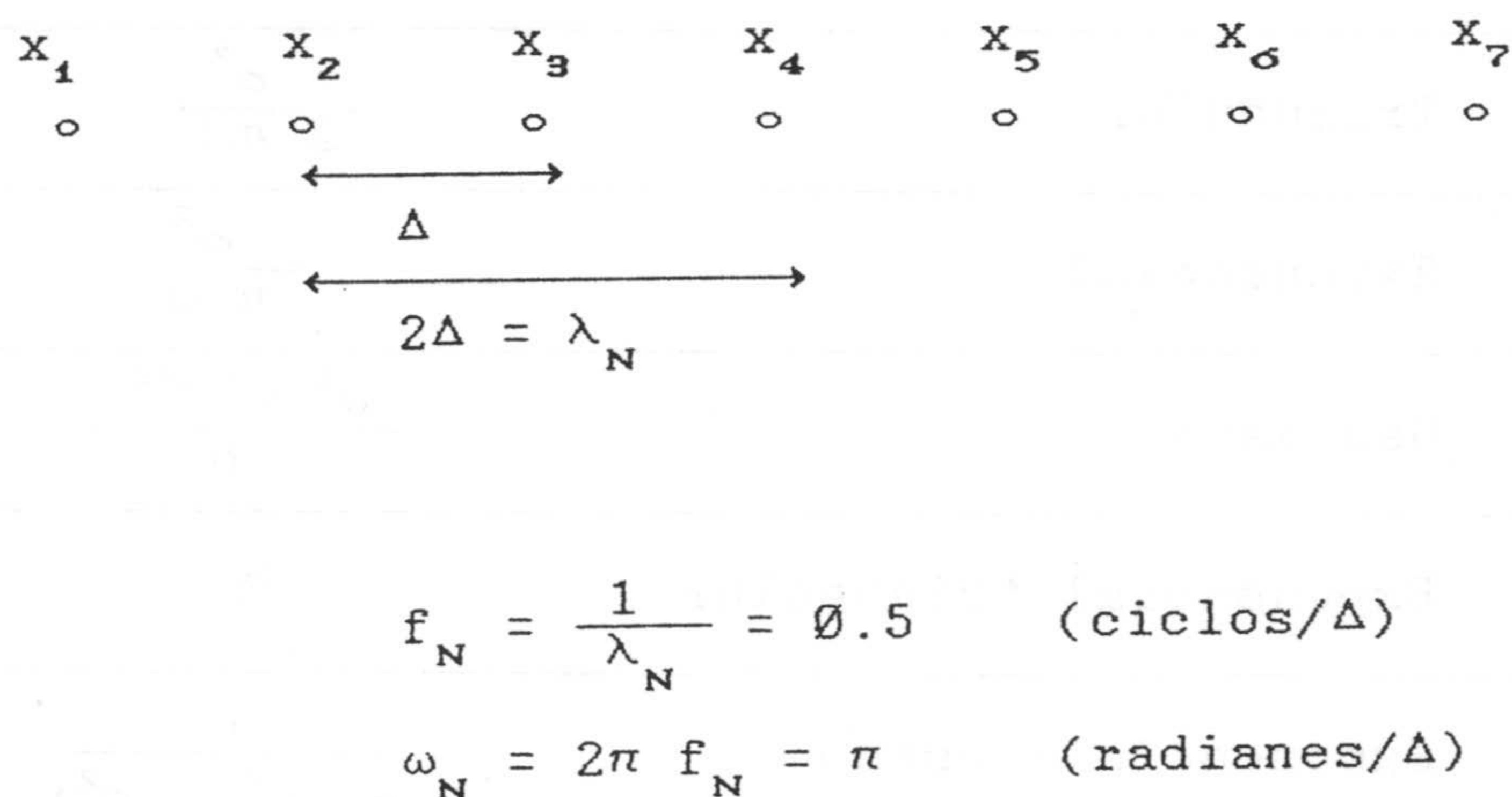


Figura 3.7. Distancia interpunto y frecuencia de Nyquist.



De este modo si, por ejemplo, se simulan puntos equiespaciados a 1 m de distancia, la frecuencia de Nyquist será  $\pi$  radianes por metro y midiéndose el alcance en metros; mientras que si se reduce la distancia interpunto a la mitad 50 cm la frecuencia de Nyquist se duplica a  $2\pi$  radianes por metro, midiéndose el alcance también en metros.

Puede ocurrir que si el espaciado interpunto  $\Delta$  es muy pequeño, la frecuencia de Nyquist correspondiente sea un límite mucho mayor que el necesario para una determinada aplicación. En este caso,  $\Omega$  se puede elegir según diferentes criterios alternativos; dos de estos criterios son los que propongo seguidamente:

1). Elegir  $\Omega$  de modo que  $S(\omega)$  para  $\omega > \Omega$  sea menor que un valor predeterminado.

$$\omega > \Omega \Rightarrow S(\omega) < \epsilon$$

2). Tomar  $\Omega$  de tal manera que el área bajo la curva  $S(\omega)$  en el intervalo  $[-\Omega, \Omega]$  sea igual a un porcentaje predeterminado del área total que es igual a la varianza.

En función de la forma que presenta la función de densidad espectral será más favorable un criterio u otro. Así, el espectro de amplitud de la covarianza triangular presenta una cola oscilante por lo que será más favorable el segundo criterio ya que el primero podría dejar fuera un porcentaje de varianza no despreciable.

*MANTOGLOU y WILSON (1982)* para la función de densidad espectral correspondiente a una covarianza exponencial proponen  $\Omega = 40/\alpha$  (radianes/unidad de medida) donde  $\alpha$  es el alcance o longitud de correlación.

*BLACK y FREYBERG (1990)* para la misma función de covarianza utilizan  $\Omega = 10/\alpha$ , valor para el cual  $S(\Omega)$  es igual al 0.99 % de su valor máximo que se alcanza en el



origen de coordenadas.

El parámetro  $\Omega$  está relacionado en razón inversa con la longitud de correlación de la función covarianza (o alcance efectivo del variograma). Si el alcance es cero, no hay correlación entre las variables aleatorias espaciales y la función aleatoria se puede asimilar a un ruido blanco;  $S(\omega)$  tiene un valor constante donde intervienen todas las frecuencias y todas tienen la misma importancia explicativa de la varianza. A medida que el alcance va aumentando (existe una estructura de correlación)  $S(\omega)$  deja de ser constante para pasar a adoptar una forma dependiente del modelo de correlación. Conforme el alcance crece la función de densidad espectral se estira según el eje de ordenadas (figura 3.8) y se retrae en el eje de abscisas. Es decir, para alcances grandes las frecuencias bajas son predominantes frente a las frecuencias más altas; las frecuencias bajas explican la mayor parte de la varianza. En el límite, para un alcance infinito, la función de covarianza sería constante para cualquier distancia y la función de densidad espectral tendría un único valor en el origen de frecuencias.

En la tabla 3.IV se representa, para los modelos estudiados, la función de densidad espectral máxima en función del % de varianza que dejan bajo la curva. Se han representado los valores que he considerado más representativos.




MODELO	$\Omega$	$\% \sigma^2$	
Esférico a = 1.	31.6 (40)	97 (97.6)	
Triangular a = 1.	21.6 (32.7)	97 (98)	
Exponencial a = 1.	21.4 (31.8)	97 (98)	
Gausiano a = 1.	3.26 (3.6)	98 (99)	
Pozo I a = 1.	40	96.8	
Pozo II a = 1. $\beta < 5$ .	21.26 (31.8)	97 (98)	

Tabla 3.IV. Datos para la elección del parámetro  $\Omega$ .

De este modo, el criterio que se propone para la elección de  $\Omega$  es el siguiente: calcular  $\Omega_1$  como la frecuencia de Nyquist

$$\Omega_1 = \pi / \Delta$$

y por otra parte considerar el valor  $\Omega_2$  dado en la tabla 3.V y obtenidos de los resultados precedentes; entonces basta considerar como frecuencia espectral máxima el valor más pequeño entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ :

$$\Omega = \min(\Omega_1, \Omega_2)$$



MODELO	$\Omega$
Gausiano.	4./a
Triangular. Exponencial.	22./a
Esférico. Pozo I.	32./a
Pozo II	40./a

Tabla 3.V.  $\Omega$  óptimo en función del alcance a.

Parámetro N. (Número de armónicos).

La elección del número de armónicos se realiza en base a resultados empíricos en función de la discrepancia entre la covarianza experimental simulada y el modelo teórico objetivo. Resulta particularmente interesante conocer el número de armónicos mínimo para obtener una precisión aceptable, con la consiguiente reducción en tiempo de cálculo. *MANTOGLOU* y *WILSON* (1982) muestran como para la frecuencia espectral máxima de  $\Omega = 40./a$  es suficiente con utilizar 100 armónicos. A la vista de la tabla 3.V donde las frecuencias son iguales o menores a 40./a, resulta razonable adoptar 100 como el número de armónicos favorable.

La única limitación que presenta el incremento en el número de armónicos es el tiempo de cálculo que podría llegar a ser prohibitivo.

*SHINOZUKA* y *JAN* (1972) muestran como el generador es ergódico para cualquier N y como la función de correlación media simulada converge a la función objetivo según el ratio  $1/N^2$ , lo que implica mayor eficiencia que el generador de



SHINOZUKA (1970).

Parámetro  $\Delta\omega$  (Intervalo de discretización)

El intervalo de discretización en las frecuencias vale:

$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{N}$$

por lo que está completamente determinada por los dos parámetros anteriormente estudiados.

Parámetro  $\delta\omega$  (Pequeña frecuencia aleatoria).

La covarianza simulada por el proceso generador de RICE (1954) vale (MANTOGLOU y WILSON, 1982):

$$C_1(h) = 2 \frac{\Omega}{N} \sum_{k=1}^N S(\omega_k) \cos(\omega_k h)$$

Como las frecuencias están tomadas con un intervalo de discretización constante  $\Delta\omega$ , la covarianza es periódica con período  $4\pi/\Delta\omega$  (BLACK y FREYBERG, 1990) (Figura 3.9).

Al estar el período en razón inversa al intervalo de discretización, resulta ser directamente proporcional al número de armónicos  $N$  e inversamente proporcional a la frecuencia espectral máxima:

$$T = \frac{4 \pi N}{\Omega}$$



Anteriormente se ha fijado  $\Omega$  (tabla 3.V) y el número de armónicos igual a cien; como  $\Omega$  no puede hacerse menor, en la práctica, para simulaciones largas y con escala de correlación pequeña, la ecuación última muestra como pudiera ser necesario incrementar el número de armónicos  $N$  a fin de obtener un  $\Delta\omega$  lo suficientemente pequeño para no introducir periodicidades en la función de correlación.

Así, por ejemplo, para un modelo esférico  $\Omega = 32a$  y con cien armónicos se tiene que el período vale  $39a$ , esto es, el período es igual a 39 veces la longitud de correlación. Como la función de covarianza se mantiene si periodicidad para distancias  $T/4 \simeq 10a$ , sólo se podría utilizar una longitud de serie simulada igual a diez veces la longitud de correlación lo cual podría ser suficiente en determinadas aplicaciones prácticas.

Una técnica para tratar de amortiguar en lo posible la periodicidad de la función covarianza consiste en añadir a cada frecuencia  $\omega_k$  una pequeña frecuencia aleatoria  $\delta\omega$ :

$$\omega'_k = \omega_k + \delta\omega$$

$\delta\omega$  tiene una distribución uniforme en el intervalo  $[-\Delta\omega'/2, \Delta\omega'/2]$  donde  $\Delta\omega'$  es un intervalo de frecuencia mucho menor al intervalo de discretización:

$$\Delta\omega' \ll \Delta\omega$$

Este requerimiento es necesario para mantener la calidad del proceso generador, lo cual se cumple si:

$$S(\omega_k) \simeq S(\omega'_k)$$



SHINOZUKA y JAN (1972), MANTOGLOU y WILSON (1982)  
utilizan:

$$\Delta\omega' = \Delta\omega / 20.$$

En las figuras 3.9 y 3.10 se observa la covarianza simulada en dos realizaciones cuya única diferencia en el proceso de generación ha sido que en la primera realización se ha añadido el factor  $\delta\omega$ , mientras que en la segunda se ha prescindido del mismo. Se comprueba empíricamente que la adición de un factor  $\delta\omega$ , con un valor tal que no afecte seriamente la calidad del generador, no resuelve el problema de la periodicidad de la función covarianza; en cambio puede tener algún efecto sobre la precisión por todo lo cual se ha optado por eliminar este factor dentro del proceso generador.

En cuanto a los resultados que se obtienen por este método, en las figuras 3.11a a 3.11f he representado el variograma teórico y el variograma medio experimental de 100 realizaciones para los modelos esférico, triangular, exponencial, gaussiano, pozo I y pozo II, respectivamente.

En todos los casos, cada realización consta de 1000 puntos con interdistancia unidad. En el generador se han tomado 100 armónicos y como valores de frecuencia espectral máxima los reflejados en la tabla 3.V.

Se puede observar como los valores experimentales de la simulación están en consonancia con los correspondientes valores teóricos, si bien, y a excepción hecha del modelo gaussiano, no llegan a alcanzar completamente la meseta teórica. Esto se debe a que la varianza media de las 100 simulaciones (tabla 3.VI) siempre es ligeramente inferior al valor teórico ya que, como se comentó, el parámetro  $\Omega$  se determinó de modo que el área bajo la curva  $S(\omega)$  es del 97 al 98 % de la varianza total y sólo en el caso gaussiano llega a ser del 99 %.



La figura 3.11g muestra el coeficiente de variación de los valores medios del variograma para los diferentes modelos. El coeficiente de variación oscila entre el valor máximo de 0.035 (3.5 %) para el modelo triangular y el valor mínimo de 0.005 (0.5 %) para el modelo esférico. Comparando las figuras 3.2 y 3.11g se puede mostrar como el coeficiente de variación para el modelo exponencial es del orden de 10 veces mayor por el método de SHINOZUKA (1970) que por el método de RICE (1954).

El valor pequeño del coeficiente de variación hace que si se considera una única realización al azar, el variograma simulado esté próximo a sus valores teóricos. En la figura 3.11h se representa una realización para un modelo de covarianza esférica. En la tabla 3.VI están registrados, para los seis modelos, los estadísticos medios de las 100 simulaciones observándose buena concordancia con los valores teóricos.

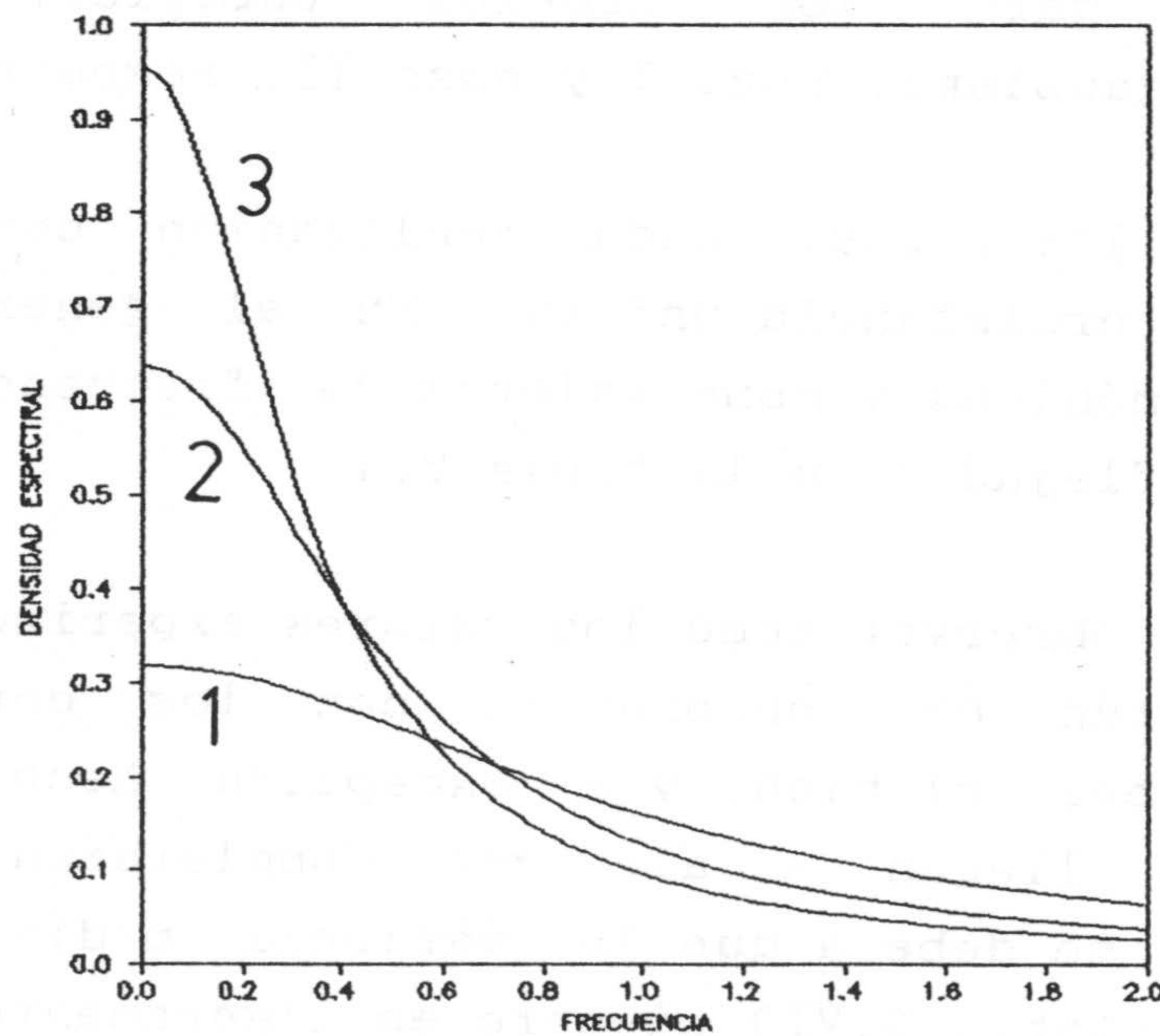


Figura 3.8. Función de densidad espectral para un modelo de covarianza exponencial y para alcances progresivamente crecientes (1), (2) y (3).



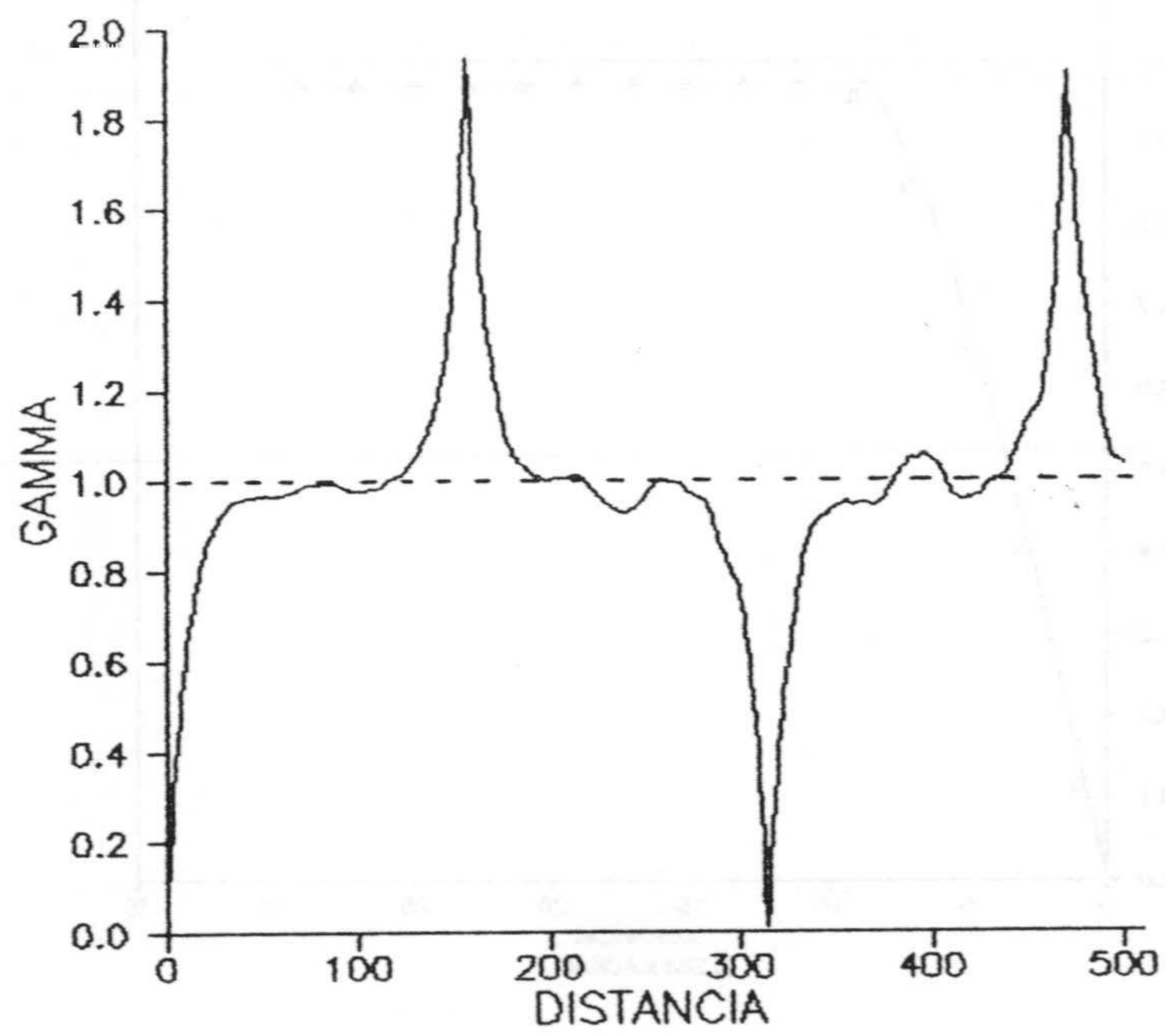


Figura 3.9. Variograma de una realización con factor perturbador  $\delta\omega$ .

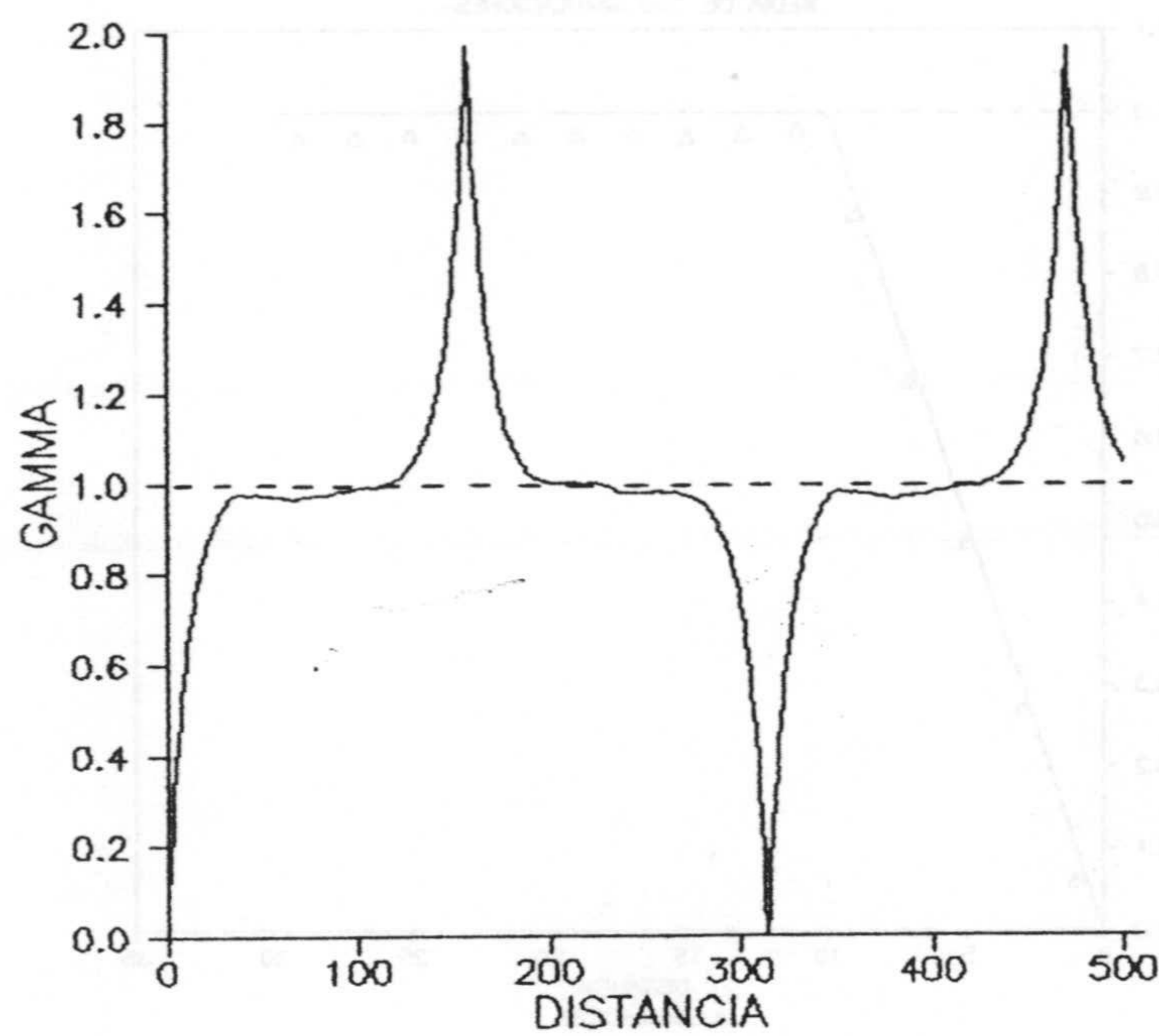


Figura 3.10. Variograma de una realización sin factor perturbador  $\delta\omega$ .



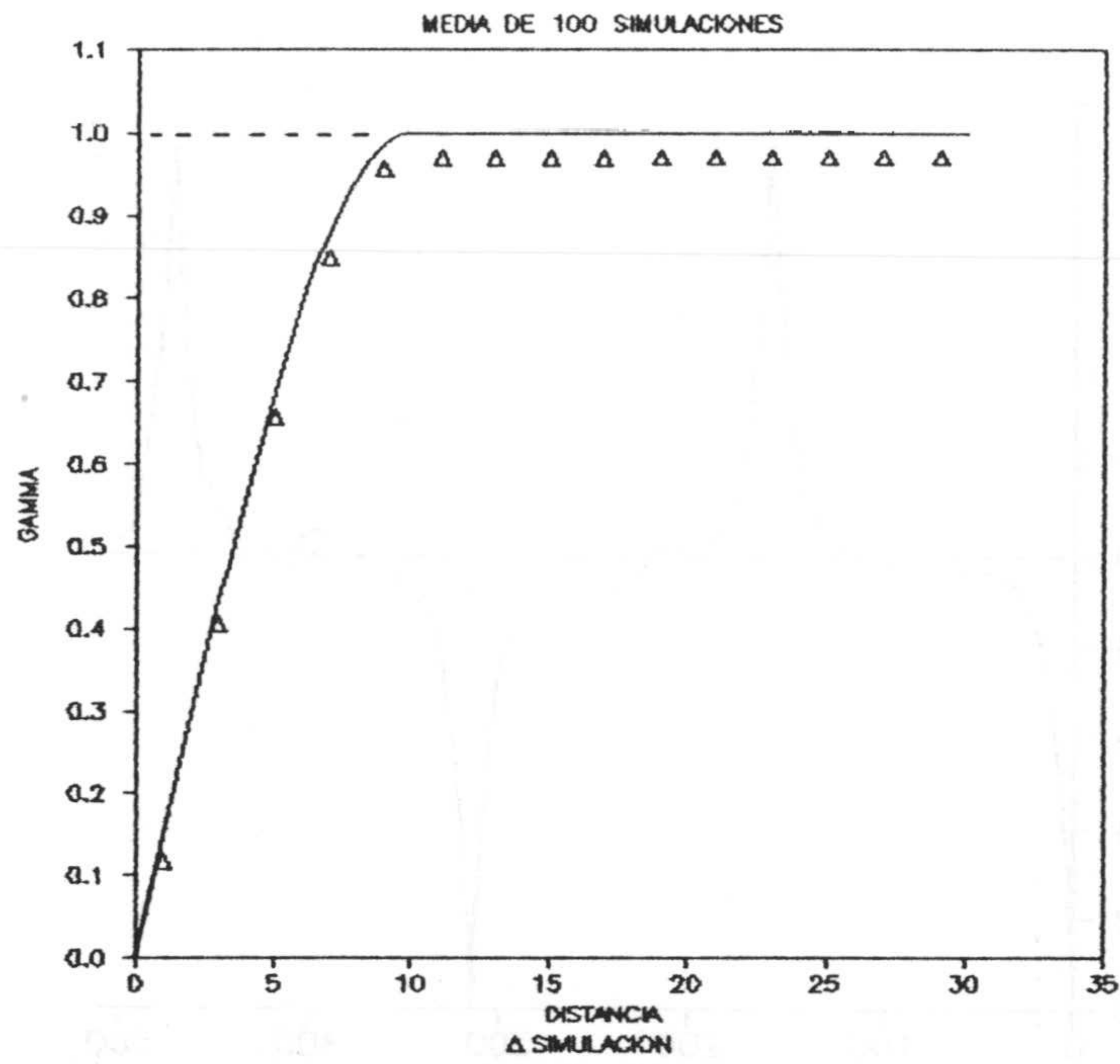


Figura 3.11a. Simulación de un variograma esférico.

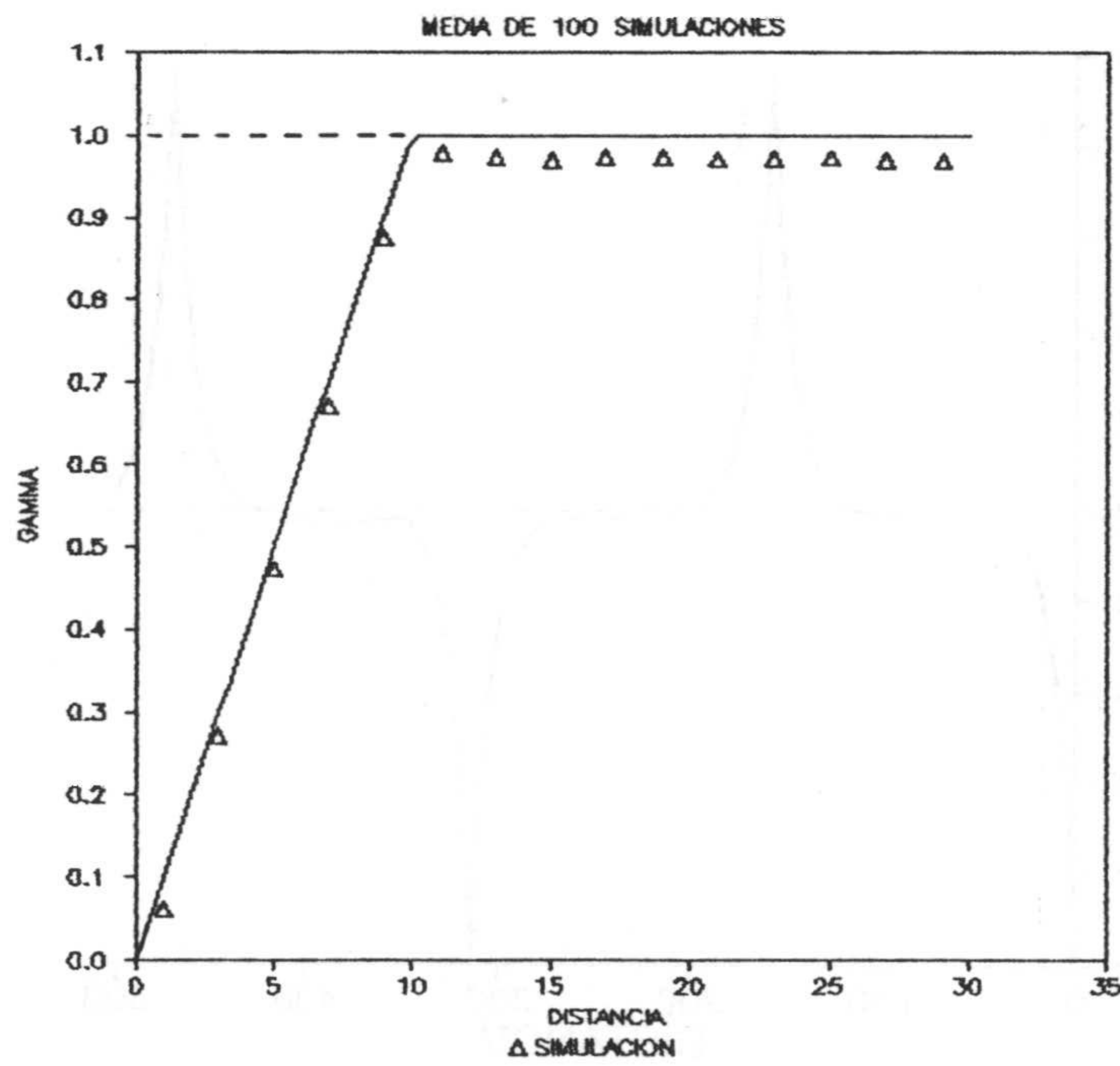


Figura 3.11b. Simulación de un variograma triangular.



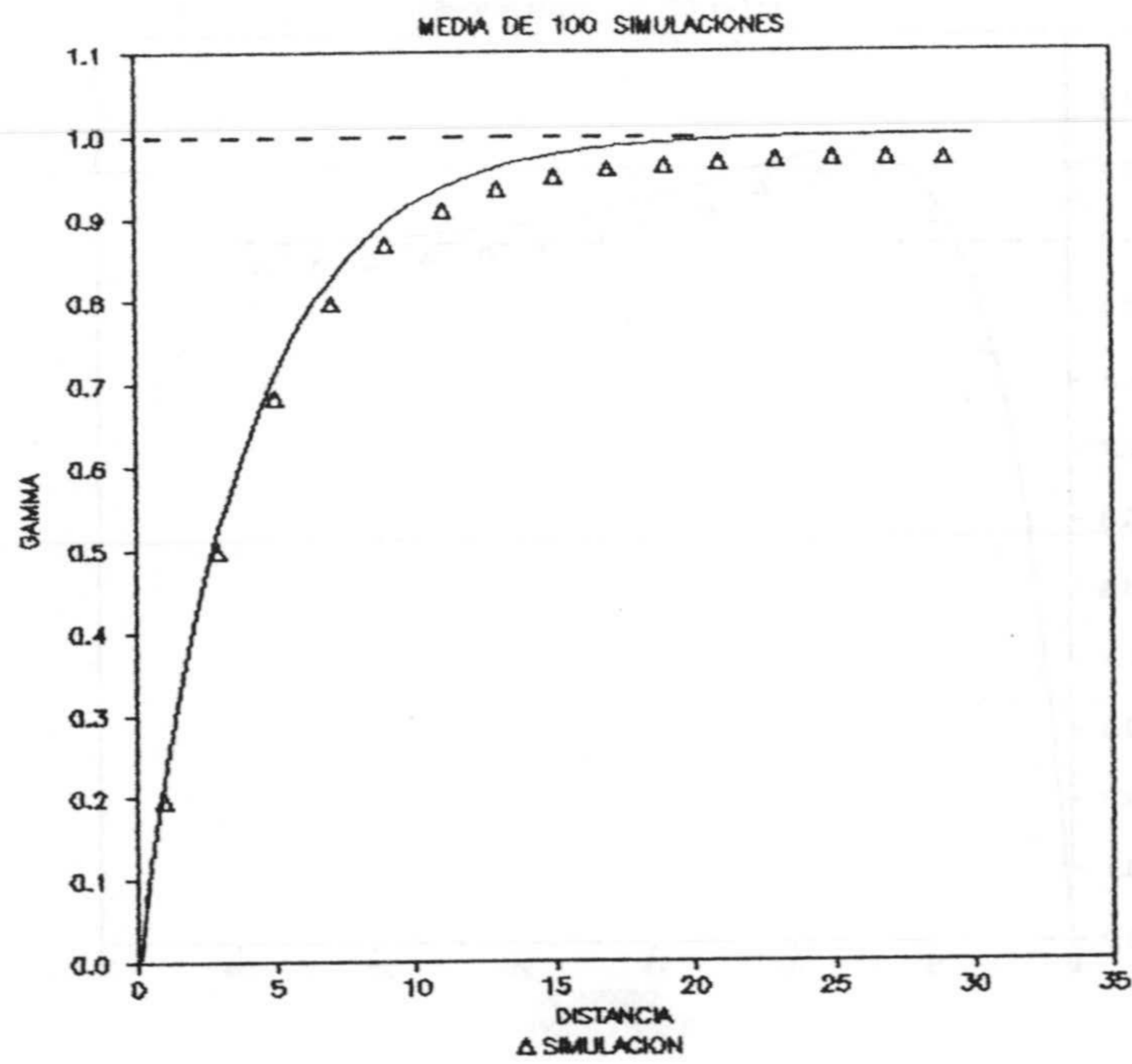


Figura 3.11c. Simulación de un variograma exponencial.

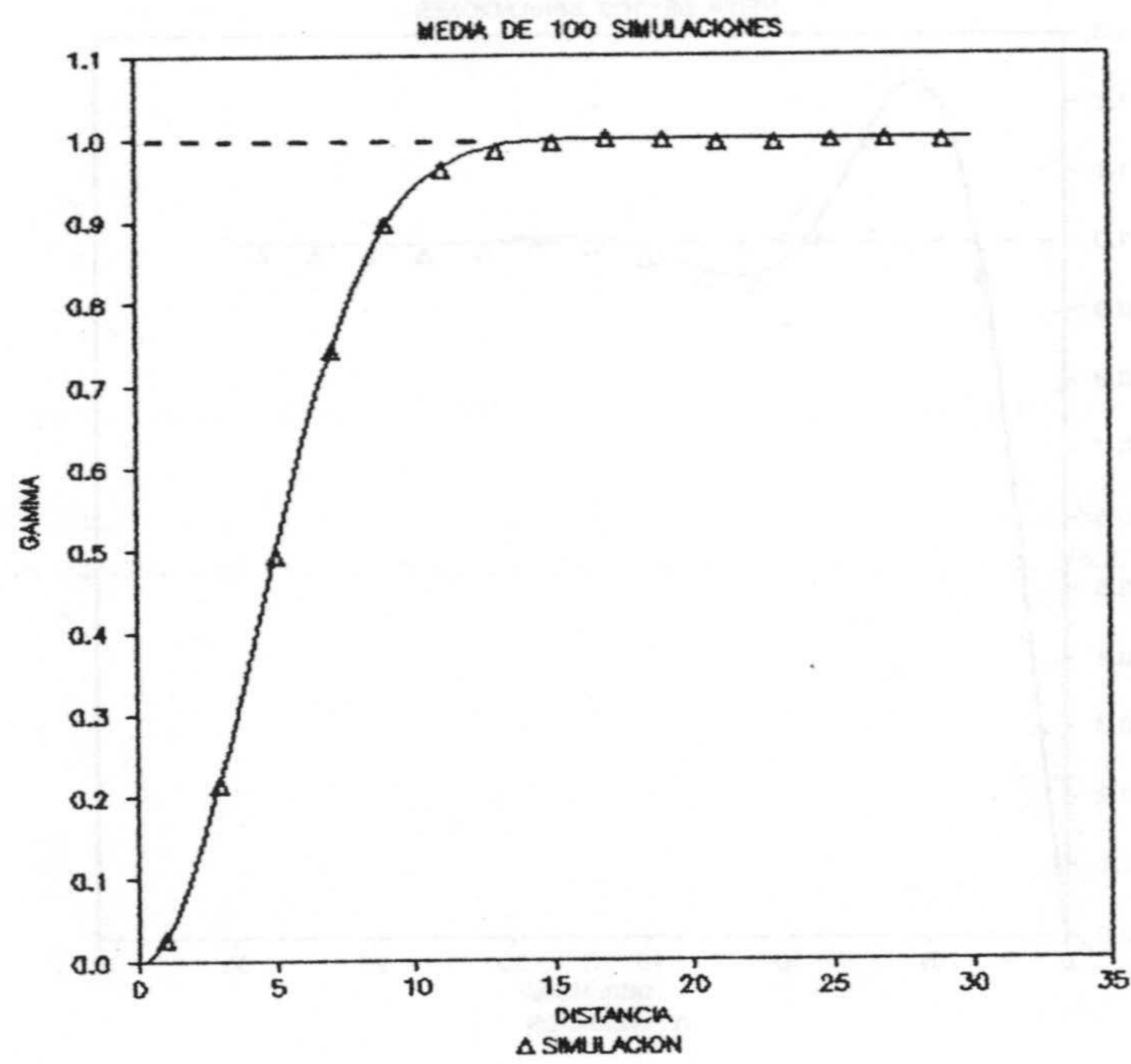


Figura 3.11d. Simulación de un variograma gaussiano.



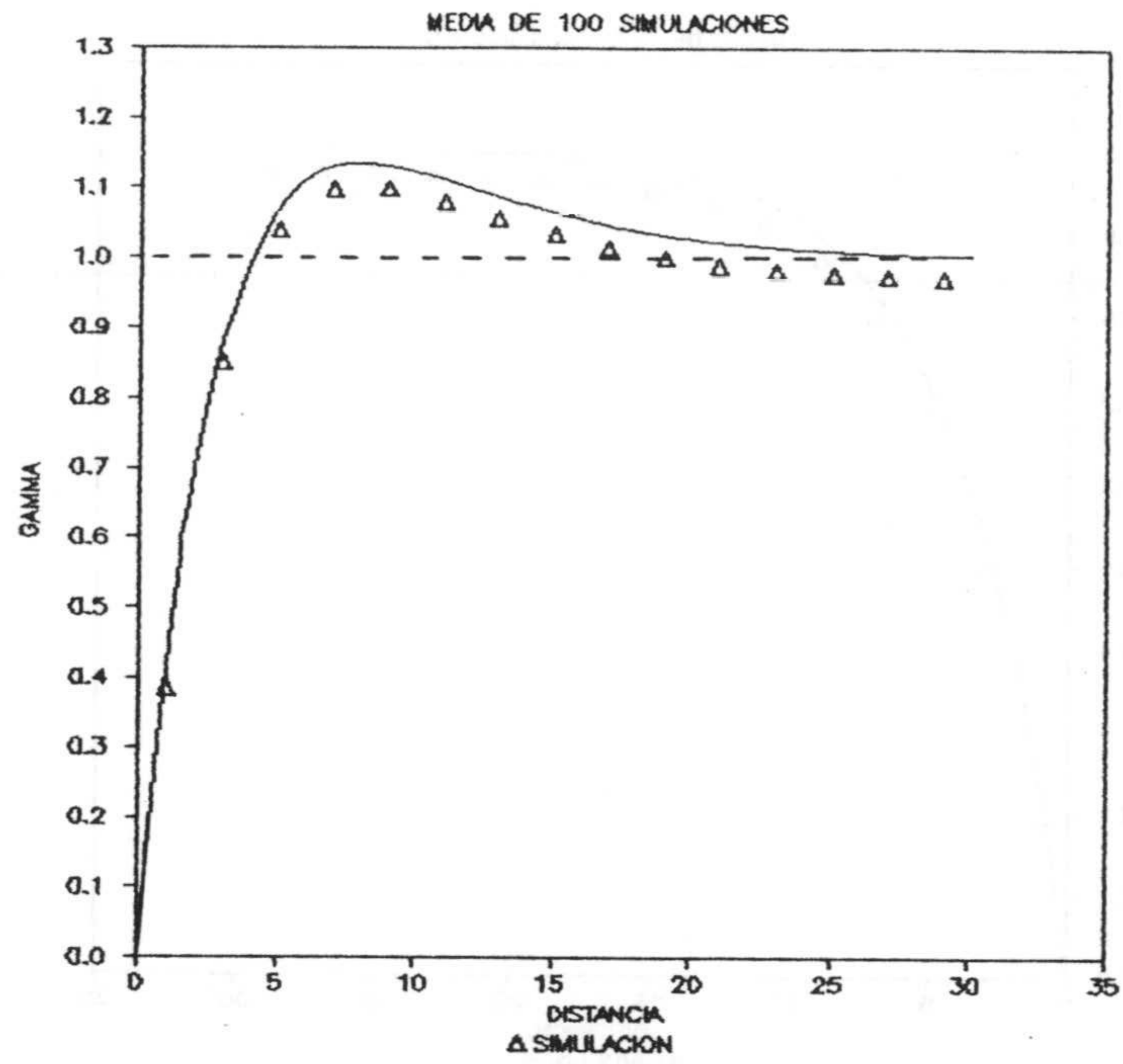


Figura 3.11e. Simulación de un variograma pozo I.

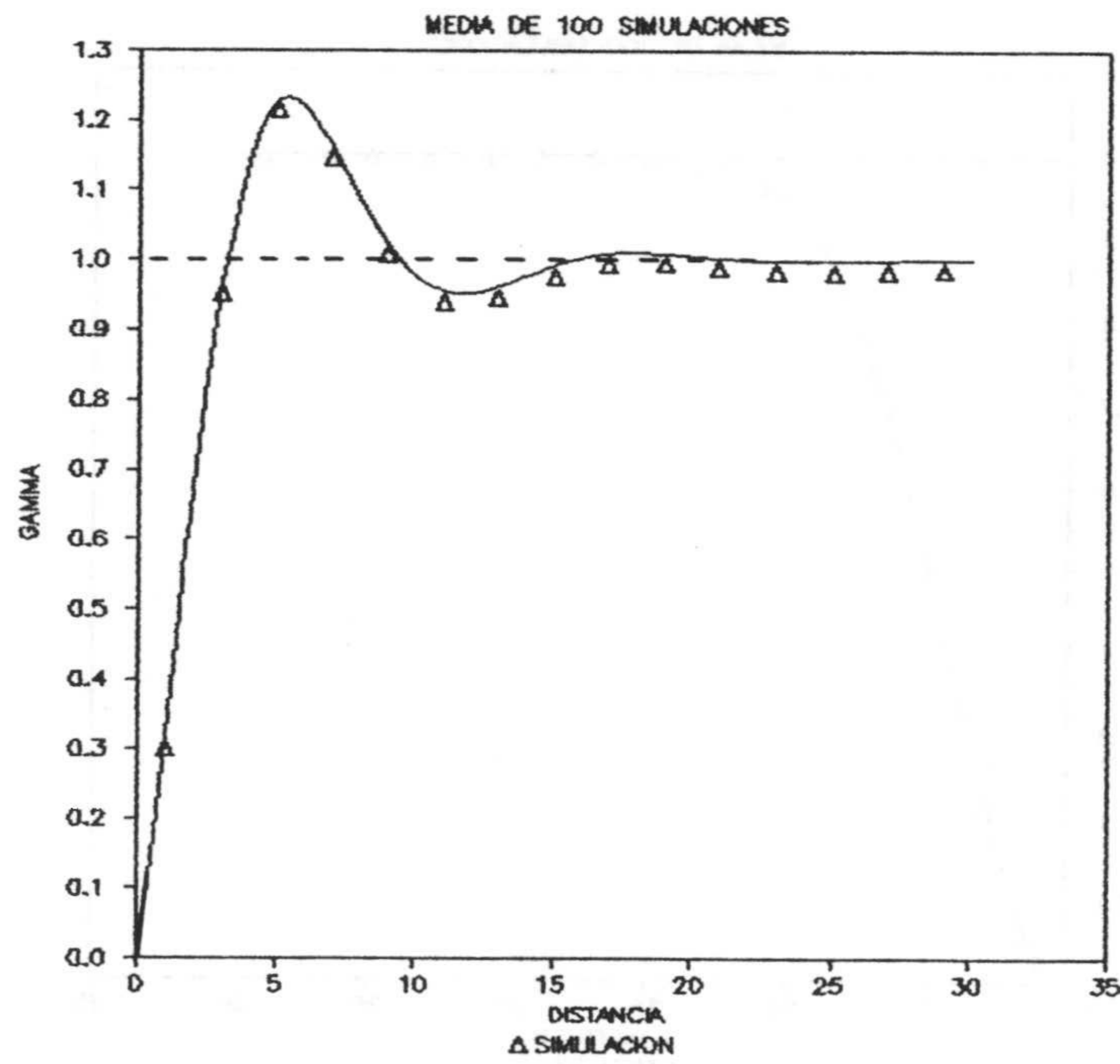


Figura 3.11f. Simulación de un variograma pozo II.



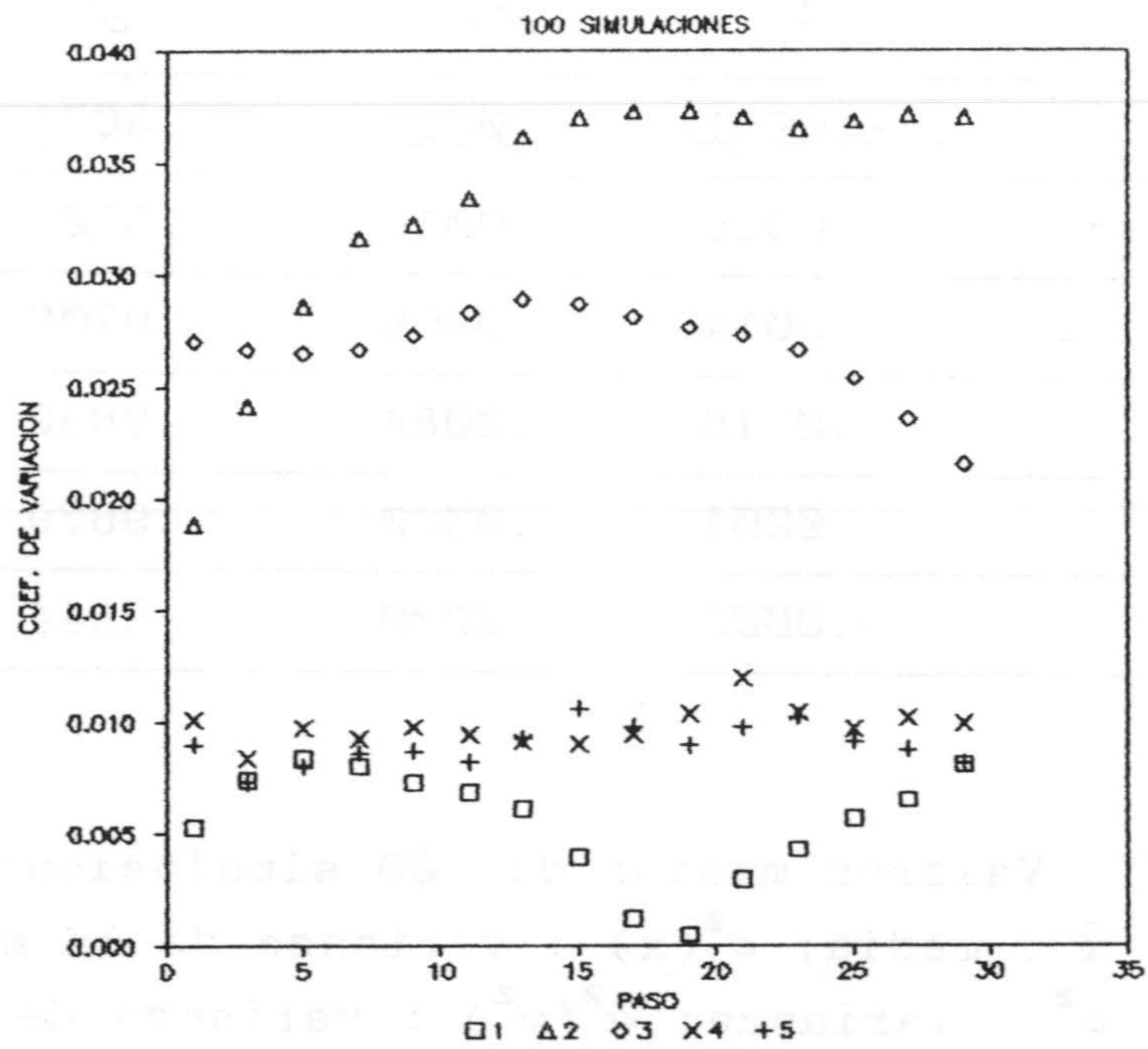


Figura 3.11g. Coeficiente de variación para los modelos  
 □ Esférico; Δ Triangular; ◊ Gausiano;  
 x Pozo I; + Pozo II; \* Exponencial.

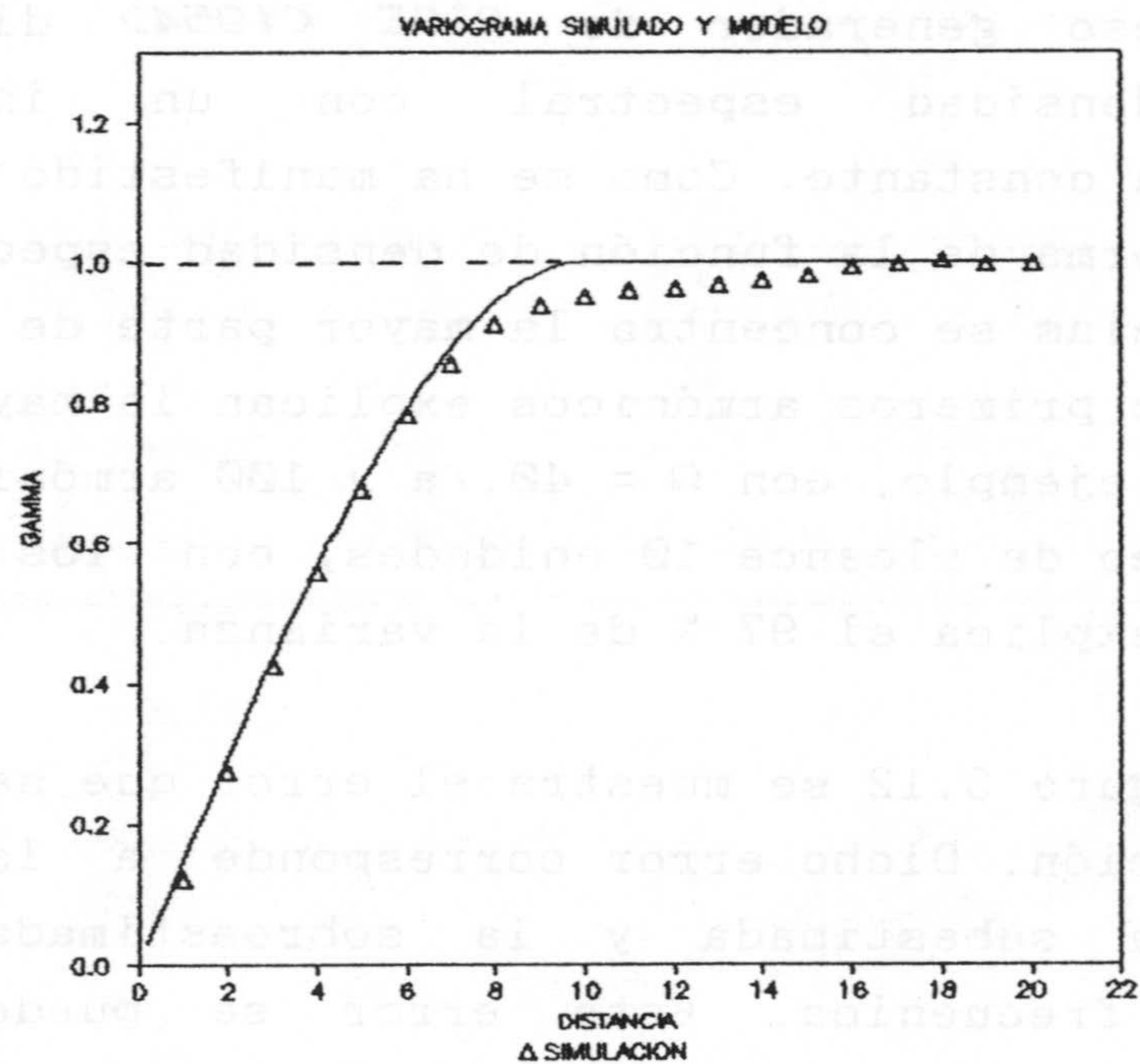


Figura 3.11h. Variograma simulado de una realización para el modelo esférico.



MODELO	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
Esférico	-.0031	.0012	.9674	.0001
Triangular	.0038	.0012	.9701	.0010
Exponencial	-.0014	.0006	.9708	.0001
Gausiano	.0016	.0084	.9869	.0010
Pozo I	.0001	.0000	.9679	.0000
Pozo II	-.0003	.0000	.9844	.0000

Tabla 3.VI. Valores medios de 100 simulaciones.

$\bar{x}$  : media;  $\sigma^2(\bar{x})$  : varianza de la media.

$\sigma^2$  : varianza;  $\sigma^2(\sigma^2)$  : varianza de la varianza media.

El proceso generador de RICE (1954) discretiza la función de densidad espectral con un intervalo de discretización constante. Como se ha manifestado previamente, debido a la forma de la función de densidad espectral, en las bajas frecuencias se concentra la mayor parte de la varianza por lo que los primeros armónicos explican la mayor parte de la misma. Por ejemplo, con  $\Omega = 40./a$  y 100 armónicos, para un modelo esférico de alcance 10 unidades, con los 8 primeros armónicos se explica el 97 % de la varianza.

En la figura 3.12 se muestra el error que se comete en la discretización. Dicho error corresponde a la diferencia entre el área subestimada y la sobreestimada para cada intervalo de frecuencia. Este error se puede considerar despreciable ya que calculando este mismo área con un método de integración numérica más elaborado (método de cuadratura gaussiana) he obtenido idénticos resultados.



No obstante, el hecho de que en los primeros armónicos esté concentrada la mayor parte de la varianza motiva a MUÑOZ-PARDO (1987) a proponer el método equiareal (figura 3.13). En el método equiareal se fija a priori un área  $A$ , en porcentaje de varianza, y se calculan de modo iterativo las frecuencias a las cuales se les ha de asignar dicho área.

En base al método equiareal se consigue una discretización más fina en las proximidades del origen de las frecuencias.

Las figuras 3.14a. a 3.14f. muestran el variograma medio de 100 realizaciones para los seis modelos de covarianza unidimensionales. Se puede observar como para los primeros pasos, valores experimentales y teóricos muestran un buen ajuste; mientras que, una vez alcanzada la meseta, tienen una ligera oscilación en torno a la varianza. En general los resultados son buenos aunque si se comparan los coeficientes de variación (figura 3.14g) con los correspondientes al método original de RICE (1954), se puede concluir que los del método equiareal son ligeramente superiores, aproximadamente el doble.

La figura 3.14h presenta el variograma simulado por una única realización tomada al azar y la figura 3.14i muestra el mismo variograma de la figura anterior pero calculado para grandes distancias, pudiéndose observar como no aparecen periodicidades dignas de mención lo que se debe a que las frecuencias no estén tomadas a intervalos constantes.



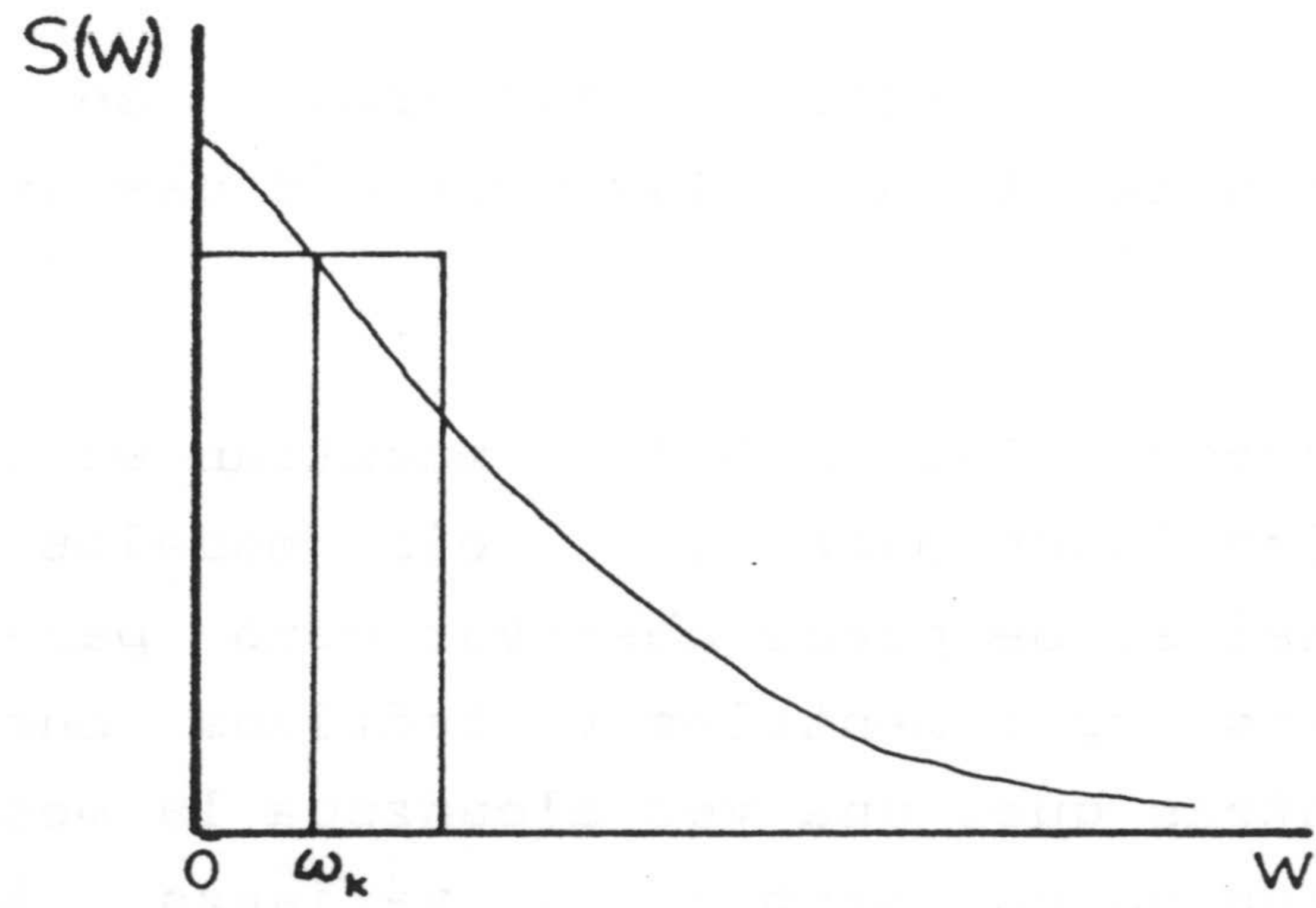


Figura 3.12. Error cometido en la discretización por el método de RICE (1954).

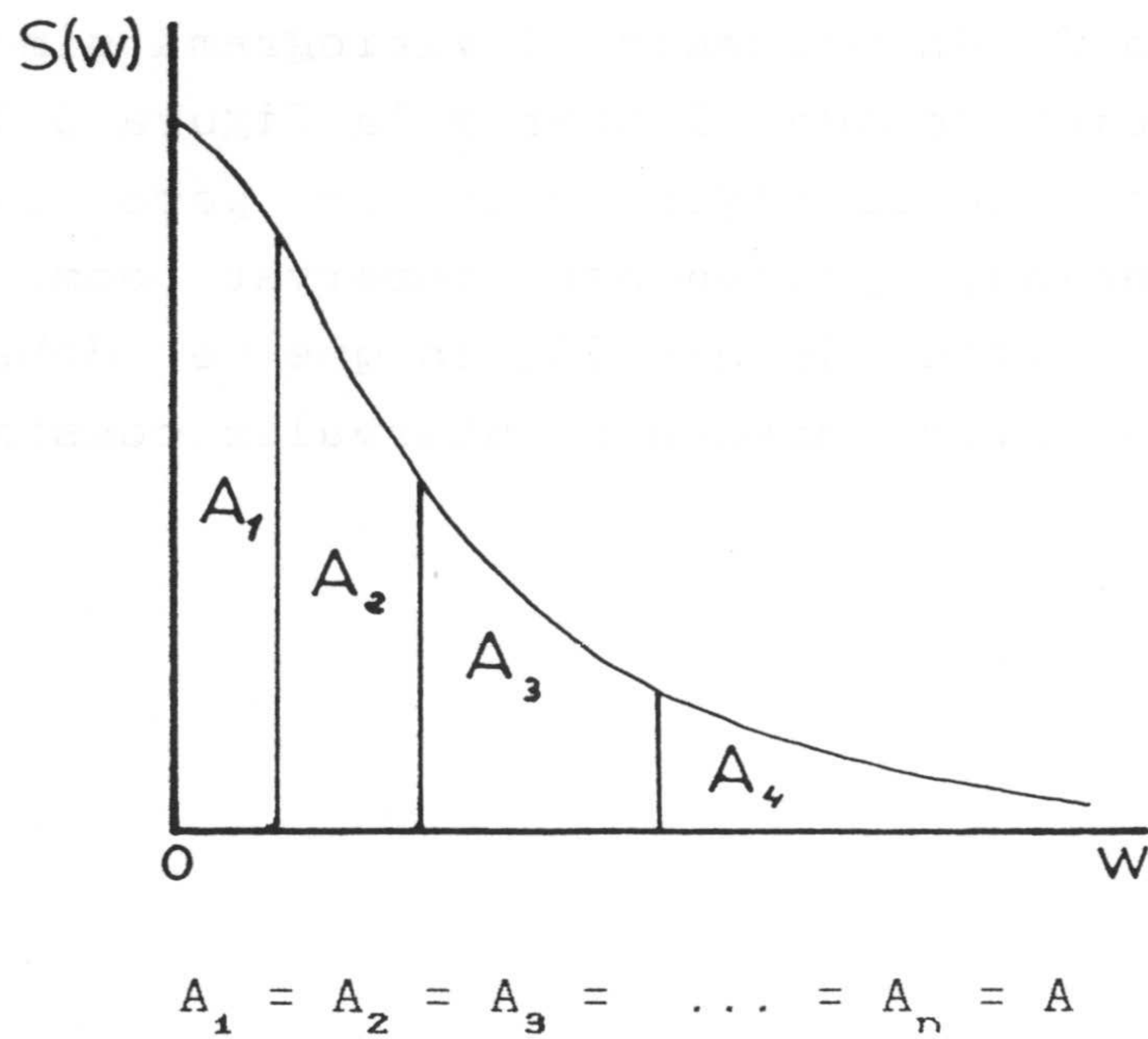


Figura 3.13. Método equiareal.



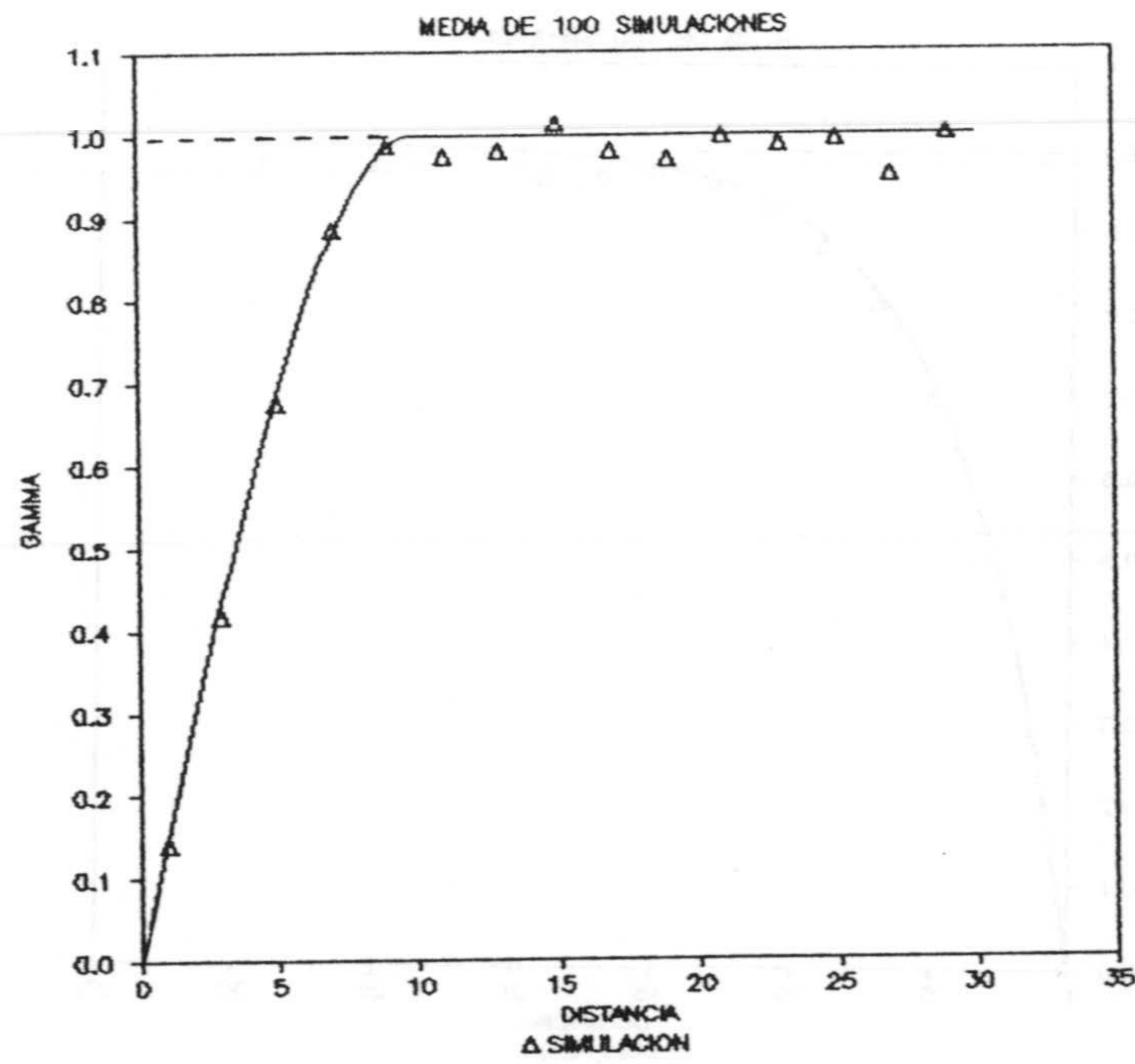


Figura 3.14a. Simulación de un variograma esférico.

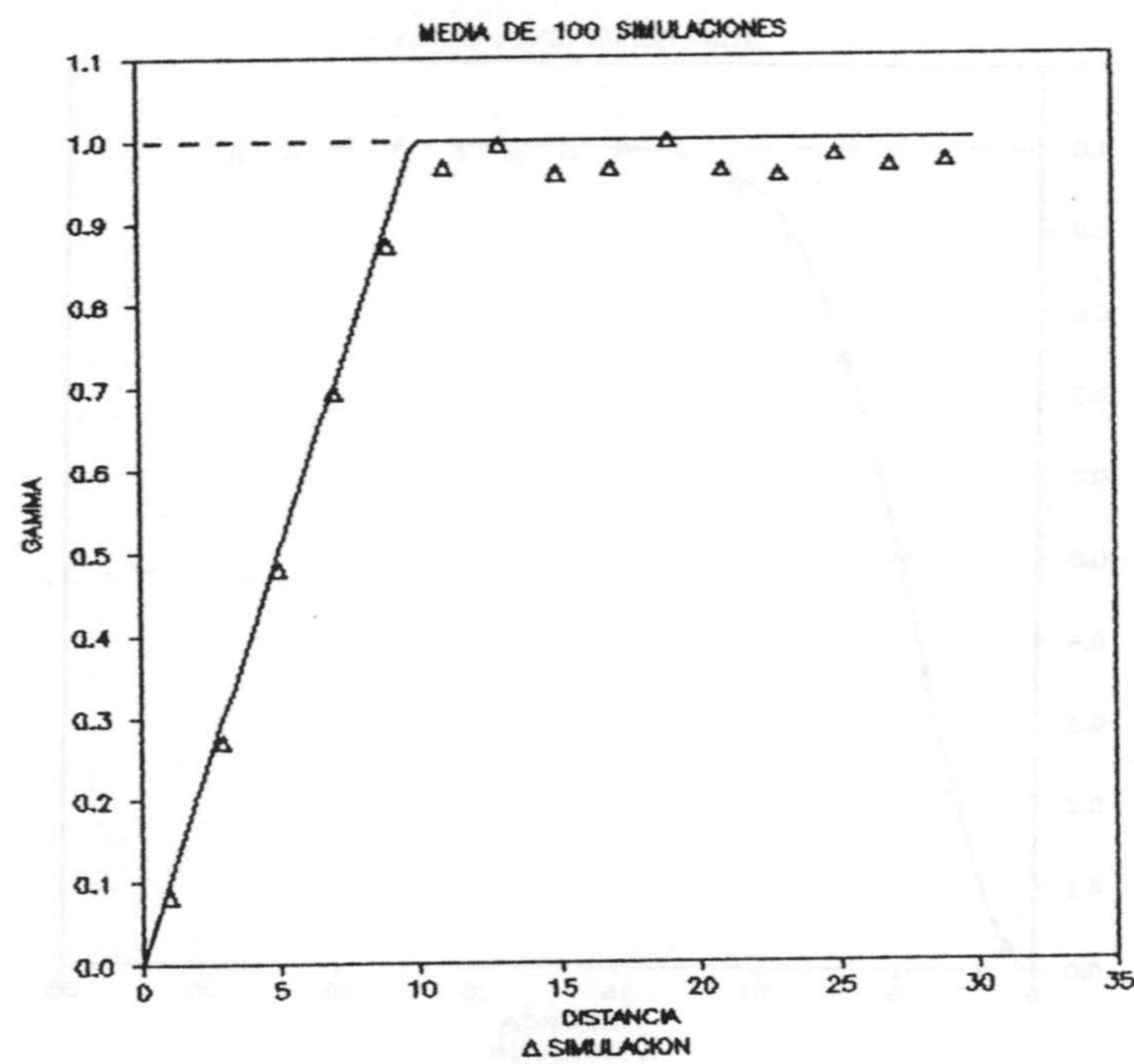


Figura 3.14b. Simulación de un variograma triangular.



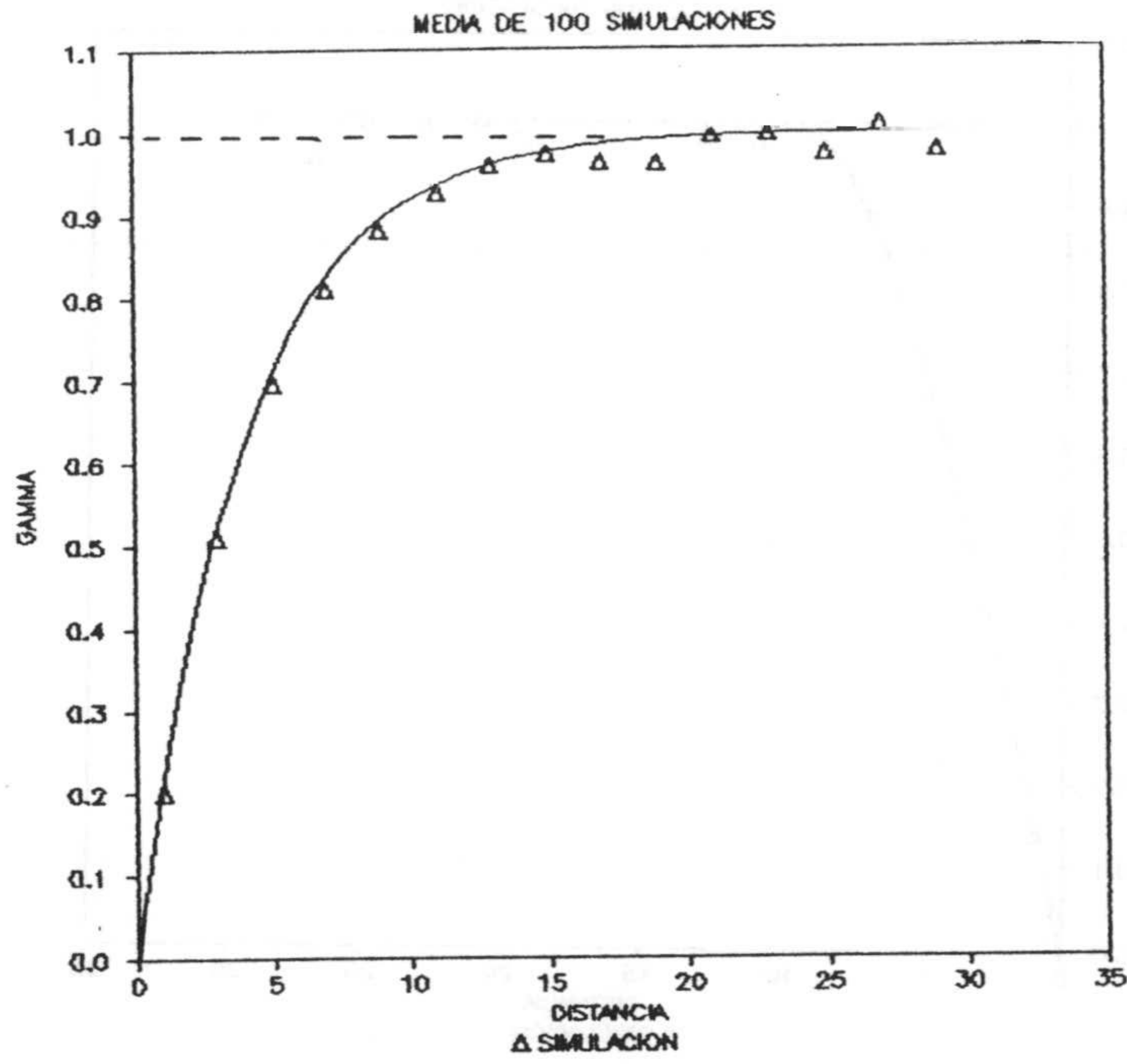


Figura 3.14c. Simulación de un variograma exponencial.

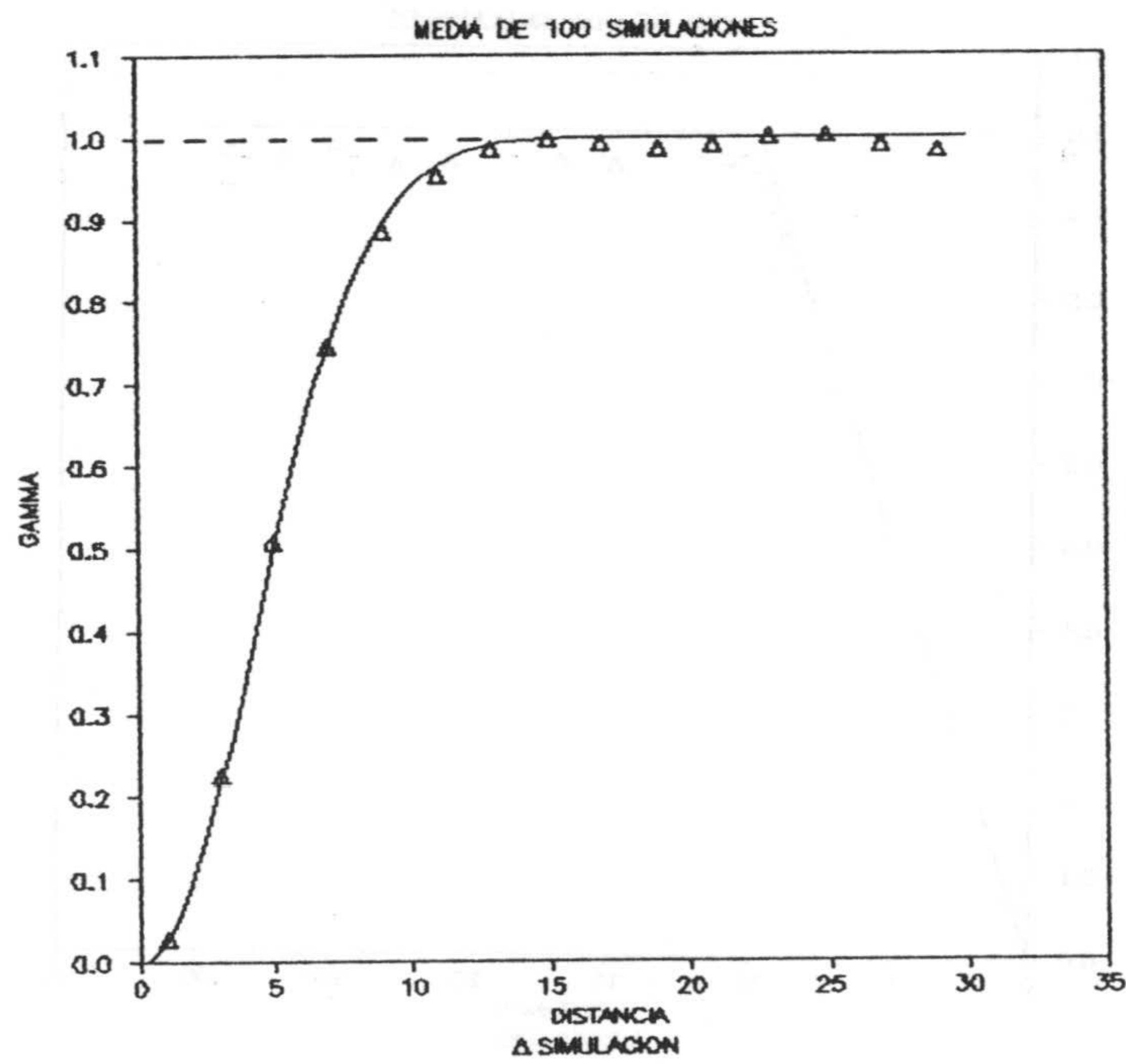


Figura 3.14d. Simulación de un variograma gaussiano.



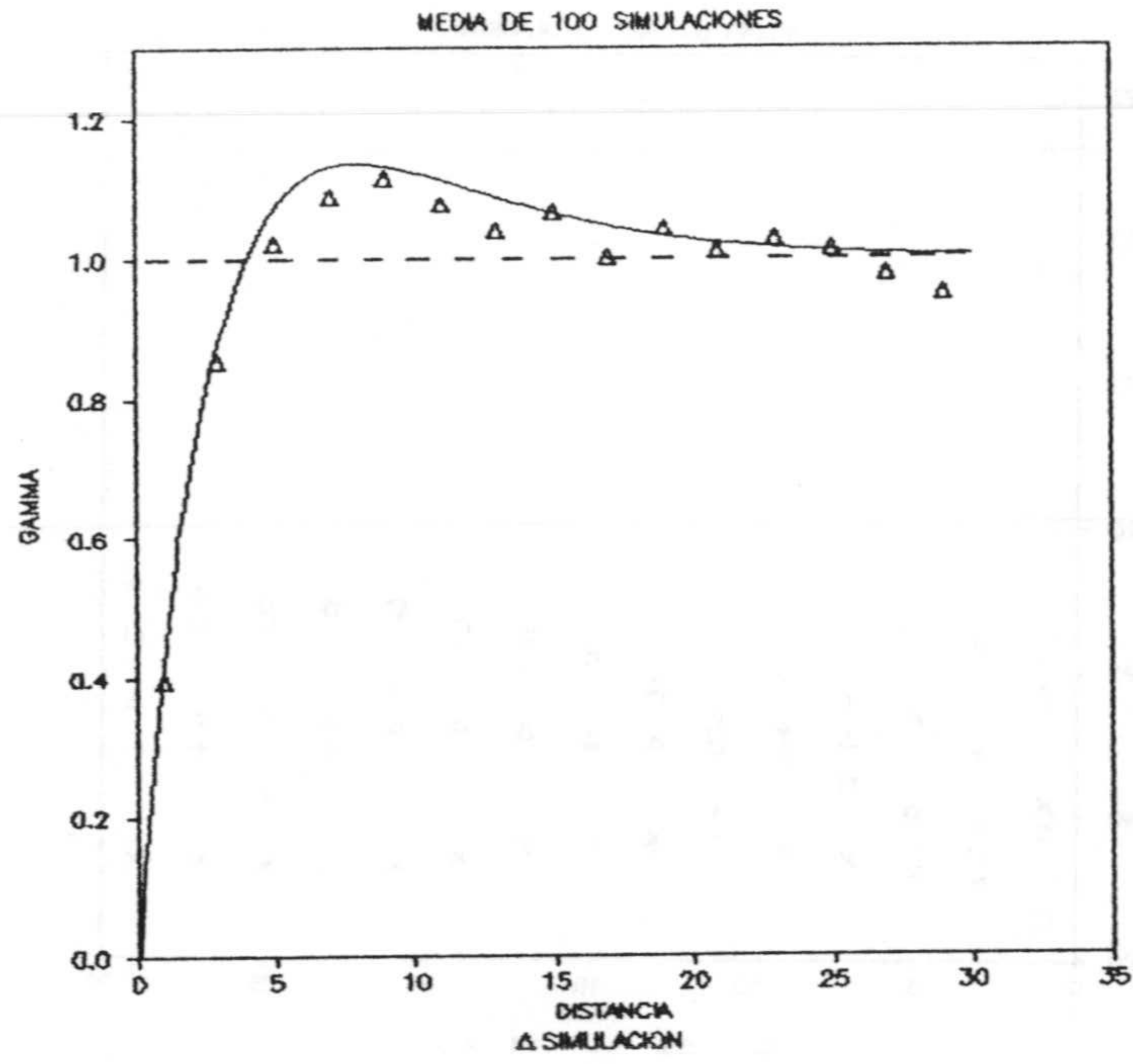


Figura 3.14e. Simulación de un variograma pozo I.

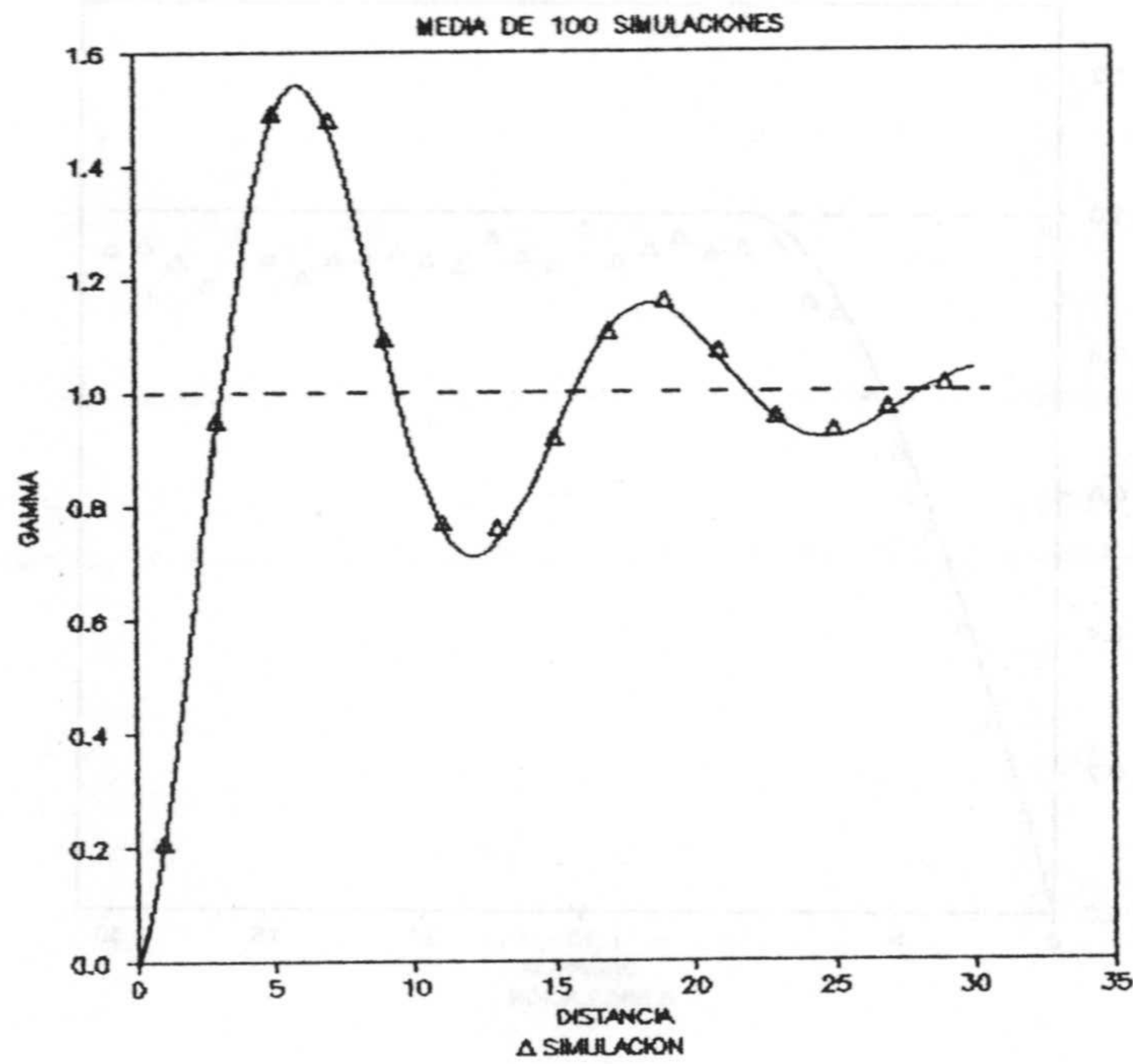


Figura 3.14f. Simulación de un variograma pozo II.



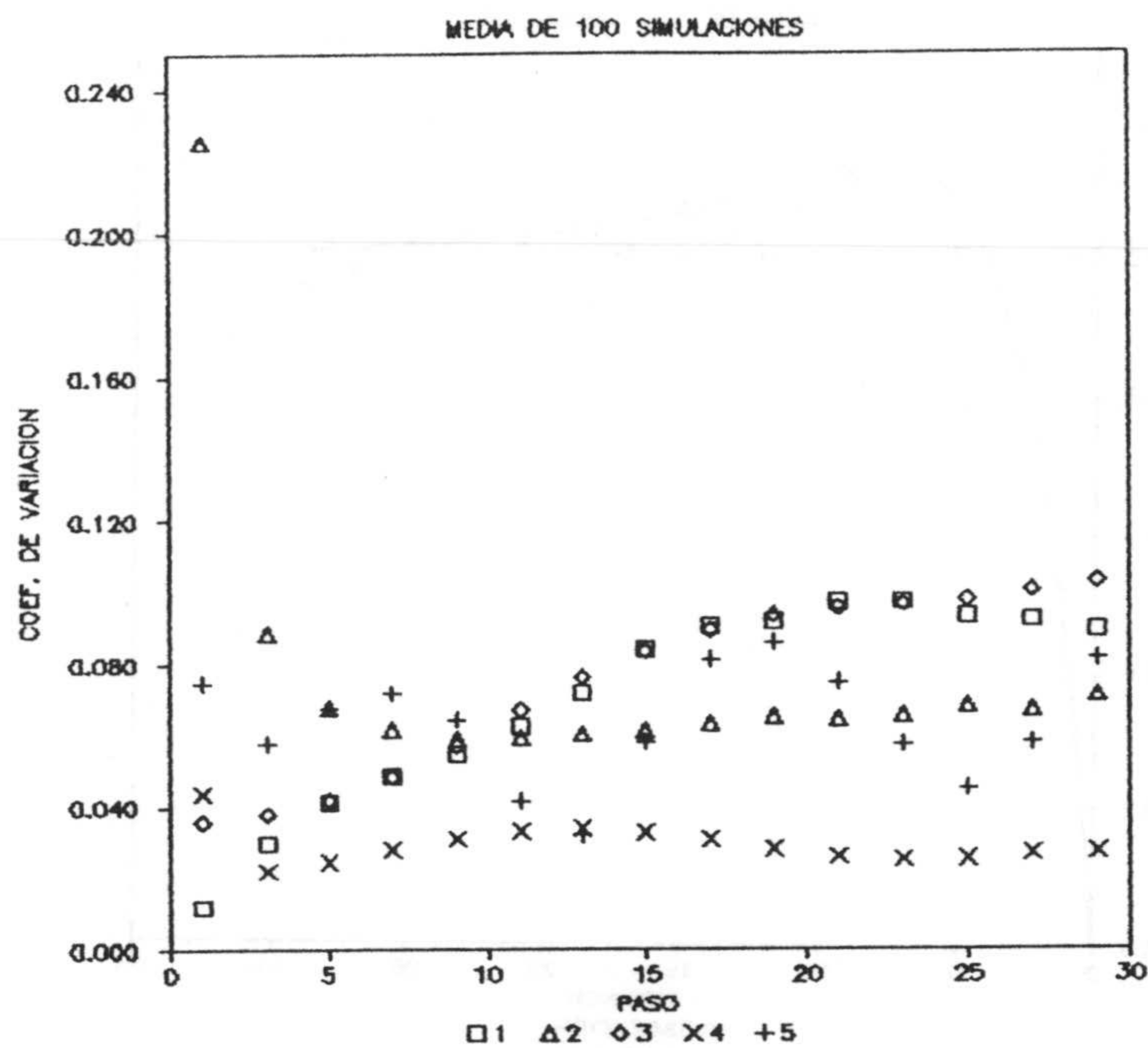


Figura 3.14g. Coeficiente de variación del variograma medio. □ Triangular; Δ Exponencial; ◦ Gausiano; x Pozo I; + Pozo II.

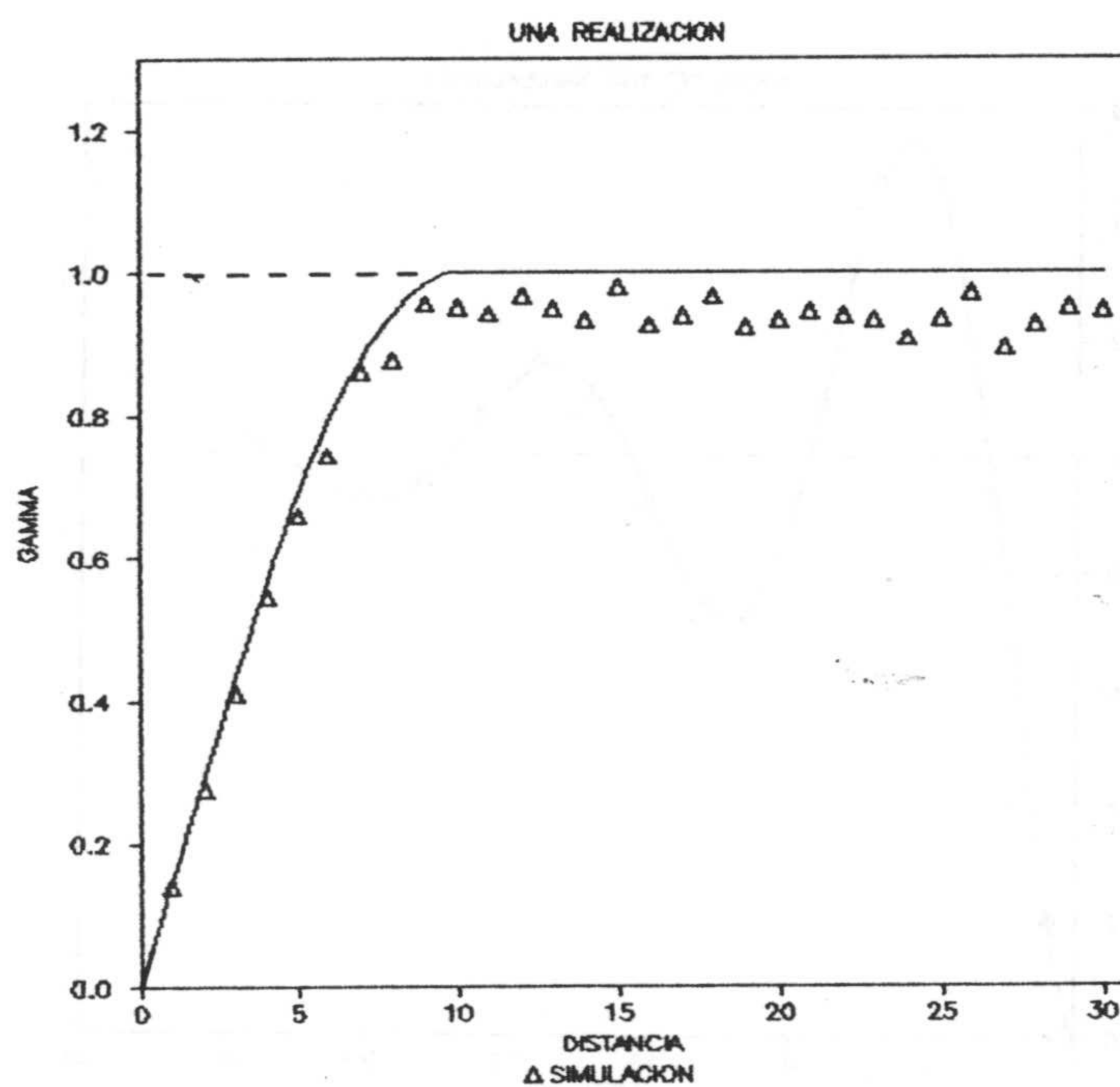


Figura 3.14h. Variograma esférico simulado con una realización.



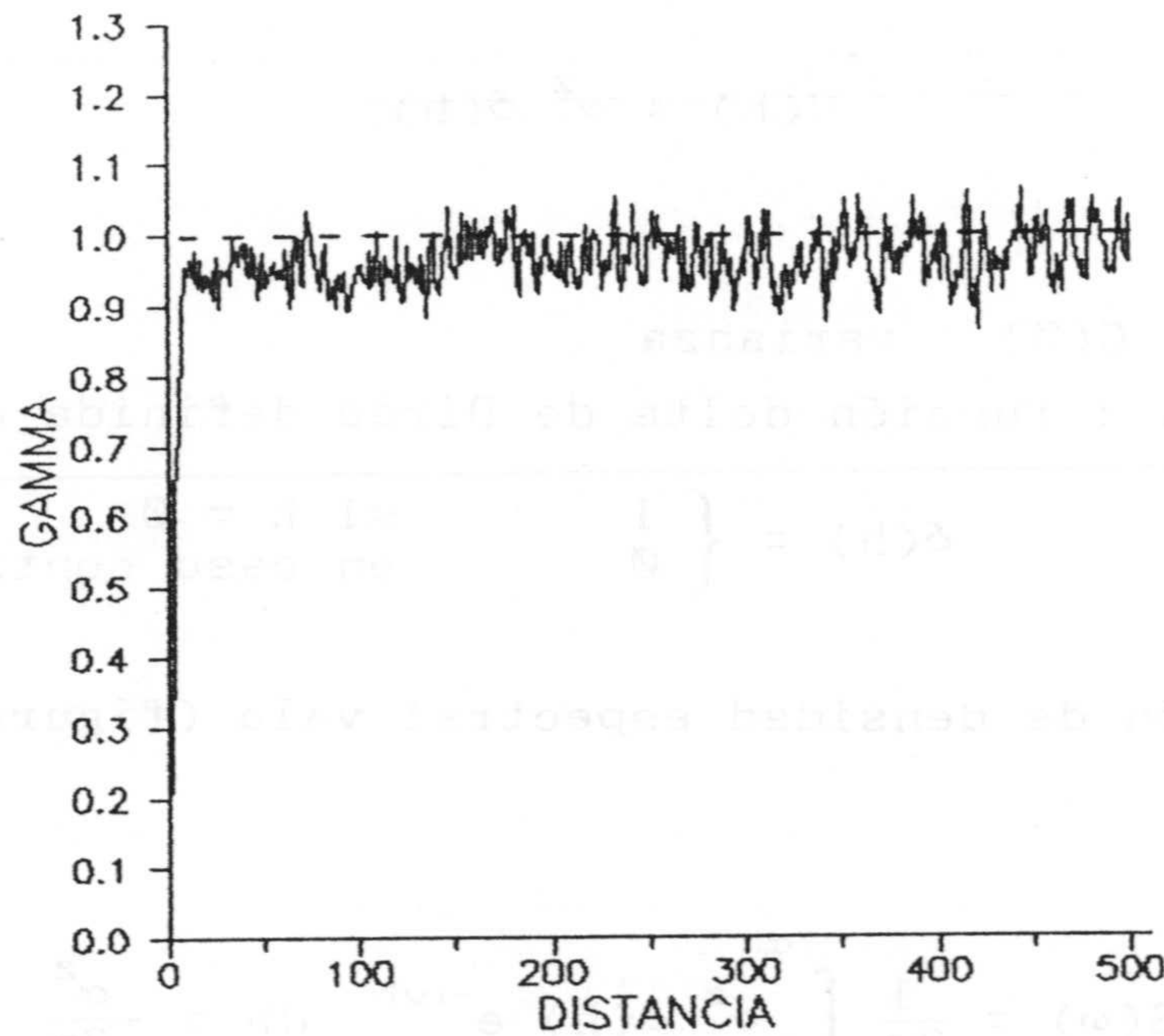


Figura 3.14i. Variograma simulado con una realización y calculado para grandes distancias.

He planteado la simulación espectral del efecto de pepita.

Un efecto de pepita puro corresponde a una ausencia total de autocorrelación por parte de una función aleatoria.

La presencia de un efecto de pepita puro es raro en el estudio de variables geológicas; lo más frecuente es que el variograma aparezca estructurado aunque puede ocurrir que, cuando la distancia tienda a cero, el variograma no tiende asimismo a cero sino a un valor que se conoce como constante de pepita. El origen del efecto de pepita está en microestructuras cuya escala de variación es mucho menor a la escala de muestreo y ello se refleja en la variabilidad total como una discontinuidad aparente en el origen.



La función de covarianza se puede expresar como:

$$C(h) = \sigma^2 \delta(h)$$

donde:

$$\sigma^2 = C(0) : \text{varianza}$$

$\delta(h)$  : función delta de Dirac definida como

$$\delta(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función de densidad espectral vale (figura 3.15):

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \delta(h) e^{-i\omega h} dh = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(h) e^{-i\omega h} dh = 1.$$

En teoría, la densidad espectral de un ruido blanco estacionario tiene un valor constante en un intervalo de frecuencias infinito. Por ello se puede introducir la noción de ruido blanco de banda (PUGACHEV, 1973) para una función aleatoria estacionaria cuya densidad espectral es constante en cierta gama de frecuencias y es igual a cero fuera de esa gama.

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\pi} & \text{si } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

La covarianza correspondiente a un ruido blanco de banda

vale:

$$C(h) = 2 \cdot \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma^2}{2\pi} \cos(\omega h) d\omega = \frac{\sigma^2}{\pi h} \text{sen}(\omega_0 h)$$

La dispersión del ruido blanco de banda es finita y si por ejemplo se toma  $\omega_0 = \pi$  se tiene

$$C(h) = \frac{\sigma^2}{\pi h} \text{sen}(\pi h) = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, n$$

los términos de toda secuencia aleatoria de puntos equidistantes no están correlacionados.

En la figura 3.16a se presenta el variograma de un ruido blanco generado por el proceso de RICE (1954). Se han simulado 300 puntos equidistantes a distancia unidad; la media experimental obtenida ha sido cero y la varianza 0.5. La figura 3.16b representa el variograma de una realización obtenida simplemente tomando al azar valores aleatorios de media cero y varianza 0.5. La media de la realización de 300 puntos ha sido -0.008 y la varianza 0.483. Si se comparan ambas figuras se observa como el variograma de la realización generada por el método espectral presenta una dispersión menor con respecto a su valor teórico.

A pesar de mejorarse la precisión mediante esta técnica de simulación de un efecto de pepita, no la he utilizado en la práctica por dos motivos principalmente:

1). Es una técnica excesivamente barroca que requiere mucho más trabajo adicional que la generación simple de valores al azar.



2). Como se aprecia claramente en la figura 3.16.c el variograma se repite periódicamente y corresponde a la periodicidad de la función covarianza que en este caso es una función delta de Dirac.

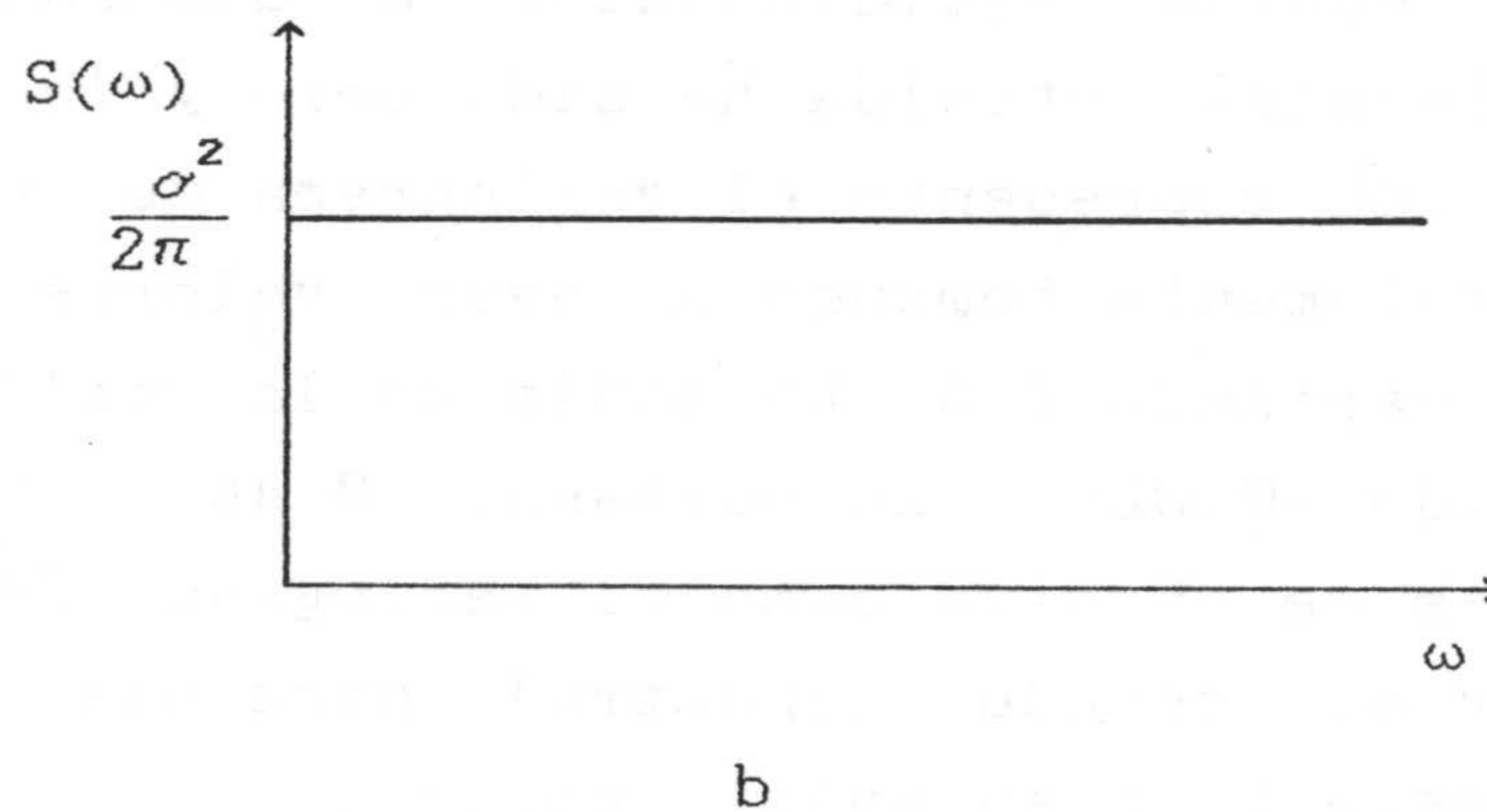
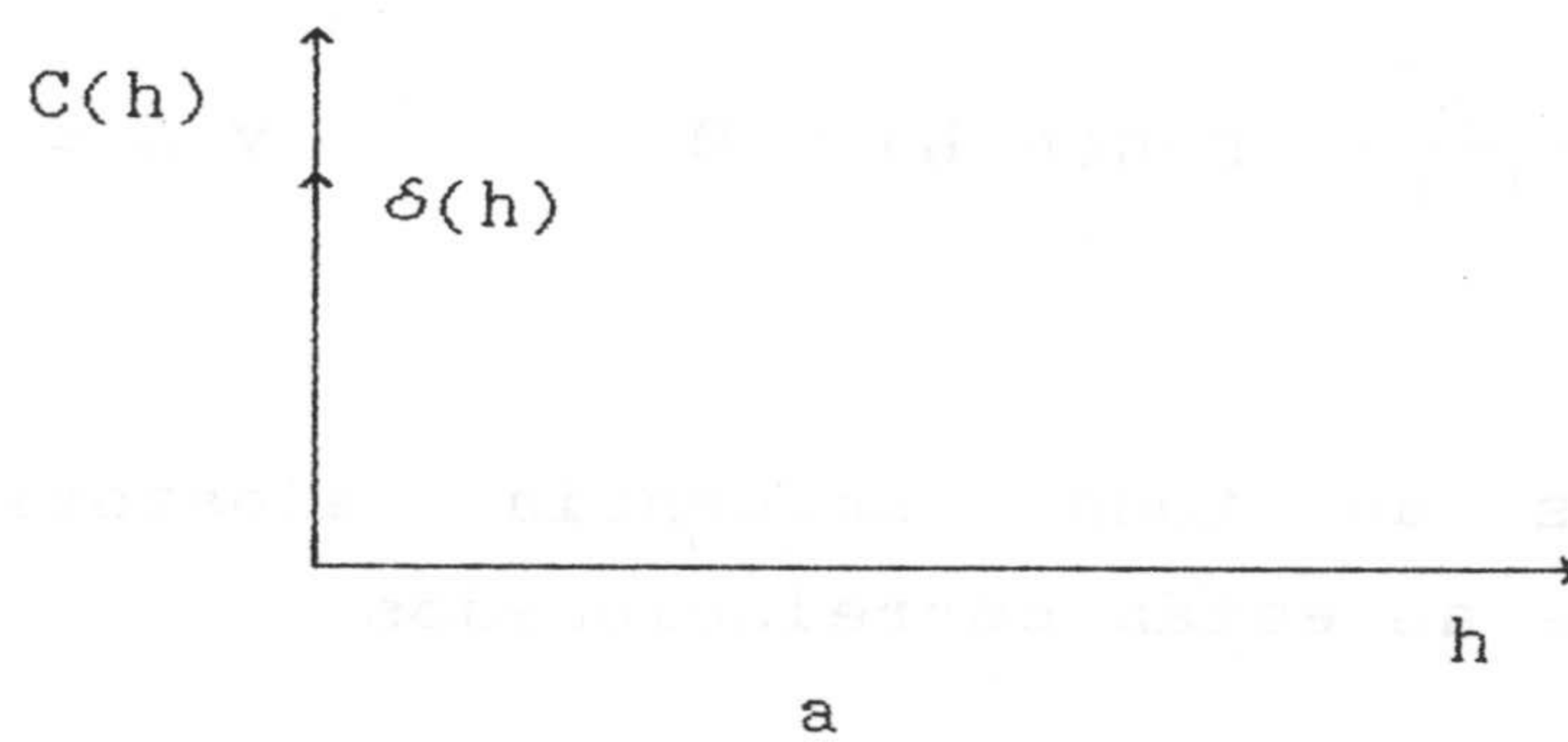


Figura 3.15a Función de covarianza de un ruido blanco.  
b. Función de densidad espectral.

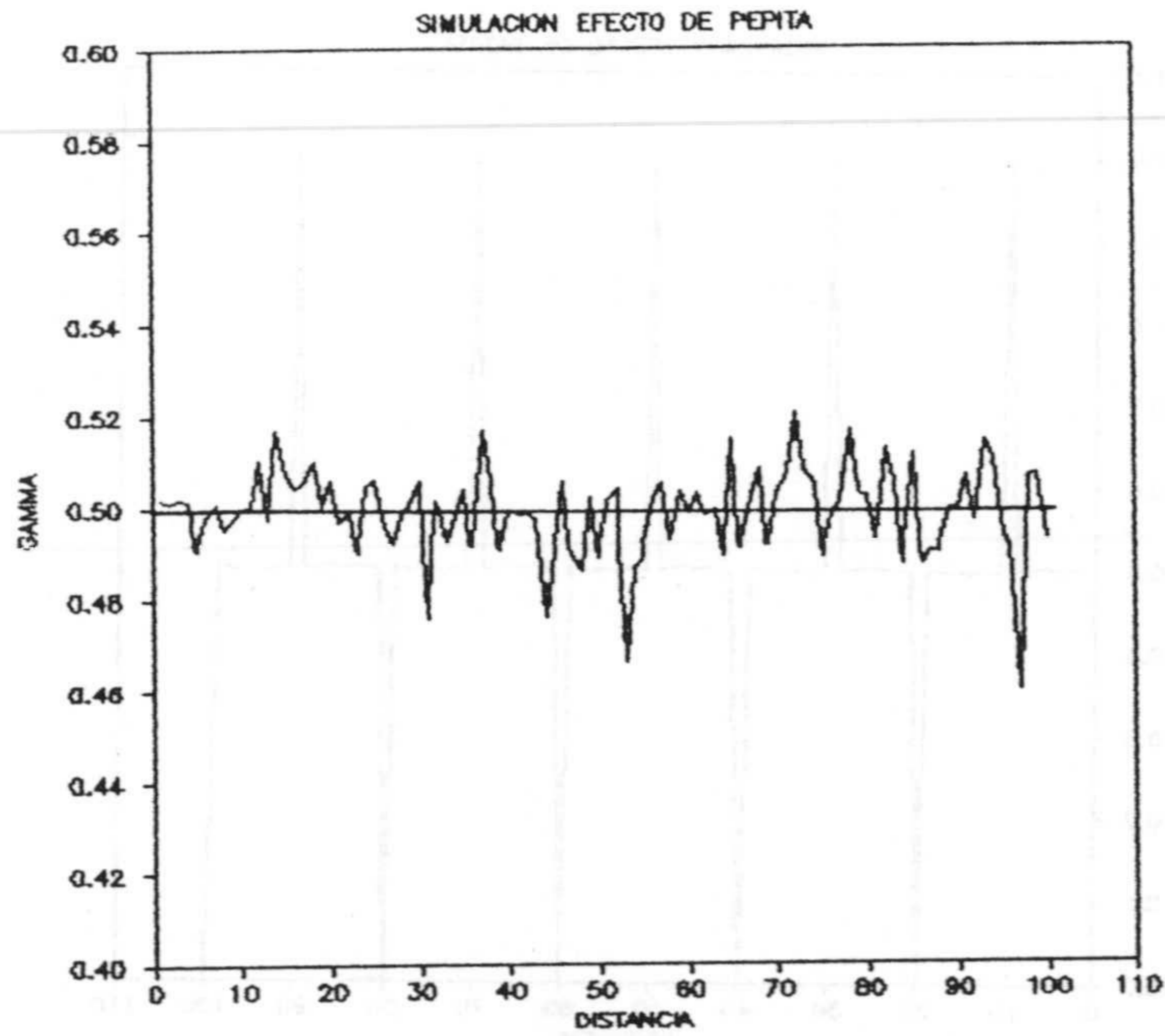


Figura 3.16a. Variograma de un ruido blanco simulado por el método espectral.

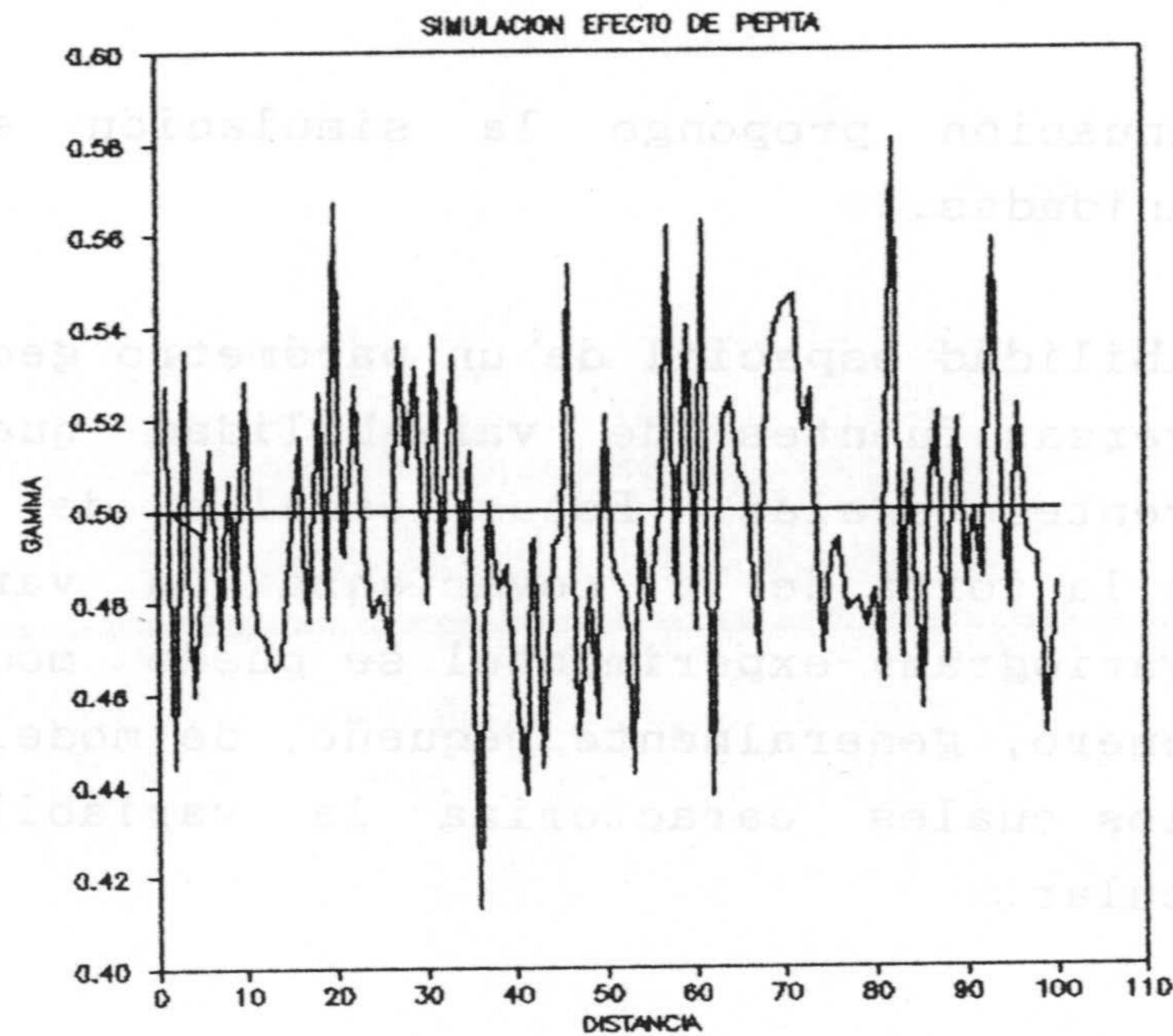
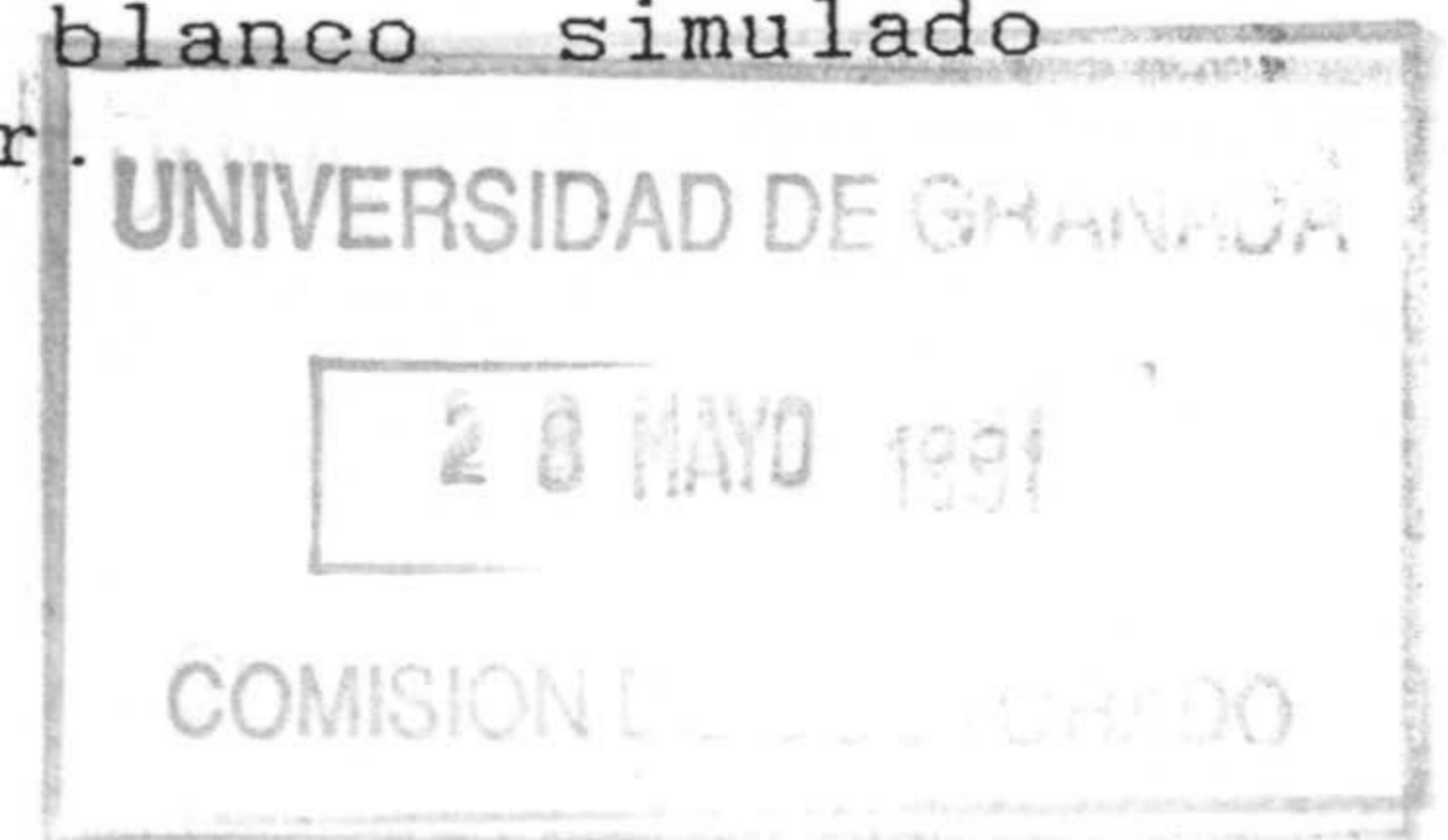


Figura 3.16b. Variograma de un ruido blanco simulado generando valores al azar.





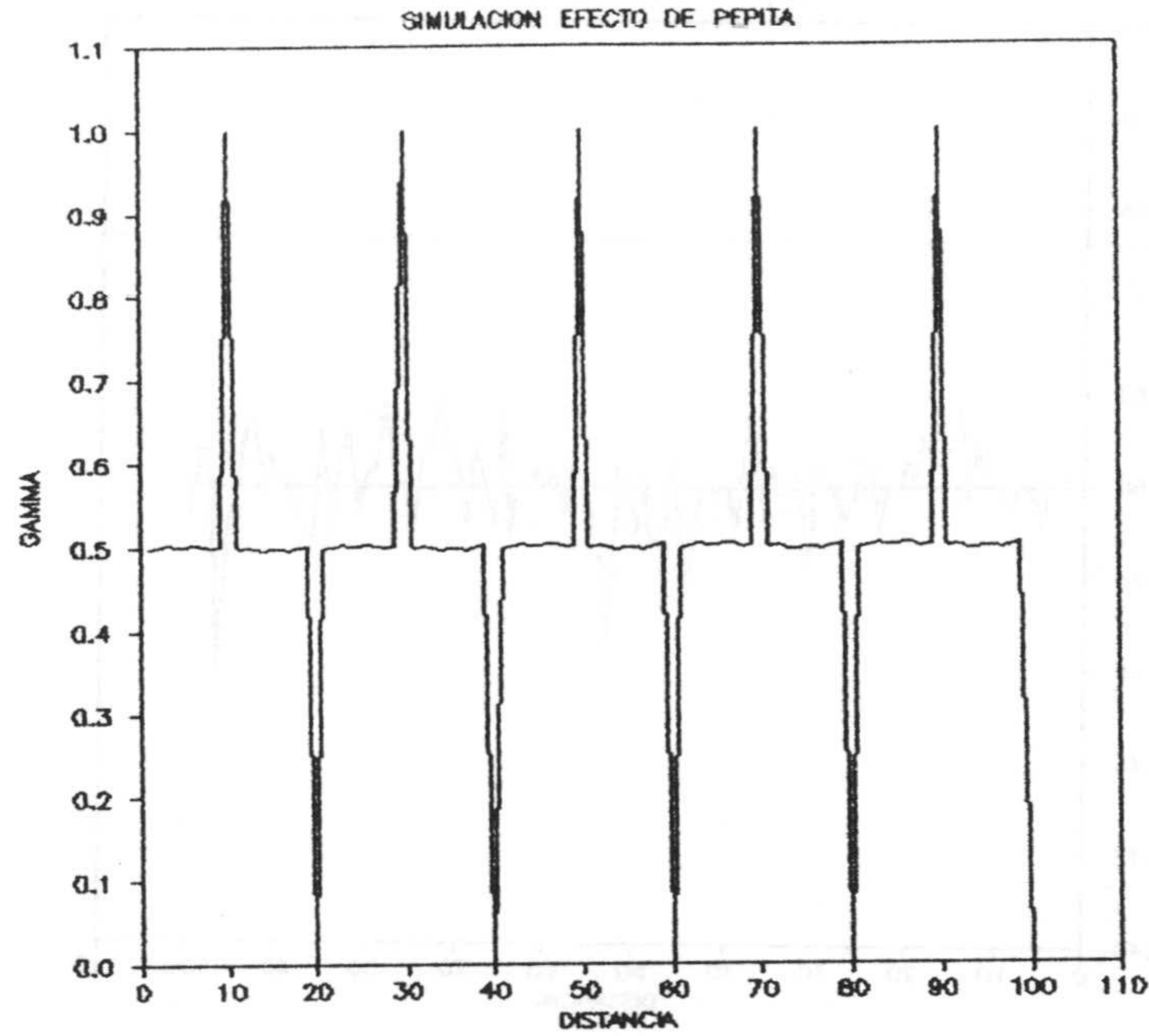


Figura 3.16c Variograma de un ruido blanco generado por técnicas espectrales y calculado para grandes distancias.

A continuación propongo la simulación espectral de estructuras anidadas.

La variabilidad espacial de un parámetro geológico puede deberse a diversas fuentes de variabilidad que entran en juego a diferentes escalas. Estas escalas de variabilidad repercuten en la forma de la covarianza (o variograma) de modo que el variograma experimental se puede modelizar como suma de un número, generalmente pequeño, de modelos simples; cada uno de los cuales caracteriza la variabilidad a una escala particular:

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_i(h)$$

$$C(h) = C_1(h) + C_2(h) + \dots + C_i(h)$$

Como es conocido, la función de densidad espectral es la transformada de Fourier de la función covarianza, y al ser esta una operación lineal, la transformada de una suma es igual a la suma de las transformadas de cada uno de los sumandos.

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \dots + S_i(\omega)$$

Esto significa que para la simulación de estructuras anidadas, es suficiente con calcular la función de densidad espectral de cada estructura elemental, sumarlas para componer la densidad espectral del proceso y utilizar el generador de *RICE (1954)*.

El caso más frecuente en la práctica geoestadística es modelizar un variograma experimental, en el que se han reconocido estructuras anidadas, en base a modelos esféricos de distinto alcance y meseta.

A continuación se presentan los resultados de la simulación de dos variogramas diferentes modelizados respectivamente con dos (caso A) y con tres (caso B) estructuras simples; y cuyos parámetros se resumen en la tabla 3.VII.



	Dos estructuras		Tres estructuras	
	Alcance	Meseta	Alcance	Meseta
Estructura I	10.	0.4	10.	0.4
Estructura II	30.	0.6	20.	0.3
Estructura III	0	0	50.	0.3

Tabla 3.VII. Parámetros de los variogramas con estructuras superpuestas.

En la figura 3.17a se muestra la función de densidad espectral correspondiente a la covarianza con dos estructuras simples y la figura 3.17b hace lo propio para la correspondiente a tres estructuras. Se observa como al aumentar el número de estructuras la función de densidad espectral tiende a parecerse cada vez más a la función de densidad espectral para un modelo exponencial. En las figuras 3.17c y 3.17d se ha representado el variograma medio de 100 realizaciones y el correspondiente modelo; se observan muy buenos resultados en ambos casos. Como se ha visto que ocurría en el caso de simulación de una estructura simple los valores simulados van ligeramente por debajo de los correspondientes valores teóricos. La figura 3.17e muestra el coeficiente de variación del variograma medio, el cual es similar para dos y tres estructuras y ligeramente superior al observado en la simulación de una única estructura esférica; además destacar como aumenta progresivamente con la distancia.

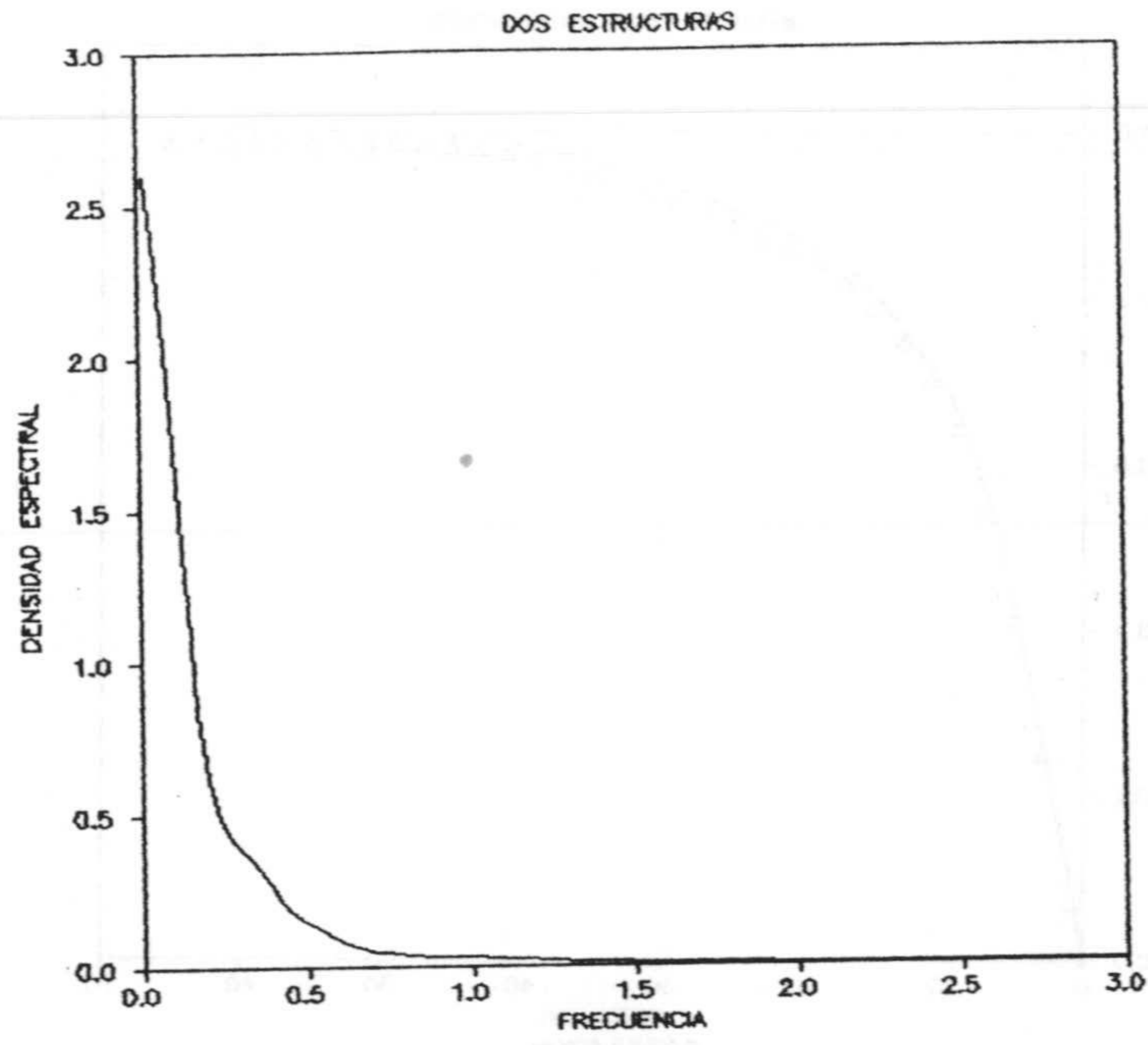


Figura 3.17a. Función de densidad espectral para dos estructuras anidadas.

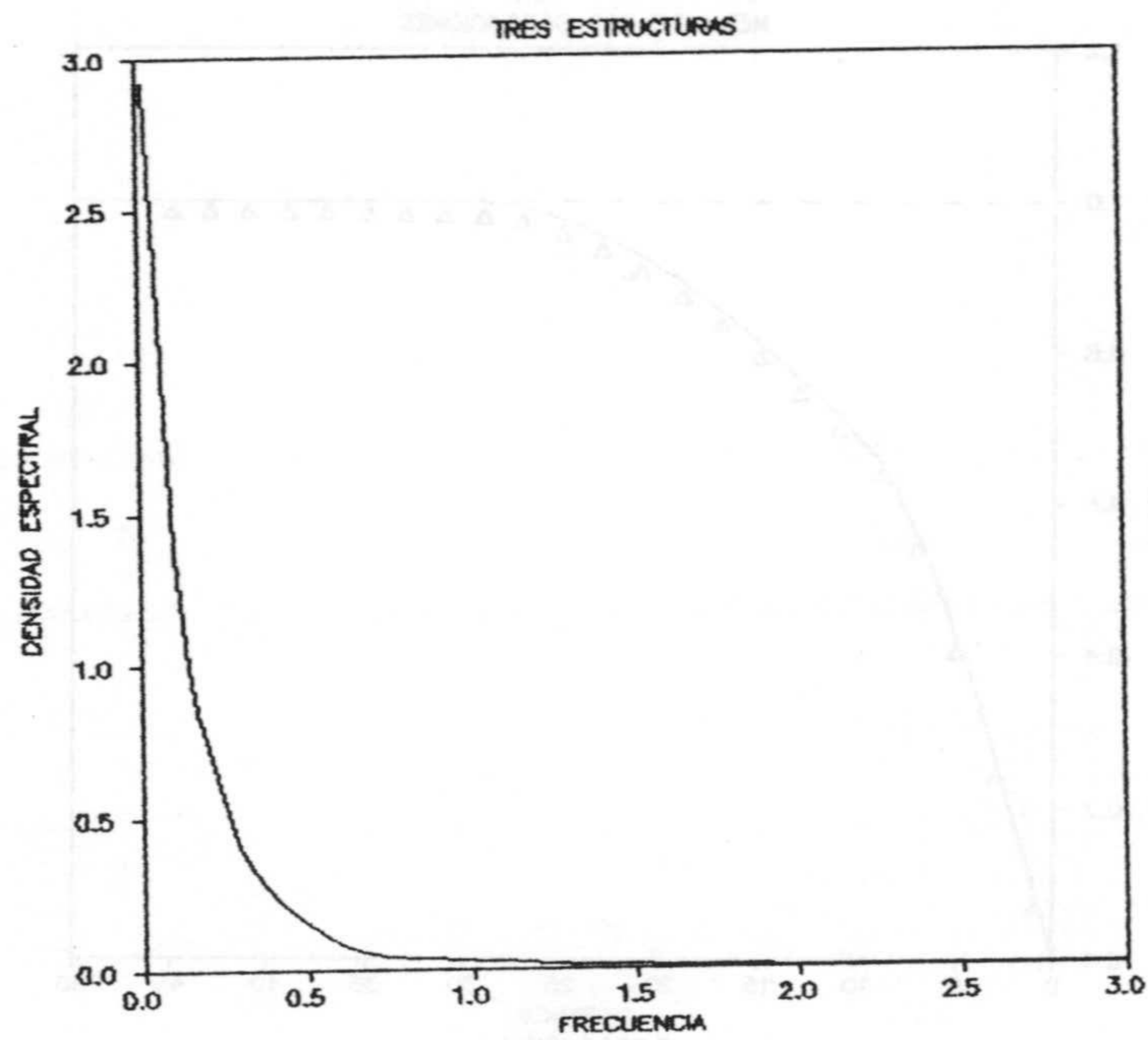


Figura 3.17b. Función de densidad espectral para tres estructuras anidadas.



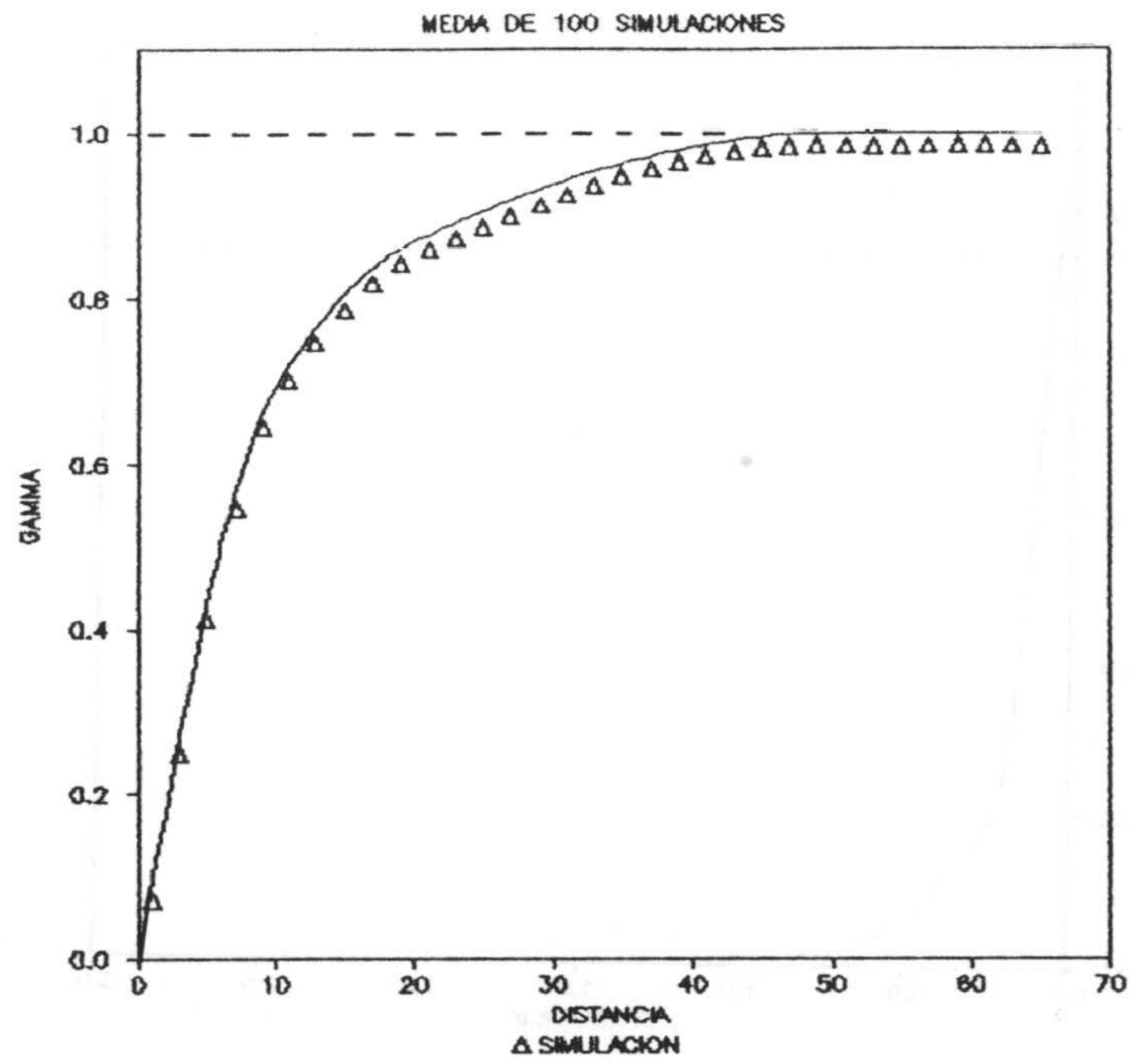


Figura 3.17c. Variograma simulado con dos estructuras.

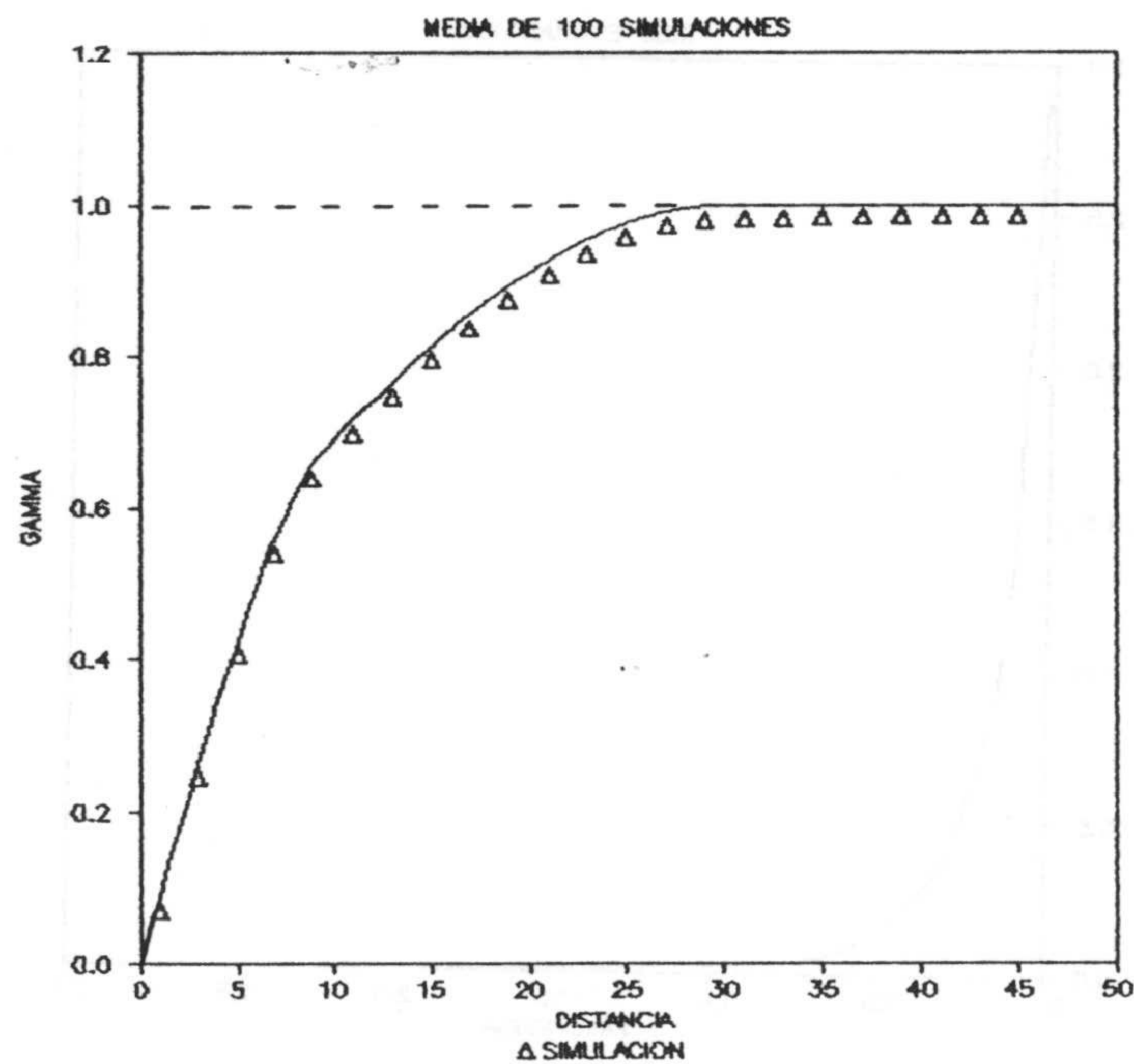


Figura 3.17d. Variograma simulado con tres estructuras.

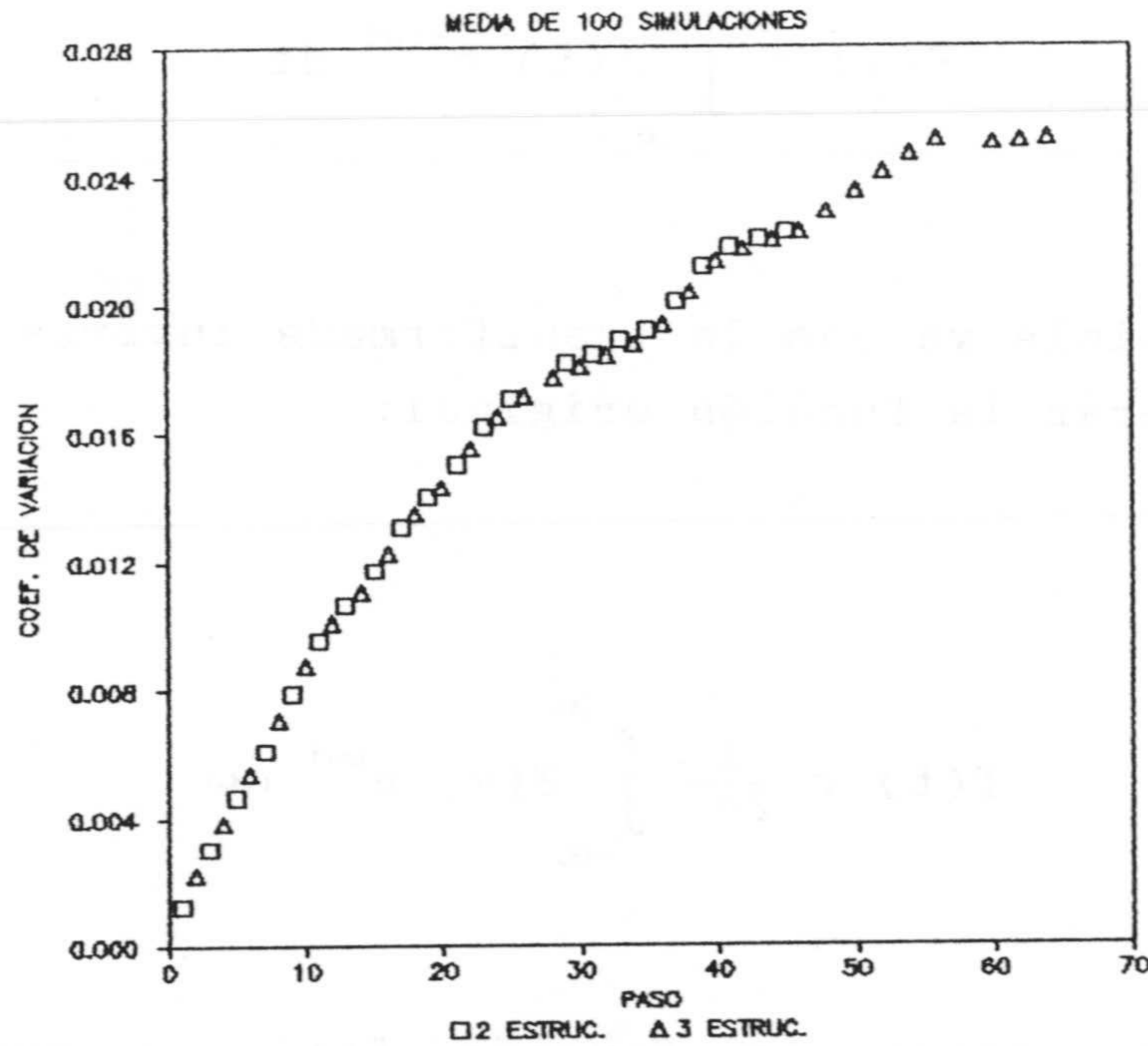


Figura 3.17e Coeficiente de variación de los variogramas medios simulados.

Las limitaciones de los métodos anteriores hacen plantearse un método más general que manteniendo cotas de precisión aceptables permitan simular cualquier tipo de función de covarianza y no presente periodicidades en la función variograma de la realización simulada, de modo que se pueden generar series tan largas como se deseen. Con el fin de conseguir dicho objetivo he desarrollado el siguiente apartado.

### 2.2.3. Técnicas que hacen uso de la transformada rápida de Fourier (FFT)

Como es conocido, la transformada de Fourier de una función  $f(t)$  está definida por:



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

proceso reversible ya que la transformada inversa de Fourier permite recuperar la función original:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

En muchos casos la función  $f(t)$  es una expresión complicada por lo que la resolución analítica de las integrales que definen la transformada de Fourier puede resultar ardua si no imposible. En otras ocasiones no se conoce la expresión analítica de  $f(t)$  sino sólo un número finito de sus valores a intervalos discretos de  $t$ . Resulta por todo ello interesante calcular la transformada de Fourier de una secuencia  $\{f(k)\}$  de  $N$  elementos de la función  $f(t)$ . De este modo, el par de transformadas discretas de Fourier se define como:

$$F(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp(-2\pi k j / N) \quad j \in [\emptyset, N-1]$$

$$f(k) = \sum_{j=0}^{N-1} F(j) \exp(2\pi k j / N) \quad k \in [\emptyset, N-1]$$

En las ecuaciones de la transformada de Fourier la frecuencia está expresada en radianes por intervalo de datos (frecuencia angular,  $\omega$ ) mientras que en la transformada discreta de Fourier la frecuencia ( $f$ ) se mide en ciclos por intervalo de datos.

La relación que liga ambas frecuencias es:

$$\omega = 2\pi f$$

con lo que:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} f(f)$$

Algunas propiedades de la transformada discreta de Fourier de las cuales se va a hacer uso son (WEAVER, 1983; BRACEWELL, 1986):

1). La transformada de Fourier tiene reciprocidad completa; es única.

2). La transformada discreta de Fourier y su transformada inversa son periódicas con período  $N$ .

$$F(j + N) = F(j)$$

$$f(k + N) = f(k)$$

3). Si las secuencias  $\{f(k)\}$  y  $\{F(j)\}$  constituyen un par transformado de Fourier, entonces:

$$F(-j) = F(N-j)$$

$$f(-k) = f(N-k)$$



En ningún caso lo anterior implica que la secuencia  $\{f(k)\}$  deba de ser periódica para evaluar la transformada discreta de Fourier; de hecho,  $\{f(k)\}$  es una secuencia que sólo está definida en el intervalo  $[\emptyset, N-1]$ .

Por el teorema de muestreo de Whittaker-Shannon (WEAVER, 1989) se conoce que cuando el intervalo de discretización en el dominio del espacio (o tiempo)  $\Delta t$  tiene un valor tal que:

$$\Delta t = \frac{1}{2\Omega}$$

donde:

$\Omega$  : frecuencia espectral máxima. La transformada fuera de intervalo  $[-\Omega, \Omega]$  es despreciable o nula.

la función  $f(t)$  se puede recuperar de modo exacto y único a partir de la secuencia  $\{f(k)\}$  mediante la fórmula de interpolación:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \Delta t) \text{senc}(2\pi \Omega [t - k \Delta t])$$

con:

$$\text{senc}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\alpha$$

Esta razón de muestreo se conoce como ratio de Nyquist. Cuando el ratio de muestreo  $\Delta t$  es mayor al ratio de Nyquist ( $1/2\Omega$ ), las transformadas, que se repiten periódicamente, llegan a solaparse, fenómeno conocido en terminología anglosajona como "aliasing".

La longitud de la serie vale T:

$$T = N \Delta t$$

donde N es el número de puntos.

La frecuencia fundamental vale:

$$\Delta\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \Delta t}$$

en ciclos por intervalo de datos. Y si se expresa la frecuencia en radianes por intervalo de datos, el ratio de muestreo de Nyquist toma el valor:

$$\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$$

El calculo de la transformada discreta de Fourier se puede realizar en los siguientes pasos (WEAVER, 1989):

1). Se asume que  $f(t)$  es igual a cero fuera del intervalo  $[-A, T]$  y tiene asimismo una limitación frecuencial para la banda  $[-\Omega, \Omega]$ . Si A no es cero, se debe formar una nueva función  $g(t)$  desplazando a la derecha  $f(t)$  una cantidad igual a A.

2). Se toman muestras de  $g(t)$  con un intervalo de muestreo menor o igual a:

$$\Delta t = \frac{1}{2\Omega}$$

y se elige el número de muestras tal que:

$$N \Delta t > 2 (T+A)$$



3). Se calcula la transformada discreta de Fourier de la secuencia  $\{g(k)\}$  y se multiplica el resultado por  $N \Delta t$  para obtener la secuencia  $\{G(j \Delta \omega)\}$ . Si se normaliza la transformada por el número de muestras, para que no influya el tamaño de  $N$ , el resultado queda multiplicado sólo por  $\Delta t$ .

4). Se utilizan las propiedades vistas con anterioridad para obtener la transformada de las frecuencias negativas:

$$F(-j) = F(N-j)$$

5). Si fuese necesario ( $A \neq 0$ ) se recupera  $F(j \Delta t)$  a partir de  $G(j \Delta t)$  aplicando el teorema de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier (CHSU y MEHRA, 1973):

$$F(j \Delta t) = G(j \Delta t) \exp(2\pi i A j \Delta \omega)$$

6). Por último, se puede recuperar  $F(\omega)$  de la secuencia  $\{F(j \Delta \omega)\}$  por la fórmula de interpolación vista anteriormente o mediante una simple interpolación lineal.

El cálculo de la transformada discreta de Fourier de una secuencia constituida por  $N$  puntos requiere  $N^2$  multiplicaciones complejas; lo que implica un coste enorme en tiempo de cálculo. La transformada rápida de Fourier es un algoritmo numérico que permite calcular la transformada discreta de Fourier con tan sólo  $(N \log_2 N)$  operaciones, lo que supone una reducción muy grande en el tiempo de cálculo y hace viable diferentes técnicas de simulación que, de otro modo, serían prohibitivas. La esencia del algoritmo de la transformada rápida de Fourier viene dado por el lema de Danielson y Lanczos (PRESS et al., 1989): una transformada discreta de Fourier de longitud  $N$  se puede reescribir como suma de dos transformadas discretas de longitud  $N/2$ ; una de las dos mitades está formada por los puntos pares y la otra mitad por los impares. La gran importancia de este lema es



que se puede aplicar recursivamente a cada mitad hasta que, tras  $\log_2 N$  operaciones, se obtienen las transformadas de longitud uno, y cuya transformada es ella misma. Aunque se pueden tratar diferentes casos, el más sencillo es aquel en el que el número  $N$  de valores originales es una potencia de dos.

### 2.2.3.2. Método de la integral de Fourier

La integral de Fourier o transformada de Fourier de una función aleatoria  $Z(t)$  es otra función aleatoria  $Z(\omega)$  en el dominio de la frecuencia.

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) e^{-i\omega t} dt$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene:

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Es decir, un proceso estocástico  $Z(t)$  se puede representar formalmente por una superposición de funciones exponenciales para cada valor  $t$ .

La función aleatoria que representa una variable regionalizada de tipo geológico es siempre una función real (sin parte imaginaria) por lo que su transformada de Fourier es una función hermitiana (BRACEWELL, 1986), esto es, una función compleja cuya parte real es par y la parte imaginaria impar.



Como:

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \cos(\omega t) dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Si:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \cos(\omega t) dt$$

$$B(\omega) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Entonces:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

$|Z(\omega)|^2$  se denomina potencia espectral y representa la repartición de varianza del proceso estocástico en función de la frecuencia  $\omega$ .

La potencia espectral también se conoce por función de densidad espectral y se puede calcular, como se ha repetido reiteradamente en apartados precedentes, mediante la transformada de Fourier de la función covarianza de la

función aleatoria:

$$|Z(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C(h) e^{-i\omega t} dt$$

La función de covarianza no es un proceso reversible, esto es, resulta imposible volver a obtener la función original a partir de la función de covarianza. Existen infinitas funciones aleatorias diferentes con la misma función de covarianza. Simplemente desplazando una función con respecto a ella misma se obtiene una nueva función mientras que la función de covarianza y por consiguiente la función de densidad espectral permanecen invariantes. La función de densidad espectral no revela la fase de los constituyentes armónicos de la función  $Z(t)$ ; cada una de dichas componentes periódicas se puede desplazar a lo largo del eje  $t$  sin que varíe la correlación. En la figura 3.18 se ha representado de modo esquemático lo relatado en los párrafos anteriores.

En la simulación de una función aleatoria  $Z(t)$  se asume conocida la función de covarianza del proceso, el caso más frecuente es que haya sido estimada a partir de los valores experimentales. Conocida la covarianza  $C(h)$  se puede calcular la función de densidad espectral  $S(\omega)$  y por lo tanto está perfectamente determinado el espectro de amplitud  $|Z(\omega)|$  ya que:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{S(\omega)}$$

A esta información frecuencial (espectro de amplitud), que determina de modo unívoco la función de covarianza, se le puede añadir una información de fase



aleatoria uniforme entre  $0$  y  $2\pi$  (espectro de fase) que no modifica la función de covarianza (FOX, 1987) y asegura que las realizaciones sean aleatorias e independientes.

Conocido  $|Z(\omega)|$  generamos  $\varphi(\omega)$  con distribución de probabilidad uniforme entre cero y  $2\pi$  con lo que se obtiene:

$$\text{Re}\{Z(\omega)\} = |Z(\omega)| \cos(\varphi(\omega))$$

$$\text{Im}\{Z(\omega)\} = |Z(\omega)| \sin(\varphi(\omega))$$

donde:

$\text{Re}\{.\}$  : parte real.

$\text{Im}\{.\}$  : parte imaginaria.

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| \cos(\varphi(\omega)) - i |Z(\omega)| \sin(\varphi(\omega))$$

Calculando la transformada inversa de Fourier de  $Z(\omega)$  se obtiene  $Z(t)$  que constituye la realización que se desea generar. Esta inversión se puede hacer de modo rápido y eficiente empleando los algoritmos de la transformada rápida de Fourier. Los diferentes pasos de la metodología se esquematizan en la figura 3.19.

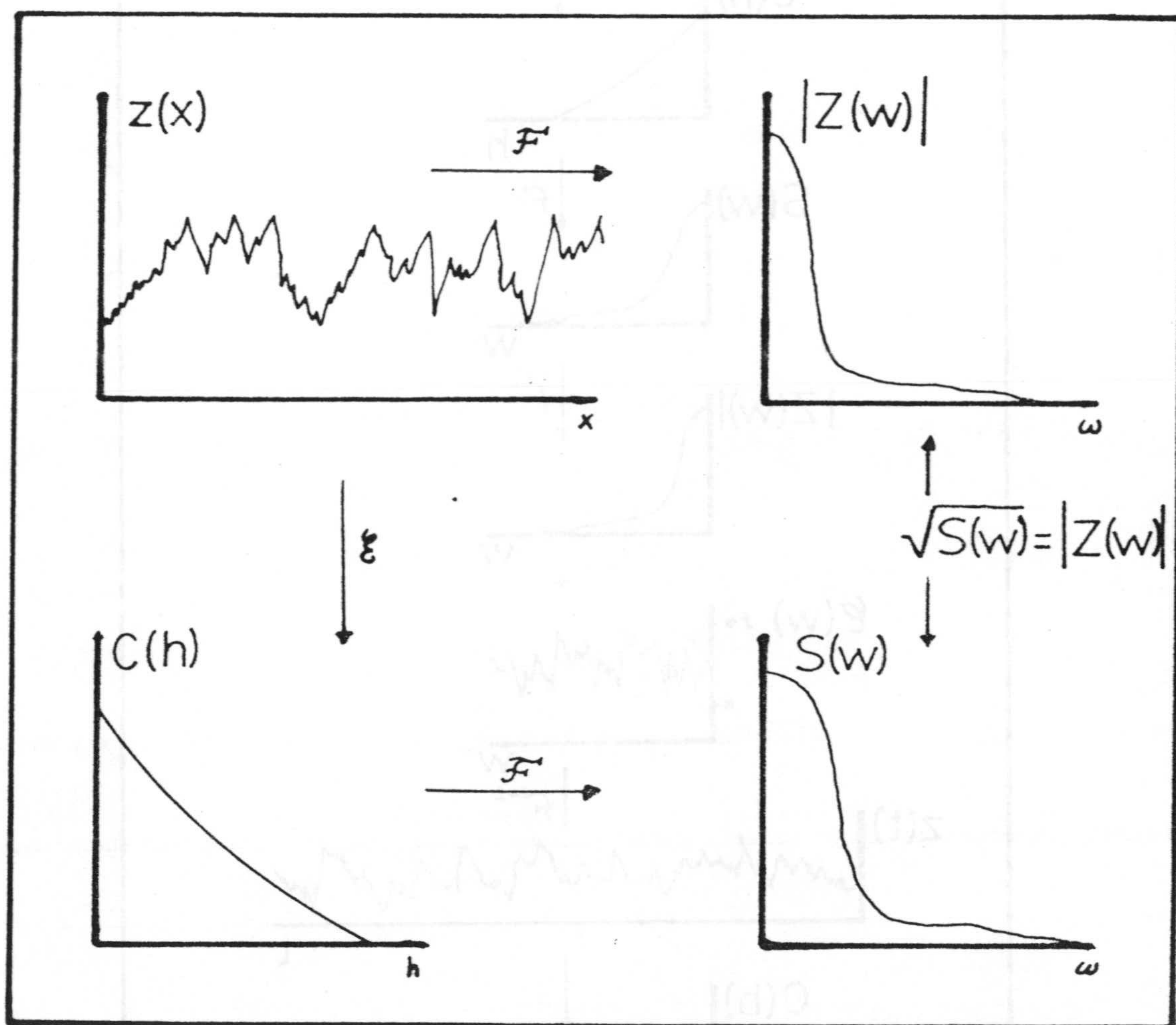


Figura 3.45. Relaciones básicas.  
 $\mathcal{E}$  : estimación.  
 $\mathcal{F}$  : transformada de Fourier.



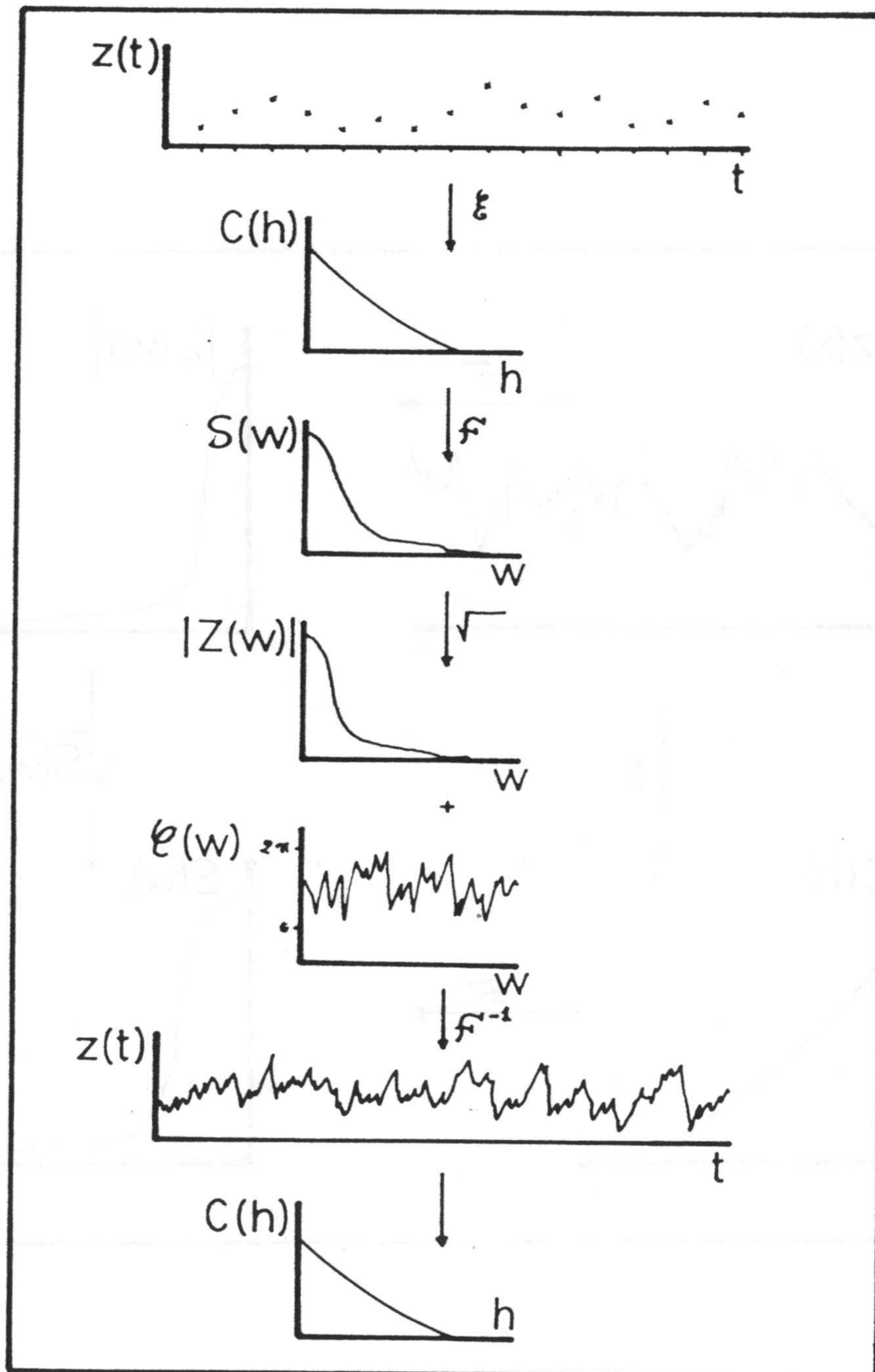


Figura 3.19. Pasos del proceso de simulación.

De la figura 3.20a a la figura 3.20f se presentan los variogramas medios de 100 realizaciones para cada uno de los modelos considerados en una dimensión. Se observa una perfecta correspondencia entre los valores experimentales simulados y los correspondientes valores teóricos. En la tabla 3.VIII se muestra los estadísticos medios de las 100 realizaciones. La figura 3.20g representa el coeficiente de variación del variograma medio en función de la distancia. En todos los casos el coeficiente de variación aumenta progresivamente con la distancia, siendo el valor más pequeño el correspondiente al modelo exponencial-triangular y el mayor el correspondiente al modelo gaussiano. Estos valores, se pueden considerar favorablemente como muy bajos aunque ligeramente superiores (aproximadamente el doble) a los obtenidos por el método de RICE (1954).

La figura 3.20h representa el variograma obtenido en una realización tomada al azar para un variograma de tipo esférico y la figura 3.20i representa el variograma de la realización anterior para distancias grandes (500 pasos que corresponde a 50 veces la longitud de correlación) donde se muestra claramente como la función variograma no presenta periodicidades.

En otro orden de cosas, como la función de densidad espectral se calcula por la transformada rápida de Fourier a partir de un muestreo que se efectúa de la función covarianza, se puede simular cualquier tipo de covarianza por complicada que sea su expresión así como estructuras anidadas y efecto de pepita; no requiriendo ningún cálculo adicional.



MODELO	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
Esférico	.0102	.0034	.9931	.0001
Triangular	.0059	.0047	.9914	.0002
Exponencial	-.0014	.0040	.9901	.0002
Gausiano	-.0049	.0054	.9873	.0003
Pozo I	-.0027	.0001	.9987	.0000
Pozo II	-.0034	.0008	.9985	.0001

Tabla 3.VIII. Valores medios de 100 simulaciones.

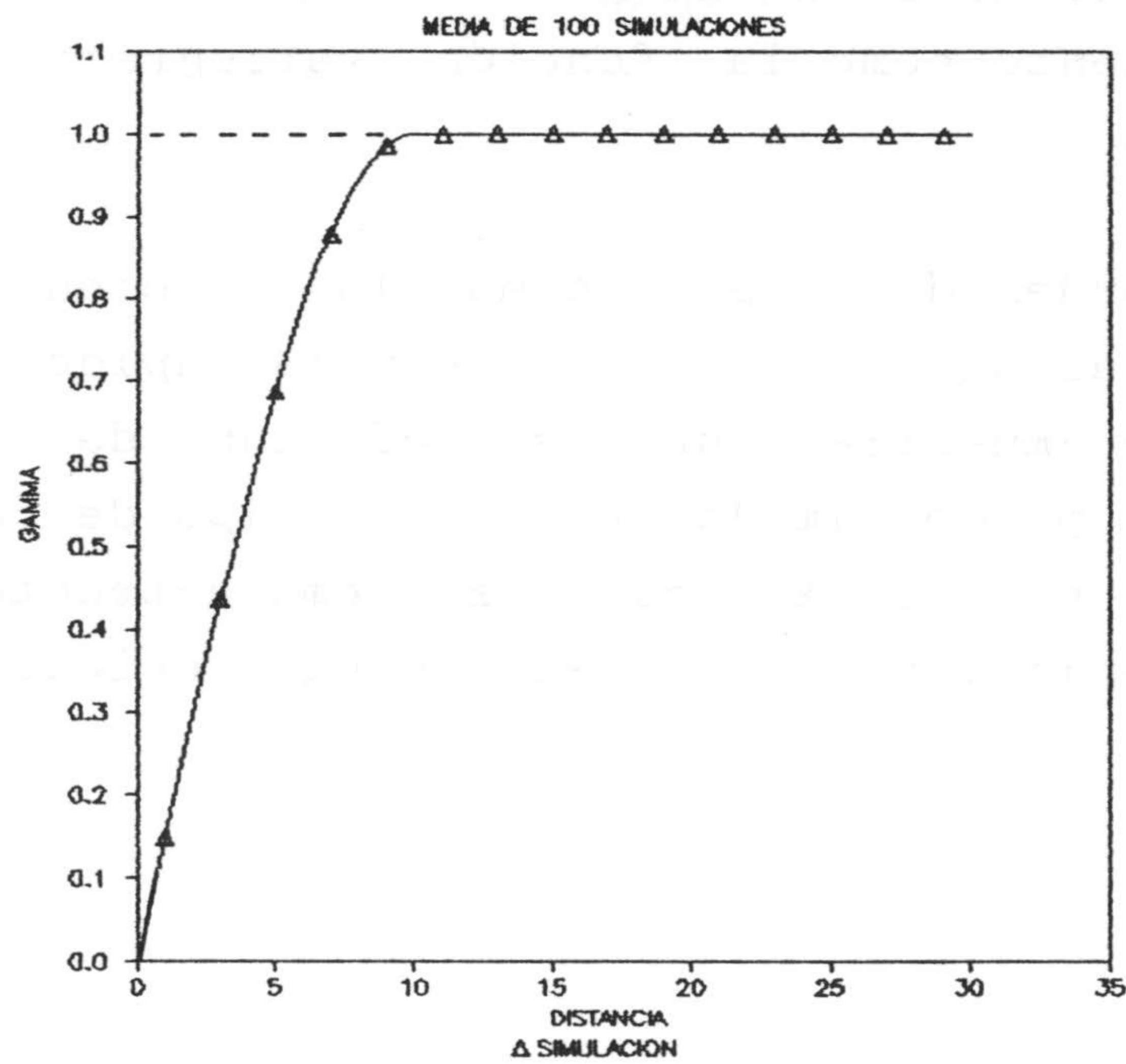


Figura 3.20a. Simulación de un variograma esférico.

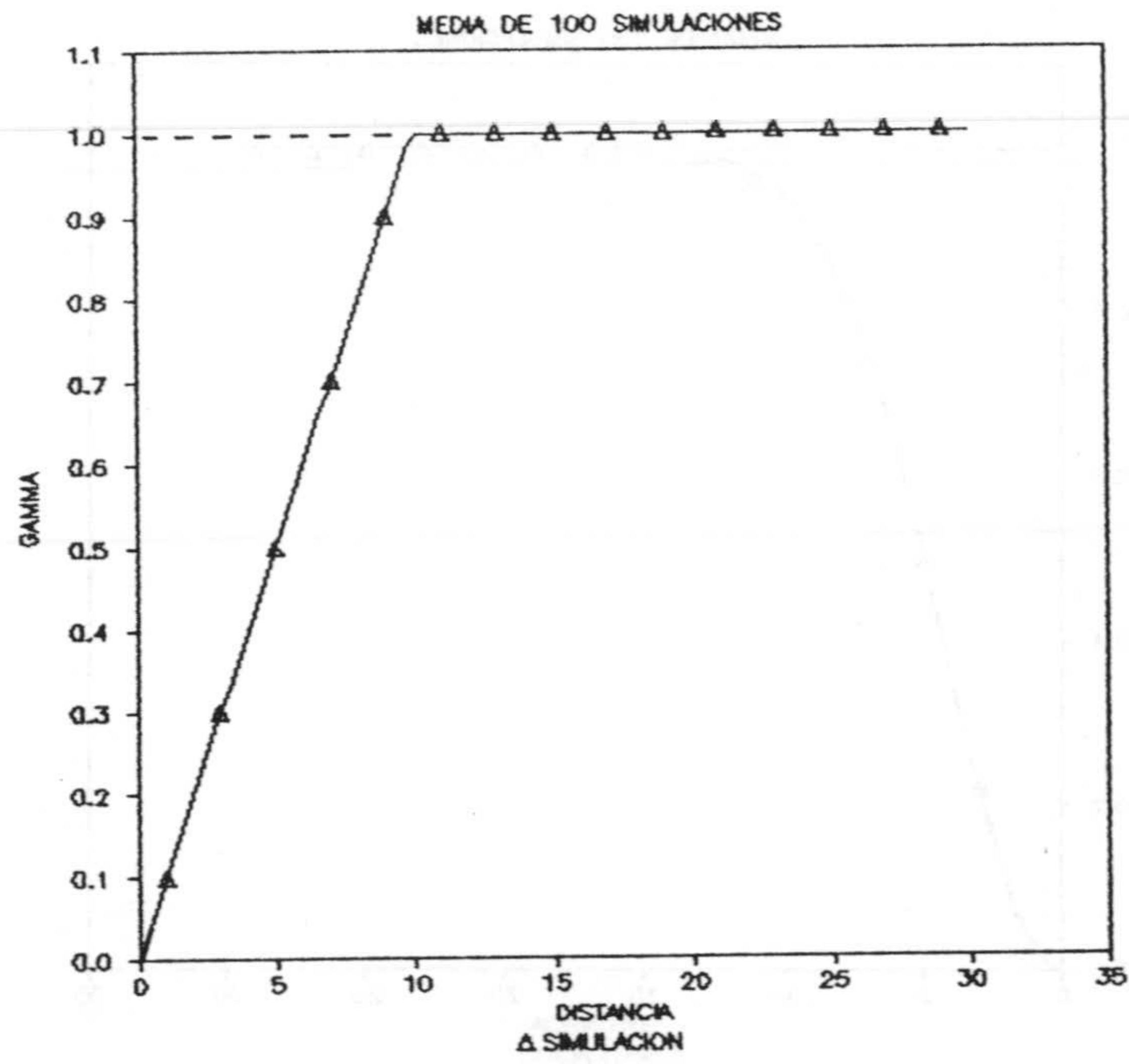


Figura 3.20b. Simulación de un variograma triangular.

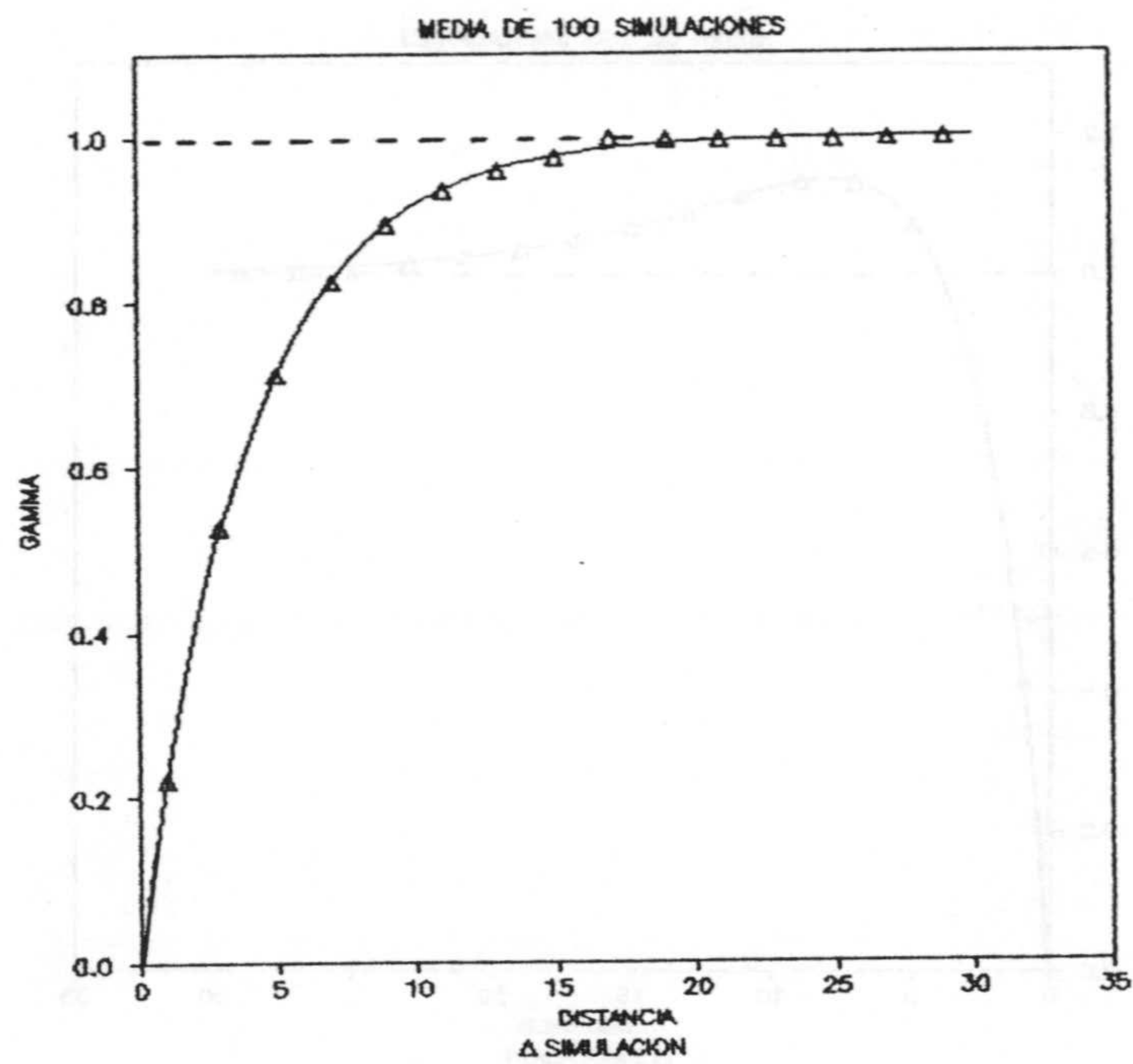


Figura 3.20c. Simulación de un variograma exponencial.



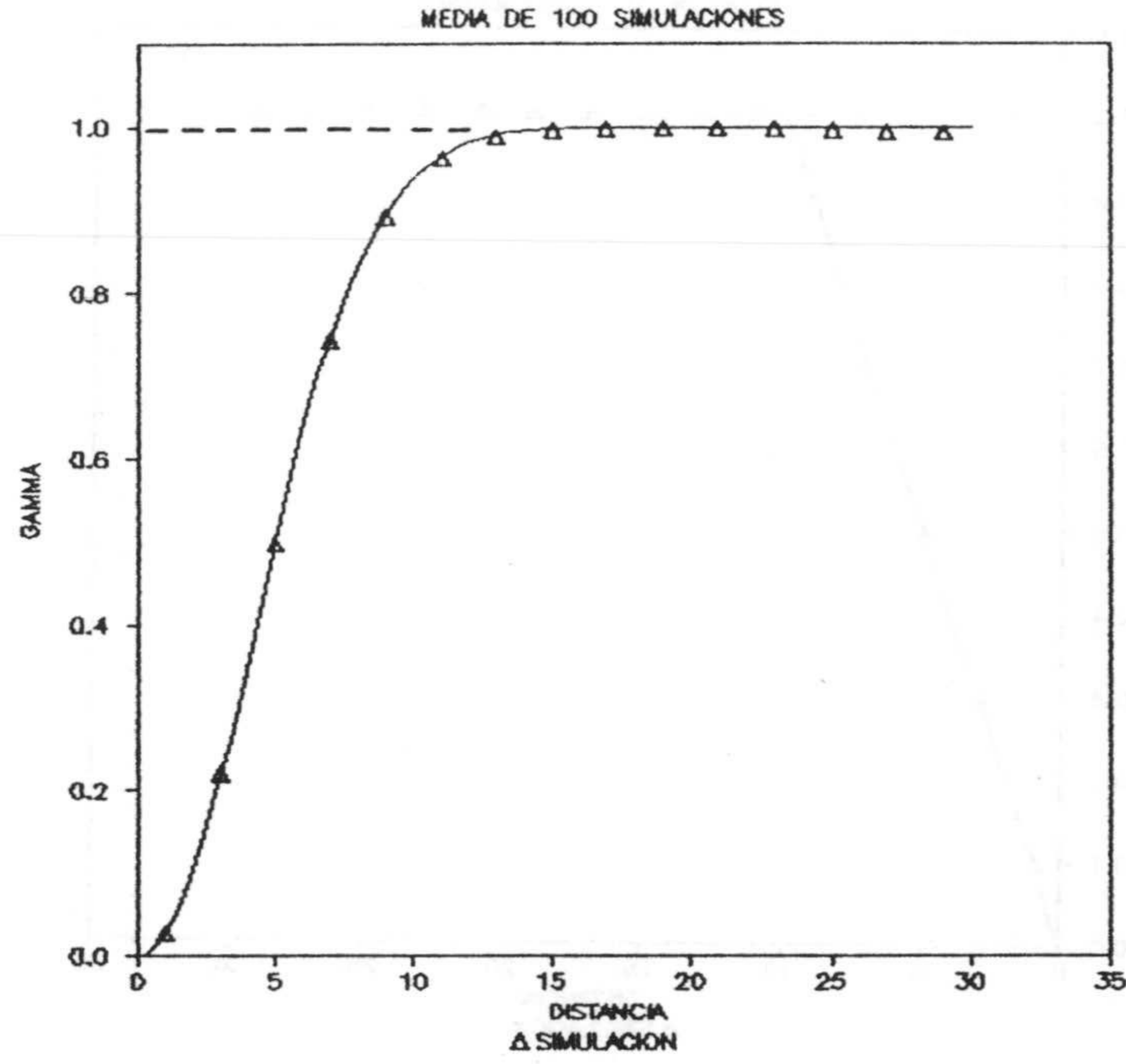


Figura 3.20d. Simulación de un variograma gaussiano.

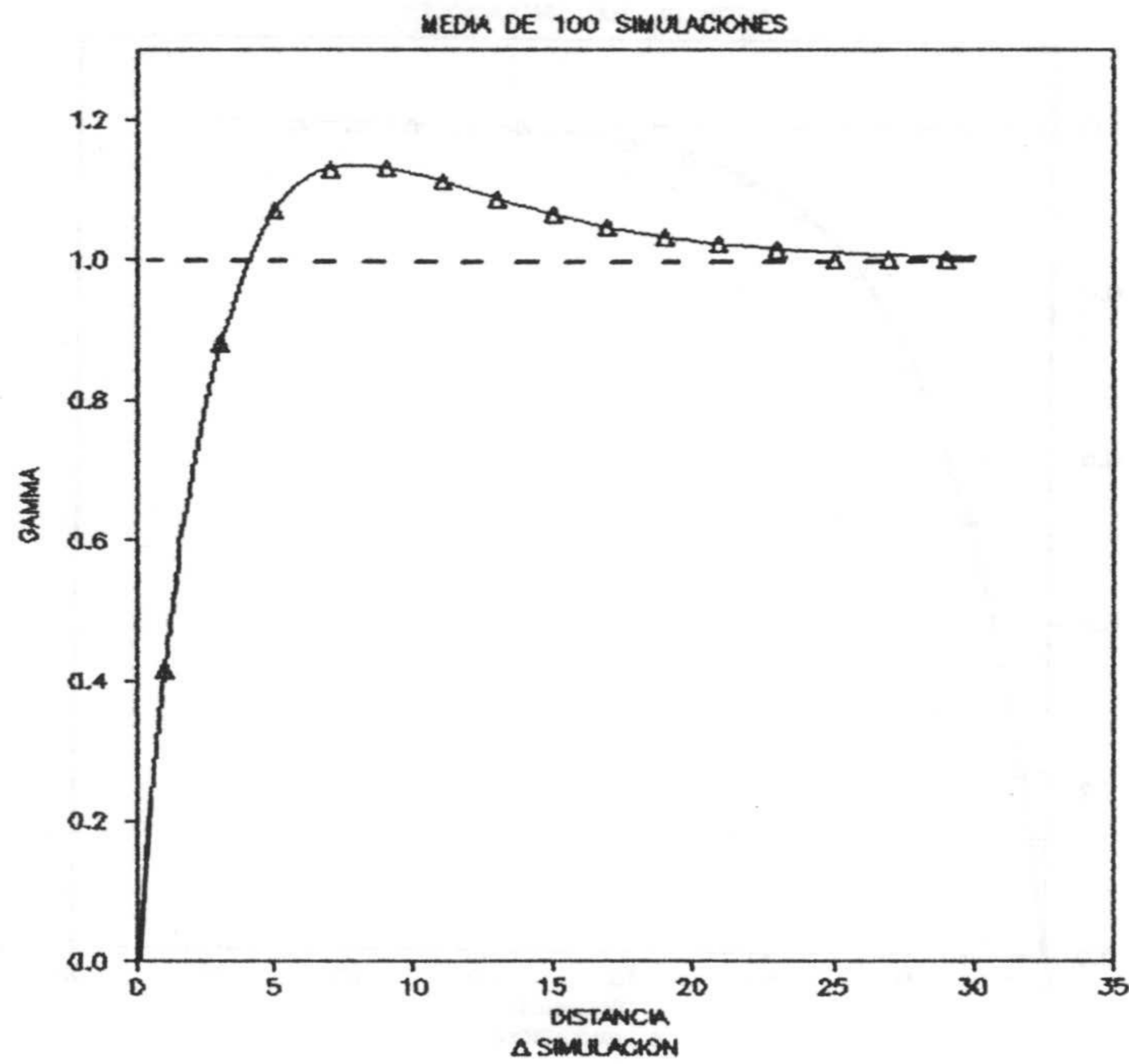


Figura 3.20e. Simulación de un variograma pozo I.

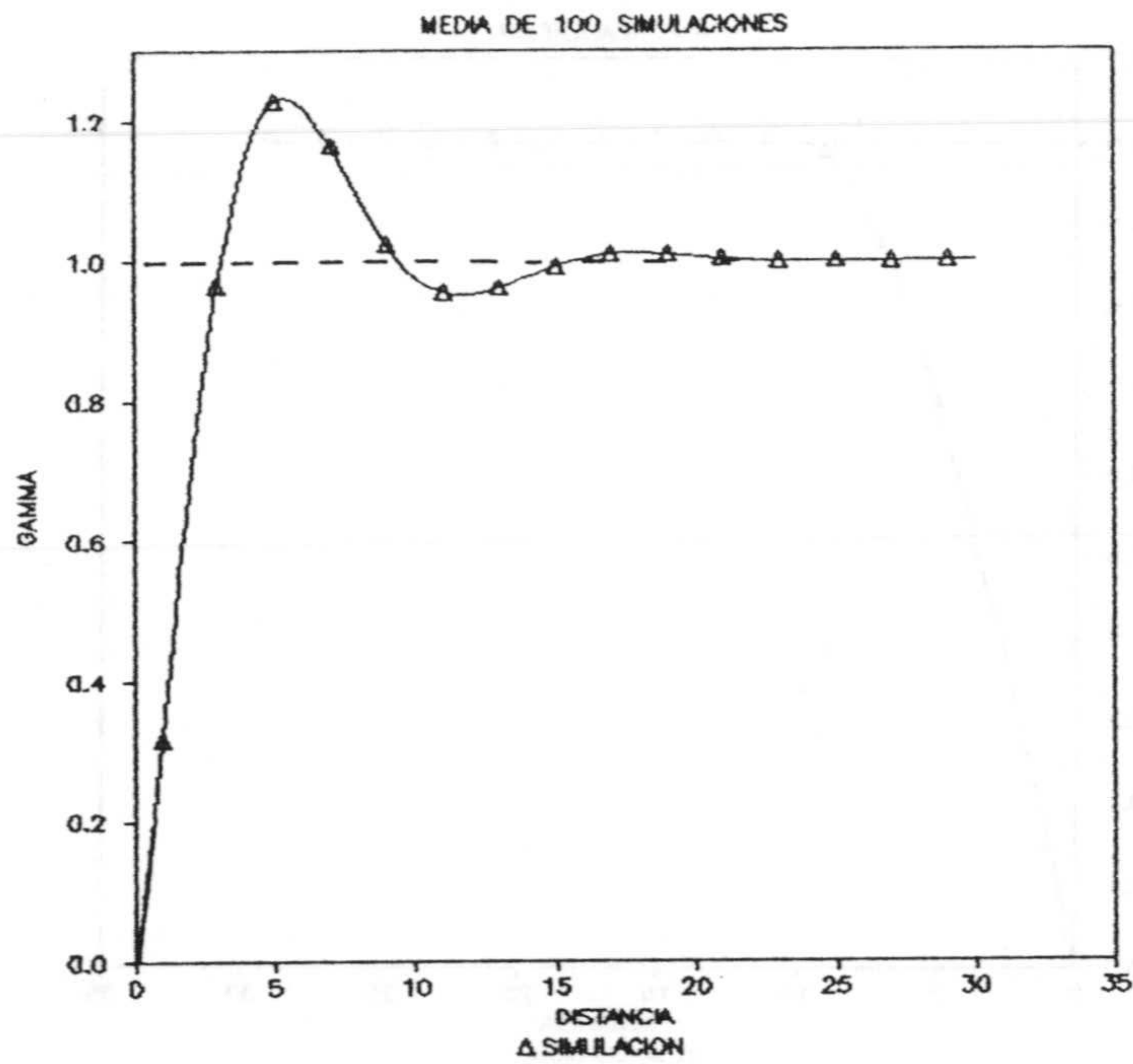


Figura 3.20f. Simulación de un variograma pozo II.

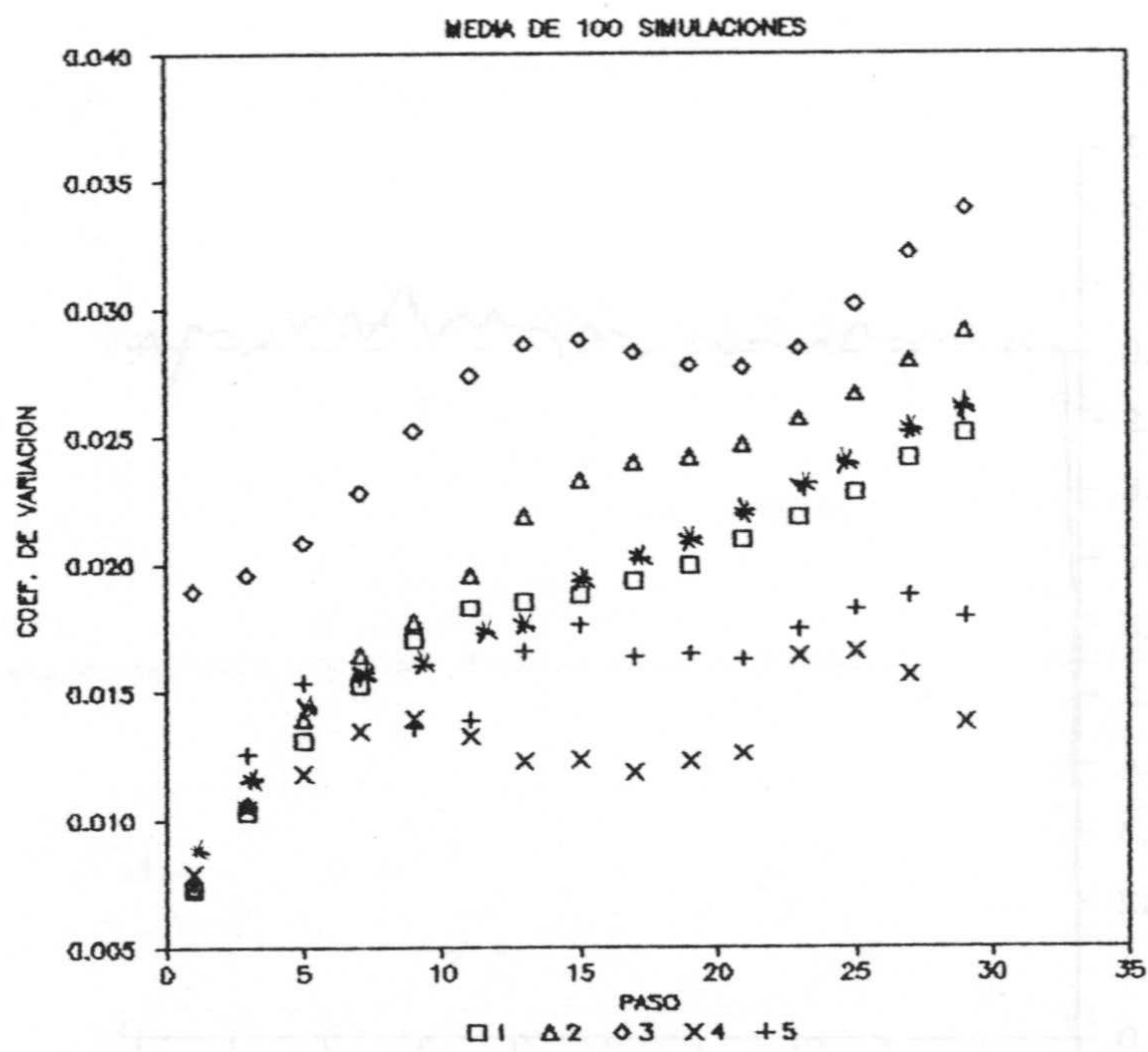


Figura 3.20g. Coeficiente de variación del variograma.  
 □ Esférico; Δ Triangular; ◊ Gausiano;  
 × Pozo I; + Pozo II; \* Exponencial.



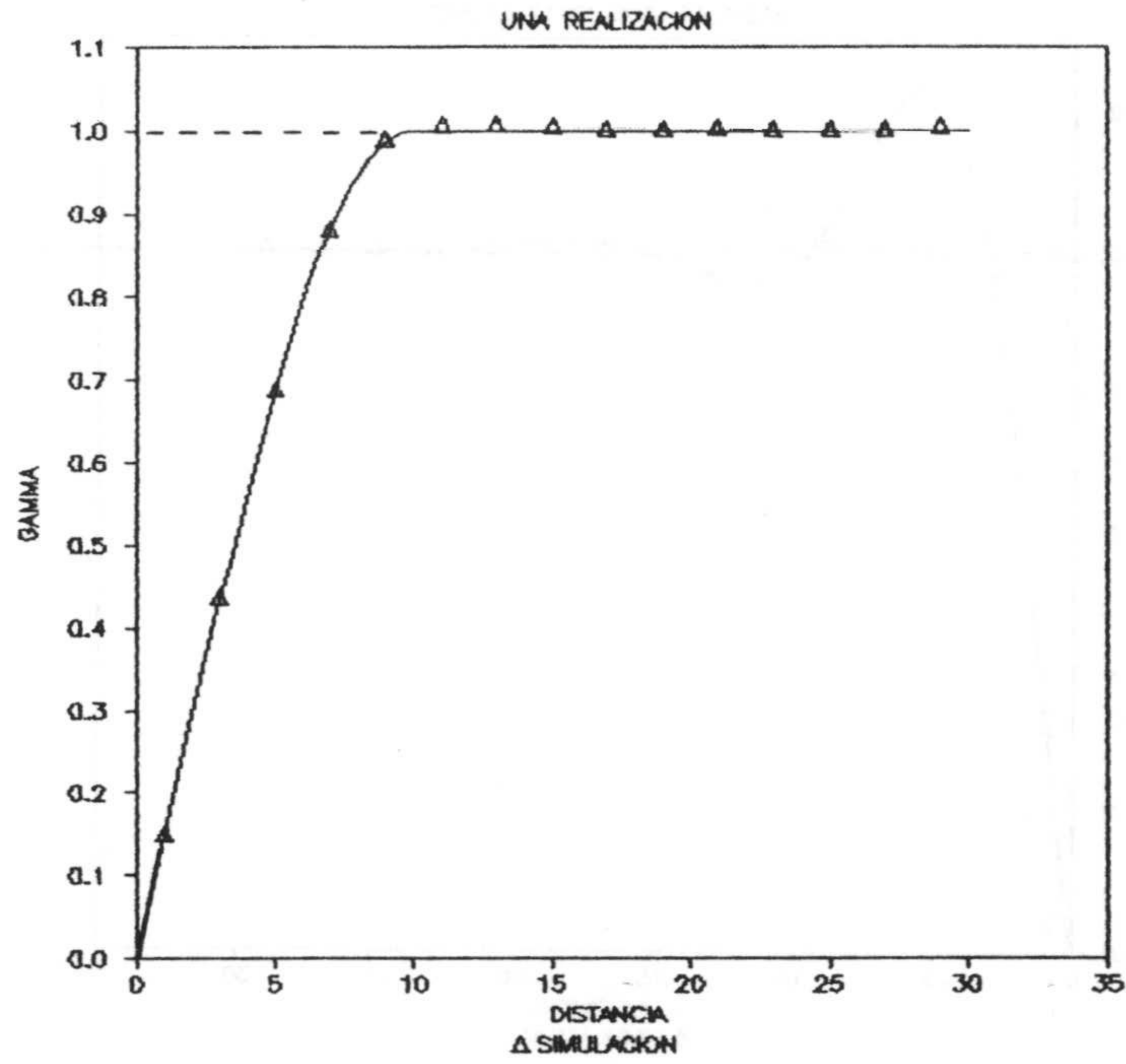


Figura 3.20h. Simulación de un variograma esférico en una única realización.

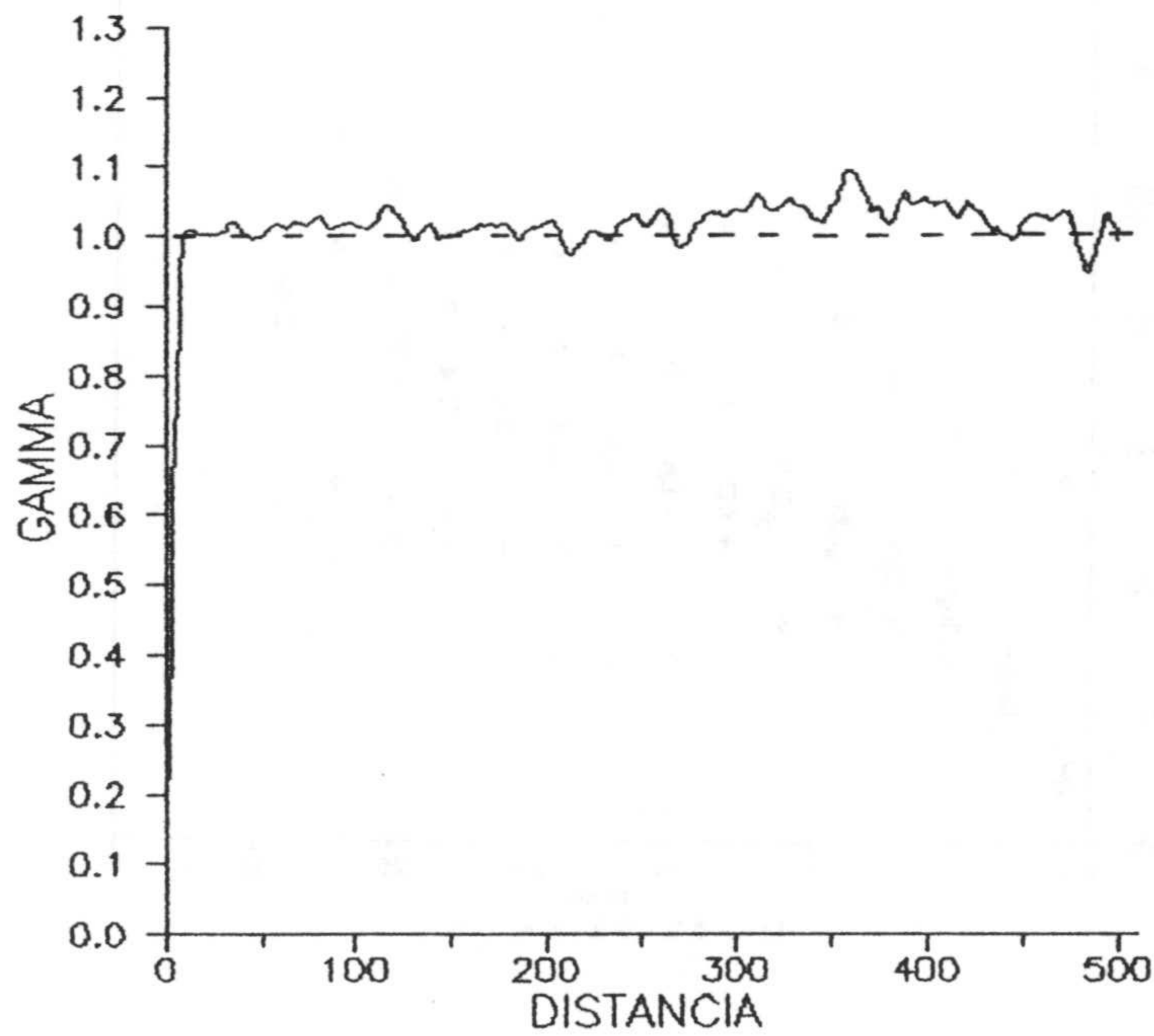


Figura 3.20i. Variograma simulado en largas distancias.

Utilizando las propiedades y ventajas del análisis armónico he desarrollado el siguiente método de simulación que es equivalente al método de medias móviles en el dominio del espacio (o tiempo) pero mucho más sencillo de aplicar que las alternativas propuestas por otros autores como BLACK y FREYBERG (1990).

#### 2.2.3.3. Simulación mediante filtrado de un ruido blanco

La convolución es una operación matemática que define el cambio que experimenta la forma de una onda cuando esta pasa a través de un filtro (KANASEWISCH, 1981). Por filtro se entiende un proceso que modifica una función discriminando sus armónicos constituyentes para alterar sus amplitudes relativas, sus relaciones de fase o ambas (figura 3.56).

El efecto del filtro se puede caracterizar por su respuesta al impulso que se define como la salida que se produce cuando la función de entrada es una función impulso unitario. La transformada de Fourier  $H(\omega)$  de la respuesta impulsiva es la función conocida como función de transferencia del filtro y especifica la respuesta del filtro en términos de amplitud y de fase.

La función de salida  $z(t)$  se puede representar como la convolución entre la función de entrada  $f(t)$  y la respuesta impulsiva  $h(t)$ :

$$z(t) = h(t) * f(t)$$

donde:

\* : operador de convolución.

El procedimiento de simulación se expone a



continuación.

Tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la expresión anterior y aplicando el teorema de la convolución, si:

$$z(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\omega)$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

donde:

$\mathcal{F}$  : transformada directa de Fourier.

se obtiene:

$$Z(\omega) = H(\omega) F(\omega)$$

Si la función de entrada  $f(t)$  es un ruido blanco, cuya transformada de Fourier  $F(\omega)$  es un valor constante independiente de la frecuencia  $\omega$ :

$$F(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

se llega a:

$$|H(\omega)| = |Z(\omega)| \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}$$

Por lo tanto, el espectro de amplitud de la función de transferencia del filtro está determinado por el espectro de amplitud o función de densidad espectral de la función de salida.

De este modo, propongo los pasos siguientes para la simulación:

1). La función de entrada es un ruido blanco cuya transformada de Fourier es un valor constante. La función de salida es una función aleatoria estacionaria con una función de covarianza impuesta  $C(h)$ .

2). Conocida la función de covarianza se puede conocer la función de densidad espectral  $|Z(\omega)|^2$  y por consiguiente el espectro de amplitud  $|Z(\omega)|$ .

3). A partir del espectro de amplitud de la función de salida y mediante la relación última se puede determinar el espectro de amplitud del filtro  $|H(\omega)|$ .

4). La transformada de Fourier inversa de  $|H(\omega)|$  es la función respuesta al impulso  $h(t)$  buscada.

$$|H(\omega)| \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t)$$

5). Por último, la convolución del ruido blanco con la respuesta impulsiva  $h(t)$  permite obtener una realización de la función aleatoria  $Z(t)$  con la covarianza especificada  $C(h)$ .

El ruido blanco  $f(t)$  proporciona la aleatoriedad del proceso de modo que se pueden obtener infinitas realizaciones diferentes de la misma función aleatoria de covarianza  $C(h)$ .



$$z(t) = h(t) * f(t) = f(t) * h(t)$$

o bien

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x) f(x) dx$$

En general  $h(t)$  es cero para un determinado valor del argumento:

$$|t| > T$$

con lo cual:

$$z(t) = \int_{-T}^T h(t-x) f(x) dx$$

Las operaciones necesarias de cálculo de transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier, cálculo del espectro de amplitud y de la respuesta impulsiva respectivamente, se llevan a cabo numericamente mediante la transformada discreta de Fourier y utilizando los algoritmos de transformada rápida. Es por ello que la respuesta impulsiva no se calcula de modo analítico sino como una secuencia  $\{h(j)\}$  de  $k$  valores. Las figuras 3.22a a 3.22f representan la respuesta impulsiva para los seis tipos de covarianza unidimensional estudiados; pudiendose apuntar las siguientes notas:

1). En algunos casos, como puede ser para el modelo triangular, la gráfica que describe el filtro permite imaginar una expresión analítica compleja para describir matemáticamente dicha función.



2). La respuesta impulsiva es una función par, esto es, simétrica con respecto al eje de ordenadas.

3). Se puede observar claramente como a partir de un determinado valor la respuesta impulsiva toma un valor nulo.

4). En algunos modelos como el esférico, triangular, pozo I y pozo II la respuesta impulsiva llega a tomar valores negativos.

La convolución de dos secuencias  $\{h(k)\}$  y  $\{f(k)\}$  se define como:

$$\{h(k)\} * \{f(k)\} = \sum_{i=1}^n h(k-i) f(i)$$

$k \in [1, N]$

Por consiguiente, en esencia, el proceso generador es un proceso de medias móviles, pero se hace uso de la respuesta impulsiva del filtro la cual se calcula en el dominio de la frecuencia en base a los algoritmos de la transformada rápida de Fourier; por todo ello se ha presentado el método en este apartado de métodos espectrales.

Los resultados obtenidos por el método que he propuesto se exponen a continuación.

Los valores del variograma experimental correspondientes a valores medios de 100 realizaciones se presentan en las figuras 3.22g a 3.22l; observándose como existe una concordancia excelente entre valores experimentales y valores teóricos. La figura 3.22m muestra el coeficiente de variación del variograma medio los cuales aun siendo valores relativamente pequeños son del orden de seis veces superior



al método de RICE (1954) y del orden de tres veces mayor a los correspondientes de la integral de Fourier. Esto tiene su reflejo en que al tomar una realización al azar cabe esperar mayores discrepancias, como de hecho se muestran en la figura 3.22n, entre variograma simulado y modelo teórico. La siguiente figura 3.22o permite observar como el variograma no se repite periódicamente para distancias grandes si bien presenta mayor variabilidad en torno a la meseta que el correspondiente al método anterior. En la tabla 3.IX se registran media y varianza de las 100 realizaciones.

MODELO	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
Esférico	.0013	.0062	.9878	.0086
Triangular	.0118	.0100	.9949	.0132
Exponencial	-.0211	.0087	.9994	.0098
Gausiano	-.0042	.0106	.9970	.0117
Pozo I	-.0013	.0002	1.0080	.0040
Pozo II	.0057	.0019	.9918	.0059

Tabla 3.IX. Estadísticos medios de 100 simulaciones.

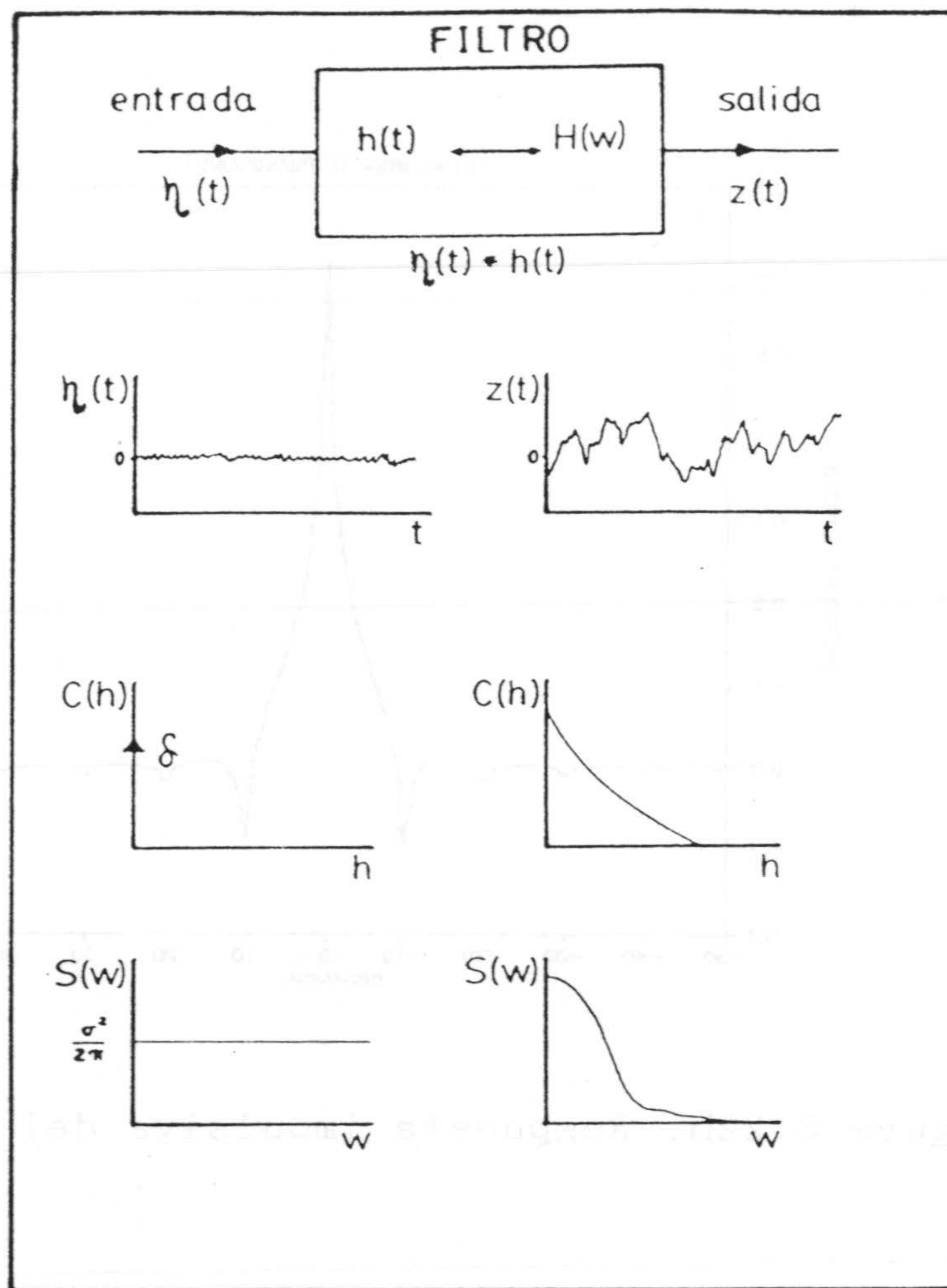


Figura 3.21. Proceso de filtrado.

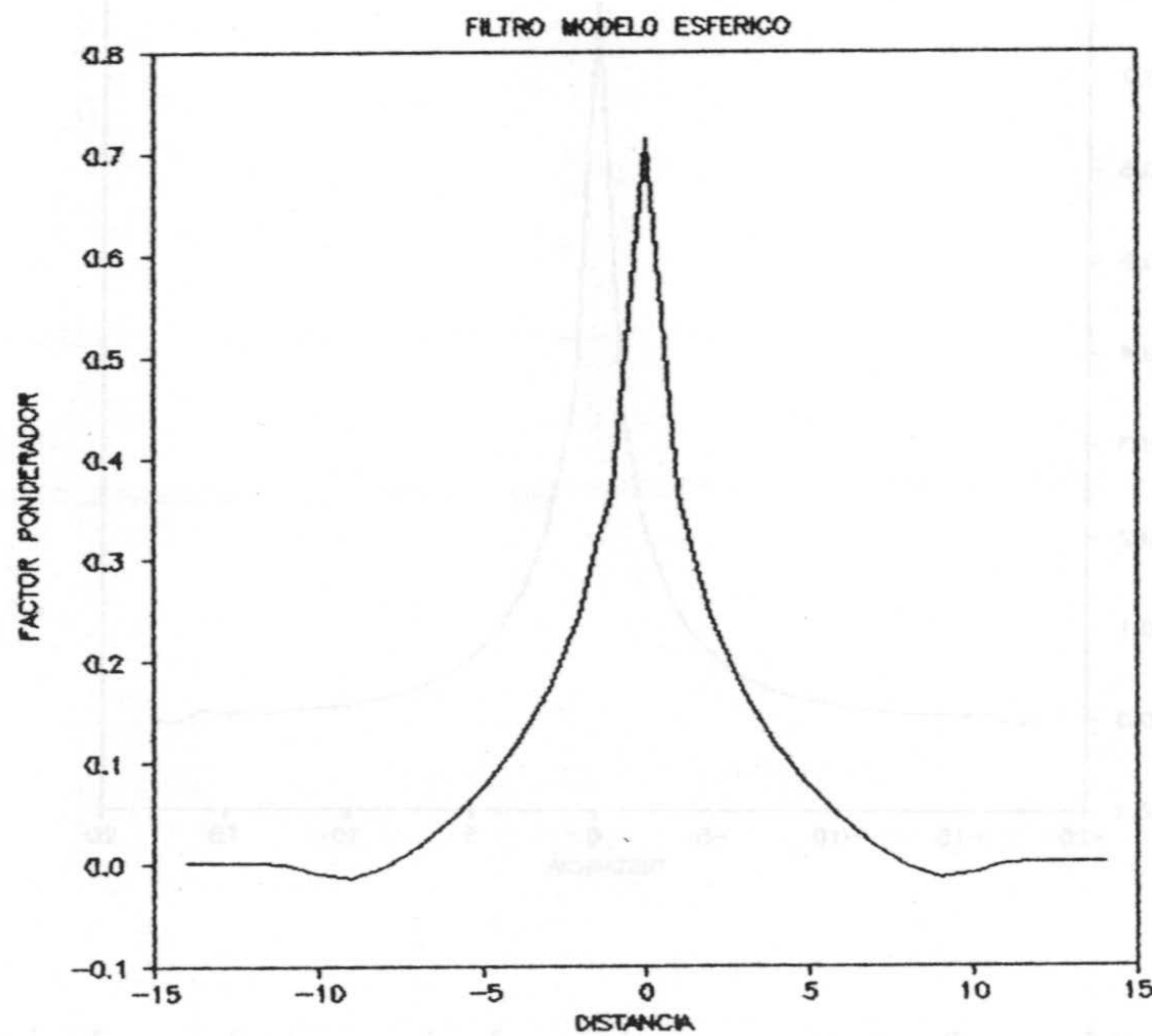


Figura 3.22a. Respuesta impulsiva del modelo esférico.



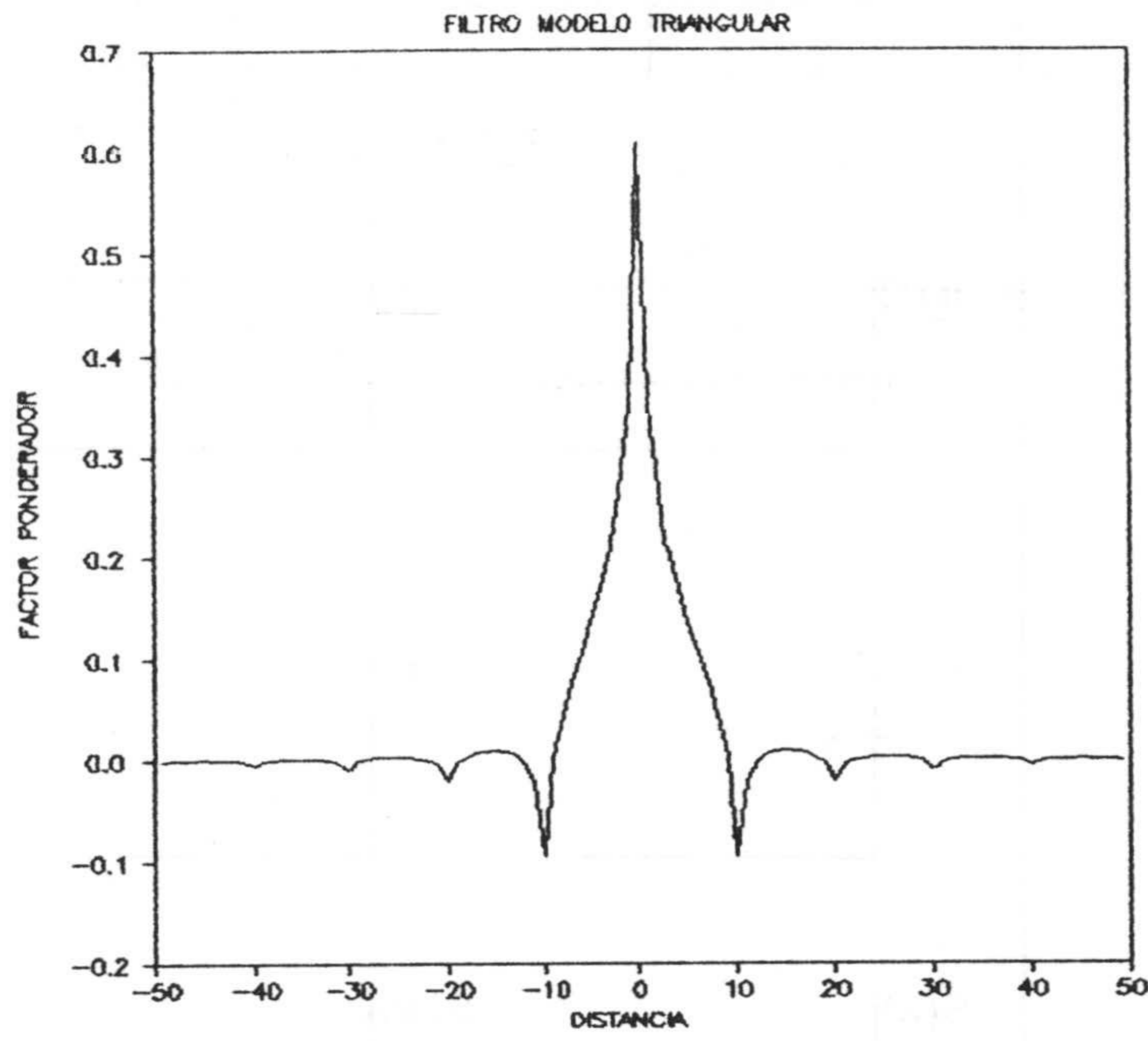


Figura 3.22b. Respuesta impulsiva del modelo triangular.

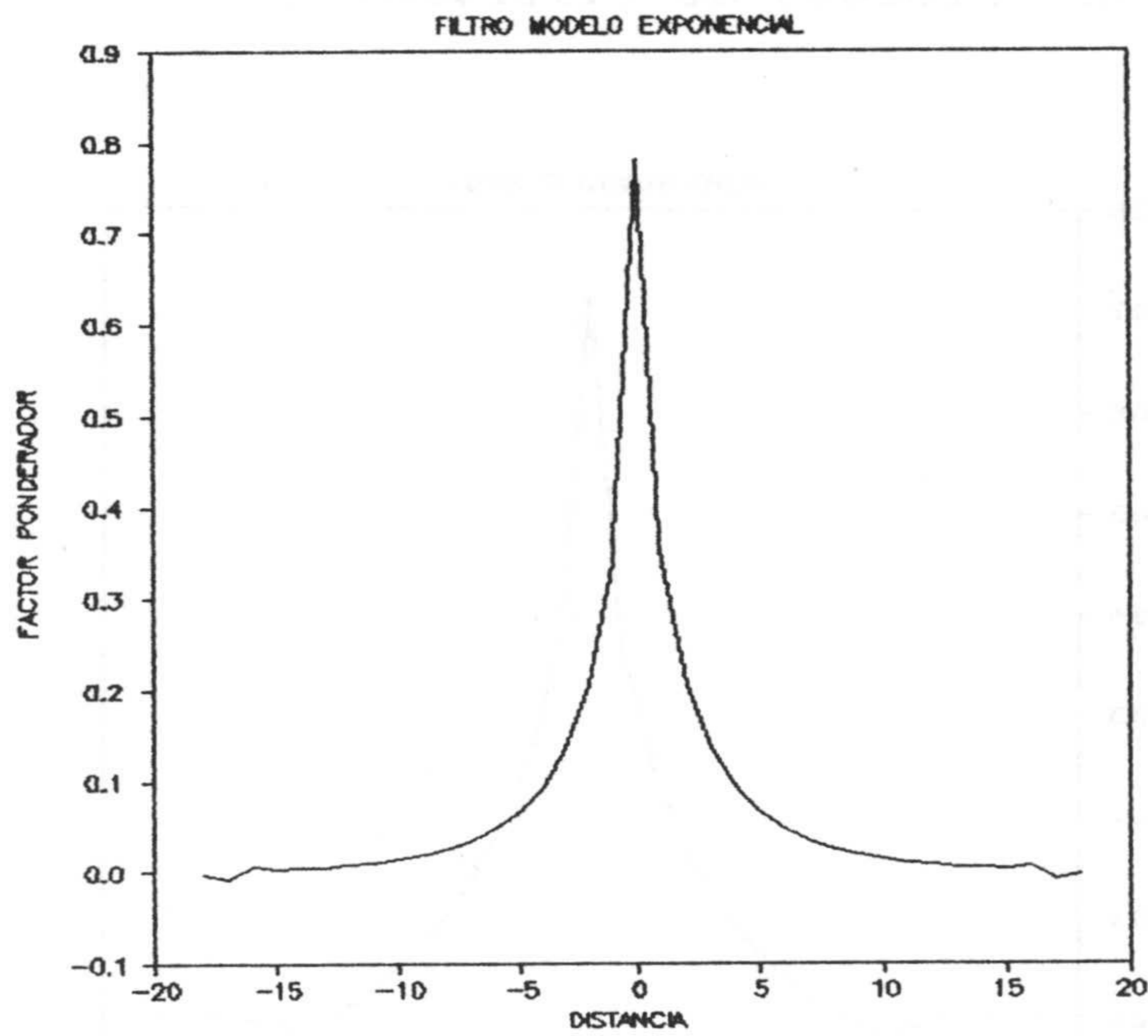


Figura 3.22c. Respuesta impulsiva del modelo exponencial.

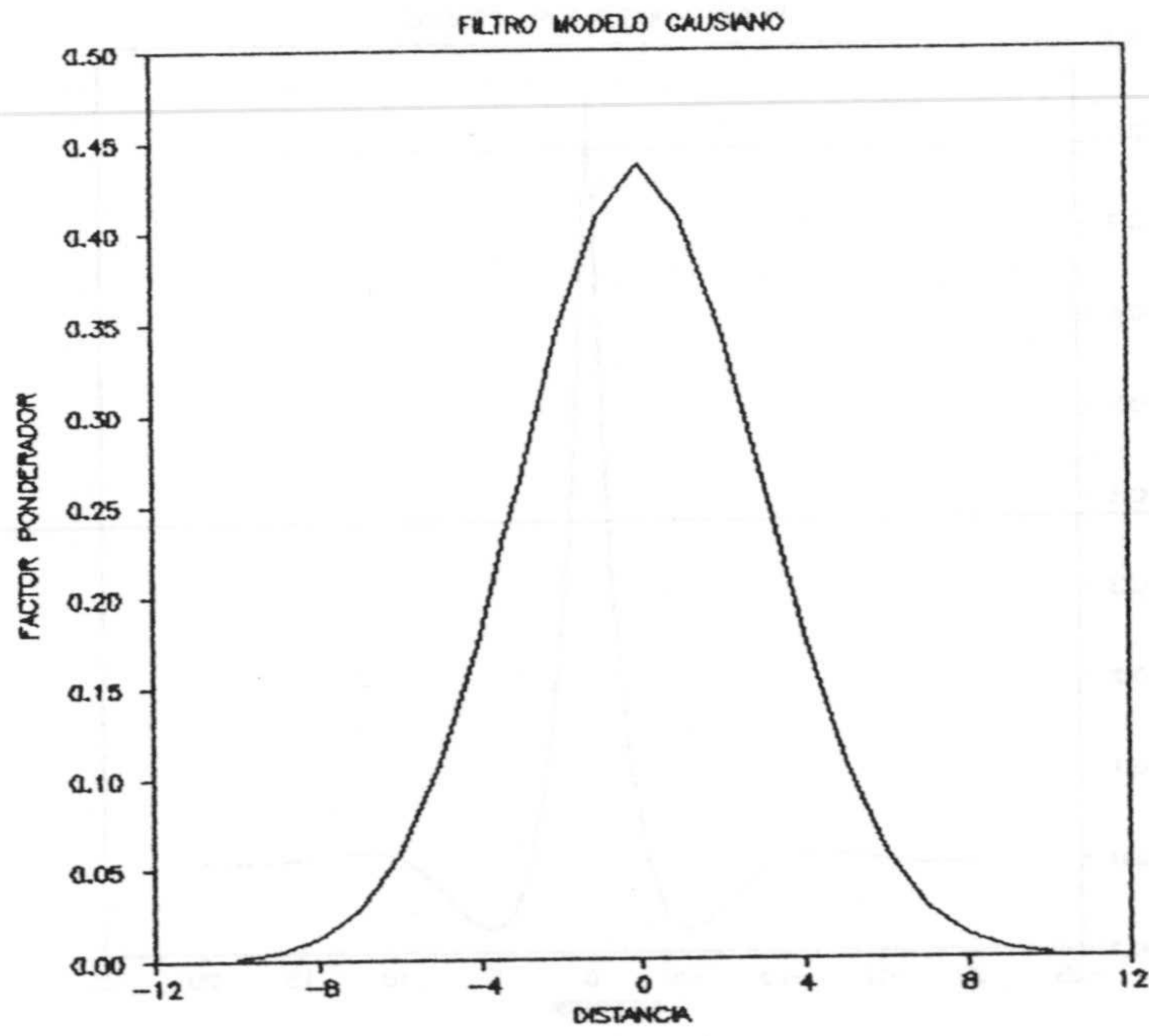


Figura 3.22d. Respuesta impulsiva del modelo gaussiano.

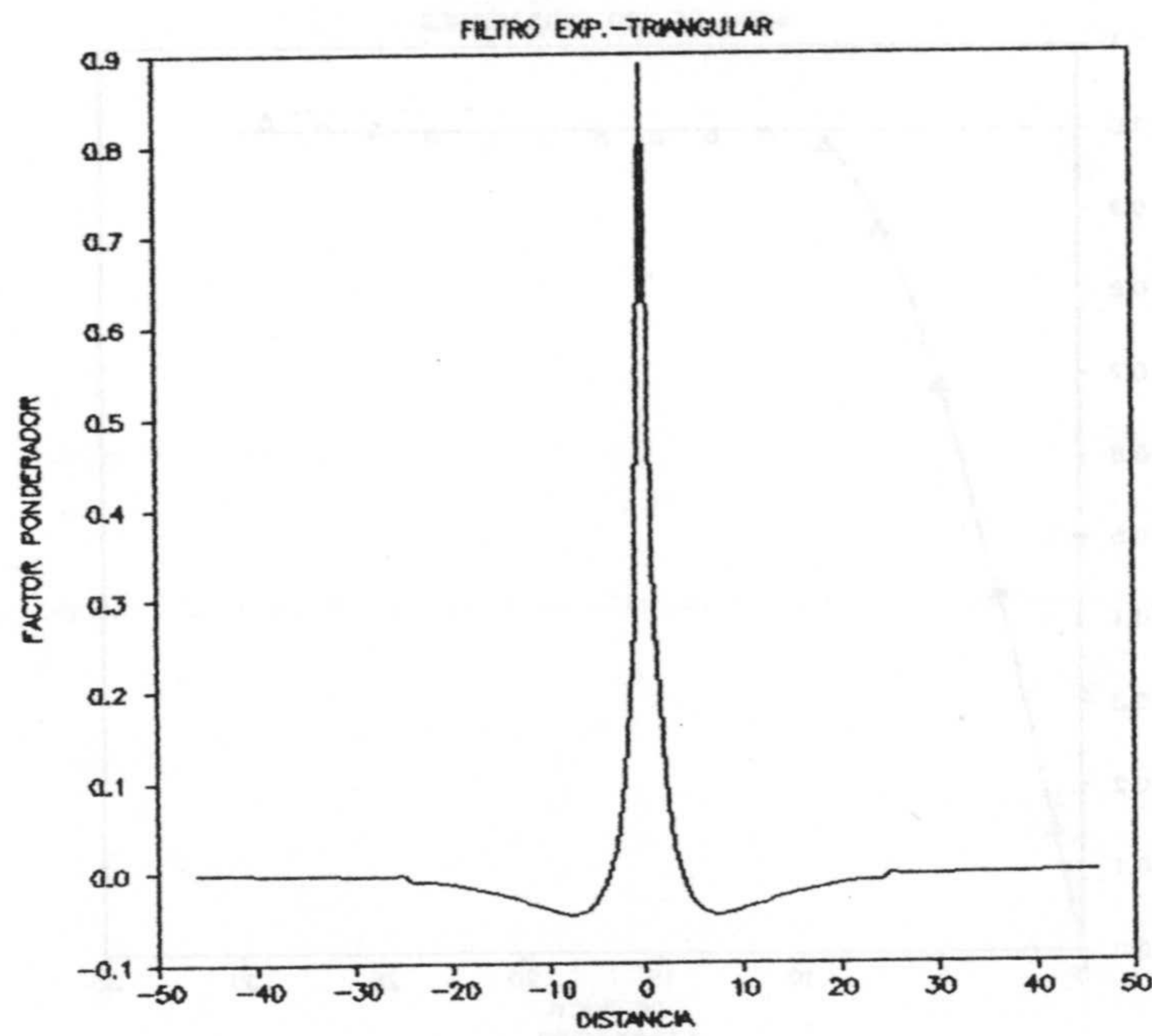
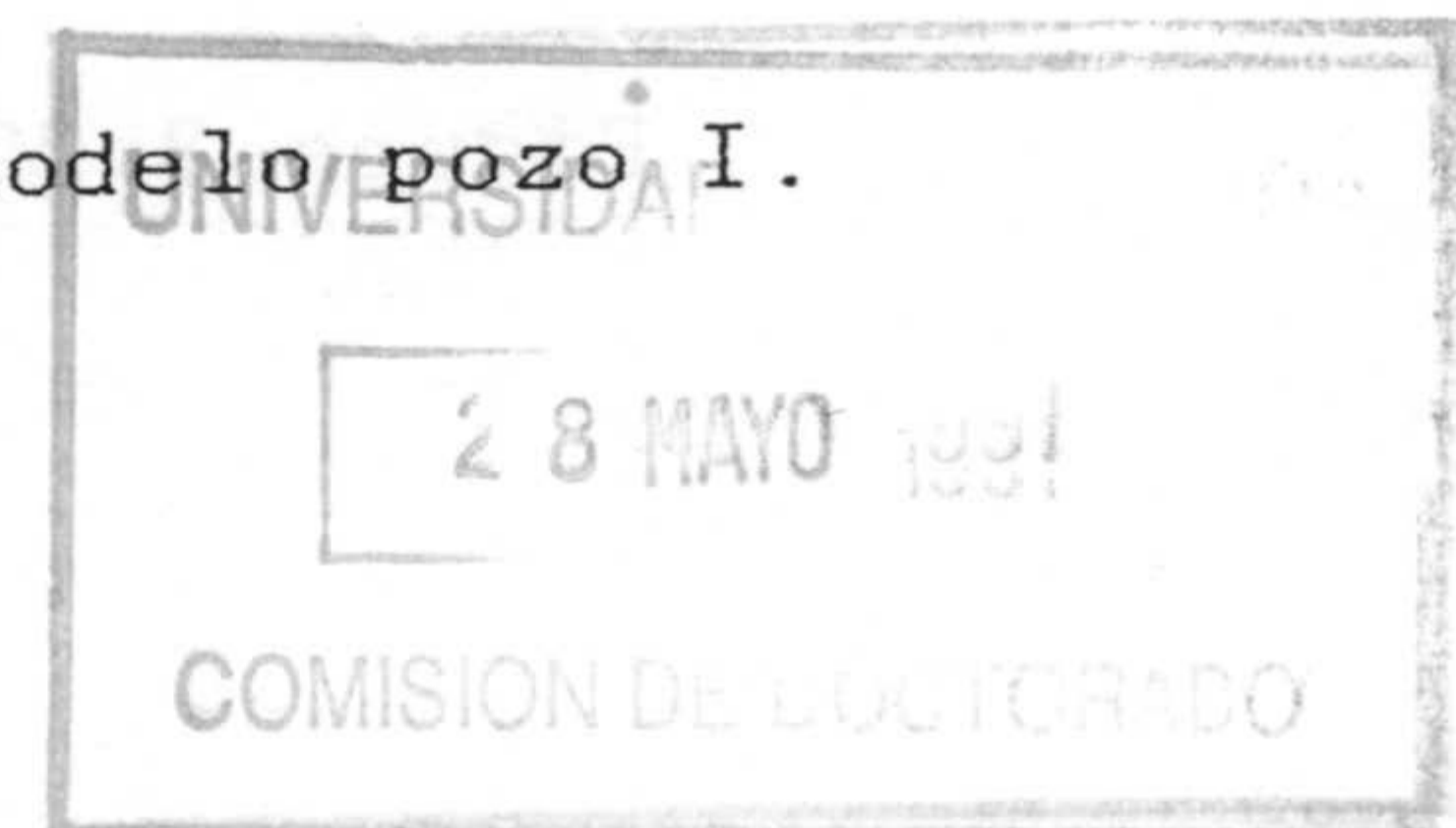


Figura 3.22e. Respuesta impulsiva del modelo pozo I.





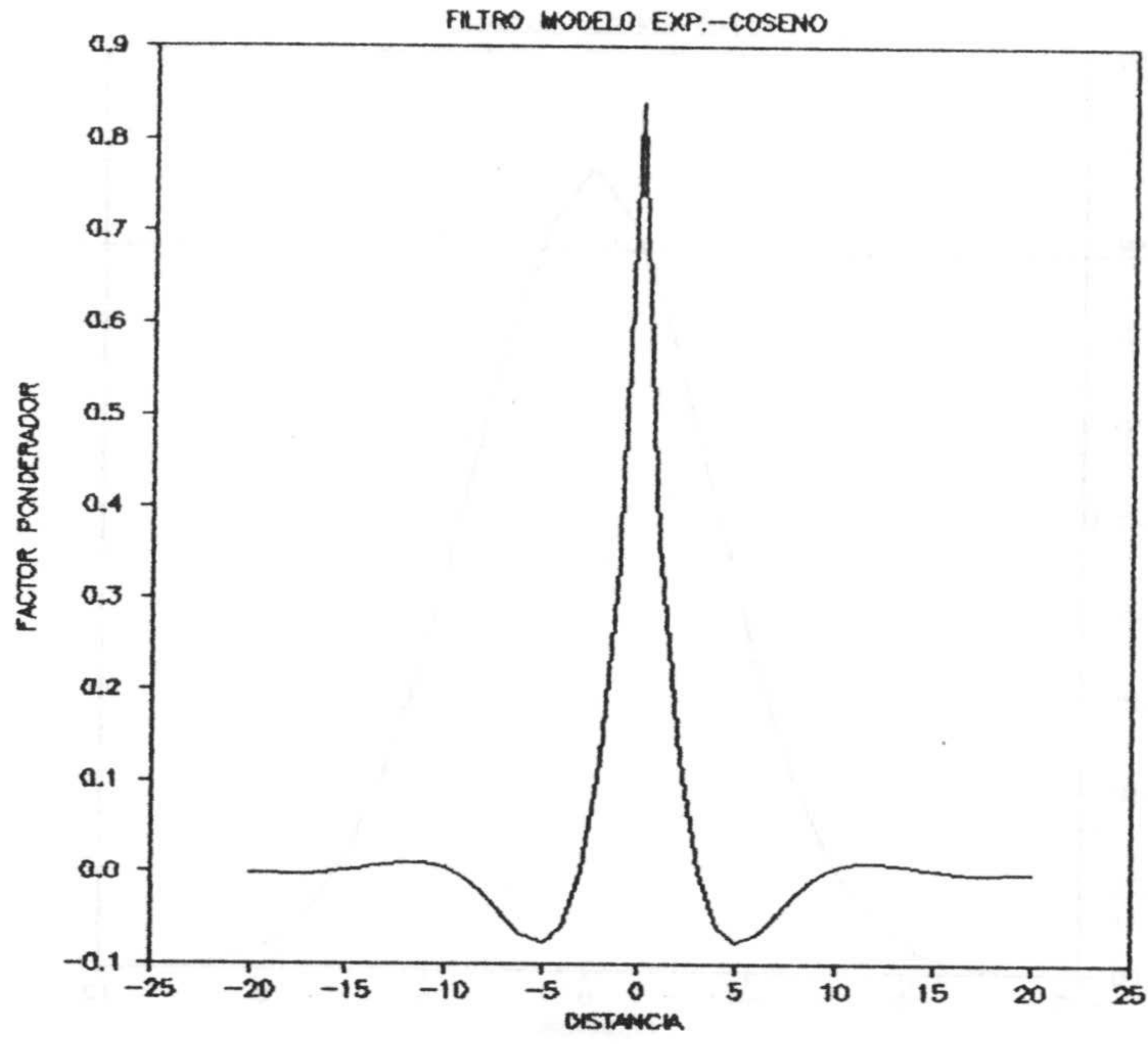


Figura 3.22f. Respuesta impulsiva del modelo pozo II.

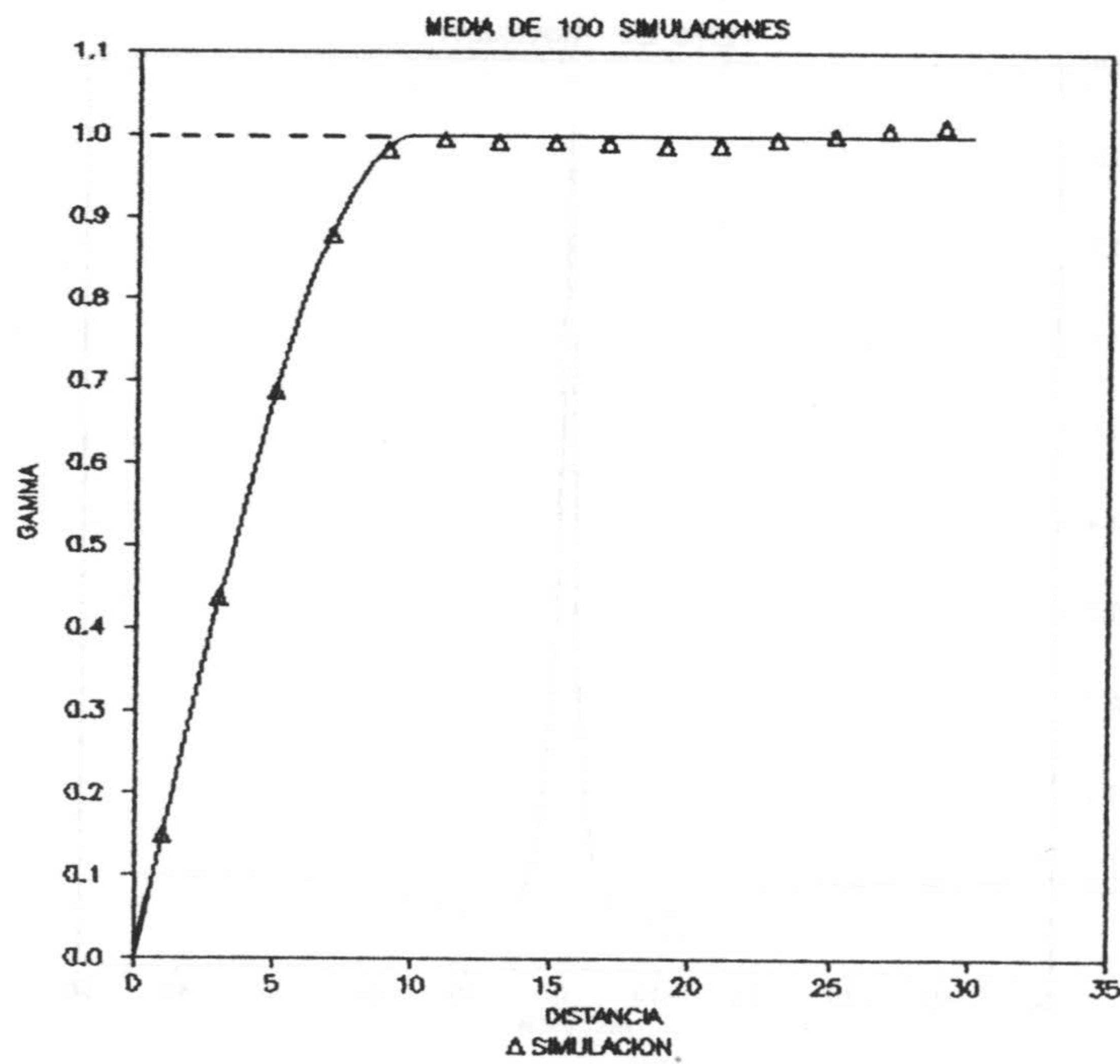


Figura 3.22g. Simulación de un variograma esférico.

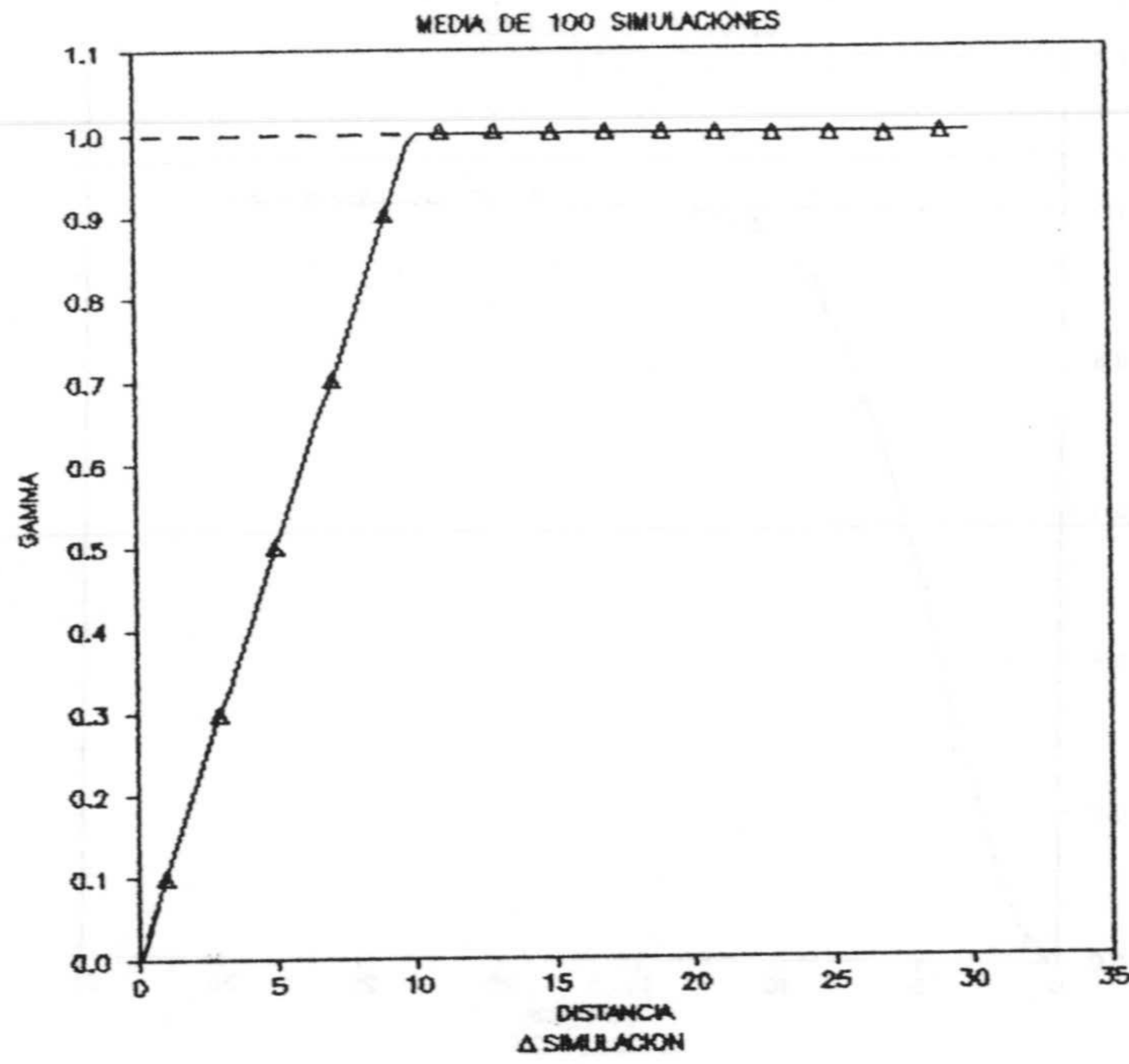


Figura 3.22h. Simulación de un variograma triangular.

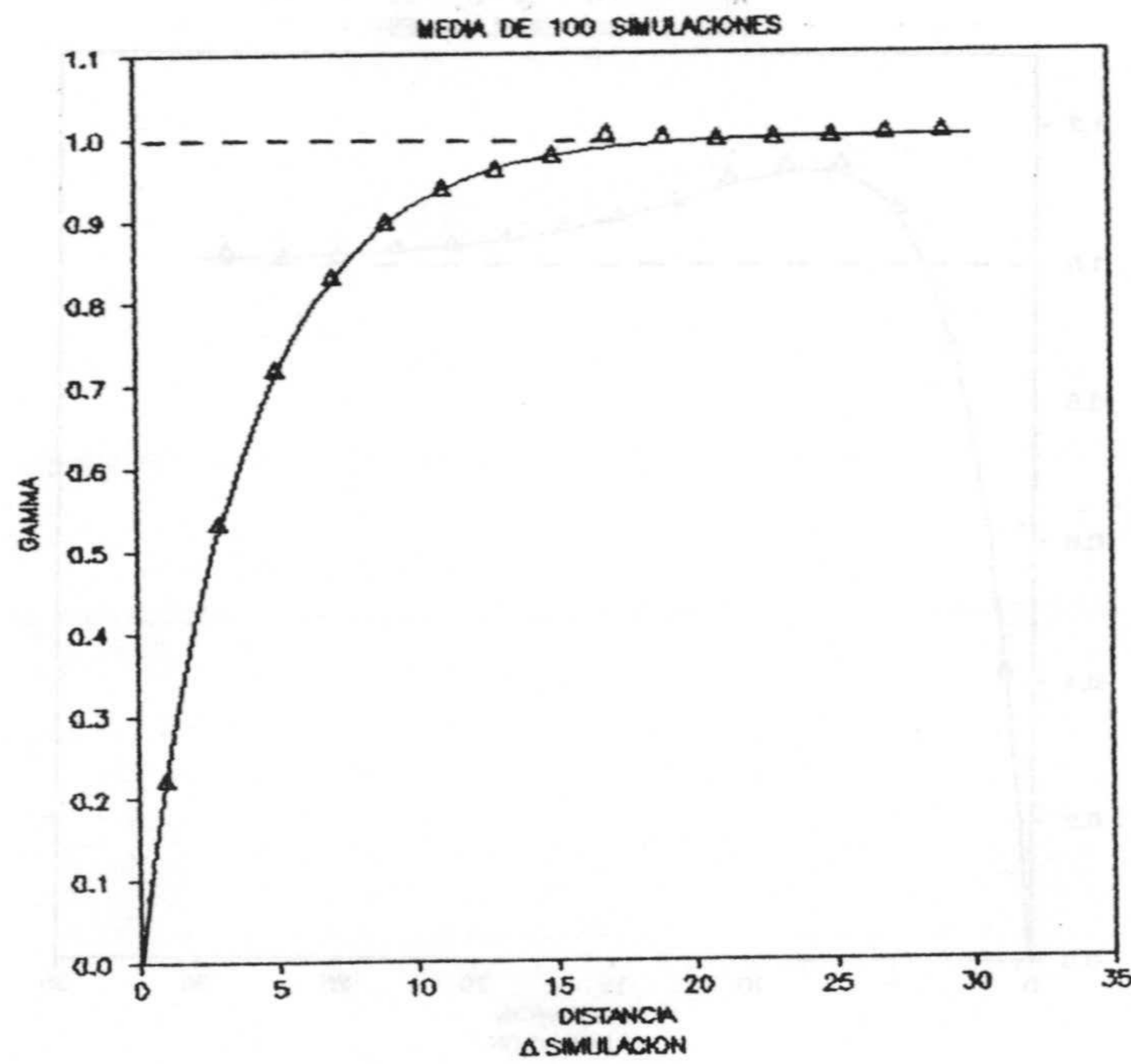


Figura 3.22i. Simulación de un variograma exponencial.



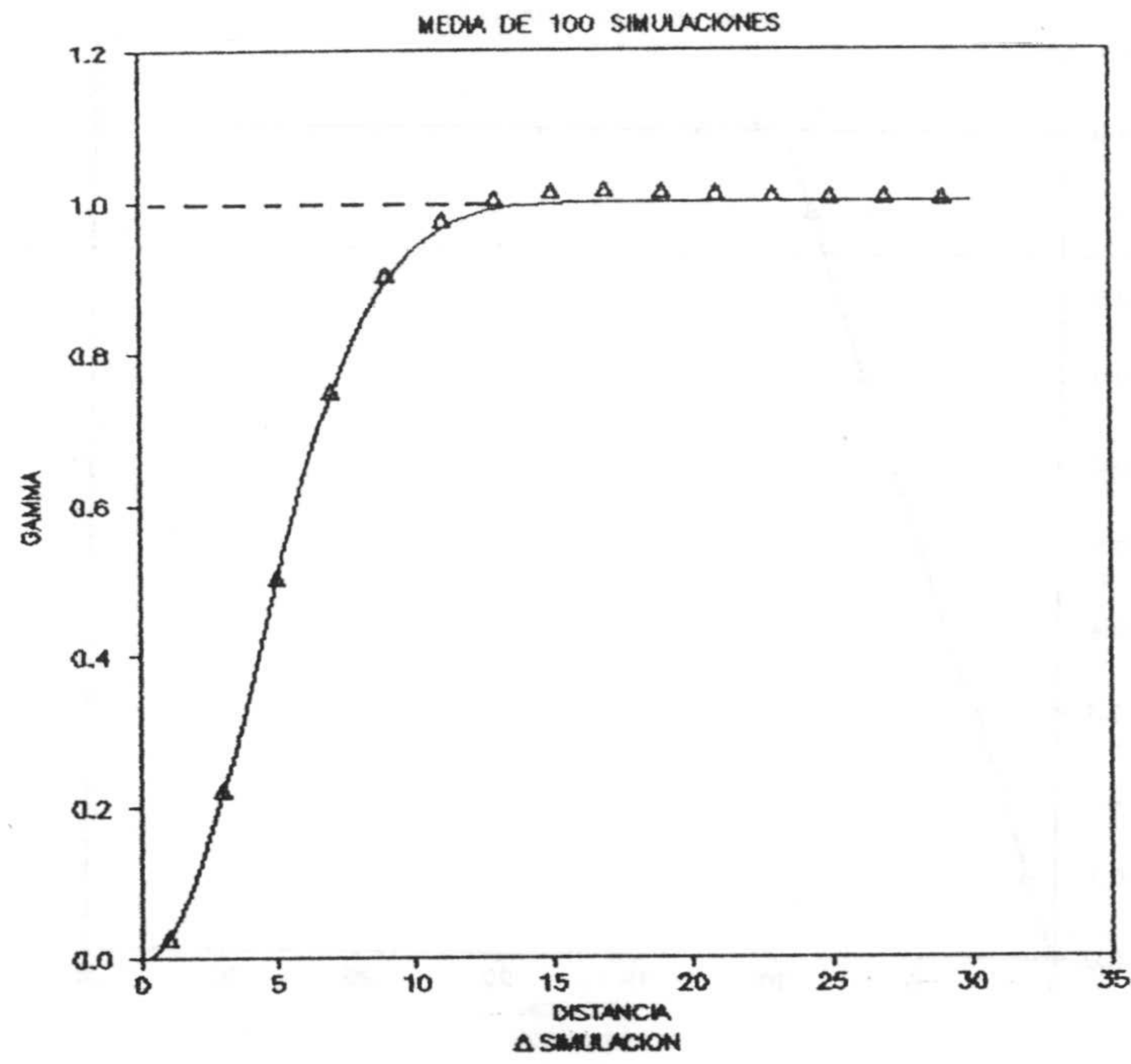


Figura 3.22j. Simulación de un variograma gaussiano.

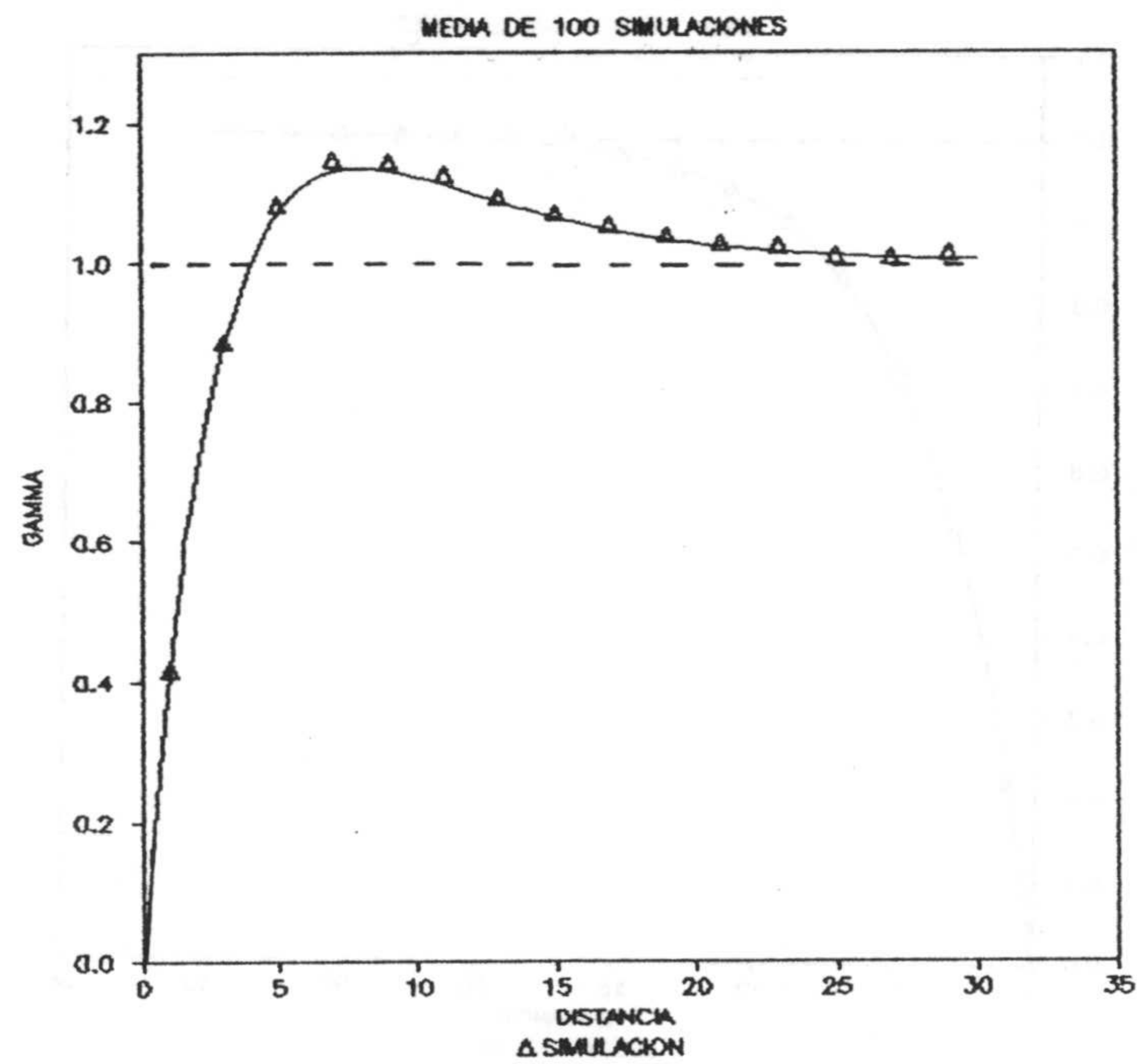


Figura 3.22k. Simulación de un variograma pozo I.

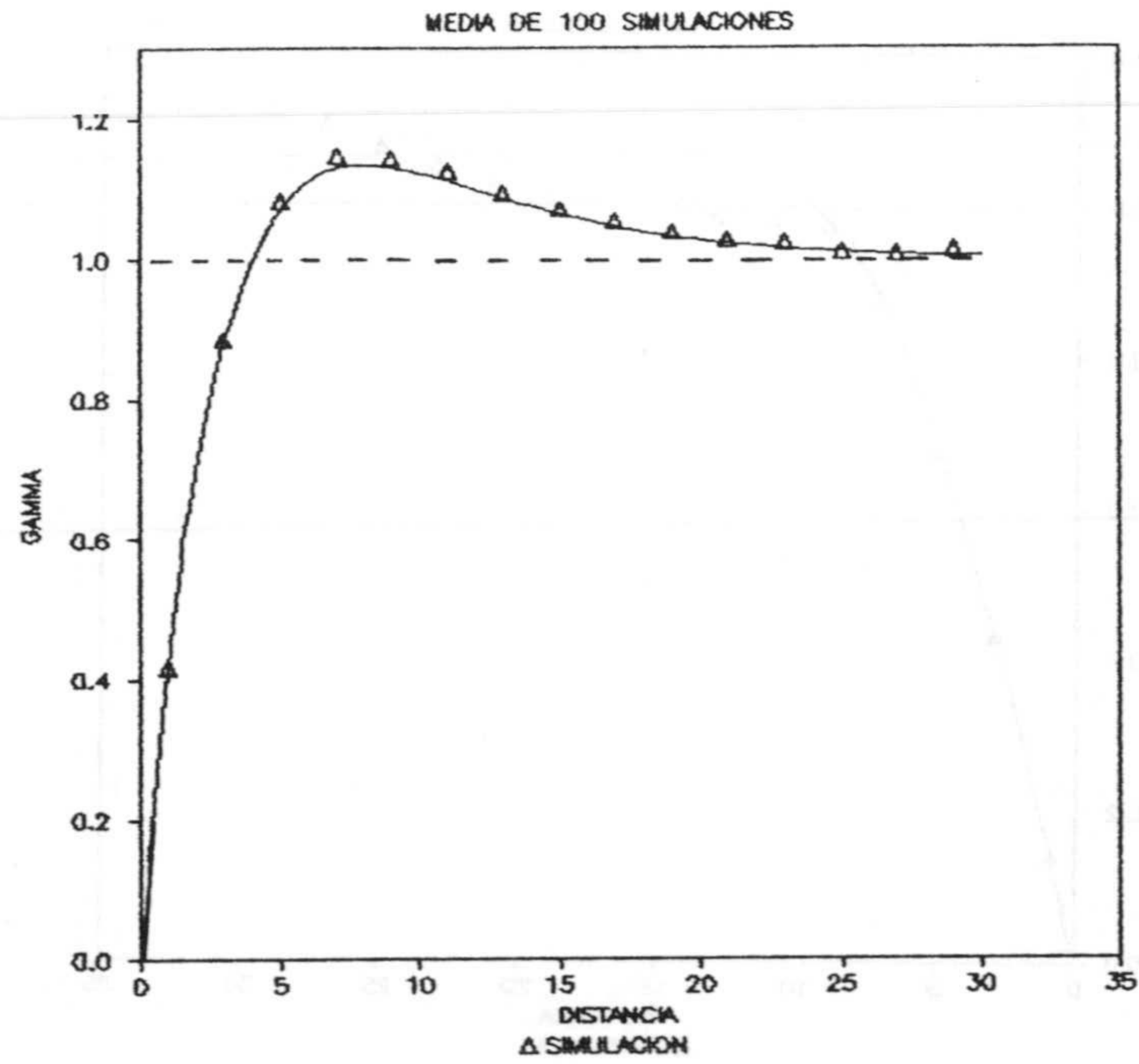


Figura 3.22l. Simulación de un variograma pozo II.

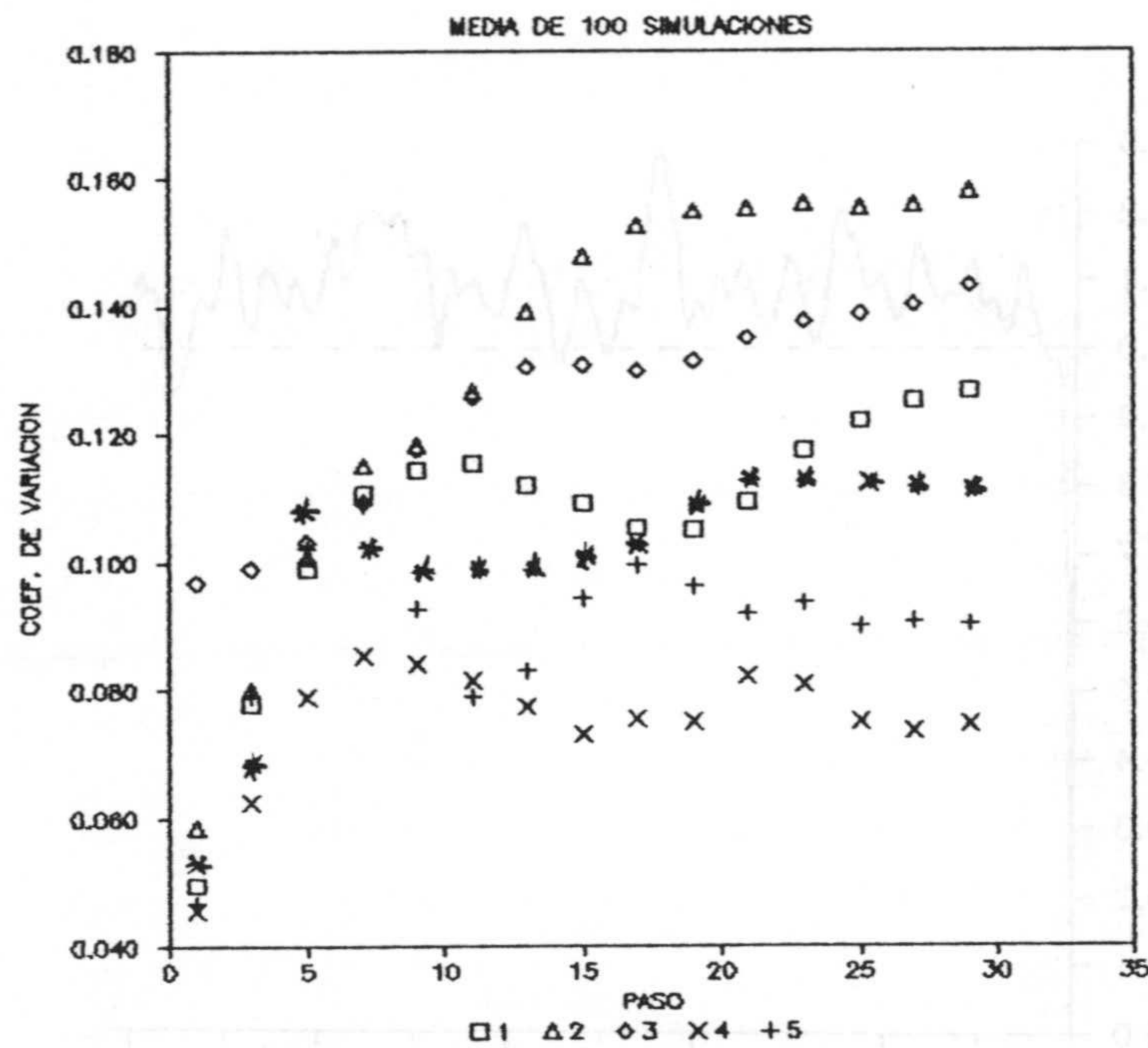


Figura 3.22m. Coeficiente de variación del variograma medio. □ Esférico; Δ Triangular; \* Gausiano; x Pozo I; + Pozo II; \* Exponencial.



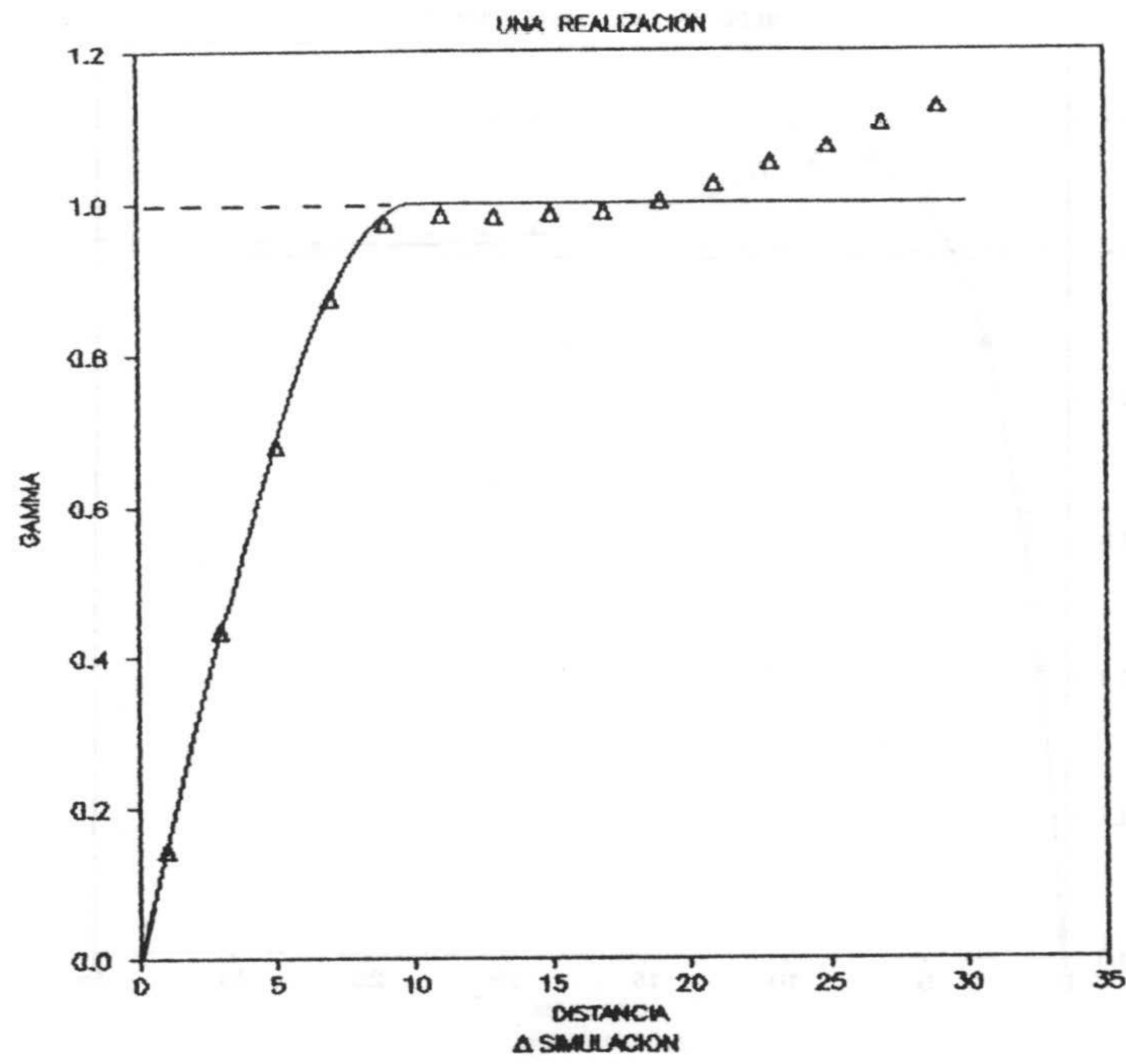


Figura 3.22n. Variograma simulado en una realización.

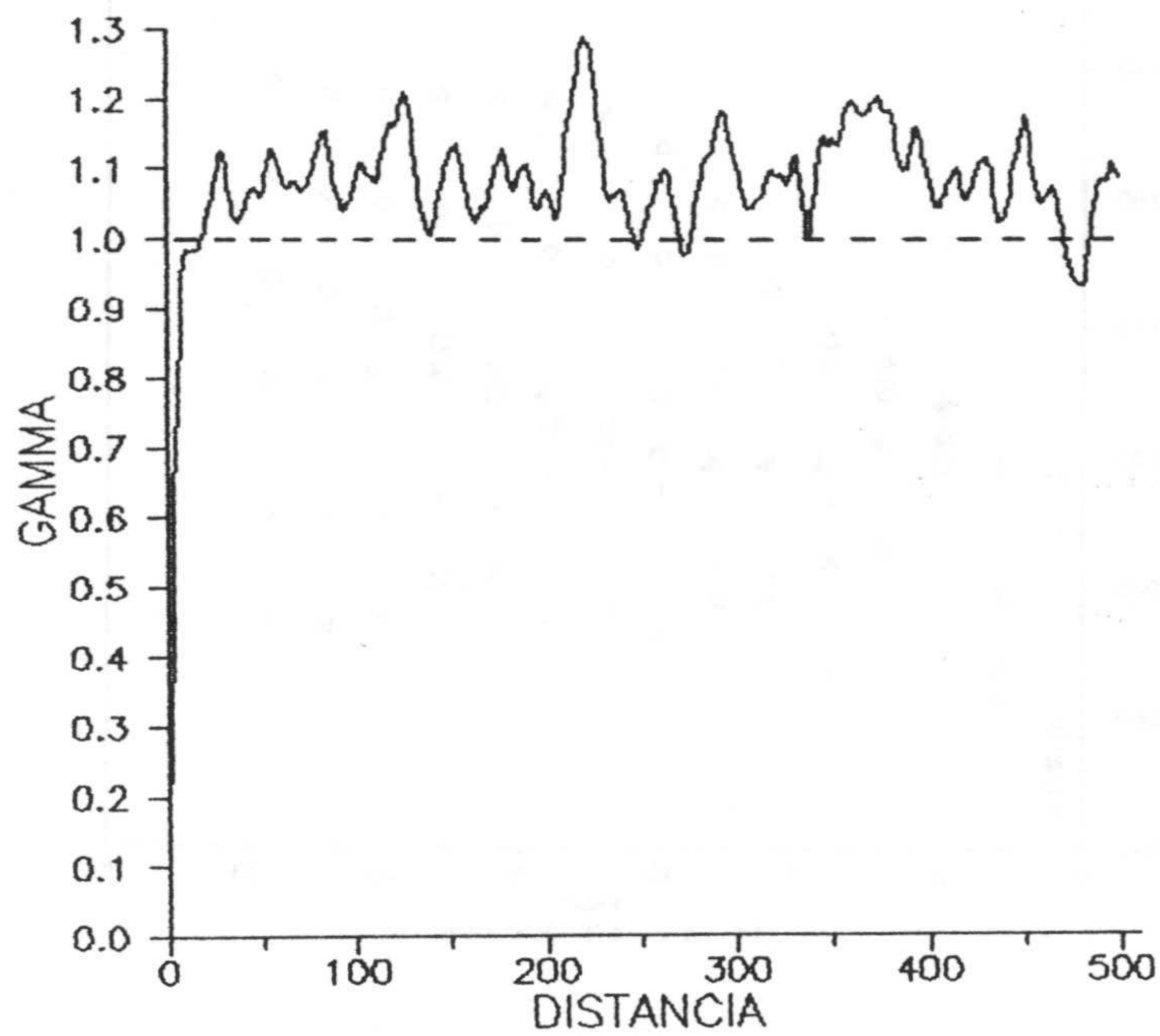


Figura 3.22o. Variograma simulado en una realización observado para distancias grandes.



### 3. SIMULACION BIDIMENSIONAL

#### 3.1. El método de las Bandas Rotantes

La idea básica del método de las Bandas Rotantes (MBR) (MATHERON, 1972,1973; JOURNEL, 1974,a,b) es simple: reducir la simulación multidimensional en simulaciones unidimensionales a lo largo de rectas que reparten homogéneamente el espacio.

Con ello se consigue un doble beneficio:

1). Cuando se ha de simular un número muy elevado de puntos, la simulación directa, esto es, simular el valor en cada punto de la red o malla de discretización podría llegar a ser poco operativo.

2). Sólo son necesarios generadores unidimensionales los cuales son matemáticamente mucho más simples a los modelos multidimensionales, al ser función de una única variable de referencia.

Teóricamente el número de rectas podría llegar hasta infinito cubriendo homogéneamente el espacio que se quiere simular. El número de rectas óptimo se calcula de modo empírico estudiando como se reproduce la covarianza impuesta a la función aleatoria en función del número de rectas. De este modo se puede llegar a conocer el número de rectas más pequeño, lo que implica menor tiempo de cálculo, que da una precisión aceptable. En la tabla 3.X se recoge el número de rectas propuesto por diferentes autores para la simulación de funciones aleatorias bidimensionales, pudiéndose observar como el número de rectas a utilizar puede variar desde 16 cuando se utilizan métodos espectrales de simulación unidimensional, hasta 100 o 180 cuando se utiliza el método de medias móviles.



En la simulación de funciones aleatorias intrínsecas de orden  $k$  (FAIK), el número de rectas propuesto también varía entre 12 o 100, 180 en función del proceso unidimensional utilizado.

Al margen de la simulación FAIK, una cuestión que se plantea es si el número de rectas menor que se utiliza cuando el generador unidimensional es de tipo espectral se debe a que estos generadores son más eficientes.

METODO UNIDIMENSIONAL	NUMERO DE RECTAS PROPUESTO
ESPECTRAL	16, MANTOGLOU y WILSON, (1982)
MEDIAS MOVILES	100, BROOKER (1985)
MEDIAS MOVILES	180, CHICA OLMO (1987)
SIMULACION FAIK	180, CHILES (1977)
SIMULACION FAIK	12, MANTOGLOU y WILSON (1982)
SIMULACION FAIK	100, DIMITRAKOPOULOS (1990)

Tabla 3.X. Número de rectas utilizado en la simulación bidimensional por el MBR.

En cuanto a la orientación de las rectas, una vez fijado el número  $N$  de rectas a utilizar, éstas se colocan con un intervalo angular constante de modo que, situada arbitrariamente la primera recta, cada una de las sucesivas se determina a partir de la anterior mediante una rotación de  $\pi/N$  radianes.

Sobre cada recta se genera un proceso unidimensional con un intervalo de discretización  $\Delta t$ . Los puntos medios entre cada dos puntos de discretización definen una banda de igual anchura  $\Delta t$  de modo que a todos los puntos en el interior de



la banda se les atribuye un valor constante e igual al valor generado en el punto central de discretización.

Dado un punto P del plano de simulación, cuyo vector de posición es  $\mathbf{p}$ , se proyecta sobre todas y cada una de las N rectas utilizadas; la proyección ortogonal de P sobre cada una de las rectas vale  $\langle \mathbf{p} \mathbf{u}_i \rangle$  donde  $\mathbf{u}_i$  es el vector director de la recta i. A cada punto proyectado se le asigna el valor de la banda en la que está incluido y finalmente el valor asignado al punto P es la suma ponderada de las contribuciones de cada recta. Este valor se expresa:

$$z(\mathbf{x}_p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N y_i \langle \mathbf{p} \mathbf{u}_i \rangle$$

donde:

- $z(\mathbf{x}_p)$  : valor simulado en el punto P.
- N : número de rectas utilizado.
- $\mathbf{u}_i$  : vector director de la recta i.
- $\mathbf{p}$  : vector de posición del punto P.
- $\langle \rangle$  : producto escalar.

Un resultado importante de la anterior relación, consecuencia directa del Teorema Central del Límite, es que los valores simulados por el método de las Bandas Rotantes siguen una función de distribución de probabilidad gaussiana, lo que tiene la ventaja adicional de que la distribución normal es una de las funciones de distribución cuyas propiedades son mejor conocidas.

Respecto al espesor de las bandas, la anchura óptima se puede obtener de modo empírico de igual modo al señalado para el número de rectas.



Si se desea simular una malla de puntos cuyo intervalo de discretización en dirección del eje X vale  $\Delta x$  y la correspondiente al eje Y tiene el valor  $\Delta y$ , la anchura de discretización sobre las rectas  $\Delta t$  puede tomarse igual al valor mínimo entre  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , *JOURNEL y HUIJBREGTS (1978)*.

En cuanto a la relación entre la covarianza unidimensional sobre las rectas y la covarianza bidimensional de la función aleatoria a simular, esta relación se puede encontrar en *MATHERON (1973)*, *JOURNEL (1974,b)* o *JOURNEL y HUIJBREGTS (1978)* entre otros. Sean dos puntos de la función aleatoria simulada cuyos vectores de posición son  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ ; los valores simulados correspondientes están dados por las relaciones vistas con anterioridad:

$$z(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N z_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_i)$$

$$z(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N z_i(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_i)$$

Su función de covarianza se puede expresar como:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E\{z(\mathbf{x}_1) z(\mathbf{x}_2)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\{z_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_i) z_j(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_j)\}$$

Como las realizaciones sobre las rectas son independientes, la esperanza matemática anterior vale cero en los casos en que  $i \neq j$  y es igual a la covarianza del proceso unidimensional en el caso  $i = j$ . Esta covarianza

unidimensional es estacionaria de segundo orden por lo que:

$$C(x_1, x_2) = C(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(h u_i)$$

donde  $h = x_2 - x_1$

Como la covarianza es además isótropa  $C(h) = C(r)$  donde  $r = |h|$ . Tomando el límite de la expresión última, cuando el número de rectas  $N$  tiende a infinito se llega a :

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(h u_i) \right\} = E[C_1(h u_i)] = \int_c C_1(h u) f(u) du$$

donde:

$c$  : representa el círculo o esfera unidad en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente.

$f(u)$  : función de densidad de probabilidad de  $u$ .

Como  $u$  sigue una función de distribución uniforme, su valor es  $1/2\pi$  para dos dimensiones y  $1/4\pi$  para el caso tridimensional.

$u$  : vector director unitario.

De este modo se llega a:

$$C_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{círculo unidad}} C_1(h u) du \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$



$$C_3(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{esfera unidad}} C_1(h \mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

Desarrollado la primera integral en coordenadas polares se llega a la relación (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1987; BROOKER, 1985; CHRISTAKOS, 1987):

$$\int_0^r \frac{C_1(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} \, ds = \frac{\pi}{2} C_2(r)$$

Como se puede apreciar la relación que liga la función de covarianza unidimensional sobre las rectas y la covarianza bidimensional objetivo no es una relación sencilla de evaluar.

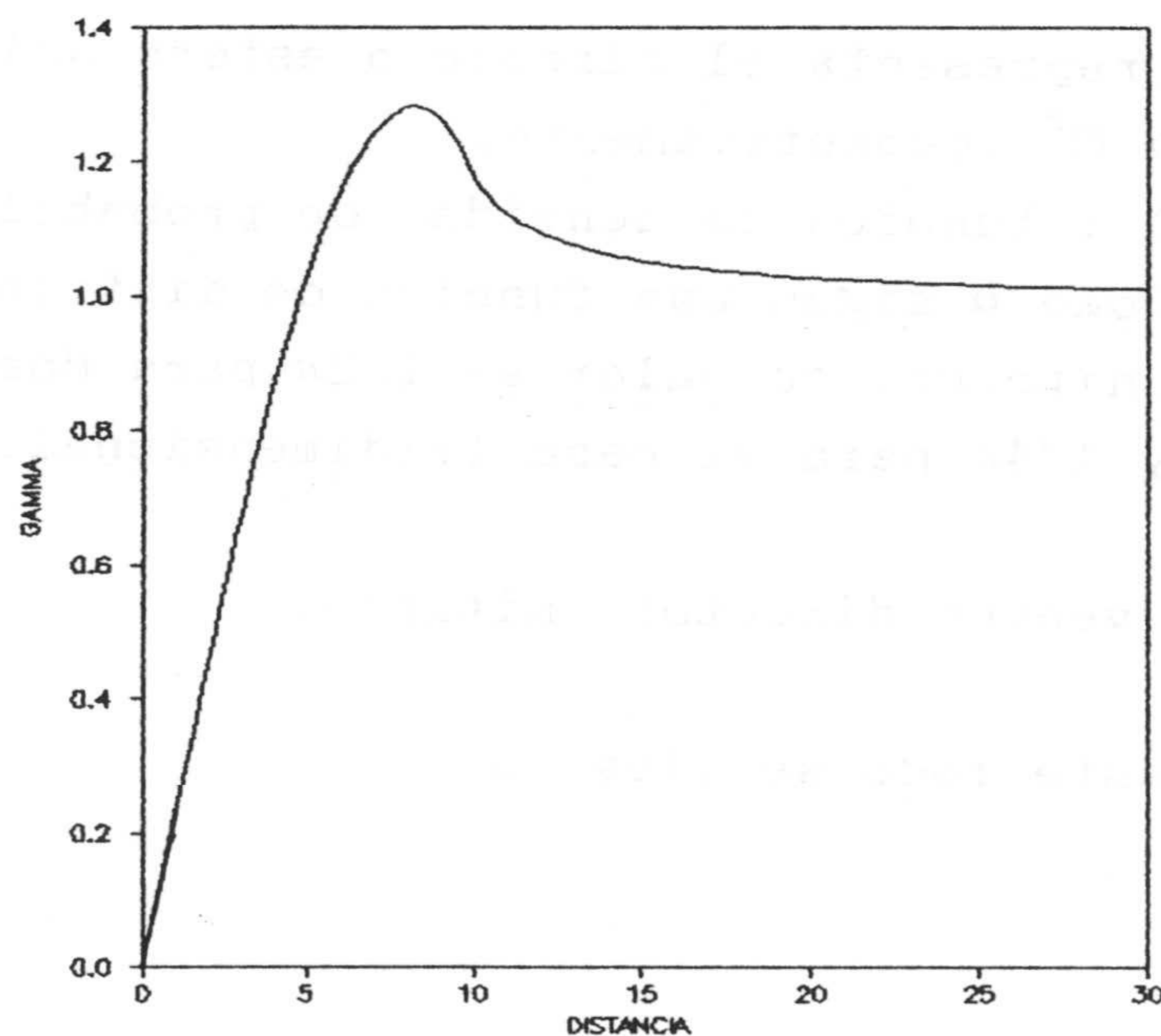


Figura 3.23. Modelo unidimensional de covarianza.

Existen soluciones parciales como la de BROOKER (1985) que, para el modelo de covarianza esférica, obtiene la relación siguiente (figura 3.23):

para  $s < a$  :

$$C_1(s) = \sigma^2 \left\{ 1 - \left(\frac{3\pi}{4}\right) \left[ \left(\frac{s}{a}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^3 \right] \right\}$$

para  $s > a$

$$C_1(s) = \sigma^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{s}{a}\right) - \left(\frac{s}{a}\right)^3 \right] \arcsen\left(\frac{a}{s}\right) - \frac{3}{4} \left(\frac{s}{a}\right)^2 \left[ 1 - \left(\frac{a}{s}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Contrariamente a la relativa complejidad anterior, MANTOGLOU y WILSON (1981, 1982) demuestran que existe una relación sencilla entre las funciones de densidad espectral correspondientes a las covarianzas unidimensional sobre las rectas y bidimensional del plano de simulación.

Sea  $S(\omega) = S(\omega_1, \omega_2)$  la función de densidad espectral de una función aleatoria en el plano. Como se conoce, la función de densidad espectral  $S(\omega)$  y la función de covarianza  $C(h)$  están relacionadas por un par transformado de Fourier. Si la función aleatoria es isótropa:

$$C(h) = C(r, \vartheta) = C(r)$$

implica que es una función del tipo radialmente simétrica, esto es, se puede expresar en coordenadas polares y es independiente del ángulo  $\vartheta$ , por todo lo cual es aplicable la



transformada inversa de Hankel, WEAVER (1983):

$$C(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \omega S(\omega) J_0(\omega r) d\omega$$

y la transformada directa de Hankel permite expresar:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r C(r) J_0(\omega r) dr$$

donde  $J_0$  es la función de Bessel de primera clase y orden cero.

Por otra parte, la función de densidad espectral del proceso unidimensional  $S_1(\omega)$  y la función de covarianza de dicho proceso  $C_1(s)$  también están relacionados por un par transformado de Fourier:

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} C_1(s) ds$$

y reciprocamente:

$$C_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{i\omega s} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_1(\omega) \cos(\omega s) d\omega$$

donde la frecuencia  $\omega$  es un escalar y  $S_1(\omega)$  es real,

simétrica y positiva. Recordando el resultado del método de las Bandas Rotantes para dos dimensiones:

$$C_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_1(r \operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta$$

e introduciendo en la anterior relación la representación de la covarianza como transformada de Fourier de la función de densidad espectral, invirtiendo asimismo el orden de integración se llega a (MANTOGLOU y WILSON, 1982):

$$C_2(r) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} S_1(\omega) \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(\omega r \operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta \right\} d\omega$$

La integral entre llaves vale  $(\pi/2) J_0(\omega r)$ , GRADSHTIN y RYZHIK (1980), MANTOGLOU y WILSON (1982), con lo cual:

$$C(r) = 2 \int_0^{\infty} S_1(\omega) J_0(\omega r) d\omega$$

Y aplicando a esta última ecuación la transformada de Hankel:

$$S_1(\omega) = 2 \omega \int_0^{\infty} C(r) J_0(\omega r) r dr$$



Comparando esta ecuación y la obtenida para  $S(\omega)$  se llega a la relación fundamental (MANTOGLOU y WILSON, 1981,1982; MANTOGLOU, 1987; CHRISTAKOS, 1987):

$$S_1(\omega) = \omega \pi S(\omega)$$

Se tiene por tanto una relación muy sencilla entre la función de densidad espectral del proceso unidimensional a lo largo de las líneas del método de las Bandas Rotantes y la función de densidad espectral de la función aleatoria bidimensional.

De este modo, conocida la función de covarianza  $C(r)$  que se desea imponer al plano simulado, se puede calcular la correspondiente función de densidad espectral  $S(\omega)$ ; basta entonces con multiplicar dicho resultado por el factor  $(\omega \pi)$  para obtener la expresión de  $S_1(\omega)$ . Conocida la función de densidad espectral del proceso unidimensional, sólo queda generar dicho proceso de acuerdo a alguno de los métodos de simulación unidimensional en el dominio de la frecuencia vistos con anterioridad.

MANTOGLOU y WILSON (1982) obtienen los siguientes resultados:

Modelo exponencial

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 a^2}{2\pi \left[ 1 + (\omega^2 a^2) \right]^{3/2}}$$



## Modelo gausiano

$$S(\omega) = \frac{a^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2 a^2}{4}\right)$$

La expresión de  $S(\omega)$  para el modelo esférico que proponen *MANTOGLOU* y *WILSON* (1982) está compuesta por series hipergeométricas generalizadas y la función de Bessel de primera clase y orden uno. El cálculo de  $S(\omega)$  requiere por tanto la estimación de dichas funciones lo que conlleva un tiempo de cálculo muy alto. Por otra parte, efectuando la evaluación numérica (*PARDO*, 1989) se han obtenido, para determinadas frecuencias, resultados negativos lo cual no es compatible con la función de densidad espectral que es positiva y hace pensar que la solución propuesta no es correcta, como también puede verse en *MUÑOZ-PARDO* (1987). La dificultad de encontrar una solución analítica sencilla proviene de que la integral donde aparece una función de Bessel y una potencia sólo se conoce su solución analítica para casos muy específicos.

Una posible solución para el modelo esférico consiste en calcular  $S_1(\omega)$  directamente a partir de la expresión de  $C_1(s)$  propuesta por *BROOKER* (1985). Debido a la complejidad de la covarianza unidimensional anterior lo más viable es calcular su expresión de modo numérico por la transformada rápida de Fourier.

Se ha chequeado la metodología generando diferentes realizaciones de un campo aleatorio que consta de 4096 valores puntuales dispuestos en una malla regular de  $64 \times 64$  localizaciones a interdistancia unidad tanto en el eje X como en el Y. La covarianza impuesta es un modelo esférico de alcance 10 unidades y meseta igual a uno.



Se ha utilizado el método de las Bandas Rotantes con 16 rectas y anchura de las bandas unidad e igual al espaciado entre los puntos del plano; se han comparado tres generadores unidimensionales diferentes, ya estudiados anteriormente:

- 1) Método de la integral de Fourier.
- 2) Filtrado de un ruido blanco.
- 3) Técnica de *RICE (1954)*.

Las figuras 3.24a. a 3.24l muestran el variograma medio de 100 realizaciones para las direcciones N-S, E-W, NE-SW y NW-SE; así como para las tres metodologías de simulación unidimensional. En todos los casos es apreciable la buena correspondencia entre los valores experimentales y los correspondientes valores teóricos no pudiéndose detectar diferencias dignas de mención entre los resultados de los diferentes métodos. Las figuras 3.24m a 3.24o muestran el coeficiente de variación del variograma medio para los tres casos ya mencionados. En todos los casos el estadístico muestra un comportamiento parejo y con el mismo orden de magnitud que se sitúa en torno a 0.14 (14 %). Por último en las figuras 3.24p a 3.24r se representa el variograma experimental de una realización tomada al azar. En la tabla 3.XI están registrados los estadísticos de las diferentes realizaciones, recalándose como cuando el número de simulaciones aumenta, los valores experimentales tienden a los valores teóricos.



	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
TEORICO	.0	.0	1.0	.0
A1	.0114	.0152	.9780	.0097
A2	.0154	.0136	.9866	.0122
A3	-.0008	.0133	.9903	.0093
B1	.1059	—	1.1662	—
B2	.2056	—	.9340	—
B3	.1203	—	.8981	—

Tabla 3.XI. Estadísticos de la simulación por el MBR en el plano. A. Valores medios de 100 realizaciones. B. Valores de una realización. Generador unidimensional: 1. Integral de Fourier. 2. Medias móviles. 3. Método de RICE (1954).  
.....  $\bar{x}$ : media;  $\sigma^2(\bar{x})$  : varianza de la media;  
.....  $\sigma^2$ : varianza;  $\sigma^2(\sigma^2)$ : varianza de la varianza.

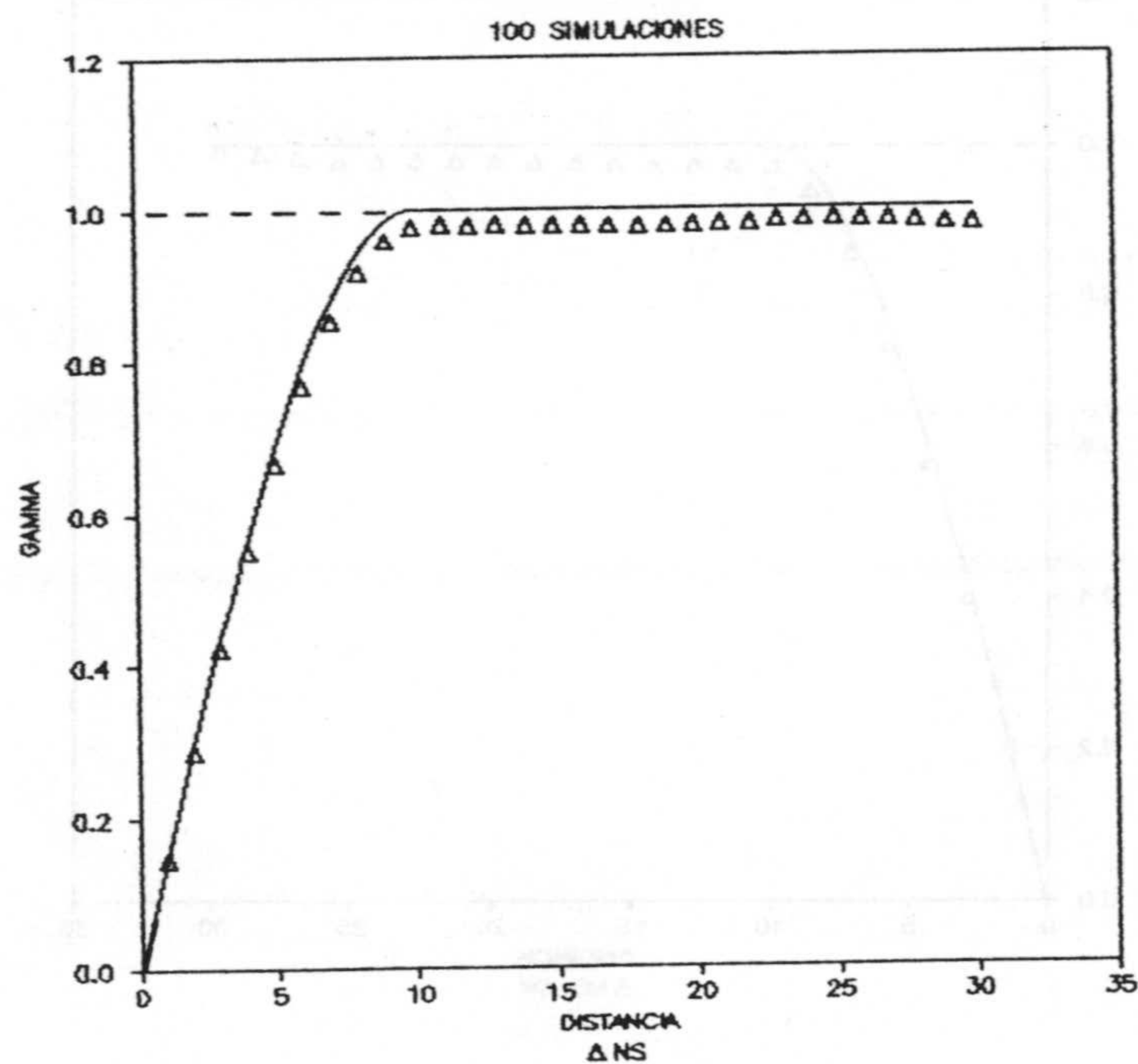


Figura 3.22a. Variograma medio N-S; generación sobre rectas por la integral de Fourier.



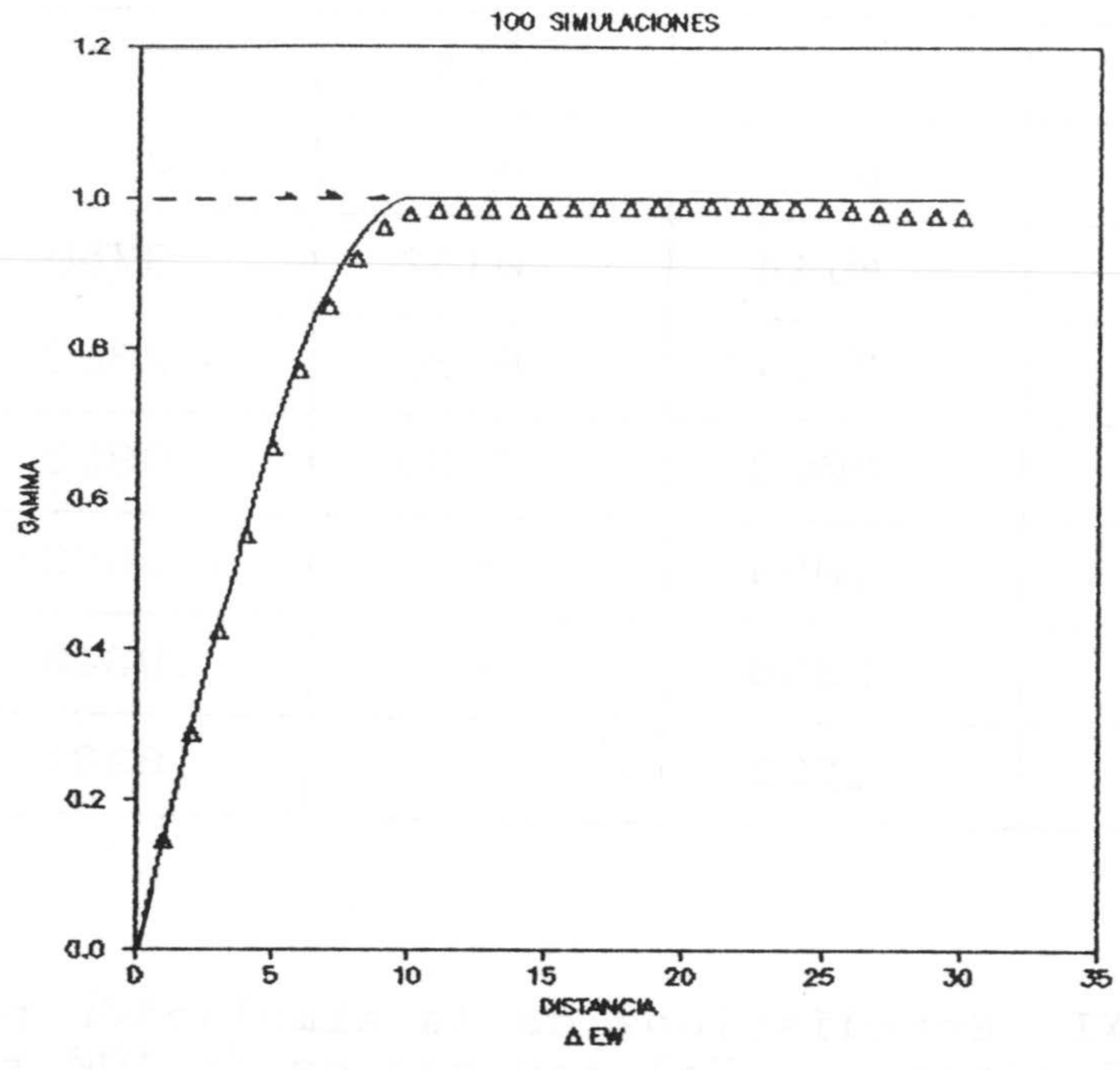


Figura 3.22b. Variograma medio E-W; generación sobre las rectas por la integral de Fourier.

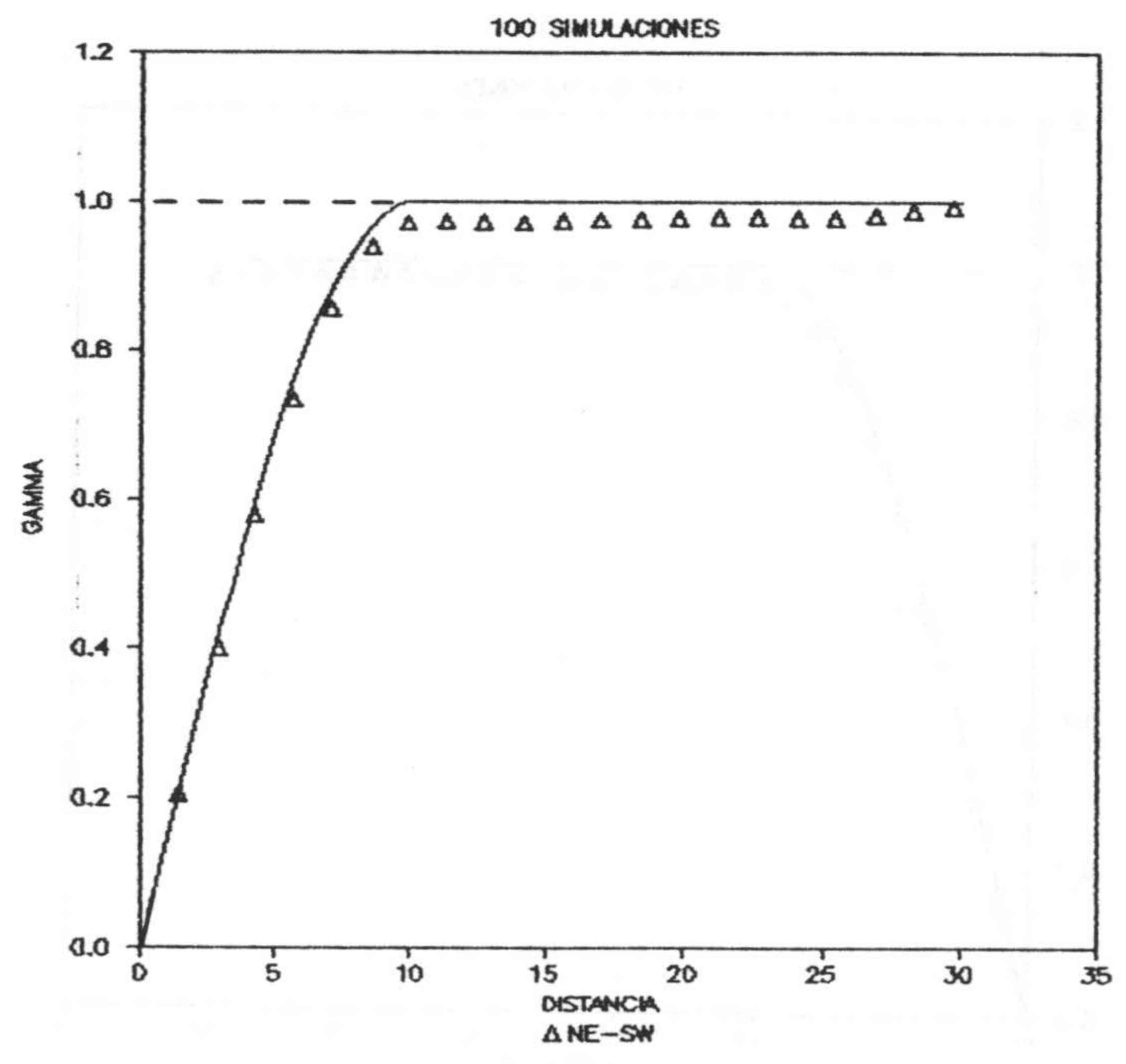


Figura 3.22c. Variograma medio NE-SW; generación sobre las rectas por la integral de Fourier.

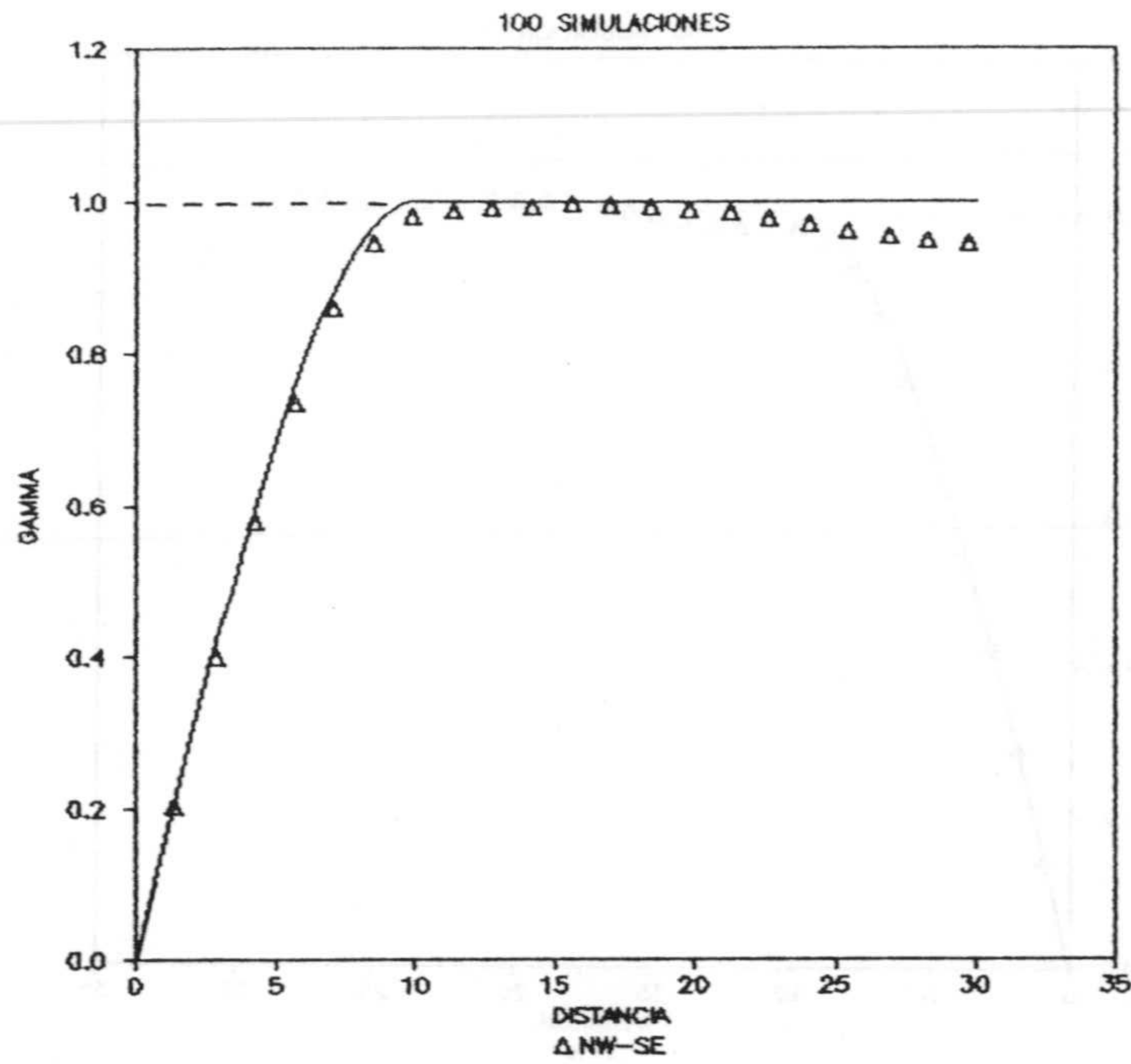


Figura 3.24d. Variograma medio NW-SE; generación sobre las rectas por la integral de Fourier.

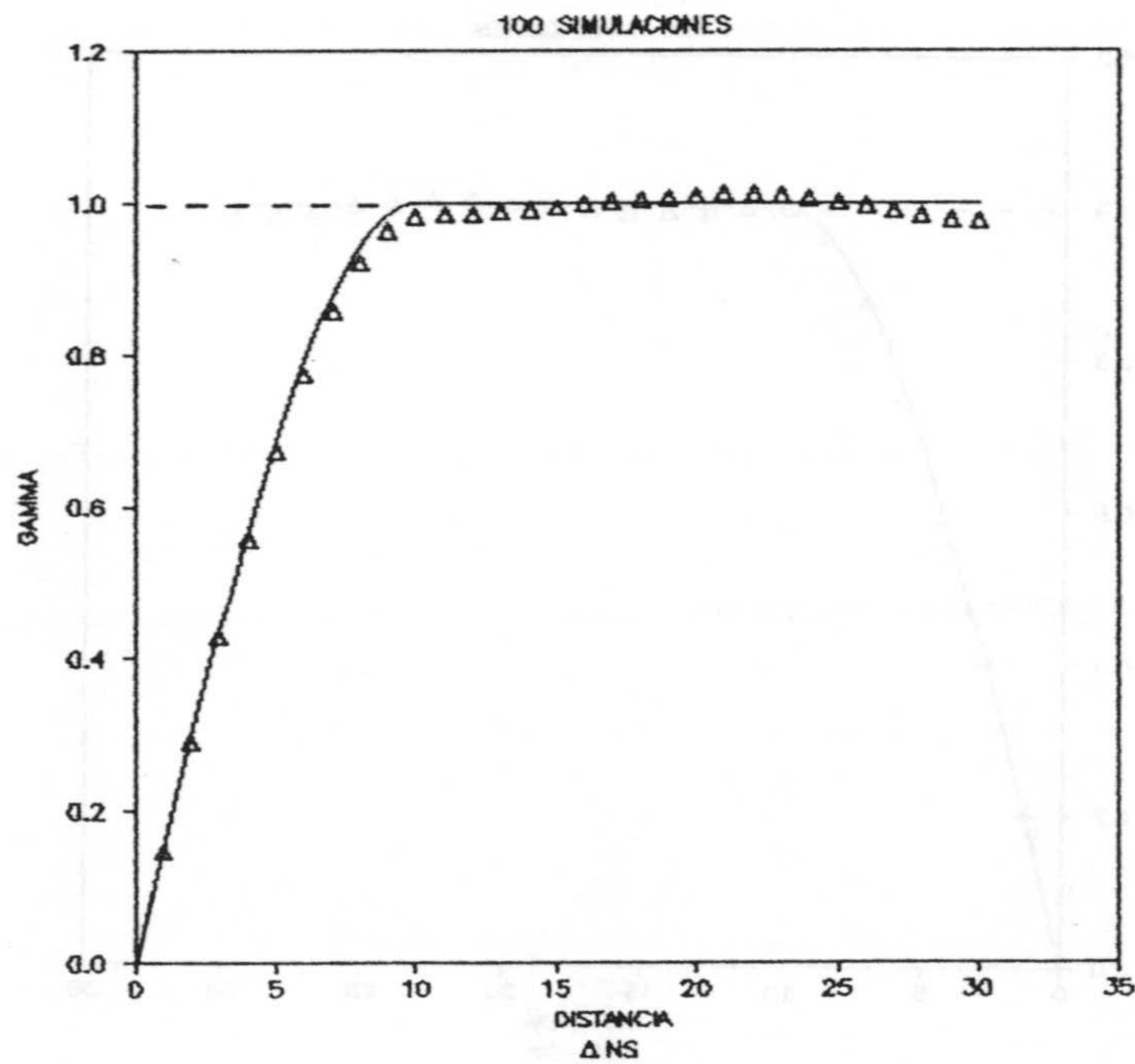


Figura 3.24e. Variograma medio N-S; generación sobre las rectas por filtrado de un ruido blanco.



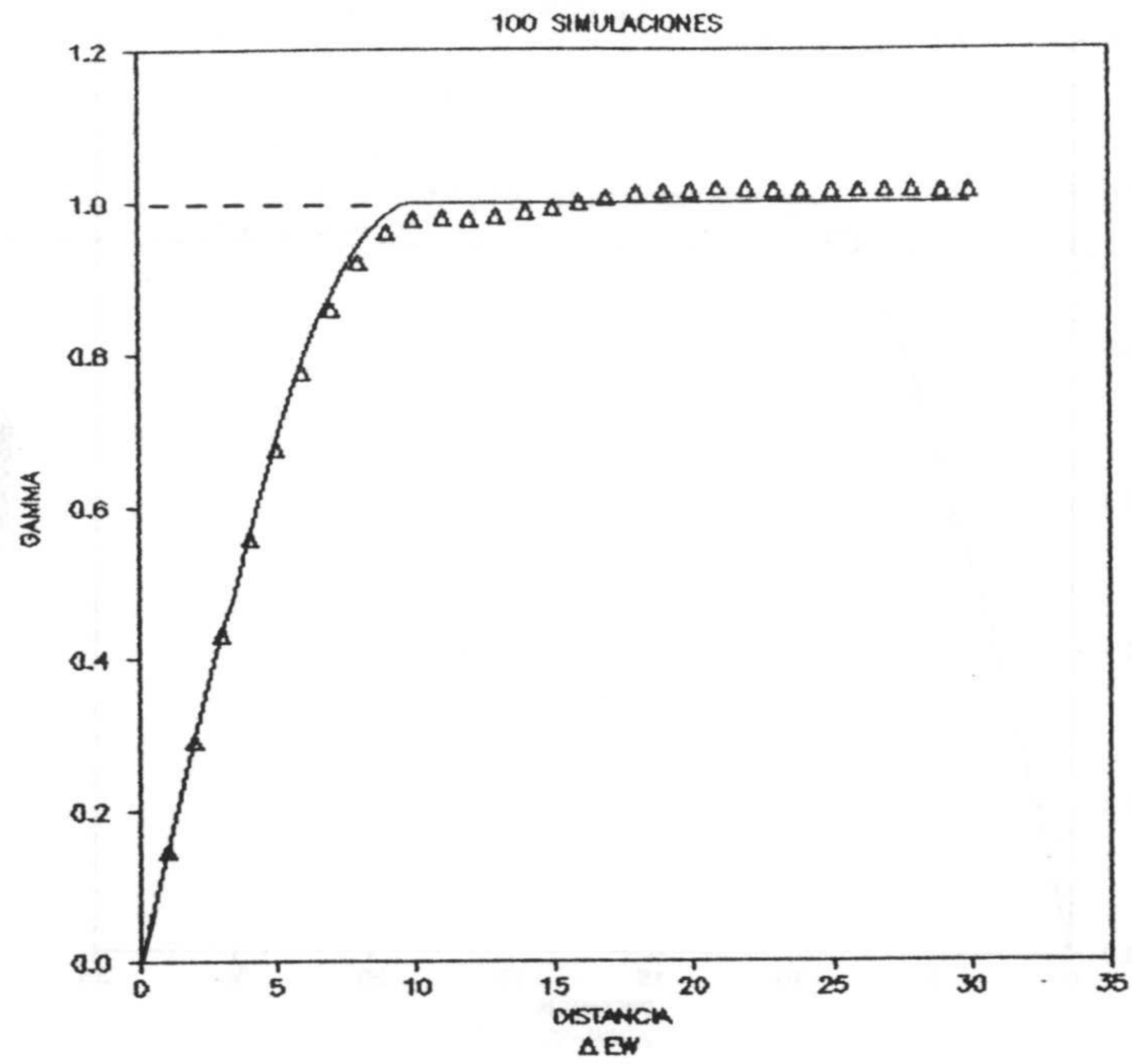


Figura 3.24f. Variograma medio E-W; generación sobre las rectas por filtrado de un ruido blanco.

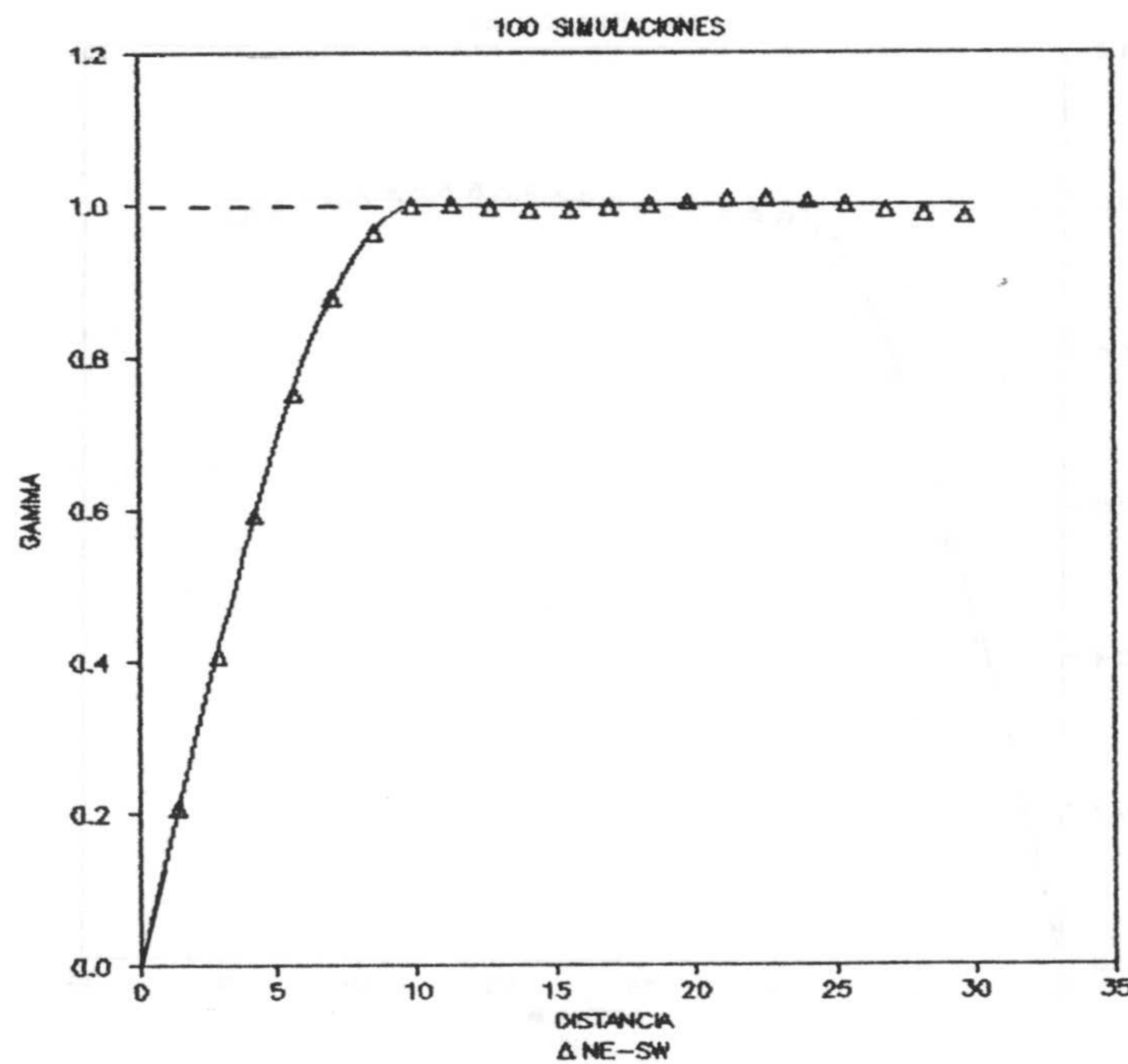


Figura 3.24g. Variograma medio NE-SW; generación sobre las rectas por filtrado de un ruido blanco.

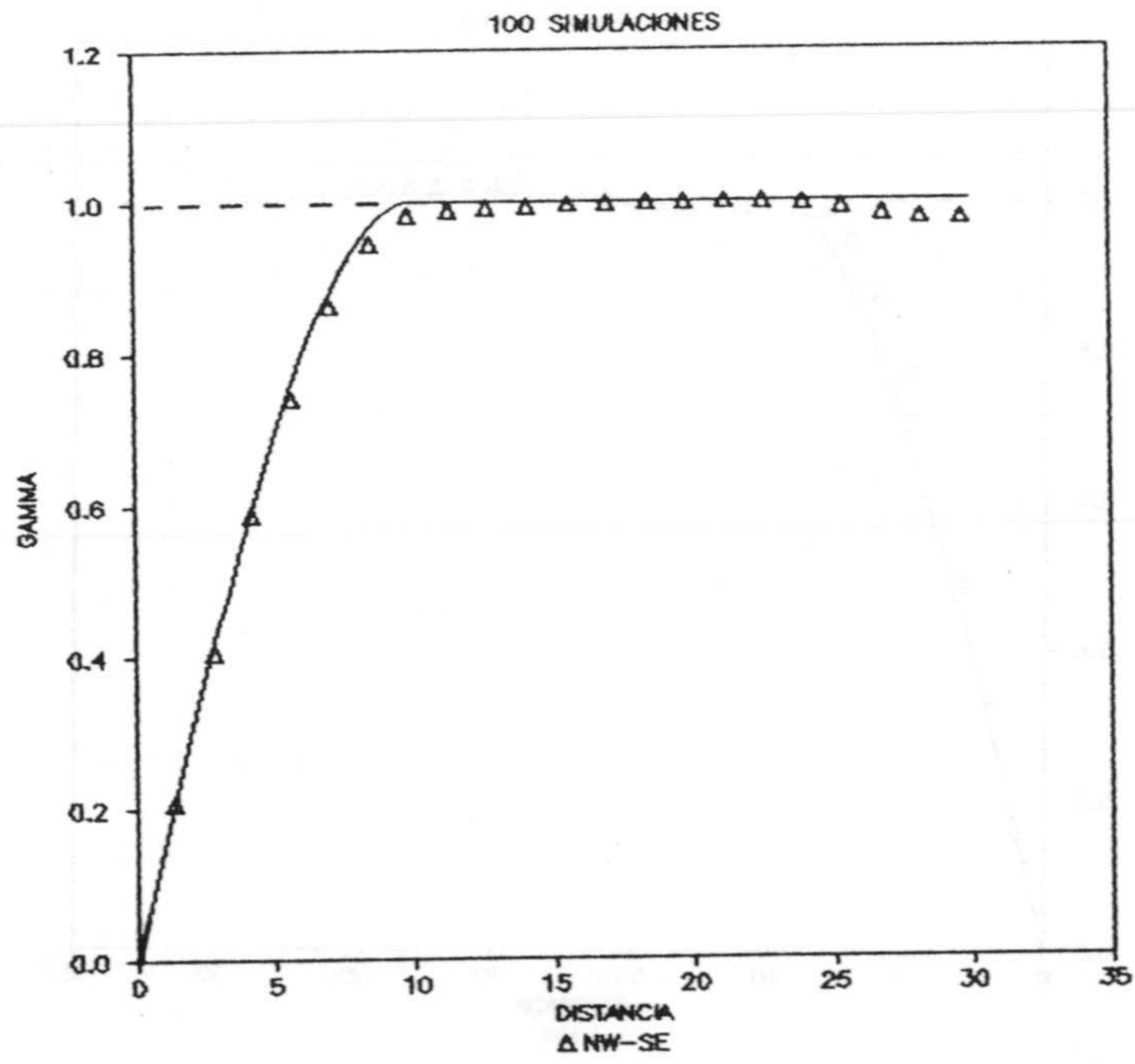


Figura 3.24h. Variograma medio NW-SE; generación sobre las rectas por filtrado de un ruido blanco.

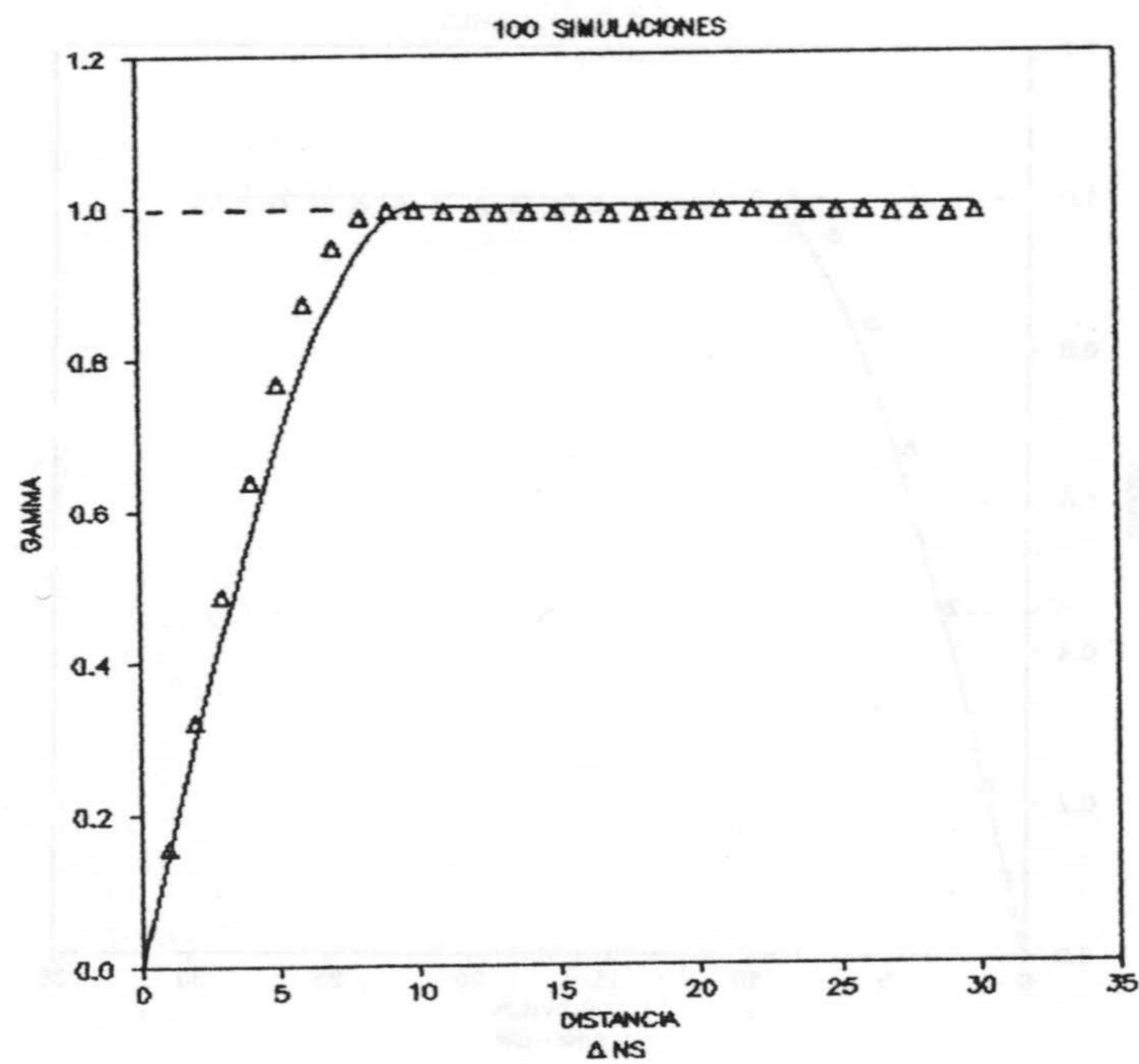


Figura 3.24i. Variograma medio N-S; generación sobre las rectas por el método de RICE (1954).



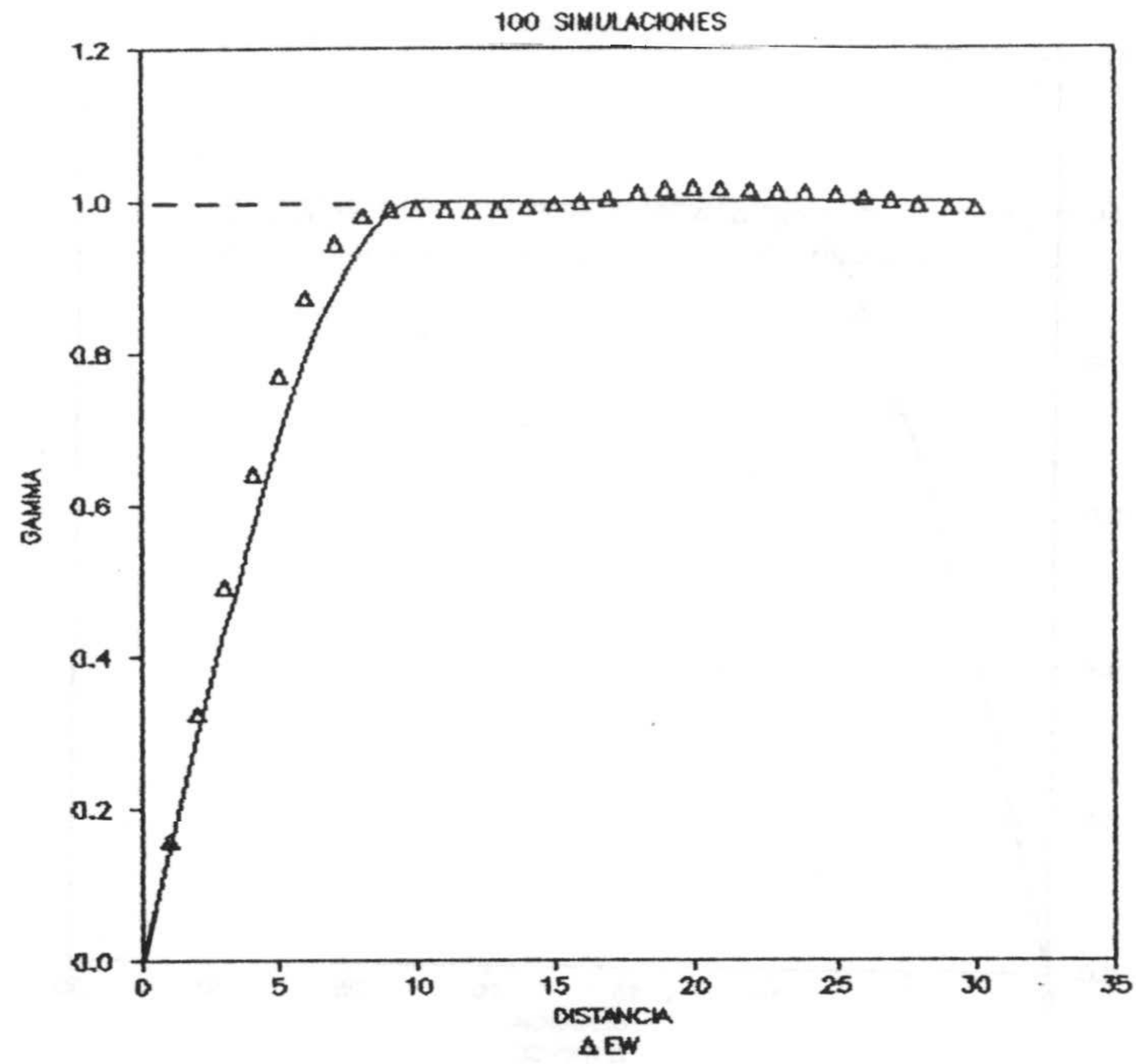


Figura 3.24j Variograma medio E-W; generación sobre las rectas por el método de RICE (1954).

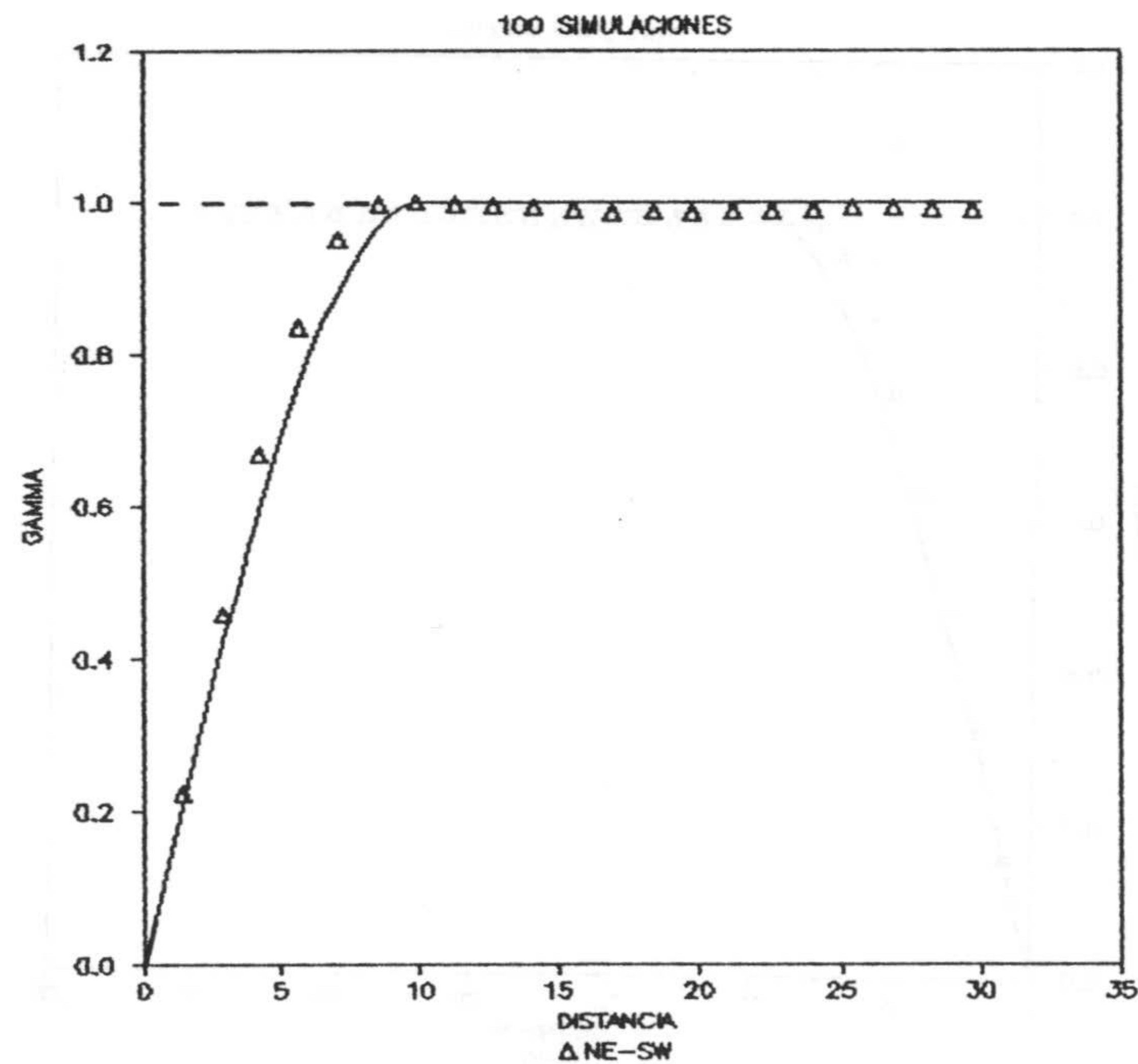


Figura 3.24k. Variograma medio NE-SW; generación sobre las rectas por el método de RICE (1954).

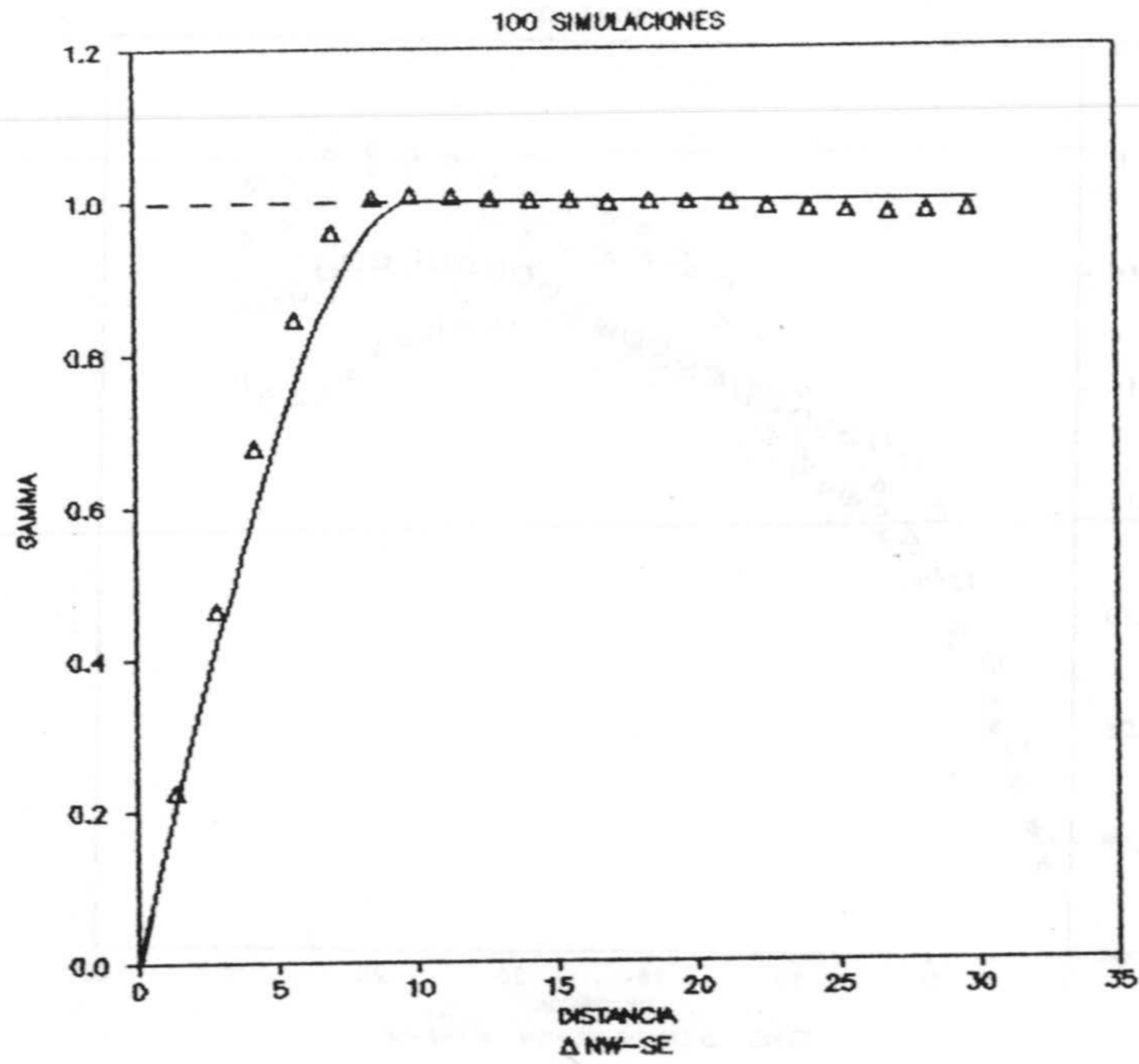


Figura 3.24l. Variograma medio NW-SE; generación sobre las rectas por el método de RICE (1954).

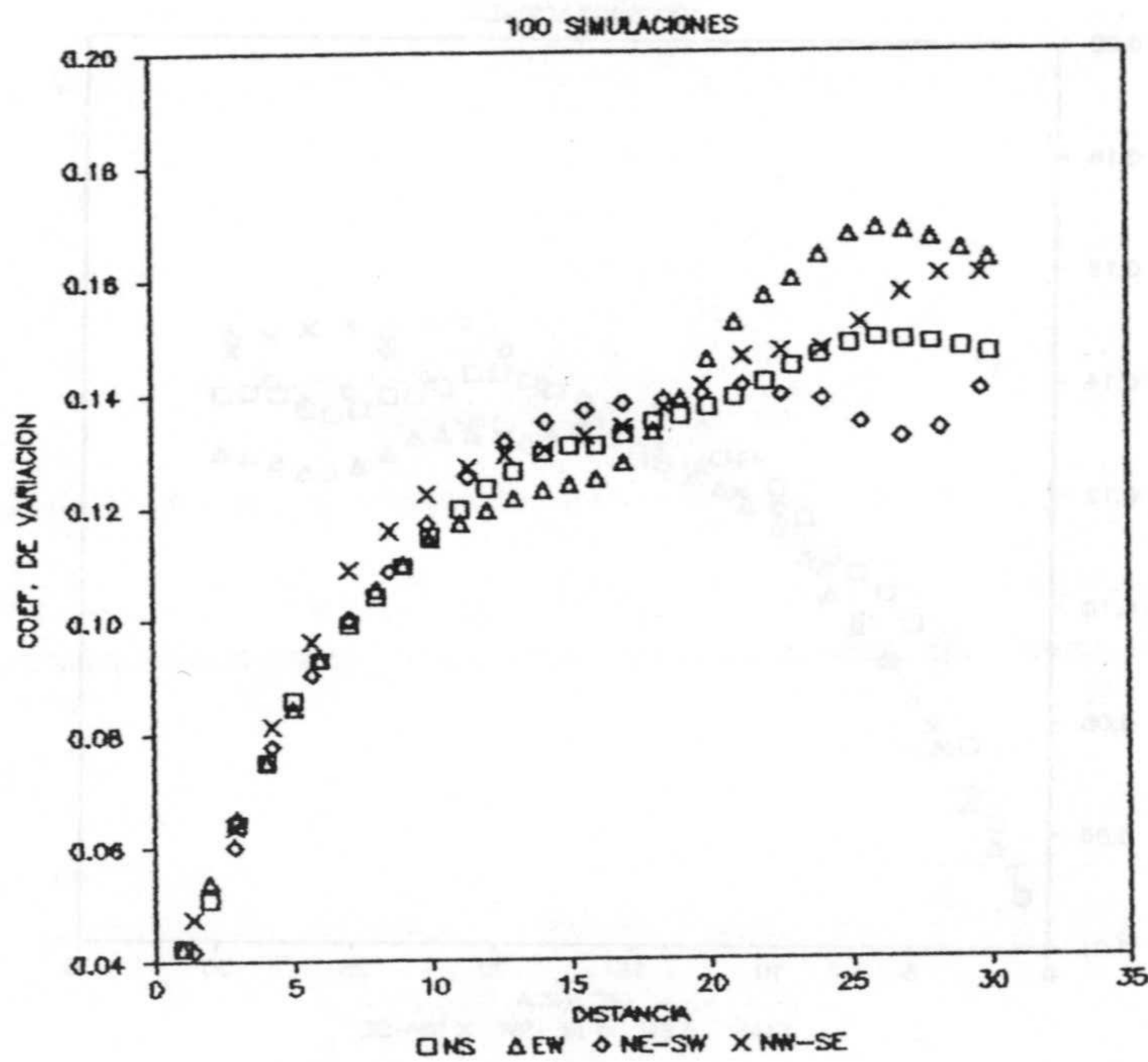


Figura 3.24m. Coeficiente de variación del variograma medio cuando el generador unidimensional es el método de la integral de Fourier.



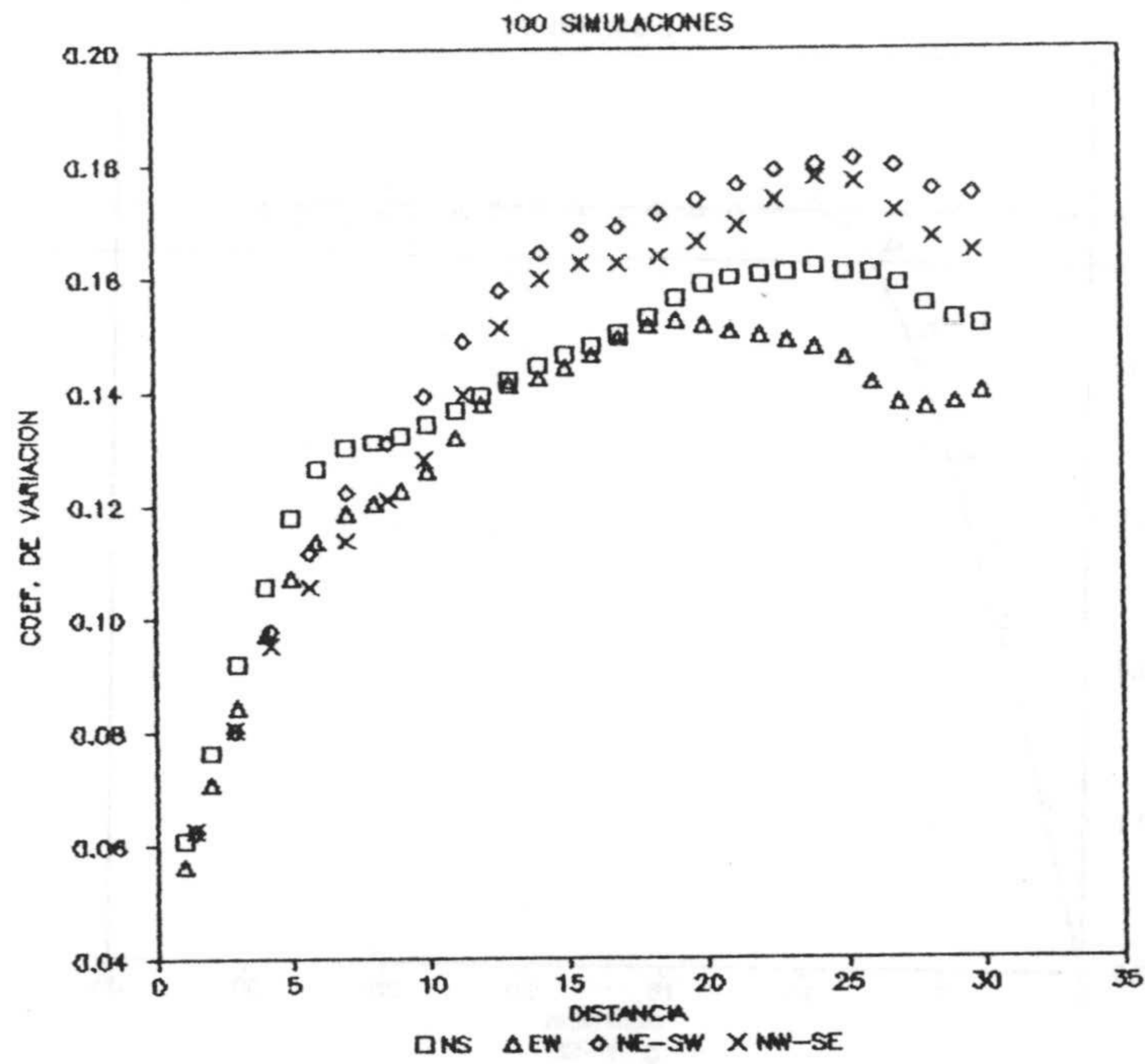


Figura 3.24n. Coeficiente de variación del variograma medio cuando la generación unidimensional se efectúa por filtrado de un ruido blanco.

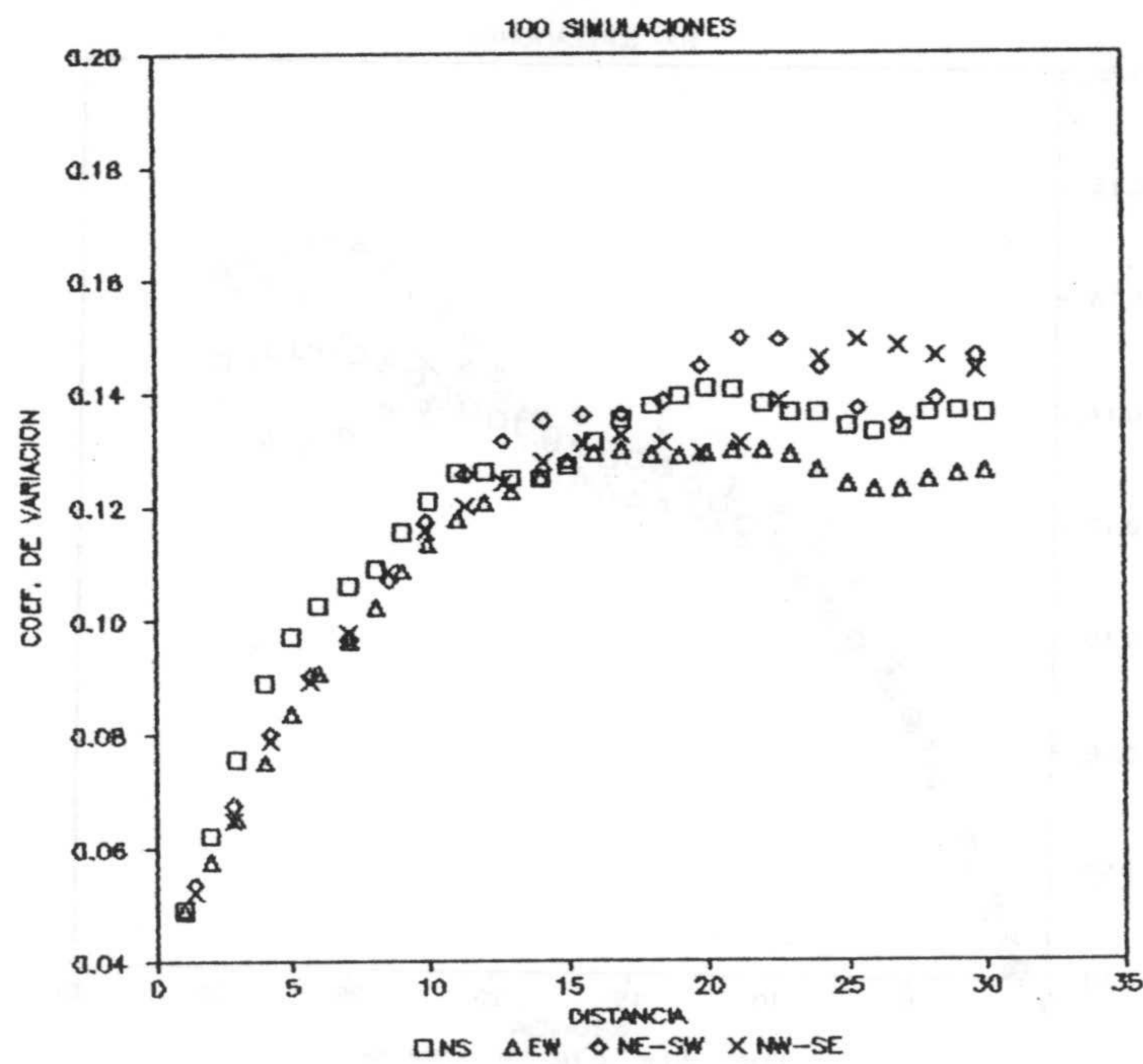


Figura 3.24o. Coeficiente de variación del variograma medio cuando el generador unidimensional es el método de RICE (1954).

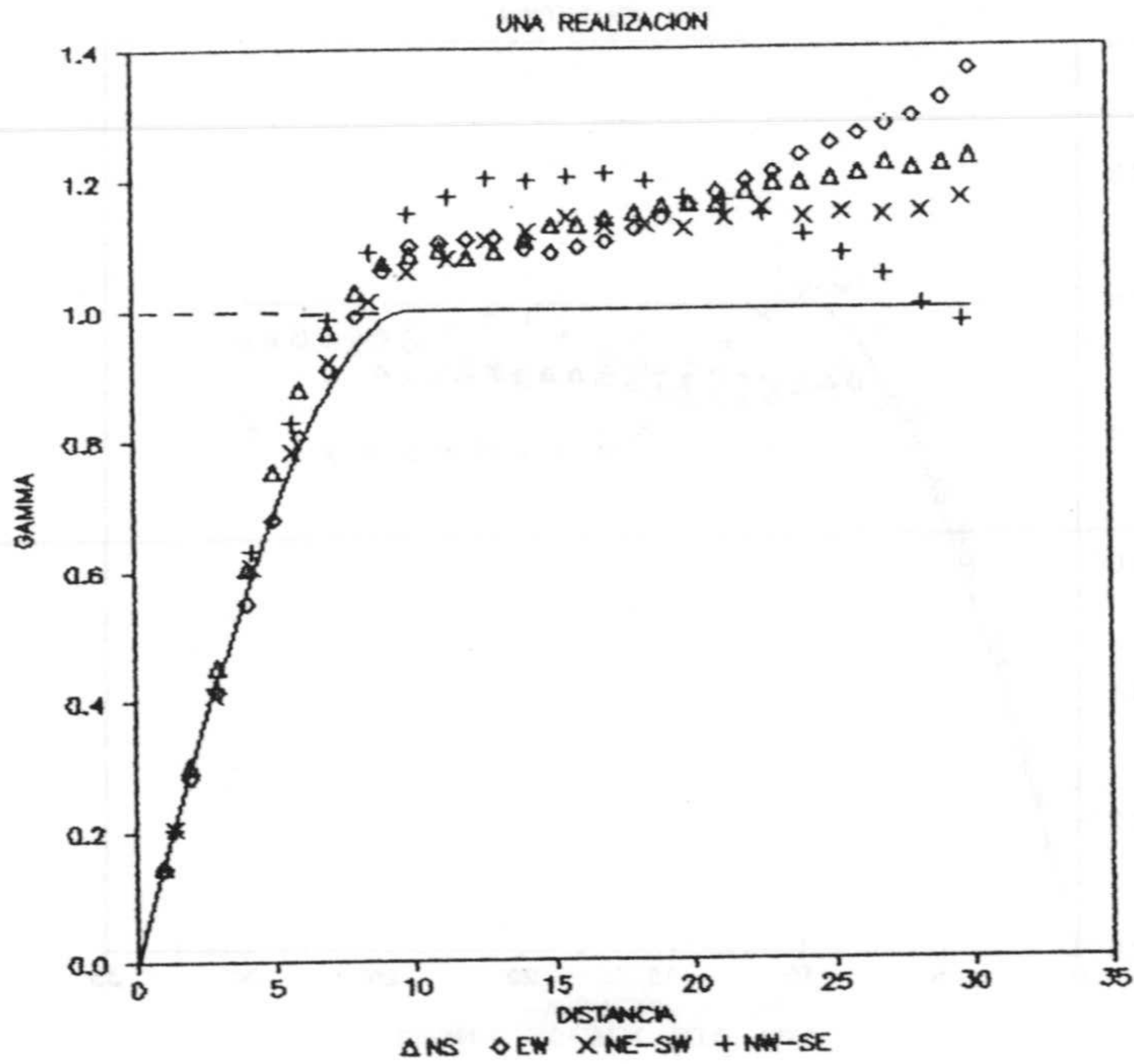


Figura 3.24p. Variograma simulado en una realización y con generador unidimensional de la integral de Fourier.

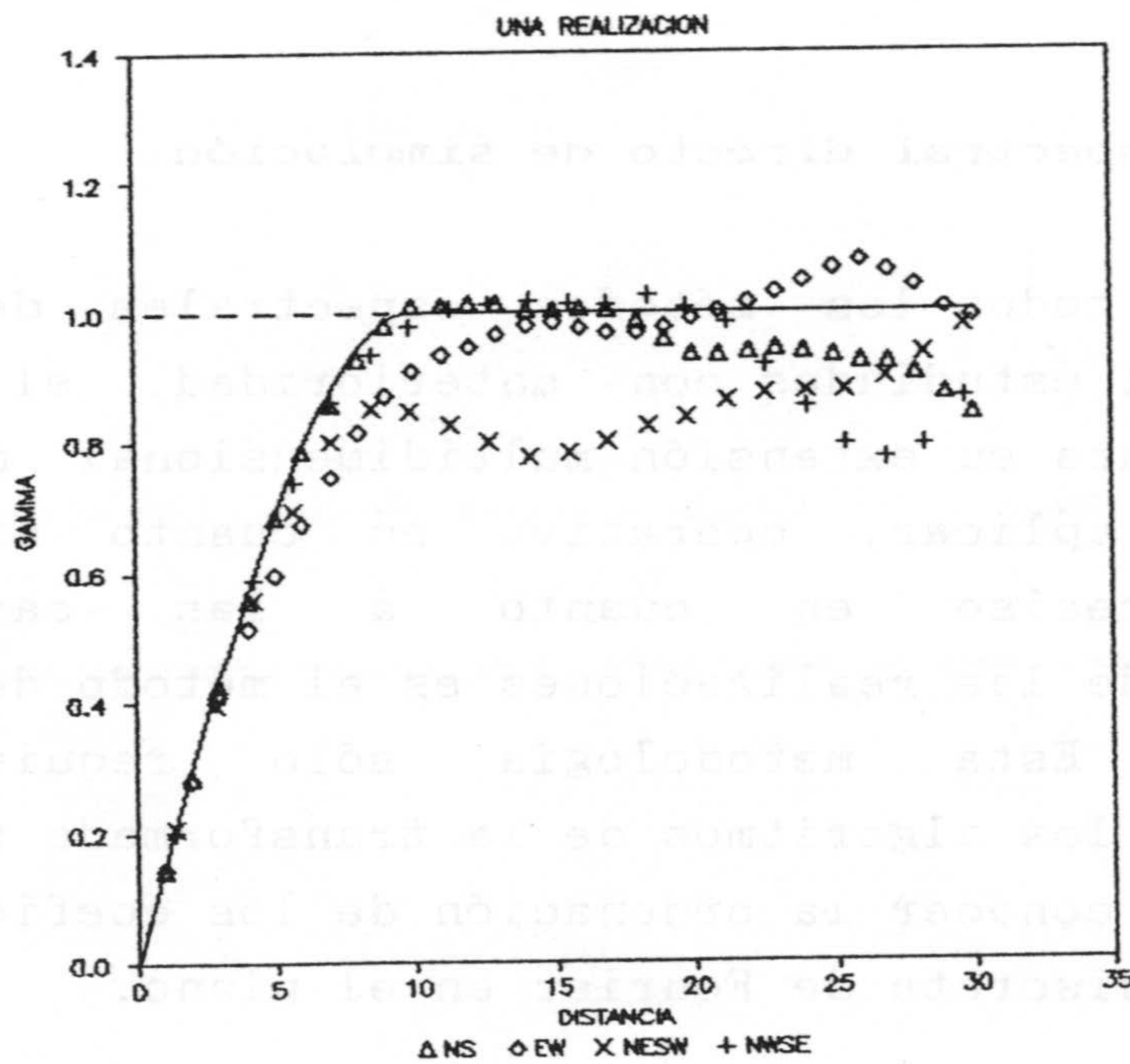


Figura 3.24q Variograma simulado en una realización con generador unidimensional por filtrado de un ruido blanco.

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
 28 MAYO 1991  
 COMISION DE DOCTORES



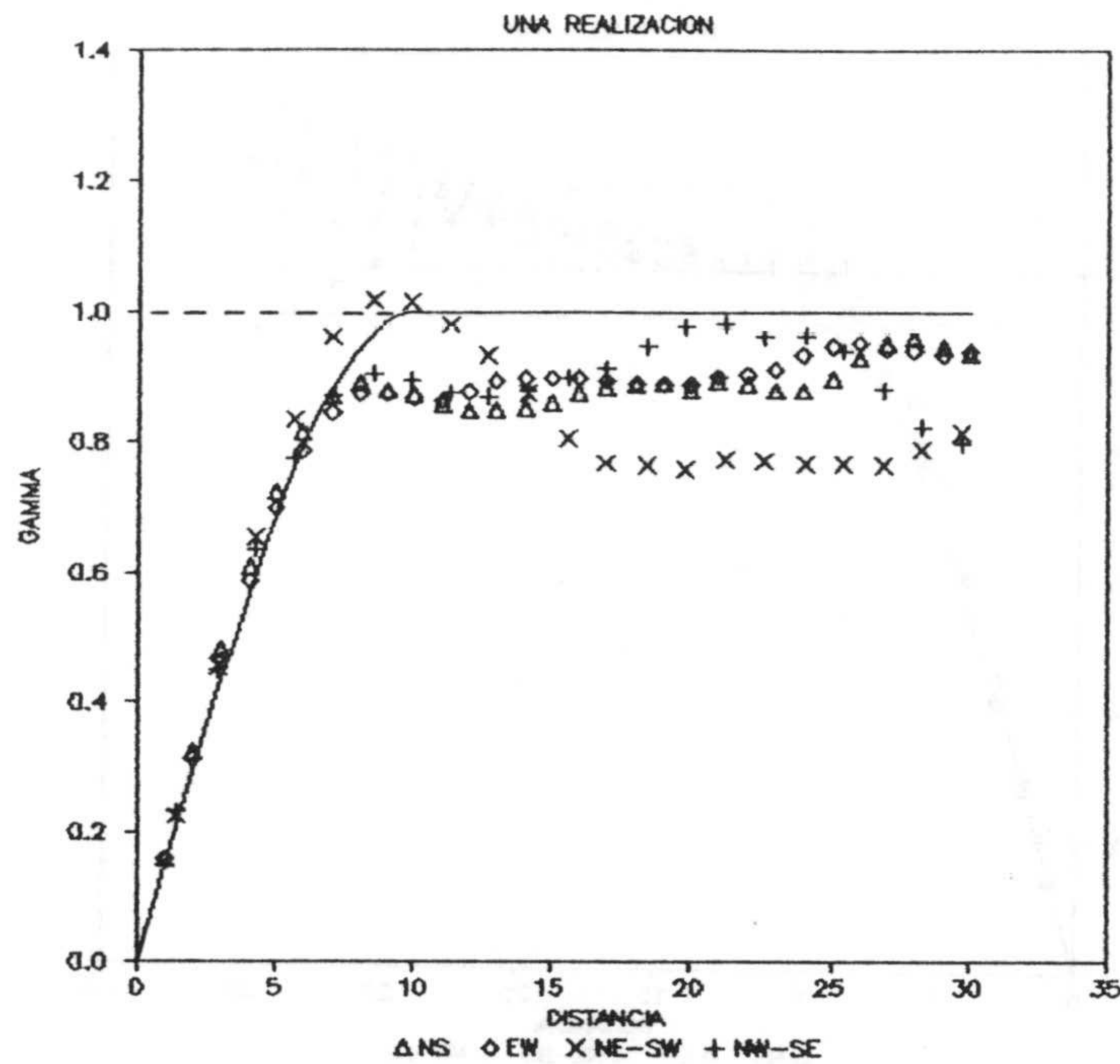


Figura 3.24r Variograma simulado en una realización con generador unidimensional por el método de RICE (1954).

### 3.2. Método espectral directo de simulación

De entre todos los métodos espectrales de simulación unidimensional estudiados con anterioridad, el método más interesante para su extensión multidimensional de modo que sea simple de aplicar, operativo en cuanto al tiempo de cálculo y preciso en cuanto a las características estadísticas de las realizaciones es el método de la integral de Fourier. Esta metodología sólo requiere aplicar adecuadamente los algoritmos de la transformada rápida en dos dimensiones y conocer la ordenación de los coeficientes de la transformada discreta de Fourier en el plano.

El fundamento del método es el mismo al visto en el método de la integral de Fourier. Los pasos a seguir, y que se resumen a continuación, son los mismos a los estudiados en



el caso unidimensional sólo que considerando una dimensión adicional:

1). Muestreo de la función de covarianza en dos dimensiones, direcciones de los ejes de coordenadas X e Y, para obtener la secuencia:

$$\{C(k_1, k_2)\} \quad ; \quad k_1 \in [1, N] \quad ; \quad k_2 \in [1, M]$$

donde N y M son el número de puntos, potencia de dos, en X e Y respectivamente.

2). Cálculo de la función de densidad espectral por transformada rápida de Fourier.

3). Cálculo del espectro de amplitud el cual no es sino la raíz cuadrada de la función de densidad espectral.

4). Generar una fase aleatoria  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  que constituye el espectro de fase; este espectro es obviamente aleatorio y es el que hace diferentes las realizaciones.

5). Componer adecuadamente los espectros de amplitud y de fase de manera que se obtenga una función hermitiana (parte real par y parte imaginaria impar) en dos dimensiones.

6). Calcular la función simulada por transformada inversa de Fourier de la función construida en el paso anterior. Dicha función aleatoria tendrá la función de covarianza impuesta en el primer paso.

Conviene destacar una serie de puntualizaciones:

1). El número de puntos en X e Y no tiene porque ser idéntico pero si ha de cumplir el requisito de ser una potencia de dos (2, 4, 16, 32, 64, 128, ...).



2). A la hora de calcular la densidad espectral de las frecuencias negativas, es necesario tomar en consideración las simetrías de la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones de una función real asimétrica. Dichas simetrías se reflejan en la figura 3.25.; las he calculado por computación y son similares a las presentadas por *BORGMAN, TAHERI y HAGAN (1984)*.

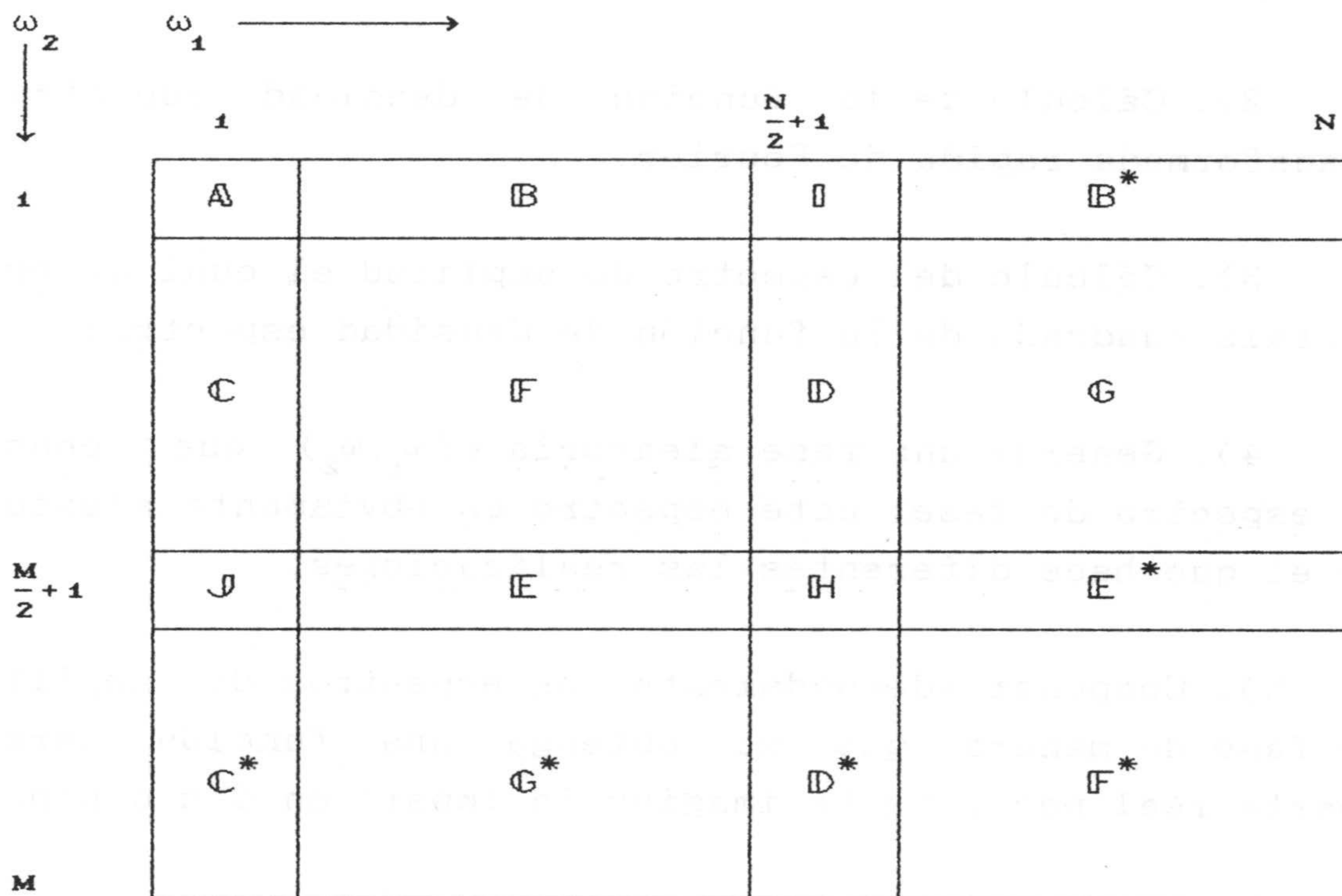


Figura 3.25. Transformada discreta de Fourier en dos dimensiones. \* complejo conjugado de la letra correspondiente.

En dicha figura las diferentes letras representan sectores de coeficientes de Fourier que están relacionados; siendo independientes los coeficientes de sectores de letras diferentes así como los coeficientes de un mismo sector entre

si. Los sectores  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  son reales (parte imaginaria igual a cero), el resto son sectores complejos. La relación entre los coeficientes se puede expresar como:

$$S(j,k) = S^*(N-j+2, M-k+2)$$

$$k, j \in [2, \frac{N}{2}]$$

a excepción de los coeficientes de la primera fila y primera columna para los cuales:

$$S(1,k) = S^*(1, M-k+2)$$

$$S(j,1) = S^*(N-j+2, 1)$$

$$k, j \in [2, \frac{N}{2}]$$

3). El intervalo de discretización  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  de los puntos simulados es el mismo al utilizado en el muestreo de la función de covarianza.

4). El teorema de desplazamiento en el tiempo en dos dimensiones se puede notar, *BRACEWELL (1986)*:

$$g(x,y) = f(x-a, y-b)$$

$$f(x,y) \longleftrightarrow F(u,v)$$



$$g(x,y) \longleftrightarrow G(u,v)$$

$$f(x-a,y-b) \longleftrightarrow e^{-2\pi i(au+bv)} F(u,v)$$

$$F(u,v) = G(u,v) e^{2\pi i(au + bv)}$$

5). La simulación de un efecto de pepita o de estructuras anidadas no requiere ningún cálculo adicional, simplemente el muestreo de la función de covarianza correspondiente.

En las figuras 3.26a a 3.26c se representan las funciones de densidad espectral bidimensional para los modelos de covarianza esférico, exponencial y gaussiano respectivamente; calculada de modo numérico mediante la transformada rápida de Fourier en dos dimensiones.

A continuación expongo los resultados obtenidos por este método. Las figuras 3.26d a 3.26g muestran el variograma medio de cien realizaciones según las direcciones N-S, E-W, NE-SW y NW-SW, respectivamente. Se observa muy buena correspondencia entre valores experimentales y teóricos. Cada realización consta de 4096 puntos dispuestos en una malla regular de 64 x 64 a interdistancia unidad tanto en el eje X como en el eje Y. La función de covarianza impuesta es un modelo esférico de alcance 10 unidades y meseta igual a uno. La figura 3.26h muestra el coeficiente de variación correspondiente al variograma medio; el comportamiento del estadístico es similar en todas las direcciones para la mayor parte de los pasos y muestra un valor medio en torno a 0.006



(0.6 %).

La figura 3.26i muestra el variograma experimental estimado de una realización tomada al azar; se observan pequeñas fluctuaciones de tipo estadístico pero el ajuste al modelo teórico se puede considerar como aceptable. La cartografía de isovalores de dicha simulación se muestra en la figura 3.26j.

La tabla 3.XII registra los estadísticos de las realizaciones anteriores.

	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
TEORICO	.0	.0	1.0	.0
100 REALIZACIONES	.0047	.0079	.9846	-.0000
UNA REALIZACION	-.1030	—	.9693	—

Tabla 3.XII. Estadísticos de las realizaciones.

Las figuras 3.26k y 3.26l muestran los variogramas experimentales de una única realización donde se ha simulado una función aleatoria estacionaria cuya función de covarianza consta de dos estructuras; la primera estructura es un efecto de pepita de valor 0.5, la segunda estructura es de tipo esférico con alcance 20 unidades y meseta 0.5. Es de destacar los buenos resultados obtenidos que se plasman en el buen ajuste entre valores experimentales y teóricos aun tratándose de una única realización. La figura 3.26m muestra la cartografía de isovalores de dicha simulación.



### 3.3. Comparación entre el Método de las Bandas Rotantes (MBR) y el método espectral directo de simulación (MED)

En la práctica, para la simulación de realizaciones de una función aleatoria estacionaria de segundo orden con covarianza impuesta, se puede optar por uno de los dos métodos estudiados anteriormente, a saber, el MBR y el MED. Cada una de estas metodologías tiene sus pros y sus contras que se pasan a considerar a continuación.

En cuanto a la complejidad metodológica y de programación no existen diferencias dignas de mención, ambas técnicas son relativamente sencillas desde un punto de vista conceptual y son fáciles de programar; la única divergencia que puede llegar a ser relevante es que el método espectral permite considerar cualquier tipo de función de covarianza por compleja que esta sea, con la única condición de que se trate de un modelo permitido. Por contra en el MBR es necesario conocer la función de covarianza unidimensional o equivalentemente la función de densidad espectral que se ha de imponer al proceso generador sobre las rectas.

En lo que referente a la precisión respectiva de ambas técnicas, cabe diferenciar el caso en el cual se consideran un número elevado de realizaciones del caso en el que se considera una única realización tomada al azar. En el primer caso, al considerar el variograma medio de conjunto, esto es el variograma promedio de un gran número de realizaciones (en esta investigación limitado a 100) se puede observar un buen comportamiento en ambos casos, MBR y MED; los valores experimentales simulados se ajustan bien al modelo teórico objetivo. La diferencia aparece al considerar la dispersión del variograma simulado en las diferentes realizaciones y representado por el coeficiente de variación del variograma medio. En el caso del MBR el coeficiente de variación es del orden de 0.12 (12 %) frente a un coeficiente de variación del orden de 0.008 (0.8 %) para el MED. Esta diferencia apreciable en el coeficiente de variación queda reflejado en



el momento de considerar una única realización tomada al azar; existen mayores probabilidades de que el variograma experimental de una realización tomada al azar se ajuste mejor al modelo teórico si dicha realización ha sido generada por el MED que si se genera por el MBR. Si se comparan los gráficos del variograma simulado para una realización mostrados anteriormente, se observa como en el caso del MED el variograma simulado tiene fluctuaciones en torno al modelo teórico de menor rango que el caso equivalente para el MBR. En este sentido el MED se puede considerar más preciso al MBR.

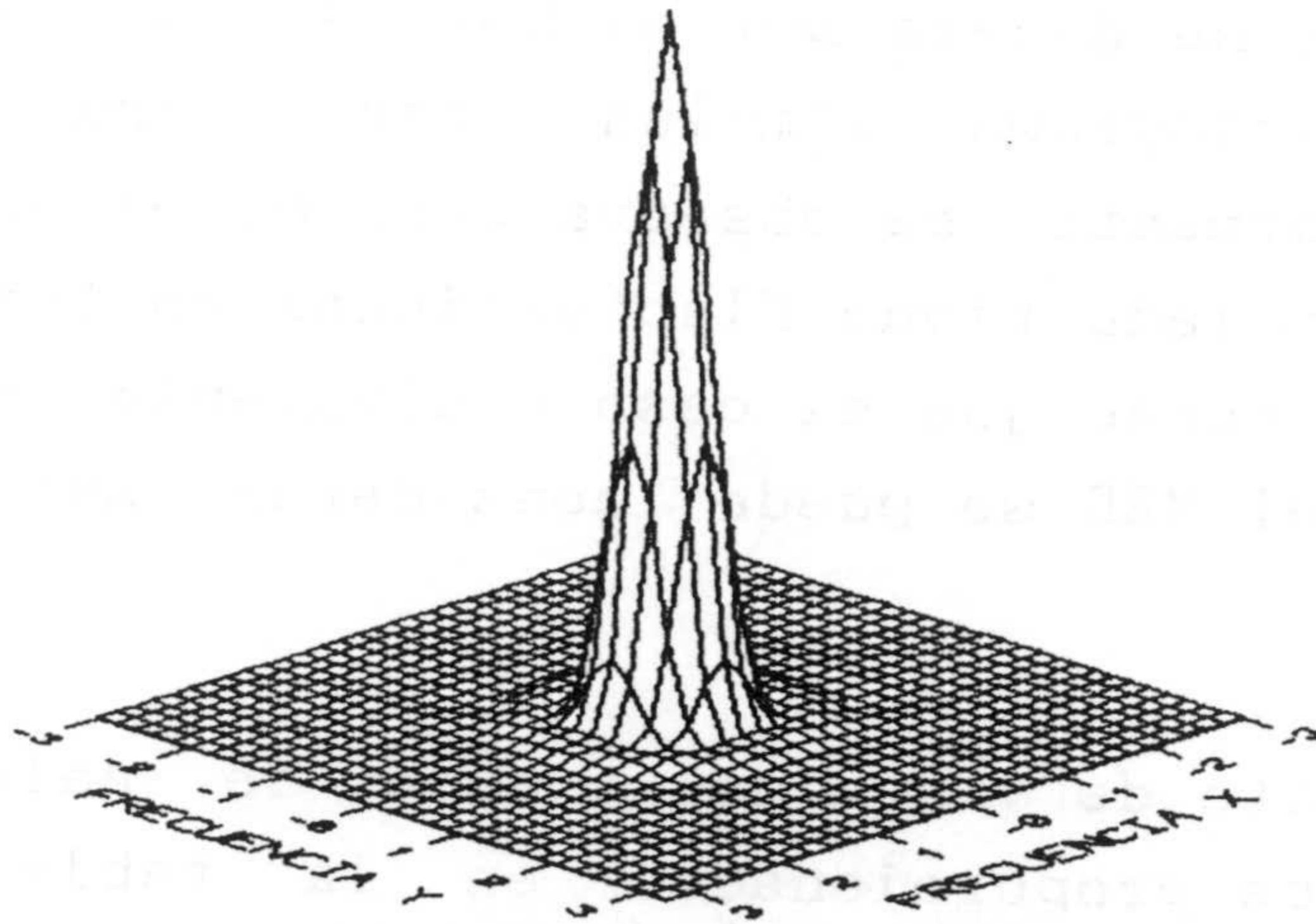
Desde el punto de vista del tiempo de cálculo, si se comparan los datos proporcionados en la tabla 3.XIII, se puede concluir que para simular un número de puntos dado, el MBR emplea del orden del 17 % menos de tiempo que el requerido por el MED. En la práctica esta diferencia se puede considerar de poca relevancia como se desprende de los valores suministrados en la tabla anterior.

La única ganancia del MBR con respecto al MED es que mientras en la última técnica se ha de simular puntos dispuestos en una malla regular y con el número de puntos en X e Y coincidente con una potencia de dos, en el caso del MBR se puede simular cualquier número de puntos y con cualquier dispersión no necesariamente regular.

METODO	TIEMPO REQUERICO CPU
MBR	7 seg. 68 centesimas
MED	8 seg. 95 centésimas

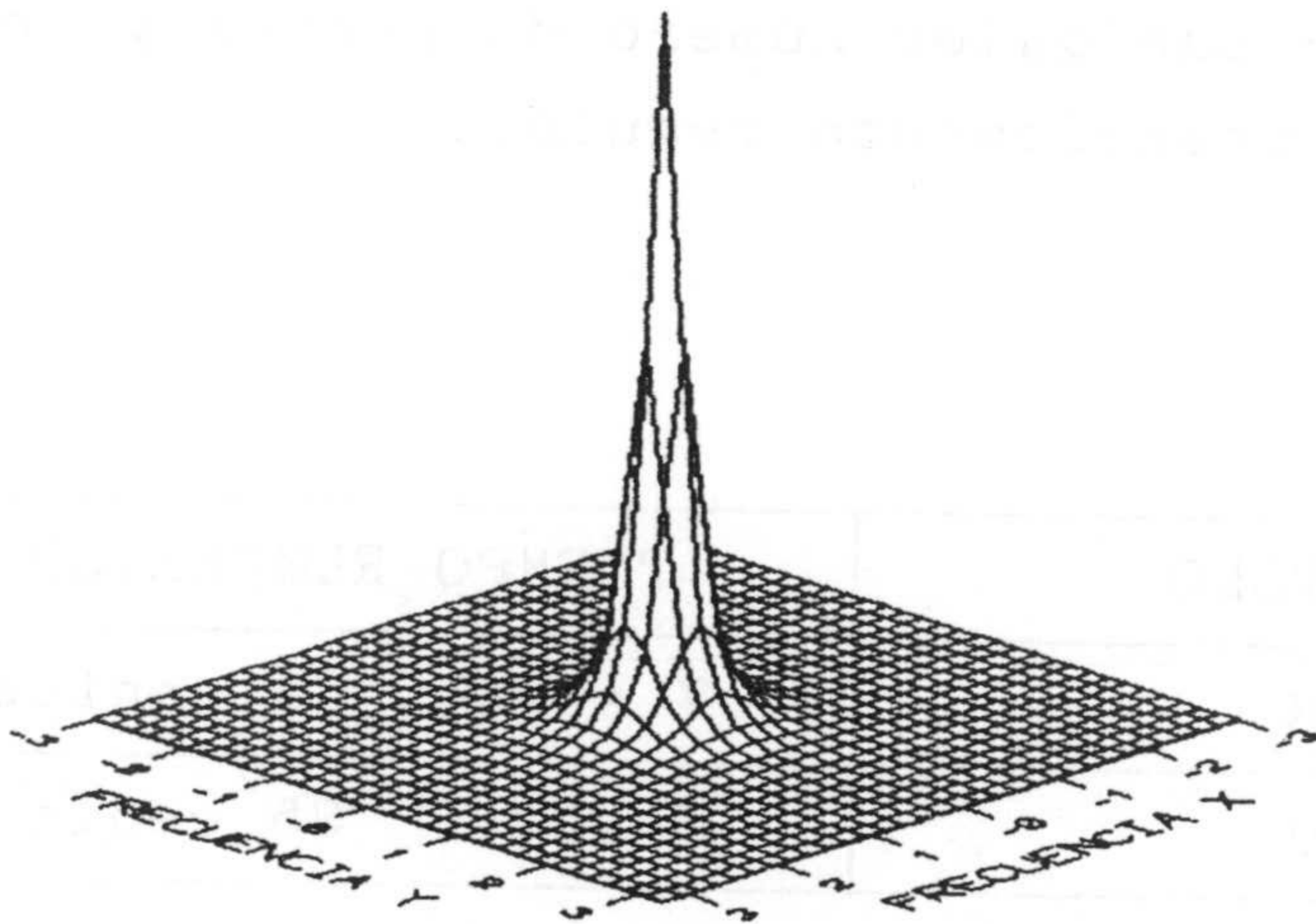
Tabla 3.XIII. Tiempo requerido en la simulación de 64 x 64 puntos en un ordenador 80386 con coprocesador matemático.





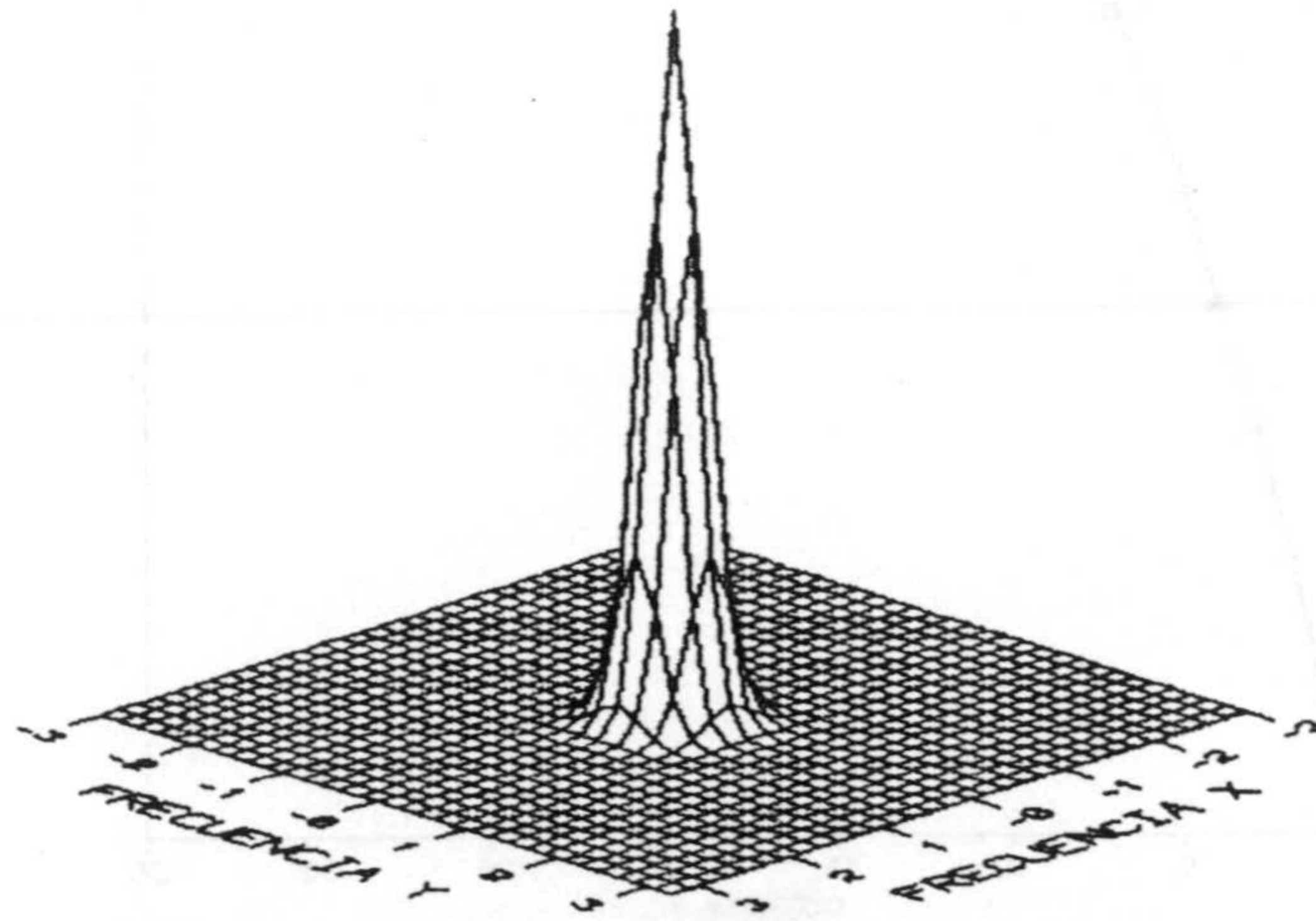
DENSIDAD ESPECTRAL MODELO ESFERICO 2D

Figura 3.26a. Función de densidad espectral.



DENSIDAD ESPECTRAL MODELO EXPONENCIAL 2D

Figura 3.26b. Función de densidad espectral.



DENSIDAD ESPECTRAL MODELO GAUSIANO 2D

Figura 3.26c. Función de densidad espectral.

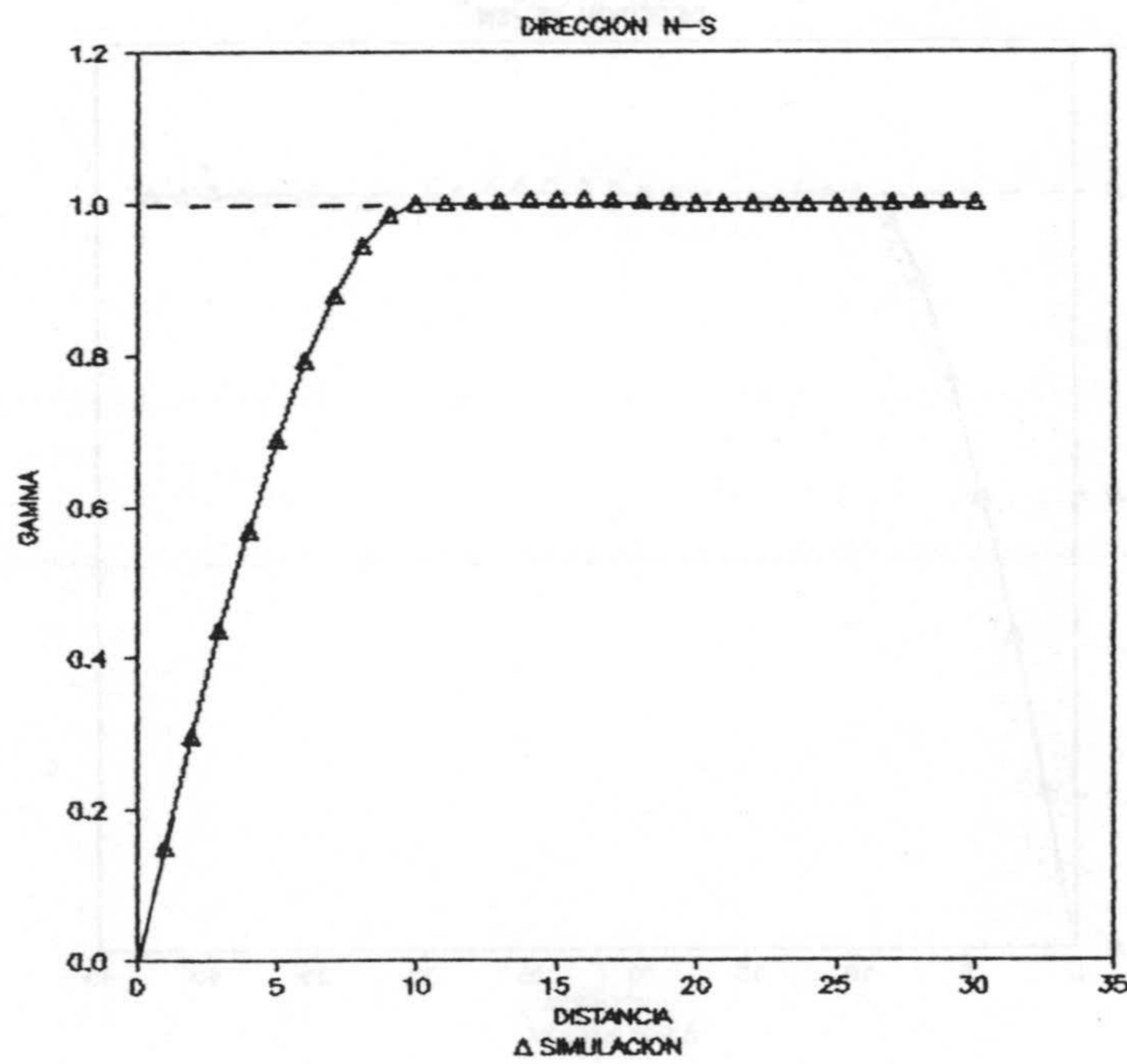


Figura 3.26d. Variograma medio de 100 realizaciones.



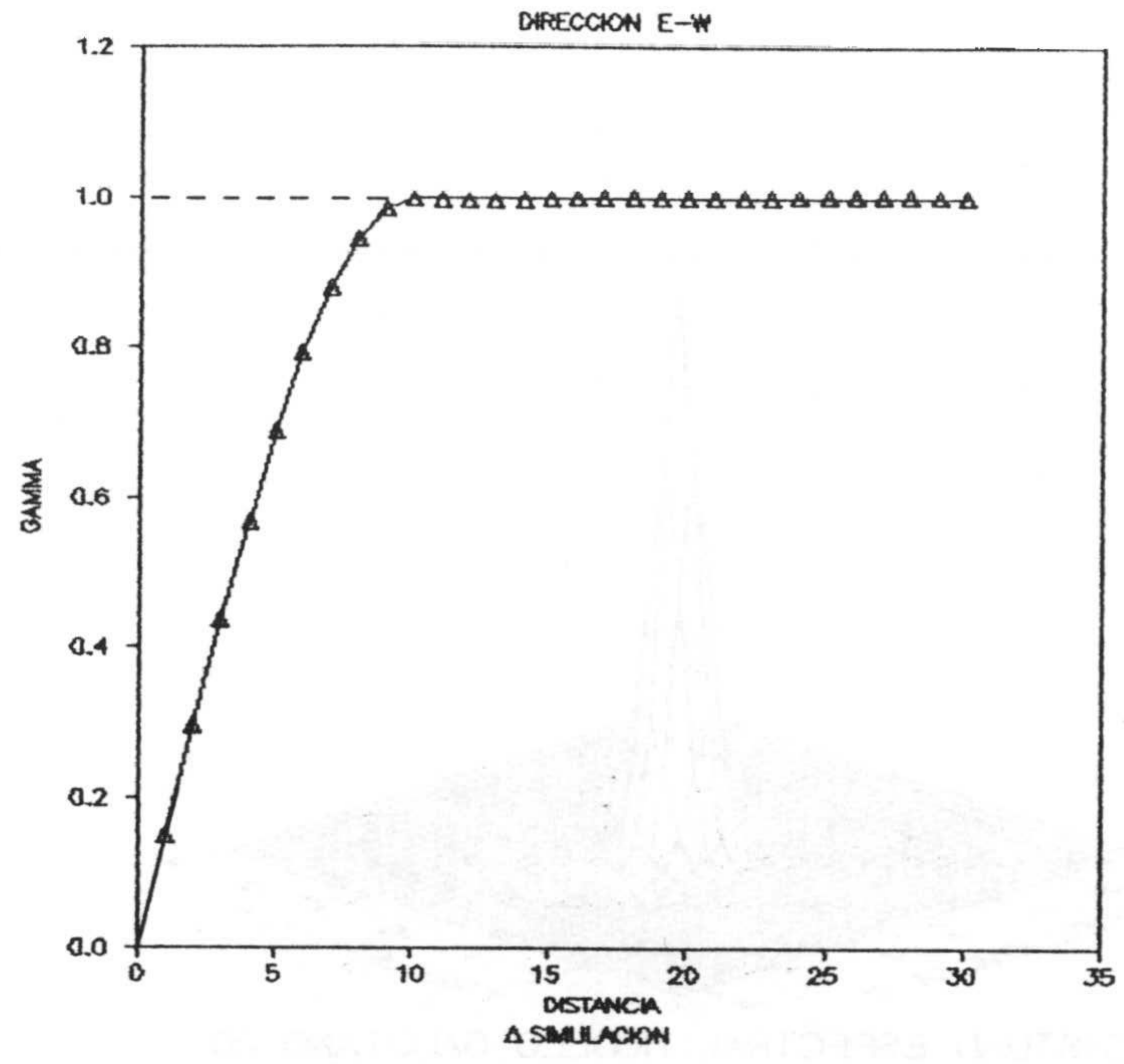


Figura 3.26e. Variograma medio de 100 realizaciones.

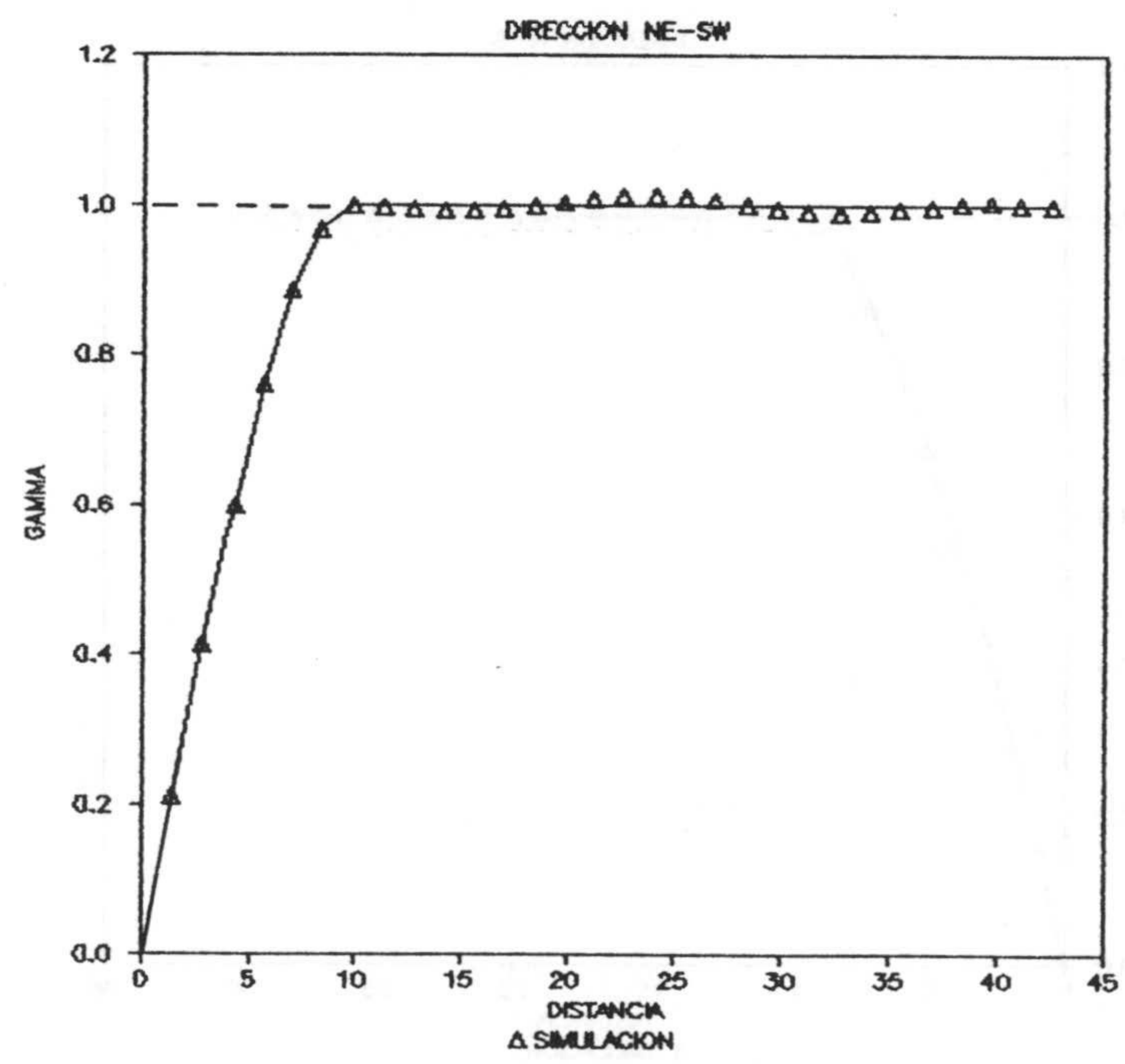


Figura 3.26f. Variograma medio de 100 simulaciones.

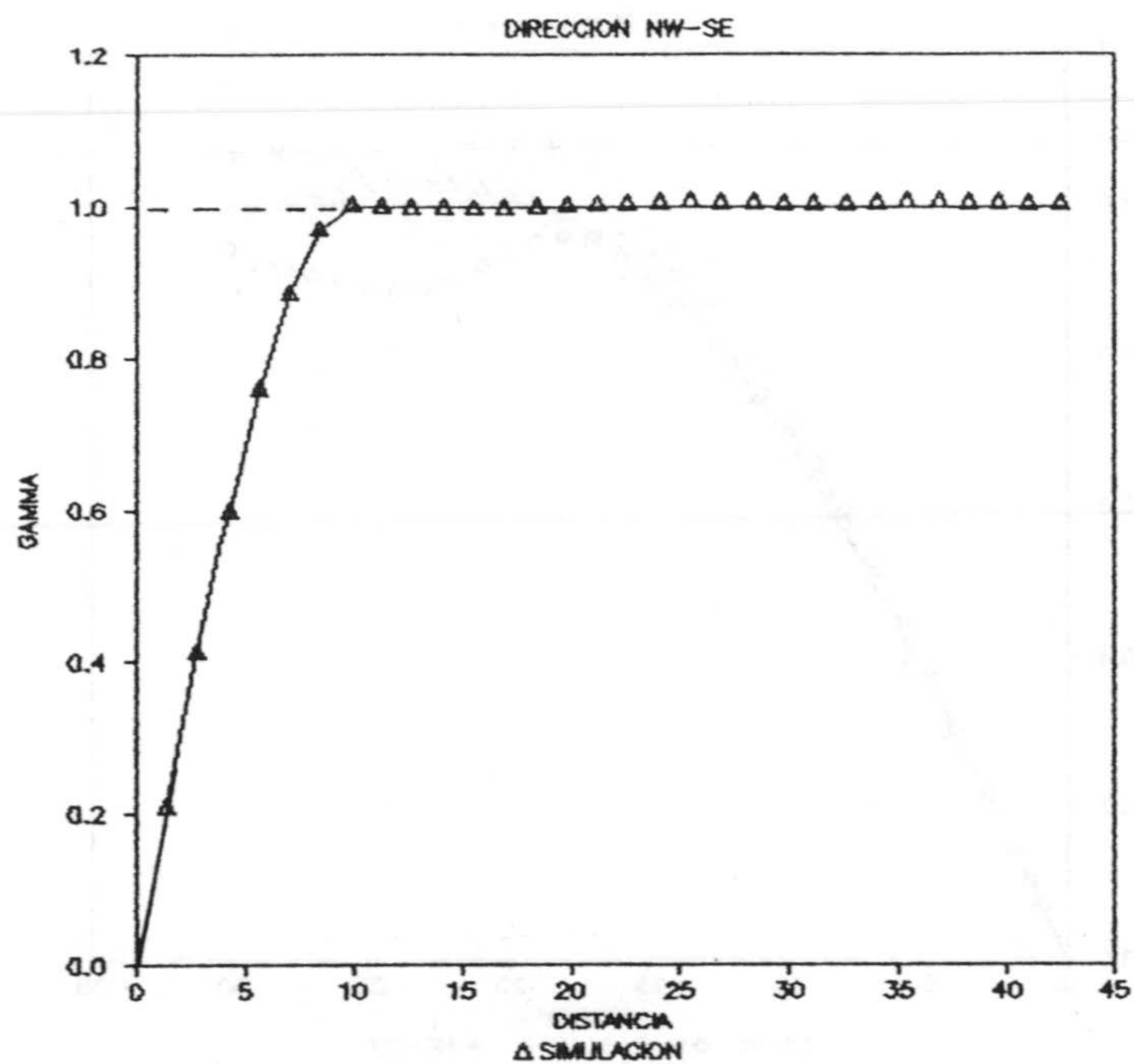


Figura 3.26g. Variograma medio de 100 realizaciones.

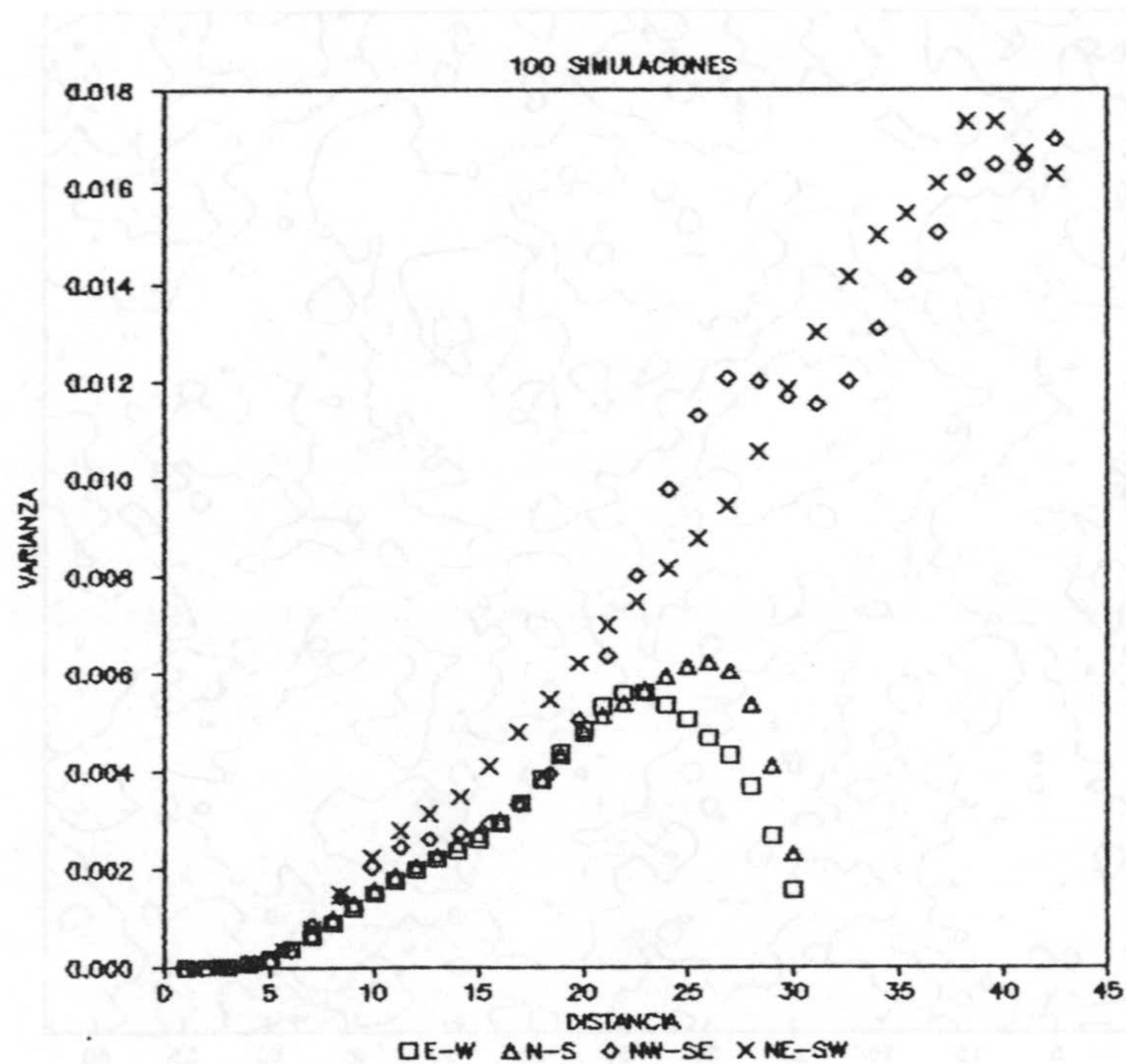


Figura. 3.26h. Coeficiente de variación del variograma medio para 100 simulaciones.



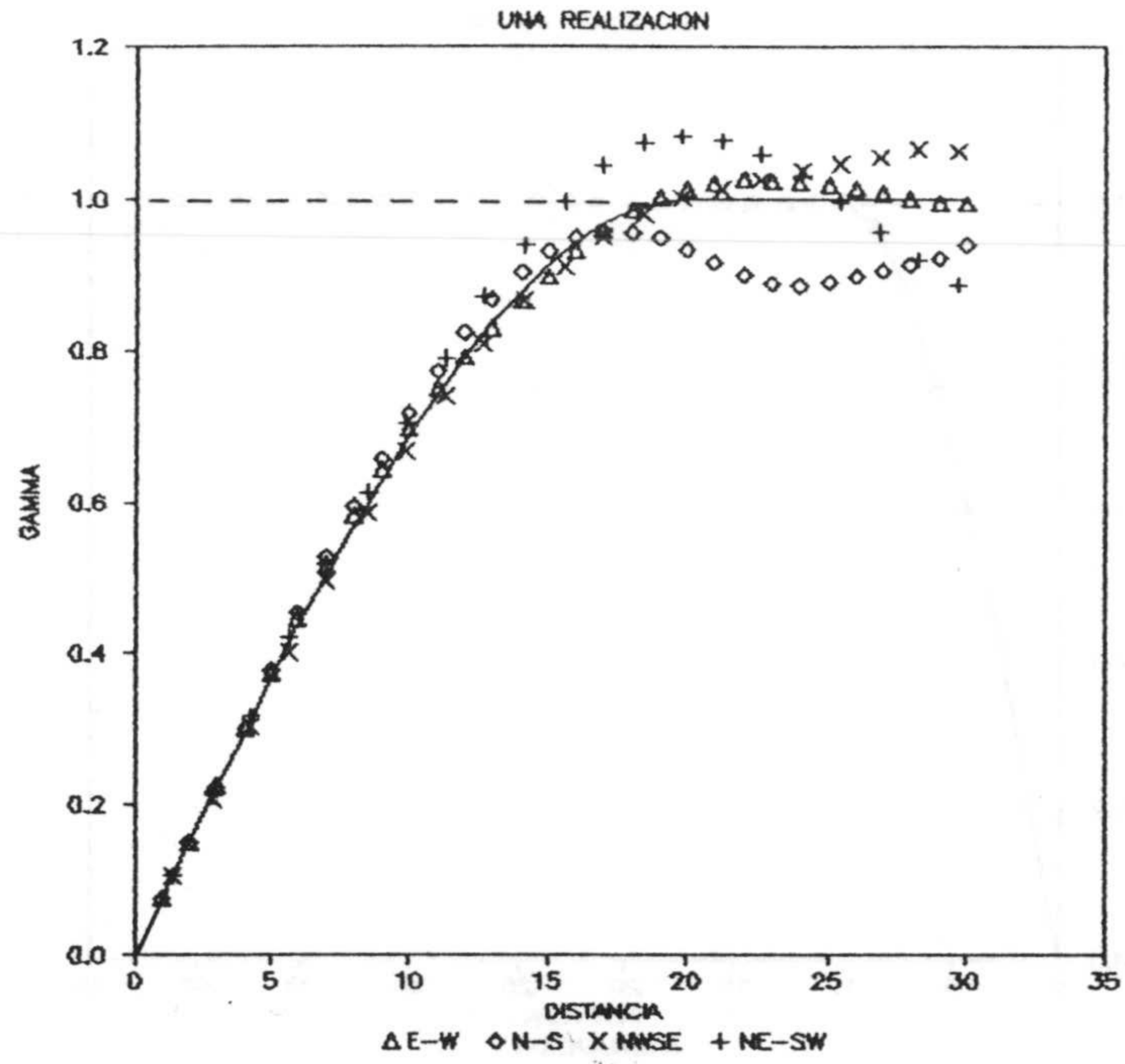


Figura 3.26i. Variogramas direccionales simulados en un realización.

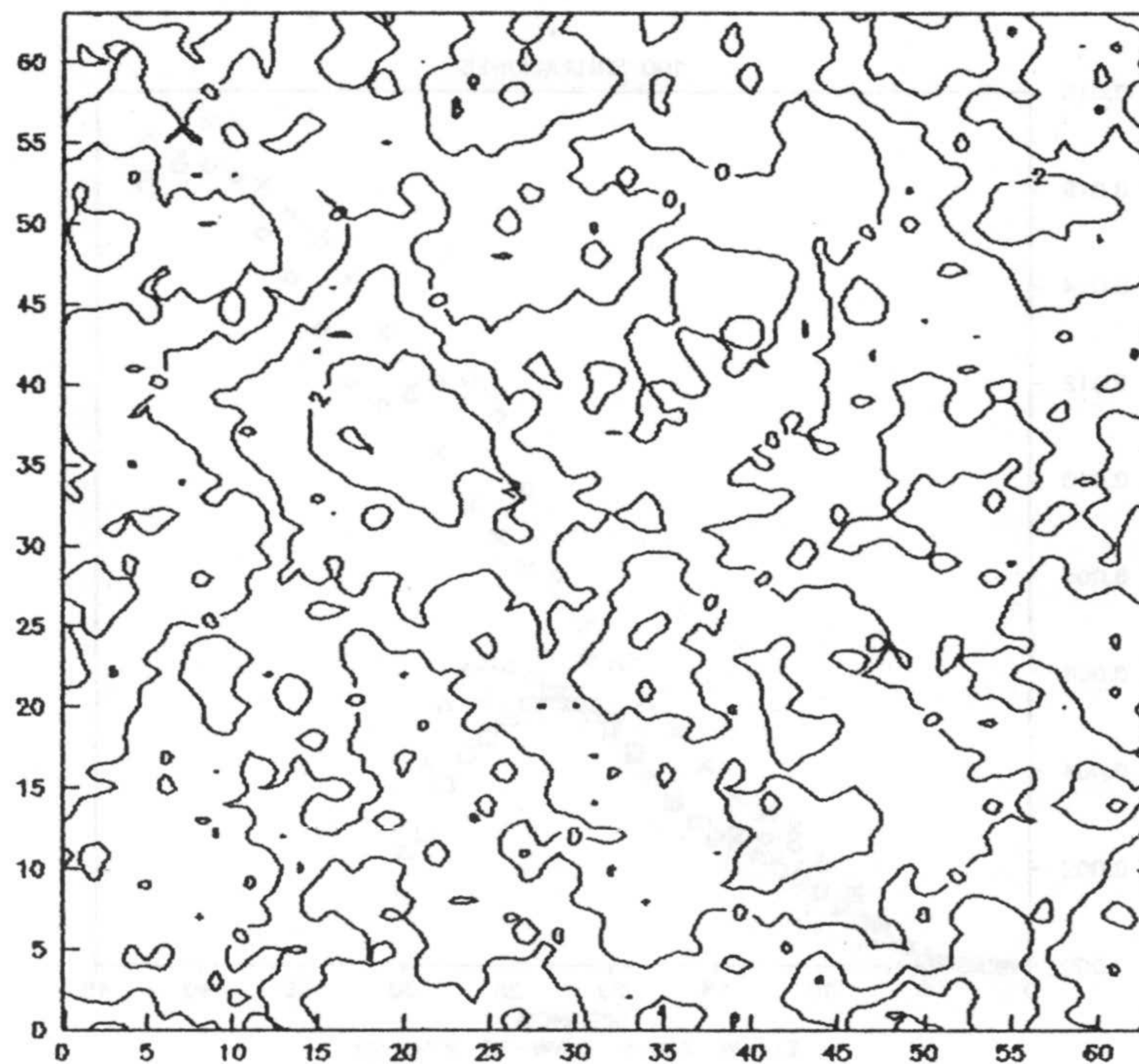


Figura 3.26j. Ejemplo de una realización de una función aleatoria estacionaria mediante el MED.

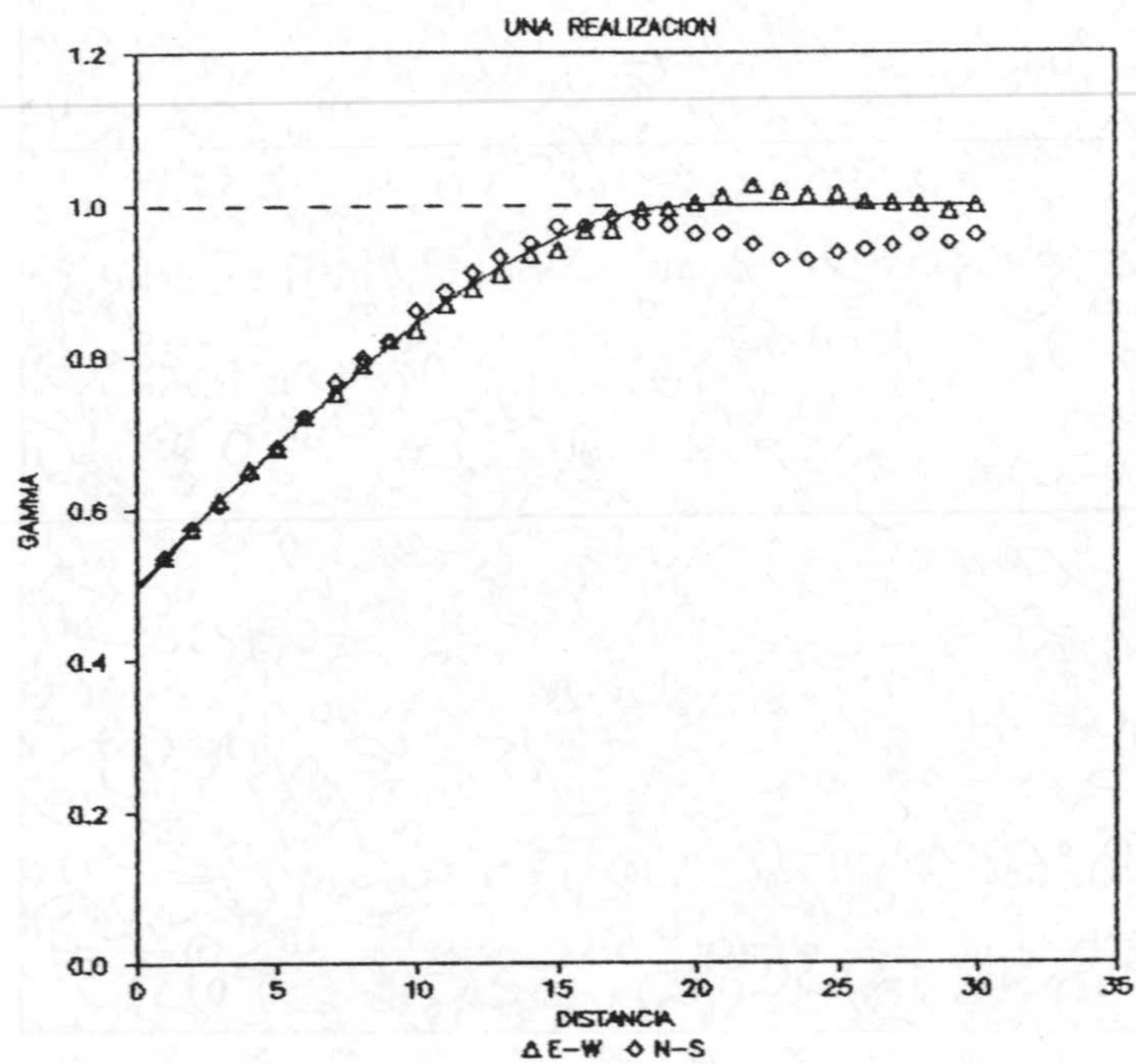


Figura 3.26k. Variograma simulado con efecto de pepita en una única realización.

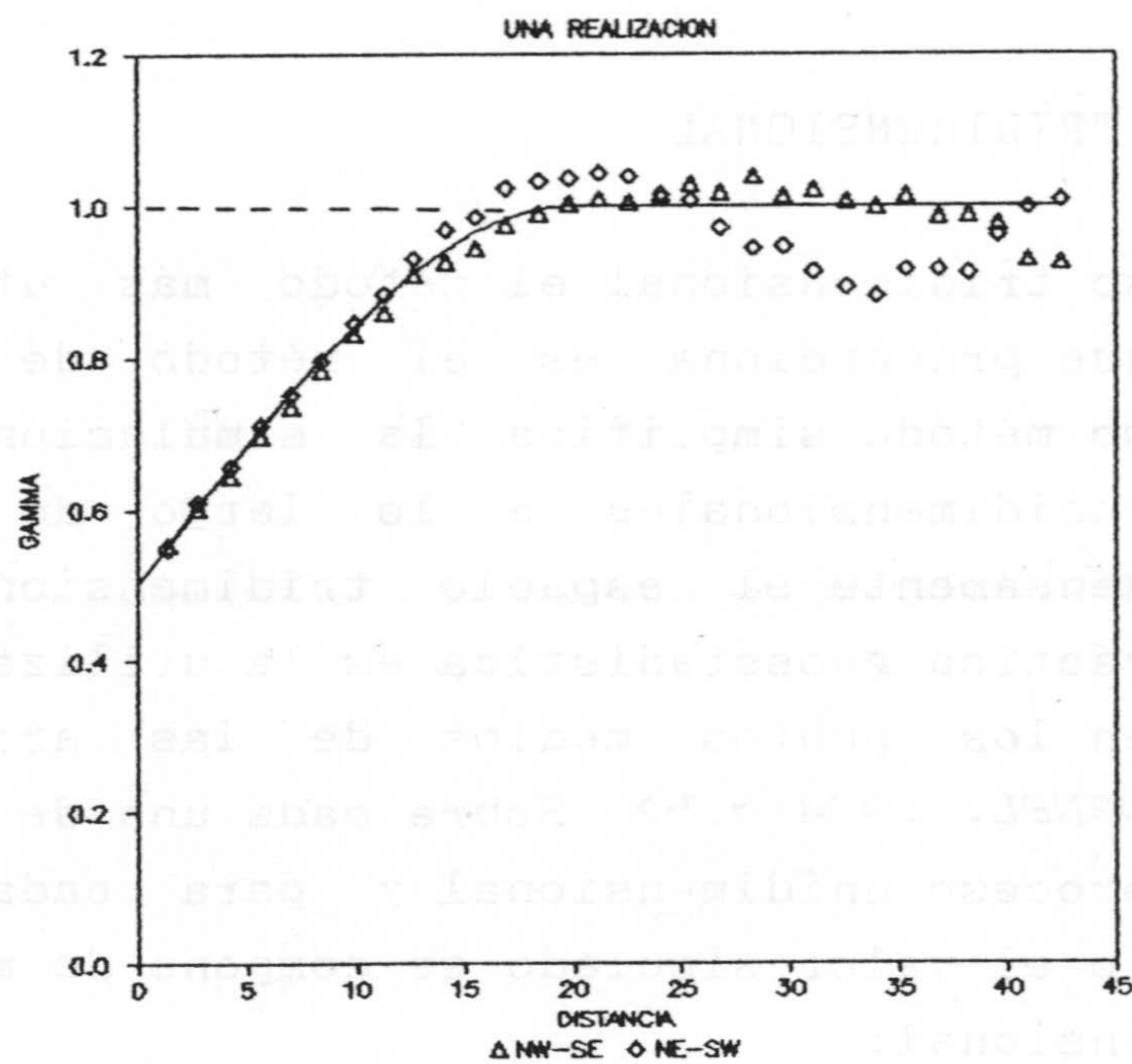


Figura 3.26l. Variograma con efecto de pepita simulado en un única realización.



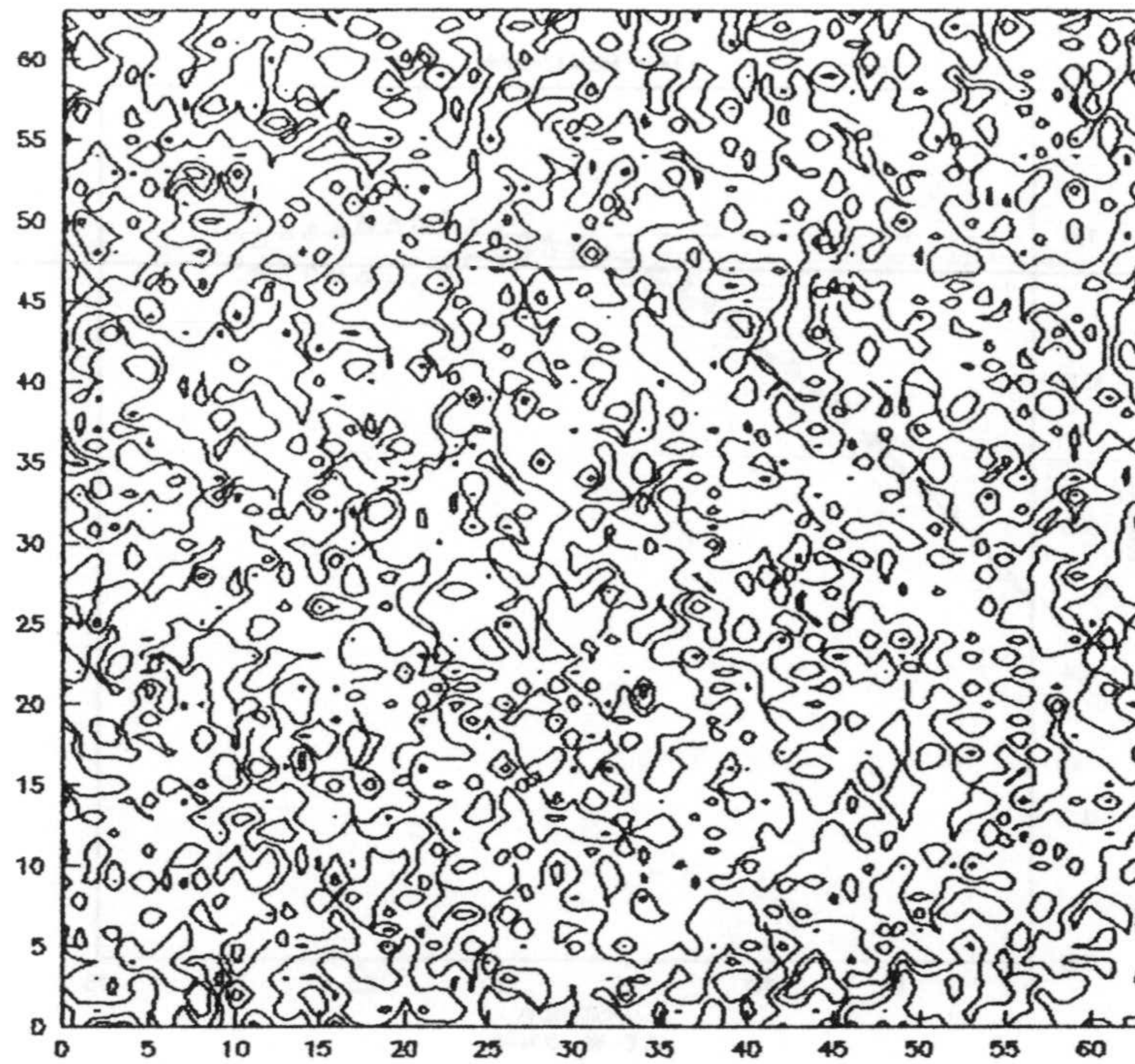


Figura 3.26m. Ejemplo de una realización con variograma impuesto con efecto de pepita.

#### 4. SIMULACION TRIDIMENSIONAL

En el caso tridimensional el método más utilizado por las ventajas que proporciona es el método de las Bandas Rotantes. Dicho método simplifica la simulación en  $\mathbb{R}^3$  en simulaciones unidimensionales a lo largo de rectas que reparten homogéneamente el espacio tridimensional. Lo más usual en la práctica geoestadística es la utilización de 15 rectas que unen los puntos medios de las aristas de un icosaedro (JOURNEL, 1974 a,b). Sobre cada una de las rectas se genera un proceso unidimensional y para cada punto del campo aleatorio el valor simulado se compone de modo similar al caso bidimensional:



$$z(x_p) = \frac{1}{\sqrt{15}} \sum_{i=1}^{15} y \langle pu_i \rangle$$

Como se ha visto con anterioridad la relación que liga la covarianza tridimensional objetivo y la covarianza unidimensional sobre las rectas se expresa:

$$C_3(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{esfera unidad}} C_1(hu) du$$

Desarrollando esta integral en coordenadas esféricas se lleva a la ecuación fundamental, *MATHERON (1973)*:

$$C_1(s) = \frac{d}{ds} [s C_3(s)]$$

es decir, dada la covarianza tridimensional  $C_3(s)$  que se desea que reproduzca la función aleatoria, la correspondiente covarianza unidimensional que se ha de imponer al proceso sobre cada recta está dado sencillamente por la derivada con respecto a  $s$  del producto  $(s C_3(s))$ . De este modo, a diferencia de lo que ocurría en el plano, es muy fácil obtener la expresión analítica de la covarianza unidimensional para los principales tipos de covarianza en tres dimensiones como se puede consultar en *JOURNEL y HUIJBREGTS (1978)*. Así por ejemplo, para el modelo esférico se tiene que:



$$C_1(s) = \begin{cases} \sigma^2 \left[ 1 - 3 \frac{s}{a} + 2 \left( \frac{s}{a} \right)^3 \right] & 0 \leq s \leq a \\ 0 & s > a \end{cases}$$

JOURNEL (1974, a,b) utiliza como generador unidimensional un proceso de medias móviles donde la función ponderadora  $f(v)$  se obtiene de expresar la covarianza como un producto de convolución de  $f(v)$  con su función transpuesta  $f(-v)$ ; así para el modelo esférico deduce la siguiente función de ponderación:

$$f(v) = \begin{cases} \sigma^2 \sqrt{12/a^3} v & -a/2 \leq v \leq a/2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En el caso de que se utilice un generador unidimensional de tipo espectral es suficiente con conocer la función de densidad espectral unidimensional que se ha de simular a lo largo de las líneas y que puede obtenerse a través de dos caminos diferentes:

1) A partir de la covarianza unidimensional sobre las líneas, calculando su transformada de Fourier:

$$C_1(h) \longleftrightarrow S_1(\omega)$$

2) A partir de la función de densidad espectral tridimensional, siendo

$$C_3(h) \longleftrightarrow S_3(\omega)$$

la relación que liga las funciones de densidad espectral tridimensional y unidimensional es, como para el caso unidimensional, muy sencilla (CHRISTAKOS, 1987):

$$S_1(\omega) = 2 \pi \omega^2 S_3(\omega)$$

Obviamente el primer camino es más simple y la función de densidad espectral se puede calcular de modo analítico o de modo discreto a través de la transformada rápida de Fourier. Así para el modelo esférico he calculado la expresión (figura 3.27):

$$S_1(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{3}{\omega^2 a} \left[ 1 + B + \frac{1}{\omega a} \left[ \frac{1}{\omega a} (1 - B) - A \right] \right]$$

donde:  $A = \text{sen}(\omega a)$ ;  $B = \text{cos}(\omega b)$ ;  $a = \text{alcance}$ .

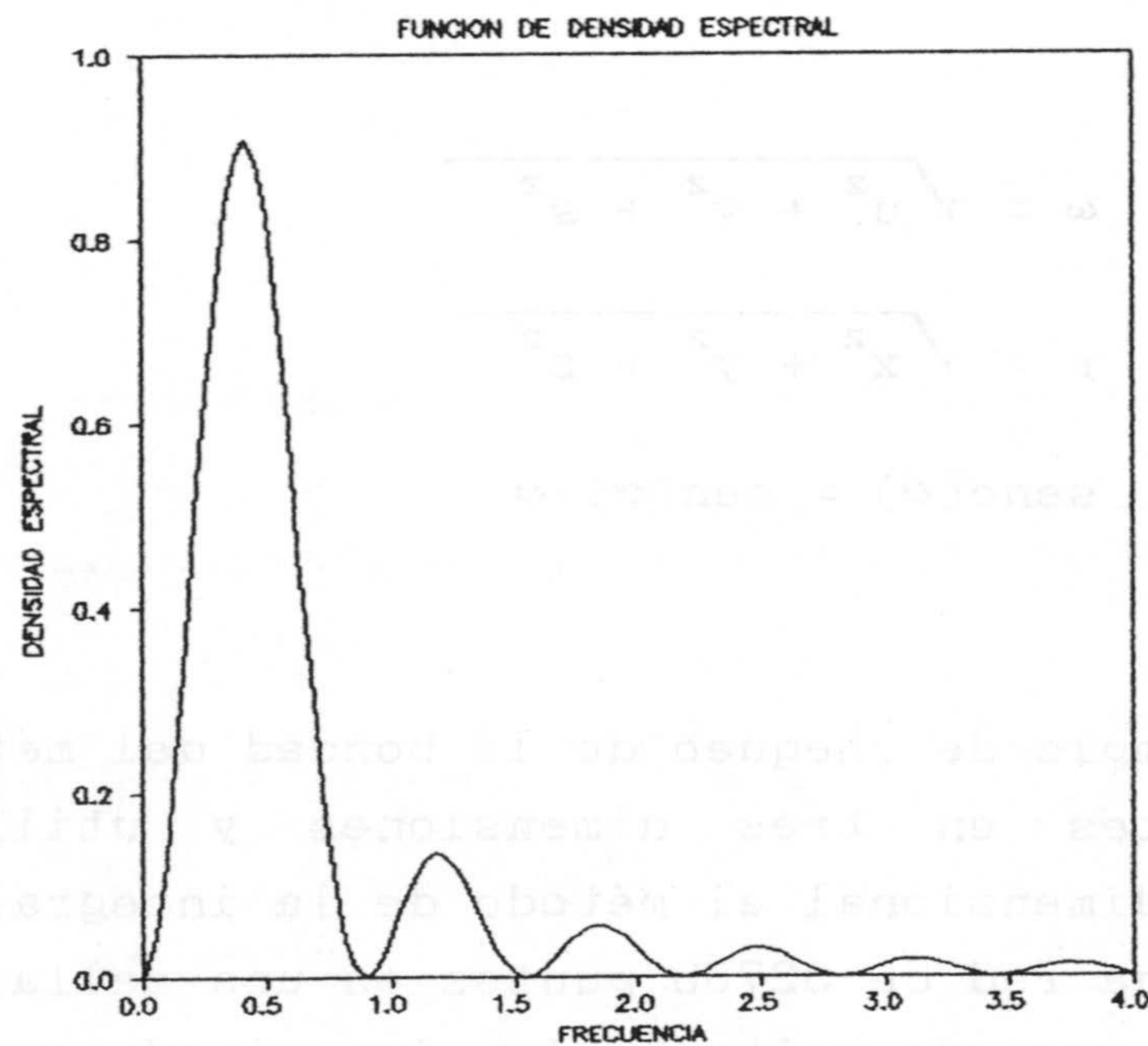


Figura 3.27. Función de densidad espectral unidimensional para el MBR.



Si se opta por el segundo camino, es necesario calcular la función de densidad espectral del proceso tridimensional que como se conoce no es sino la transformada de Fourier de la correspondiente función de covarianza:

$$S_3(u, v, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_3(x, y, z) e^{-i2\pi(ux+vy+zs)} dx dy dz$$

Considerando que existe simetría esférica para una función aleatoria isótropa, se puede aplicar la transformada de Hankel en tres dimensiones y se puede llegar a la simplificación (BRACEWELL, 1987):

$$S_3(\omega) = 4\pi \int_0^{\infty} C_3(r) \text{senc}(2\omega r) r^2 dr$$

donde:

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2 + s^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{senc}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\alpha$$

Como ejemplo de chequeo de la bondad del método de las Bandas Rotantes en tres dimensiones y utilizando como generador unidimensional el método de la integral de Fourier he simulado una red de 32768 puntos en una malla de 32 x 32 x 32 con interespaciado unitario e imponiendo un modelo de covarianza esférica de alcance 10 unidades y meseta uno.

En las figuras 3.28a a 3.28c se ha representado el valor

medio del variograma experimental de 100 realizaciones para las direcciones X, Y y Z respectivamente. Se observa una buena concordancia con los correspondientes valores teóricos. La figura 3.28d. muestra el coeficiente de variación del variograma medio para las 100 simulaciones, mostrando un orden de magnitud en torno a 0.12 (12 %), valor que es similar al obtenido con el método de las Bandas Rotantes en el caso bidimensional.

La figura 3.28e. muestra el variograma simulado en una realización tomada al azar y donde se observan las lógicas discrepancias de tipo estadístico entre el modelo teórico y los valores experimentales. La tabla 3.XIV recoge los estadísticos de las diferentes simulaciones.

Al igual que en el MBR en el plano, se obtienen resultados similares si se emplean otros generadores unidimensionales como el de RICE (1954) o el filtrado de un ruido blanco.

	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
TEORICO	.0	.0	1.0	.0
100 REALIZACIONES	.0004	.0123	.9766	.0067
UNA REALIZACION	.1186	—	.8920	—

Tabla 3.XIII. Estadísticos de la simulación.



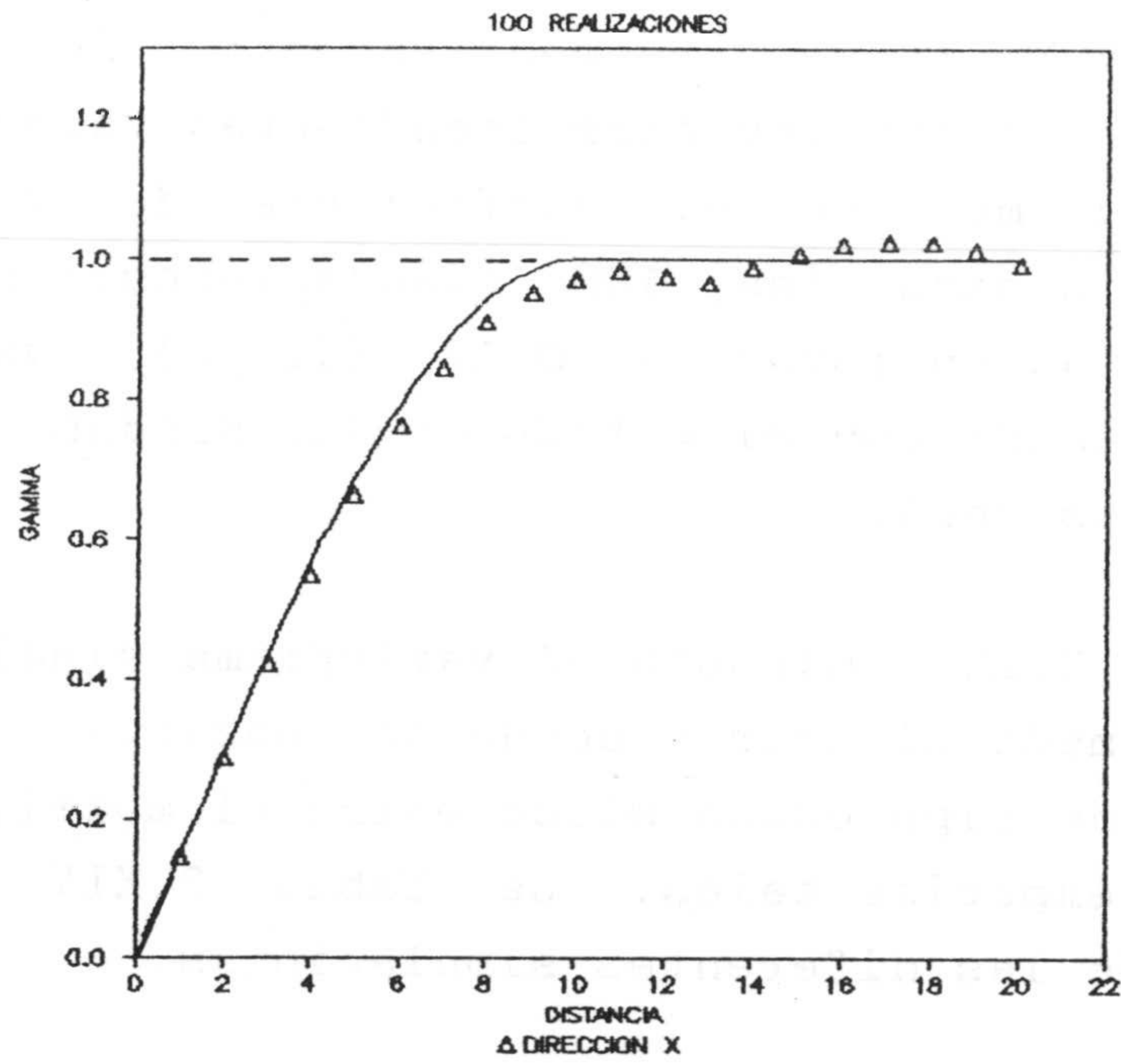


Figura 3.28a. Variograma simulado en la direccion X.

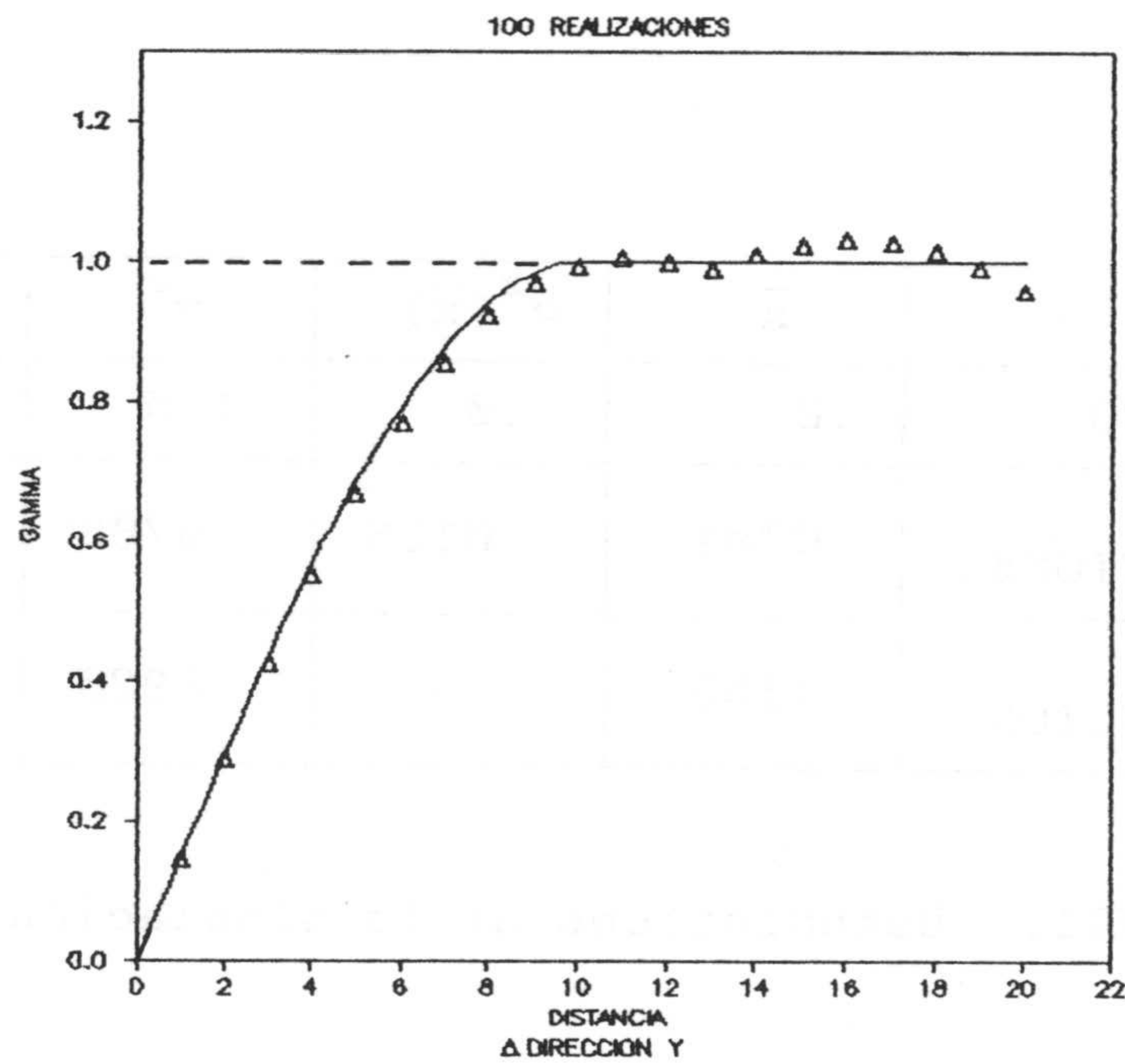


Figura 3.28b. Variograma simulado en la dirección Y.

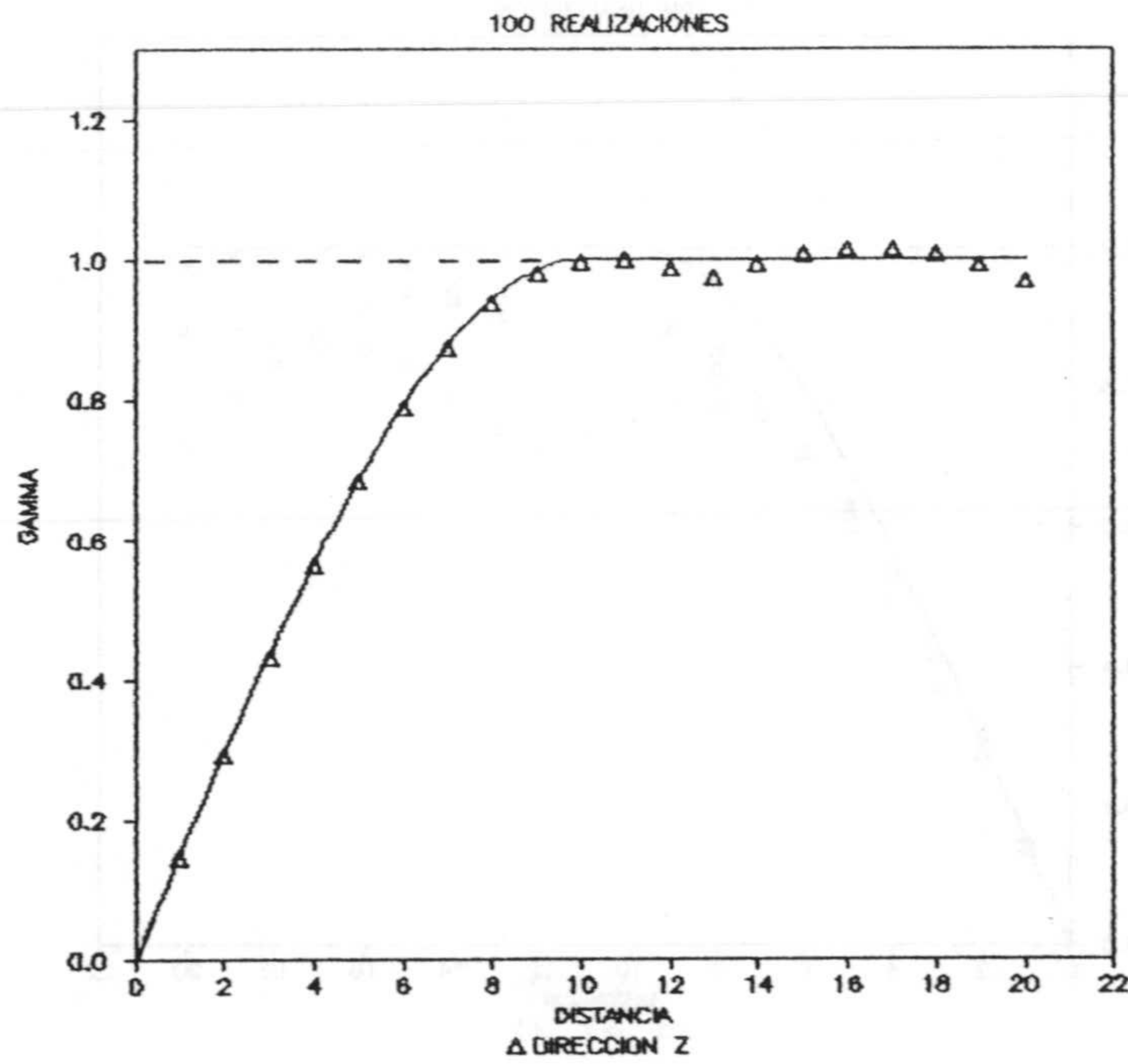


Figura 3.28c. Variograma simulado en la dirección Z.

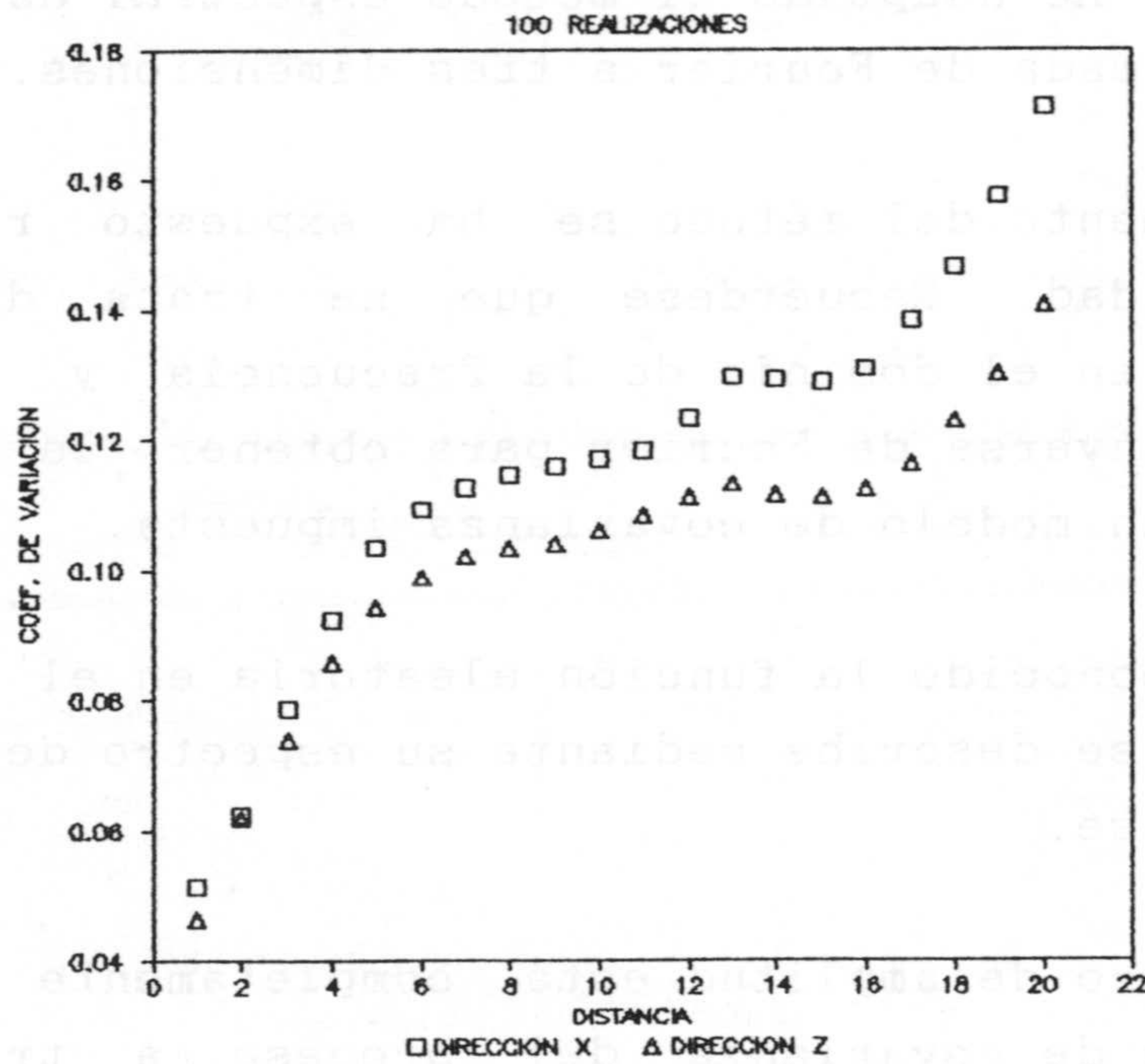


Figura 3.28d. Coeficiente de variación del variograma.



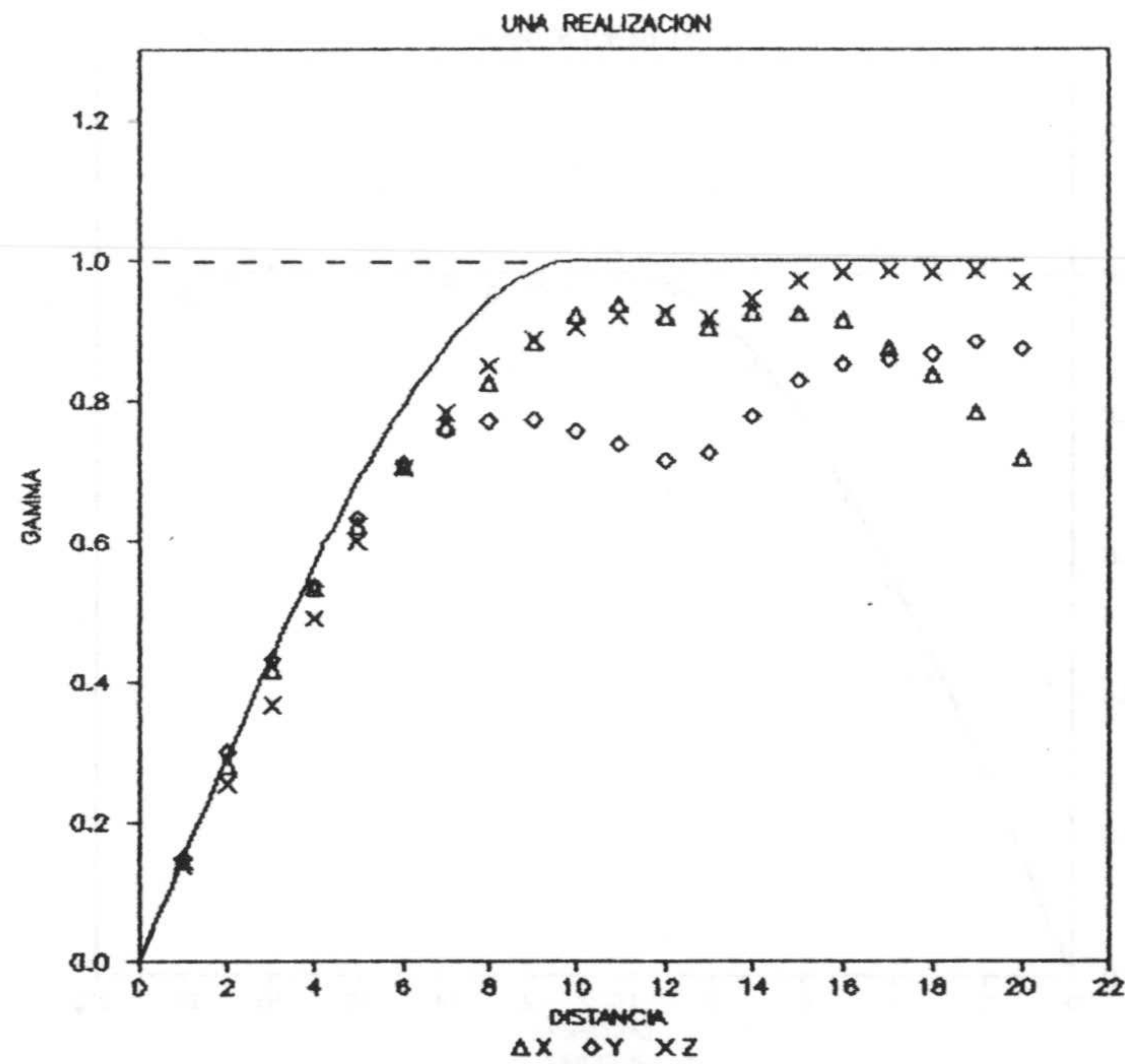


Figura 3.28e. Variograma simulado en una realización.

Asimismo, he adaptado el método espectral de simulación de la transformada de Fourier a tres dimensiones.

El fundamento del método se ha expuesto repetidamente con anterioridad. Recuérdese que se trata de construir realizaciones en el dominio de la frecuencia y calcular su transformada inversa de Fourier para obtener la realización espacial con un modelo de covarianza impuesta.

Como es conocido la función aleatoria en el dominio de la frecuencia se describe mediante su espectro de amplitud y espectro de fase.

El espectro de amplitud está completamente determinado por la función de covarianza del proceso a través de la función de densidad espectral. El espectro de fase es independiente de la función de covarianza y se toma aleatorio



en el intervalo  $(0, 2\pi)$ .

Por consiguiente la aplicación metodológica sólo requiere la utilización de modo conveniente de la transformada rápida de Fourier y conocer la disposición de los coeficientes de Fourier en tres dimensiones.

Dicha disposición la he calculado por computación y paso a describirla a continuación haciendo especial hincapié en las simetrías que presentan dichos coeficientes.

En primer lugar recordar que el número de puntos en X, Y y Z,  $N_1, N_2$  y  $N_3$  respectivamente, ha de ser múltiplo de dos y en segundo lugar que se trata de expresar las simetrías de los coeficientes de Fourier de una función real y asimétrica para que al aplicar la transformada inversa se obtenga la realización estocástica con las especificaciones deseadas.

Se va a considerar que los coeficientes de Fourier para los cuales  $\omega_3 = \text{constante}$  pertenecen a un mismo nivel (figura 3.29a). Denomino simetría intranivel a las simetrías que presentan los coeficientes para una misma frecuencia  $\omega_3$ ; y simetría internivel a las simetrías entre los coeficientes para dos frecuencias  $\omega_3$  diferentes, esto es dos niveles diferentes.

De los  $N_3$  niveles de coeficientes sólo existe simetría intranivel para los niveles (1) y  $(N_3/2 + 1)$ , los coeficientes del resto de los niveles no presentan ningún tipo de simetría intranivel. Dicha relación de intrasimetría es equivalente a las relaciones de simetría entre los coeficientes de Fourier en 2D y que se recuerdan en la figura 3.29b.



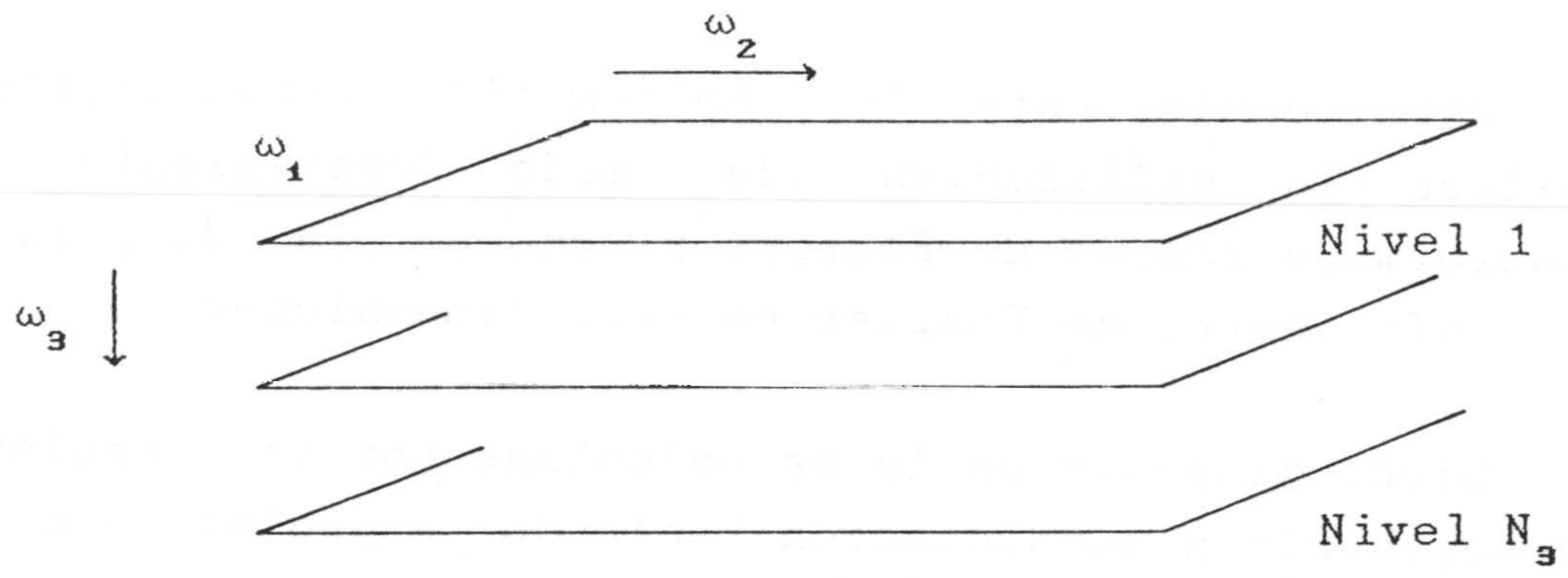


Figura 3.29a. Ordenación de coeficientes en 3D.

	1	$\frac{N_1}{2} + 1$		
1	A	B	B	B*
	D	I	H	J
$\frac{N_2}{2} + 1$	E	F	G	F*
	D*	J*	H*	I*

Niveles 1 y  $(N_3/2 + 1)$

Figura 3.29b. Relaciones de simetría intranivel con la frecuencia en la dirección Z ( $\omega_3$ ) constante. A,B,C,E, y G son coeficientes reales (parte imaginaria cero).  
\* : complejo conjugado.

esférica de alcance 5 unidades y meseta unidad.

Los estadísticos teóricos y experimentales de una realización, así como los estadísticos medios de 100 realizaciones junto con su coeficiente de variación se muestran en la tabla 3.XIV.

El variograma simulado de una realización al azar según las direcciones X, Y y Z se muestran en la figura 3.30a pudiéndose apreciar buenos resultados de correspondencia entre el variograma teórico y simulado.

En la figura 3.30b se muestra el variograma medio de 100 realizaciones, según los tres ejes cartesianos de coordenadas, observándose como la correspondencia entre el modelo de variograma y el variograma medio, es perfecta.

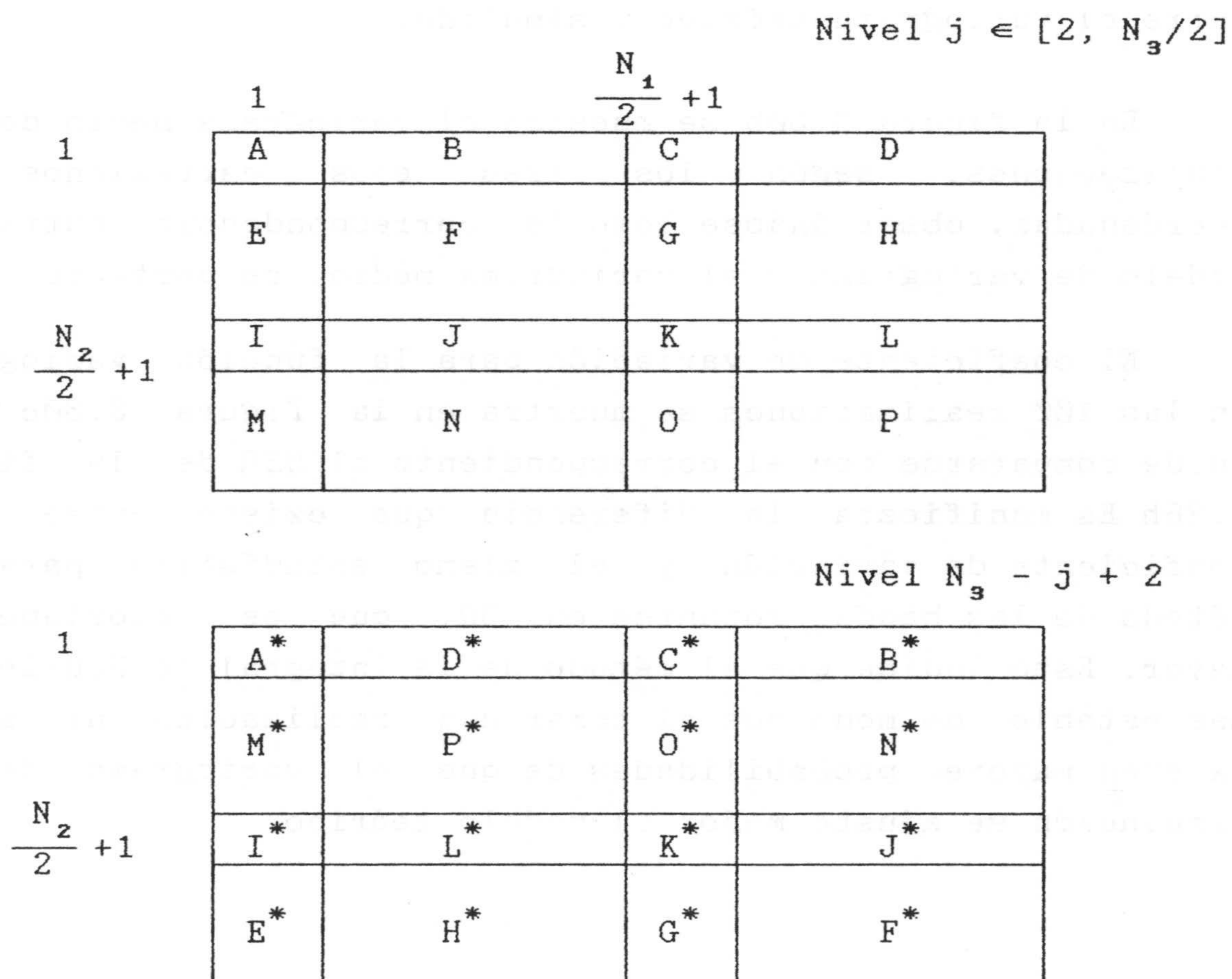
El coeficiente de variación para la función variograma en las 100 realizaciones se muestra en la figura 3.30c que puede compararse con el correspondiente al MBR de la figura 3.26h. Es manifiesta la diferencia que existe entre este coeficiente de variación y el mismo estadístico para el método de las bandas rotantes en 3D, que es notoriamente mayor. Esto indica que el método de la integral de Fourier es más estable, de modo que al tomar una realización al azar, existen mayores probabilidades de que el variograma de la simulación se ajuste mejor al modelo teórico.

	$\bar{x}$	$\sigma^2(\bar{x})$	$\sigma^2$	$\sigma^2(\sigma^2)$
TEORICO	.0	.0	1.0	.0
100 REALIZACIONES	.0028	.0084	.983	.0000
UNA REALIZACION	-.0744	—	.983	—

Tabla 3.XIV. Estadísticos de la simulación.



En cuanto a la simetría internivel, es tal que, el nivel  $j \in [2, N_3/2]$  es el complejo conjugado del nivel  $N_3 - j + 2$ , según se muestra en la figura 3.29c. Los niveles 1 y  $N_3/2 + 1$  no tienen relación de simetría internivel.



\* : complejo conjugado.

Figura 3.29c. Relaciones de simetría internivel.

He simulado una malla de 16 x 16 x 16 puntos a interdistancia unidad imponiendo un modelo de covarianza

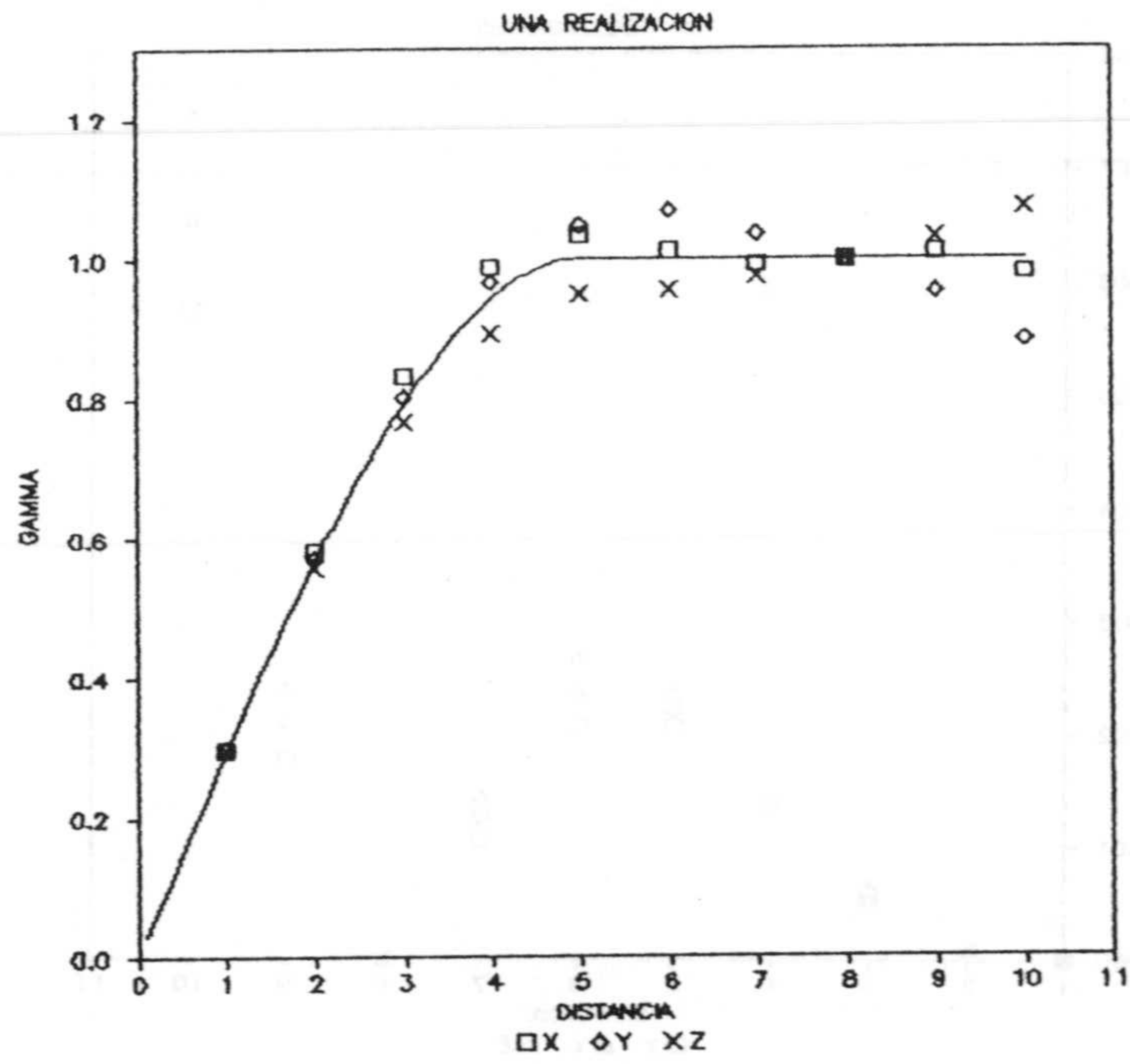


Figura 3.30a. Variograma simulado, según las direcciones X, Y, Z, en una realización.

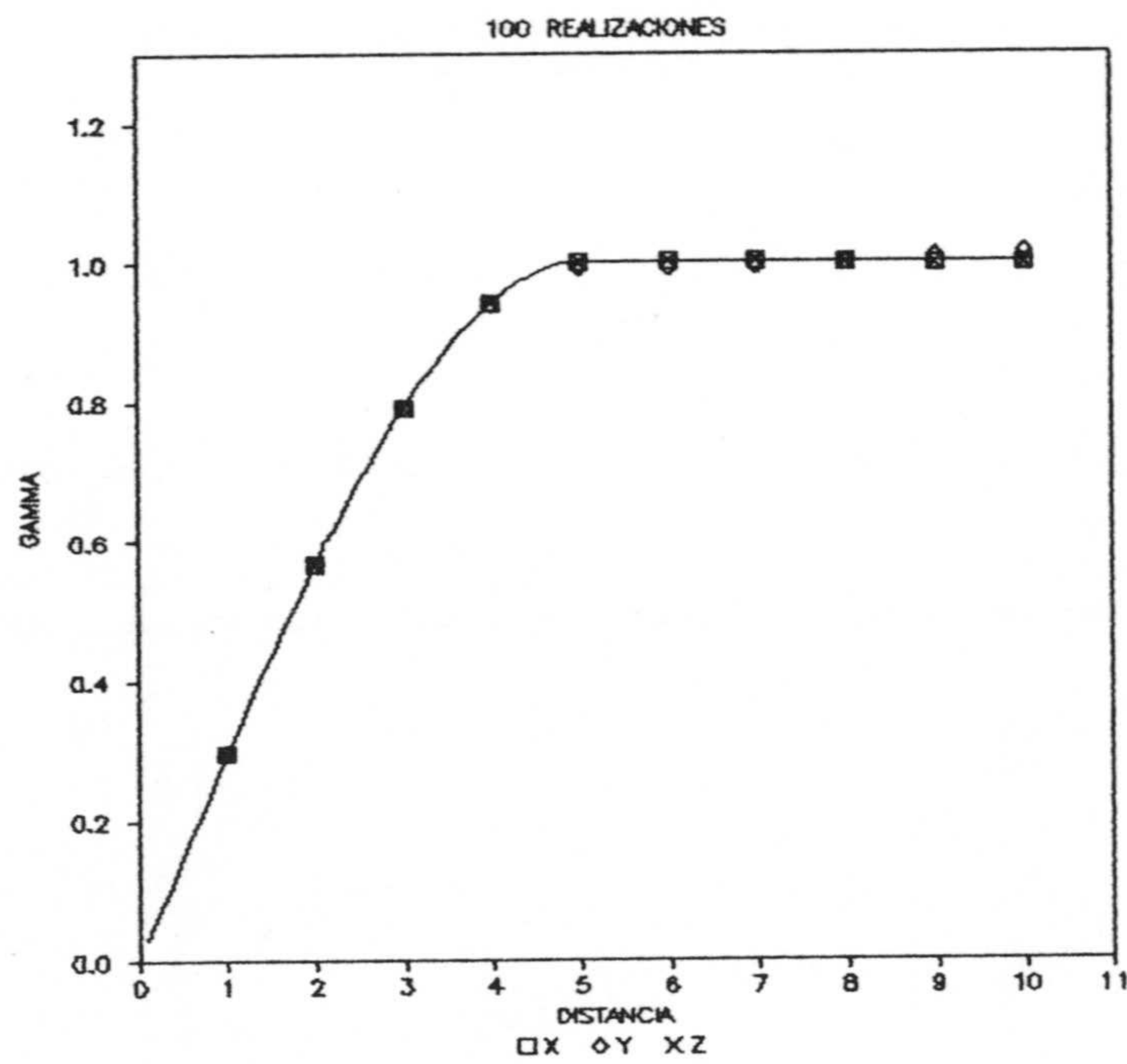


Figura 3.30b. Variograma medio, según las direcciones X, Y, Z, para 100 realizaciones.



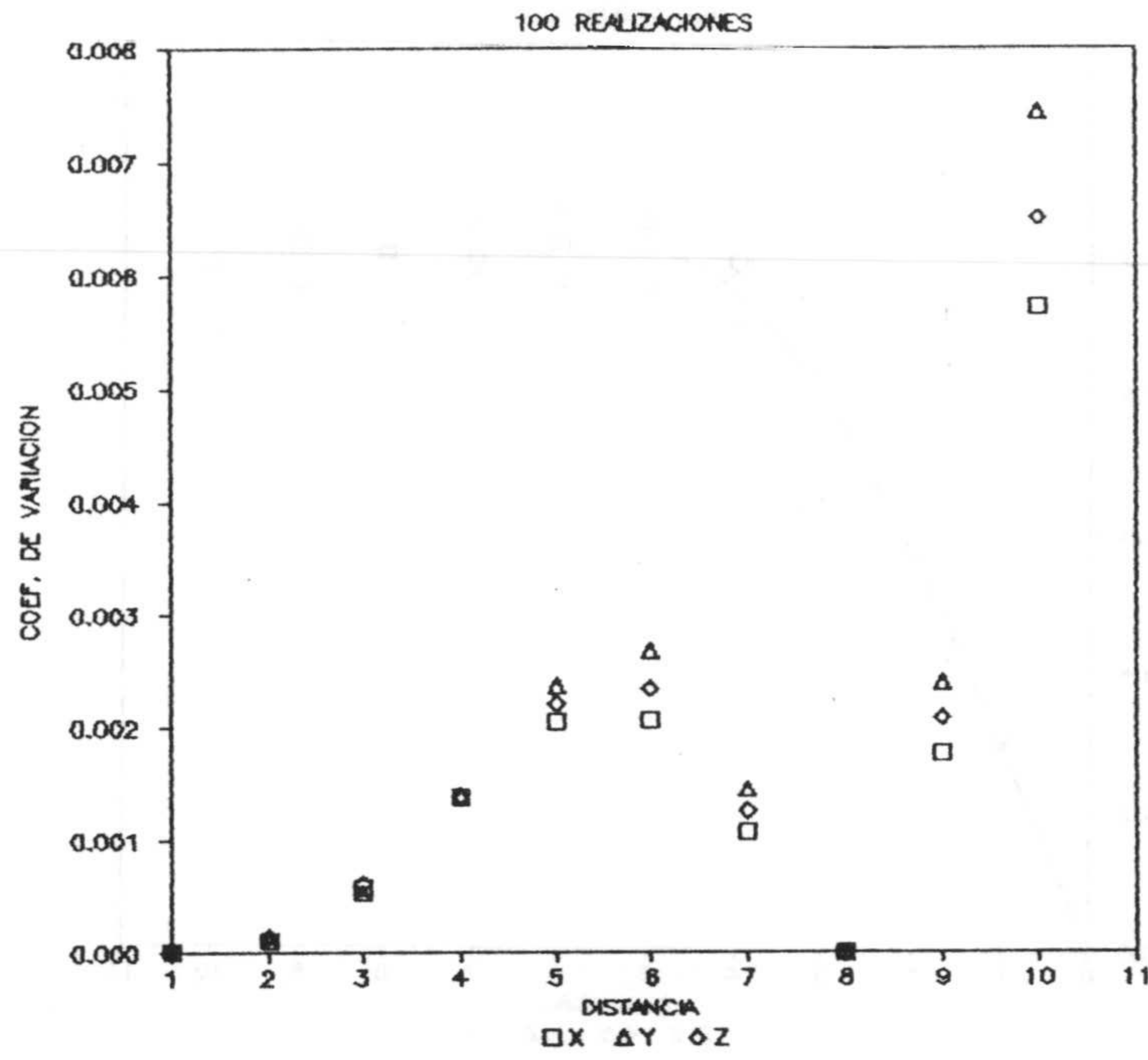


Figura 3.30c. Coeficiente de variación medio de la función variograma en 100 realizaciones.

CAPITULO IV  
CASOS PARTICULARES  
DE SIMULACION NO CONDICIONAL

1. INTRODUCCION

En el capítulo precedente se han estudiado diferentes técnicas matemático-probabilísticas para generar realizaciones de una función aleatoria con covarianza impuesta y asumiendo que se trata de una función aleatoria estacionaria de segundo orden e isótropa.

No obstante, en los estudios geoestadísticos aplicados aparece un amplia gama de situaciones donde el enfoque anterior resulta ser de una generalidad tal que no refleja de modo adecuado el verdadero patrón de variabilidad espacial del fenómeno geológico y por consiguiente en las aplicaciones se puede llegar a obtener resultados con escasa validez.

En primer lugar es frecuente que la variabilidad del fenómeno se muestre más notoriamente en una determinada dirección espacial. La simplificación posible de trabajar con el variograma medio de todas las direcciones y considerar una función aleatoria isótropa con dicho variograma, no satisface todos los requisitos prácticos. Por ello la metodología más adecuada es la simulación de funciones aleatorias anisótropas cuyo estudio se aborda en el apartado segundo.

En otras ocasiones no es admisible la hipótesis de estacionaridad, lo cual se detecta en el análisis



variográfico por una fuerte anisotropía zonal del variograma y un incremento de este con la distancia mayor al incremento cuadrático. En estos casos se asume que existe una tendencia o deriva de carácter regional, cuya modelización, y por consiguiente de la simulación de funciones aleatorias no estacionarias se tratará en el apartado tercero.

Otro caso particular muy frecuente en estudios de aplicación consiste en la simulación de valores medios sobre un cierto soporte diferente al puntual; se está en el ámbito de las funciones aleatorias integradas o de valores medios. El enfoque del estudio de estos procesos entra en el ámbito de la integración de procesos estocásticos y su aplicación a variables geológicas se desarrollará en el apartado cuarto.

Al igual que en el caso anterior, otro particularismo surge de la transformación de la función aleatoria original en una nueva función llamada indicatriz. La función aleatoria indicatriz se obtiene codificando la función aleatoria original en sólo dos valores posibles  $\{0,1\}$  según sea el valor de la variable aleatoria inferior o superior a un determinado valor crítico o valor de corte. La simulación de la función indicatriz se estudia en el apartado quinto del presente capítulo.

Por último, al igual que se ha tratado de funciones aleatorias multidimensionales (espacios bi- y tridimensional) resulta lógico considerar el supuesto multivariable, esto es, además de tener en cuenta la estructura de variabilidad de una variable regionalizada, resulta interesante incluir la correlación entre diferentes variables geológicas definidas en el mismo campo geométrico. En el apartado sexto se aborda la simulación multivariable o simulación de corregeionalizaciones.



## 2. SIMULACION DE FUNCIONES ALEATORIAS ANISOTROPAS

### 2.1. Introducción

Una función aleatoria que representa una variable regionalizada se dice anisótropa cuando la variabilidad no es la misma en todas las direcciones de espacio o lo que es lo mismo la variabilidad es función de la dirección. La función covarianza, o su equivalente la función variograma, depende no sólo del módulo del vector  $\mathbf{h}$  sino también de su dirección. Considerando una función aleatoria en el plano se tiene en el caso isótropo:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(|\mathbf{h}|) = \gamma\left[\sqrt{x^2 + y^2}\right]$$

y en el caso anisótropo:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(|\mathbf{h}|, \alpha) = \gamma(|\mathbf{h}|\cos\alpha, |\mathbf{h}|\sin\alpha)$$

La naturaleza de la anisotropía está relacionada directamente con la génesis del fenómeno geológico regionalizado, como pueden ser, por ejemplo, direcciones preferentes de una mineralización debido a fracturas orientadas, paleogeografía de la cuenca de deposición, dirección del flujo de agua en el medio subterráneo, etc.

A efectos de simulación se va a modelizar la anisotropía denominada geométrica caracterizada porque la longitud de correlación (alcance del variograma) es diferente según la dirección considerada, manteniéndose la varianza (meseta) constante (figura 4.2e). Si se representa el alcance para



todas las direcciones el gráfico se podría asimilar a una elipse, con una dirección en la cual la longitud de correlación es máxima (eje mayor de la elipse) y otra dirección con la longitud de correlación más pequeña (eje menor). Existen diferentes técnicas metodológicas para simular funciones aleatorias anisótropas; en particular, a continuación se presentan dos técnicas clásicas y un nuevo enfoque mediante técnicas espectrales que resulta altamente operativo en el caso bidimensional.

## 2.2. Transformación de coordenadas cartesianas

El variograma anisótropo se puede transformar en isótropo mediante una simple transformación de coordenadas. La relación de la transformación viene dada por (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi & (1-\lambda) \sin \varphi \cos \varphi \\ (1-\lambda) \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi + \lambda \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

Donde  $\varphi$  es el ángulo que forma el eje mayor de la elipse y el eje de coordenadas X, medido desde el eje X en la dirección de las agujas del reloj; y  $\lambda$  es la relación de anisotropía que se obtiene dividiendo la longitud de correlación mayor por la longitud de correlación menor con lo cual siempre  $\lambda > 1$ . Así se tiene que:



$$\gamma(x,y) = \gamma'(\sqrt{x'^2 + y'^2})$$

De este modo, para simular una función aleatoria anisótropa mediante esta metodología se han de seguir los siguientes pasos:

1). Transformar las coordenadas de los puntos a las nuevas coordenadas mediante la relación vista anteriormente.

2). Simular una función aleatoria isótropa con un variograma cuya longitud de correlación es igual al alcance mayor del variograma anisótropo.

3). Efectuar la transformación inversa de las coordenadas.

Esta metodología es general y tiene la ventaja de que es aplicable a cualquier método de simulación de funciones aleatorias isótropas vistos con anterioridad. La precisión del método está directamente relacionada con la precisión del generador de funciones aleatorias isótropas, cuestión ya tratada en el capítulo precedente.

### 2.3. Método de las Bandas Rotantes con un generador espectral unidimensional.

Este caso particular del método de las Bandas Rotantes se caracteriza porque la covarianza sobre las rectas y por consiguiente su función de densidad espectral depende de la orientación de cada línea. La cuestión fundamental que se



plantea es obtener para cada línea su función de covarianza apropiada según su dirección. MANTOGLOU y WILSON (1981) llegan a la relación:

$$S_{1,\beta}(\omega) = \pi \omega S(\mathbf{w})$$

que liga  $S_{1,\beta}(\omega)$  la función de densidad espectral del proceso unidimensional con  $S(\mathbf{w})$  función de densidad espectral del proceso bidimensional. Como:

$$\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2) = (\omega \cos\beta, \omega \sin\beta)$$

$$S_{1,\beta}(\mathbf{w}) = \pi \omega S(\omega \cos\beta, \omega \sin\beta)$$

es preciso encontrar la función de densidad espectral bidimensional lo cual, exceptuando modelos simples como el exponencial o el gaussiano, puede llegar a ser tremendamente complicado.

#### 2.4. Método espectral directo

Ante las dificultades que entraña la técnica anterior para la simulación directa de una función aleatoria anisótropa se propone en este trabajo el método espectral directo. La metodología es la misma a la estudiada con anterioridad con la denominación de método de la integral de Fourier.

El fundamento es extremadamente simple, basta con muestrear de modo apropiado la función de covarianza anisótropa y calcular mediante la transformada discreta de

Fourier la función de densidad espectral correspondiente (figura 4.1). Los siguientes pasos son los mismos a los expuestos en el epígrafe correspondiente; a partir de la función de densidad espectral se obtiene el espectro de amplitud que junto al espectro de fase aleatorio que se le añade, se invierten por la transformada discreta de Fourier para obtener la realización con la covarianza impuesta.

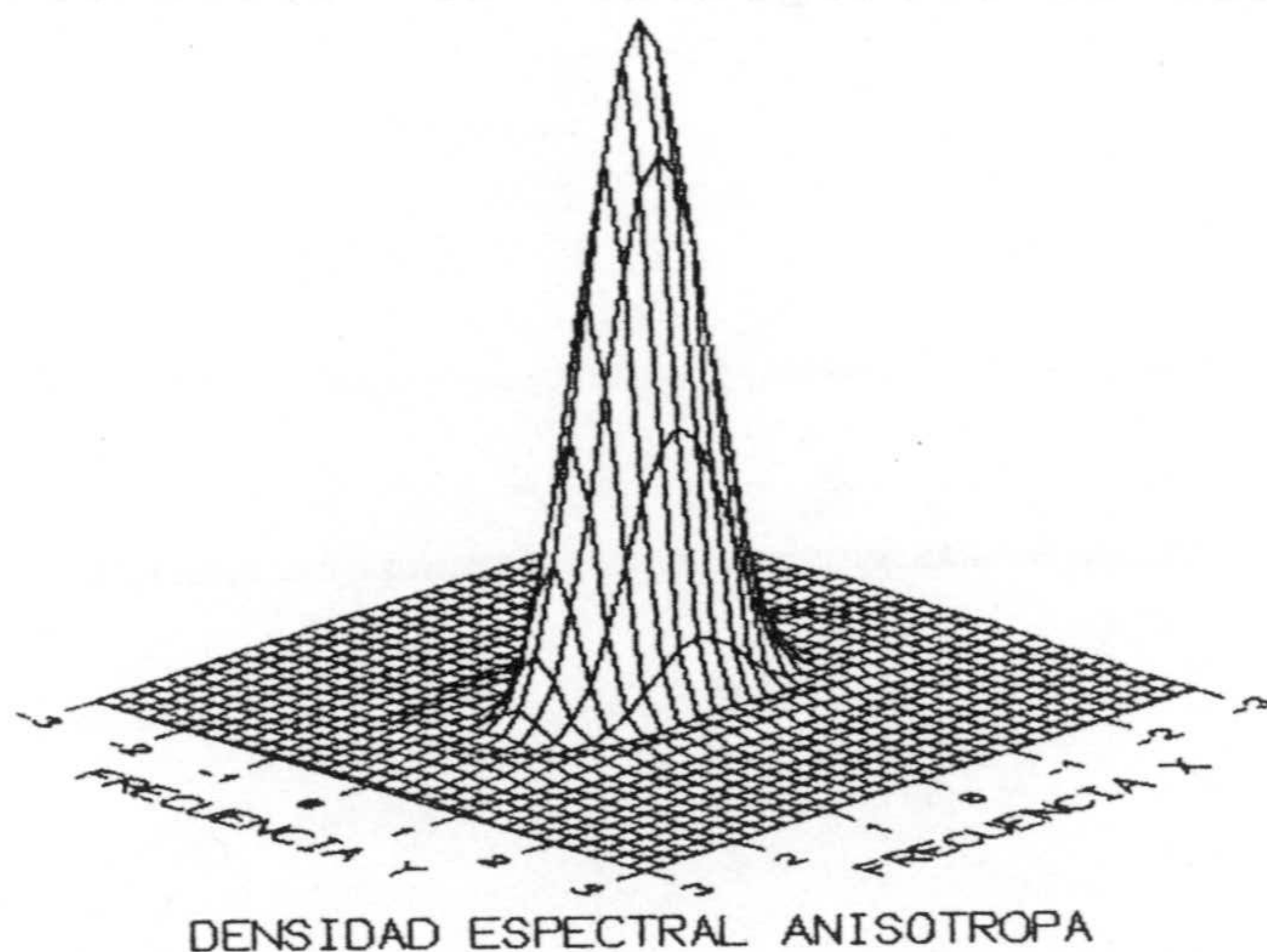


Figura 4.1. Función de densidad espectral bidimensional.

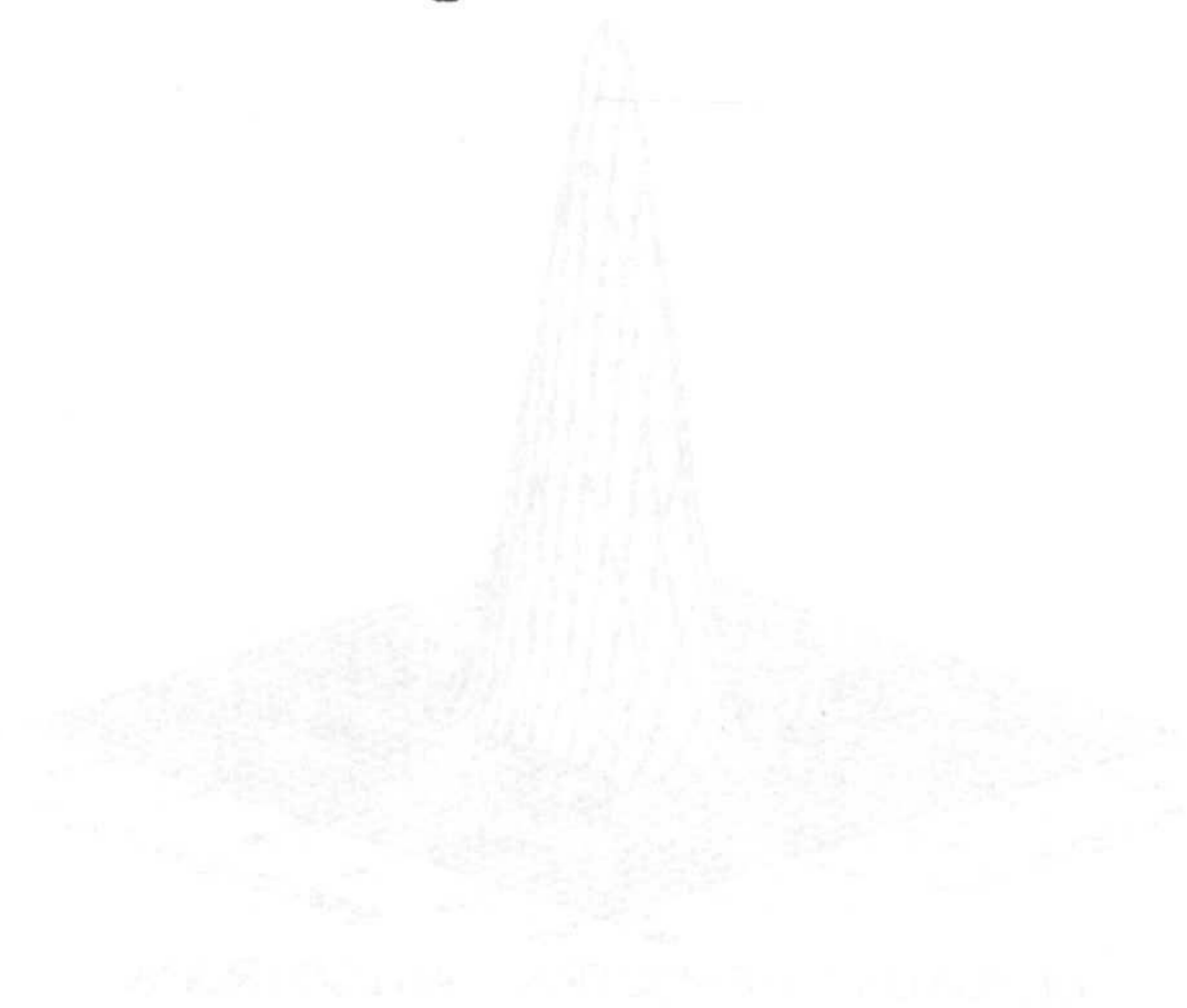
Con el fin de chequear la bondad del método propuesto se



han simulado 100 realizaciones cada una de las cuales consta de 4096 puntos dispuestos en una malla regular de 64 x 64 a interdistancia unidad. Se impuso a la función aleatoria una función de covarianza con anisotropía geométrica con un alcance mayor de 20 unidades y un alcance menor de 10 unidades.

Las figuras 4.2a a 4.2e muestran el variograma medio obtenido de 100 realizaciones independientes para las direcciones N-S, E-W, NW-SE y NE-SW respectivamente. Se puede destacar la correspondencia perfecta entre valores teóricos y valores experimentales.

En las figuras 4.2e y 4.2f he dibujado el variograma experimental de una realización tomada al azar, para diferentes direcciones. Es de destacar como los primeros pasos, en una distancia igual al alcance, el variograma se reproduce fielmente por los valores experimentales; una vez sobrepasada dicha distancia los valores experimentales fluctúan en torno a los correspondientes valores teóricos, pudiéndose considerar los resultados satisfactorios. La figura 4.2g muestra la cartografía de isovalores de dicha realización.



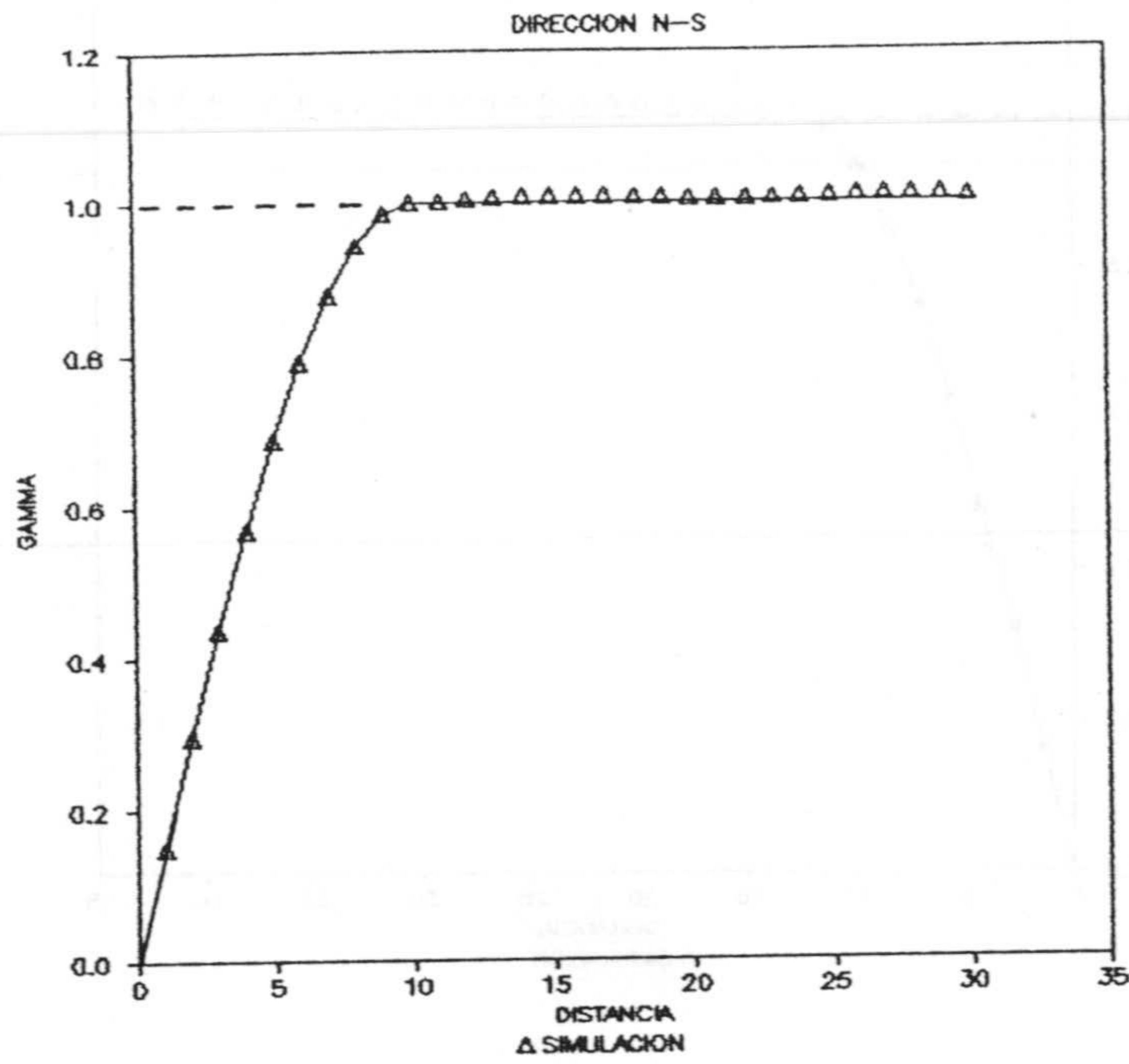


Figura 4.2a. Variograms simulado en la dirección N-S.

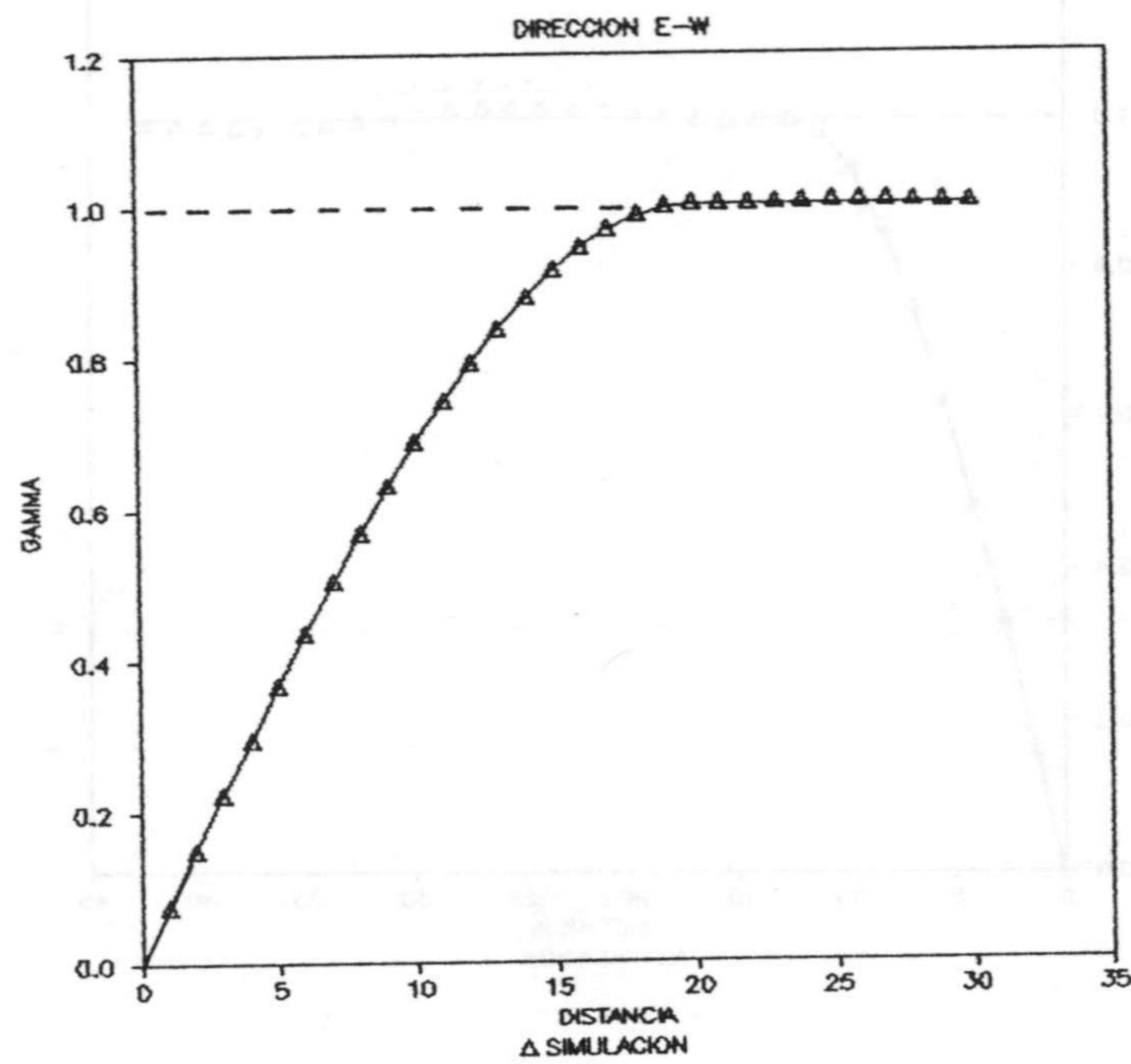


Figura 4.2b. Variograma simulado en la dirección E-W.



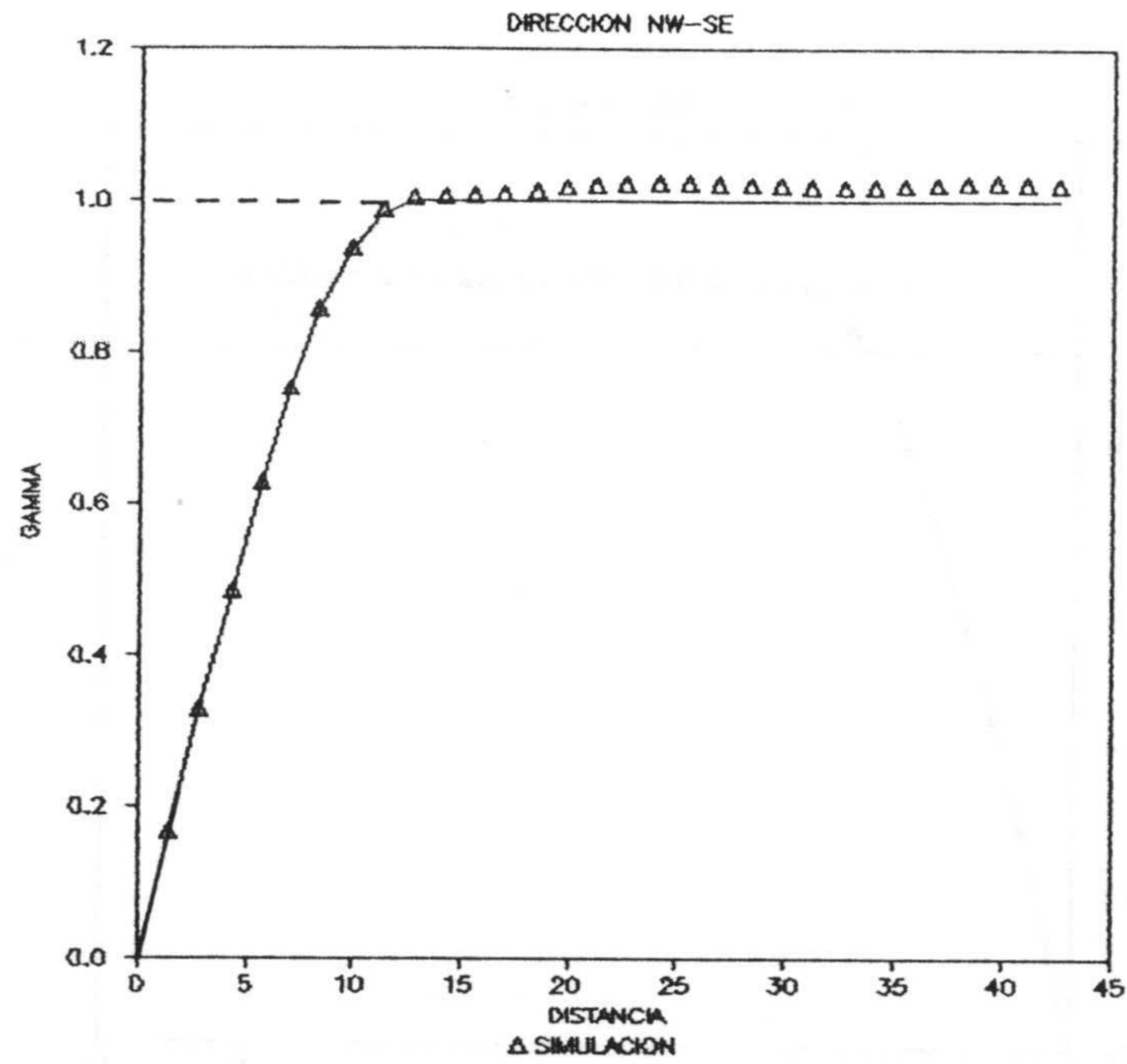


Figura 4.2c. Variograma simulado en la dirección NW-SE.

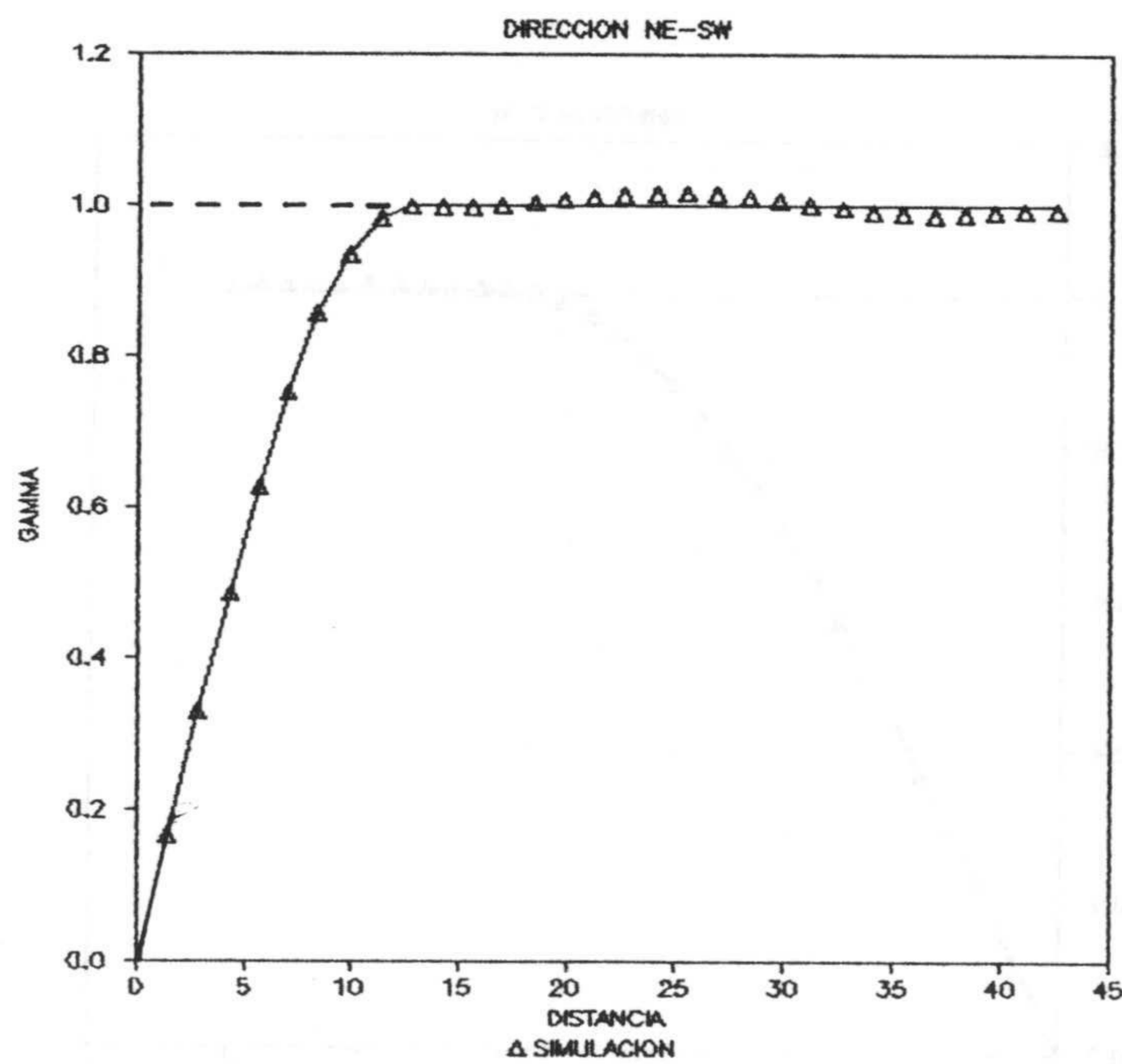


Figura 4.2d. Variograma simulado en la dirección NE-SW.

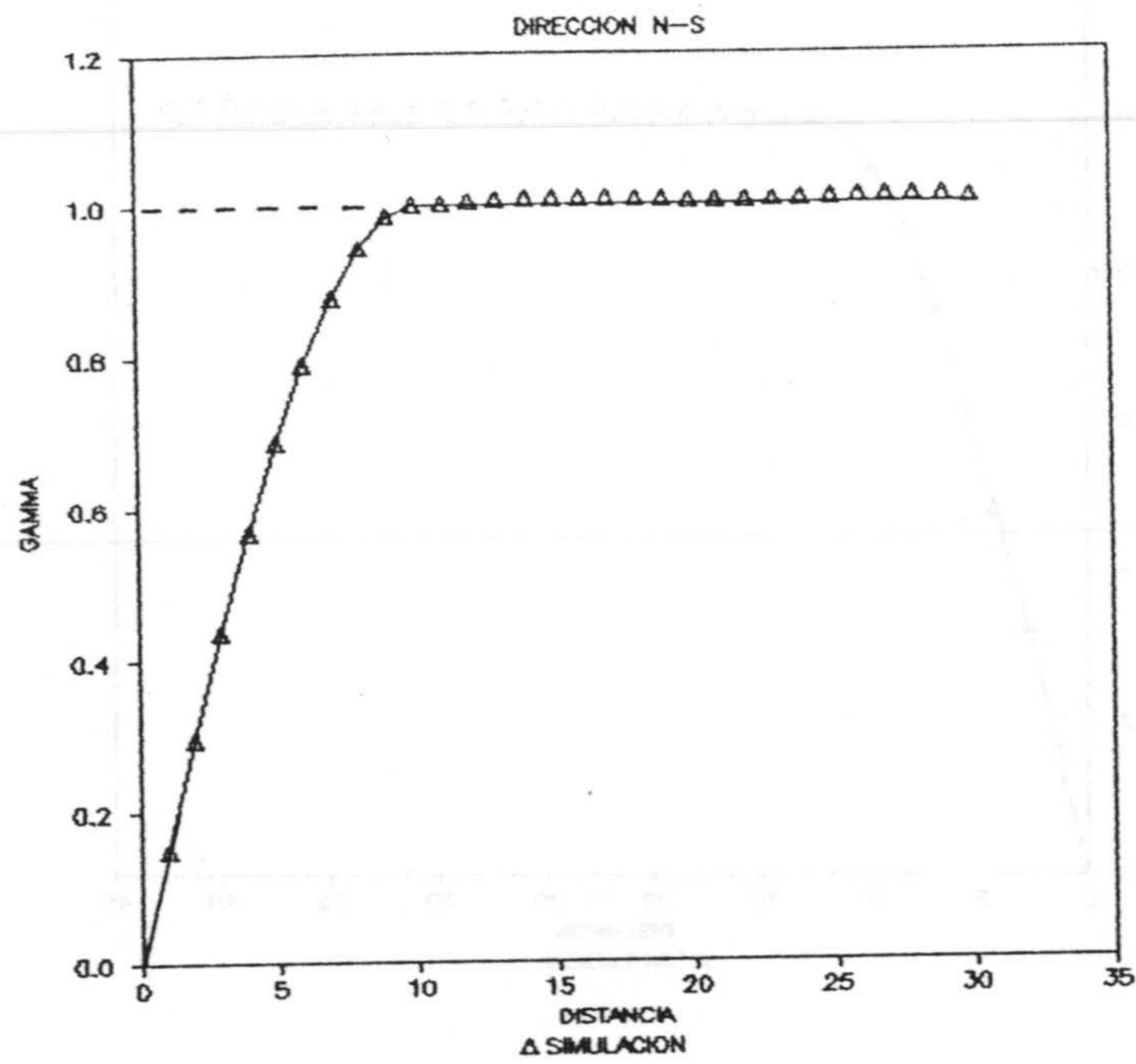


Figura 4.2a. Variograms simulado en la dirección N-S.

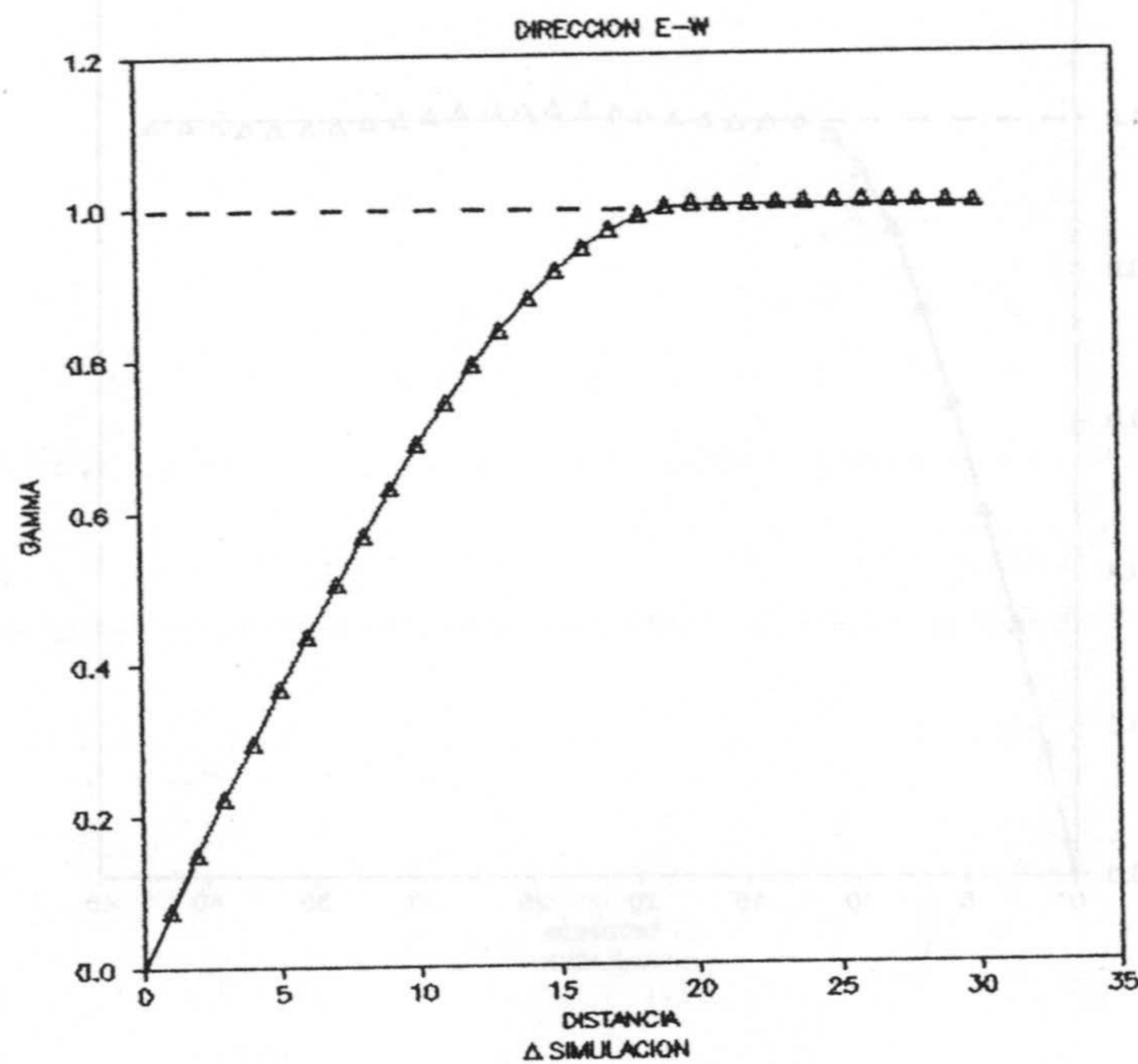


Figura 4.2b. Variograma simulado en la dirección E-W.



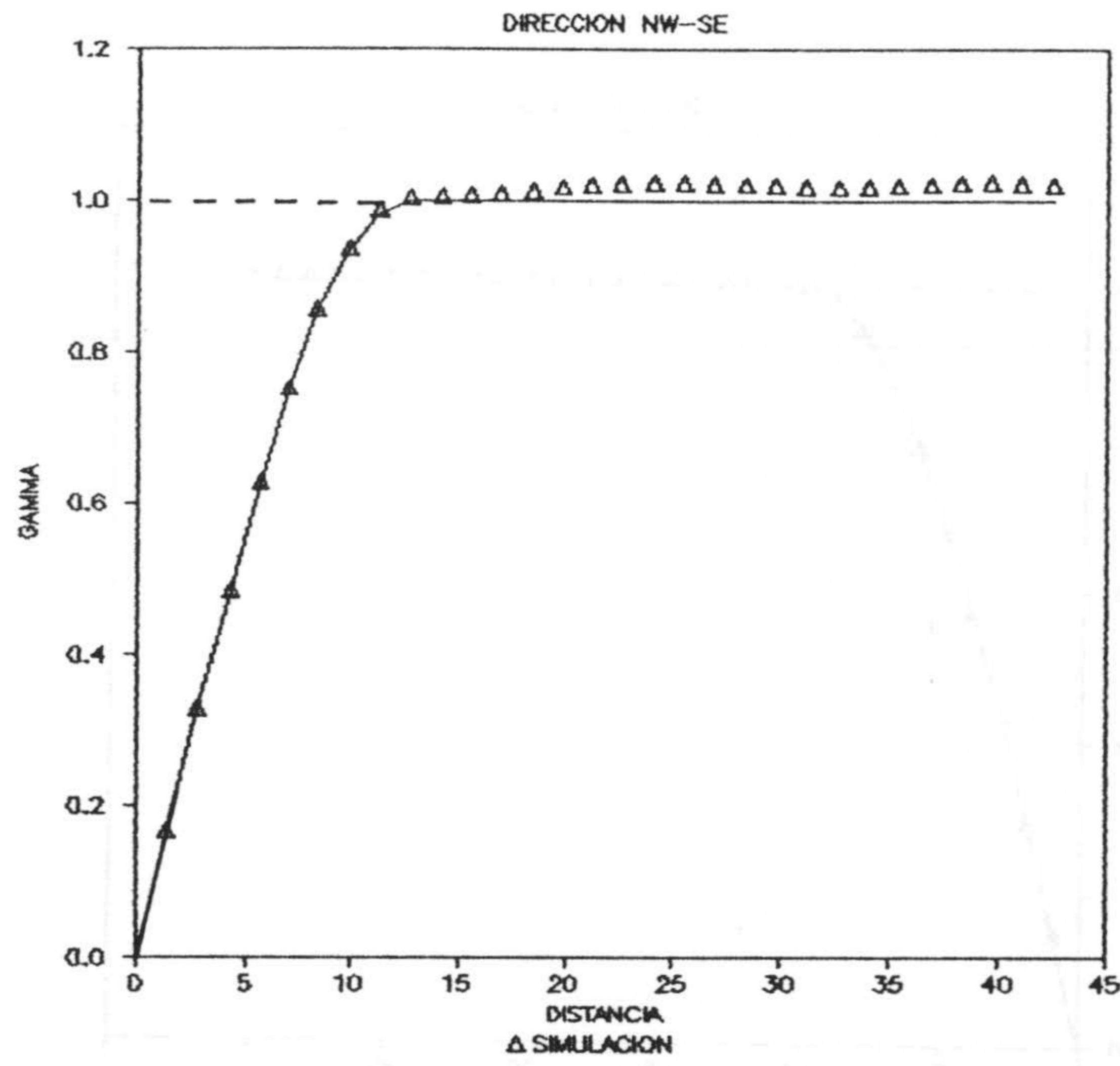


Figura 4.2c. Variograma simulado en la dirección NW-SE.

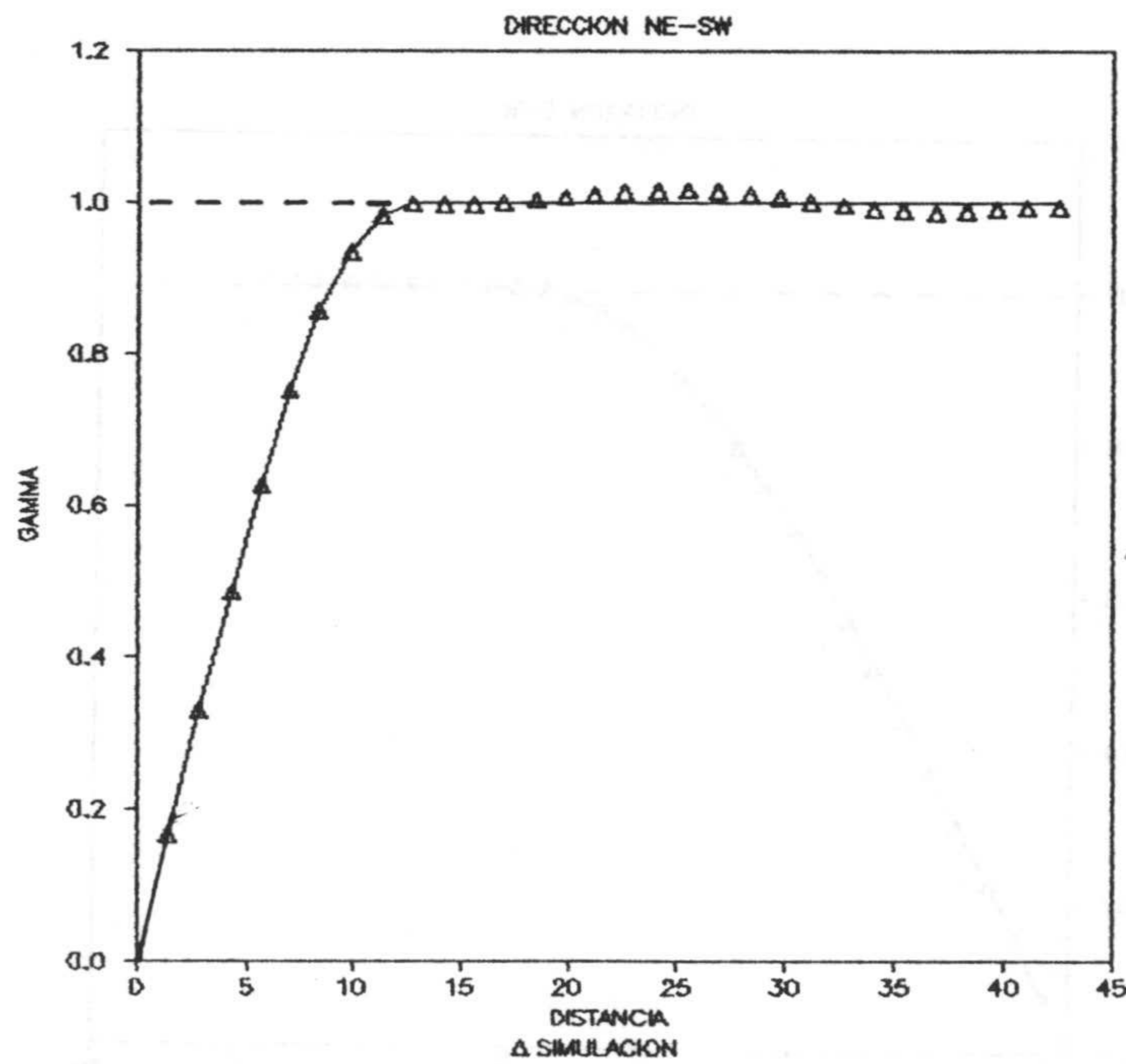


Figura 4.2d. Variograma simulado en la dirección NE-SW.

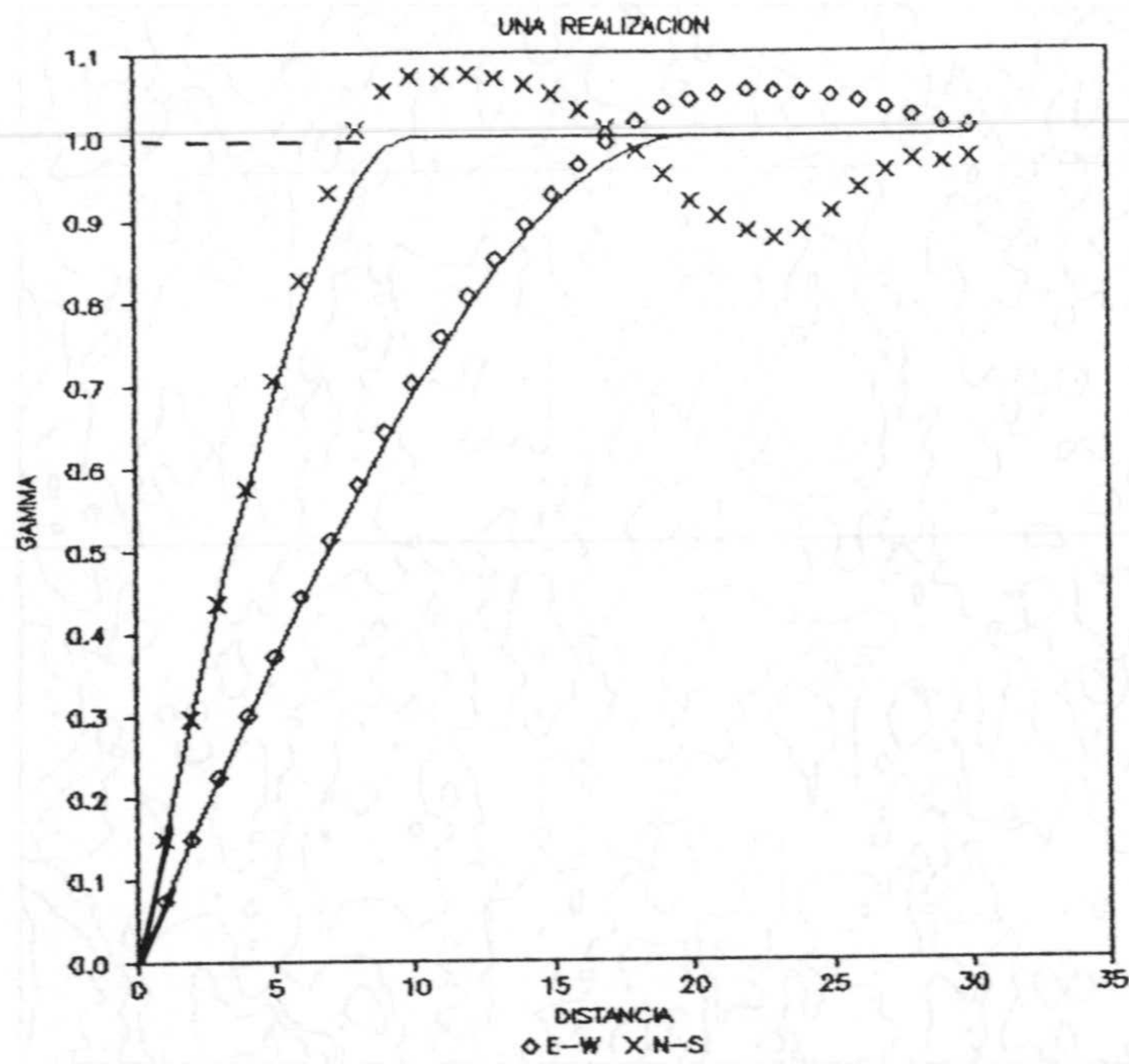


Figura 4.2e. Variograma simulado en una realización.

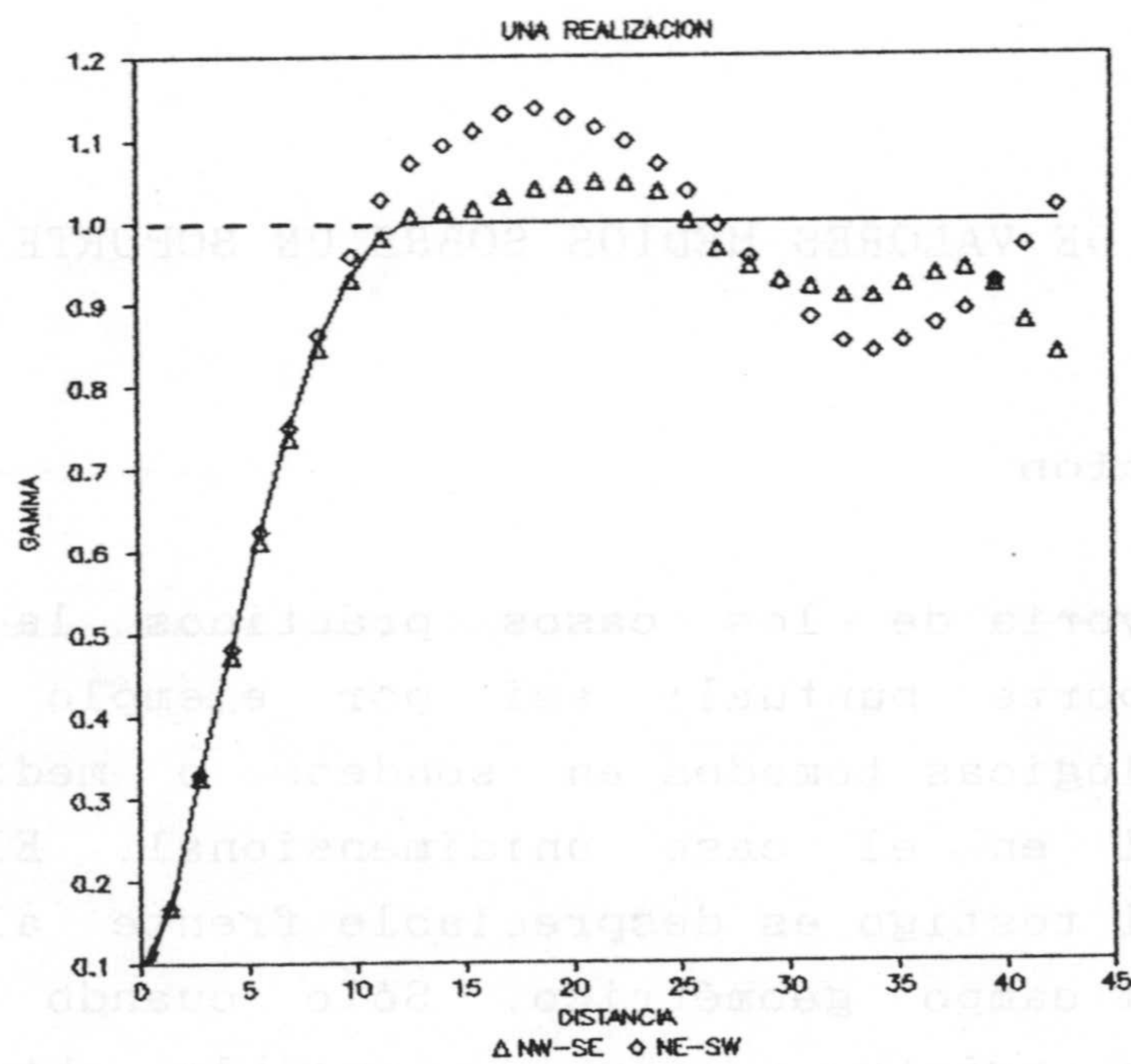


Figura 4.2f. Variograma simulado en una realización.



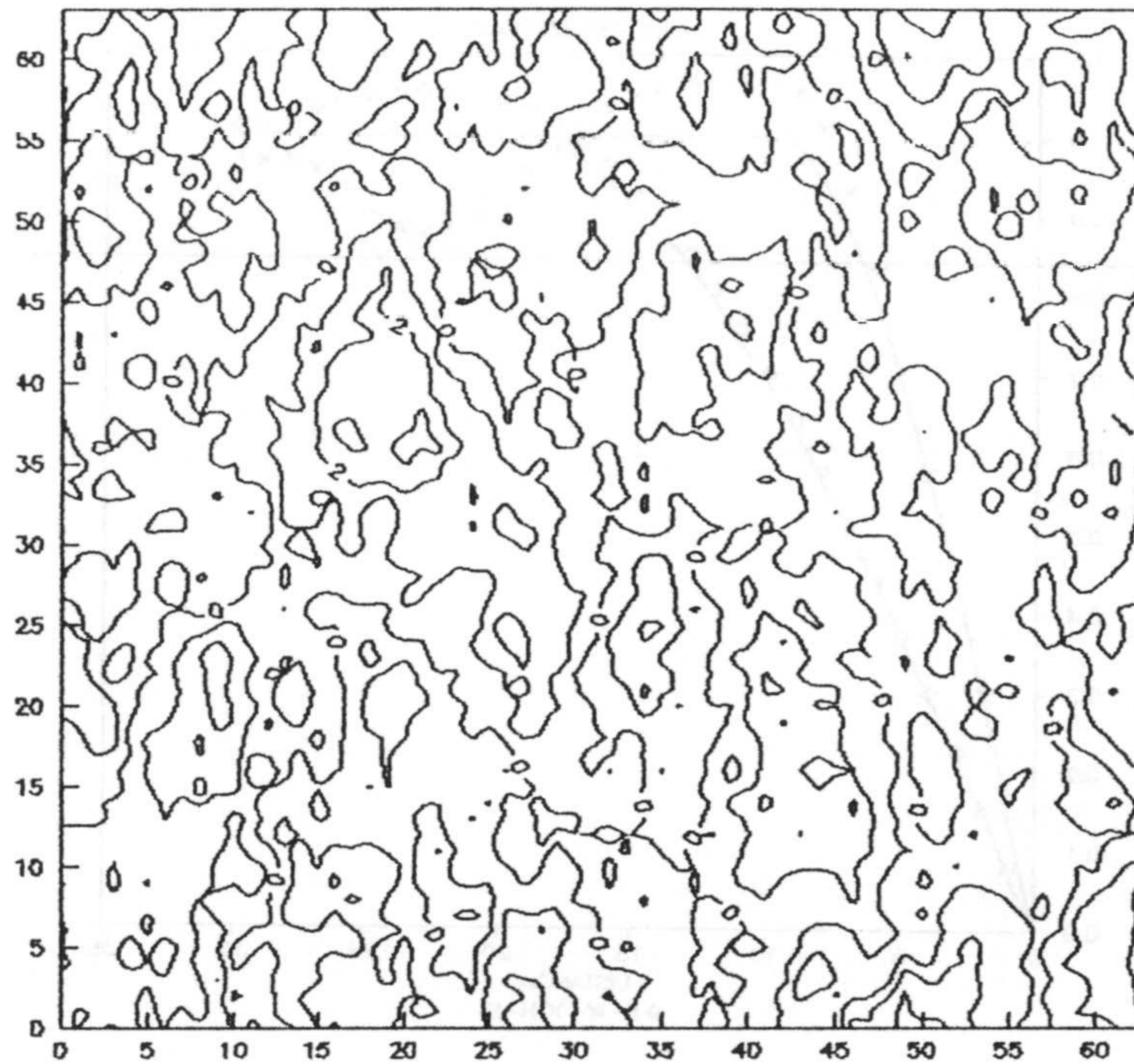


Figura 4.2g. Ejemplo de una realización de una función aleatoria anisótropa.

#### 4. SIMULACION DE VALORES MEDIOS SOBRE UN SOPORTE NO PUNTUAL

##### 4.1. Introducción

En la mayoría de los casos prácticos la información tiene un soporte puntual; así por ejemplo valores de variables geológicas tomados en sondeos o medidas de una serie temporal en el caso unidimensional. El volumen o superficie del testigo es despreciable frente al volumen o superficie del campo geométrico. Sólo cuando se efectúan mediciones con registro continuo es posible obtener valores medios experimentales. Esto ocurre con rara frecuencia en la práctica y es por ello que resulta de gran interés el desarrollo de la metodología para simular funciones



aleatorias sobre soporte no puntual. Un ejemplo de la utilización de los valores medios es, por ejemplo, en minería en la modelización de las leyes medias de los bloques de explotación.

En el apartado 2.7. se comentaron los resultados clásicos que relacionan la función de variabilidad de la función aleatoria puntual con la correspondiente a la función aleatoria de valores medios. En los epígrafes sucesivos se señala diferentes técnicas para abordar la simulación de este tipo de funciones aleatorias haciendo especial hincapié en el método espectral sobre el cual se ha investigado.

#### 4.2. Valores medios a partir de la simulación puntual

Esta técnica se basa en efectuar una aproximación discreta a la integral que representa la función aleatoria de valores medios:

$$Z_A(\mathbf{x}) = \int_A Z(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

por la sumatoria:

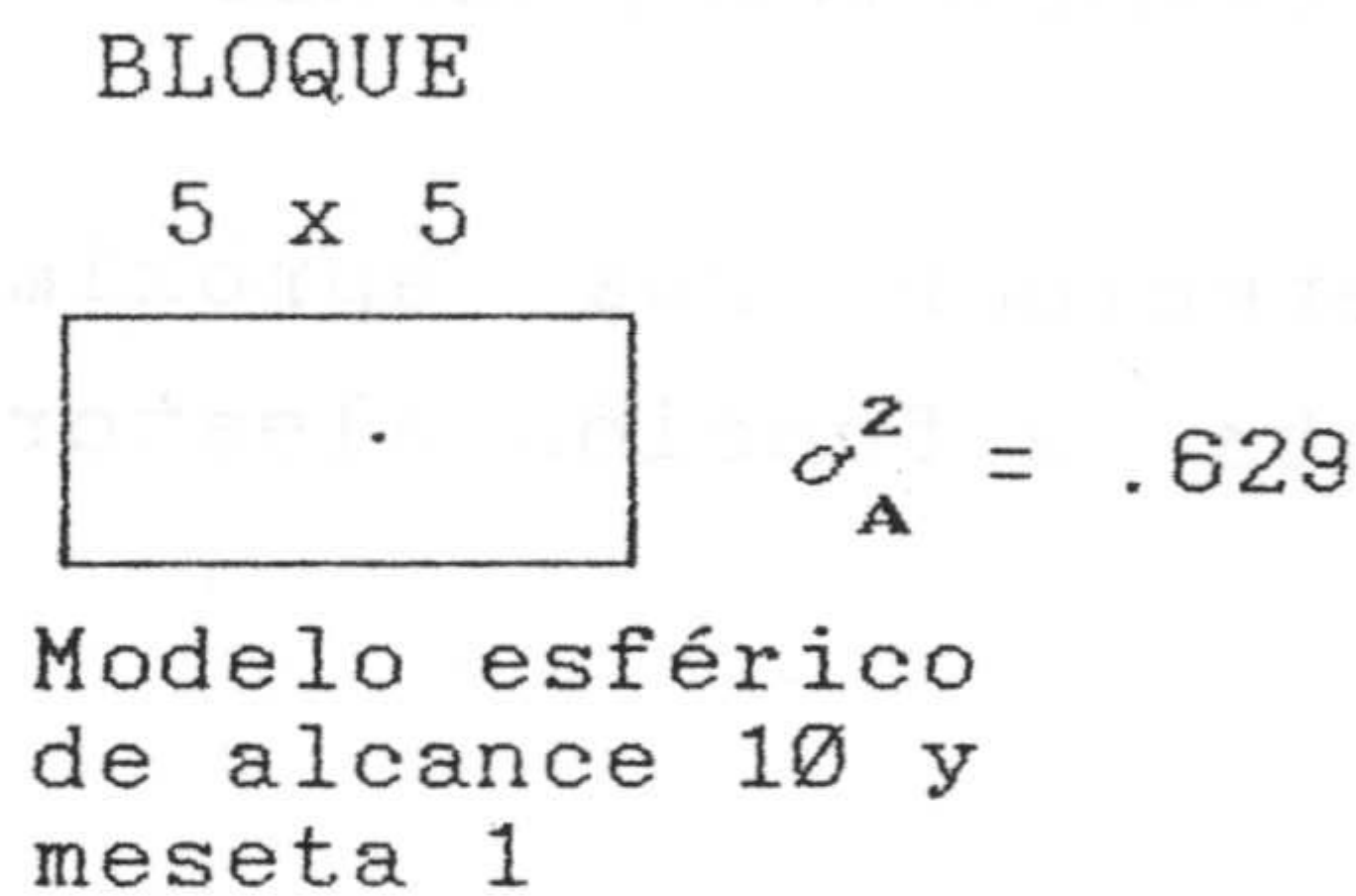
$$Z_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(\mathbf{x}_i)$$

La ventaja del método, adicional a su simplicidad es que, sin hacer ninguna otra hipótesis adicional, se obtiene simultáneamente de un modelo de puntos y bloques, *JOURNAL* y



La principal limitación de esta técnica es el elevado tiempo de cálculo que requiere cuando el número de bloques a simular es muy grande.

El número de puntos N a simular dentro de cada bloque ha de ser determinado a priori de tal modo que sea un número de puntos suficiente como para que se reproduzca la variabilidad espacial del soporte.



DISCRETIZACION	N	$\sigma_A^{*2}$
1 x 1	1	.527
2 x 2	4	.566
3 x 3	9	.606
4 x 4	16	.630
5 x 5	25	.617
6 x 6	36	.619
7 x 7	49	.627

Tabla IV.1 Covarianza media en un área.

En la tabla IV.1. se puede observar como si se desea simular una función aleatoria de valores medios en áreas de 5 x 5 unidades cuando el alcance de la función variograma puntual es de 10 unidades, es suficiente con discretizar el bloque en 4 x 4 puntos al ser el nivel de discretización mínimo para representar de modo adecuado  $C(0) = \sigma_A^2$ .

En algunos casos como es la simulación de valores medios

de una función aleatoria no estacionaria es esta la metodología más sencilla a seguir.

#### 4.3. Simulación de valores medios mediante métodos espectrales

La exposición de la metodología se va a hacer para el caso unidimensional apelando a una mayor claridad en la exposición si bien, como se verá, la extensión al caso multidimensional no presenta excesivas dificultades.

En la figura 4.3 se representa la evolución continua de una variable en el tiempo; por ejemplo cualquier variable de tipo temporal.

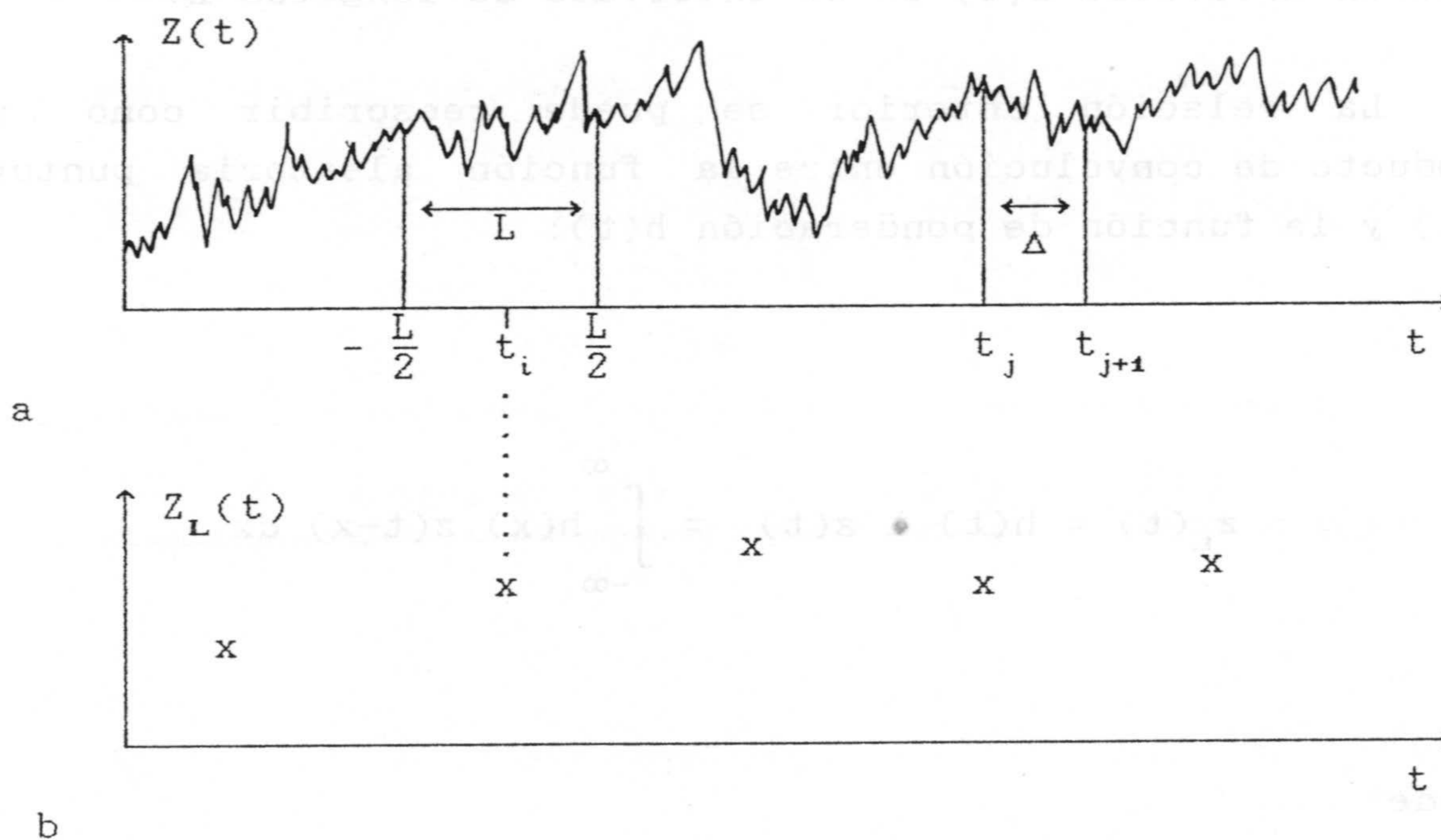


Figura 4.3. Función aleatoria unidimensional a. puntual y b. de valores medios.



El caso más frecuente es que se disponga de un número finito  $N$  de observaciones experimentales tomadas a paso regular  $\Delta$  o irregularmente espaciados.

Este conjunto de valores  $\{z(t_i); i = 1, 2, \dots, N\}$  corresponden a valores puntuales y su simulación a un paso menor a  $\Delta$  se ha tratado en el capítulo correspondiente. Se trata en este apartado de la simulación de valores medios en un intervalo de tiempo de longitud  $L$ .

$$Z_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} Z(x) dx$$

$Z_L(t)$  representa la función aleatoria de valores medios de la función aleatoria  $Z(t)$  en el intervalo de longitud  $L$ .

La relación anterior se puede reescribir como un producto de convolución entre la función aleatoria puntual  $z(t)$  y la función de ponderación  $h(t)$ :

$$z_L(t) = h(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) z(t-x) dx$$

donde:

\* : producto de convolución

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } x \in \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así se puede imaginar el proceso de valores medios como un sistema (figura 4.4) que transforma la variable aleatoria puntual en la variable aleatoria de valor medio sobre un segmento de longitud L.

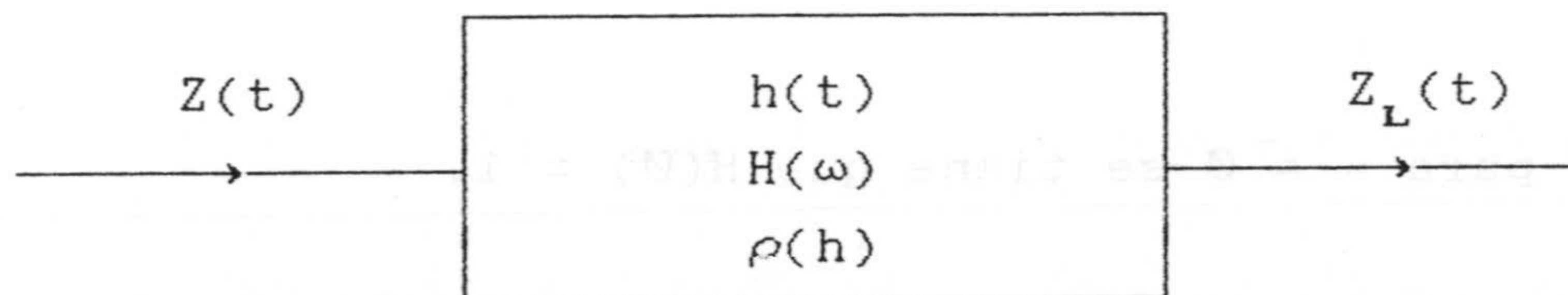


Figura 4.4. Sistema de integración de un proceso estocástico.

Al ser la integración una operación lineal se está tratando con un sistema de tipo lineal por lo que en lo sucesivo se hará provecho de las características de estos sistemas.

De este modo la función de ponderación  $h(t)$  (figura 4.5) se puede considerar como la respuesta impulsiva del sistema y su transformada de Fourier  $H(\omega)$  se denomina función de transferencia del sistema (PAPOULIS, 1984):

$$h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$$



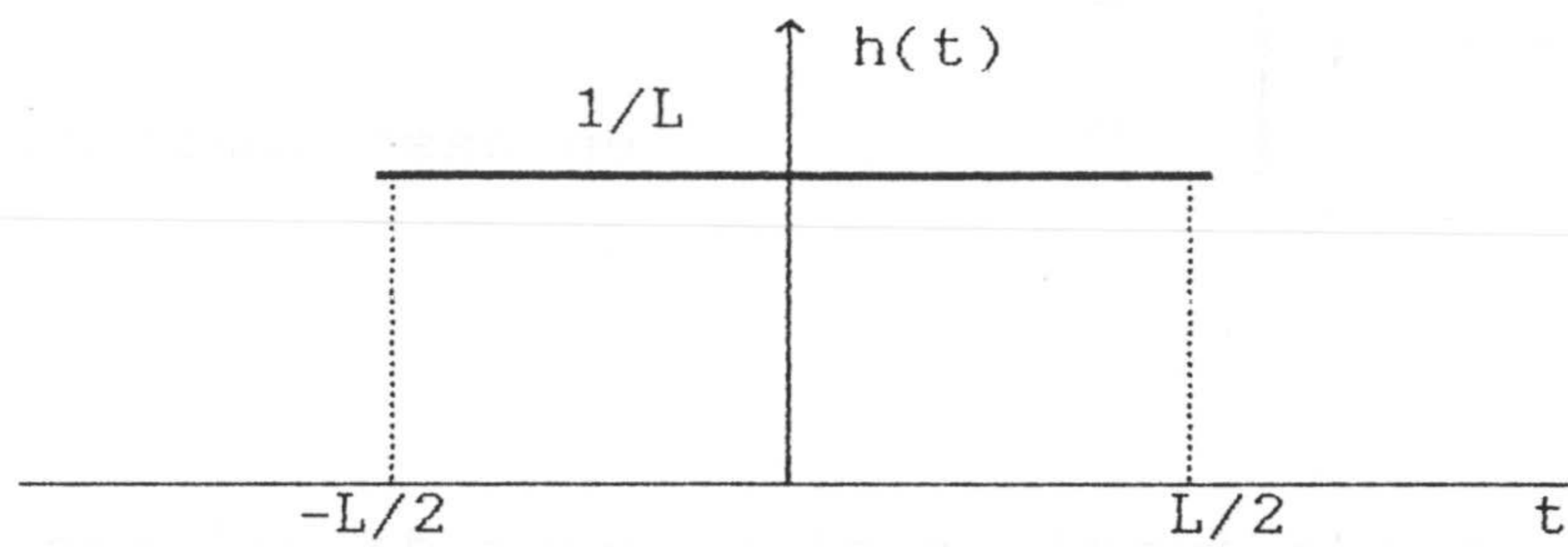


Figura 4.5. Respuesta impulsiva del sistema.

$$H(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{L \omega} \operatorname{sen} \left( \frac{L \omega}{2} \right)$$

y para  $\omega = 0$  se tiene que  $H(0) = 1$ .

Al ser la respuesta impulsiva una función real y par, su transformada de Fourier, la función de transferencia, es asimismo real y par. Aplicando el teorema de la convolución para transformadas de Fourier se obtiene:

$$Z_L(t) = h(t) * Z(t)$$

$$Z_L(\omega) = H(\omega) Z(\omega)$$

De este modo la función de transferencia se puede imaginar como una función de ponderación en el dominio de la frecuencia que modifica la amplitud de los diferentes armónicos constituyentes pero no su fase. Tomando el módulo de la última expresión y elevando al cuadrado se tiene:

$$|Z_L(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |Z(\omega)|^2$$

con lo que:

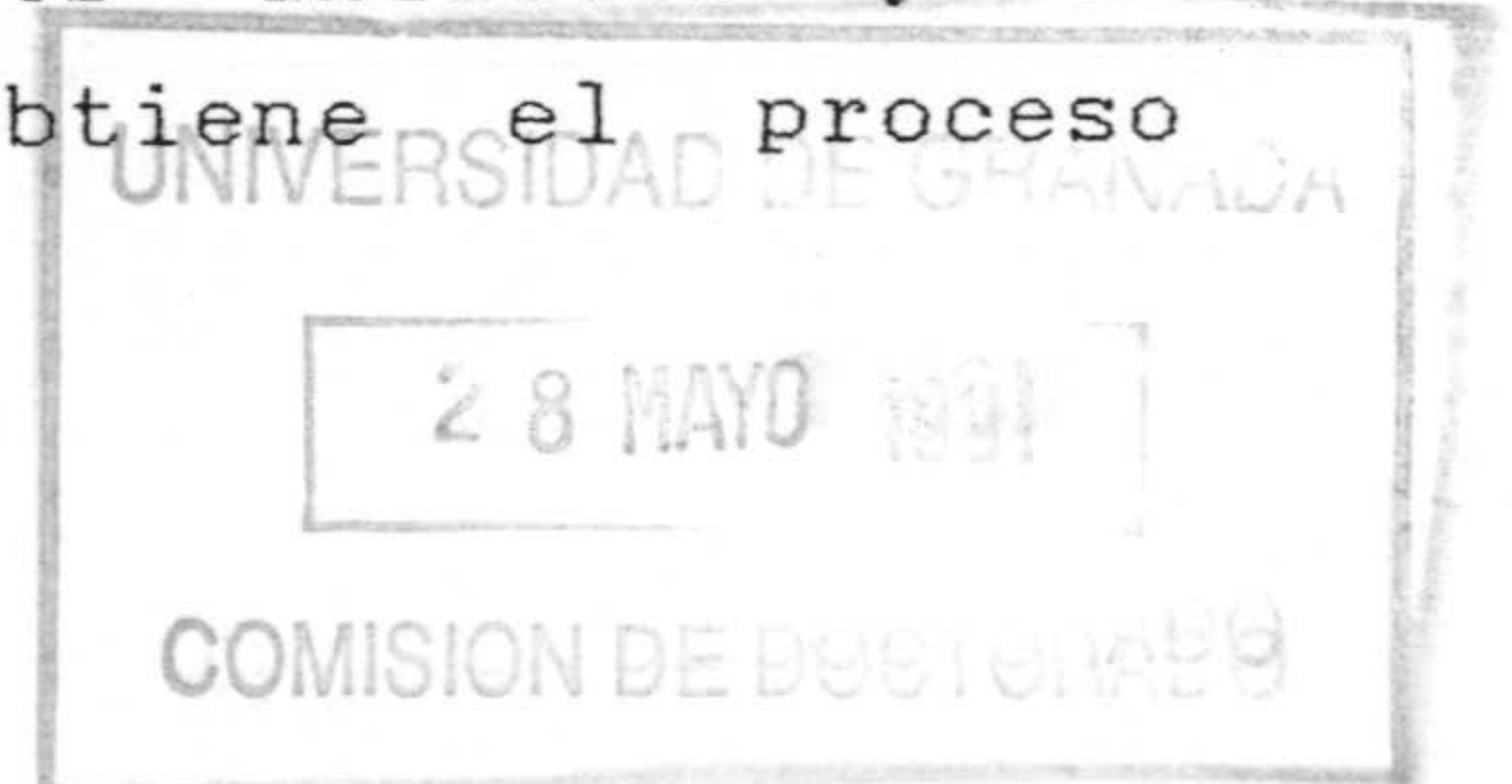
$$S_L(\omega) = |H(\omega)|^2 S(\omega)$$

Es decir, la función de densidad espectral del proceso integrado es igual a la función de densidad espectral del proceso puntual multiplicada por el cuadrado del módulo de la función de transferencia del sistema. Este resultado es bien conocido en Teoría de Análisis Espectral de procesos estocásticos (BRACEWELL, 1986).

Así, para el proceso de valores medios sobre un segmento se obtiene:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{4}{L^2 \omega^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{L \omega}{2}\right)$$

La integración de un proceso estocástico estacionario de segundo orden supone una modificación en la función correlativa del proceso; el factor anterior, cuadrado del módulo de la función de transferencia, describe como se modifica la varianza del proceso para las diferentes frecuencias y queda reflejado en la función de densidad espectral del proceso integrado. Las figuras 4.6a a 4.6c muestran respectivamente la función de densidad espectral puntual  $S(\omega)$ , el factor de transferencia  $|H(\omega)|^2$  y la función de densidad espectral del proceso integrado  $S_L(\omega)$ , cuando la función aleatoria puntual tiene una covarianza de tipo esférico con longitud de correlación de 50 unidades y la longitud del segmento sobre el cual se obtiene el proceso integrado es de 20 unidades.





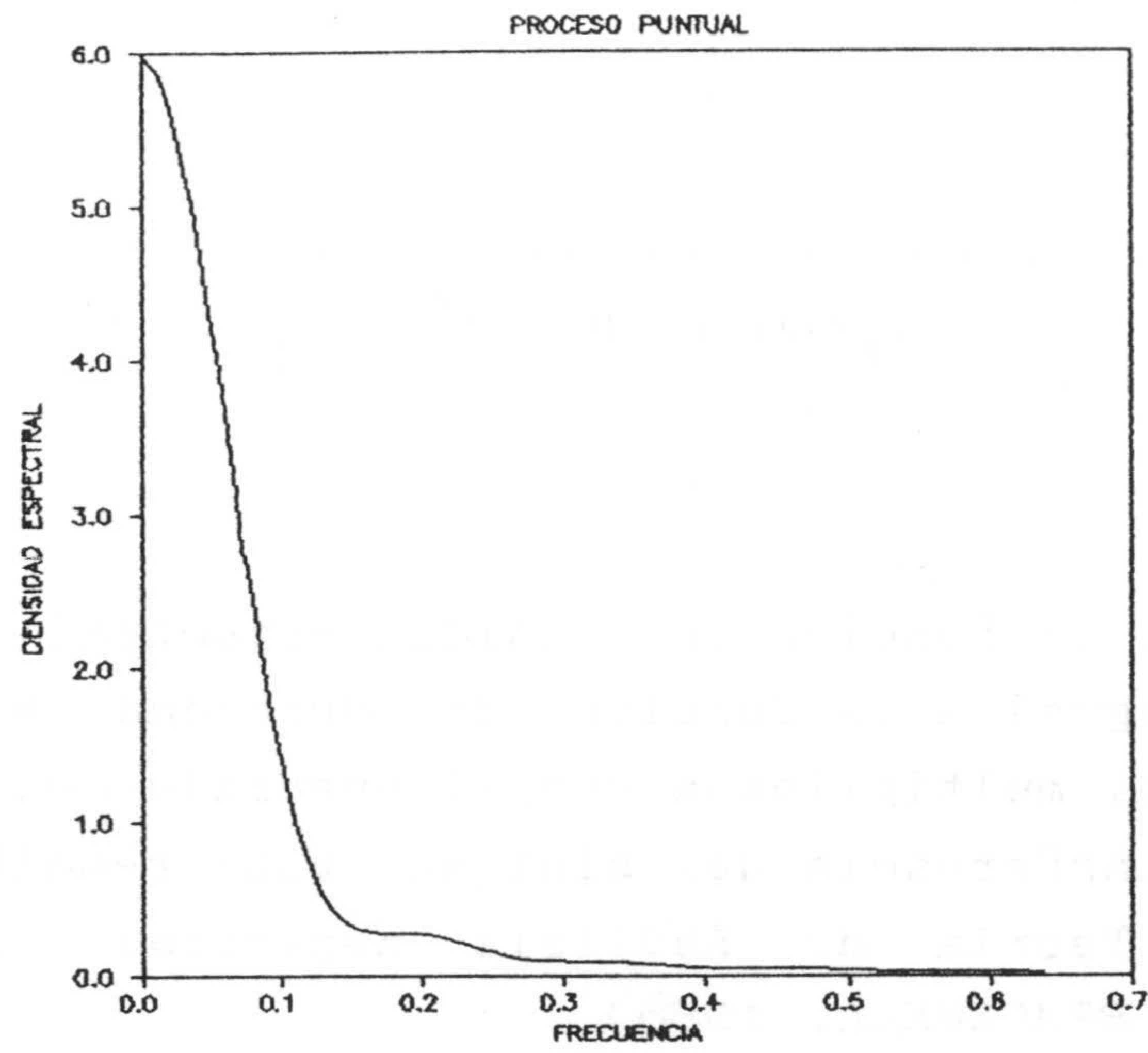


Figura 4.6a. Función de densidad espectral puntual.

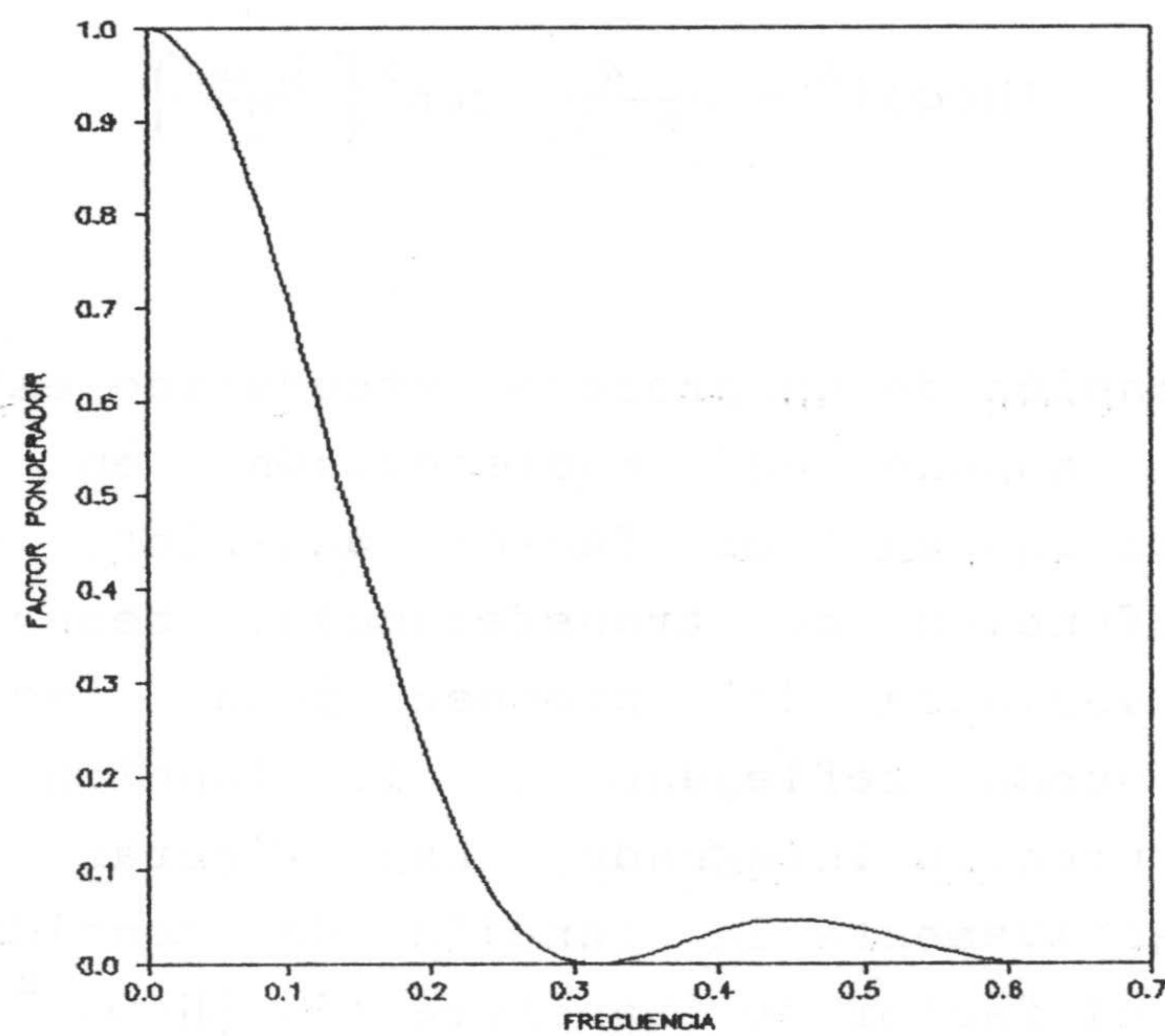


Figura 4.6b. Factor de transferencia del proceso de valores medios sobre un segmento.

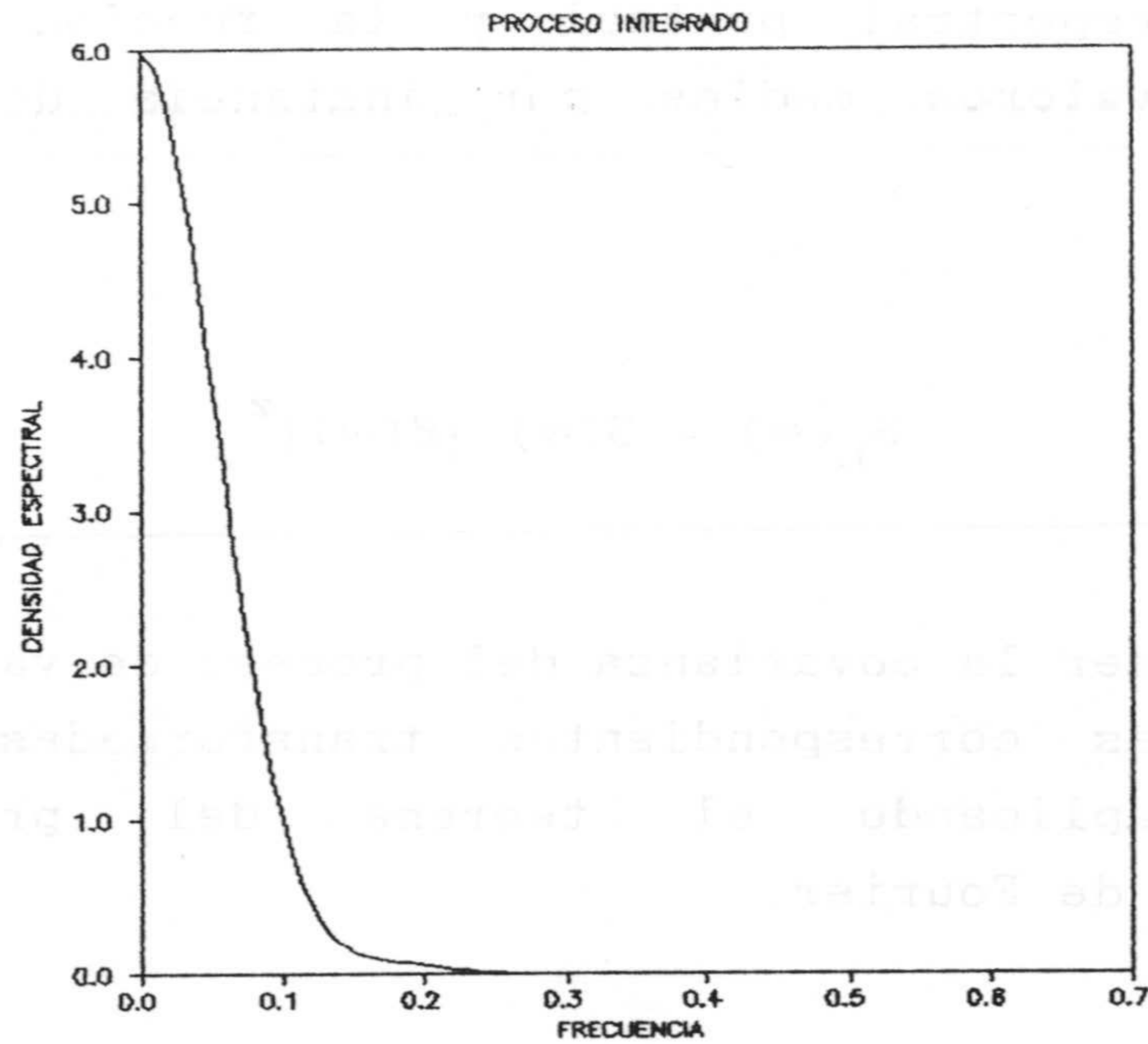


Figura 4.6c. Densidad espectral del proceso integrado.

Comparando las figuras 4.6a y 4.6c se puede observar como el proceso integrado o de valores medios supone un recorte en la banda de frecuencias del sistema de modo que la aportación de las frecuencias más altas llega a desaparecer tomando más importancia relativa las frecuencias más bajas lo que es un reflejo del decremento de la variabilidad del proceso. De la fórmula obtenida para la función de transferencia se deduce que para el origen de frecuencias la función de transferencia vale uno con lo que no hay una reducción en la función de densidad espectral; pero a medida que la frecuencia aumenta, el factor de transferencia toma un valor menor a uno lo que supone una reducción de la densidad espectral de modo que por otra parte es también menor cuanto mayor sea la longitud del segmento  $L$ .

Retomando la relación fundamental que liga las funciones



de densidad espectral puntual y la función de densidad espectral de valores medios por instancia del factor de transferencia:

$$S_L(\omega) = S(\omega) |H(\omega)|^2$$

se puede obtener la covarianza del proceso de valores medios calculando las correspondientes transformadas de Fourier inversas y aplicando el teorema del producto para transformadas de Fourier:

$$C_L(h) = C(h) * \rho(h)$$

siendo  $\rho(h)$  la transformada inversa de Fourier del factor de transferencia:

$$\rho(h) \longleftrightarrow |H(\omega)|^2$$

esta nueva función se conoce en Análisis Espectral de procesos estocásticos como covarianza determinística de la respuesta impulsiva  $h(t)$  (PAPOULIS, 1984) y se puede calcular por otra parte como la convolución de  $h(t)$  por su función transpuesta  $h(-t)$ . Para el caso de estudio de valores medios sobre un segmento, la respuesta impulsiva se conoce y es una función pulso de anchura  $L$  (figura 4.5). La convolución de dos funciones pulso de anchura  $L$  es igual a una función triángulo de anchura  $2L$  (figura 4.7) y

$$\rho(s) = h(s) * h(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s+t) h(t) dt = \frac{1}{L} \left( 1 - \frac{|s|}{L} \right)$$

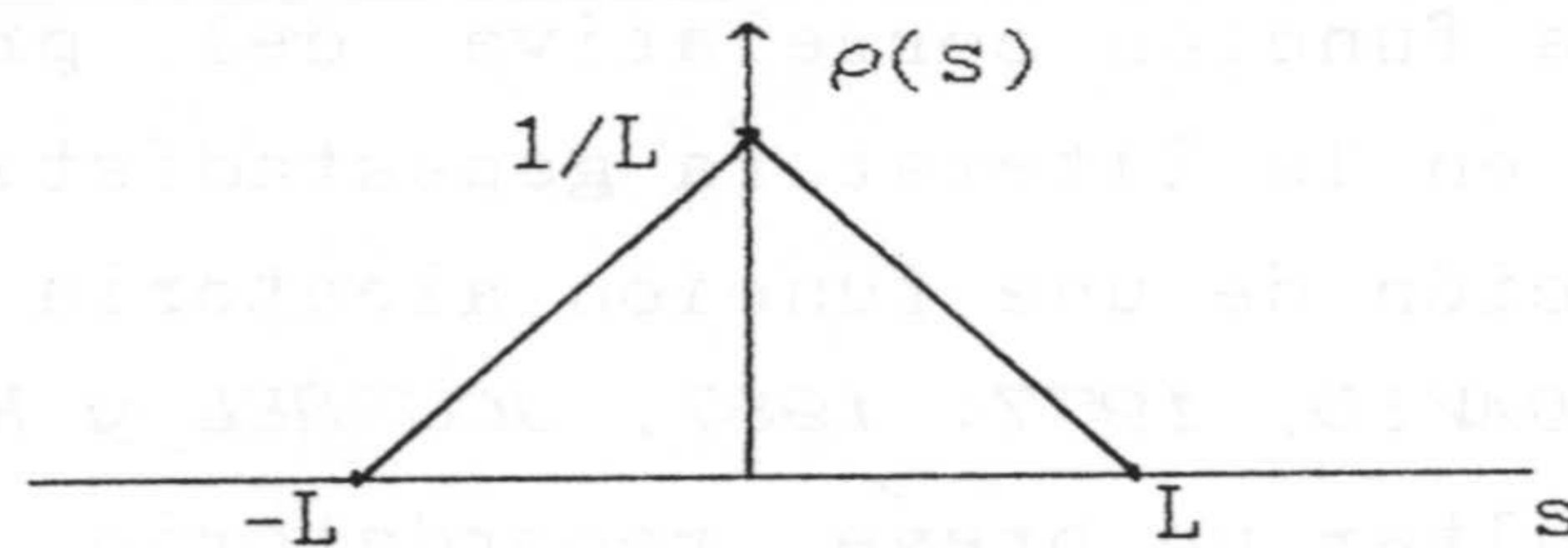


Figura 4.7. Covarianza determinística del proceso de valores medios sobre un segmento.

Con las últimas indicaciones se puede expresar la función de covarianza del proceso integrado del modo siguiente (PAPOULIS, 1984):

$$C_L(h) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( 1 - \frac{|x|}{L} \right) C(h-x) dx$$

obteniéndose la varianza del proceso para  $h = 0$ :

$$C_L(0) = \sigma_L^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( 1 - \frac{|x|}{L} \right) C(x) dx$$

A partir de esta última fórmula he calculado la



evolución de la varianza del proceso integrado en función de la longitud del segmento L para los modelos de covarianza esférico, triangular y exponencial. Las expresiones analíticas se recogen en la tabla IV.2 y en las figuras 4.8a a 4.8c se representa dichas relaciones de modo gráfico para una longitud de correlación dada de 50 unidades y para los modelos de covarianza anteriormente mencionados. Estos resultados de la función correlativa del proceso integrado son ya clásicos en la literatura geoestadística y se conocen como regularización de una función aleatoria estacionaria de segundo orden (DAVID, 1977, 1987; JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978) pudiéndose consultar un breve recordatorio en el apartado 2.7.

En resumen, conocida la función de covarianza de la función aleatoria a simular es posible conocer su función de densidad espectral la cual al multiplicarla por el factor de transferencia permite conocer la función de densidad espectral del proceso integrado y por consiguiente se puede efectuar la simulación con el auxilio de cualquier generador de tipo espectral.

Covarianza	$\sigma_L^2$	
Esferica	$1 - \frac{1}{2} \frac{L}{a} + \frac{1}{20} \left( \frac{L}{a} \right)^3$	$L \leq a$
	$\frac{a}{L} \left( \frac{3}{4} - \frac{a}{5L} \right)$	$L > a$
Triangular	$1 - \frac{L}{3a}$	$L \leq a$
	$\frac{a}{L} \left( 1 - \frac{a}{3L} \right)$	$L > a$
Exponencial	$\frac{2a}{L} \left[ 1 + \frac{a}{L} \left( e^{-L/a} - 1 \right) \right]$	$\forall a$

Tabla VI.2. Varianza del proceso integrado.

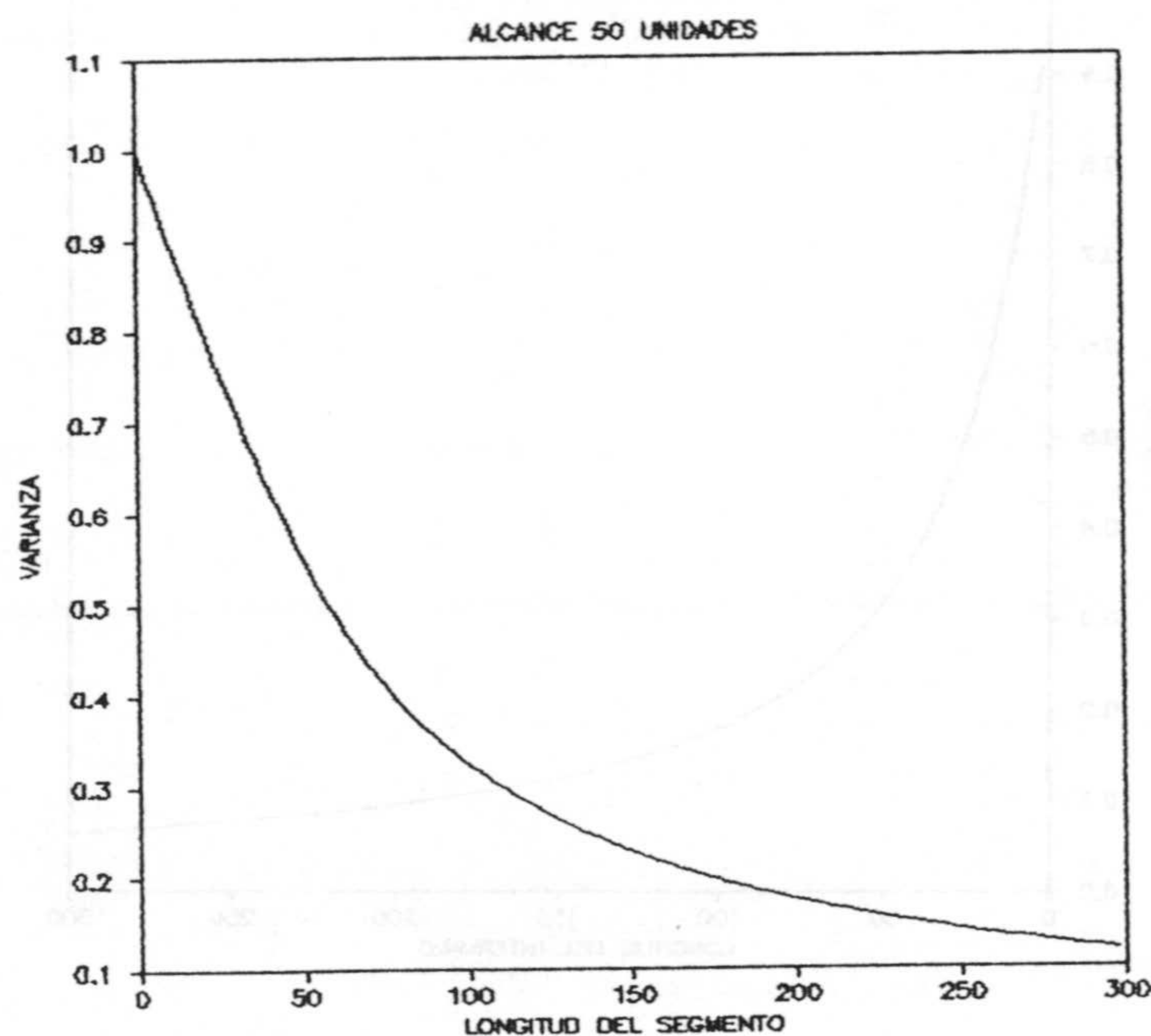


Figura 4.8a. Varianza del proceso integrado de una función aleatoria con covarianza esférica.



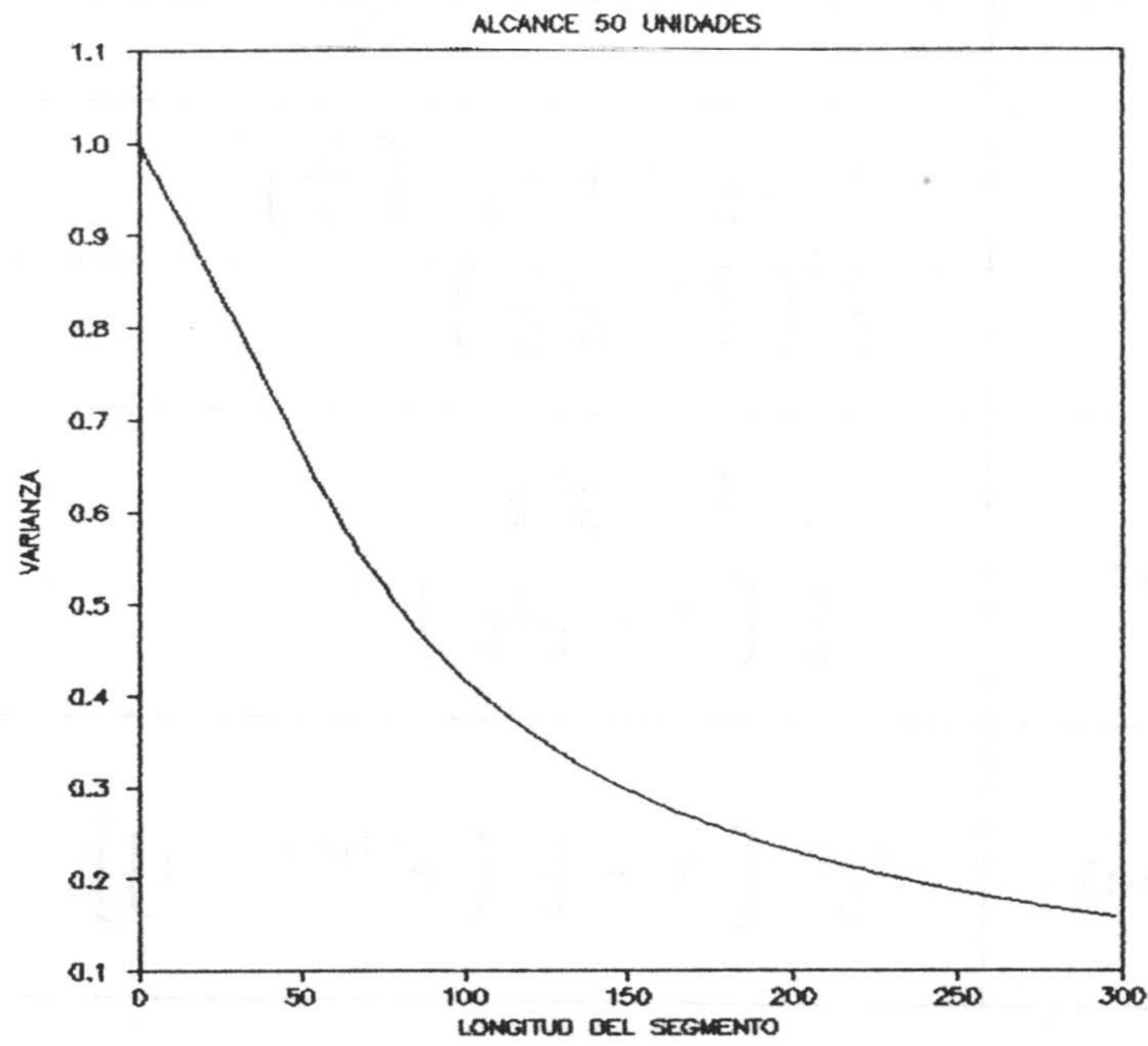


Figura 4.8b. Varianza del proceso integrado de una función aleatoria con covarianza triangular.

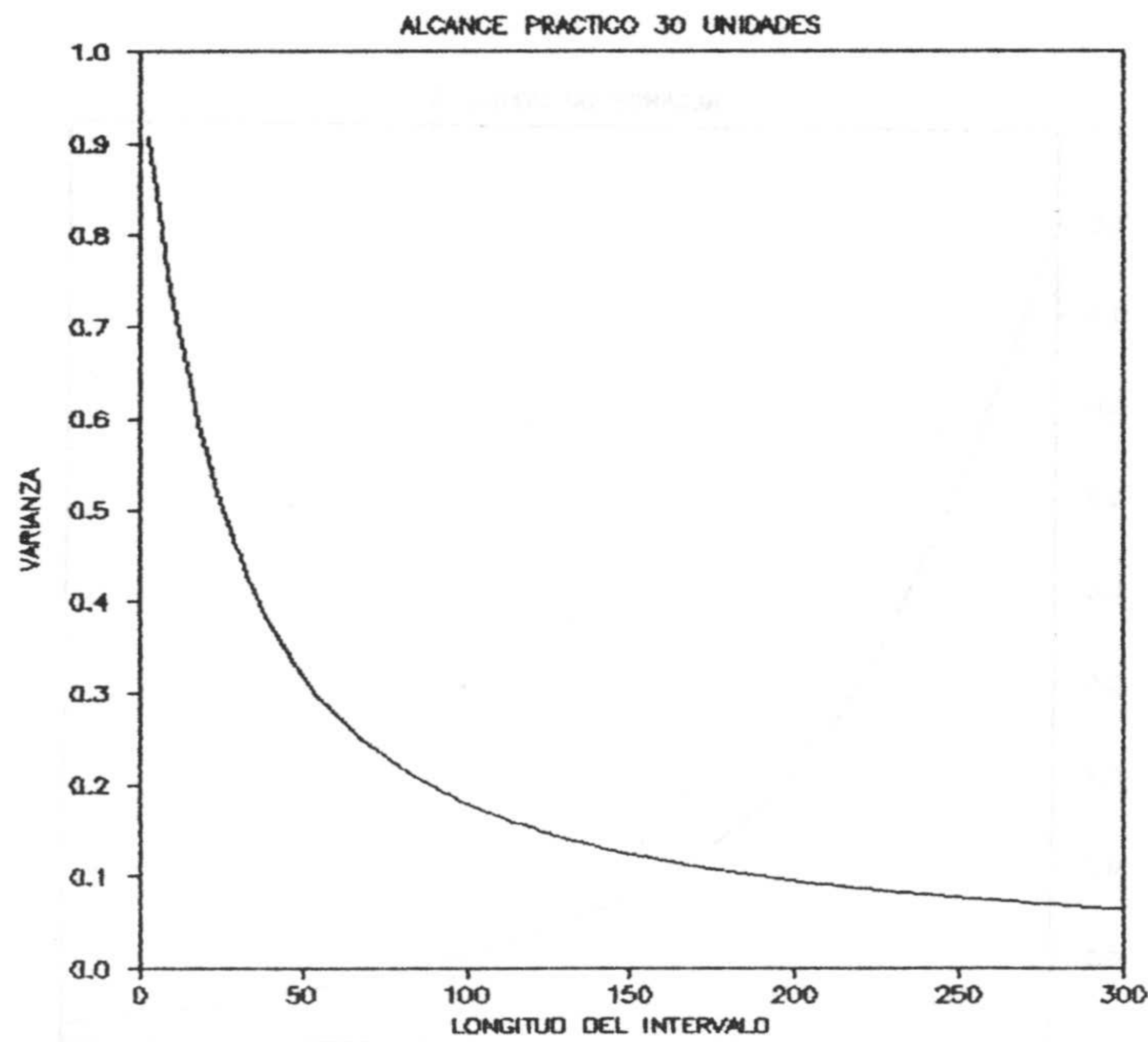


Figura 4.8c. Varianza del proceso integrado de una función aleatoria con covarianza exponencial.

En la práctica puede resultar de especial interés el disponer de una simulación conjunta de punto y de bloque, por ejemplo para el condicionamiento de la simulación sobre soporte de bloque a valores puntuales es necesario disponer de una simulación puntual en las localizaciones experimentales coherente con la simulación sobre soporte de bloque, es decir, no puede ser independiente (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978). Este hecho me ha motivado a desarrollar la técnica de simulación conjunta punto-bloque por el método espectral de simulación sobre soporte de bloque. Para ello basta con considerar de una parte la relación clásica en Teoría de Análisis espectral de procesos estocásticos para el sistema lineal que se está estudiando es este apartado (PAPOULIS, 1984):

$$S_L(\omega) = S_{PL}(\omega) H(\omega)$$

donde:

$S_{PL}(\omega)$  : función de densidad espectral cruzada entre el proceso puntual y el proceso de valores medios en el segmento.

que se puede transformar fácilmente:

$$S_{PL}(\omega) = \frac{S_L(\omega)}{H(\omega)} = \frac{S(\omega) |H(\omega)|^2}{H(\omega)} = S(\omega) H(\omega)$$

y de otra parte por el propio procedimiento de simulación de la integral de Fourier se tienen las relaciones ya conocidas

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| \cos\varphi - |Z(\omega)| \operatorname{sen}\varphi$$



$$Z_L(\omega) = |Z_L(\omega)| \cos\vartheta - |Z_L(\omega)| \operatorname{sen}\vartheta$$

donde  $\varphi$  y  $\vartheta$  son las fase aleatorias que se añaden respectivamente al proceso puntual y al proceso de valores integrados. Por el teorema de la correlación cruzada se sabe que (WEAVER, 1989):

$$S_{PL}(\omega) = Z(\omega) Z_L^*(\omega)$$

donde:

\* : complejo conjugado.

Comparando las dos expresiones obtenidas para la función de densidad espectral cruzada de la función aleatoria puntual y la función aleatoria integrada se puede poner:

$$Z(\omega) Z_L^*(\omega) = S_L(\omega) H(\omega)$$

o de modo equivalente:

$$\begin{aligned} |Z(\omega)| |Z_L(\omega)| \cos(\varphi - \vartheta) - i |Z(\omega)| |Z_L(\omega)| \operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) = \\ |Z(\omega)|^2 H(\omega) \end{aligned}$$

llegándose a:

$$|Z_L(\omega)| e^{-i(\varphi - \vartheta)} = |Z(\omega)| H(\omega)$$

de modo que para no contradecir la relación básica entre la función de densidad espectral del proceso puntual y la función de densidad espectral de los valores medios se ha de cumplir que:

$$e^{-i(\varphi - \vartheta)} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\varphi - \vartheta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \vartheta$$

Es decir, para simular por el método espectral de la integral de Fourier valores medios sobre soporte no puntual y valores puntuales coherentes desde un punto de vista probabilístico con los anteriores basta con utilizar el mismo espectro de fase, aleatorio, en ambos casos.

Para chequeo de la metodología se ha simulado una serie de 512 valores equiespaciados a distancia de 5 unidades de una función aleatoria puntual con covarianza esférica de alcance 20 unidades y meseta uno. Asimismo se ha simulado 512 valores medios del proceso que resulta al integrar la función aleatoria puntual en segmentos de longitud 5 unidades. Es decir, se simulan valores medios de segmentos y valores puntuales en los puntos medios de dichos segmentos mediante la metodología anterior. La figura 4.9a muestra la covarianza teóricas y simuladas de los dos procesos en una única realización y en la figura 4.9b se representa la covarianza cruzada teórica y simulada en esa misma realización.



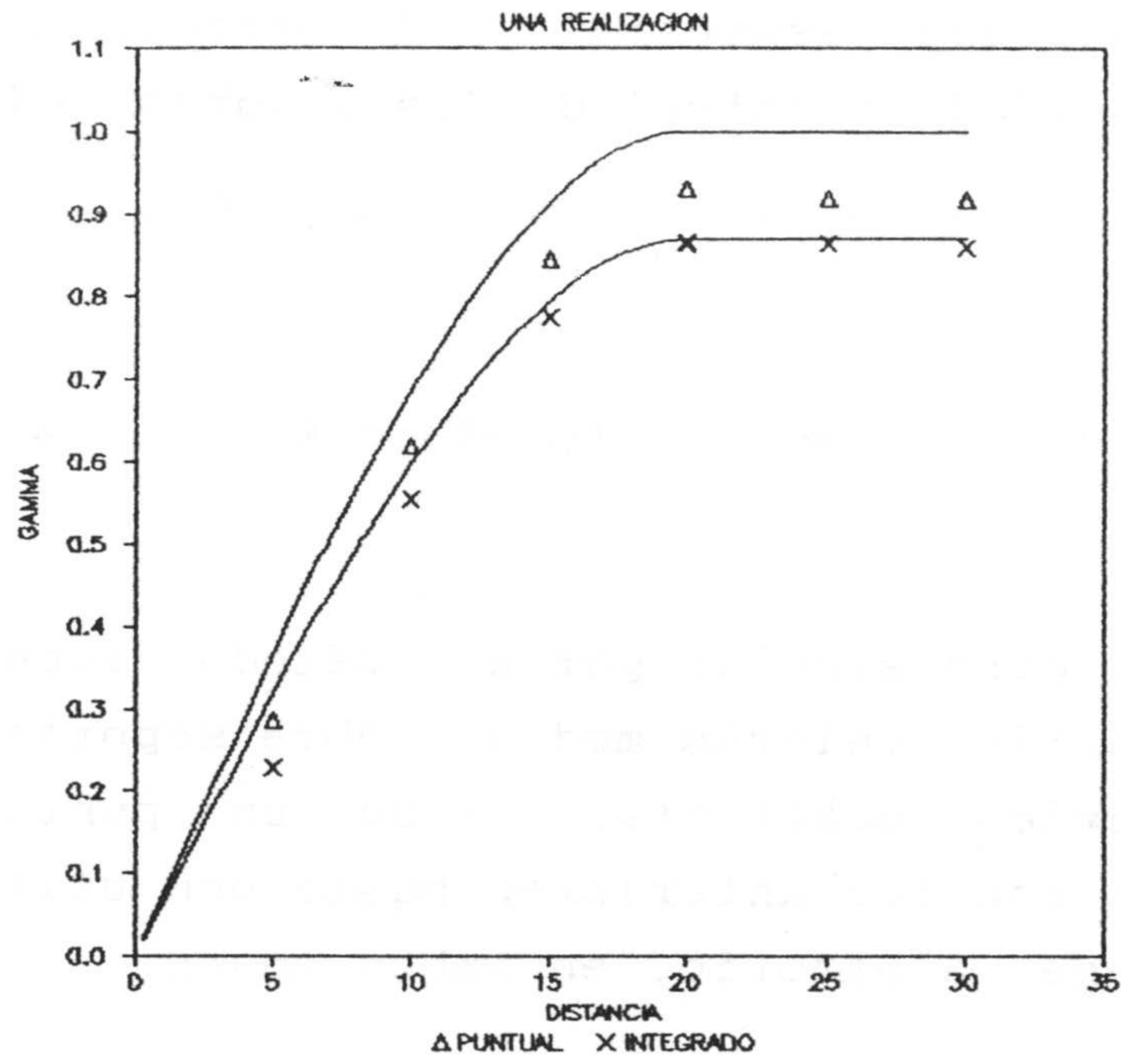


Figura 4.9a. Variograma teorico y simulado del proceso puntual y del proceso de valores medios.

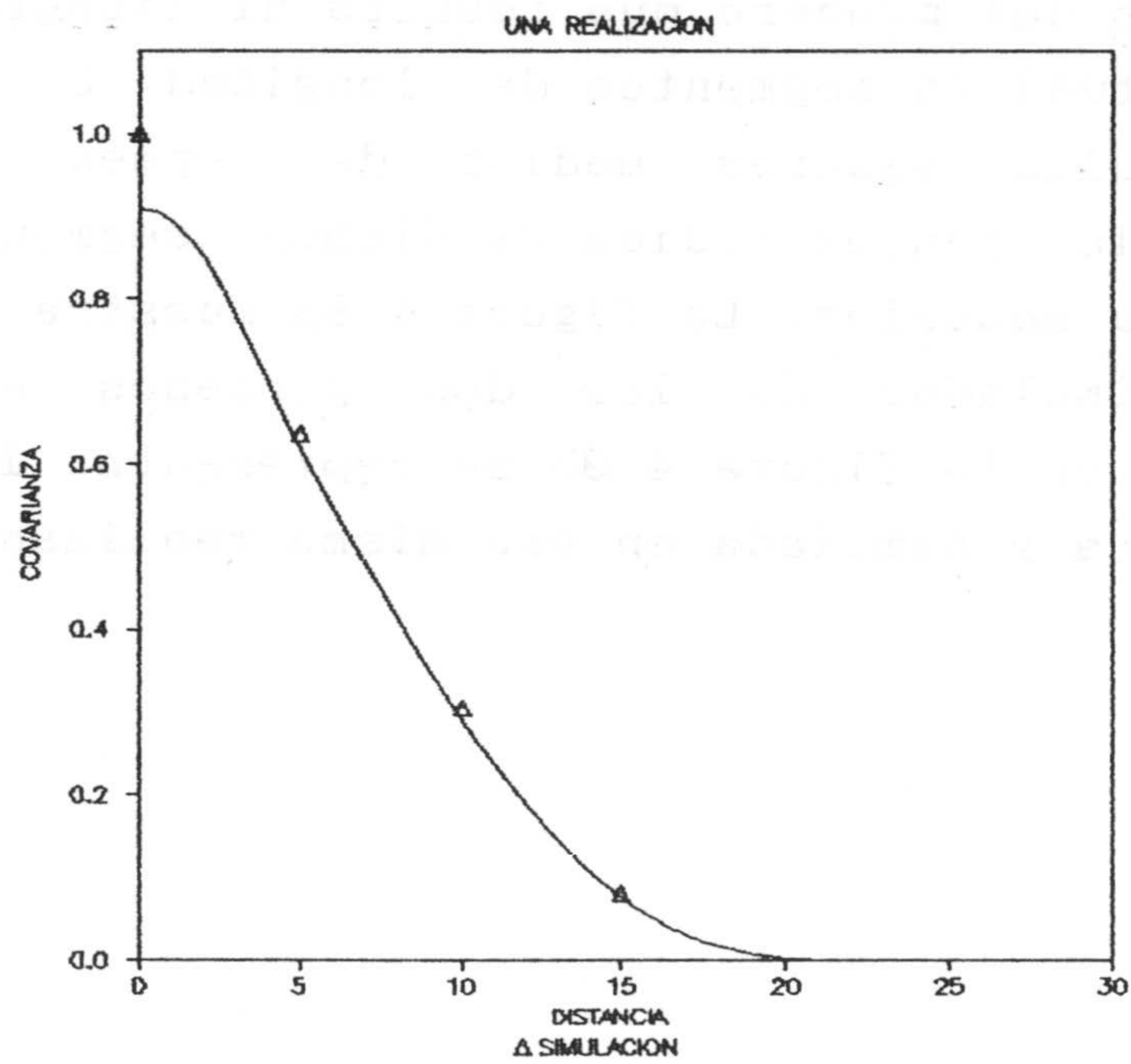


Figura 4.9b. Covarianza cruzada teórica y simulada entre el proceso puntual y el proceso integrado.

Como se puede observar en la figura 4.9b la covarianza cruzada de los datos simulados reproducen los valores teóricos excepto para  $h$  igual a cero. Este valor es el coeficiente de correlación entre la función aleatoria puntual y la función aleatoria de valores medios. El valor simulado vale uno mientras el valor teórico es ligeramente inferior. A fin de reproducir el valor teórico del coeficiente de correlación propongo una ligera modificación al último método que utiliza la misma fase aleatoria para la simulación puntual y de valores medios. La metodología consiste en considerar que la localización del valor puntual que se quiere simular coherentemente con la simulación sobre soporte no puntual es aleatoria por lo que se ha de efectuar una pequeña perturbación en la fase debido a este hecho; más concretamente, teniendo en cuenta el teorema de desplazamiento en el tiempo para transformadas de Fourier:

$$Z(t) \longleftrightarrow Z(\omega)$$

$$Z(t-a) \longleftrightarrow Z(\omega) e^{-2\pi i \omega a}$$

donde  $a$  es el desplazamiento aleatorio entre cero y la longitud del segmento  $L$ .

De este modo el proceso puntual se genera con la misma fase del proceso integrado más la modificación anterior expresada por la función exponencial.

La figura 4.10 se representa la función de covarianza teórica y simulada observándose como esta nueva metodología reproduce el coeficiente de correlación entre las dos variables y para distancias distintas de cero hay diferencias entre  $C(h)$  y  $C(-h)$  debido a que aunque cada dato tiene una disposición aleatoria dentro del segmento para el cálculo de su covarianza cruzada se le ha asignado al punto central.



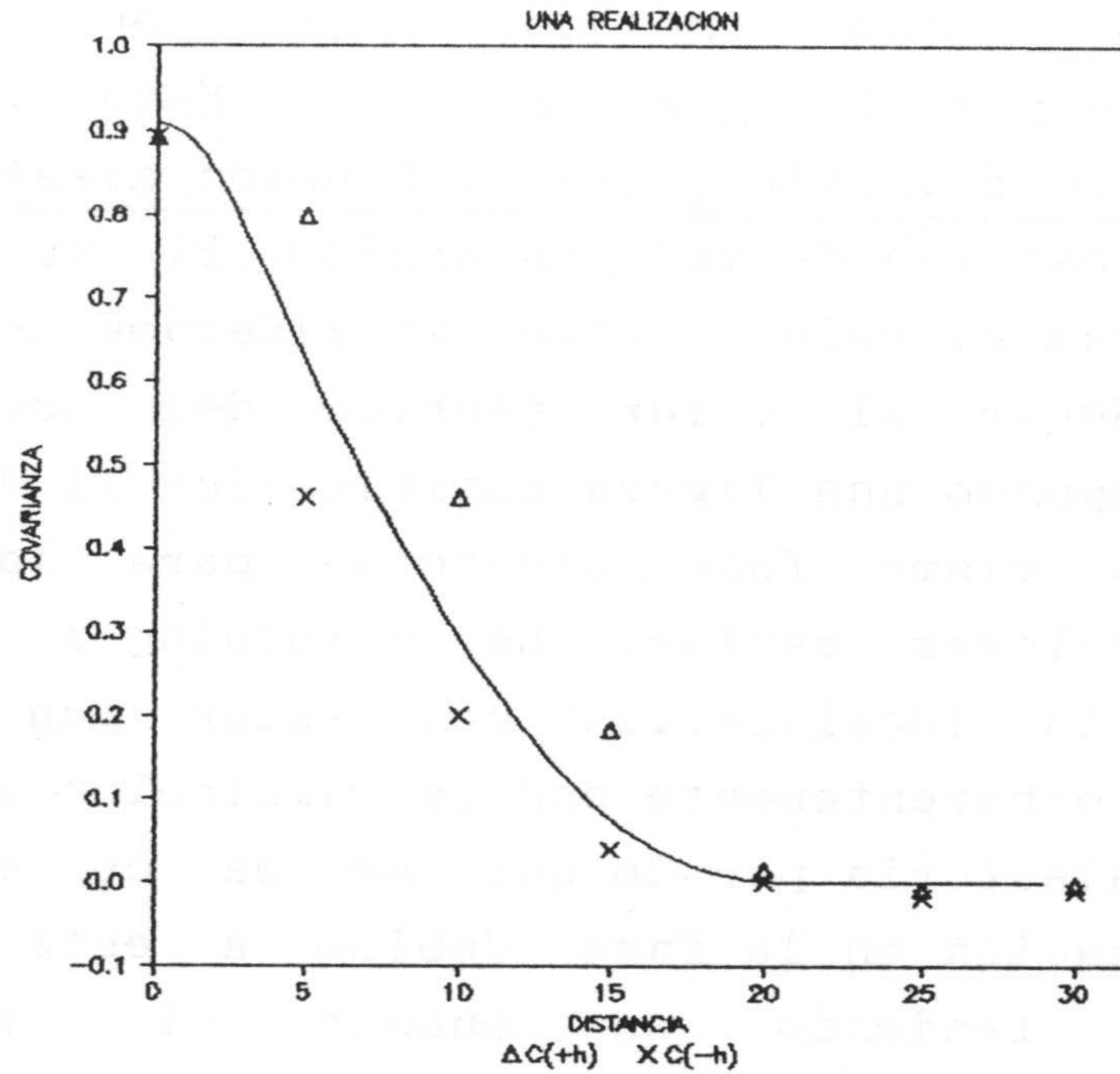


Figura 4.10. Covarianza teórica y simulada entre el proceso puntual y el proceso integrado con el método de perturbación de la fase.

Para la simulación de valores medios sobre un área  $A$  o sobre un volumen  $V$  poligonales, se pueden aplicar los resultados obtenidos para el caso unidimensional; en particular la relación fundamental que liga la función de densidad espectral de la función aleatoria de valores medios y la función de densidad espectral del proceso puntual es la expresión ya conocida:

$$S_A(\underline{\omega}) = |H(\underline{\omega})|^2 S(\underline{\omega})$$

donde:

$\underline{\omega}$  : vector en el dominio de la frecuencia.

donde el factor de transferencia vale para geometría rectangular en 2D o paralelepédica en 3D (CHRISTAKOS, 1987):

$$H(\underline{\omega}) = 2^n \prod_{i=1}^n \frac{\sin \left[ \frac{d_i \omega_i}{2} \right]}{d_i \omega_i}$$

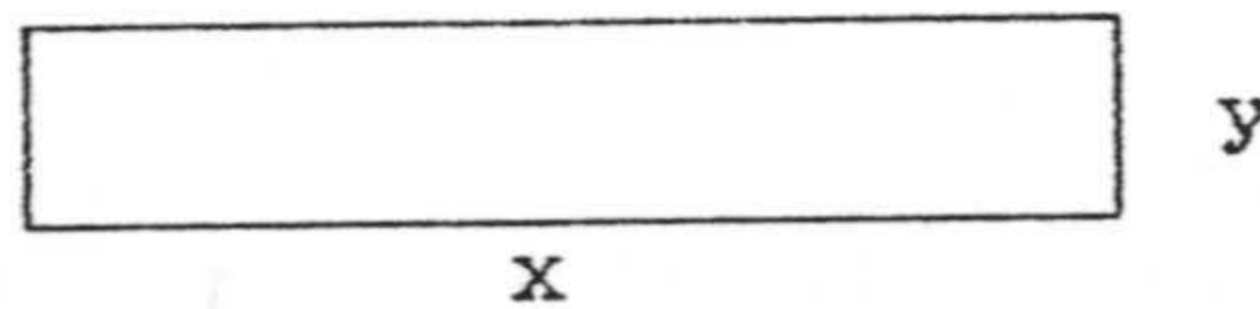
donde:

$n$  : dimensiones del soporte.

$\underline{\omega}$ :  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

$\underline{d}$ :  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Así por ejemplo para la simulación de valores medios areales en un rectángulo:



$$S_A(\omega_1, \omega_2) = \frac{16}{x^2 y^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \sin^2 \left[ \frac{\omega_1 x}{2} \right] \sin^2 \left[ \frac{\omega_2 y}{2} \right] S(\omega_1, \omega_2)$$

con  $\omega_1 \neq 0$  y  $\omega_2 \neq 0$ .

$$S_A(0, 0) = S(0, 0)$$

$$S_A(0, \omega_2) = \frac{4}{y^2 \omega_2^2} \sin^2 \left[ \frac{\omega_2 y}{2} \right]$$



$$S_A(\omega_1, \emptyset) = \frac{4}{x^2 \omega_1^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\omega_1 x}{2} \right)$$

Relaciones equivalentes se podrían establecer para la simulación de valores medios en un paralelepípedo. En cualquier caso de las relaciones anteriores se desprende que la covarianza para valores medios en un área poligonal o en un bloque paralelepipedico es anisótropa aunque la covarianza del proceso puntual sea isotropa. La anisotropía surge de la forma geométrica del soporte en el momento en que esta no es equidimensional. Así, en el caso unidimensional sólo en el caso de considerar valores medios en un círculo el factor de transferencia es isotropo y he calculado que vale:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty h(s) J_0(\omega s) s ds = \frac{1}{2\pi^2 R^2} \int_0^R J_0(\omega s) s ds =$$

$$\frac{1}{2\pi^2 \omega} J_1(\omega)$$

donde:

$R = 1$  : radio del círculo.

$J_\nu$  : función de Bessel de primera clase y orden  $\nu$ .

donde se ha aplicado la transformada de Hankel y resultados de la integración de funciones de Bessel (GRADSHTEYN y RYZHIK, 1965).

Cuando el área es cuadrada existe anisotropía entre las direcciones diagonales y el centro de las aristas pero en general esta anisotropía es despreciable. En cambio cuando una de las dimensiones del soporte es mucho mayor a la otra,



esto es al considerar áreas rectangulares aparece una anisotropía que es máximo entre las direcciones de los lados mayor y menor del rectángulo.

Un estudio empírico de la anisotropía de valores medios para áreas rectangulares calculando la covarianza según las direcciones de los lados mayor y menor del rectángulo para diferentes relaciones de proporcionalidad entre el lado mayor y el menor así como para diferentes relaciones de proporcionalidad entre el lado mayor y la longitud de correlación de la función aleatoria puntual lleva a las siguientes conclusiones:

1). La anisotropía aparece por las diferencias con respecto a la equidimensionalidad pero, a efectos prácticos, sólo comienza a manifestarse cuando la relación de la longitud del lado mayor con respecto al alcance llega a ser significativa, del orden de la mitad o mayor. Así por ejemplo en la figura 4.11a el lado menor del rectángulo es una sexta parte del lado mayor y sin embargo la anisotropía es despreciable ya que el lado mayor tiene una longitud igual a un cuarto de la longitud de correlación. En cambio en la figura 4.11b aunque el lado mayor del rectángulo es sólo el doble del menor, la anisotropía es más manifiesta ya que su longitud llega a ser la mitad del alcance. En ambos ejemplos la función de covarianza puntual es de tipo esférico.

2). Conforme la anisotropía es más manifiesta el comportamiento de la función variograma en el origen se vuelve más continuo tomando el mismo comportamiento al de un variograma de tipo gaussiano y esto aunque el comportamiento en el origen para el proceso puntual sea de tipo lineal como lo ocurre para el caso del modelo esférico.

3). Asimismo el variograma aumenta su alcance en la dirección del lado mas largo. Estas dos últimas características se pueden apreciar en la figura 4.11c donde el tamaño del lado mayor del rectángulo es el doble a del



lado menor e igual a dos veces la longitud de correlación. En la dirección del lado mayor, el alcance llega a ser el doble al alcance del proceso puntual que es un modelo de variograma esférico isótropo y de alcance 10 unidades.

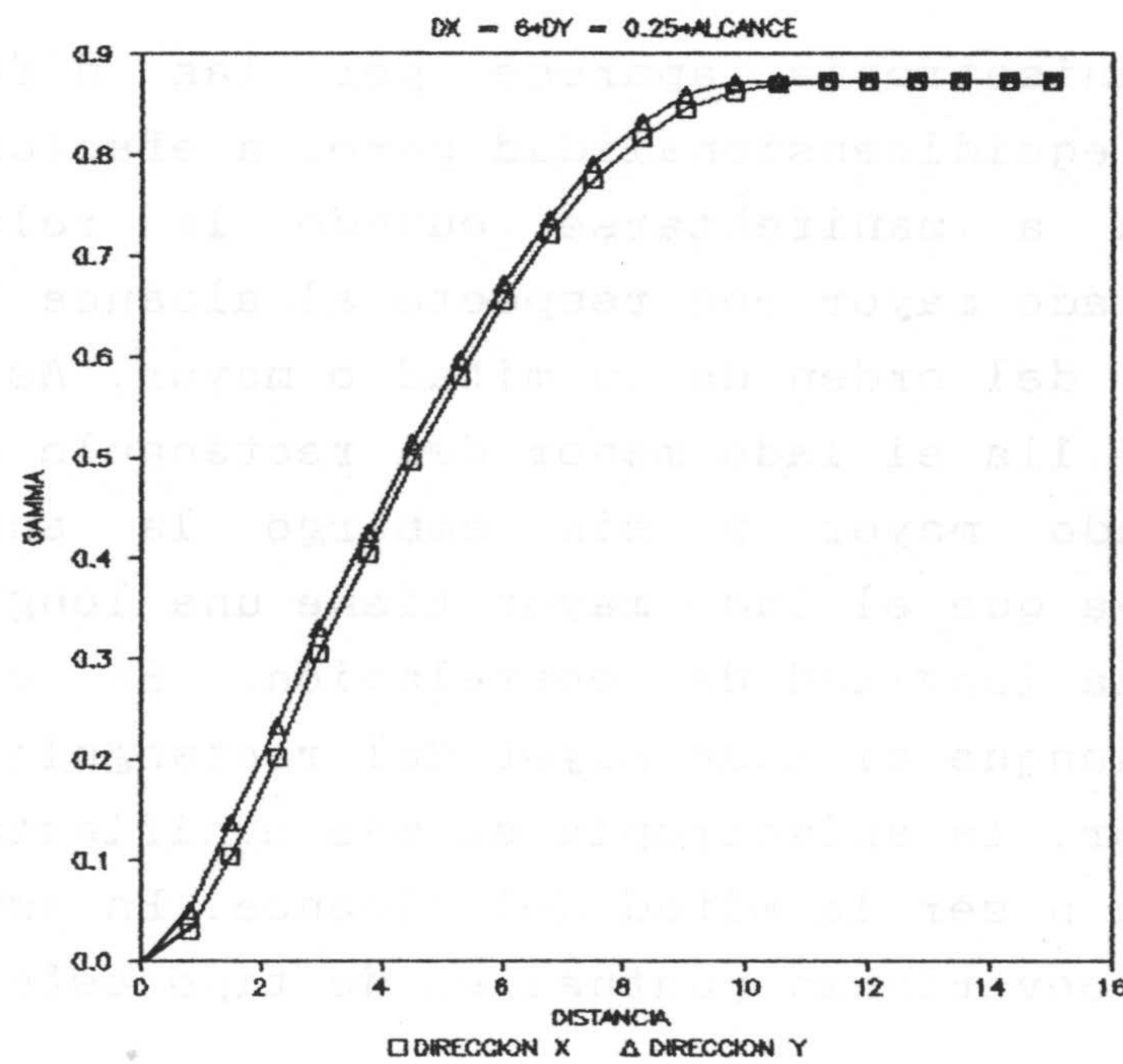


Figura 4.11a. Anisotropía del variograma de valores medios.

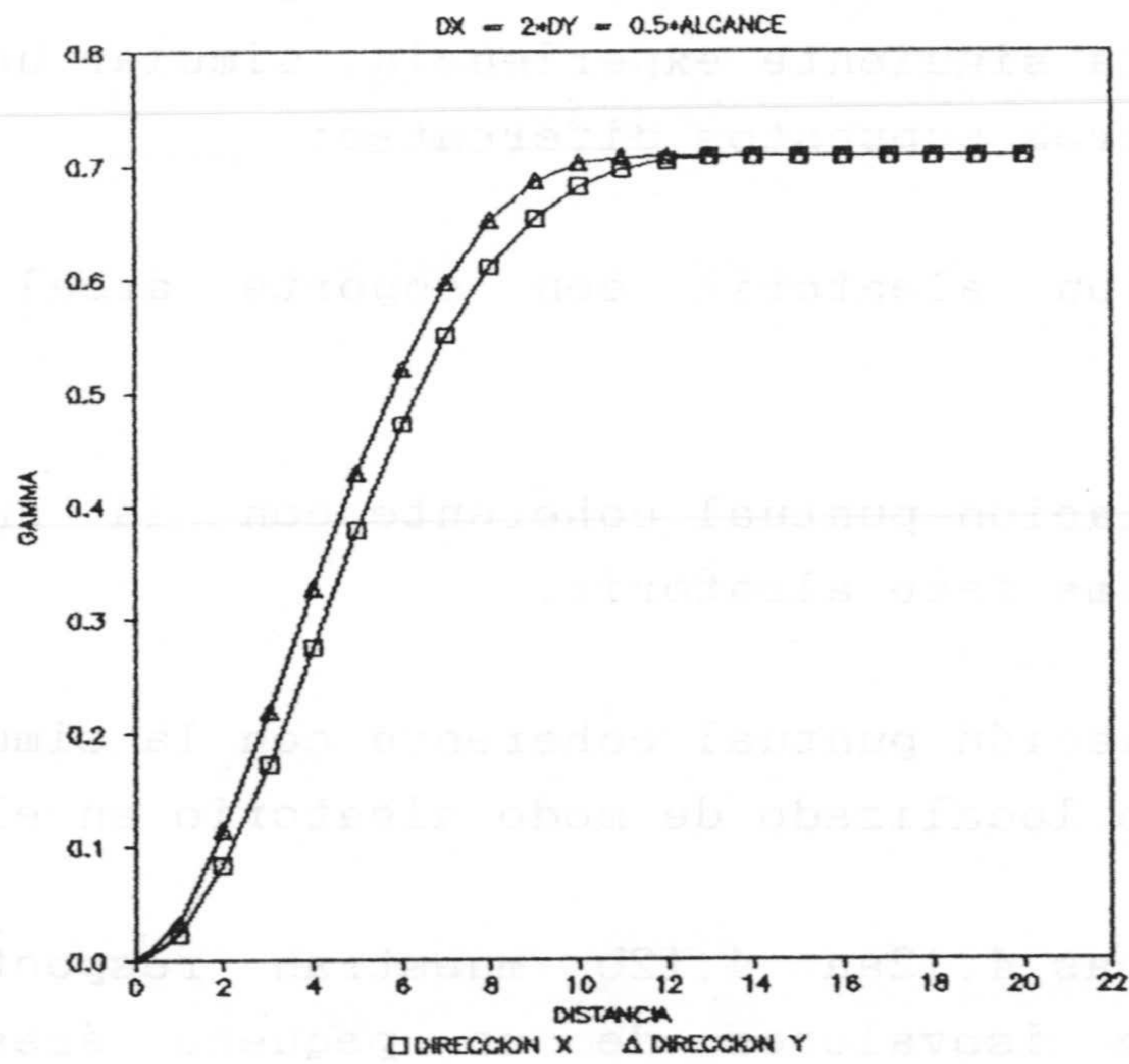


Figura 4.11b. Anisotropía del variograma de valores medios.

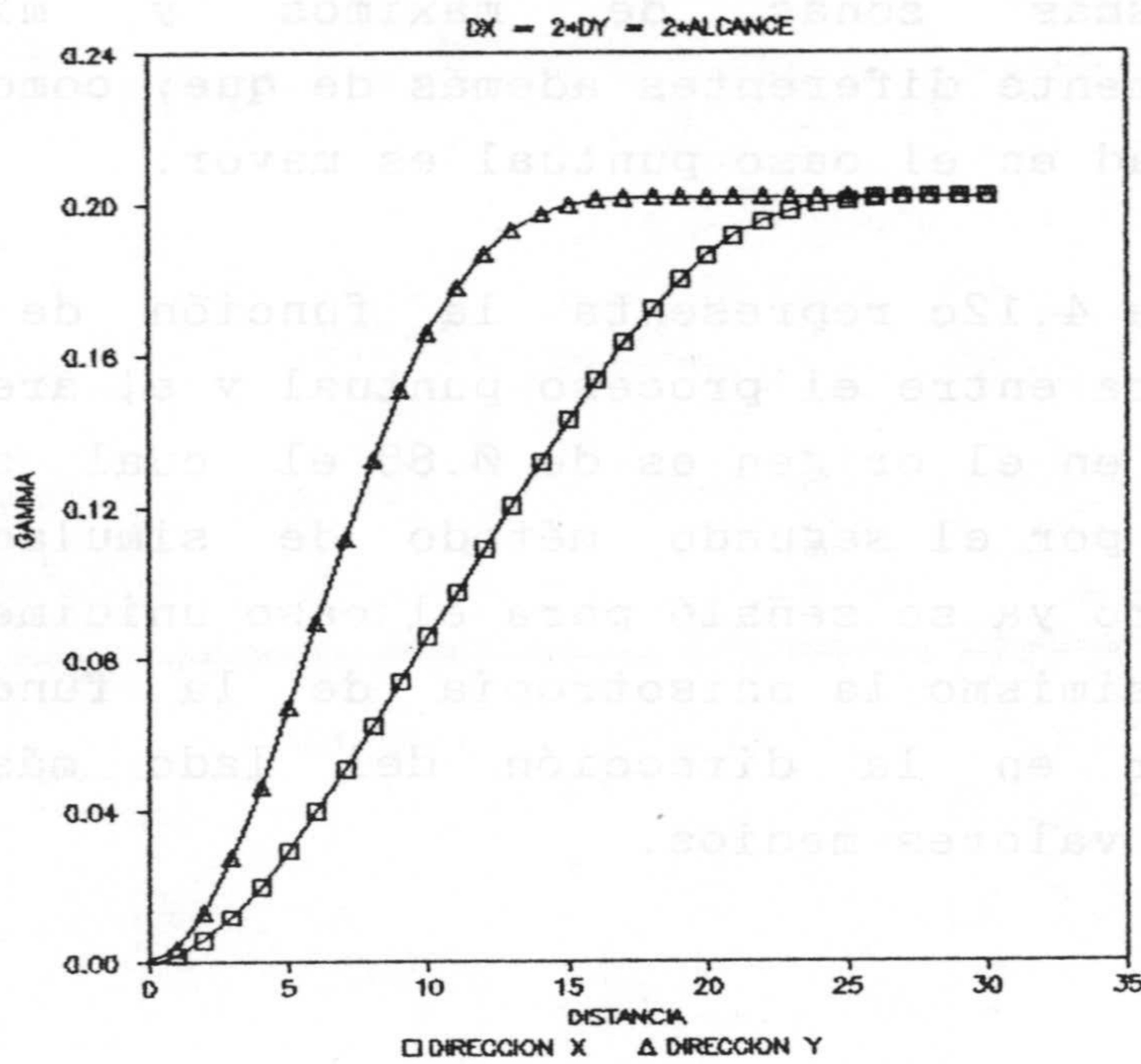


Figura 4.11c. Anisotropía del variograma del proceso de valores medios.



Con objeto de chequear la metodología en dos dimensiones he efectuado la siguiente experiencia, simular una malla de 64 x 64 bajo tres supuestos diferentes:

1). Función aleatoria con soporte areal de 8 x 4 unidades.

2). Simulación puntual coherente con la anterior esto es, con la misma fase aleatoria.

3). Simulación puntual coherente con la simulación areal y con el punto localizado de modo aleatorio en el rectángulo.

Las figuras 4.12aa 4.12b muestran respectivamente la cartografía de isovalores de un pequeño área del campo simulado. La primera y segunda cartografías presentan los mismos rasgos con la diferencia de que en la segunda la dispersión es superior. Comparando la primera con respecto a la tercera se observa como, aunque ambas reproducen a groso modo las mismas zonas de máximos y mínimos, son significativamente diferentes además de que, como es obvio, la variabilidad en el caso puntual es mayor.

La figura 4.12c representa la función de correlación cruzada teórica entre el proceso puntual y el areal. El valor de la función en el origen es de 0.88 el cual se reproduce más fielmente por el segundo método de simulación puntual coherente, como ya se señaló para el caso unidimensional. Es de destacar asimismo la anisotropía de la función con un alcance mayor en la dirección del lado más largo del rectángulo de valores medios.



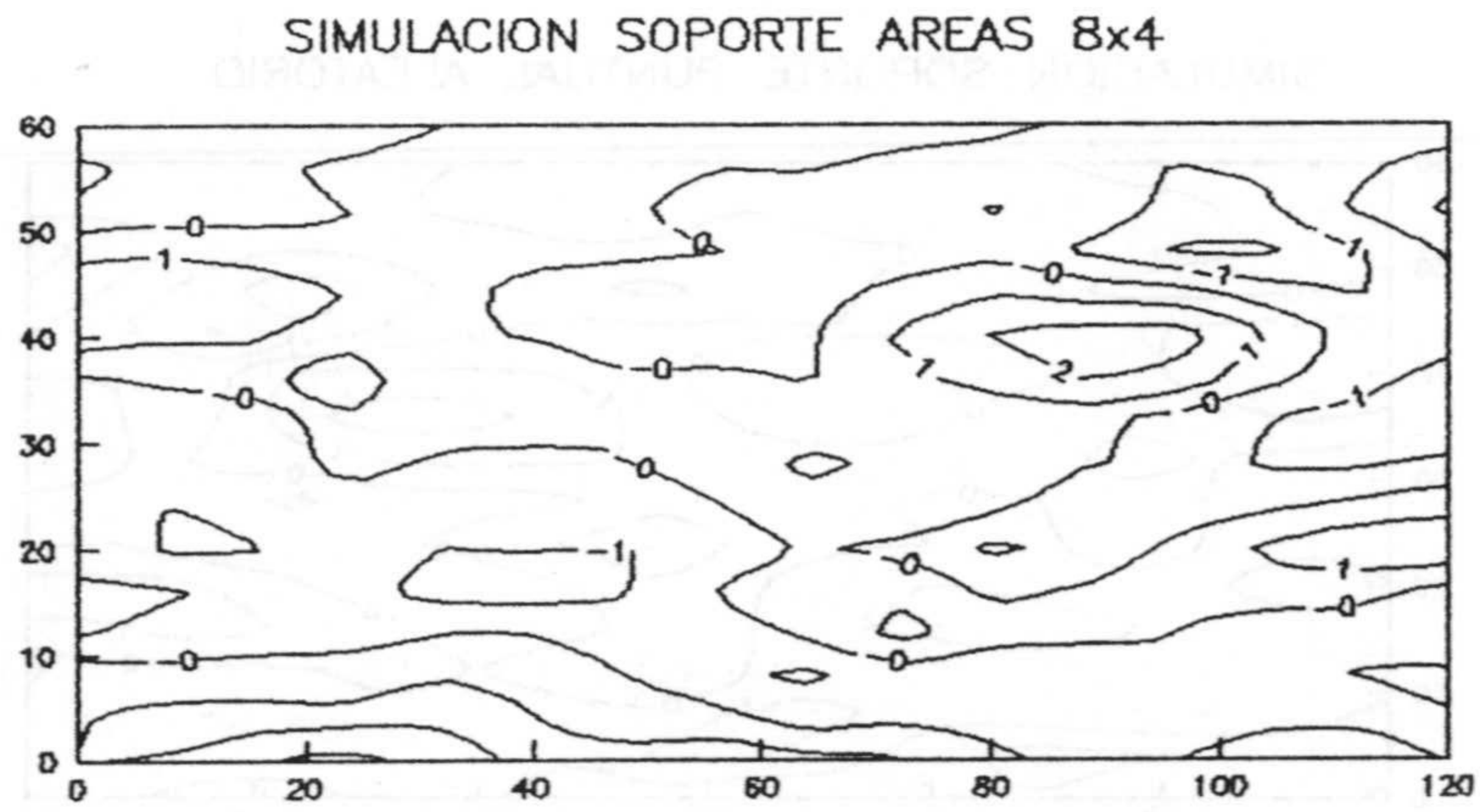


Figura 4.12a. Simulación sobre soporte areal de 8 x 4.

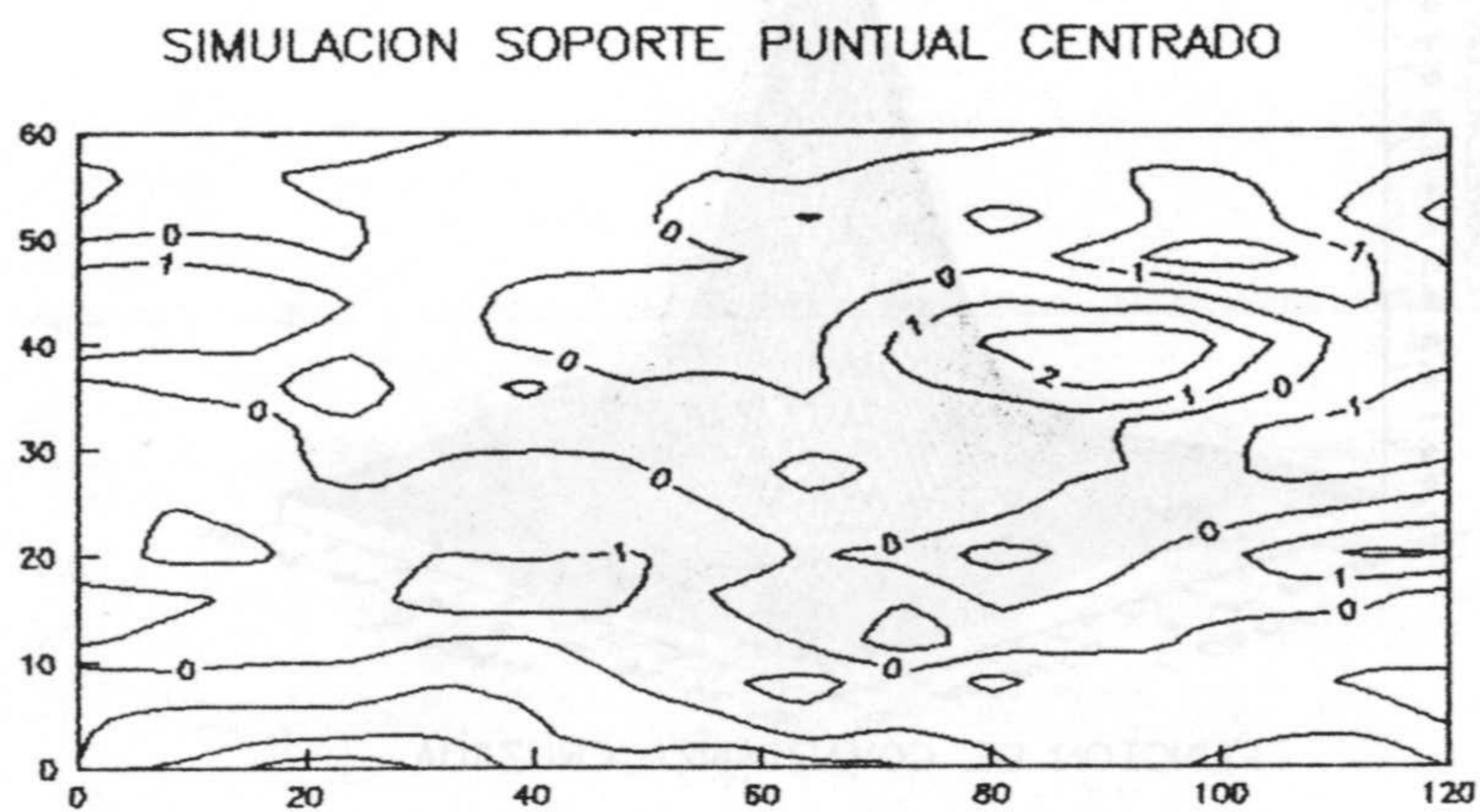


Figura 4.12b. Simulación puntual con la misma fase a la simulación sobre soporte areal.



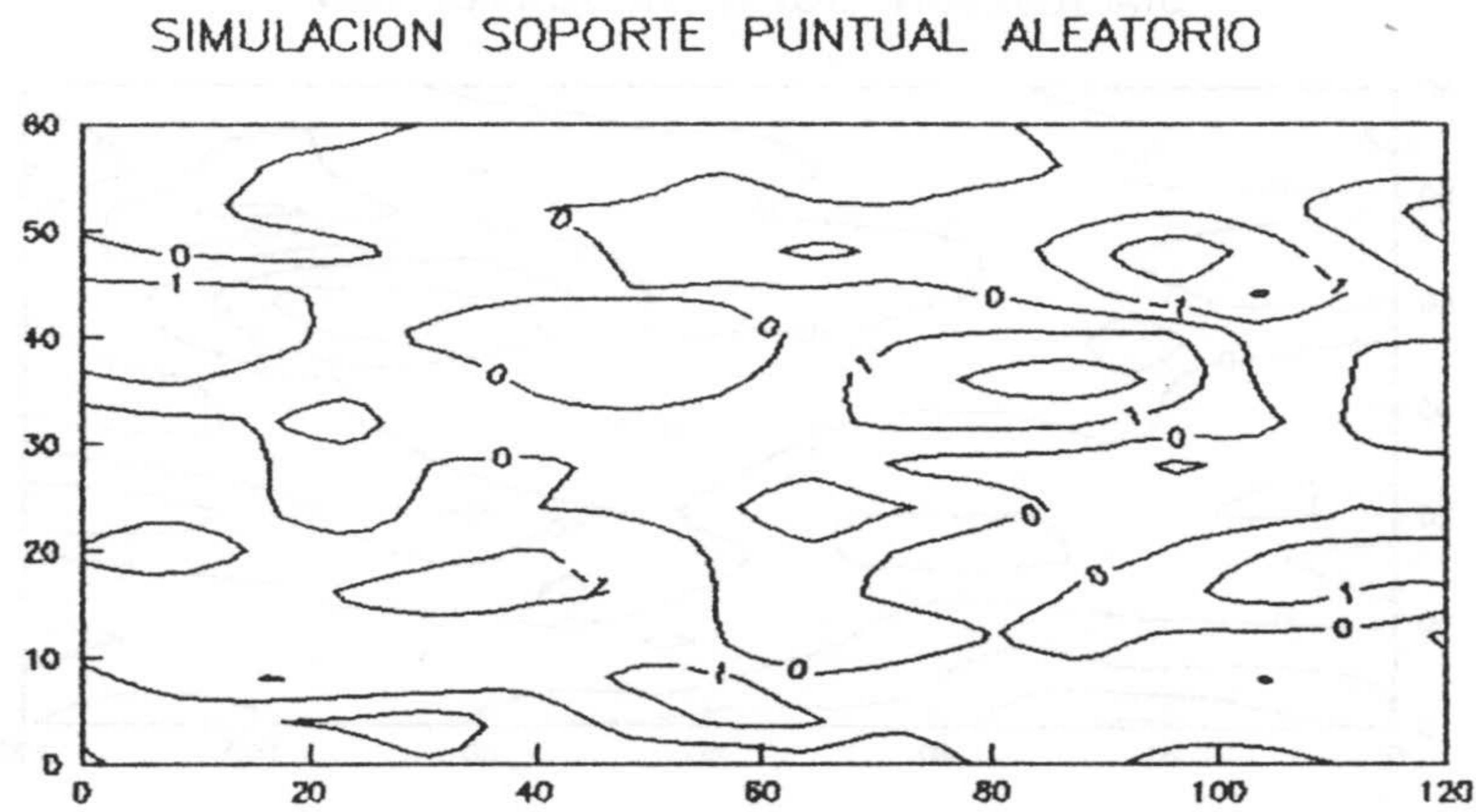


Figura 4.12c. Simulación puntual con una pequeña perturbación en la fase del proceso integrado.

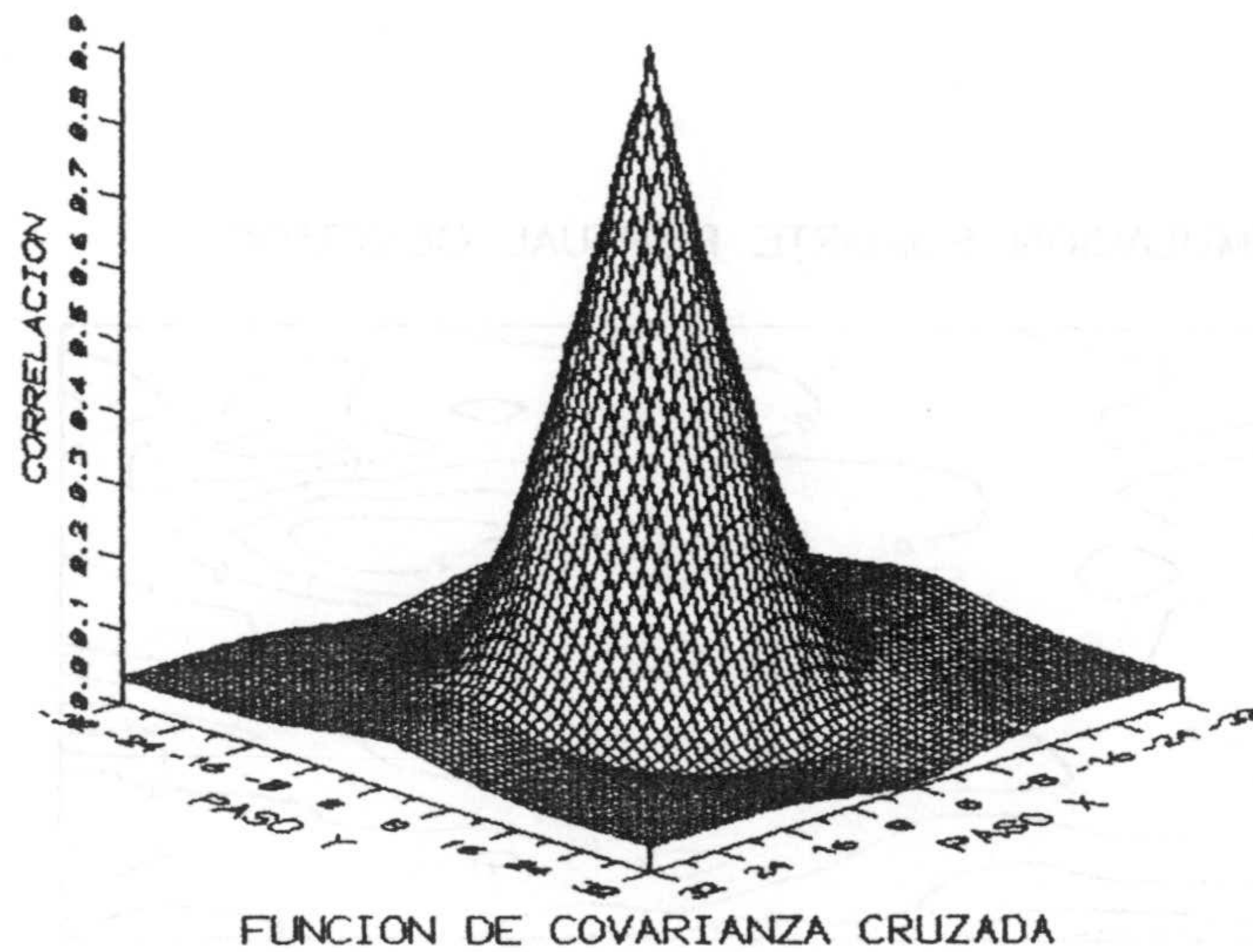


Figura 4.12d. Correlación cruzada teórica entre el proceso puntual y el proceso areal para el ejemplo propuesto.



#### 4.3. El modelo gaussiano discreto.

Se pasa a comentar brevemente este modelo por ser clásico entre la comunidad científica geoestadística y lo he utilizado en aplicaciones pero no se ofrece en esta investigación ningún resultado nuevo.

El modelo se basa en la modelización de la función de anamorfosis en base a un desarrollo en polinomios de Hermite. Se considera el campo geométrico dividido en una malla de  $N$  celdillas iguales; las variables  $Z(x)$  y  $Z_A(x)$  son anamorfosis de las correspondientes variables gaussianas  $Y(x)$ ,  $Y_A(x)$  las cuales son a su vez conjuntamente gaussianas con un coeficiente de correlación  $r > 0$ , el cual es el mismo en todas las celdillas:

$$E \{Y(x) Y_A(x)\} = r$$

Se considera que la localización del punto  $x$  dentro del área  $A$  es aleatorio uniforme. Con todas estas hipótesis *MATHERON (1975)* deduce las fórmulas de la tabla IV.3 que son útiles en la práctica de simulaciones. Una aplicación de esta metodología a la simulación de un yacimiento de carbón se puede encontrar en *PARDO (1989)*.

A diferencia de la metodología espectral, el modelo gaussiano discreto modeliza la función de distribución de probabilidad del proceso integrado en base a la modelización hermitiana de la función de anamorfosis. La simulación no condicional en base al modelo gaussiano discreto se puede efectuar por diferentes métodos incluidos los espectrales.



ANAMORFOSIS PUNTUAL	$z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i}{i!} H_i(y(x))$
COEFICIENTE DE CAMBIO DE SOPORTE	$C_A(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2 r^{2i}}{i!}$
ANAMORFOSIS DE BLOQUE	$z_A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i r^i}{i!} H_i(y_A(x))$
COVARIANZA GAUSIANA DE BLOQUE	$C_A(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2 r^{2i}}{i!} R^i(h)$
SIMULACION CONJUNTA PUNTO-BLOQUE	$y(x) = r y_A(x) + \sqrt{1 - r^2} U$

Tabla IV. 3. Relaciones del modelo gaussiano discreto de MATHERON (1975).

Leyenda para la tabla IV.4:

- $z(x)$  : valor del proceso puntual.  
 $y(x)$  : valor gaussiano del proceso puntual.  
 $z_A(x)$  : valor del proceso integrado.  
 $y_A(x)$  : valor gaussiano del proceso integrado.  
 $\psi_i$  : coeficiente  $i$  del ajuste de polinomios de Hermite.  
 $H_i(\alpha)$  : polinomio de Hermite de grado  $i$  para el valor  $\alpha$ .  
 $i!$  : factorial de  $i$ .  
 $r$  : coeficiente de cambio de soporte.  
 $C_A(\emptyset)$  : varianza del proceso integrado.  
 $C_A(h)$  : covarianza del proceso integrado.  
 $R(h)$  : covarianza gaussiana del proceso integrado.  
 $U$  : variable aleatoria uniforme  $(\emptyset, 1)$ .



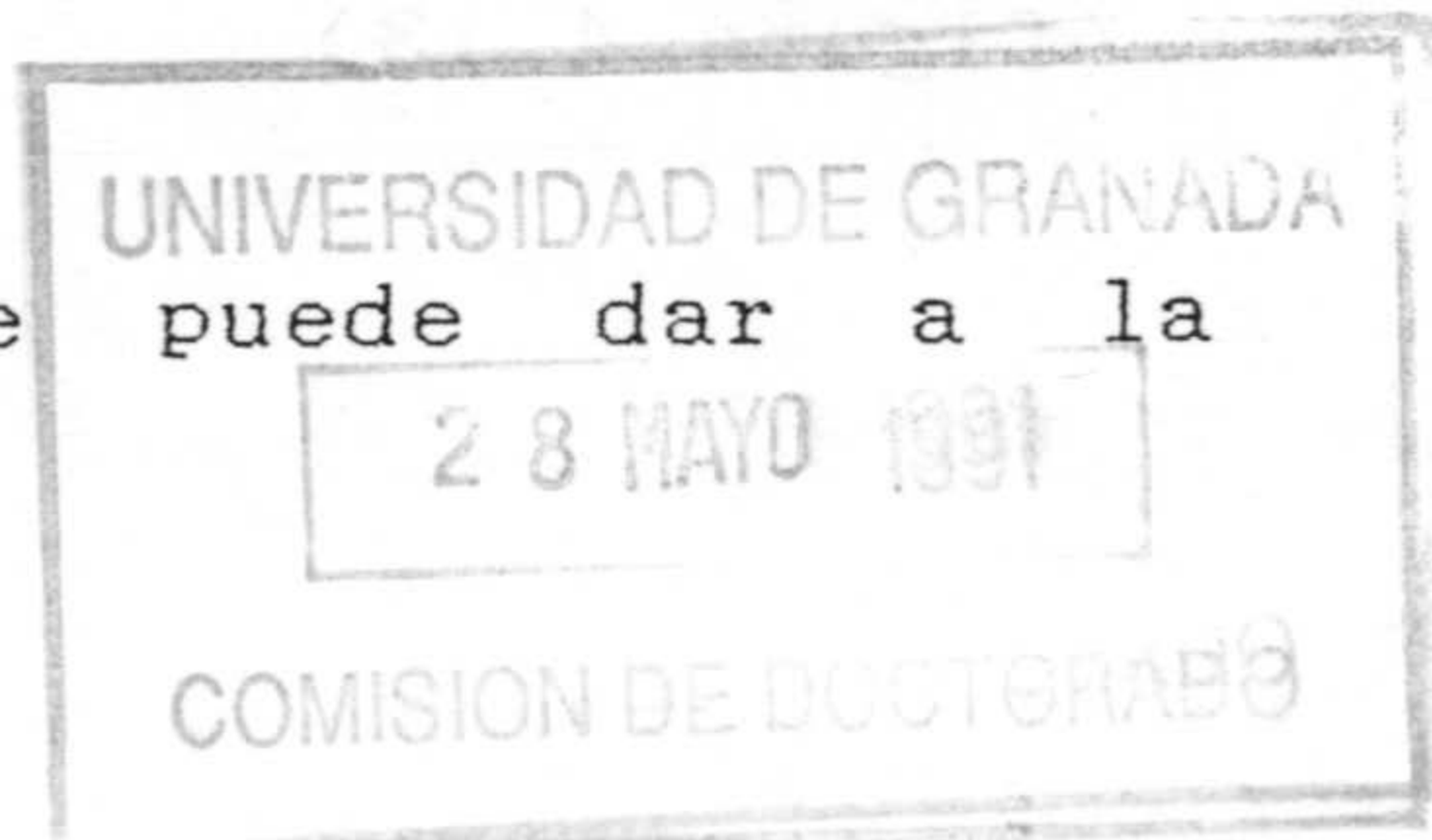
### 3. SIMULACION DE FUNCIONES ALEATORIAS NO ESTACIONARIAS

#### 3.1. Introducci3n

En la pr3ctica de la investigaci3n geol3gica se encuentran variables que en determinadas circunstancias puede considerarse estacionarias en el sentido indicado en el cap3tulo segundo. Esa misma pr3ctica enseña que existen otros muchos casos en los que la variable estudiada no admite la asunci3n de estacionaridad, presentando una marcada tendencia o deriva espacial o en su caso temporal. KOCH y LINK (1970) definen el concepto de tendencia o deriva geol3gica como un cambio sistem3tico en el valor de una variable geol3gica, generalmente producido a lo largo de una direcci3n geogr3fica. Citar3 por ejemplo la precipitaci3n en una regi3n con orograf3a acentuada; en este caso cabe esperar que exista una deriva significativa en la media del proceso. Considerando valores medios de muchas realizaciones, en las zonas de mayor cota topogr3fica tienen lugar las precipitaciones mayores. En el proceso se detecta una cierta componente determin3stica sobreimpuesta al comportamiento aleatorio de la precipitaci3n y cuyo significado f3sico es claro.

Pr3cticamente todas las variable geol3gicas pueden presentar un comportamiento no estacionario; as3 se ha observado este comportamiento en algunas de las caracter3sticas de las rocas almac3n en Geolog3a del Petroleo como son porosidad, saturaci3n en fluidos, l3mites de la formaci3n (DIMITRAKOPOULOS, 1990), caracter3sticas hidr3ulicas de acuíferos (NEUMAN y JACOBSON, 1984), nivel piezom3trico (DELHOMME, 1979; CHICA-OLMO, 1981), batimetr3a (CHILES, 1977), profundidad y espesor de una formaci3n geol3gica (DOWD, 1985), variables geom3neras de un yacimiento de carb3n (CASTRO, 1987), ...

Desde un punto de vista matem3tico se puede dar a la





deriva un significado claro y preciso al identificarla con la esperanza matemática o media del proceso. Sea una función aleatoria  $Z(x)$ , se define:

$$E\{Z(x)\} = m(x)$$

como la deriva del proceso. En el caso de una función aleatoria estacionaria de segundo orden, la esperanza matemática es constante y no depende de la localización. En el caso no estacionario la media es una función de la localización de la variable aleatoria en el área de estudio.

La diferencia que se obtiene al sustraer de la función aleatoria no estacionaria  $Z(x)$  su deriva  $m(x)$  se denomina residuo  $R(x)$ :

$$R(x) = Z(x) - m(x)$$

Por construcción:

$$E\{R(x)\} = 0$$

De este modo se llega al modelo de función aleatoria no estacionaria  $Z(x)$ :

$$Z(x) = m(x) + R(x)$$

compuesta por una parte determinista que es la deriva  $m(x)$  y una parte aleatoria y de media cero que constituye el residuo (figura 4.13).



características hidráulicas de un acuífero o las leyes de metal en un yacimiento minero, en estos casos ya no es posible calcular media y varianza de cada variable aleatoria.

La modelización de la variabilidad geológica espacial en base al modelo de deriva más residuo admite diferentes soluciones que se paso a exponer seguidamente.

En primer lugar cabe hacer notar que dicho modelo de función aleatoria no estacionaria ha sido utilizado desde los inicios de la Geología Matemática hasta nuestros días, dentro de la metodología conocida como análisis de tendencias, "trend surface" o "trend analysis" en terminología anglosajona, WHITTEN (1963), AGTERBERG(1967), BARIGOV(1989). El fundamento del análisis de tendencias (DAVIS, 1978; KOCH y LINK, 1970) consiste en ajustar un polinomio de grado  $k$  a los valores experimentales por el método de mínimos cuadrados. El modelo del cual se hace uso responde a la representación:

$$Z(x) = P_k(x) + \varepsilon(x)$$

El empleo de esta metodología es un procedimiento puramente matemático que carece de sentido geoestadístico, en particular no considera que los residuos  $\varepsilon(x)$  estén correlacionados y el polinomio  $P_k(x)$  no se identifica con la media del proceso.

Frente a este enfoque se presenta el enfoque geoestadístico en base al modelo comentado en párrafos precedentes (MATHERON, 1969):

$$Z(x) = m(x) + R(x)$$

donde el residuo  $R(x)$  se considera como una función aleatoria estacionaria de segundo orden caracterizada por su propia



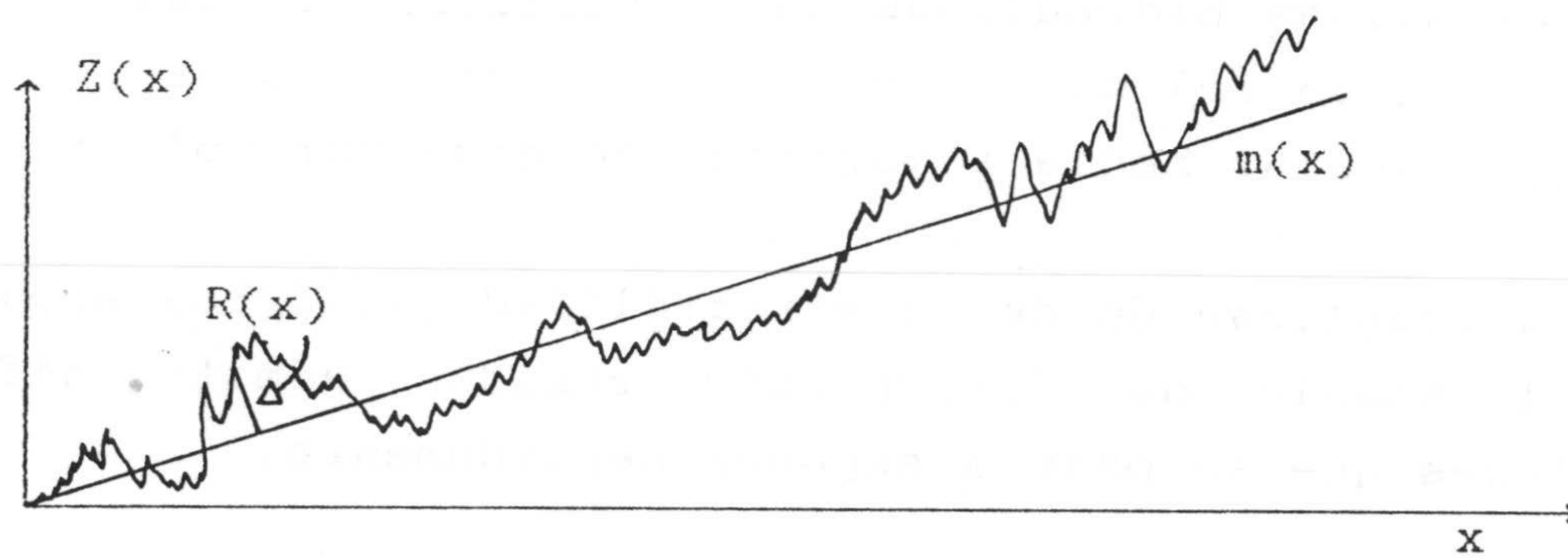


Figura 4.13. Modelo de función aleatoria no estacionaria.

En el caso, raro en la práctica geológica, de disponer de muchas realizaciones de la función aleatoria  $Z(x)$ , se podrían estimar los parámetros media, varianza, etc. para cada punto del área de estudio. Si en base a estos estadísticos se determina que la función aleatoria es no estacionaria se podría definir una nueva variable aleatoria  $Z'(x)$  como:

$$Z'(x) = \frac{Z(x) - m(x)}{\sigma(x)}$$

La función aleatoria  $Z'(x)$  es estacionaria en media y varianza y frecuentemente se puede asumir la hipótesis de estacionaridad de segundo orden, *MANTOGLOU* y *WILSON* (1982). En este caso basta obtener simulaciones de la función aleatoria estacionaria  $Z'(x)$  con media cero y varianza uno por la normalización, y pasar a valores originales mediante la relación:

$$z(x) = \sigma(x) z'(x) + m(x)$$

Cuando sólo se dispone de una única realización, lo cual es lo más frecuente en Ciencias de la Tierra, por ejemplo las

función de covarianza o variograma si sólo se admite la hipótesis intrínseca para el residuo.

$$C_R(\mathbf{h}) = E\{R(\mathbf{x} + \mathbf{h}) R(\mathbf{x})\}$$

$$\gamma_R(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{[R(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - R(\mathbf{x})]^2\}$$

Asimismo se asume que  $m(\mathbf{x})$  es una función continua y regular que al menos localmente se puede expresar como una combinación lineal de  $\ell$  funciones de base conocidas,  $p_i(\mathbf{x})$ , ponderadas por coeficientes desconocidos  $a_i$

$$m(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i p_i(\mathbf{x})$$

El caso más frecuente es utilizar como funciones  $p_i(\mathbf{x})$  monomios, no siendo generalmente necesario utilizar un orden  $k$  superior a dos. Así por ejemplo para el caso bidimensional se tiene la tabla IV.4.

k	Polinomios	$\ell = 2k + 1$
0	1	
1	1    x    y	
2	1    x    y    xy    x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	

Tabla IV.1. Monomios de base para modelizar una deriva de grado  $k$ .



En base al modelo de variabilidad que considera un residuo aleatorio estructurado y una expresión polinomial de la deriva, existen tres enfoques diferentes de trabajo, de modo que en el ambito de cada uno de ellos la simulación de una función aleatoria no estacionaria va a tener un particularismo especial.

### 3.2. Metodología de Krigeaje Universal

El método fue propuesto originalmente por *MATHERON* (1969, 1971) y se basa en asumir conocido el variograma o covarianza de los residuos, frecuentemente denominado "variograma subyacente". Ocurre que ésta es precisamente la principal dificultad que aparece a la hora de aplicar este método, el variograma "verdadero" no se puede estimar a partir de los datos experimentales puesto que para ello sería necesario conocer previamente la deriva, (*MATHERON*, 1969, 1971; *DELFINER*, 1976; *ARMSTRONG*, 1984).

En la práctica la metodología de Krigeaje Universal se puede utilizar cuando no existe deriva en una dirección determinada dentro del área de trabajo y se asume que el variograma calculado en dicha dirección es estacionario e isótropo y se considera como el "verdadero" variograma subyacente. *SABOURIN* (1976) presenta dos métodos para estimar el variograma subyacente, si bien la inferencia de este variograma es sesgada, *ARMSTRONG* (1984).

La estimación por krigeaje universal se expresa:

$$Z_{\text{KU}}^*(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i Z(x_i)$$

El estimador es insesgado si se cumple:

$$E\{Z_{KU}^*(x_0)\} = E\{Z(x_0)\}$$

lo que nos lleva a:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_0^i m(x_i) = m(x_0)$$

lo cual se cumple si:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_0^i p^k(x_i) = p^k(x_0) \quad k = 1, \dots, \ell$$

Como es conocido, en kriging se minimiza la varianza de estimación:

$$\text{Var}[Z_{KU}^*(x_0) - Z(x_0)]$$

sujeto a las  $\ell$  condiciones últimas para obtener el sistema de kriging (MATHERON, 1969):

$$\sum_{j=1}^N \lambda_0^i \gamma(x_i - x_j) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k p_k(x_i) = \gamma(x_i - x_0)$$



$$\sum_{i=1}^N \lambda_o^i p_k(x_i) = p_k(x_o)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$k = 1, \dots, \ell$$

La expresión para la varianza de estimación es:

$$\text{var}[Z_{\mathbf{KU}}^*(x_o) - Z(x_o)] = \sum_{i=1}^N \lambda_o^i \gamma(x_i - x_o) + \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k p_k(x_o)$$

donde:

$Z(x_o)$  : valor verdadero de la variable aleatoria  $Z(x)$  en el punto  $x_o$ .

$Z_{\mathbf{KU}}^*(x_o)$  : estimador de krigeaje universal en el punto  $x_o$ .

$\gamma(\cdot)$  : variograma de los residuos  $R(x)$ .

$p_k(x)$  : monomio  $k$ -ésimo de la expresión polinomial de la deriva en el punto  $x$ .

$\lambda_o^i$  : peso del punto  $x$  para la estimación de la variable en el punto  $x_o$ .

$\mu_k$  : multiplicador de Lagrange.

En este modelo conceptual la deriva  $m(\mathbf{x})$  se ajusta sólo localmente y no aparece en la estimación de  $Z(\mathbf{x})$ , sólo en el cálculo de la varianza de estimación.

Cada nuevo punto  $x_0$  tiene un nuevo ajuste de la deriva  $m(x_0)$  cuyos coeficientes  $(a_k)$  no se calculan nunca.

Para la generación de realizaciones de una función aleatoria no estacionaria en el marco del Krigeaje Universal, se parte de la hipótesis de que se conocen el orden de la deriva  $k$  y el variograma o covarianza de los residuos  $C_R(h)$ .

El caso más frecuente en la práctica es que dichos parámetros se deben estimar a partir de la información experimental.

Es posible entonces obtener diferentes realizaciones de la función aleatoria  $Z(\mathbf{x})$ , donde:

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i p_i(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})$$

generando diferentes realizaciones del residuo según la metodología anteriormente expuesta para generar realizaciones de una función aleatoria estacionaria de segundo orden con covarianza conocida, y añadiéndole un polinomio  $P_k(\mathbf{x})$  con coeficientes aleatorios.

En la práctica se realizan simulaciones condicionales por lo que la adición del polinomio  $P_k(\mathbf{x})$  carece de sentido ya que se sustrae en el proceso de condicionamiento:

$$Z_{SC}(\mathbf{x}) = Z_{KU}^*(\mathbf{x}) + [Z_S(\mathbf{x}) - Z_{SKU}^*(\mathbf{x})]$$



operando se puede expresar el término  $[Z_S(x) - Z_{SKU}^*(x)]$  como:

$$\left\{ m_s(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_i m_s(x_i) \right\} + \left\{ Y_S(x) - Y_{SKU}^*(x) \right\}$$

La primera expresión entre llaves vale cero por la condición de no sesgo con lo cual:

$$Z_{SC}(x) = Z_{KU}^*(x) + [Y_S(x) - Y_{SKU}^*(x)]$$

donde:

$Z_{SC}(x)$  : simulación condicional.

$Z_{KU}^*(x)$  : estimación por krigeaje universal de la variable en función de los puntos experimentales.

$Y_S(x)$  : simulación no condicional del residuo.

$Y_{SKU}^*(x)$  : estimación del residuo en función de los valores simulados en los puntos experimentales.

Por ello, es suficiente con generar realizaciones de la función aleatoria estacionaria  $R(x)$  con la covarianza dada  $C_R(h)$  y de media cero.

Seguidamente expongo un caso práctico de aplicación de la metodología propuesta.

La información experimental procede de un mapa

topográfico a escala 1:10000. El sector se ubica próximo al río Bermejo entre la Sierra de Cogollos y la Sierra de la Yedra, en la provincia de Granada.

Se ha muestreado la cota topográfica a paso regular en X e Y con interdistancia de 200 m que corresponden a dos unidades en la escala local, utilizada para las representaciones siguientes. El área muestreada cubre una superficie de 20 x 20 km<sup>2</sup> muestreada por cien puntos experimentales.

La tabla IV.5 registra los estadísticos elementales de la variable experimental cuyo histograma se representa en la figura 4.14.

Número de datos = 100
Media = 1237 m
Varianza = 5651 m <sup>2</sup>
Coefficiente de variación = 6.07 %
Coefficiente de asimetría = .754
Coefficiente de aplastamiento = 3.267
Mínimo = 1105 m
Cuartil 1 = 1185 m
Mediana = 1223 m
Cuartil 3 = 1283 m
Máximo = 1471 m

Tabla IV.5. Estadísticos elementales experimentales.



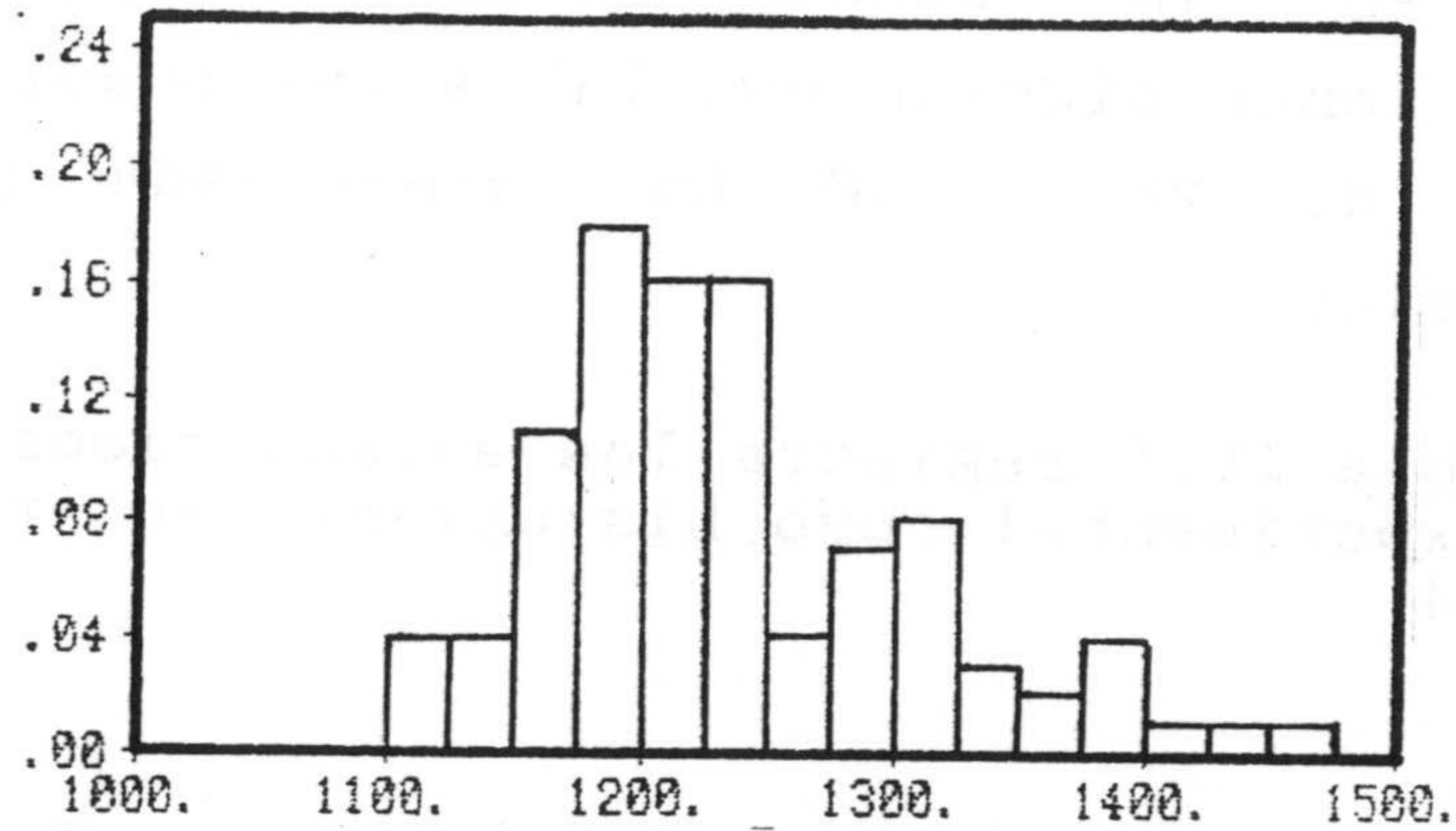


Figura 4. 14. Histograma experimental.

Los variogramas direccionales obtenidos se muestran en la figura 4.15. Teniendo en cuenta la fuerte anisotropía que presenta el variograma experimental y su crecimiento continuo, en las direcciones NS, NE-SW y NW-SE, por encima de la varianza experimental sin tendencia a estacionarizarse son síntomas evidentes de la presencia de una deriva sobreimpuesta al proceso puramente aleatorio.

En la dirección E-W, el comportamiento del variograma es completamente diferente al resto de las direcciones, presentando un comportamiento estacionario que he asimilado al variograma subyacente del residuo. En la misma figura 4.15 está representado el modelo teórico adoptado como variograma subyacente y que responde a la ecuación:

$$\gamma(h) = \text{Sph}(2500)_{10}$$

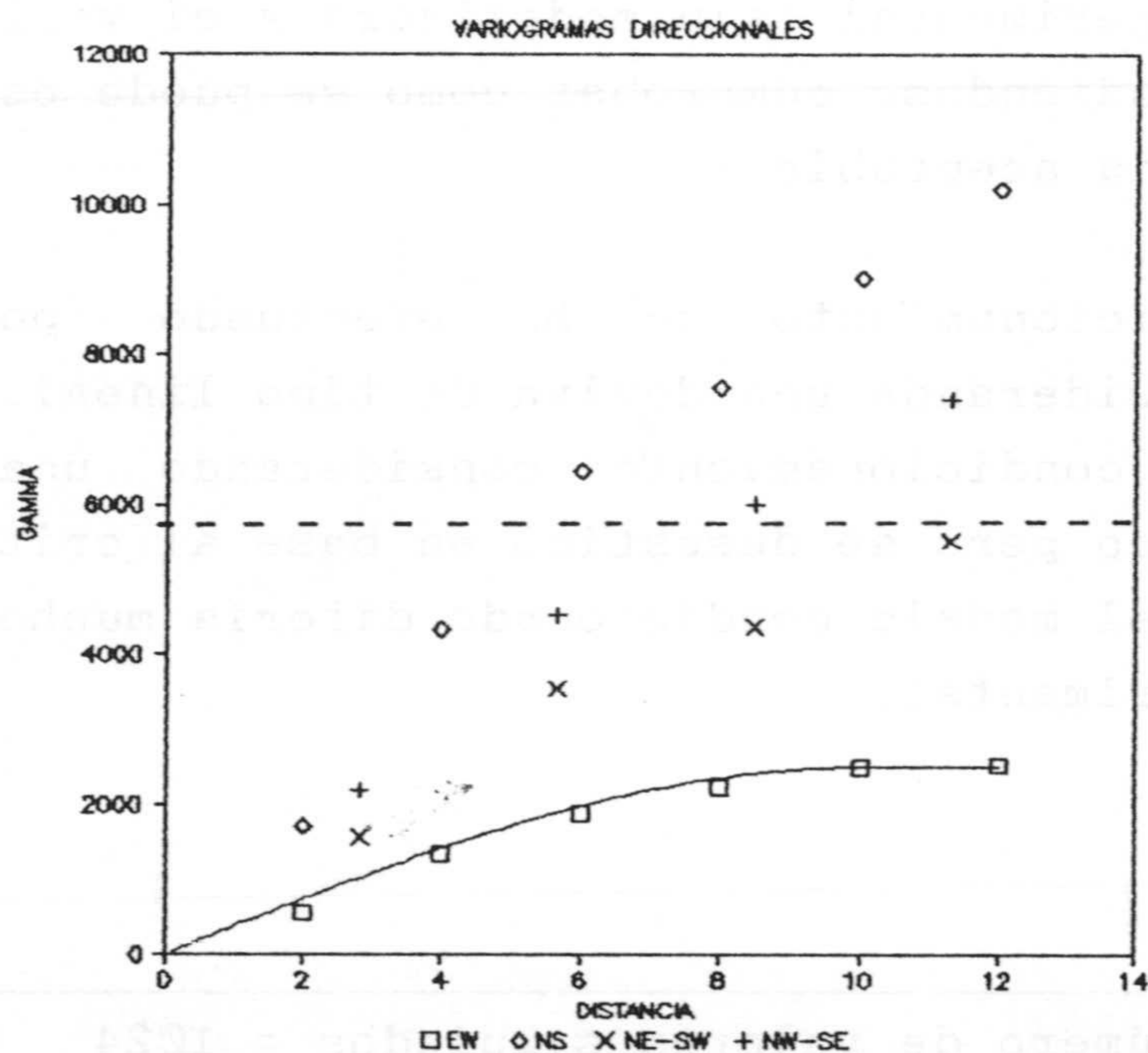


Figura 5.15. Variografía experimental direccional.

La simulación según la metodología propuesta consiste en generar una realización de una función aleatoria estacionaria imponiendo el modelo anterior de variograma y efectuar el condicionamiento de los valores simulados por krigeaje universal.

La figura 3.16a muestra la cartografía de una realización condicional correspondiente a la simulación de una malla de 32 x 32 valores dispuestos en una malla regular cuadrada de lado 0.625 en coordenadas locales.

La tabla IV.6. resume los estadísticos de la realización



condicional cuyo histograma se muestra en la figura 3.16b. Los estadísticos son muy próximos a sus homólogos experimentales y lo mismo puede decirse del histograma.

En cuanto al variograma de la simulación, en las figura 3.16c a 3.16f se ha representado, respectivamente, el variograma experimental (sin modelizar) y el variograma de la simulación, pudiéndose comprobar como se puede establecer una correspondencia aceptable.

El condicionamiento se ha efectuado por krigeaje universal considerando una deriva de tipo lineal. Se repitió el proceso de condicionamiento considerando una deriva de tipo cuadrático pero se desestimo en base al criterio de que la varianza del modelo condicionado difería mucho más de la varianza experimental.

Número de valores simulados = 1024
Media = 1237 m
Varianza = 5894 m <sup>2</sup>
Coefficiente de variación = 6.20 %
Coefficiente de asimetría = .66
Coefficiente de aplastamiento = 3.08
Mínimo = 1080 m
Cuartil 1 = 1185 m
Mediana = 1223 m
Cuartil 3 = 1283 m
Máximo = 1471 m

Tabla IV.6. Estadísticos elementales de una realización.

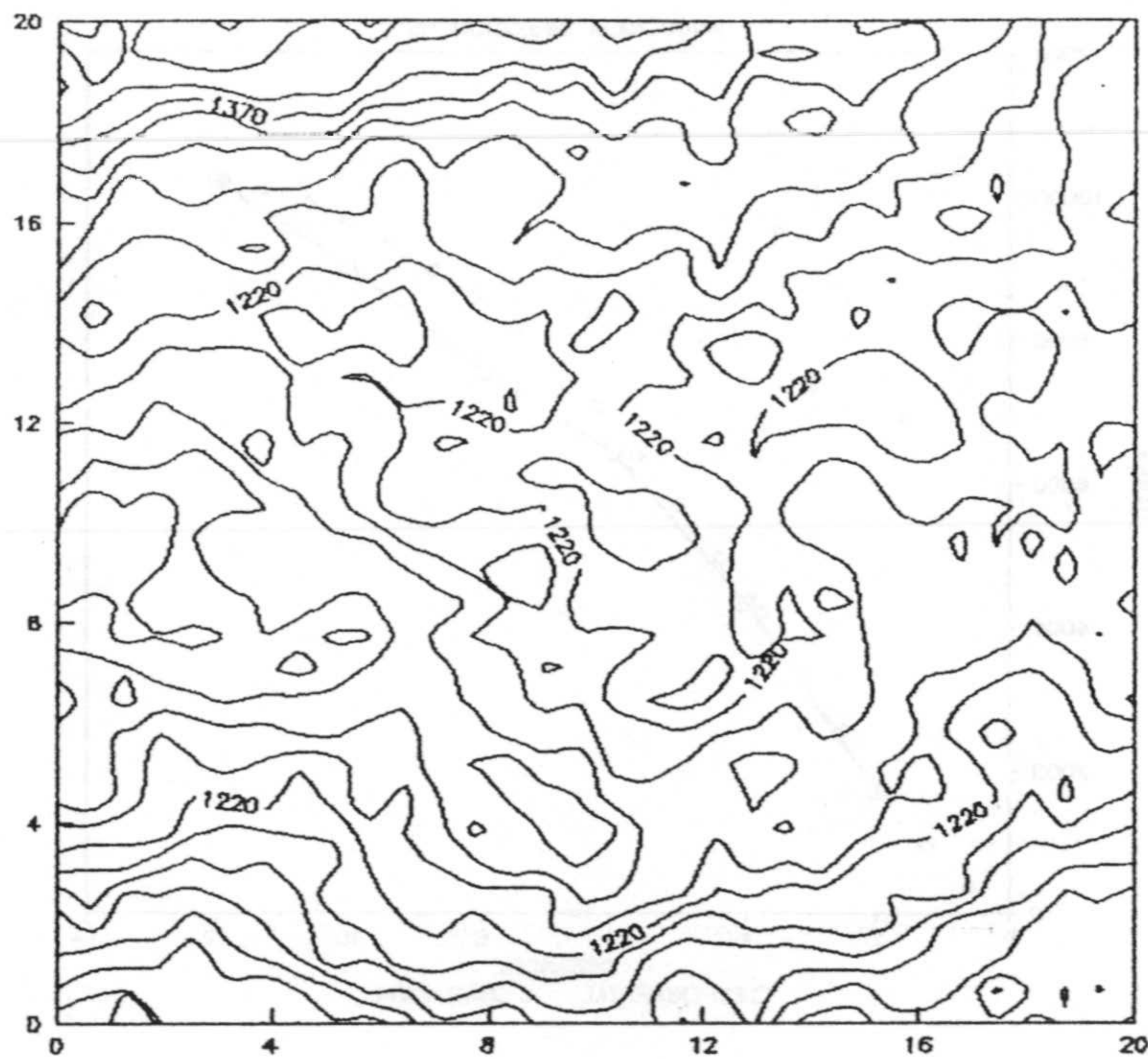


Figura 4.15a. Cartografía de una realización.

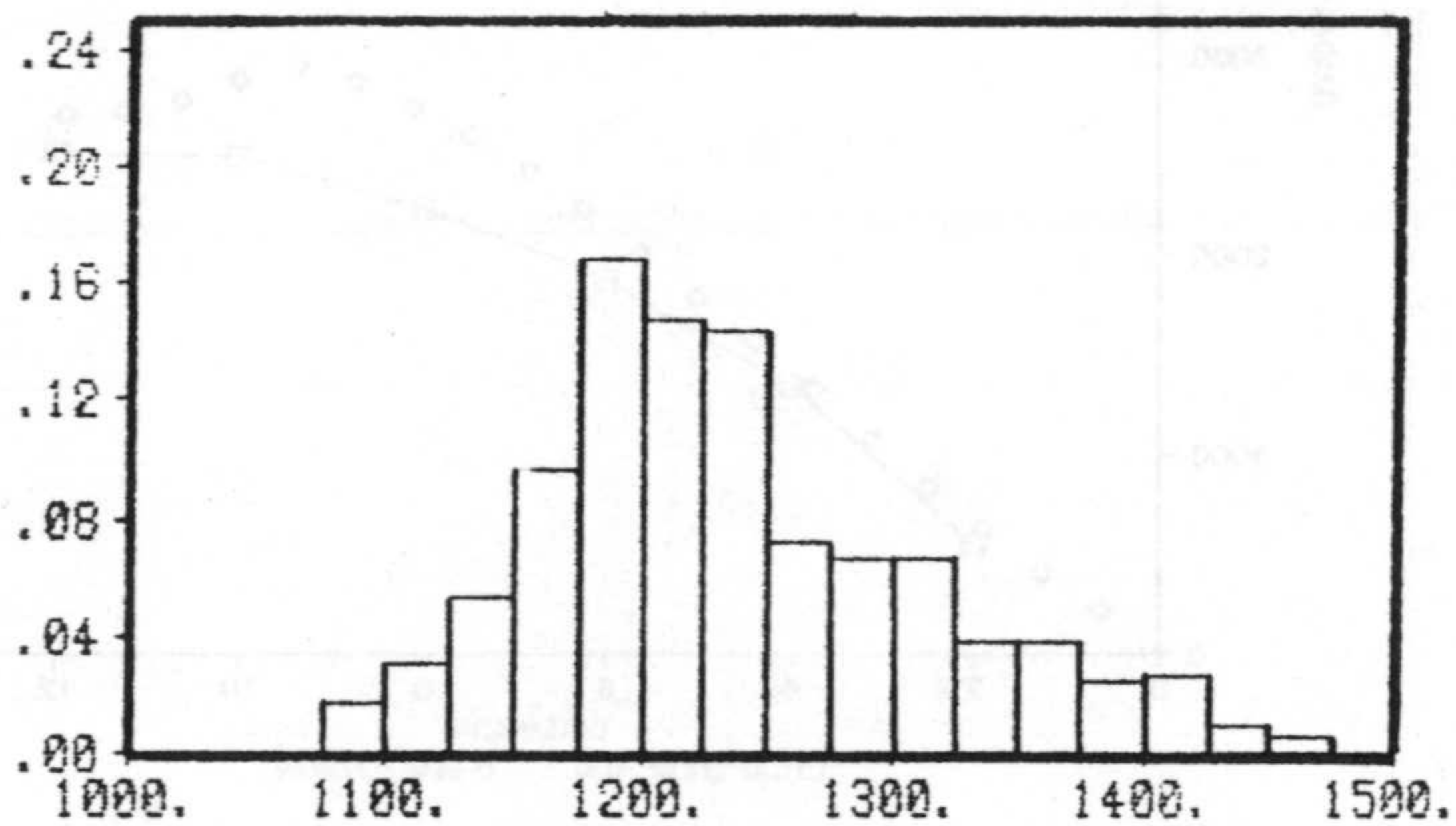


Figura 4.15b. Histograma de la simulación condicional.



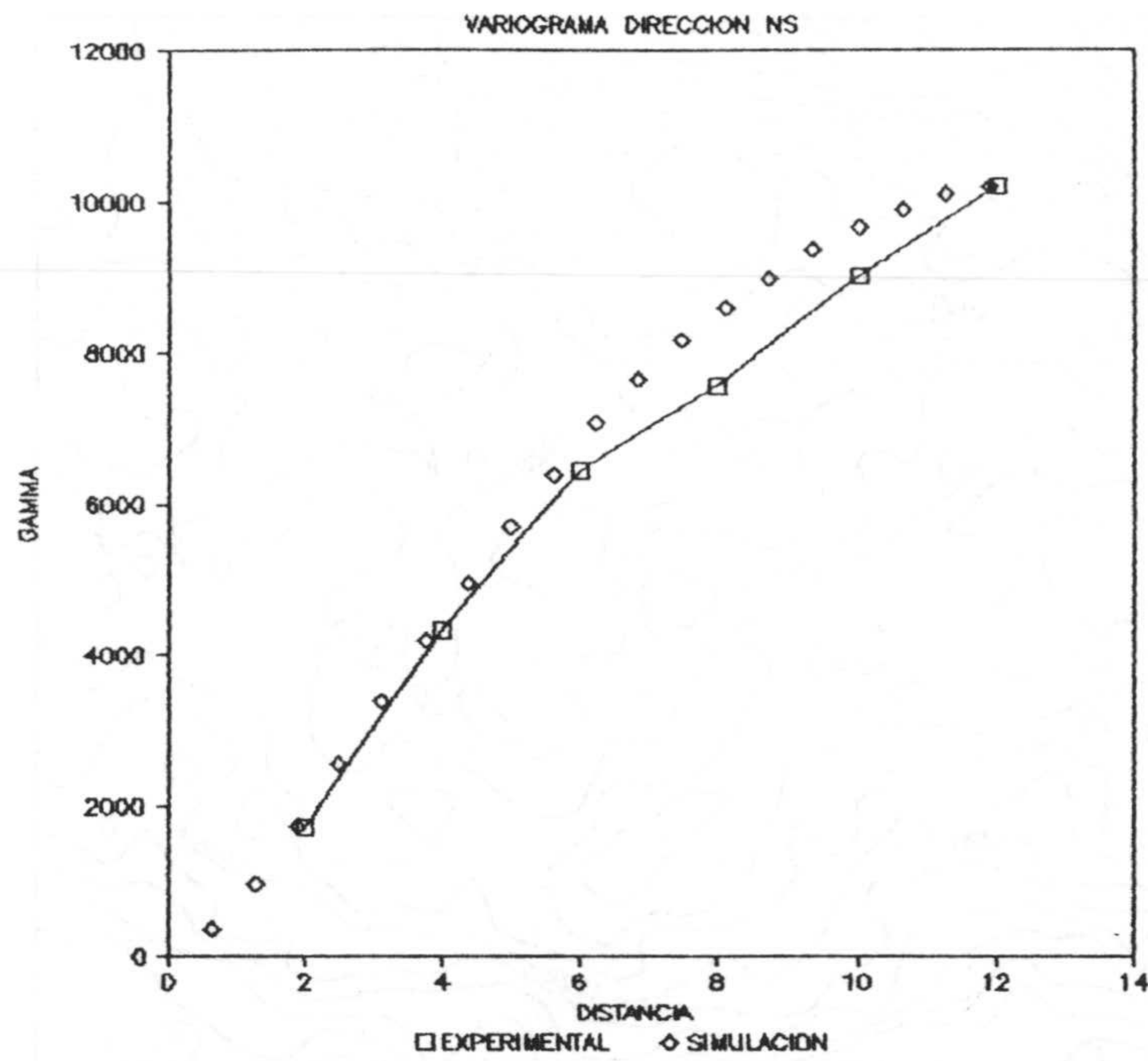


Figura 4.15c. Variograma experimental y simulado en la dirección NS.

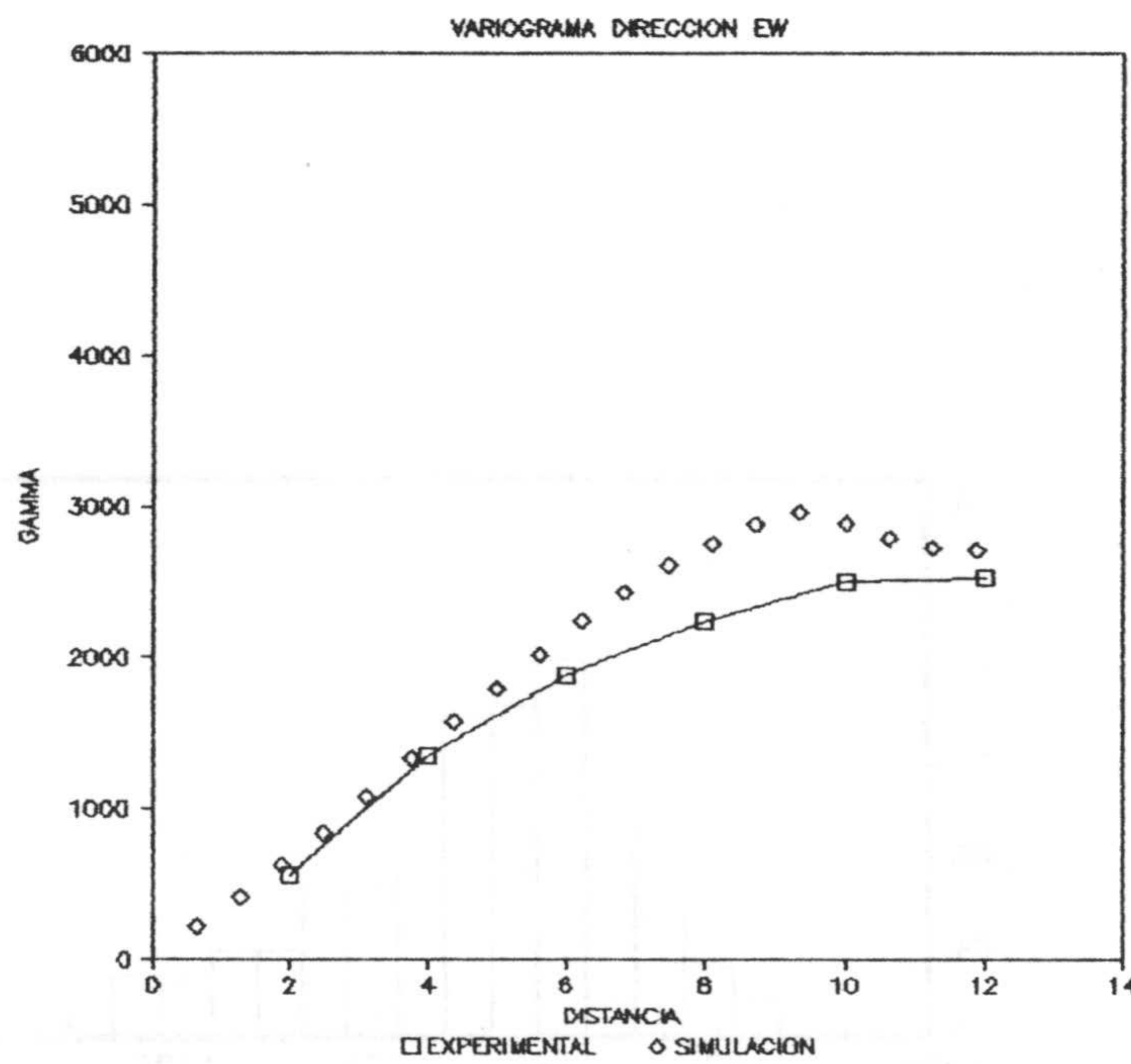


Figura 4.15d. Variograma experimental y simulado en la dirección EW.

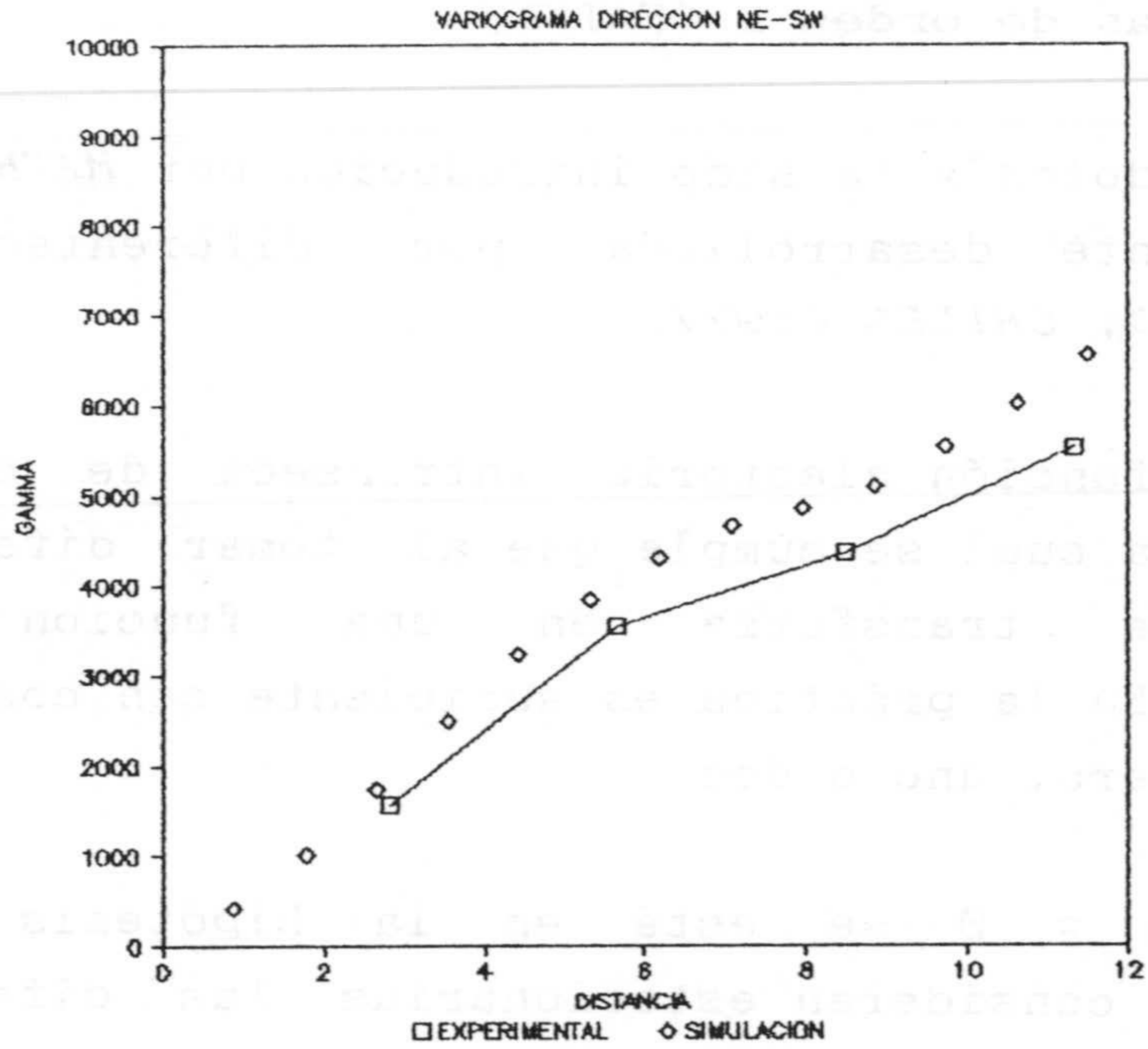


Figura 4.15e. Variograma experimental y simulado en la dirección NE-SW.

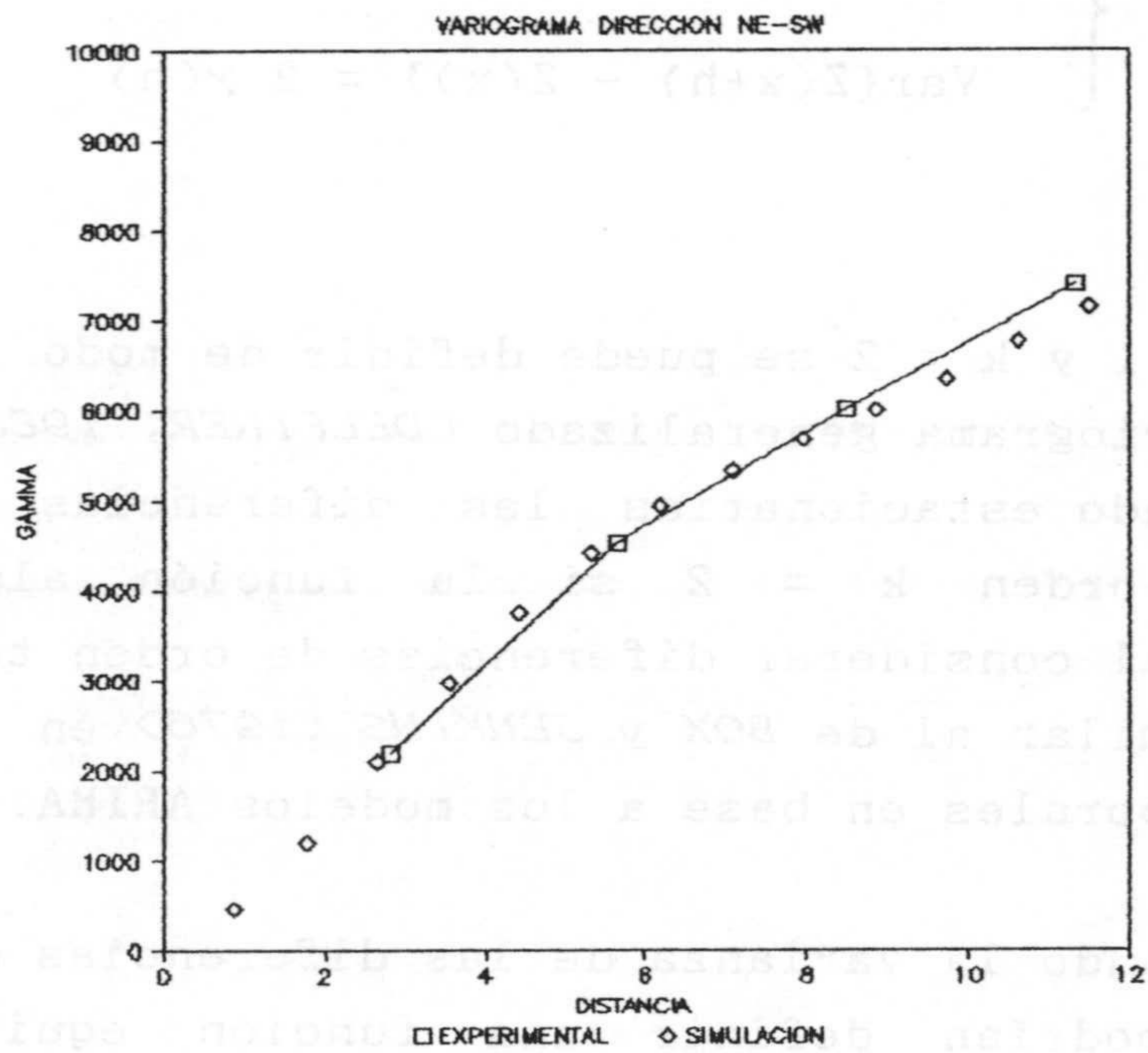


Figura 4.15f. Variograma experimental y simulado en la dirección NW-SE.



### 3.3. Metodología de las funciones aleatorias estacionarias intrínsecas de orden $k$ (FAIK)

Esta metodología ha sido introducida por *MATHERON (1973)* y posteriormente desarrollada por diferentes autores, *DELFINER (1976)*, *CHILES (1977)*.

Una FAIK función aleatoria intrínseca de orden  $k$  es aquella para la cual se cumple que al tomar diferencias de orden  $k+1$  se transforma en una función aleatoria estacionaria. En la práctica es suficiente con considerar el orden  $k$  como cero, uno o dos.

Cuando  $k = 0$  se está en la hipótesis intrínseca ordinaria y se consideran estacionarias las diferencias de orden uno de la función aleatoria  $Z(x)$ :

$$\begin{cases} E\{Z(x+h) - Z(x)\} = 0 \\ \text{Var}\{Z(x+h) - Z(x)\} = 2 \gamma(h) \end{cases}$$

Para  $k = 1$  y  $k = 2$  se puede definir de modo equivalente la función variograma generalizado (*DELFINER, 1982*) de orden  $k = 1$  suponiendo estacionarias las diferencias de segundo orden o de orden  $k = 2$  si la función aleatoria es estacionaria al considerar diferencias de orden tercero. Este enfoque es similar al de *BOX y JENKINS (1976)* en el estudio de series temporales en base a los modelos ARIMA.

Considerando la varianza de las diferencias de orden dos o tres se podrían definir una función equivalente al variograma ordinario en diferencias de primer orden y que se llama variograma generalizado (*DELFINER, 1982*). Ocurre que la inferencia del variograma generalizado sólo es posible si los



datos están localizados en una malla regular (muestreo sistemático); si bien, lo más frecuente en la práctica es encontrar que las localizaciones experimentales no siguen un esquema equidistante.

Es por todo esto que en la teoría FAIK, para hacer posible la inferencia estadística de una función que caracterice la correlación espacial a partir de una única realización de la función aleatoria, se introducen dos nuevos conceptos: el de incremento generalizado de orden  $k$  y el segundo el concepto de covarianza generalizada de orden  $k$ .

Para introducir el concepto de incremento generalizado de orden  $k$  se parte del conocido estimador de kriging como combinación lineal ponderada de los valores experimentales:

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i Z(x_i)$$

Si se imponen a los ponderadores  $\lambda$  las condiciones:

de orden cero

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i = 1$$

de orden uno



$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i X_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i Y_i = 0$$

de orden dos

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i X_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i Y_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i Y_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_0^i X_i Y_i = 0$$

donde  $x_i = (X_i, Y_i)$  son las coordenadas del punto  $x_i$  en dos dimensiones.

Tomando por definición  $\lambda_0^0 = -1$ , peso que se asigna al punto experimental en la estimación de él mismo, se puede expresar el error de estimación como:

$$Z^*(x_0) - Z(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i Z(x_i) - Z(x_0) = \sum_{i=0}^N \lambda_0^i Z(x_i)$$

La cantidad  $\sum \lambda_0^i Z(x_i)$  sujeta a las condiciones de orden cero, uno o dos se define como el incremento generalizado de orden cero, uno o dos respectivamente, DELFINER (1976).

Es de destacar que un incremento generalizado de orden  $k$  está sujeto a  $(2k + 1)$  condiciones y lo que es esencial, filtra una expresión polinomial de orden  $k$ . El incremento generalizado de orden  $k$  de  $Z(x) \pm P_k$  permanece invariable, siendo  $P_k$  cualquier expresión polinomial de orden  $k$ .

Por otra parte, si se asume que los incrementos generalizados de orden  $k$  de  $Z(x)$  son estacionarios, se puede demostrar (DELFINER, 1976) que la varianza del error de estimación admite la expresión:

$$\text{var}(Z^*(x_0) - Z(x_0)) = \text{Var} \left[ \sum_{i=0}^N \lambda_0^i Z(x_i) \right] =$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \lambda_0^i \lambda_0^j K(x_i - x_j)$$

donde  $K(\cdot)$  es la función denominada covarianza generalizada de orden  $k$ , la cual es estacionaria, es decir, es función sólo de  $h = x_i - x_j$ .

Si de algún modo es posible conocer la expresión de  $K(h)$ , las ecuaciones del sistema de krigeaje que se pueden



plantear son equivalentes a las del kriging universal sin más que sustituir  $\gamma$  por  $-K$ :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_o^j K(x_i - x_j) - \sum_{\ell=1}^{2k+1} \mu_\ell p^\ell(x_i) = K(x_i - x_o)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_o^i p^\ell(x_i) = p^\ell(x_o)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$\ell = 1, \dots, 2k+1$$

$k$  : orden de la deriva

La clase de funciones más frecuentemente utilizadas como covarianzas generalizadas, debido a las ventajas que presentan en estimación y simulación, son las funciones polinomiales.

La forma general de covarianza generalizada polinomial de orden  $k$ , isótropa y admisible, ha sido dada por *MATHERON* (1973) como:

$$K_n(r) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} A_p r^{2p+1}$$

con:

$n$  : dimensionalidad del problema.

$k$  : orden de la deriva.

$r = |\mathbf{h}|$

Así, para  $n$  igual a 2 (plano) y  $k = 0, 1, 2$  se obtiene, DELFINER (1976):

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad K_2(r) = - A_0 r \\ k = 1 & \quad K_2(r) = - A_0 r + A_1 r^3 \\ k = 2 & \quad K_2(r) = - A_0 r + A_1 r^3 - A_2 r^5 \end{aligned}$$

con

$$A_0 \geq 0 \quad ; \quad A_1 \geq - \frac{10}{3} \sqrt{A_0 A_2} \quad ; \quad A_2 \geq 0$$

La principal dificultad que surge en la aplicación de la teoría FAIK es la inferencia estadística de la covarianza generalizada. Dicha inferencia consiste en determinar el orden  $k$  (0,1,2) y el valor de los coeficientes  $A_i$ . Este problema ha sido tratado por diferentes autores, DELFINER (1976, 1982), STARKS y FANG (1982), KITANIDIS (1983), DOWD (1985).

El objetivo de la simulación en el marco de la teoría FAIK es la generación de diferentes realizaciones de una función aleatoria  $Z(x)$  con covarianza generalizada  $K(h)$  impuesta y que, en la práctica, ha podido ser inferida de la información experimental. Dos funciones  $Z(x)$  y  $Z'(x)$  se pueden considerar como equivalentes, en el sentido de que ambas tienen la misma covarianza generalizada, si:

$$Z(x) = Z'(x) + P_k(x)$$



donde  $P_k(x)$  es un polinomio de orden  $k$  con coeficientes aleatorios.

Al igual que ocurre en el marco del Krigeaje Universal, en la práctica se efectúan simulaciones condicionales por lo que la adición del polinomio carece de sentido y es suficiente generar realizaciones de una función aleatoria con covarianza generalizada  $K(h)$  y media cero.

Para cubrir dicho propósito es necesario considerar la forma general de una FAIK con covarianza generalizada en una dimensión. *MATHERON (1973)* demuestra que  $Z(x)$  es una función aleatoria intrínseca de orden  $k$  con covarianza generalizada

$$K_1(h) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} a_p \frac{|h|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

si y sólo si dicha función admite la representación:

$$Z(x) = b_0 W(x) + b_1 \int_0^x W(\xi) d\xi + \dots + b_k \int_0^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} W(\xi) d\xi$$

donde  $b_i$  son coeficientes reales relacionados con los coeficientes también reales  $a_p$  (*DIMITRAKOPOULOS, 1990*).

$W(x)$  es la representación de una función aleatoria intrínseca de orden cero con covarianza generalizada

$$K(h) = - |h|$$

De modo que,

$$W_k(x) = \int_0^x \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} W(\xi) d\xi$$

es una representación de una función aleatoria intrínseca de orden  $k$  con covarianza generalizada (MATHERON, 1973):

$$K(h) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} |h|^{2k+1}$$

Con lo que  $Z(x)$  se puede expresar

$$Z(x) = \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} W_{\ell}(x)$$

El proceso mejor conocido para representar  $W(x)$ , función aleatoria intrínseca de orden cero, es el proceso de Wiener-Levy también denominado movimiento Browniano (figura 4.16).



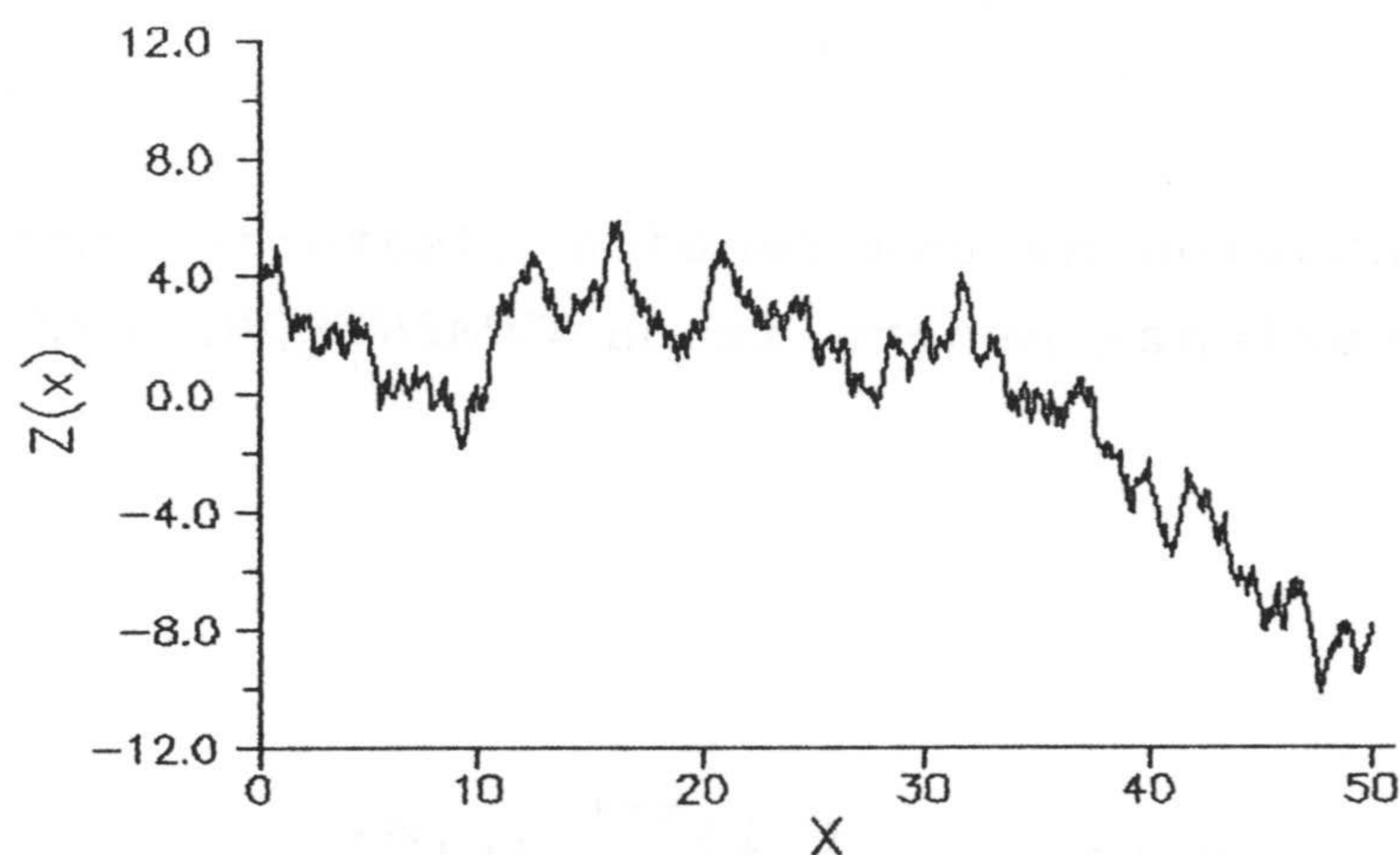


Figura 4.2. Ejemplo de realización de proceso de Wiener-Levy o movimiento Browniano.

Se dice que un proceso estocástico  $\{W(x), x \geq 0\}$  es un proceso de Wiener si (PARZEN, 1972):

- 1).  $\{W(x), x \geq 0\}$  tiene incrementos independientes estacionarios.
- 2).  $\forall x \geq 0$ ,  $W(x)$  tiene una distribución normal.
- 3).  $\forall x \geq 0$ ,  $E\{W(x)\} = 0$ .
- 4).  $W(0) = 0$ .

A partir del hecho de que  $W(x)$  tiene incrementos independientes se puede demostrar que existe alguna constante positiva, representada por  $\sigma$ , tal que para  $x \geq 0$  y  $h \geq 0$

$$\text{Var}[W(x + h) - W(x)] = \sigma |h|$$

El parámetro  $\sigma$  es una característica del proceso que depende el modelo que se adopte para generar el mismo o de modo empírico cuando se estudia un proceso físico.

ORFEUIL (1972), CHILES (1977), MANTOGLOU y WILSON (1981) y DIMITRAKOPOULOS (1990) proponen diferentes técnicas para generar el proceso de Wiener-Levy. Estudiando los diferentes procesos he considerado el más eficiente, por razones que se expondrán con posterioridad, el método propuesto por MANTOGLOU y WILSON (1981) y que se pasa a comentar a continuación.

Sea la siguiente versión discreta del proceso de Wiener:

$$W(x + h) = W(x) + g U(x)$$

donde  $h$  es el incremento y  $U(x)$  es un número aleatorio con distribución uniforme en el intervalo  $[-0.5, 0.5]$ . La varianza del incremento de primer orden vale obviamente:

$$\text{Var} [W(x + h) - W(x)] = g^2/12$$

Por otra parte la covarianza generalizada  $K_1(h)$  debe satisfacer la relación (DELFINER, 1976; MANTOGLOU y WILSON, 1982):

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i W(x_i) \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j K_1(x_i - x_j)$$

con



$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$$

para  $k = 0$

Así pues,

$$\text{var}[W(x+h) - W(x)] = -2 K_1(h)$$

tomando  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ .

Comparando las expresiones de la varianza de los incrementos de primer orden se tiene que:

$$g^2 = -24 K_1(h)$$

con lo que para  $K_1(h) = -h$  se tiene:

$$g = \sqrt{24h}$$

y el parámetro  $\alpha$  de PARZEN(1972) vale 12.

Con lo que el proceso generador básico queda:

$$W_0(\emptyset) = \emptyset$$

$$W_0(x+h) = W(x) + \sqrt{24h} U(x)$$

$$W_1(x) = \int_0^x W_0(\xi) d\xi$$

$$W_2(x) = \int_0^x (x - \xi) W(\xi) d\xi$$

Como chequeo del generador anterior he realizado simulaciones unidimensionales consistentes cada una en 500 valores discretos equidistantes con paso 0.1 unidades. Se han simulado los siguientes modelos:

$$K_1(h) = - |h|$$

$$K_1(h) = |h|^3$$

$$K_1(h) = - |h|^5$$

$$K_1(h) = - |h| + 0.1 |h|^3 - 0.001 |h|^5$$

Se distinguen dos casos, primero cuando se considera una única realización al azar y segundo cuando se consideran un número grande de realizaciones (en este caso cien) para poder calcular los estadísticos de conjunto.

Por razones de operatividad, en lugar de la covarianza generalizada, para cada realización, se ha estimado el variograma generalizado. Las relaciones entre covarianza generalizada y variograma generalizado para  $k = 0, 1, 2$  en el caso unidimensional valen (DIMITRAKOPOULOS, 1990):

$$\gamma_0(h) = K(0) - K(h)$$

$$\gamma_1(h) = K(0) - \frac{4}{3} K(h) + \frac{1}{3} K(2h)$$

$$\gamma_2(h) = K(0) - \frac{3}{2} K(h) + \frac{3}{5} K(2h) - \frac{1}{10} K(3h)$$



y el variograma generalizado experimental se calcula como

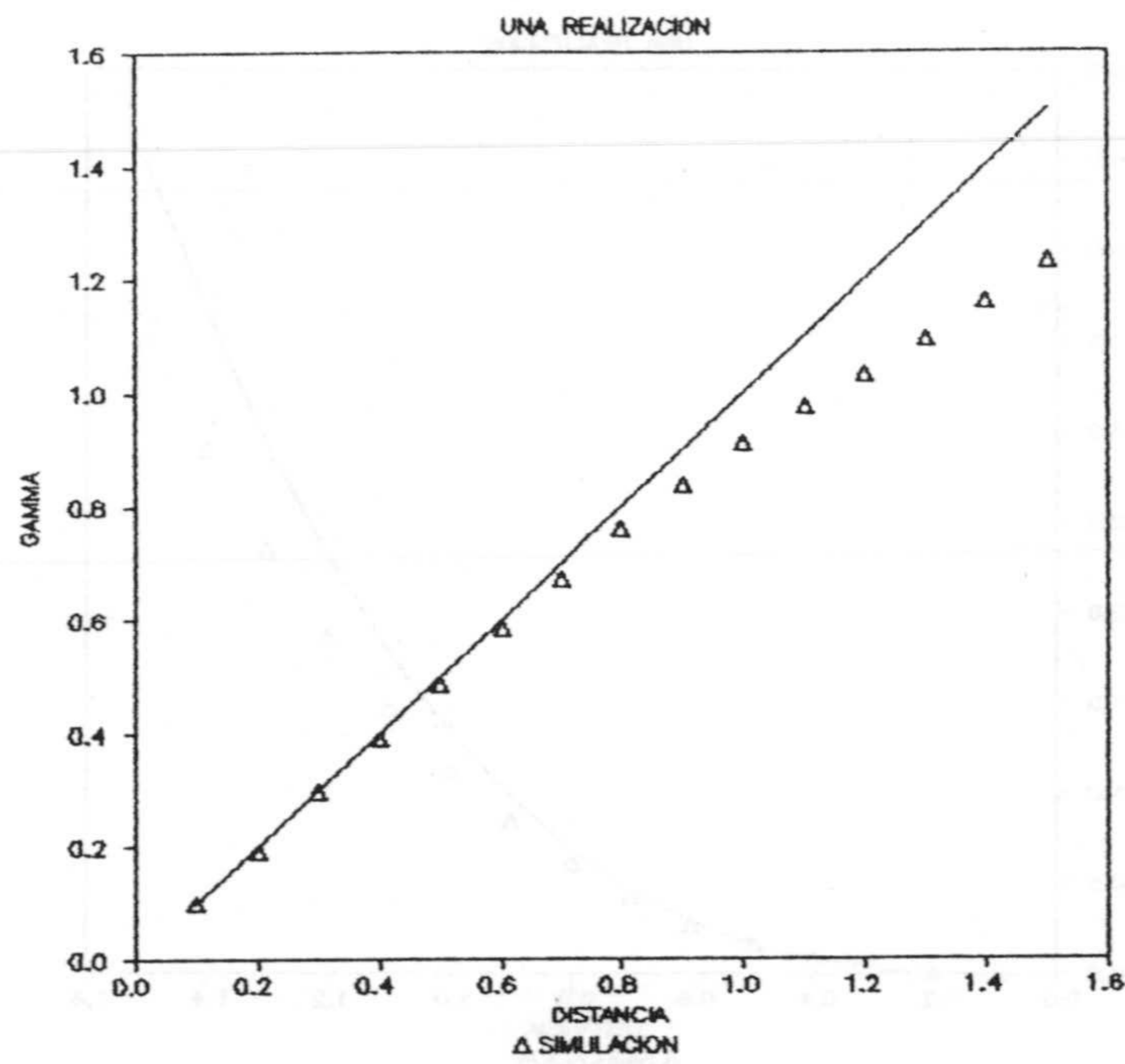
$$\gamma_1^*(h) = \frac{1}{2 \text{NP}(h)} \sum_{i=1}^{\text{NP}(h)} [Z(x) - Z(x+h)]^2$$

$$\gamma_2^*(h) = \frac{1}{6 \text{NP}(h)} \sum_{i=1}^{\text{NP}(h)} [Z(x) - 2 Z(x+h) - Z(x+2h)]^2$$

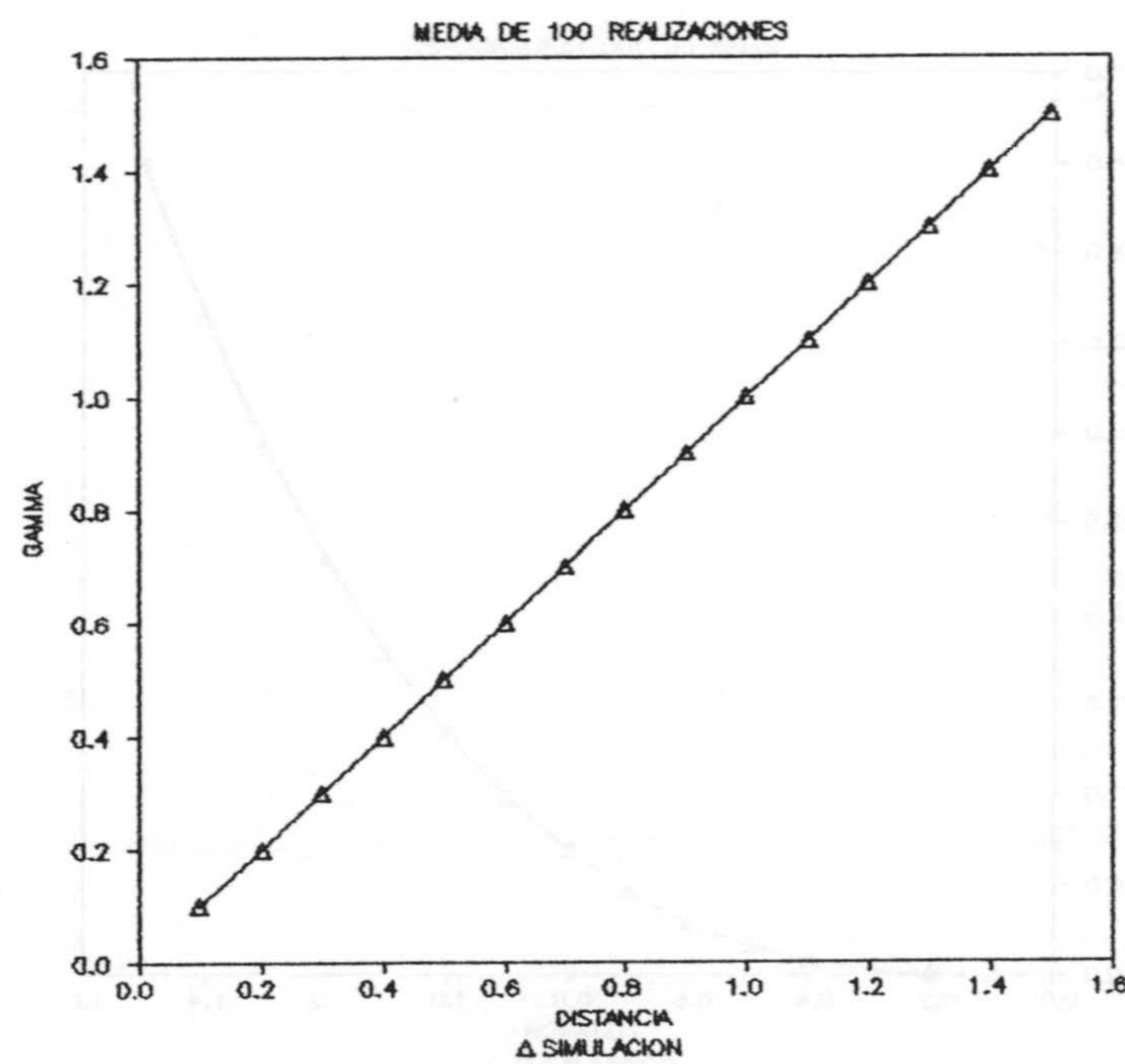
$$\gamma_3^*(h) = \frac{1}{20 \text{NP}(h)} \sum_{i=1}^{\text{NP}(h)} [Z(x) - 3 Z(x+h) + 3 Z(x+2h) - Z(x+3h)]^2$$

En base a las anteriores relaciones ha sido posible calcular el variograma generalizado teórico y el variograma generalizado experimental para cada realización. Las figuras 4.17 a 4.20 muestran los resultados obtenidos para (a) una realización y (b) cien realizaciones.

Es notorio como las discrepancias entre los valores teóricos y los valores experimentales tienden a anularse al considerar valores de conjunto, esto es, valores medios de un número alto de realizaciones que en este caso particular ha sido de cien.



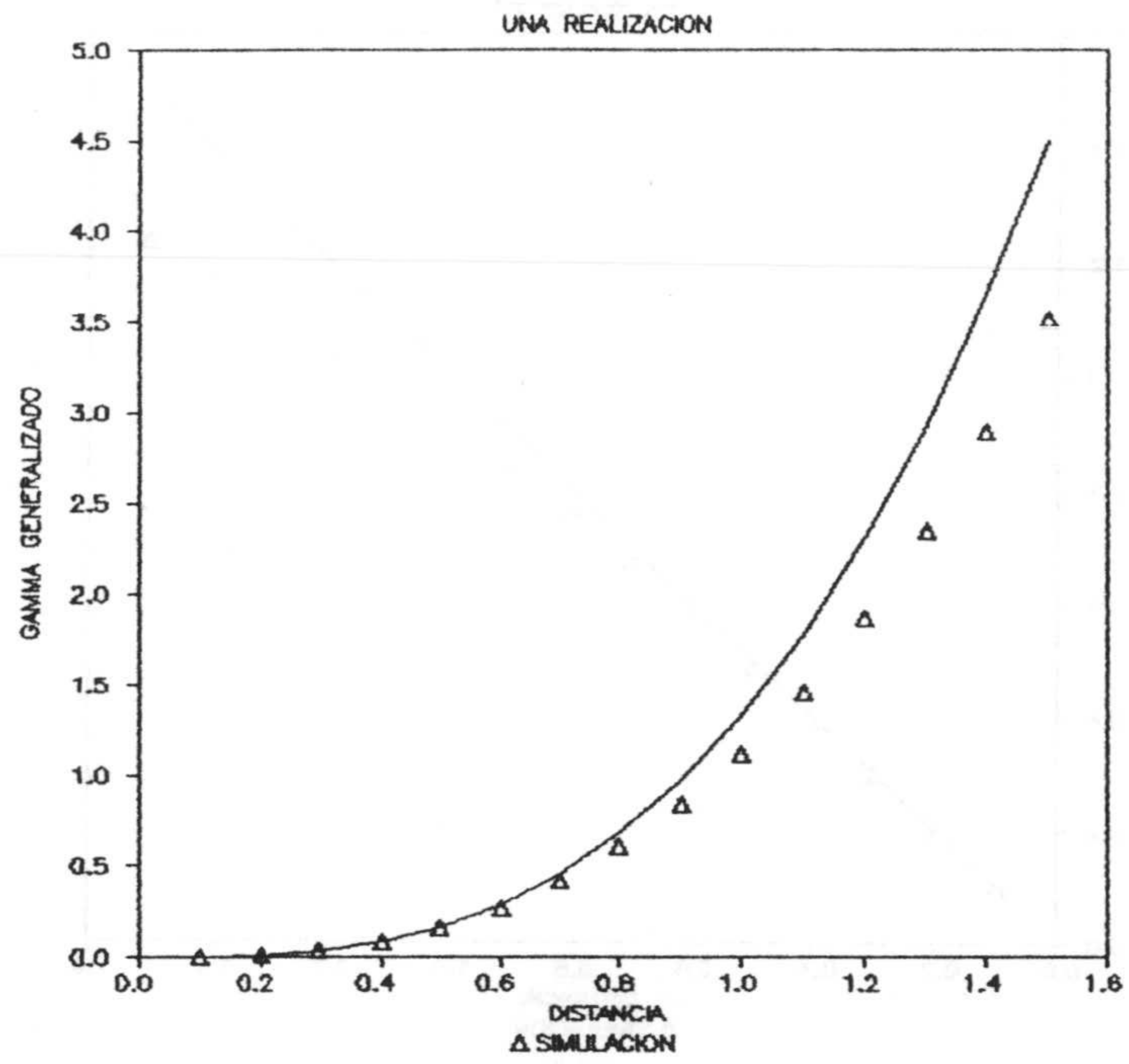
a



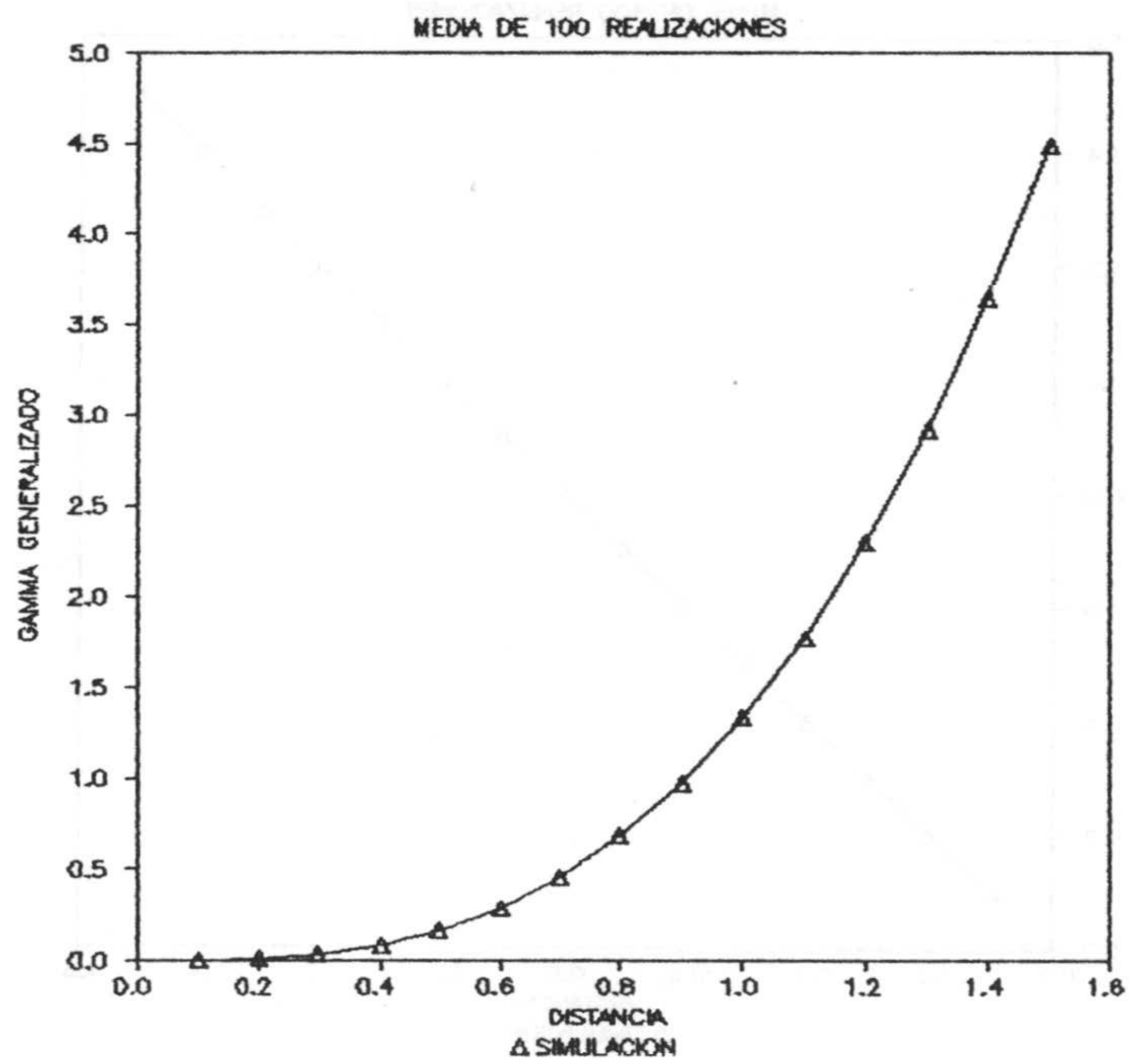
b

Figura 4.17. Simulación FAIK con  $K(h) = -|h|$ .  
 a. Una realización.  
 b. Cien realizaciones



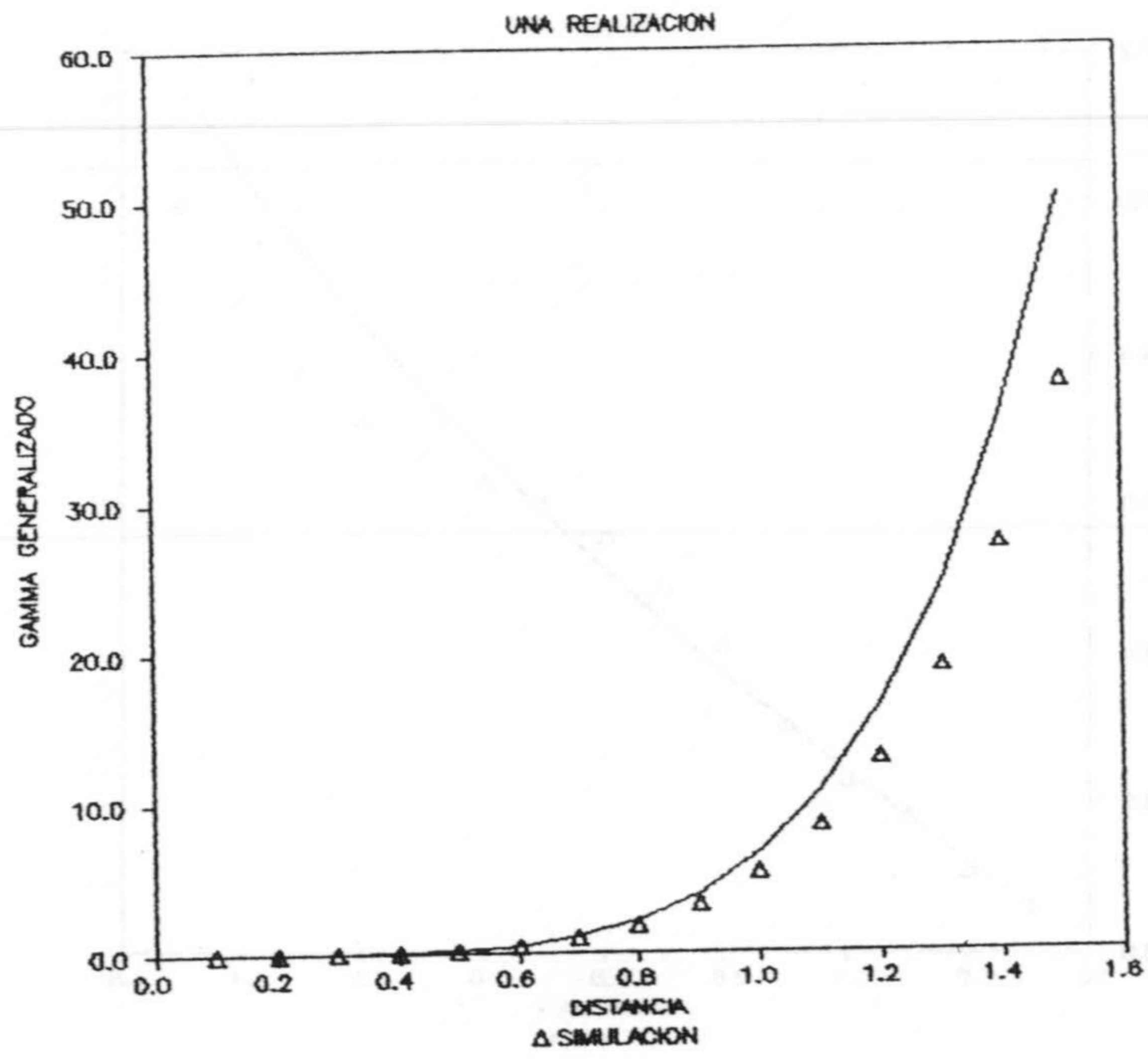


a

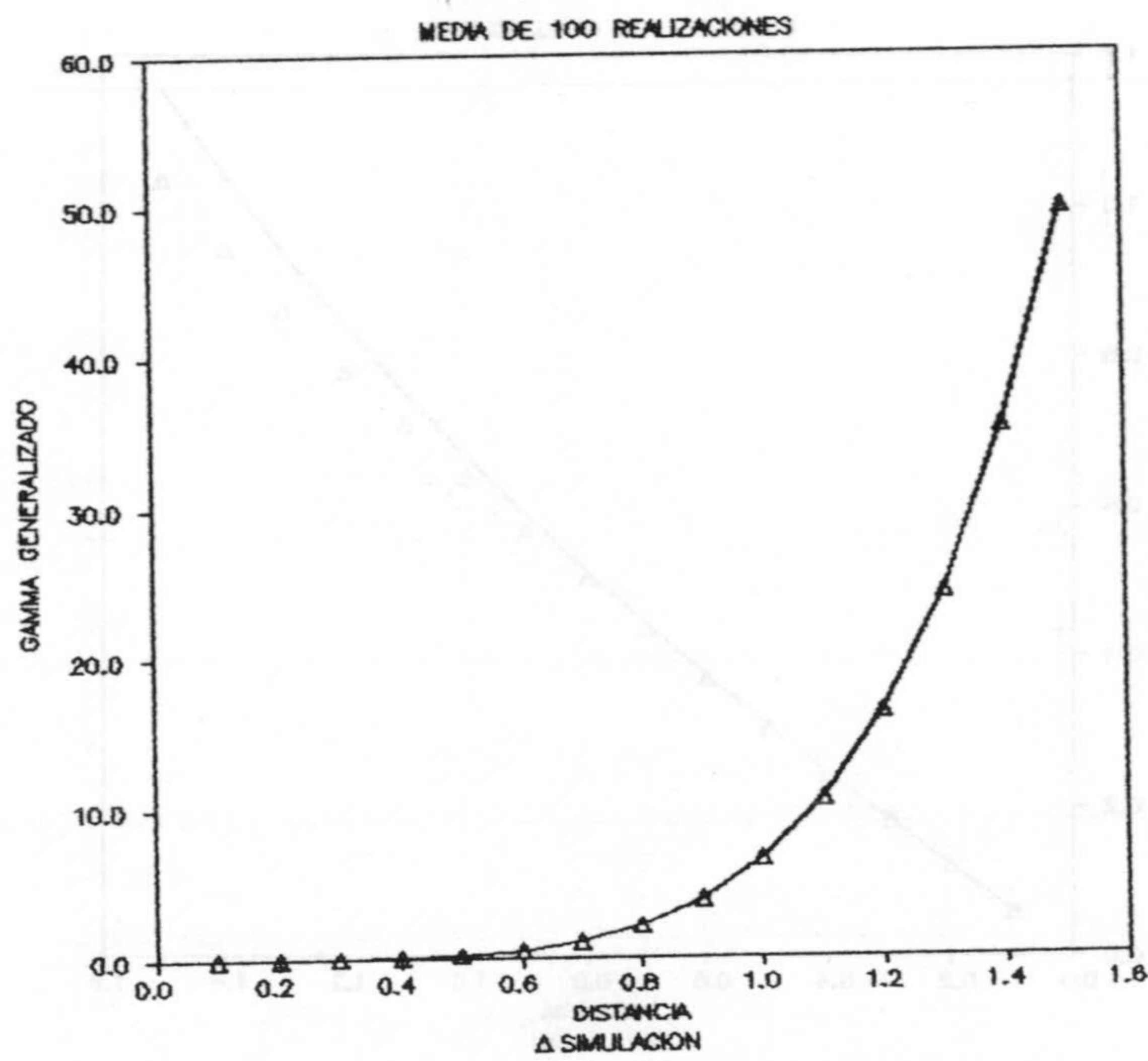


b

Figura 4.18. Simulación FAIK con  $K(h) = |h|^3$ .  
 a. Una realización.  
 b. Cien realizaciones.



a

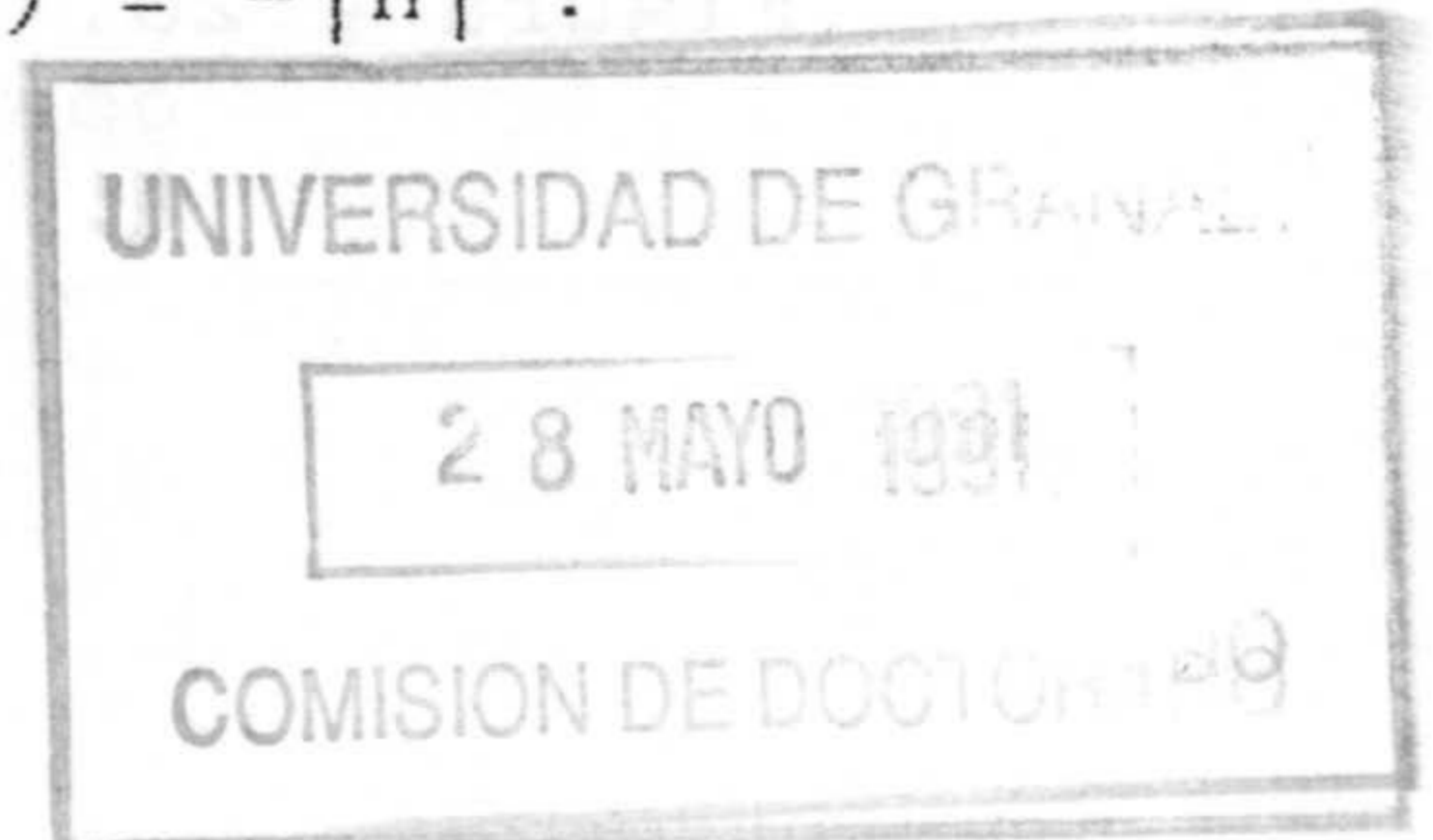


b

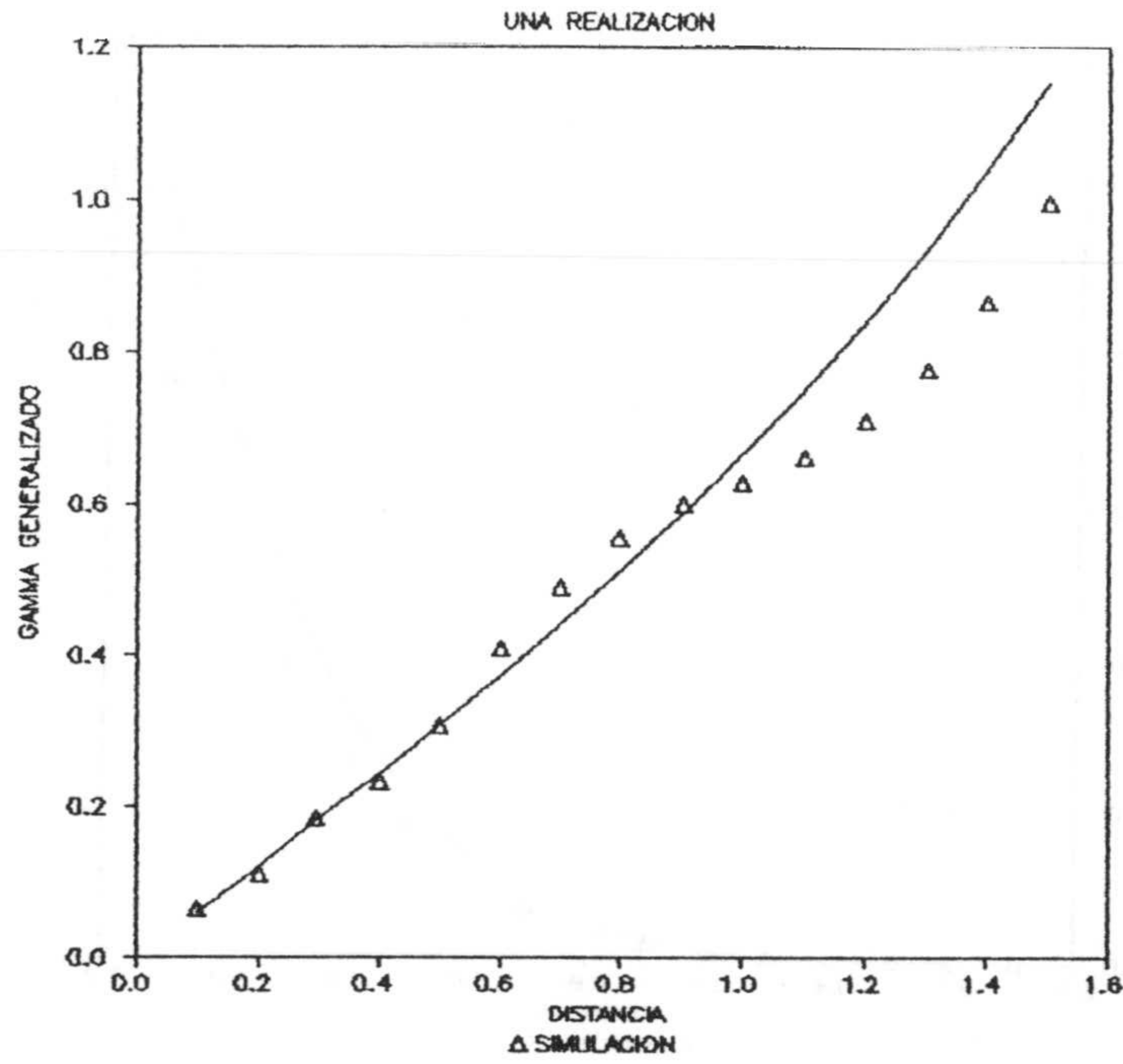
Figura 4.19. Simulación FAIK con  $K(h) = -|h|^5$ .

a. Una realización.

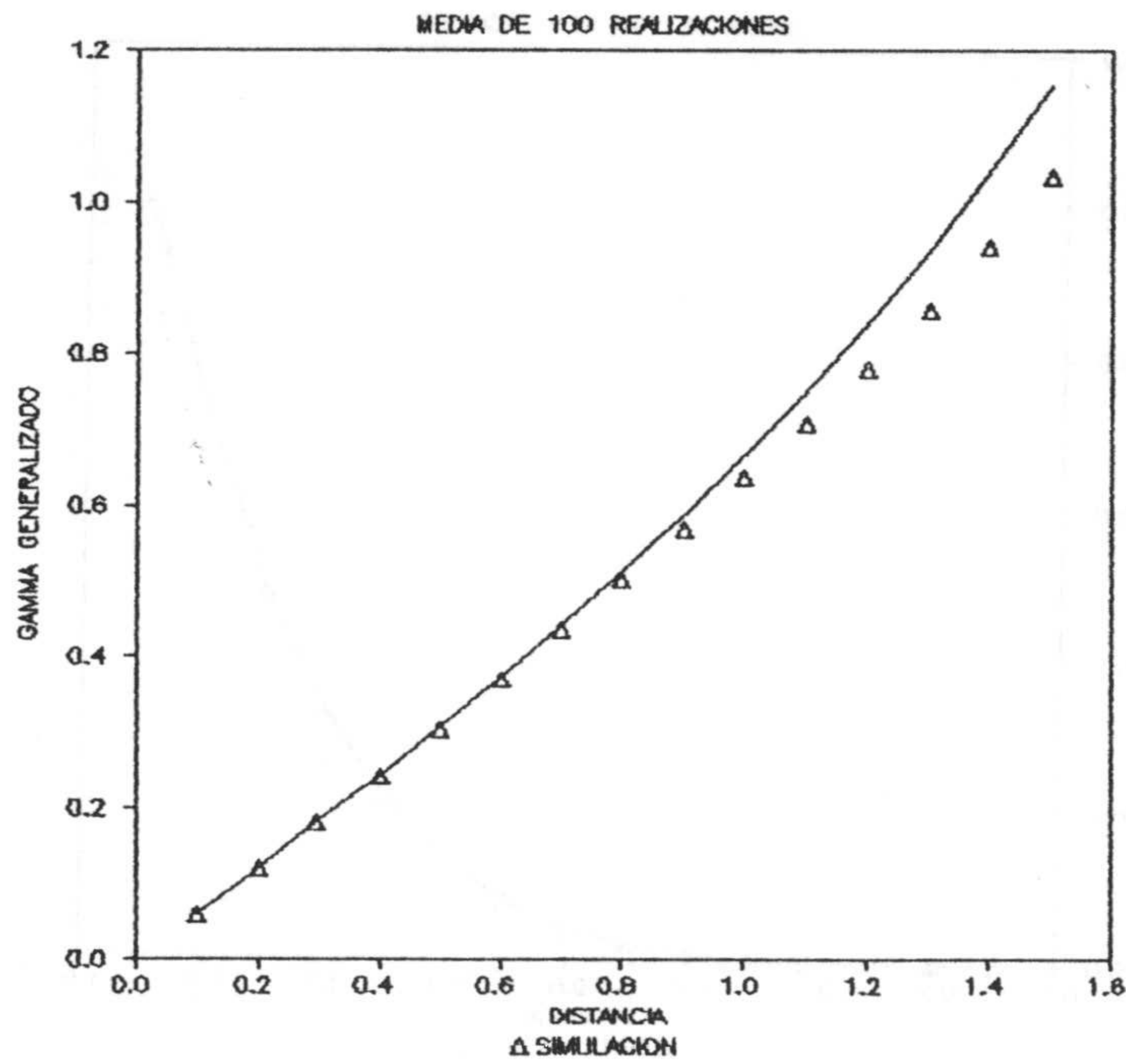
b. Cien realizaciones.







a



b

Figura 4.20. Simulación FAIK  
 con  $K(h) = -|h| + 0.1|h|^3 - 0.001|h|^5$   
 a. Una realización. b. Cien realizaciones.

La extensión de la simulación FAIK a un espacio n-dimensional es inmediata si se aplica el método de las Bandas Rotantes.

Para generar una función aleatoria intrínseca con una covarianza generalizada de orden k isótropa del tipo polinomial:

$$K_n(r) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} \frac{C_p r^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

donde:

n : dimensión

r = |h|

C<sub>p</sub> : coeficientes reales.

aplicando el operador de las Bandas Rotantes se obtiene la covarianza generalizada unidimensional de orden k que se ha de imponer a las realizaciones unidimensionales sobre las rectas y que vale (MATHERON, 1973):

$$K_1(h) = \sum_{p=0}^k (-1)^{p+1} a_p \frac{|h|^{2p+1}}{(2p+1)}$$

con la relación entre coeficientes:



$$C_p = B_{n,p} a_p \quad \text{con} \quad B_{n,p} = \frac{p! \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(p + \frac{1+n}{2}\right)}$$

Las figuras 4.21 a 4.24 muestran ejemplos de diferentes realizaciones de funciones aleatorias intrínsecas para diferentes órdenes de la deriva. Se ha utilizado el método de las Bandas Rotantes con sólo 12 rectas al igual que *MANTOGLOU* y *WILSON (1981)*. *DIMITRAKOPOULOS (1990)* utiliza 100 rectas con el siguiente método de generación del proceso de Wiener:

$$W(x+h) = W(x) + R$$

donde  $R$  es una variable aleatoria que puede tomar los valores:

$$R \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } 0.5 \\ -1 & \text{con probabilidad } 0.5 \end{cases}$$

*CHILES (1977)* con un método mucho más simple de generar un proceso de Wiener utiliza 180 rectas.

En todas las figuras, en el punto central del campo simulado, la función aleatoria toma un valor nulo al situarse en el centro del campo el origen de las bandas rotantes y por consiguiente el origen del proceso de Wiener, siendo conocido que:

$$W_0(\emptyset) = W_1(\emptyset) = W_2(\emptyset) = \emptyset$$

existiendo además una cierta simetría de la deriva como se

refleja en la cartografía de isovalores.

Si el origen de las bandas se coloca en la esquina inferior izquierda se obtienen simulaciones del tipo a las representadas en la figura 4.25 con una marcada anisotropía en la deriva.

En cuanto a posibles anisotropías de la función aleatoria intrínseca de orden  $k$ , *MATHERON (1973)* y *DELFINER (1976)* argumentan que las anisotropías se tratan con la expresión polinomial de grado  $k$  filtrada (la deriva).

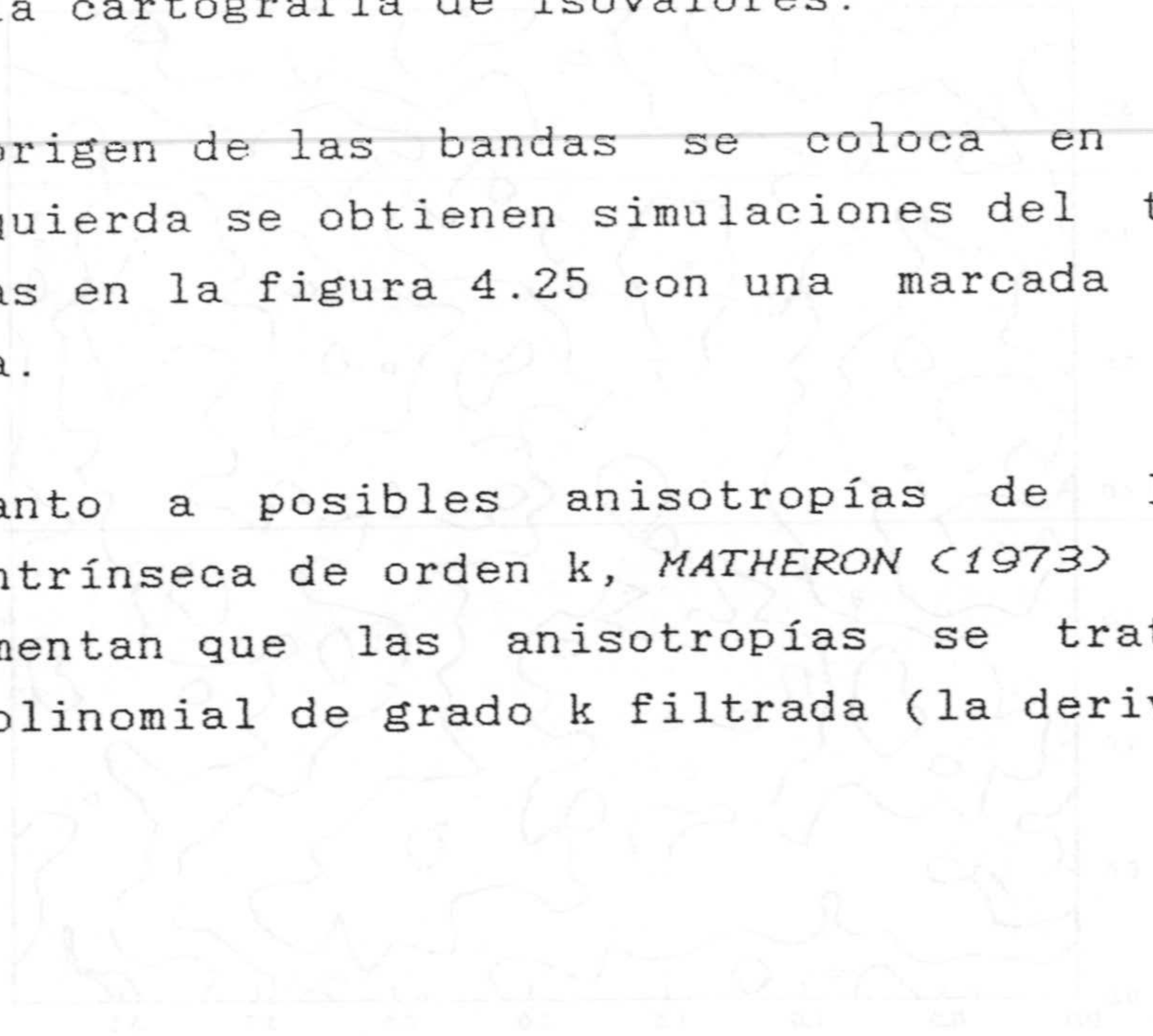
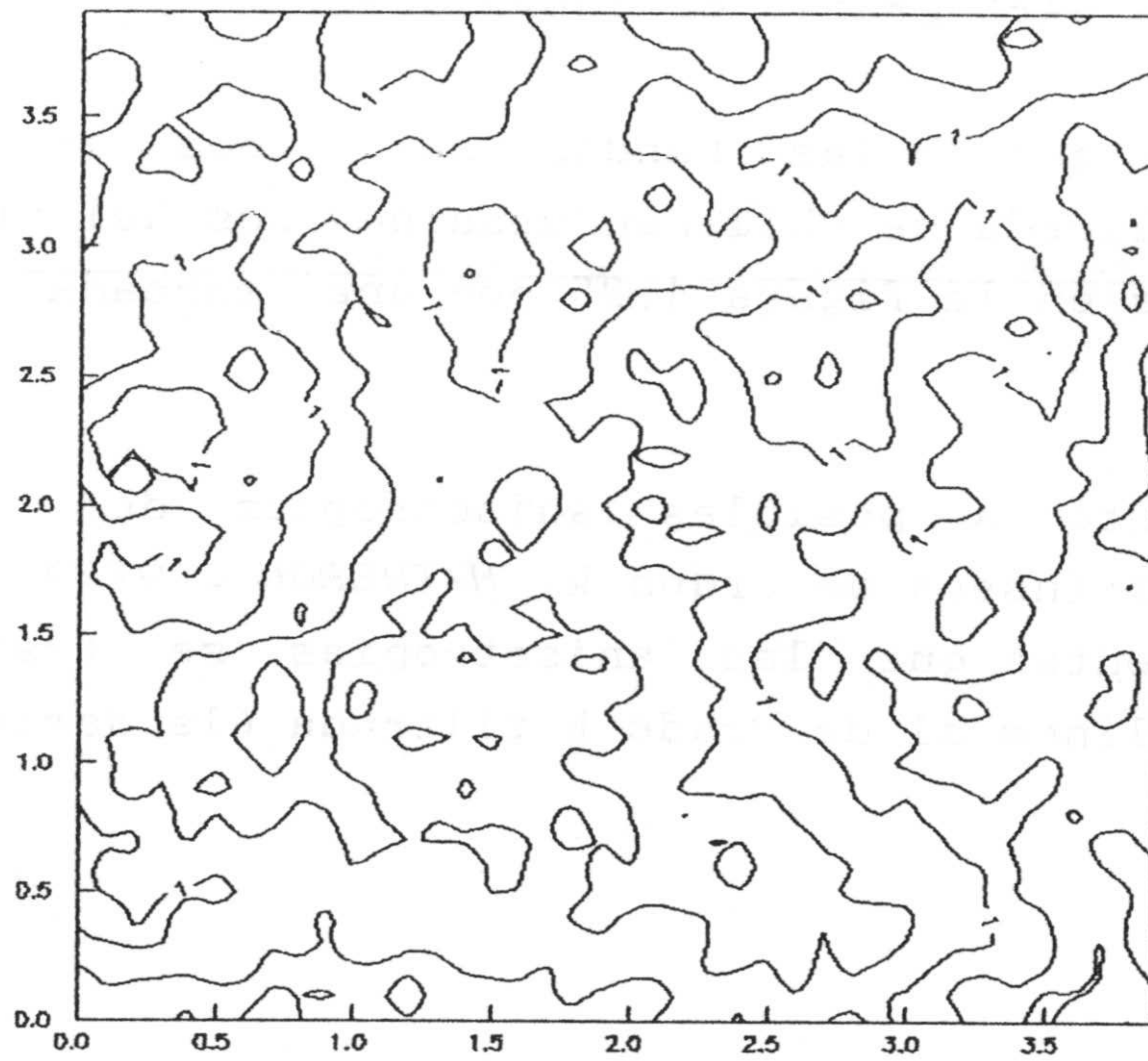
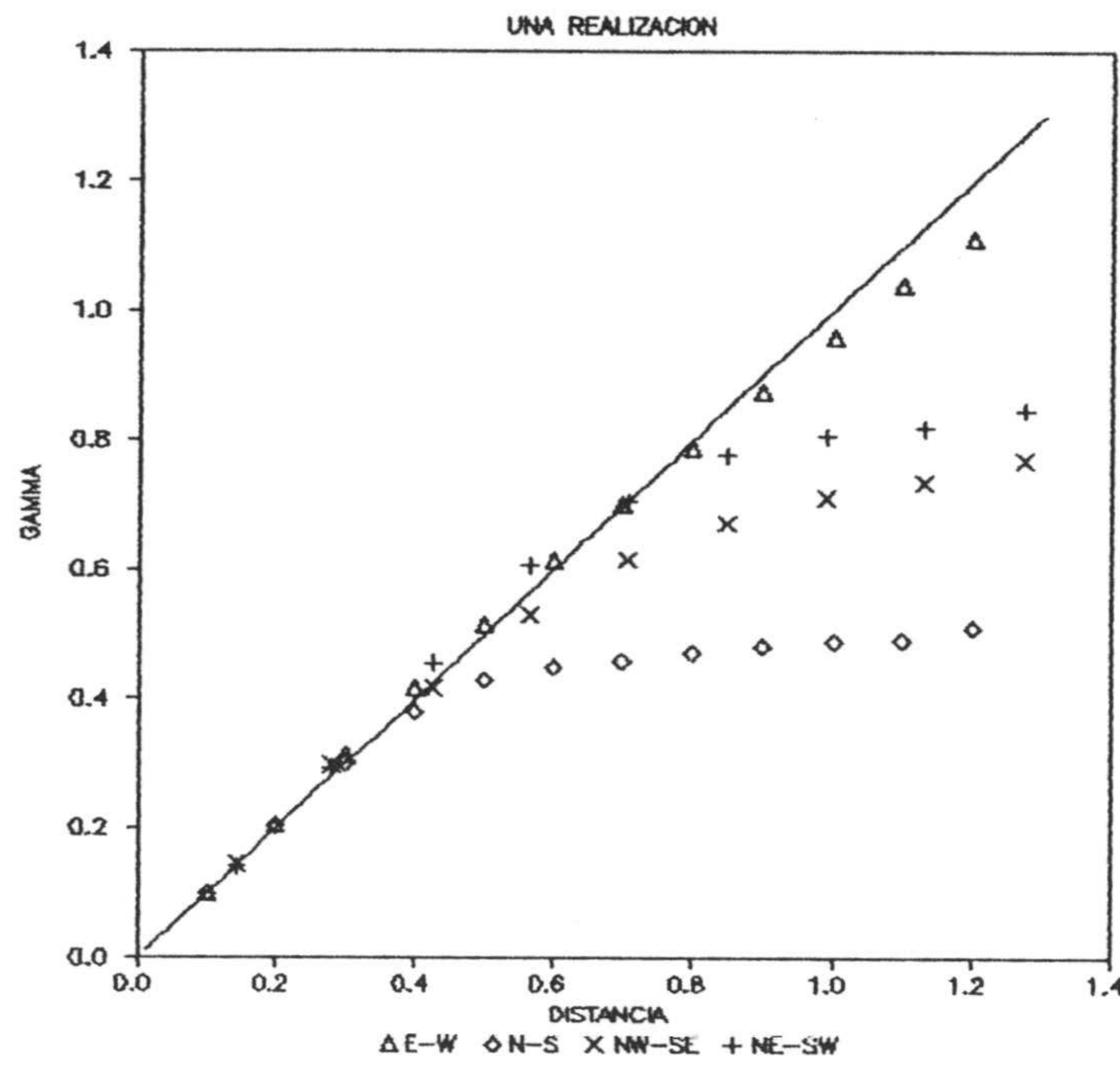


Figura 4.25. Simulaciones de tipo a en el tiempo de realización de un programa de simulación y control.



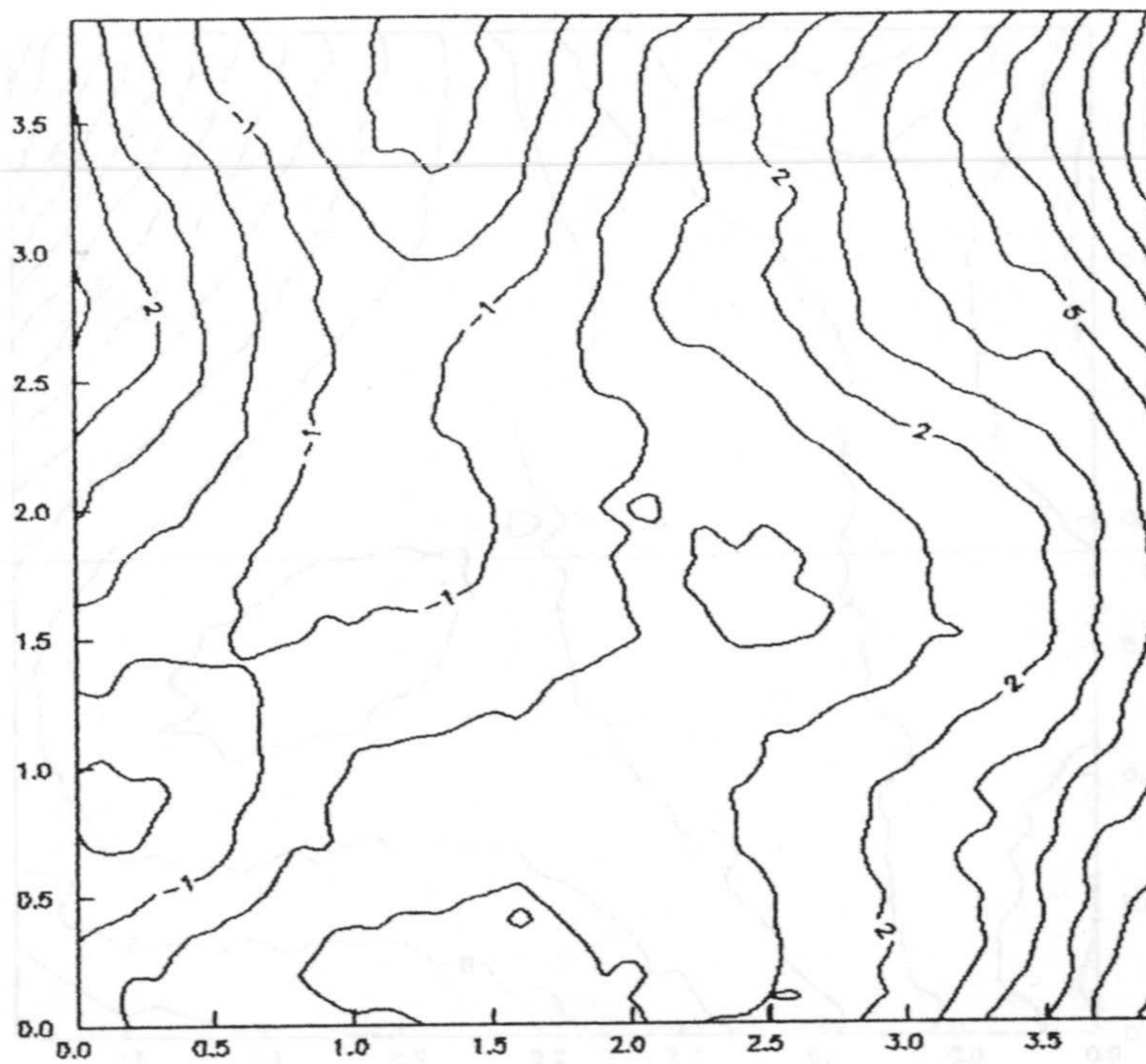


a

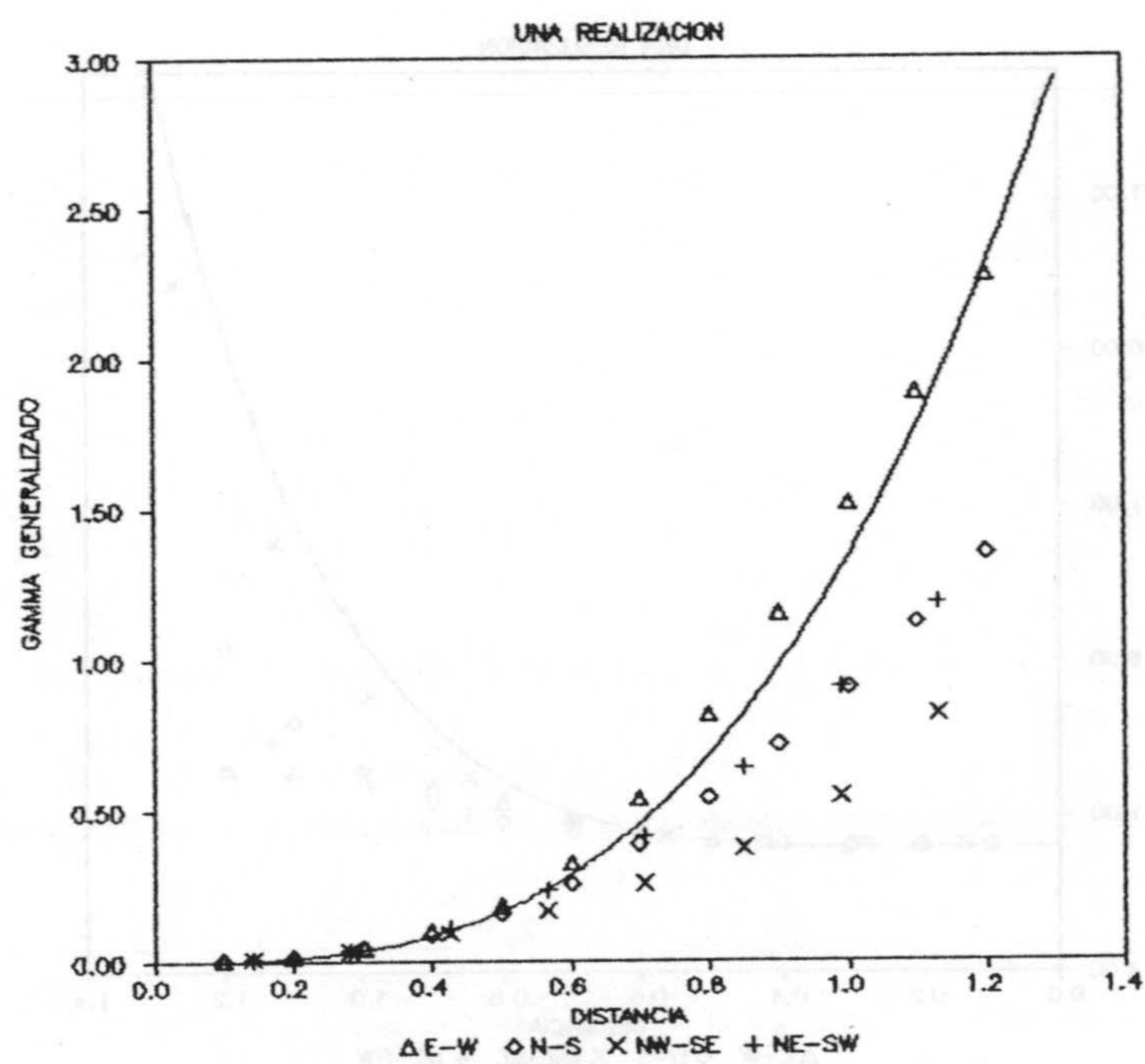


b

Figura 4.21. Simulación FAI- $\emptyset$  EN 2D.  
 a. Ejemplo de realización.  
 b. Variograma generalizado simulado y teórico.



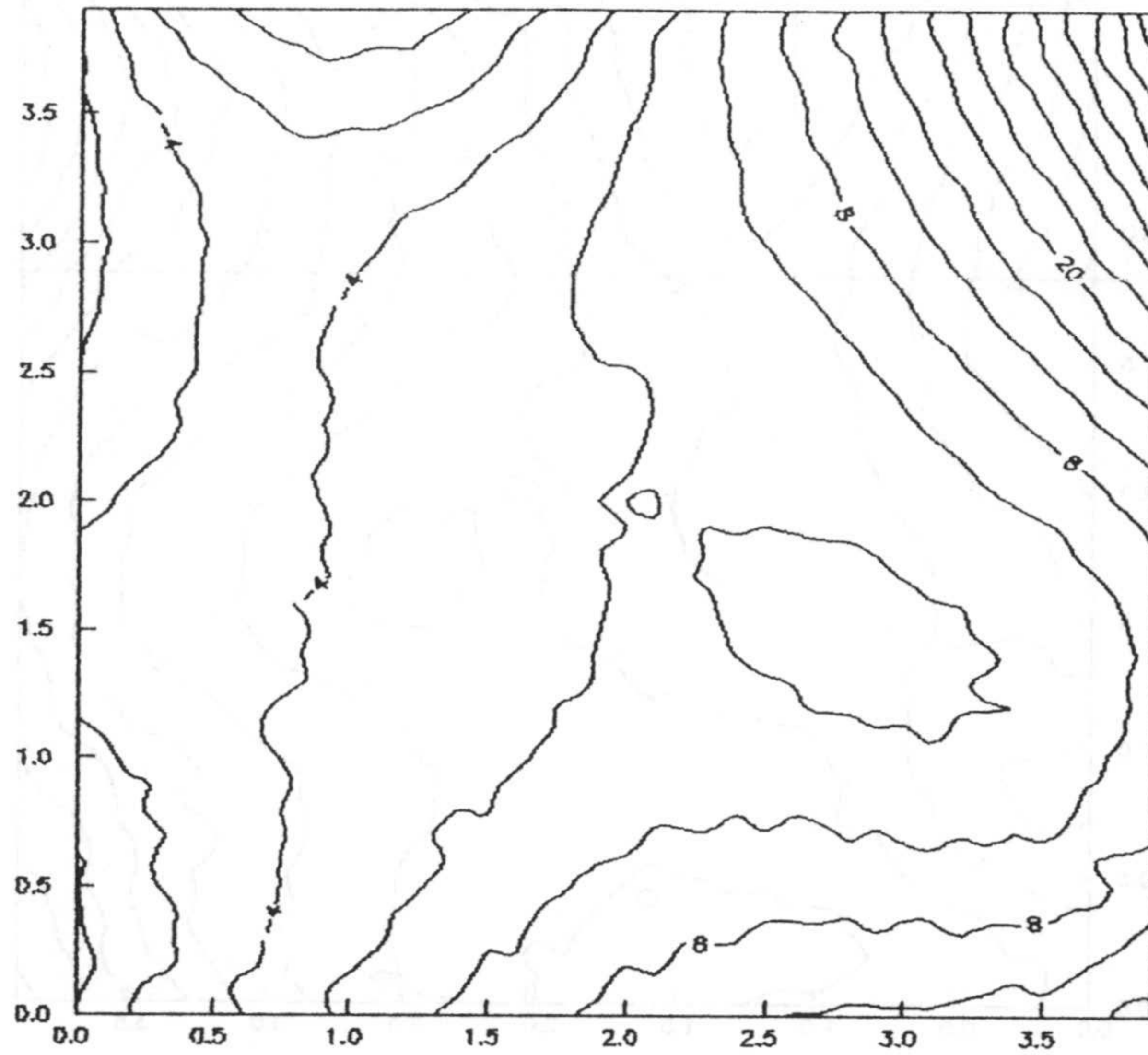
a



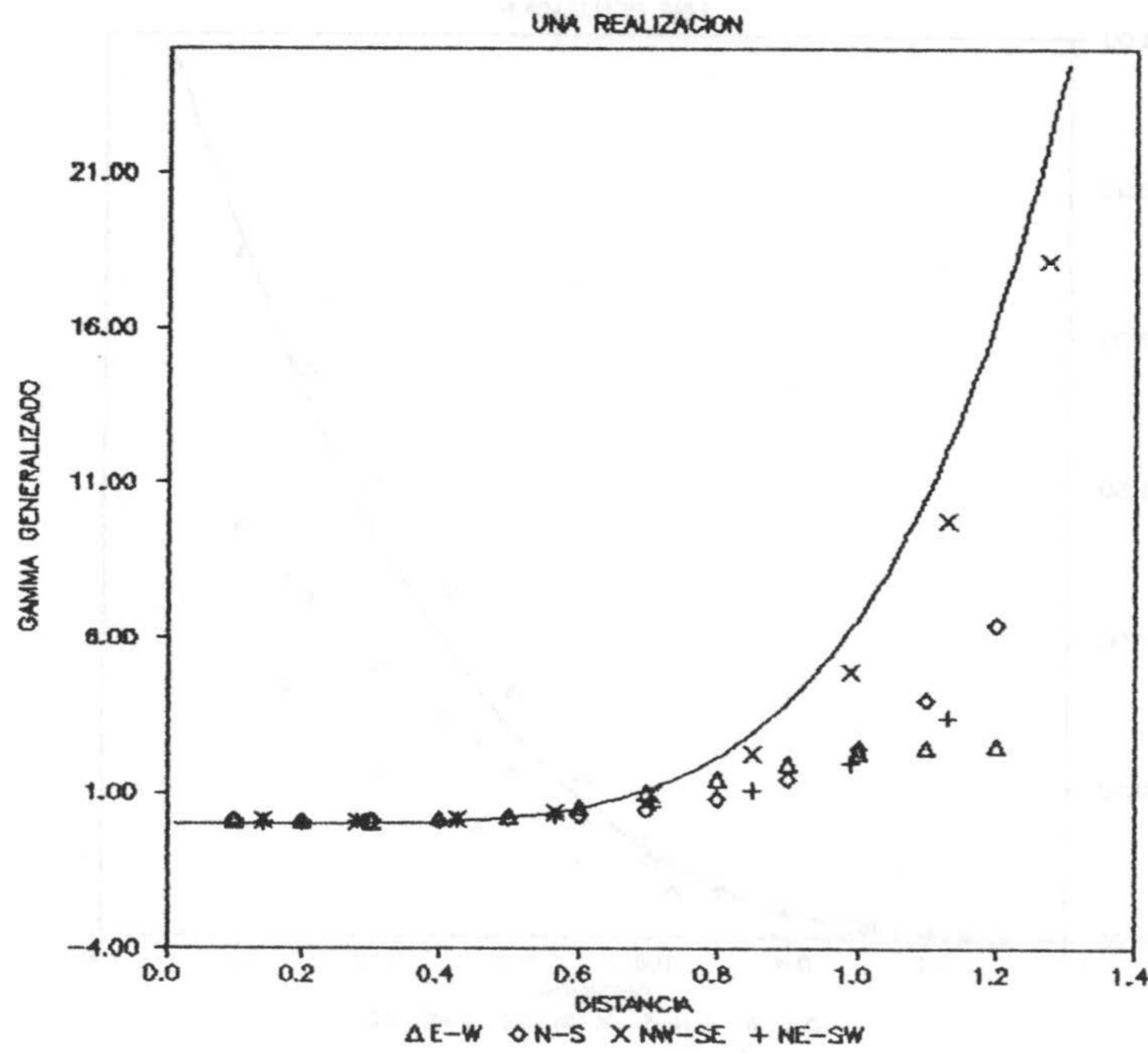
b

Figura 4.22. Simulación FAI-1.  
 a. Ejemplo de una realización.  
 b. Variograma generalizado simulado y teórico.



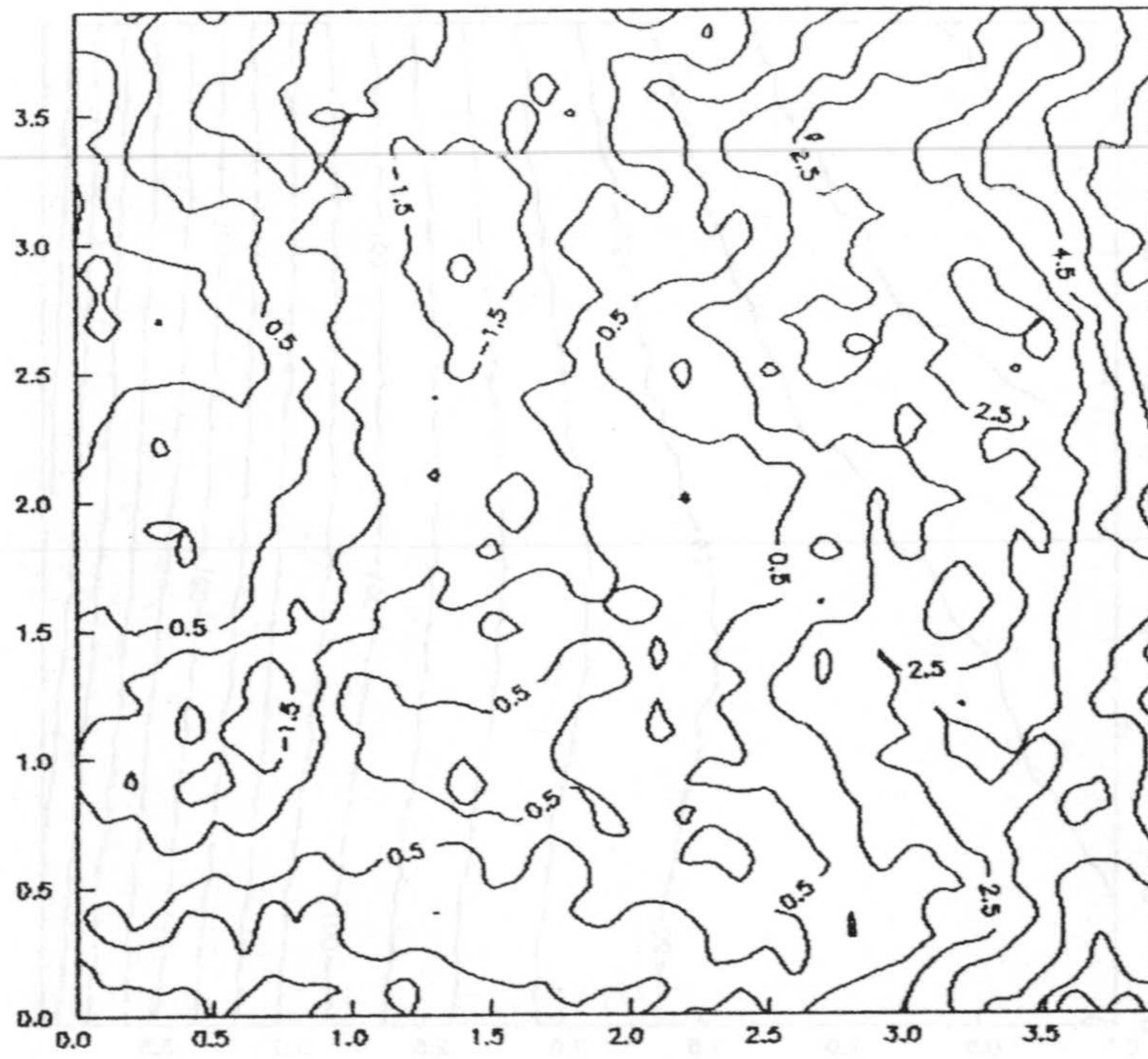


a

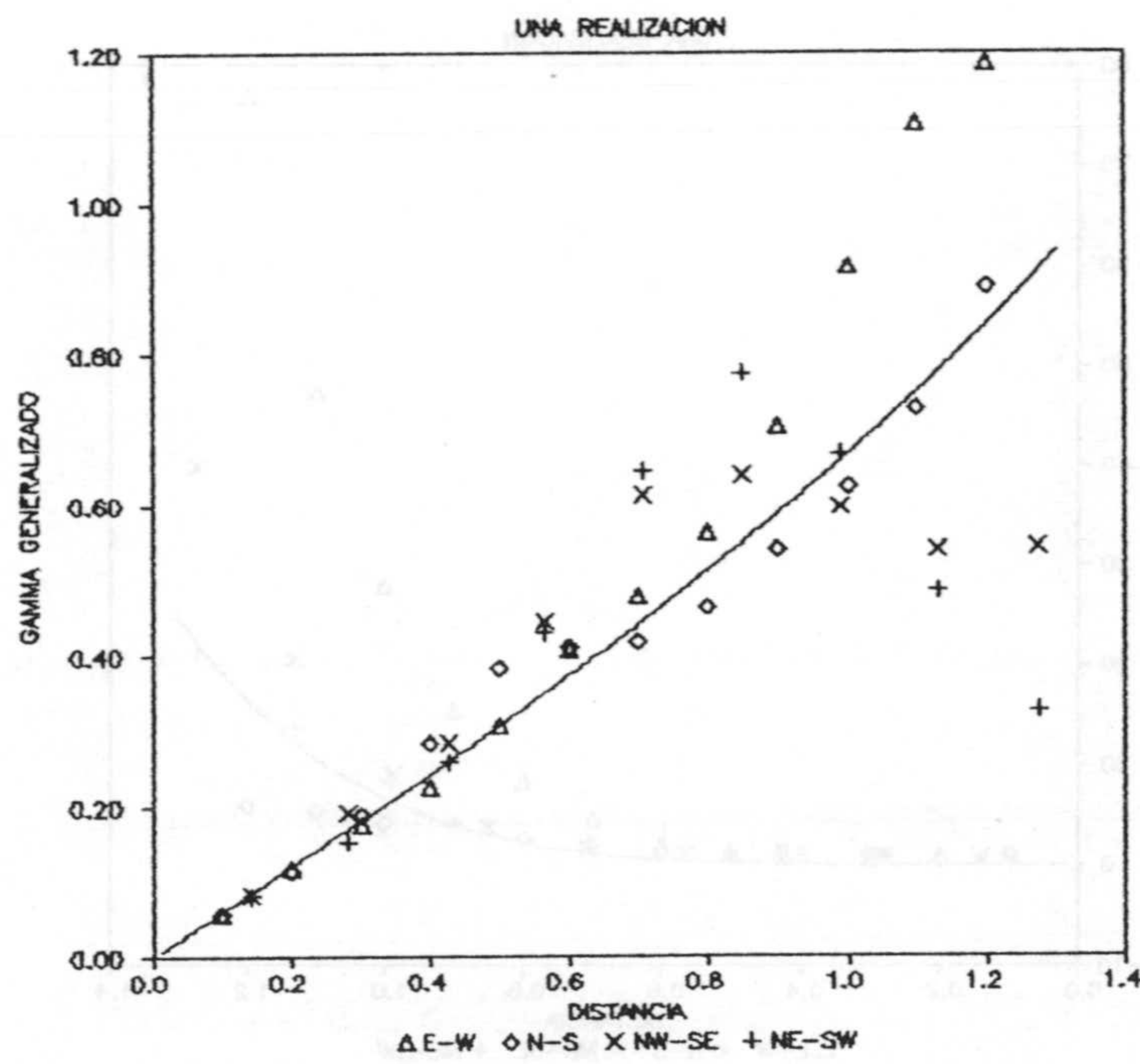


b

Figura 4.23. Simulación FAI-2.  
 a. Ejemplo de una realización.  
 b. Variograma generalizado simulado y teórico.



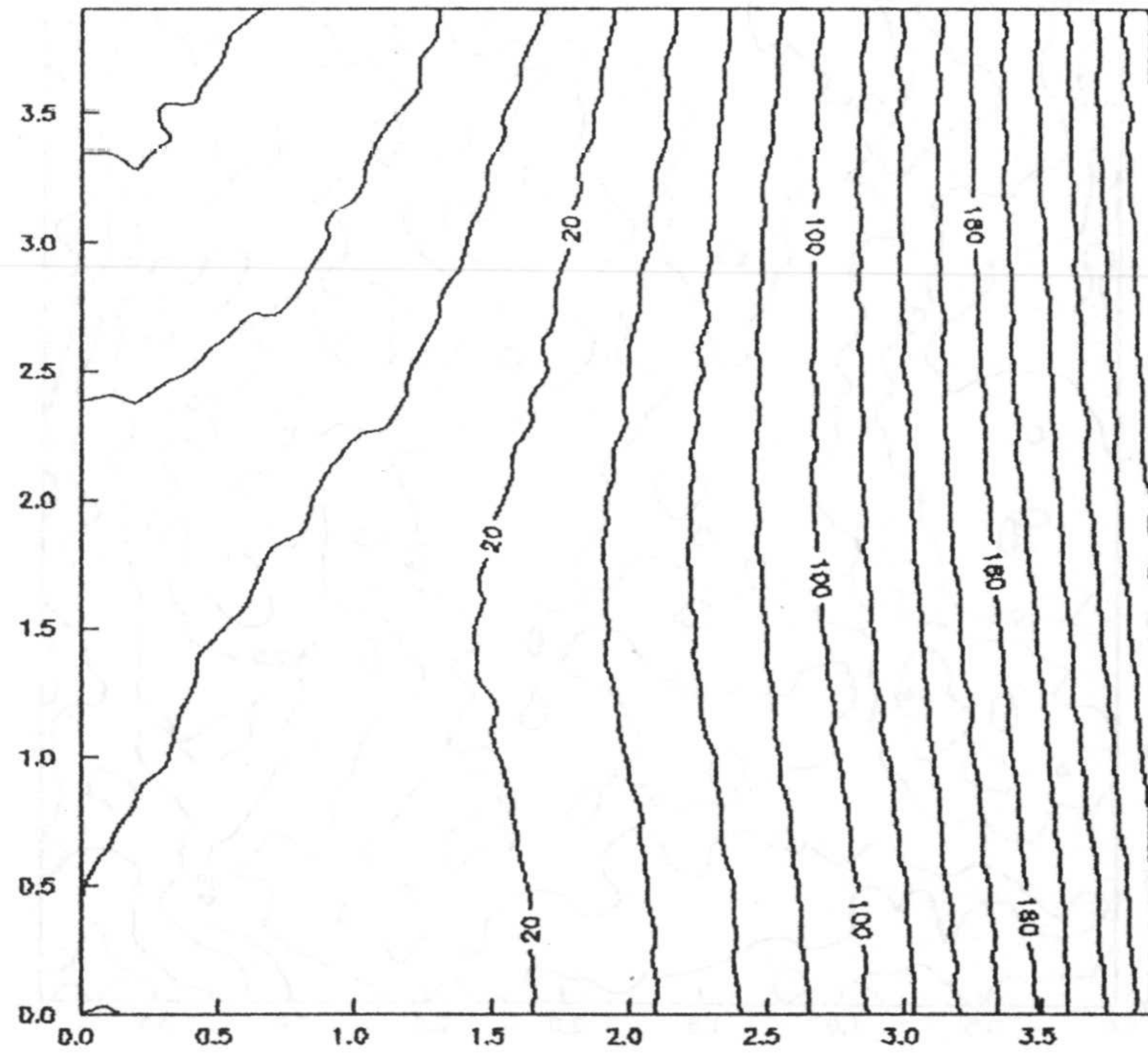
a



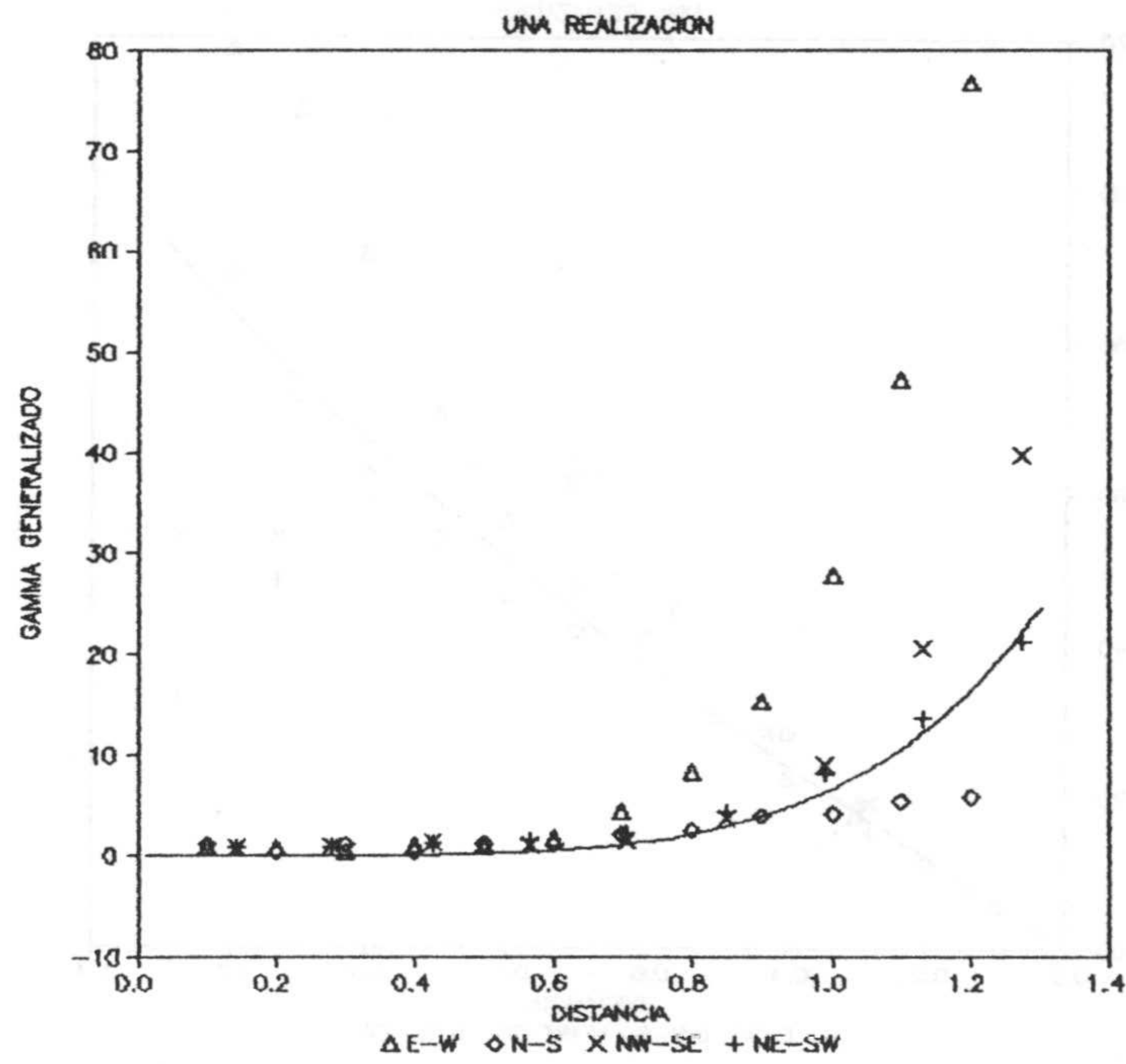
b

Figura 4.24. Simulación FAI-2  
 a. Ejemplo de una realización.  
 b. Variograma generalizado simulado y teórico.





a



b

Figura 4.25. Simulación FAI-2.  
 a. Ejemplo de realización.  
 b. Variograma generalizado teórico y simulado.



### 3.4. Metodología del krigeaje residual

El tercer enfoque que he considerado para la modelización de funciones aleatorias no estacionarias es el krigeaje residual propuesto por NEWMAN y JACOBSON (1984).

El fundamento del método radica en la modelización simultánea de la deriva y el variograma de los residuos. Tal operación se realiza mediante un proceso iterativo que va dirigido a encontrar modelos estables de deriva y variograma de los residuos. El primer paso del proceso consiste en el ajuste de una expresión polinomial a los valores experimentales por medio de mínimos cuadrados ordinarios (como en el análisis de tendencias) y cálculo del variograma de los residuos. Este proceso se repite incrementando en uno el orden de la deriva hasta que el variograma de los residuos es aceptable en el sentido de presentar una meseta clara y sin anisotropías manifiestas.

El segundo paso consiste en estimar la deriva por mínimos cuadrados generalizados (teniendo en cuenta el variograma de los residuos). Este proceso permite calcular los nuevos residuos y por consiguiente su nuevo variograma. Este proceso se va repitiendo hasta que deriva estimada y variograma de los residuos toman valores estables.

Es de destacar que, a diferencia del enfoque de krigeaje Universal y del enfoque FAIK, en krigeaje residual se ajusta una expresión polinomial al sistema como un conjunto y se efectúa un krigeaje de los residuos.

Las ecuaciones de krigeaje residual quedan:



$$\sum_{j=1}^N \lambda_0^j \gamma_R(x_i - x_j) + \mu_0 = \gamma_R(x_i - x_0)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1$$

$$i = 1, \dots, N$$

Con  $\mu_0$  multiplicador de Lagrange y siendo  $Z^*(x_0)$  el estimador de  $Z(x_0)$  de la forma:

$$Z^*(x_0) = m^*(x_0) + R^*(x_0)$$

Donde  $m^*(x_0)$  es la estimación de la deriva en el punto  $x_0$  por mínimos cuadrados generalizados y  $R^*(x_0)$  es la estimación del residuo en el punto  $x_0$  por krigeaje.

La simulación de funciones aleatorias estacionarias en el marco del krigeaje residual consiste en estimar la deriva por mínimos cuadrados generalizados y generar diferentes realizaciones del residuo estacionario de segundo orden  $R(x)$  por el método clásico de simulación no condicional.

A continuación expongo los resultados de una realización de simulación condicional de la variable cota topográfica cuyas características experimentales se expusieron en el apartado de krigeaje universal.

El primer paso ha consistido en ajustar, por mínimos cuadrados generalizados, una deriva de orden progresivamente creciente hasta alcanzar un residuo estable en el sentido indicado con anterioridad. Esto se ha conseguido para una deriva de orden 4. La figura 4.26a muestra la deriva estimada de orden tres y la figura 4.26b el residuo experimental que se obtiene al sustraer a los valores experimentales la deriva estimada.



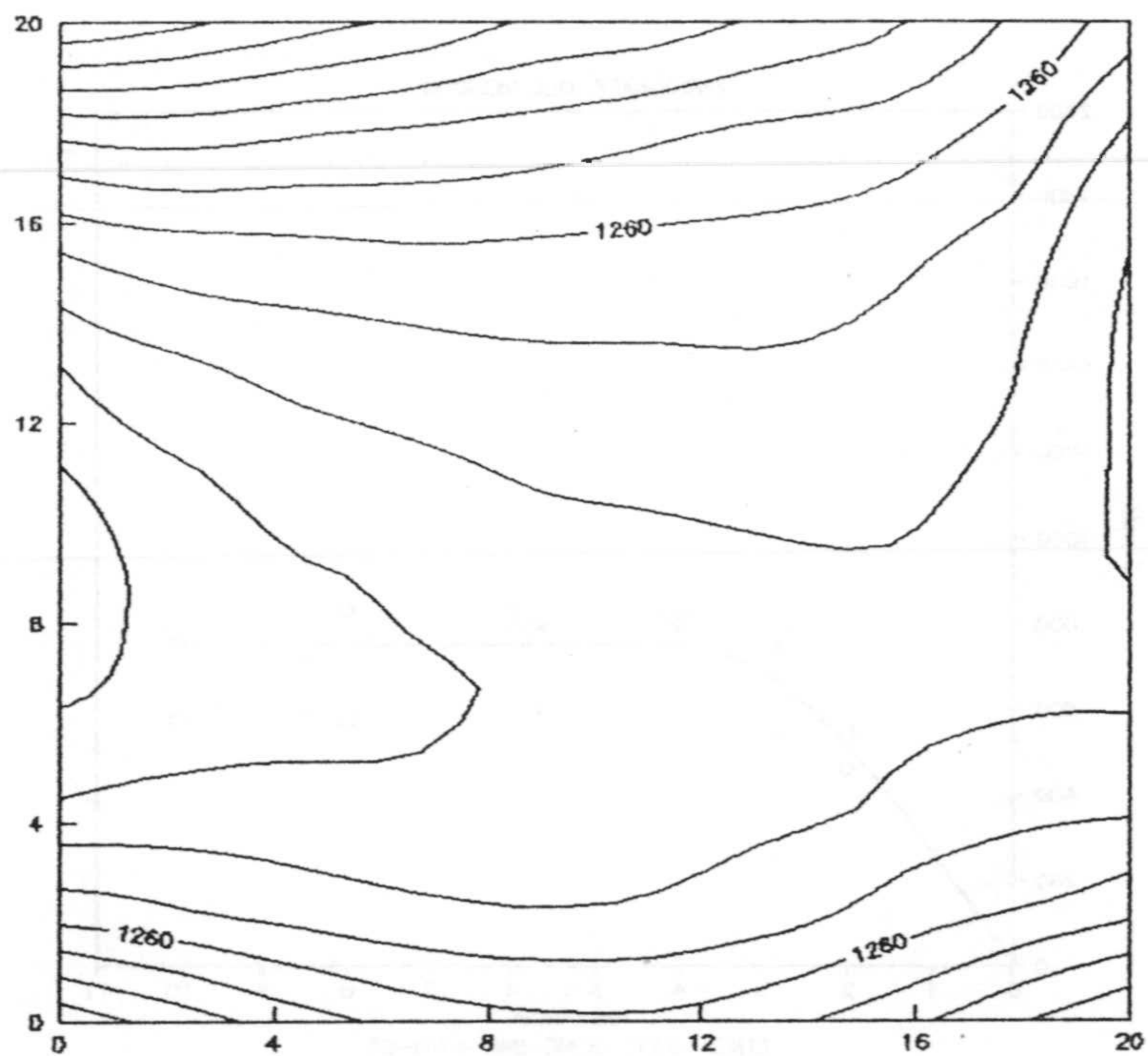


Figura 4.26a. Deriva estimada de orden 4.

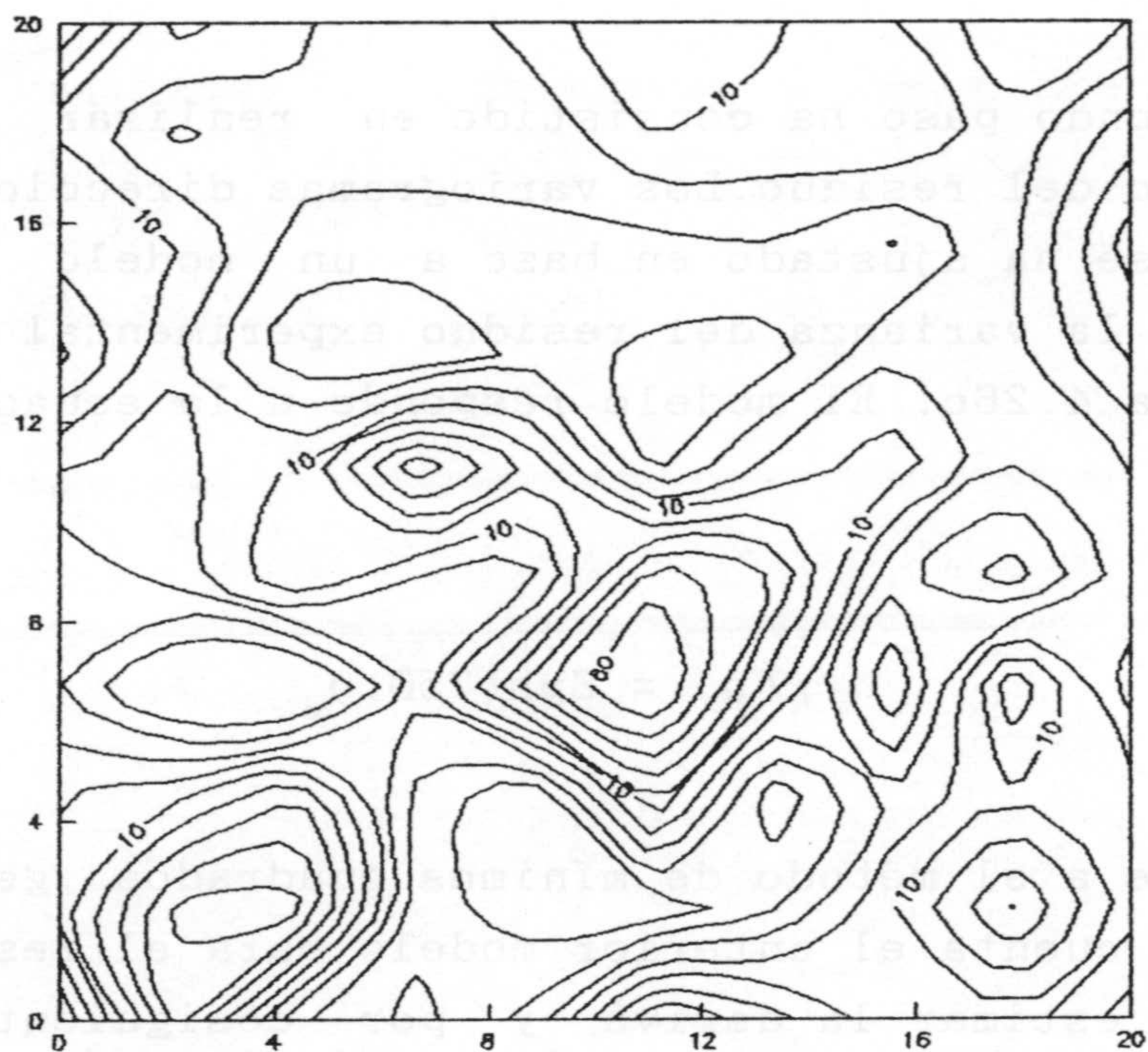


Figura 4.26b. Residuo experimental.



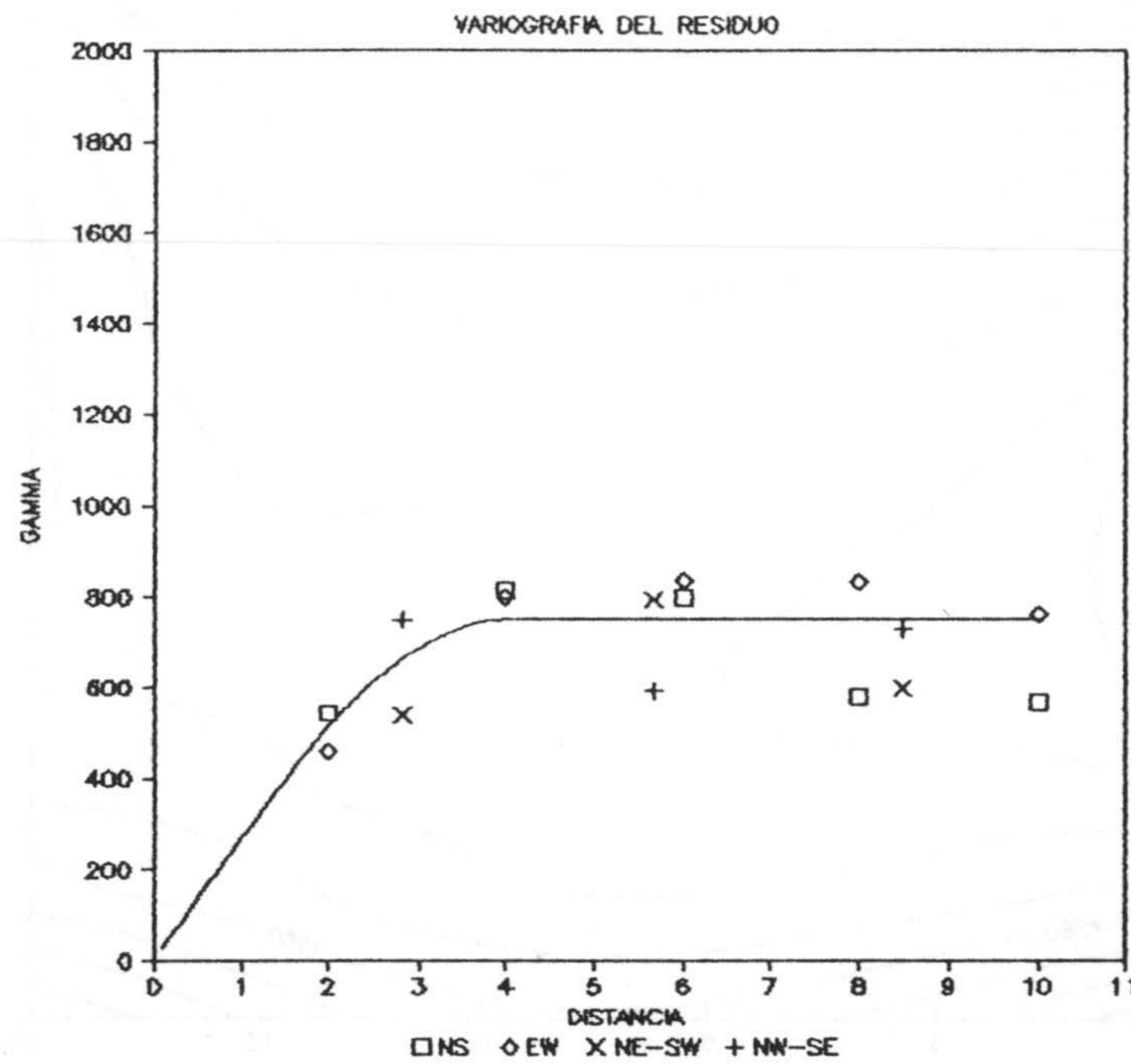


Figura 4.26c. Variografía direccional del residuo y modelo teórico.

El segundo paso ha consistido en realizar el análisis variográfico del residuo. Los variogramas direccionales y el modelo que se ha ajustado en base a un modelo que tuviese como meseta la varianza del residuo experimental se muestran en la figura 4.26c. El modelo responde a la ecuación:

$$\gamma(h) = \text{Sph}(750.)_4$$

En base a el método de mínimos cuadrados generalizados, teniendo en cuenta el anterior modelo para el residuo, se ha procedido a estimar la deriva y por consiguiente un nuevo residuo. Se ha comprobado que el comportamiento variográfico del residuo no experimenta un incremento significativo aunque se varíe el modelo anterior para acomodarlo más a la

variografía experimental.

Por ello he decido adoptar la descomposición primera en deriva de orden cuatro que responde a la ecuación:

$$\begin{aligned} Z = & 1482.602 - 22.220 X - 105.681 Y - 1.027 X^2 + 10.514 Y^2 \\ & + 8.016 X Y + .210 X^3 - .484 Y^3 - .324 X^2 Y - .334 X Y^2 \\ & - .005 X^4 + .011 Y^4 - .001 X^3 Y - .001 X Y^3 + .014 X^2 Y^2 \end{aligned}$$

y el residuo con el modelo de variograma anteriormente expuesto.

He realizado una simulación condicional de una malla regular de 32 x 32 puntos dispuesto a interdistancia de 0.625 en coordenadas locales con los siguientes pasos:

1) Estimación de la deriva en las localizaciones de la malla regular.

2) Generación de una realización no condicional del residuo con el modelo de variograma ya comentado.

3) Generación de una realización del residuo en los puntos experimentales, coherente con la simulación en la malla.

4) Condicionamiento de la realización anterior al valor del residuo en los puntos experimentales.

5) Adición de deriva y residuo con lo que se obtiene la simulación condicional.

En la figura 4.27a se representa el mapa de isovalores



de la realización simulada que no es sino una, tomada al azar, de las infinitas existentes.

Los estadísticos elementales de la simulación, que expresan numéricamente parte de la información retenida en el histograma, se dan en la tabla IV.7 y 4.27b. Comparando estos resultados con los experimentales se pueden considerar como aceptables. Ambos histogramas, experimental y simulado, presentan los mismos rasgos.

En cuanto a la variografía de la simulación, el variograma experimental y el variograma de la simulación condicional muestran buena correspondencia (figuras 4.27c a 4.27f).

Por todo ello los resultados se consideran aceptables resultando un modelo numérico que también es útil para representar la variabilidad espacial de la variable estudiada.

Número de valores simulados = 1024
Media = 1237 m
Varianza = 5458 m <sup>2</sup>
Coefficiente de variación = 5.96 %
Coefficiente de asimetría = .83
Coefficiente de aplastamiento = 3.53
Mínimo = 1072 m
Cuartil 1 = 1187 m
Mediana = 1220 m
Cuartil 3 = 1279 m
Máximo = 1489 m

Tabla IV.7. Estadísticos elementales de la simulación.

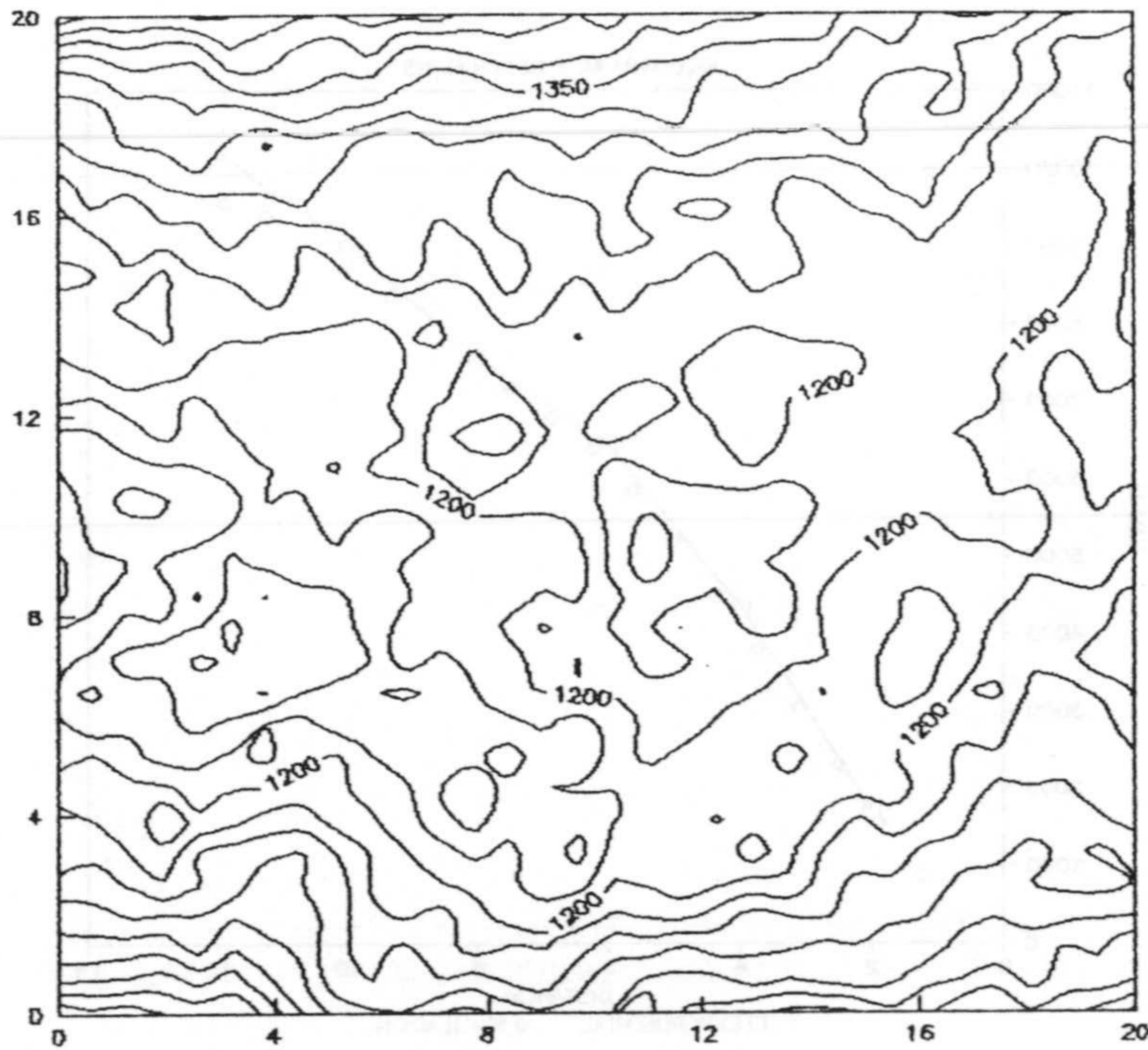


Figura 4.27a. Ejemplo de cartografía de una realización.

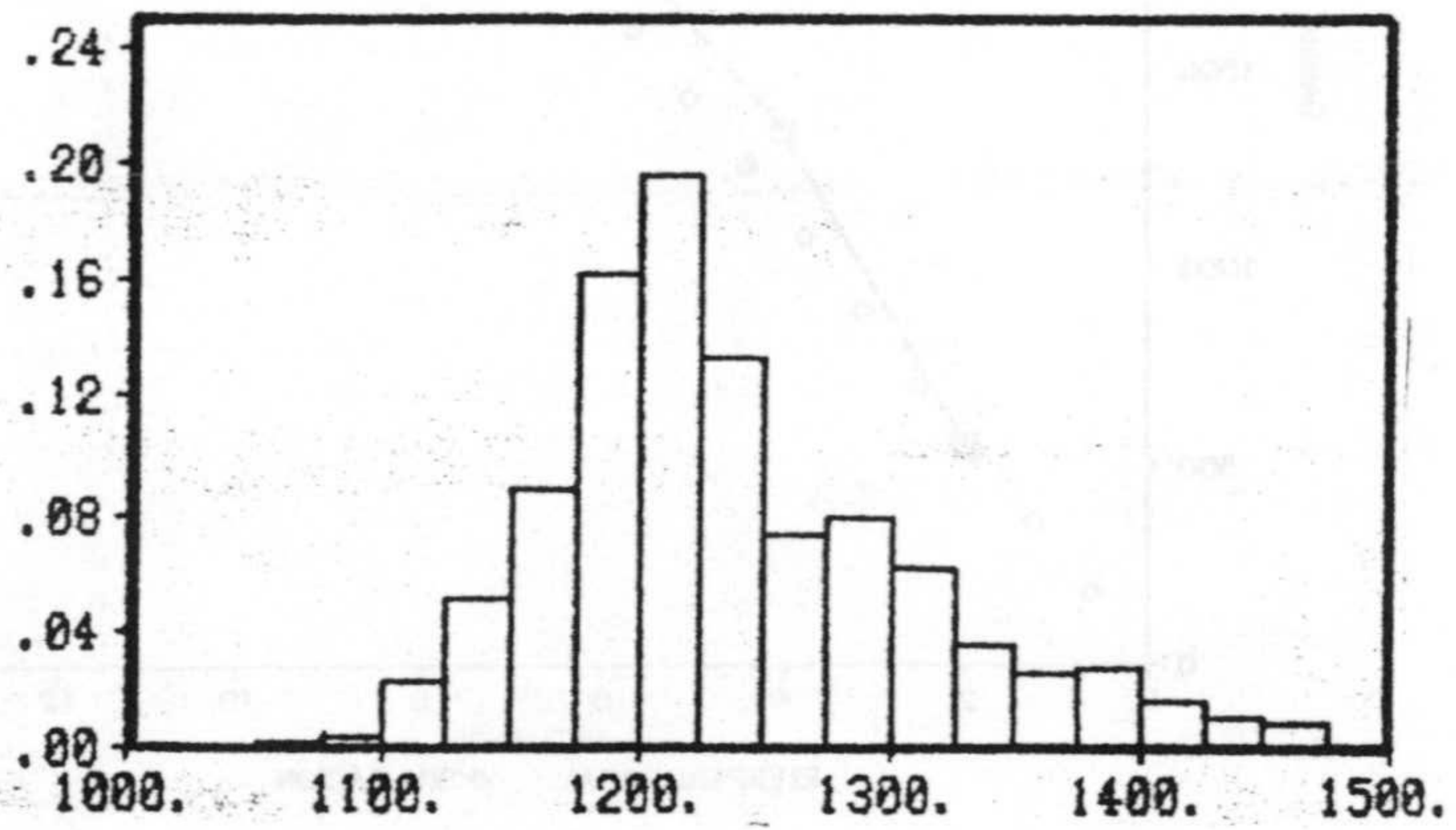


Figura 4.27b. Histograma de la simulación condicional.



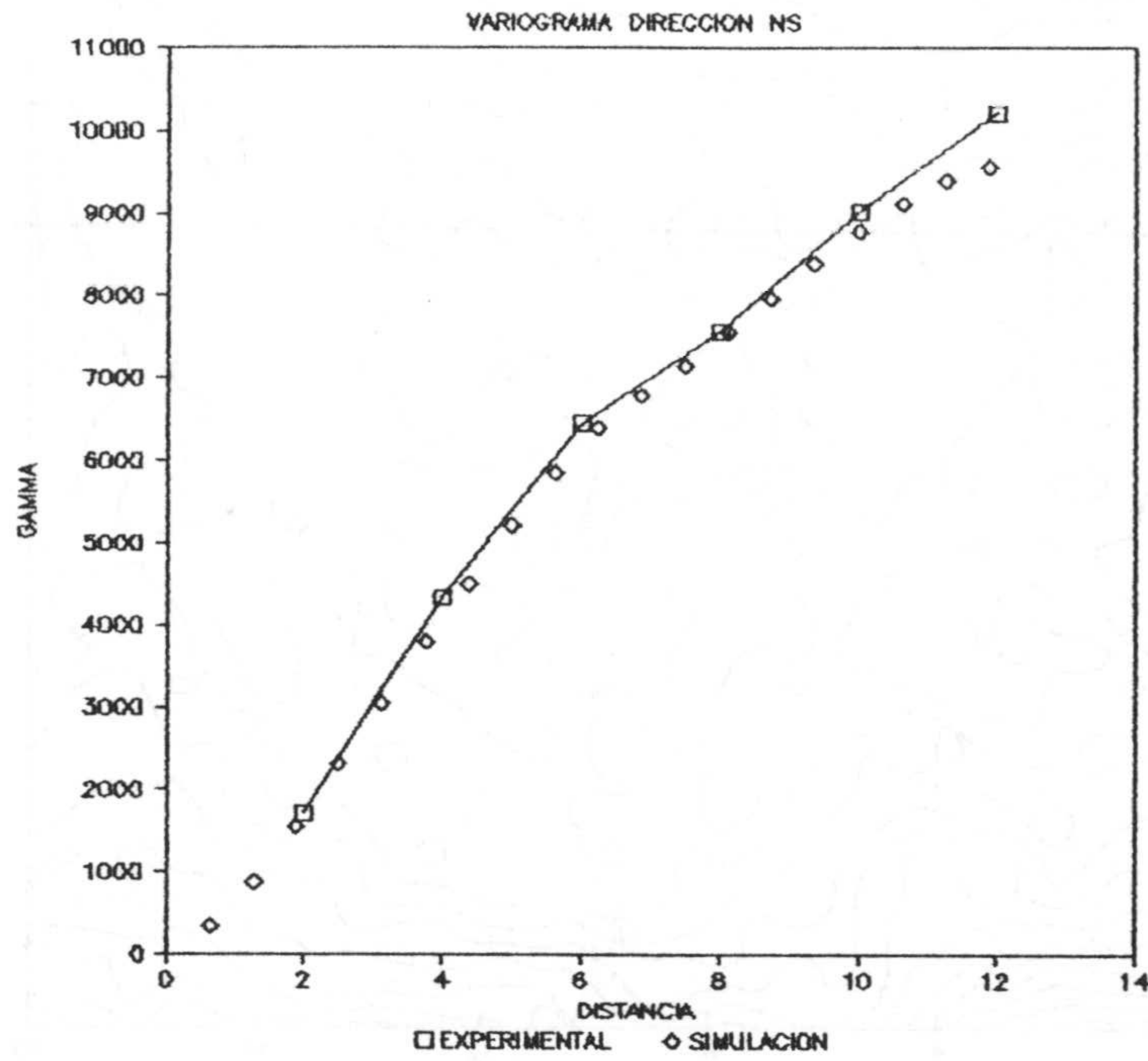


Figura 4. 27c. Variograma experimental y simulado en la dirección NS.

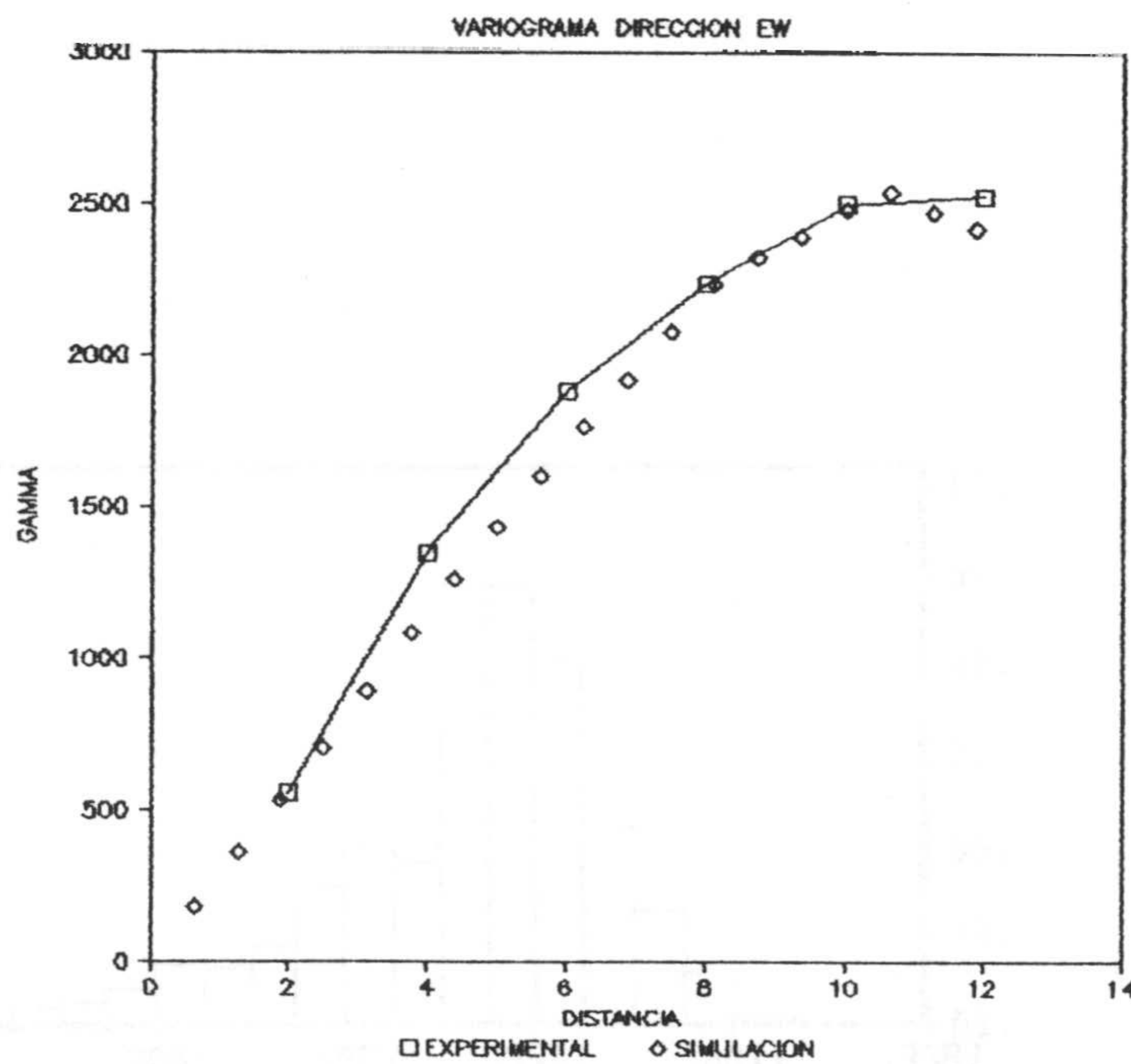


Figura 4. 27d. Variograma experimental y simulado en la dirección EW.

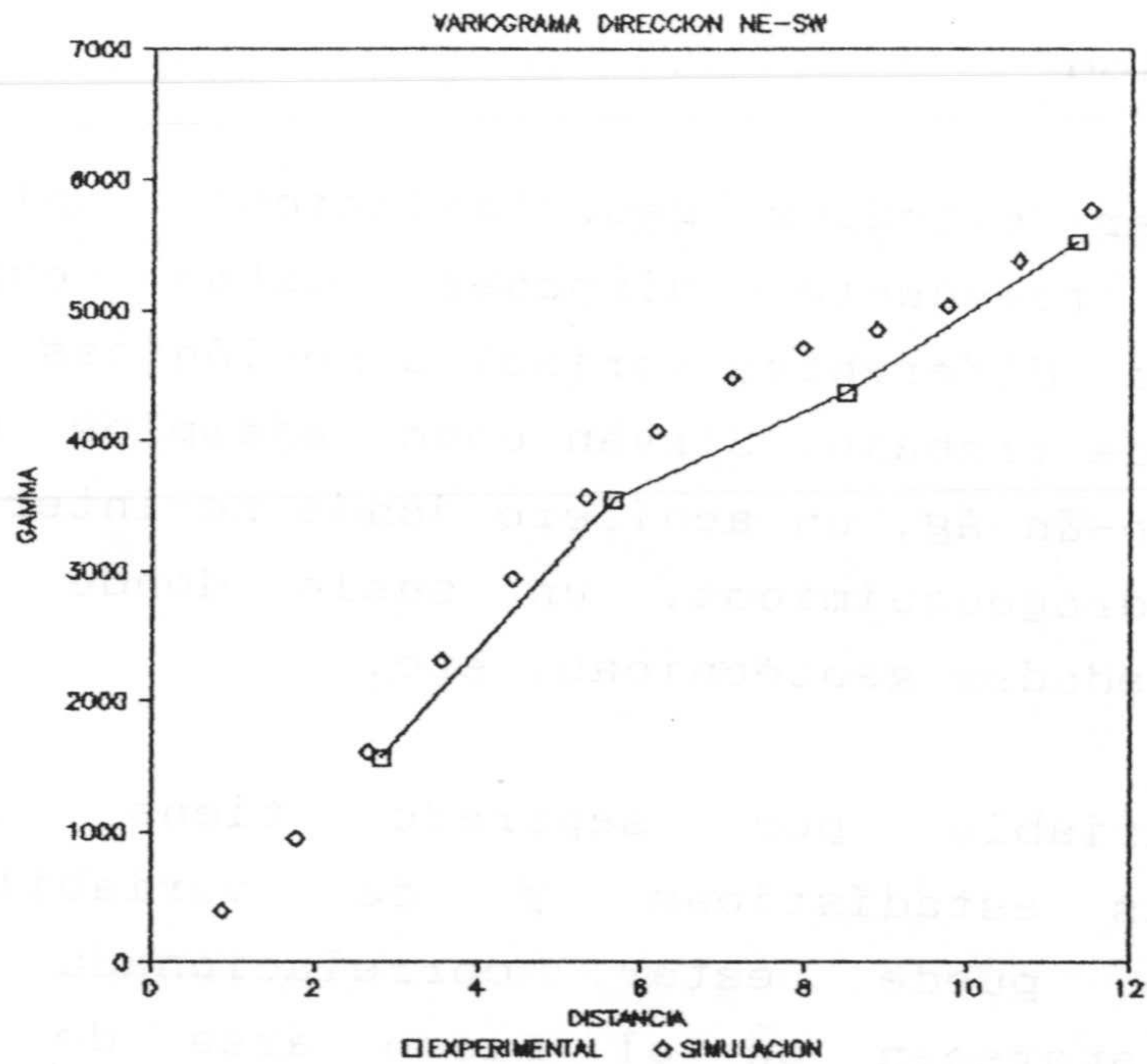


Figura 4.27e. Variograma experimental y simulado en la dirección NE-SW.

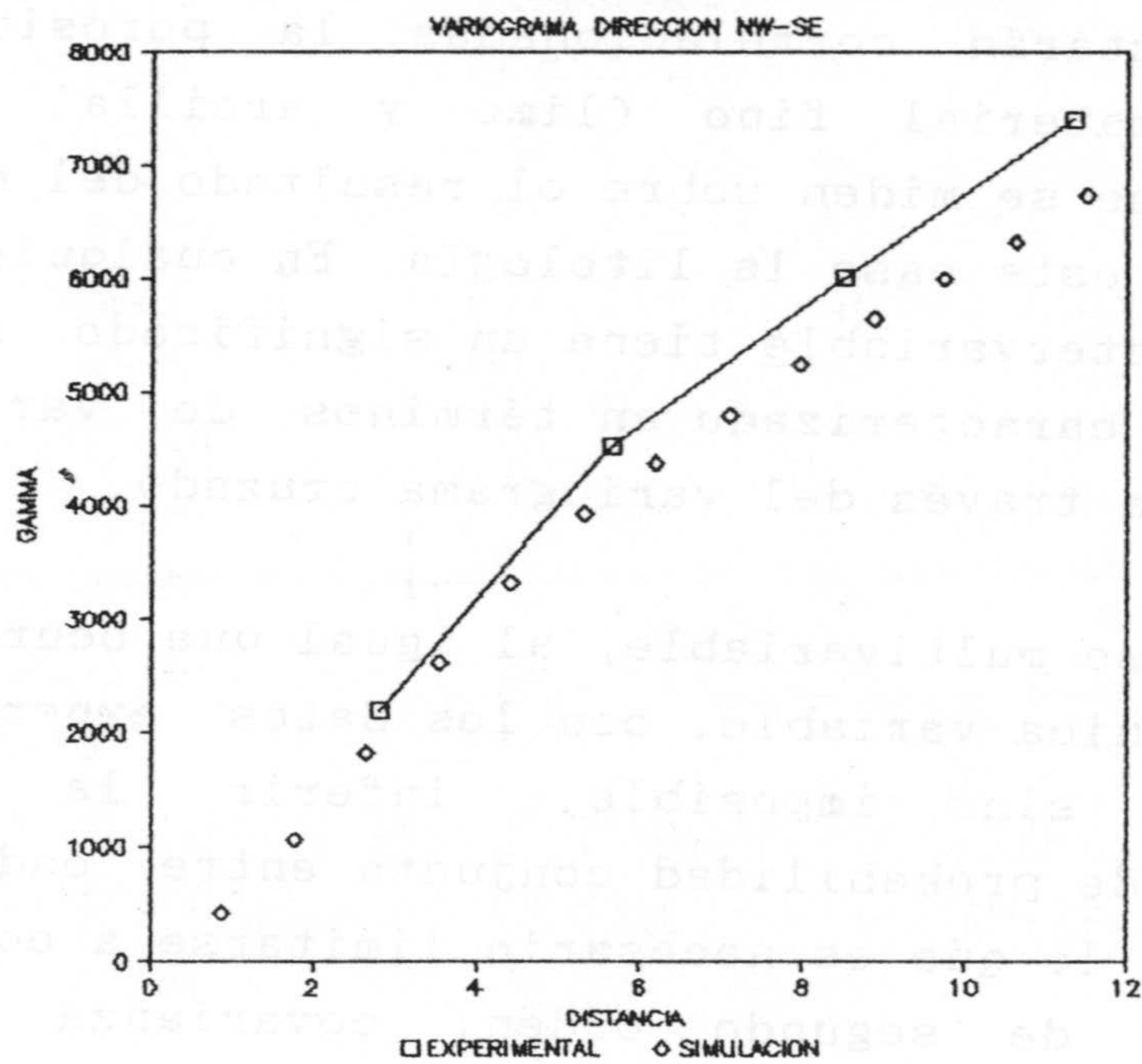


Figura 4.27f. Variograma experimental y simulado en la dirección NW-SE.



## 4. SIMULACION MULTIVARIABLE

### 4.1. Introducción

Al abordar estudios geoestadísticos aplicados, es relativamente frecuente disponer datos experimentales concernientes a diferentes variables geológicas medidas en el mismo área de trabajo. Sirvan como ejemplos un depósito polimetálico Pb-Zn-Ag; un acuífero donde se interesa por los parámetros hidrogeoquímicos, un suelo donde se analizan diversas propiedades geotécnicas, etc.

Cada variable por separado tiene sus propias características estadísticas y de variabilidad pero, adicionalmente, puede estar correlacionada con otras variables que aparecen en el mismo área de estudio. La correlación intervariable está íntimamente relacionada con el origen de las diferentes variables. En general, cuando éstas obedecen a procesos genéticos diferentes estarán sin correlación, por ejemplo la pluviometría en un área y porosidad en un acuífero detrítico de ese mismo área. En cambio si estarán correlacionadas la porosidad con el contenido en material fino (limo y arcilla) ya que son propiedades que se miden sobre el resultado del mismo proceso geológico, en este caso la litología. En cualquier caso, la correlación intervariable tiene un significado físico claro que puede ser caracterizado en términos de variabilidad, o correlación, a través del variograma cruzado.

En el caso multivariable, al igual que ocurre cuando se estudia una única variable, con los datos experimentales es muy difícil, sino imposible, inferir la función de distribución de probabilidad conjunta entre cada pareja de variables por lo que es necesario limitarse a considerar sólo los momentos de segundo orden, covarianza o variograma cruzados.

La simulación multivariable o simulación de



corregionalizaciones genera modelos de variabilidad espacial. Consiste en simular un conjunto de variables geológicas que además de tener en cuenta las características de variabilidad espacial de cada una de ellas, reproduzca asimismo la correlación entre cada pareja de variables; con ello se consiguen modelos más acordes con las observaciones experimentales al lograr reproducir una nueva función estadística.

Desde un punto de vista geoestadístico, una corregionalización es asimilable a la realización de un conjunto de funciones aleatorias  $\{Z_j(x); j = 1, \dots, m\}$  de modo que la información experimental básica está constituida por un número finito de observaciones de cada una de las variables:

$$\{z_j(x_i); i = 1, \dots, N_j; j = 1, \dots, m\}$$

donde  $m$  es el número de funciones aleatorias y  $N_j$  es el número de valores experimentales para la variable  $j$ -ésima.

Por razones de índole práctica, ya comentadas con anterioridad, se considera cada una de las funciones aleatorias como estacionaria de segundo orden, del mismo modo que cada una de la parejas de dichas funciones es asimismo conjuntamente estacionaria de segundo orden. Se puede definir para cada función aleatoria los siguientes estadísticos :

#### Esperanza matemática

$$E\{Z_j(x)\} = m_j \quad j = 1, \dots, m$$

#### Varianza

$$\text{Var}\{Z_j(x)\} = \sigma_j^2 \quad j = 1, \dots, m$$



## Variograma

$$\gamma_j(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_j(x+h) - Z_j(x)]^2\} \quad j = 1, \dots, m \\ \forall h$$

## Covarianza

$$C_j(h) = E\{Z(x+h) Z(x)\} - m_j^2 \quad j = 1, \dots, m \\ \forall h$$

Para cada pareja de funciones aleatorias  $Z_i(x)$ ,  $Z_j(x)$  es posible definir asimismo los llamados momentos cruzados:

## Variograma cruzado

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)] [Z_j(x+h) - Z_j(x)]\}$$

## Covarianza cruzada

$$C_{ij}(h) = E\{Z_i(x+h) Z_j(x)\} - m_i m_j$$

Si  $i = j$  se tienen las relaciones anteriores de variograma y covarianza directas.

Bajo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden se puede expresar el variograma cruzado como:

$$\gamma_{ij}(h) = \text{Cov}[Z_i(x+h) - Z_i(x), Z_j(x+h) - Z_j(x)] =$$

$$E\{Z_i(x) Z_j(x)\} - \frac{1}{2} \left\{ E\{Z_i(x+h) Z_j(x)\} + E\{Z_i(x) Z_j(x+h)\} \right\} =$$

$$C_{ij}(\emptyset) - \frac{1}{2} \left\{ C_{ij}(h) + C_{ji}(h) \right\}$$

Los momentos cruzados tienen particularidades con respecto a los homólogos directos que resulta interesante recordar.

En primer lugar, un variograma cruzado puede tomar valores negativos lo que implica que el incremento, en media, de una de las variables, corresponde a la disminución, en media, de la otra variable.

Un variograma cruzado es simétrico en  $(i,j)$  y  $(h,-h)$  lo que puede no ser cierto para la covarianza cruzada:

$$\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(h)$$

$$\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ij}(-h)$$

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(-h)$$



En la práctica geoestadística es frecuente trabajar con covarianzas cruzadas simétricas:

$$C_{ij}(h) = C_{ij}(-h)$$

no obstante, no es raro que puedan aparecer covarianzas asimétricas, particularmente al estudiar series cronológicas en dominios como la Hidrogeología, donde existen variables que presentan un cierto retardo con respecto a otras. De este modo es posible que la máxima correlación no se produzca para paso nulo sino para un determinado valor de distancia  $h$  (figura 5.1). En estos casos, el coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias  $Z_i(x)$ ,  $Z_j(x)$ , que se define:

$$r_{ij} = \frac{C_{ij}(\emptyset)}{\sqrt{C_i(\emptyset) C_j(\emptyset)}}$$

no corresponde al valor máximo de correlación entre ambas variables. Por ejemplo, en series temporales, el valor máximo de precipitación no coincide en el tiempo con el valor máximo de escorrentía lo que se refleja en la covarianza cruzada de ambas variables.

Situaciones de este tipo pueden pasar inadvertidas para el variograma cruzado por lo que es preferible, en un estudio variográfico, la inferencia, siempre que sea posible, de ambas funciones.

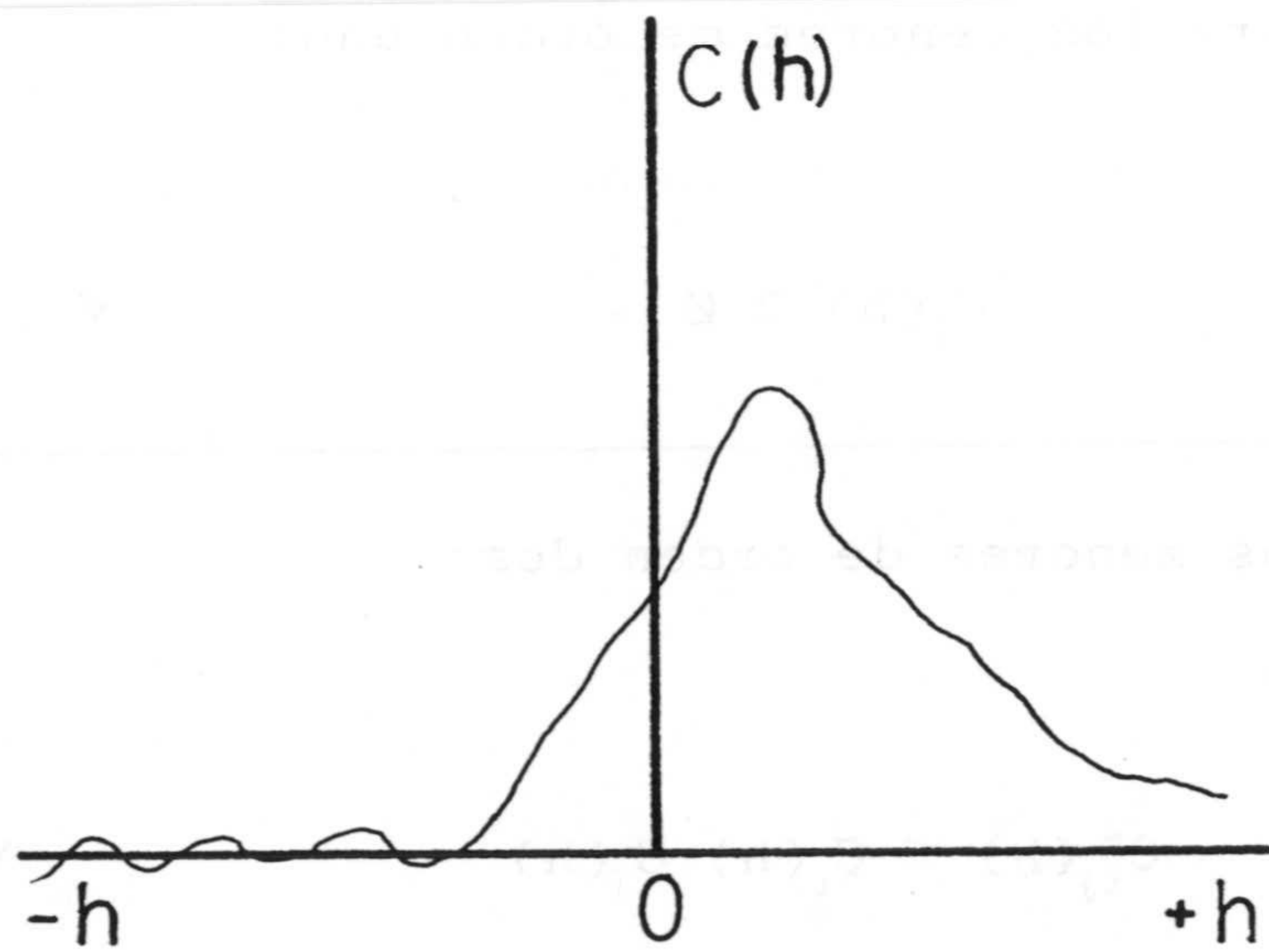


Figura 5.1. Covarianza cruzada asimétrica.

### 5.2. El modelo lineal de correogionalización

La correlación espacial de un conjunto de  $m$  funciones aleatorias  $\{Z_j(x); j = 1, \dots, m\}$  estacionarias de segundo orden, está caracterizada por su matriz de covarianzas:

$$[C(h)] = \begin{bmatrix} C_{11}(h) & C_{12}(h) & \dots & C_{1m}(h) \\ C_{21}(h) & C_{22}(h) & \dots & C_{2m}(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1}(h) & C_{m2}(h) & \dots & C_{mm}(h) \end{bmatrix}$$

La matriz  $[C(h)]$  es definida-positiva por lo que se



cumple que su determinante y todos los menores principales son siempre positivos (PAPOULIS, 1984). En particular se cumple para los menores de orden uno:

$$C_i(h) \geq 0 \quad \forall i$$

y para los menores de orden dos:

$$C_{ij}^2(h) \leq C_i(h) C_j(h) \quad \forall i, j$$

que es la conocida desigualdad de Schwarz. En particular de esta última relación se deduce que la longitud de correlación de la estructura de covarianza cruzada ha de ser inferior o igual al menor de los alcances de las estructuras de correlación directas. Cuando el número de funciones aleatorias es grande, en la práctica  $m > 3$ , la verificación del carácter definido-positivo de la matriz de covarianzas por el método de los menores principales es demasiado trabajoso por lo que se pueden emplear cualquiera de los muchos métodos que existen para verificar dicho carácter (WACKERNAGEL, 1985).

Si se consideran covarianzas simétricas en  $(i, j)$  y  $(h, -h)$ :

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(-h) = C_{ji}(h)$$

se puede considerar el equivalente a la matriz de covarianzas que es la matriz de variogramas  $[\gamma(h)]$ :

$$\gamma(h) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{21}(h) & \dots & \gamma_{1m}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) & \dots & \gamma_{2m}(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1}(h) & \gamma_{m2}(h) & \dots & \gamma_{mm}(h) \end{bmatrix}$$

En la práctica geoestadística el modelo más frecuentemente utilizado para modelizar una correogionalización es el modelo lineal (JOURNAL y HUIJBREGTS, 1987; MATHERON, 1982; WACKERNAGEL, 1985). El modelo consiste en expresar cada función aleatoria:  $\{Z_j(x); j = 1, \dots, m\}$  como combinación lineal de un conjunto de funciones aleatorias independientes  $\{Y_k(x); k = 1, \dots, s\}$ , cada una de ellas con una estructura de correlación simple es decir sin estructuras superpuestas. De este modo, el número de funciones aleatorias independientes que son necesarias para construir el modelo lineal de correogionalización es igual al número de funciones aleatorias originales  $m$  multiplicado por el número de estructuras superpuestas que se identifica en cada una de ellas  $s = m N_m$ .

Así se tiene:

$$Z_j(x) = \sum_{u=1}^{N_s} \sum_{p=1}^m a_{jp}^u Y_p^u(x)$$

donde  $m$  es el número de funciones aleatorias y  $N_s$  es el número de estructuras superpuestas que se identifican.

La matriz de covarianza se puede expresar (JOURNAL y



HUIJBREGTS, 1978):

$$C_{ij}(h) = \sum_{u=1}^{N_s} \sum_{p=1}^m a_{ip}^u a_{jp}^u K_u(h)$$

ya que  $K_{ij}(h) = 0$  con  $i \neq j$  al ser las funciones aleatorias  $Y_p^u$  independientes.

Considerando el modelo lineal básico de la matriz de covarianzas:

$$C_{ij}(h) = \sum_{u=1}^{N_s} b_{ij}^u K_u(h)$$

con:

$N_s$  : número de estructuras espaciales.

$b_{ij}^u$  : meseta (varianza o coeficiente de correlación).

$K_u(h)$  : estructura de covarianza elemental.

Se establece de este modo la relación:

$$b_{ij}^u = \sum_{p=1}^m a_{ip}^u a_{jp}^u$$

Esta última expresión relaciona las mesetas (varianzas o



coeficientes de correlación) de las estructuras de covarianza elementales con los coeficientes que multiplican a las funciones aleatorias elementales  $Y(x)$  para componer las funciones aleatorias originales  $Z(x)$ . La matriz de coeficientes debe de ser definida-positiva (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978). El modelo lineal de corregeionalización proporciona covarianzas cruzadas simétricas.

El modelo lineal de corregeionalización es extremadamente útil en Geoestadística Multivariable como es el cokrigeaje y el análisis krigeante multivariable (WACKERNAGEL, 1985). En estas aplicaciones cada una de las funciones aleatorias elementales independientes puede tener un significado especial y es posible aplicar diferentes técnicas de análisis multivariante con el fin de obtener una valiosa información en la elaboración de modelos de corregeionalización.

En el capítulo de simulación multivariable, no es necesaria una interpretación de las funciones aleatorias elementales ya que el objetivo es reconstruir las funciones aleatorias originales con una matriz de covarianzas impuesta.

El modelo lineal de corregeionalización ha sido ampliamente empleado en simulación geoestadística multivariable, JOURNEL y HUIJBREGTS (1978); MARIN-SUAREZ, (1978); HALLIWEL, (1988).

El principal inconveniente que se presenta al utilizar el modelo lineal de corregeionalización es que una estructura no puede estar presente sobre el variograma cruzado sino está presente sobre los dos variogramas simples correspondientes (WACKERNAGEL, 1985). Primero se han de modelizar los variogramas simples, y posteriormente se han de modelizar los variogramas cruzados teniendo en cuenta las restricciones sobre los coeficientes  $b_{ij}^u$ .

Esta restricción importante del modelo lineal puede ser contraria a la realidad experimental, de modo que restringe



la flexibilidad en la etapa de modelización del variograma cruzado. Esto me ha hecho plantearme la investigación de métodos de simulación multivariable en el dominio de la frecuencia y cuyos resultados se exponen en el apartado siguiente.

### 5.3. Simulación espectral multivariable

Del mismo modo que la función de densidad espectral  $S(\omega)$  se define como la transformada de Fourier de la función de covarianza  $C(h)$ , es posible definir la función de densidad espectral cruzada  $S_{ij}(\omega)$  como la transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada (VENTSEL, 1973):

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega h} C_{ij}(h) dh$$

Si la función de densidad espectral proporciona información de la repartición de la varianza en función de las frecuencias, la función de densidad espectral cruzada suministra información sobre la repartición de la correlación entre dos funciones aleatorias  $Z_i(x)$  y  $Z_j(x)$  para las diferentes frecuencias. Mediante el operador transformada de Fourier aplicado a cada uno de los elementos de la función de covarianza  $[C(h)]$  es posible obtener la correspondiente matriz de densidad espectral  $[S(\omega)]$ :

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1m}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2m}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m1}(\omega) & S_{m2}(\omega) & \dots & S_{mm}(\omega) \end{bmatrix}$$

En el caso más general siempre se cumple que:

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(-h)$$

de modo que se obtiene que:

$$S_{ij}(\omega) = S_{ji}^*(\omega)$$

donde \* denota complejo conjugado y la matriz  $[S(\omega)]$  es hermitiana (SHINOZUKA y JAN, 1970).

Como se ha dicho anteriormente, en el caso más general, la covarianza cruzada puede ser asimétrica en  $(h, -h)$  y por consiguiente al ser una función real, su transformada de Fourier es hermitiana (BRACEWEL, 1986), esto es, parte real par y parte imaginaria impar.



$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(h) \cos(\omega h) dh - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(h) \operatorname{sen}(\omega h) dh$$

En Teoría de Análisis Espectral cruzado es frecuente la descomposición de la función de densidad espectral cruzada en una función compleja cuyas partes reales reciben el nombre de coespectro y espectro de cuadratura respectivamente (YEVJEVICH, 1972; PRIESTLEY, 1984; BRAS y RODRIGUEZ-ITURBE, 1984).

$$S_{ij}(\omega) = P_{ij}(\omega) - i Q_{ij}(\omega)$$

donde  $P_{ij}(\omega)$  es el coespectro:

$$P_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(h) \cos(\omega h) dh$$

y  $Q_{ij}(\omega)$  es el espectro de cuadratura:

$$Q_{ij}(\omega) = - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(h) \operatorname{sen}(\omega h) dh$$

Al ser la matriz  $[S(\omega)]$  de tipo hermitiano se cumple que el coespectro es una función par y el espectro de cuadratura es una función impar:

$$P_{ij}(\omega) = P_{ij}(-\omega)$$

$$Q_{ij}(\omega) = -Q_{ji}(-\omega)$$

El coespectro mide la contribución de las oscilaciones de diferentes intervalos de frecuencias a la covarianza cruzada total cuando los armónicos de ambas series están en fase. El espectro de cuadratura mide la contribución de las oscilaciones para diferentes frecuencias cuando todos los armónicos de una de las series están desfasados por un cuarto de período ( $\pi/2$  radianes) con respecto a los armónicos de la otra serie (YEVJEVICH, 1972). Es decir, el coespectro detecta la covarianza cruzada en fase y el espectro de cuadratura mide la covarianza cruzada fuera de fase. Las siguientes relaciones se deducen de la definición de espectro y espectro de cuadratura:

$$S_{ij}(\omega) = P_{ij}(\omega) - iQ_{ij}(\omega)$$

$$S_{ji}(\omega) = P_{ji}(\omega) - iQ_{ji}(\omega)$$

$$P_{ij}(\omega) = \frac{1}{2} [S_{ij}(\omega) + S_{ji}(\omega)]$$

$$Q_{ij}(\omega) = \frac{1}{-2i} [S_{ij}(\omega) - S_{ji}(\omega)]$$



La función de densidad espectral se puede expresar asimismo en forma polar en forma de espectro de amplitud cruzado y espectro de fase cruzado:

$$S_{ij}(\omega) = |S_{ij}(\omega)| \exp(-i \vartheta_{ij}(\omega))$$

Donde el espectro de amplitud cruzado y el espectro de fase cruzado están relacionados con el coespectro y el espectro de cuadratura por las siguientes relaciones (PRIESTLEY, 1984):

$$|S_{ij}(\omega)| = \sqrt{P_{ij}^2(\omega) + Q_{ij}^2(\omega)}$$

$$\vartheta_{ij}(\omega) = \arctg \left[ \frac{Q_{ij}(\omega)}{P_{ij}(\omega)} \right]$$

Por último para terminar con el repaso de nomenclatura en análisis espectral cruzado, de la cual se hará uso a continuación al presentar los métodos de simulación que he desarrollado, recordar que la función de coherencia se define como (BRAS y RODRIGUEZ-ITURBE, 1984):

$$R_{ij}^2(\omega) = \frac{P_{ij}^2(\omega) + Q_{ij}^2(\omega)}{S_i(\omega) S_j(\omega)} = \frac{|S_{ij}(\omega)|^2}{S_i(\omega) S_j(\omega)}$$

Similarmente a la desigualdad de Schwarz para las covarianzas, la desigualdad de la coherencia:

$$|S_{ij}(\omega)| \leq S_i(\omega) S_j(\omega)$$

implica que el valor de la coherencia esté comprendido entre cero y uno:

$$0 \leq R_{ij}^2(\omega) \leq 1$$

La coherencia se interpreta como un coeficiente de correlación en el ámbito de la frecuencia, de modo que el valor máximo de coherencia se da en una frecuencia  $\omega$  para la cual los armónicos de ambas series están más correlacionados. La teoría de procesos estacionarios establece que cada armónico no sólo es independiente con el resto de los armónicos de la serie, sino que también lo es con respecto a los armónicos de cualquier otro proceso (YEVJEVICH, 1972). La función de coherencia expresa la correlación entre dos funciones aleatorias en un rango de frecuencias muy pequeño y mide el grado de dependencia lineal entre las variables.



En primer lugar, por ser el caso más sencillo y en numerosas aplicaciones suficiente, expongo el caso bivariado con dos variables correlacionadas, para considerar posteriormente el caso multivariado general.

Dadas dos funciones aleatorias estacionarias de segundo orden,  $Z_1(x)$ ,  $Z_2(x)$ , la correlación espacial de cada una de ellas está caracterizada por su propia función de covarianza  $C_1(h)$ ,  $C_2(h)$ , cuyas transformadas de Fourier corresponden a sus funciones de densidad espectral respectivas:

$$C_1(h) \longleftrightarrow S_1(\omega)$$

$$C_2(h) \longleftrightarrow S_2(\omega)$$

$\longleftrightarrow$ : par transformado de Fourier

Como es conocido, la función de densidad espectral determina completamente el espectro de amplitud  $|Z_1(\omega)|$ ,  $|Z_2(\omega)|$ , de cada una de las funciones aleatorias mediante las relaciones:

$$S_1(\omega) = |Z_1(\omega)|^2$$

$$S_2(\omega) = |Z_2(\omega)|^2$$



Como se recordará, al exponer el método de la integral de Fourier univariante, se comentó que el espectro de amplitud determina completamente la función correlativa de una función aleatoria; en particular, en simulación, las funciones aleatorias  $Z_i(\omega)$  se consideran funciones gaussianas normalizadas  $N(0,1)$ , por lo que el espectro de amplitud es sólo función de la longitud de correlación (o alcance), dado un modelo de función correlativa.

Asimismo, en simulación univariable, cada realización se genera añadiendo al espectro de amplitud un espectro de fase aleatorio; las diferentes realizaciones de una función aleatoria con el mismo modelo de correlación se obtienen añadiendo diferentes espectros de fase independientes, de modo que si los ángulos de fase son verdaderamente aleatorios, cada realización es independiente del resto de las realizaciones.

Visto que la función correlativa es función del espectro de amplitud el cual es invariable para un mismo modelo de función de covarianza, la función de covarianza cruzada entre dos funciones aleatorias es función del espectro de fase de ambas funciones. Si el espectro de fase de cada función aleatoria se genera de modo independiente, las dos funciones aleatorias serán no correlacionadas. Para generar realizaciones intercorrelacionadas es necesario encontrar la relación que ha de ligar los espectros de fase de ambas series y que expongo a continuación.

El método de la integral de Fourier se basa en la relación clásica del teorema de Fourier:

$$Z(x) \longleftrightarrow Z(\omega)$$

que relaciona la función aleatoria en el dominio del espacio



$Z(x)$  y en el dominio de la frecuencia  $Z(\omega)$  mediante el par de transformadas de Fourier. Considerando realizaciones espaciales o temporales de variables geológicas,  $Z(x)$  es una función real y asimétrica por lo que su correspondiente transformada de Fourier  $Z(\omega)$  es una función compleja hermitiana. La transformada de Fourier de cada función aleatoria se expresa en función del espectro de amplitud y del espectro de fase respectivos:

$$Z_1(\omega) = |Z_1(\omega)| \cos\varphi(\omega) - i |Z_1(\omega)| \operatorname{sen}\varphi(\omega) =$$

$$|Z_1(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)}$$

$$Z_2(\omega) = |Z_2(\omega)| \cos\beta(\omega) - i |Z_2(\omega)| \operatorname{sen}\beta(\omega) =$$

$$|Z_2(\omega)| e^{-i\beta(\omega)}$$

Por el teorema de la transformada de Fourier de la correlación cruzada (WEAVER, 1989) se tiene que la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada  $C_{12}(h)$ , esto es, la función de densidad espectral cruzada  $S_{12}(\omega)$ , es igual al producto entre la transformada de Fourier de la primera serie  $Z_1(\omega)$  por el complejo conjugado de la transformada de Fourier de la segunda serie  $Z_2^*(\omega)$ :

$$S_{12}(\omega) = Z_1(\omega) Z_2^*(\omega) = |Z_1(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)} |Z_2(\omega)| e^{-i\beta(\omega)}$$

$$= |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)| \exp\{-i[\varphi(\omega) - \beta(\omega)]\}$$

$[\varphi(\omega) - \beta(\omega)]$  representa la diferencia de fase entre los armónicos de las dos funciones aleatorias en función de la frecuencia  $\omega$ .

Estableciendo la equivalencia entre la última expresión y el coespectro y espectro de cuadratura expresados en forma polar, se tiene que el espectro de amplitud cruzado vale:

$$|S_{12}(\omega)| = \sqrt{P_{12}^2(\omega) + Q_{12}^2(\omega)} = |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)|$$

y el espectro de cuadratura:

$$\vartheta_{12}(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q_{12}(\omega)}{P_{12}(\omega)}\right) = [\varphi(\omega) - \beta(\omega)]$$

Examinemos a continuación un caso particular intentando responder a la cuestión ¿qué ocurre si se considera una función de covarianza cruzada centrada en el origen y simétrica con respecto a  $(h, -h)$ ?, caso frecuente en la práctica geoestadística.



Al ser la covarianza cruzada una función real y par, su transformada de Fourier, la función de densidad espectral cruzada, es asimismo real y par. Por tanto el espectro de cuadratura que como se ha visto corresponde a la parte imaginaria, es nulo; lo cual sólo es posible si:

$$|Z_1(\omega)| = 0$$

o

$$|Z_2(\omega)| = 0$$

o bien

$$\text{sen}\{\varphi(\omega) - \beta(\omega)\} = 0$$

Los procesos que se consideran, funciones aleatorias  $Z_1(x)$  y  $Z_2(x)$ , tienen una banda de frecuencias limitada ya que:

$$C_1(h) < \infty$$

$$C_2(h) < \infty$$

lo que implica (PAPOLIS, 1984) que:

$$S_1(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_c^1$$

$$S_2(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_c^2$$

Por consiguiente  $|Z_1(\omega)|$  y  $|Z_2(\omega)|$  son también nulos para frecuencias  $|\omega|$  mayores a ciertos valores  $\omega_c^1$ ,  $\omega_c^2$  respectivamente. Puede ocurrir que en la simulación de un número finito de puntos discretos que representan la realización de la función aleatoria, debido al número de puntos que se considere y al espaciado interpunto, la frecuencia de Nyquist (frecuencia más alta representada en el proceso) sea inferior a los límites  $\omega_c$  y por consiguiente no se obtengan valores nulos de ninguno de los dos espectros de amplitud.

Por todo ello en el caso más general se ha de cumplir que:

$$\varphi(\omega) - \beta(\omega) = k\pi$$

$k$  : número entero (0, 1, 2, 3, ...)

En definitiva, que el ángulo de fase ha de ser el mismo para ambas series. Esta circunstancia tiene asimismo la siguiente consecuencia:

$$\cos\{\varphi(\omega) - \beta(\omega)\} = \cos(k\pi) = \pm 1$$

se tiene que:

$$S_{12}(\omega) = |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)|$$

La función de densidad espectral cruzada y por



consiguiente la función de covarianza cruzada están predeterminados por las funciones de covarianzas directas de ambas funciones aleatorias a través de sus espectros de amplitud.

Este hecho no es sorprendente, pues como se dijo al considerar el modelo lineal de correogionalización que proporciona covarianzas cruzadas simétricas, una estructura correlativa sólo se ha de identificar en la covarianza cruzada si aparece en las dos covarianzas directas (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978).

La función de coherencia vale uno para todas las frecuencias en las cuales está definida:

$$R_{12}^2(\omega) = \frac{|S_{12}(\omega)|}{S_1(\omega) S_2(\omega)} = \frac{\left[ |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)| \right]^2}{|Z_1(\omega)|^2 |Z_2(\omega)|^2} = 1$$

Esto implica una relación lineal exacta entre las variables:

$$Z_1(x) = a Z_2(x)$$

Con la relación entre covarianzas:

$$C_{12}(h) = a C_2(h)$$

$$C_1(h) = a^2 C_2(h)$$

a : valor real.

Si las funciones aleatorias están normalizadas, las dos covarianzas directas y la covarianza cruzada son iguales y el coeficiente de correlación vale 1.

Las aplicaciones prácticas muestran como existen funciones aleatorias con covarianza cruzada simétrica centrada en el origen y con coeficiente de correlación menor a uno. Para ello es suficiente considerar el modelo lineal:

$$Z_1(x) = a Z_2(x) + \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$  es una función aleatoria no correlacionada con  $Z_2(x)$  de modo que ahora se tiene:

$$C_{12}(h) = a C_2(h)$$

$$C_1(x) = a^2 C(h) + C_\varepsilon(h)$$

Relaciones idénticas se obtienen en el dominio de la frecuencia si se considera función de densidad espectral en lugar de covarianza.

Se puede tomar  $a$  como el coeficiente de correlación entre las series y el proceso  $\varepsilon(x)$  de modo adecuado para obtener la covarianza  $C_1(h)$  deseada. Estamos en el marco del modelo lineal de correogionalización para sólo dos variables y una estructura simple en las funciones de covarianza.

Las siguientes observaciones las voy a efectuar sobre un caso de estudio real. Se dispone de una información multivariable correspondientes a una serie temporal que representa la evolución de características físicas y



composicionales de un carbón a quemar a la entrada de la central termoeléctrica. Se dispone de un registro consistente en 359 medidas tomadas a nivel diario para cinco variables diferentes: humedad, ceniza, azufre y poder calorífico. La tabla IV.8. recoge los estadísticos elementales de las cinco variables y en la tabla IV.9 se recoge el coeficiente de correlación entre las variables.

	<i>humedad</i>	<i>ceniza</i>	<i>mat.vol.</i>	<i>azufre</i>	<i>pod.cal.</i>
MEDIA	40.79	22.56	21.64	2.69	2208.4
VARIANZA	1.74	6.28	1.14	0.31	18789.0
C.V.	3.23	11.10	4.93	20.69	6.2
MINIMO	37.10	14.70	18.90	1.50	1744.0
MAXIMO	44.30	30.00	27.20	4.10	2646.0

Tabla IV.8. Estadísticos elementales.  
C.V. : coeficiente de variación.

	<i>humedad</i>	<i>ceniza</i>	<i>mat.vol.</i>	<i>azufre</i>	<i>pod.cal.</i>
<i>humedad</i>	1.00				
<i>ceniza</i>	-.84	1.00			
<i>mat.vol.</i>	.27	-.67	1.00		
<i>azufre</i>	-.25	.01	.33	1.00	
<i>pod.cal.</i>	.61	-.89	.81	.16	1.00

Tabla IV.9. Coeficientes de correlación.



Se va a considerar el caso bivariable con las dos variables que presentan el mayor coeficiente de correlación, en valor absoluto, como son la ceniza y el poder calorífico. Las figuras 5.29a y 5.29b muestran los variogramas experimentales y los correspondientes modelos teóricos ajustados para las variables gaussianas ceniza y poder calorífico, respectivamente.

El modelo ajustado para la variable ceniza ha sido:

$$\gamma_1(h) = .3 + \text{Sph}(.5)_4 + \text{Sph}(.2)_{10}$$

y para la variable poder calorífico:

$$\gamma_2(h) = .4 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.3)_{10}$$

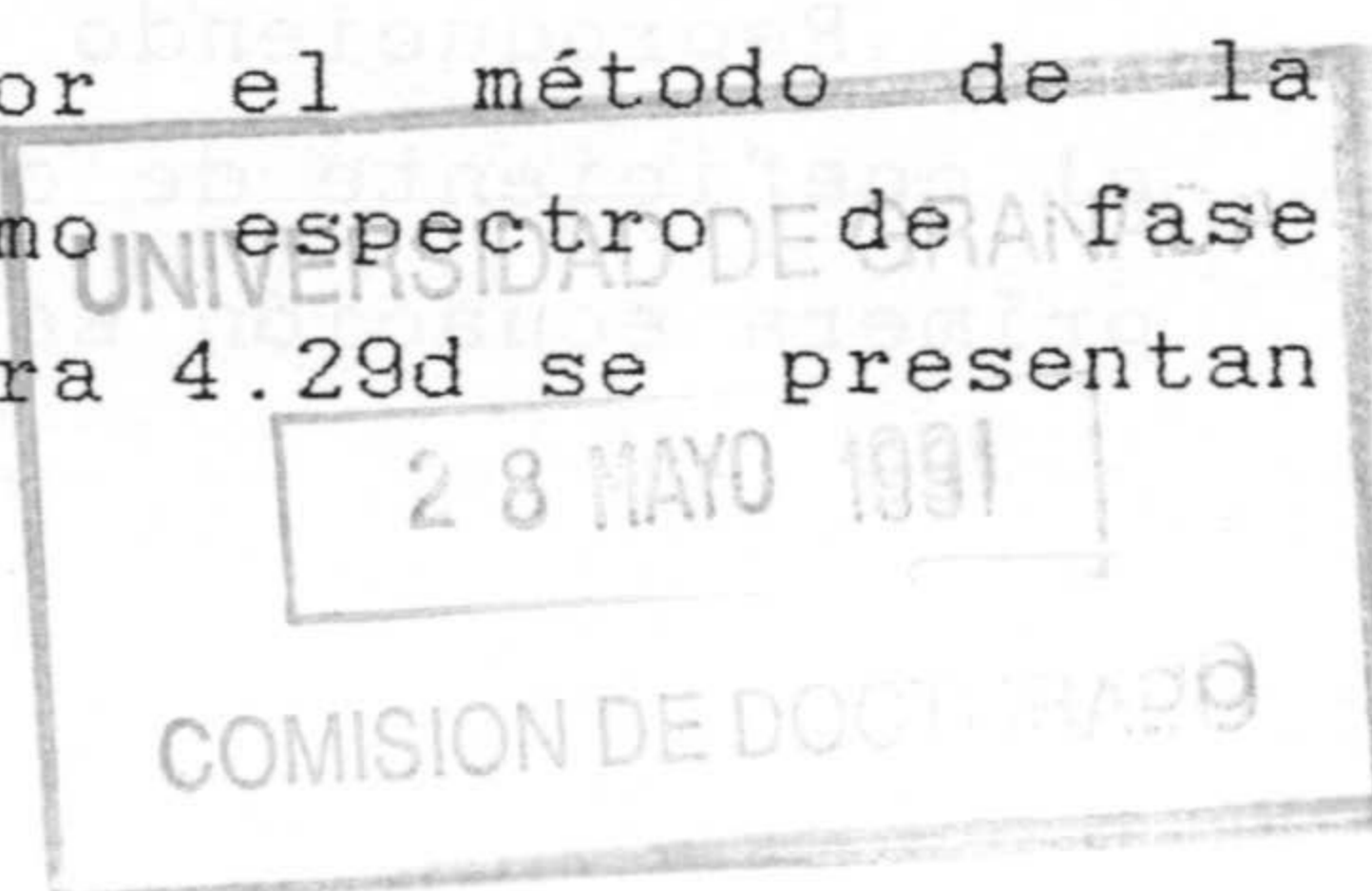
Para el variograma cruzado ceniza-poder calorífico se ha adoptado el siguiente modelo (figura 4.29c):

$$\gamma_{12}(h) = .3 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.3)_8$$

donde:

$\text{Sph}(a)_b$ : modelo de variograma esférico de alcance  $b$  y meseta  $a$ .

Se han simulado ambas series por el método de la integral de Fourier utilizando el mismo espectro de fase aleatorio para ambas series. En la figura 4.29d se presentan





el variograma cruzado experimental y el variograma cruzado simulado para una realización. Como era de esperar el coeficiente de correlación vale uno y la estructura de variabilidad cruzada simulada se ha obtenido sin la imposición de que correspondiese con la experimental sino que es la teórica que se obtiene como función de los espectros de amplitud de ambas funciones aleatorias.

Lo común en una aplicación es que se desee reproducir la función de covarianza cruzada experimental lo más fielmente posible así como el coeficiente de correlación entre las variables que corresponde al valor de la correlación cruzada en el origen. Para ello, continuando con el método anterior, se tiene en el caso general la siguiente expresión para el coespectro y el espectro de cuadratura:

$$P_{12}(\omega) = |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)| \cos\{\varphi(\omega) - \beta(\omega)\}$$

$$Q_{12}(\omega) = |Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)| \operatorname{sen}\{\varphi(\omega) - \beta(\omega)\}$$

El variograma cruzado es una función simétrica en  $(h, -h)$  e  $(i, j)$  por lo que sólo detecta la variabilidad de los armónicos de ambas series que están en fase, por lo cual está completamente determinado por el coespectro  $P_{ij}(\omega)$  y no se ve afectado por el valor que tome el espectro de cuadratura, el cual hace que la covarianza sea asimétrica.

Reproduciendo el coespectro se consigue calar asimismo el coeficiente de correlación  $r_{ij} = \gamma_{ij}(\omega)$ . De modo que, de la primera ecuación se obtiene la expresión:



$$\beta(\omega) = \varphi(\omega) - \arccos \left( \frac{P_{12}(\omega)}{|Z_1(\omega)| |Z_2(\omega)|} \right)$$

que relaciona los espectros de fase de ambas funciones aleatorias.

Las realizaciones de la primera función aleatoria se obtienen por el método de la transformada de Fourier con el espectro  $\varphi(\omega)$  aleatorio. Realizaciones de la segunda función aleatoria  $Z_2(\omega)$  se generan por el mismo método de la integral de Fourier con un espectro de fase  $\beta(\omega)$  relacionado con el espectro de la primera función de acuerdo con la última relación. Por este procedimiento es posible reproducir el variograma cruzado (figura 4.29e) pero no se reproduce una covarianza simétrica.

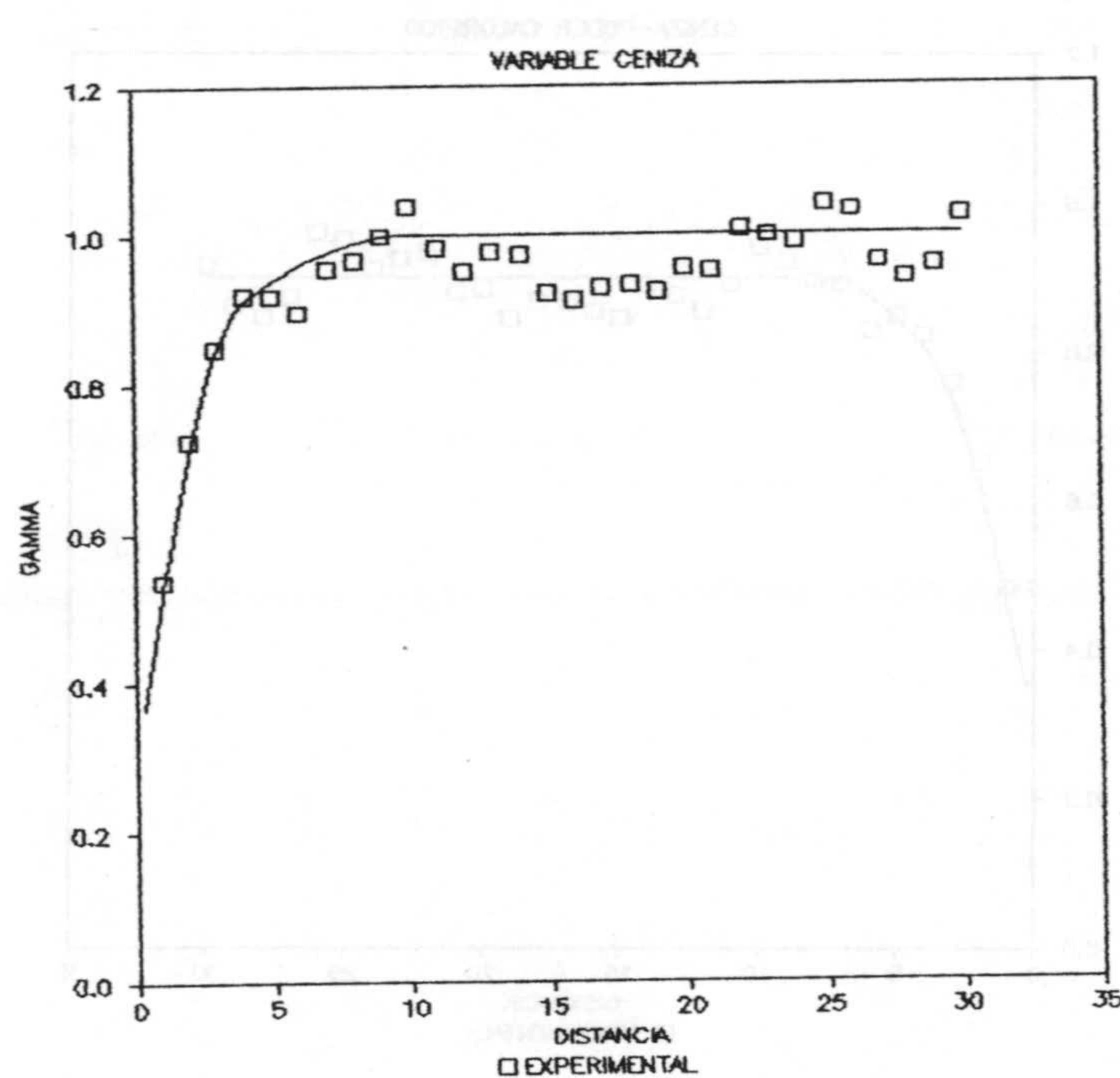


Figura 4.29a Variograma gaussiano experimental y modelo teórico ajustado para la variable ceniza.



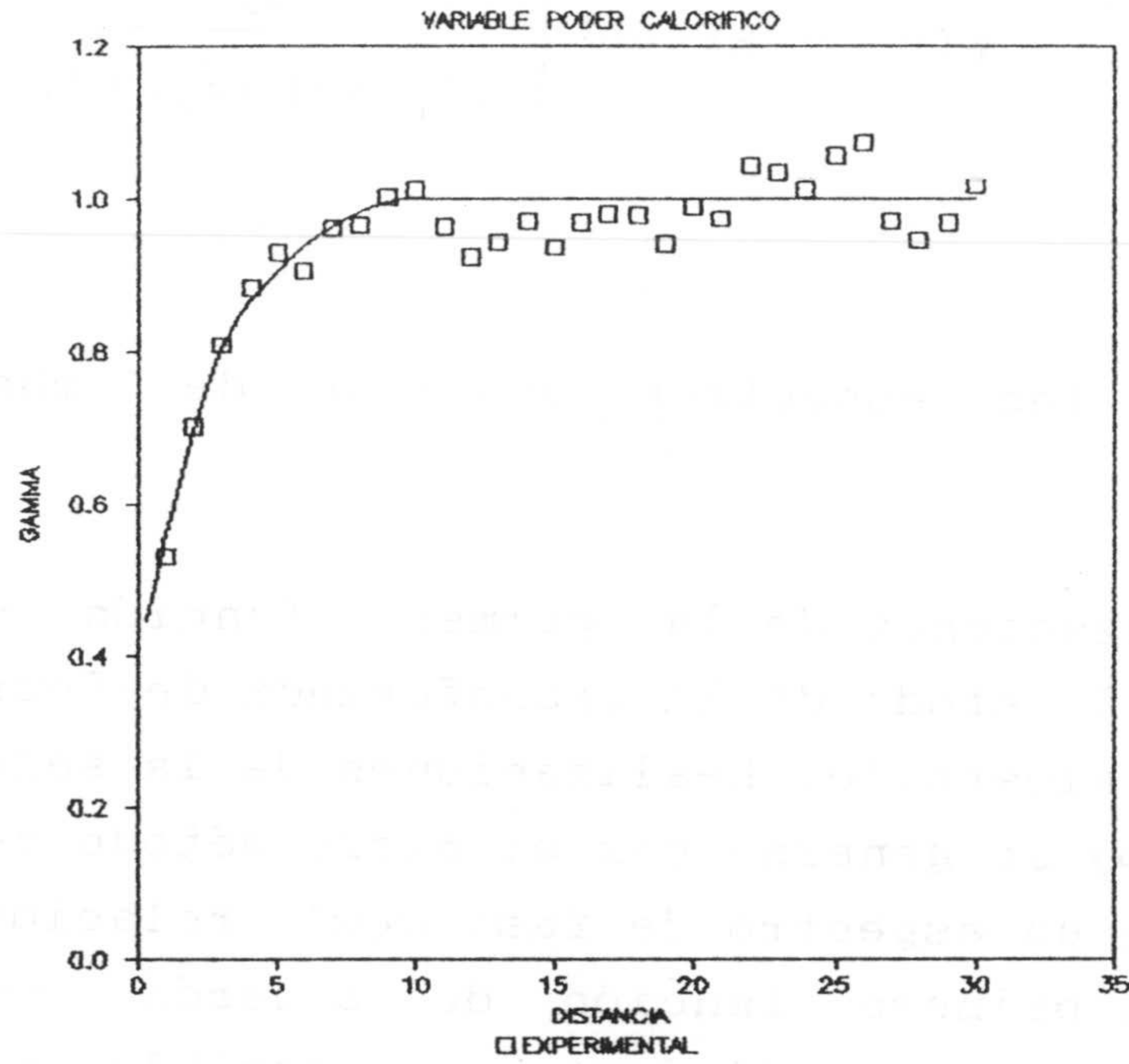


Figura 4.29b. Variograma gaussiano experimental y modelo teórico ajustado para el poder calorífico.

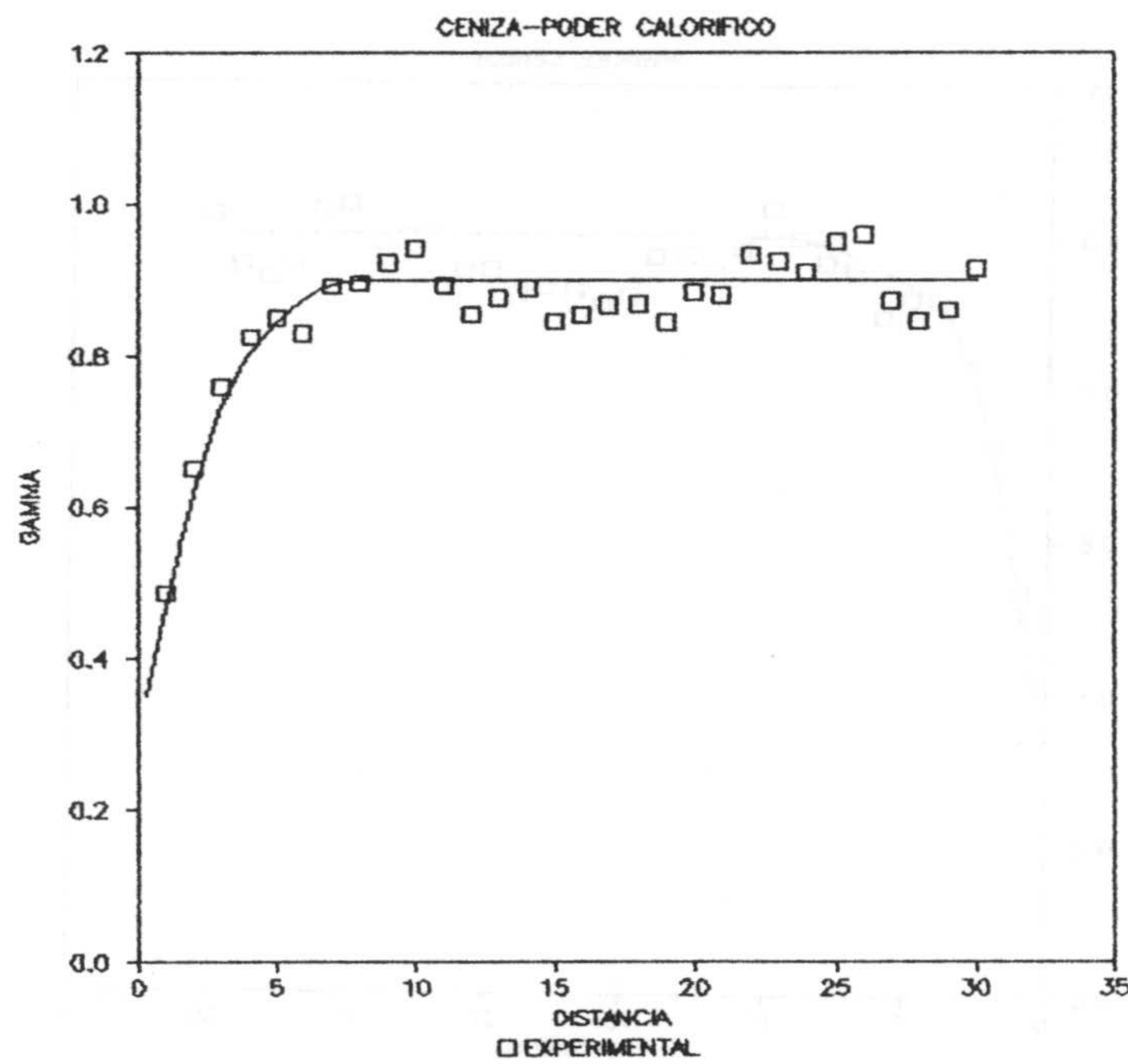


Figura 4.29d. Variograma cruzado experimental y modelo teórico ceniza-poder calorífico.

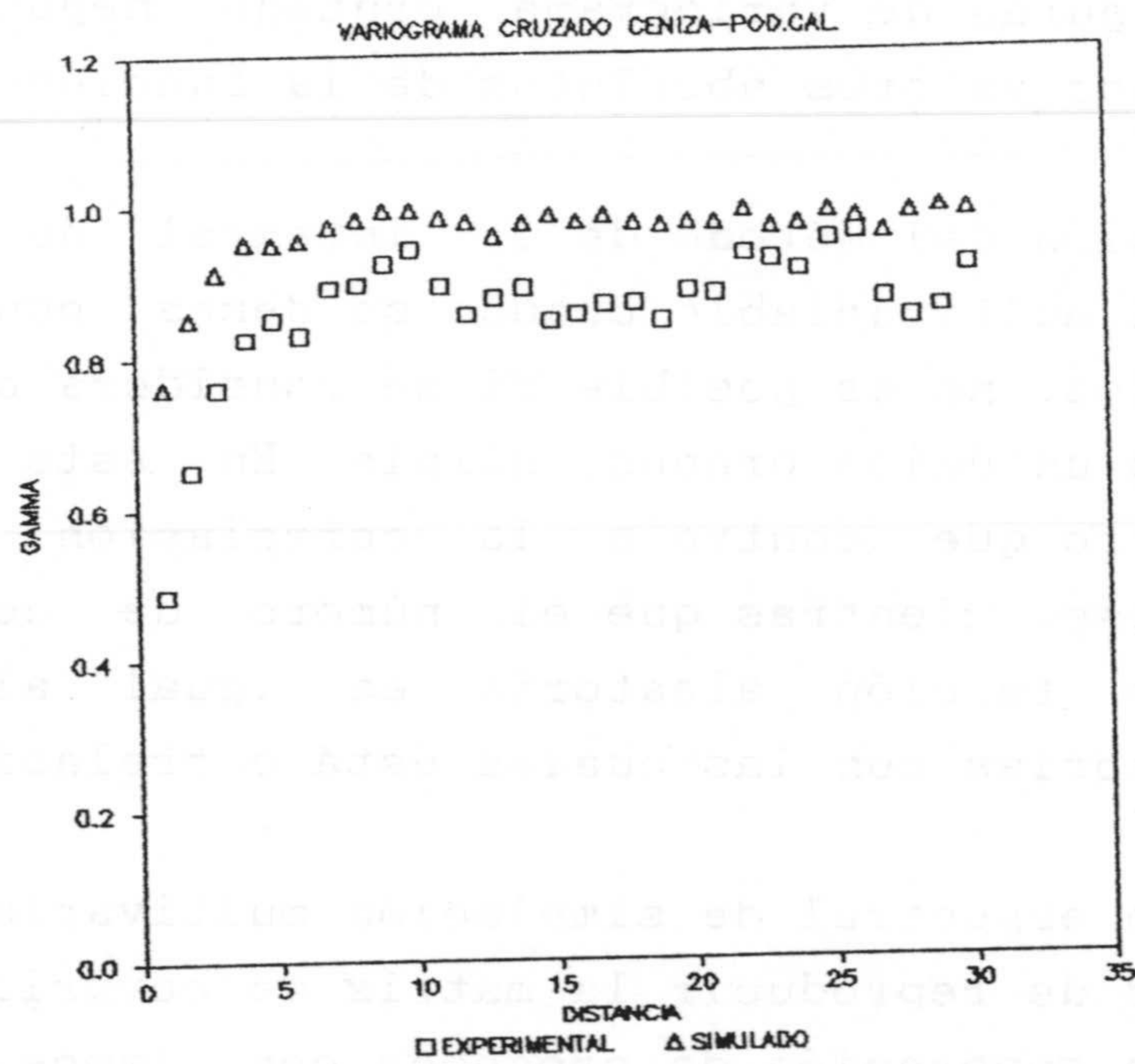


Figura 4.29d. Variograma cruzado experimental y simulado con el mismo espectro de fase.

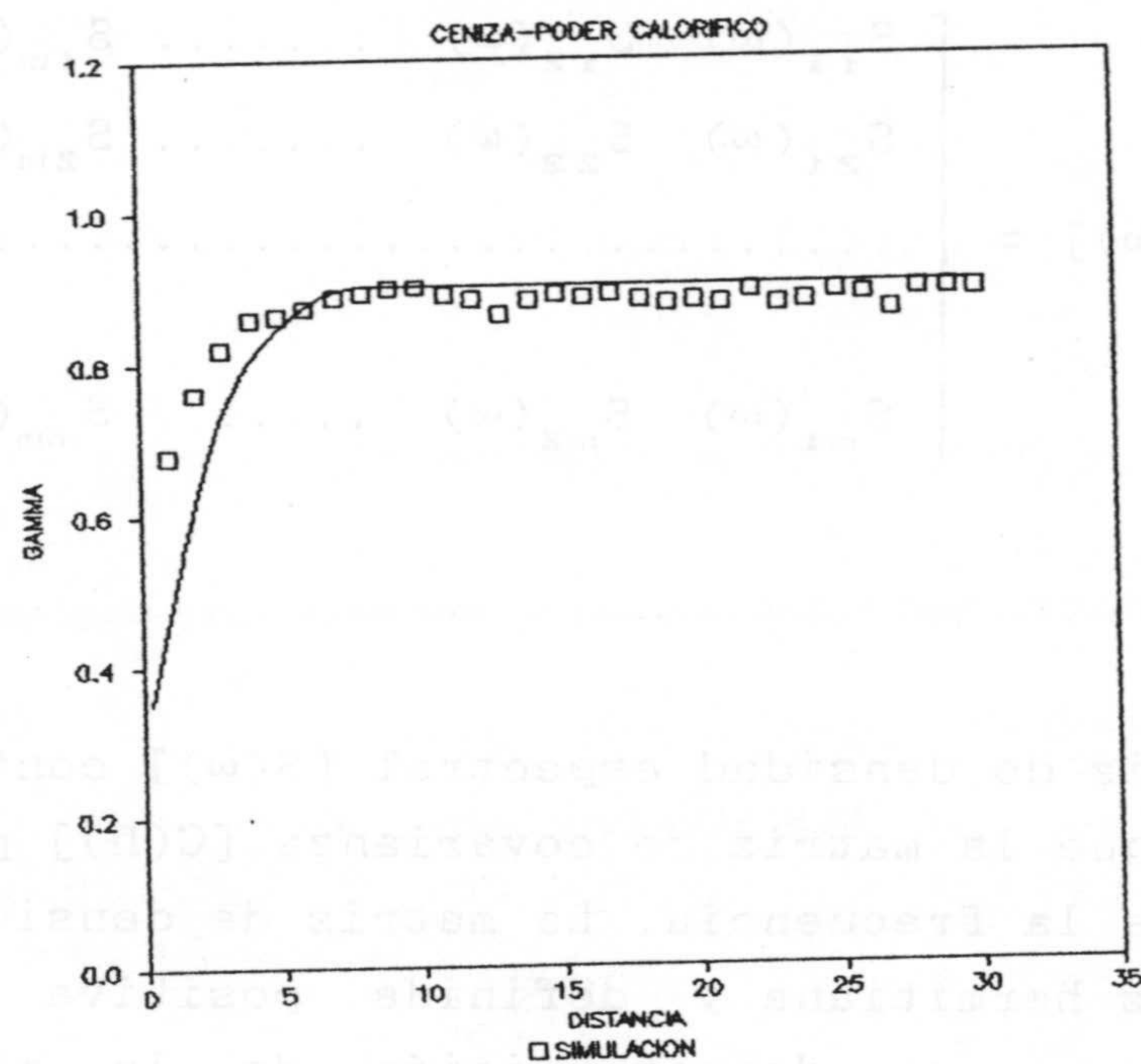


Figura 4.29e. Modelo de variograma cruzado y simulado con control del coespectro. Una realización.



En las figuras de variograma cruzado negativo se han representado los valores absolutos de la función variograma.

La extensión del método de la integral de Fourier al caso genereral multivariable cuando se desea considerar más de dos variables, no es posible si se considera cada función aleatoria como un único proceso simple. En este caso, sólo hay un parámetro que controla la correlación cruzada, el espectro de fase, mientras que el número de condiciones a imponer a cada función aleatoria es igual al número de funciones aleatorias con las cuales está correlacionada.

Un método espectral de simulación multivariable tiene la particularidad de reproducir la matriz de covarianza objetivo a través de la generación de procesos con imposición de la matriz de densidad espectral  $[S(\omega)]$ :

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots\dots\dots & S_{1m}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots\dots\dots & S_{2m}(\omega) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ S_{m1}(\omega) & S_{m2}(\omega) & \dots\dots\dots & S_{mm}(\omega) \end{bmatrix}$$

La matriz de densidad espectral  $[S(\omega)]$  contiene la misma información que la matriz de covarianza  $[C(h)]$  pero referida al dominio de la frecuencia. La matriz de densidad espectral es una matriz hermitiana y definida positiva por lo cual puede pensarse en un descomposición de la misma como un producto de dos matrices (SHINOZUKA, 1970):

$$[S(\omega)] = [F(\omega)] [\bar{F}(\omega)]^T$$

donde:

- : complejo conjugado.

T : matriz transpuesta.

Bajo estas condiciones es posible simular un conjunto de  $m$  funciones aleatorias por el siguiente método (SHINOZUKA y JAN, 1972):

$$Z_j(x) = \sum_{k=1}^j \sum_{\ell=1}^N |F_{jk}(\omega_\ell)| \sqrt{2\Delta\omega} \cos \left[ \omega'_\ell x + \vartheta_{jk}(\omega_\ell) + \phi_{k\ell} \right]$$

Los parámetros  $\Delta\omega$ ,  $\omega'_\ell$ , y  $N$  se definieron previamente al considerar el método de simulación univariante de RICE (1954)

$$\vartheta_{jk}(\omega_\ell) = \arctg \left( \frac{\text{Im } F_{jk}(\omega_\ell)}{\text{Re } F_{jk}(\omega_\ell)} \right)$$

con Im parte imaginaria y Re parte real.

La técnica anterior consume gran tiempo de cálculo y resulta engorrosa a la hora de extenderla al caso multidimensional.

El objetivo que me he propuesto ha sido adaptar la técnica de simulación de la integral de Fourier para el caso



multivariable.

En primer lugar, por ser el caso más interesante en el ámbito geoestadístico, sólo se van a considerar covarianzas simétricas en  $(h, -h)$  e  $(i, j)$ . Por este motivo la covarianza cruzada es una función par y su correspondiente transformada de Fourier, la función de densidad espectral, es asimismo real y par.

La matriz  $[S(\omega)]$  es real simétrica definida positiva y es posible la descomposición (GASCA, 1989):

$$[S(\omega)] = L U = L L^T$$

con  $L = [F(\omega)]$  matriz triangular inferior y  $U$  matriz triangular superior e igual a la matriz tranpuesta de la anterior.

En particular, es posible efectuar dicha descomposición por el método de Cholesky. Si  $[S(\omega)]$  es una matriz simétrica definida positiva es posible demostrar (GASCA, 1989) que las igualdades:

$$F_{11}(\omega) = \sqrt{S_{11}(\omega)}$$

$$F_{i1}(\omega) = \frac{S_{i1}(\omega)}{F_{11}(\omega)}$$

$$F_{kk}(\omega) = \sqrt{S_{kk}(\omega) - \sum_{r=1}^{k-1} F_{kr}^2}$$

$$F_{ik}(\omega) = \frac{S_{ik}(\omega) - \sum_{r=1}^{k-1} F_{ir}(\omega) F_{kr}(\omega)}{F_{kk}(\omega)}$$

permiten reconstruir la matriz  $[F(\omega)]$ , triangular inferior:

$$[F(\omega)] = \begin{bmatrix} F_{11}(\omega) & \emptyset & \dots & \emptyset \\ F_{21}(\omega) & F_{22}(\omega) & \dots & \emptyset \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1}(\omega) & F_{m2}(\omega) & \dots & F_{mm}(\omega) \end{bmatrix}$$

Para simular  $m$  funciones aleatorias  $\{Z_j(x); j = 1, \dots, m\}$  es preciso simular  $m(m+1)/2$  funciones aleatorias  $\{Y_{ji}(x); j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, j\}$  y efectuar la composición:



$$Z_1(x) = Y_{11}(x)$$

$$Z_2(x) = Y_{21}(x) + Y_{22}(x)$$

$$Z_3(x) = Y_{31}(x) + Y_{32}(x) + Y_{33}(x)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Z_j(x) = Y_{j1}(x) + Y_{j2}(x) + Y_{j3}(x) + \dots + Y_{jj}(x)$$

El proceso  $Y_{jk}(x)$  se simula por el método de la integral de Fourier con un espectro de amplitud igual a  $F_{jk}(\omega)$  y un espectro de fase aleatorio  $\varphi_k(\omega)$ .

Dos procesos  $Y_{jk}(\omega)$ ,  $Y_{uv}(\omega)$  son independientes excepto para  $k = v$

$$E\{Y_{jk}(x) Y_{uv}(x)\} = 0 \quad \forall j, u, k \neq v$$

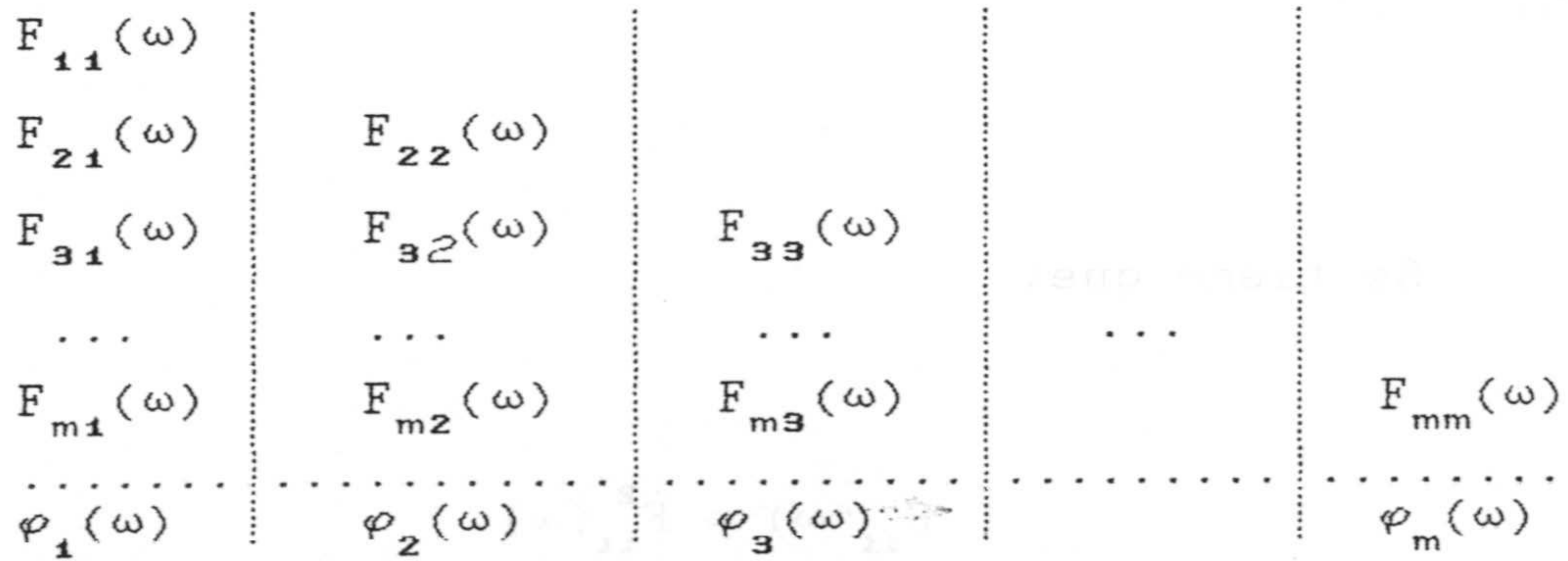
$$E\{Y_{jk}(x) Y_{uv}(x)\} = C_{ju}(h) \quad \text{si } k = v$$

ya que son procesos generados con espectros de fase aleatorios excepto en el caso  $k = v$  que tienen el mismo espectro de fase.

Por consiguiente se hace uso de  $m$  espectros de fase aleatoria, siendo  $m$  el número de funciones aleatorias a simular y es preciso calcular  $m(m+1)/2$  espectros de amplitud

que junto a los espectros de fase forman la transformada de Fourier de la función aleatoria. La transformada inversa de Fourier permite obtener las diferentes realizaciones de las diferentes funciones aleatorias. En la figura 4.30 se tiene los espectros de amplitud y de fase necesarios para la simulación espectral multivariable por el método de la integral de Fourier.

**ESPECTROS DE AMPLITUD**



**ESPECTROS DE FASE ALEATORIOS**

Figura 4.30. Espectros de amplitud y de fase. Todos los espectros de amplitud situados en la misma columna utilizan la misma fase aleatoria.

Por el método de simulación multivariable propuesto se consigue reproducir las funciones de densidad espectral directas y cruzadas (matriz de densidad espectral) y por consiguiente la matriz de covarianzas objetivo ya que:



$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ F_{21} & F_{22} & \dots & \emptyset \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ \emptyset & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & F_{mm} \end{bmatrix}$$

Con  $S_{ij} = S_{ij}(\omega)$  y  $F_{ij} = F_{ij}(\omega)$  y  $F_{ij} = F_{ji}$  asi como  $S_{ij} = S_{ji}$ .

Se tiene que:

$$S_{11}(\omega) = F_{11}^2(\omega)$$

$$S_{21}(\omega) = F_{21}(\omega) F_{11}(\omega)$$

$$S_{22}(\omega) = F_{21}^2(\omega) + F_{22}^2(\omega)$$

$$S_{31}(\omega) = F_{31}(\omega) F_{11}(\omega)$$

$$S_{32}(\omega) = F_{31}(\omega) F_{21}(\omega) + F_{32}(\omega) F_{22}(\omega)$$

$$S_{33}(\omega) = F_{31}^2(\omega) + F_{32}^2(\omega) + F_{33}^2(\omega)$$

...

Tomemos como ejemplo la correlación cruzada entre las variables segunda y tercera. Cada una se genera calculando la transformada inversa de Fourier de las representaciones de las dos funciones aleatorias en el dominio de la frecuencia que vale respectivamente:

$$Z_2(\omega) = F_{21}(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} + F_{22}(\omega) e^{-i\beta(\omega)}$$

$$Z_3(\omega) = F_{31}(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} + F_{32}(\omega) e^{-i\beta(\omega)} + F_{33}(\omega) e^{-i\alpha(\omega)}$$

Donde las fases aleatorias diferentes se han notado con diferente letra griega y no con un subíndice variable y además  $F_{ij}(\omega) = |F_{ij}(\omega)|$ .

En base al teorema de la transformada de Fourier de la correlación cruzada y teniendo en cuenta que los coeficientes de Fourier de los diferentes procesos son independientes, excepto aquellos que tienen la misma fase, es posible escribir:

$$S_{23}(\omega) = S_{32}(\omega) = Z_2(\omega) Z_3^*(\omega) =$$

$$F_{21}(\omega) F_{31}(\omega) e^{i(\varphi(\omega) - \varphi(\omega))} + F_{22}(\omega) F_{32}(\omega) e^{i(\beta(\omega) - \beta(\omega))} =$$

$$F_{21}(\omega) F_{31}(\omega) + F_{22}(\omega) F_{32}(\omega)$$



Por lo que se reproduce la correlación cruzada entre ambos procesos. Obviamente también se reproducen las covarianzas directas ya que la función de densidad espectral es igual al cuadrado del espectro de amplitud.

Todas las operaciones anteriores se efectúan mediante el empleo de algoritmos que hacen uso de la transformada rápida de Fourier y que es lo que hace que el método sea viable en tiempo de cálculo.

En la práctica puede suceder que al calcular numéricamente la matriz de densidad espectral como transformada de Fourier de una matriz de covarianza definida positiva, debido a errores de redondeo computacionales se puede obtener para determinadas frecuencias, matrices de densidad espectral no definidas positivas.

El método de descomposición de Cholesky falla en estos casos al no cumplirse la condición de definida positiva :

$$F_{kk}(\omega) = \sqrt{S_{kk}(\omega) - \sum_{r=1}^{k-1} F_{kr}(\omega)}$$

de modo que el término dentro de la raíz cuadrada vale cero o negativo.

Para solventar este problema he utilizado la siguiente técnica para corregir la matriz de densidad espectral cuando, para una determinada frecuencia, no es definida positiva. Esta técnica ha sido propuesta por WAKERNAGEL (1985) para corregir matrices de covarianza no definidas positivas. La matriz de densidad espectral que para unas determinadas



frecuencias es no definida positiva es simétrica y se caracteriza por algún valor propio negativo. Si dichos valores se anulan puede reconstruirse la matriz de densidad espectral como:

$$[S'(\omega)] = [A]^T [B] [A]$$

donde:

[A] : matriz que contiene los vectores propios de la matriz  $[S(\omega)]$  dispuestos en columnas.

[B] : matriz diagonal con los valores propios y donde los valores propios negativos se han anulado.

$[S'(\omega)]$  : nueva matriz de densidad espectral definida positiva.

BRAS y RODRIGUEZ-ITURBE (1984), para tratar matrices de covarianza no definidas positivas, proponen añadir a los elementos de la diagonal principal el valor absoluto del valor propio negativo más grande, se comprueba si la matriz resultante es positiva negativa, si no lo es se vuelve a repetir el proceso.

He comprobado ambos métodos para corrección de la matriz de densidad espectral y he adoptado el primero, en los diferentes programas informáticos, ya que distorsiona menos la matriz de densidad espectral original.

La nueva matriz de densidad espectral difiere poco de la matriz de densidad espectral original por lo que no se altera sensiblemente la matriz de covarianza objetivo.

Para chequear la metodología he efectuado la simulación de la evolución temporal conjunta de las características de calidad de lignito a la entrada de una central termoeléctrica. De las cinco variables con información



disponible a saber, humedad, ceniza, materia volátil, azufre y poder calorífico, el azufre presenta una correlación pobre con el resto de las variables por lo que me limitare a considerar la correogionalización que forman la variables humedad, ceniza, materia volátil y poder calorífico. El análisis variográfico efectuado sobre las variables gaussianas correspondientes permite la modelización posterior de los diferentes variogramas experimentales directos y cruzados, diez en total. Se modelizan primero los variogramas directos y posteriormente los variogramas cruzados teniendo en cuenta la desigualdad de Schwarz:

$$|\gamma_{ij}(h)| \leq \sqrt{\gamma_i(h) \gamma_j(h)}$$

Se ha obtenido los siguientes modelos como el mejor ajuste a mi criterio:

$$\gamma_1(h) = .3 + \text{Sph}(.4)_4 + \text{Sph}(.3)_{20}$$

$$\gamma_2(h) = .3 + \text{Sph}(.5)_4 + \text{Sph}(.2)_{10}$$

$$\gamma_3(h) = .3 + \text{Sph}(.4)_4 + \text{Sph}(.3)_{25}$$

$$\gamma_4(h) = .4 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.3)_{10}$$

$$\gamma_{12}(h) = .2 + \text{Sph}(.3)_3 + \text{Sph}(.2)_{13}$$

$$\gamma_{13}(h) = .13 + \text{Sph}(.22)_5$$

$$\gamma_{14}(h) = .2 + \text{Sph}(.41)_4$$

$$\gamma_{23}(h) = .2 + \text{Sph}(.26)_3 + \text{Sph}(.2)_8$$

$$\gamma_{24}(h) = .3 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.3)_8$$

$$\gamma_{34}(h) = .25 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.26)_8$$

Donde:

- 1 : humedad
- 2 : ceniza
- 3 : materia volátil
- 4 : poder calorífico

$$\gamma_{ii}(h) = \gamma_i(h)$$

$$\gamma_{ij}(h) = C_o + \sum_{k=1}^M \text{Sph}(a_k)_{b_k}$$

$\gamma_{ij}(h)$  es el variograma cruzado (directo si  $i=j$ ) entre las variables  $i$  y  $j$ .  $C_o$  es el efecto de pepita,  $M$  es el número de estructuras superpuestas.  $\text{Sph}(a_k)_{b_k}$  indica que la estructura  $k$ -ésima es de tipo esférico con meseta  $a$  y de alcance  $b$ .

Aunque el modelo anterior cumple la desigualdad de Schawarz por parejas, no es una condición suficiente para que la matriz de covarianza sea definida positiva. Es necesario comprobar que los menores de orden tres son asimismo positivos o nulos, así como el determinante de dicha matriz de covarianza. Un método más comodo para realizar dicha operación ha sido el comprobar si admite la descomposición en matriz triangular inferior y matriz triangular superior LU por el método de Cholesky; sólo las matrices simétricas definidas positivas admiten tal descomposición (GASCA, 1989).



De este modo se comprueba que para determinados valores de distancia el modelo es no definido positivo. Se efectúa una corrección de la matriz de covarianza en orden a obtener un modelo definido positivo por los métodos anteriormente descritos para corregir la matriz de densidad espectral. El programa informático suministra para cada paso el nuevo valor del modelo de covarianza de modo que se puede representar gráficamente y volver a modelizar para cumplir las especificaciones necesarias. En este caso particular las variaciones son pequeñas, en torno a un 2 %, y afecta sólo a los primeros pasos, hasta un alcance de cuatro en la matriz de covarianza. Ello implica un reajuste del modelo que afecta ligeramente al efecto de pepita y a la primera estructura de los variogramas directos. El modelo final definido positivo queda (figuras 4.31i a 4.31.j) queda:

$$\gamma_1(h) = .29 + \text{Sph}(.41)_6 + \text{Sph}(.3)_{20}$$

$$\gamma_2(h) = .29 + \text{Sph}(.51)_6 + \text{Sph}(.2)_{15}$$

$$\gamma_3(h) = .29 + \text{Sph}(.41)_6 + \text{Sph}(.3)_{25}$$

$$\gamma_4(h) = .39 + \text{Sph}(.31)_6 + \text{Sph}(.3)_{10}$$

$$\gamma_{12}(h) = .2 + \text{Sph}(.44)_4 + \text{Sph}(.3)_{13}$$

$$\gamma_{13}(h) = .13 + \text{Sph}(.22)_8$$

$$\gamma_{14}(h) = .2 + \text{Sph}(.41)_4$$

$$\gamma_{23}(h) = .2 + \text{Sph}(.26)_4 + \text{Sph}(.2)_8$$

$$\gamma_{24}(h) = .3 + \text{Sph}(.3)_4 + \text{Sph}(.3)_8$$

$$\gamma_{34}(h) = .25 + \text{Sph}(.28)_4 + \text{Sph}(.28)_{10}$$

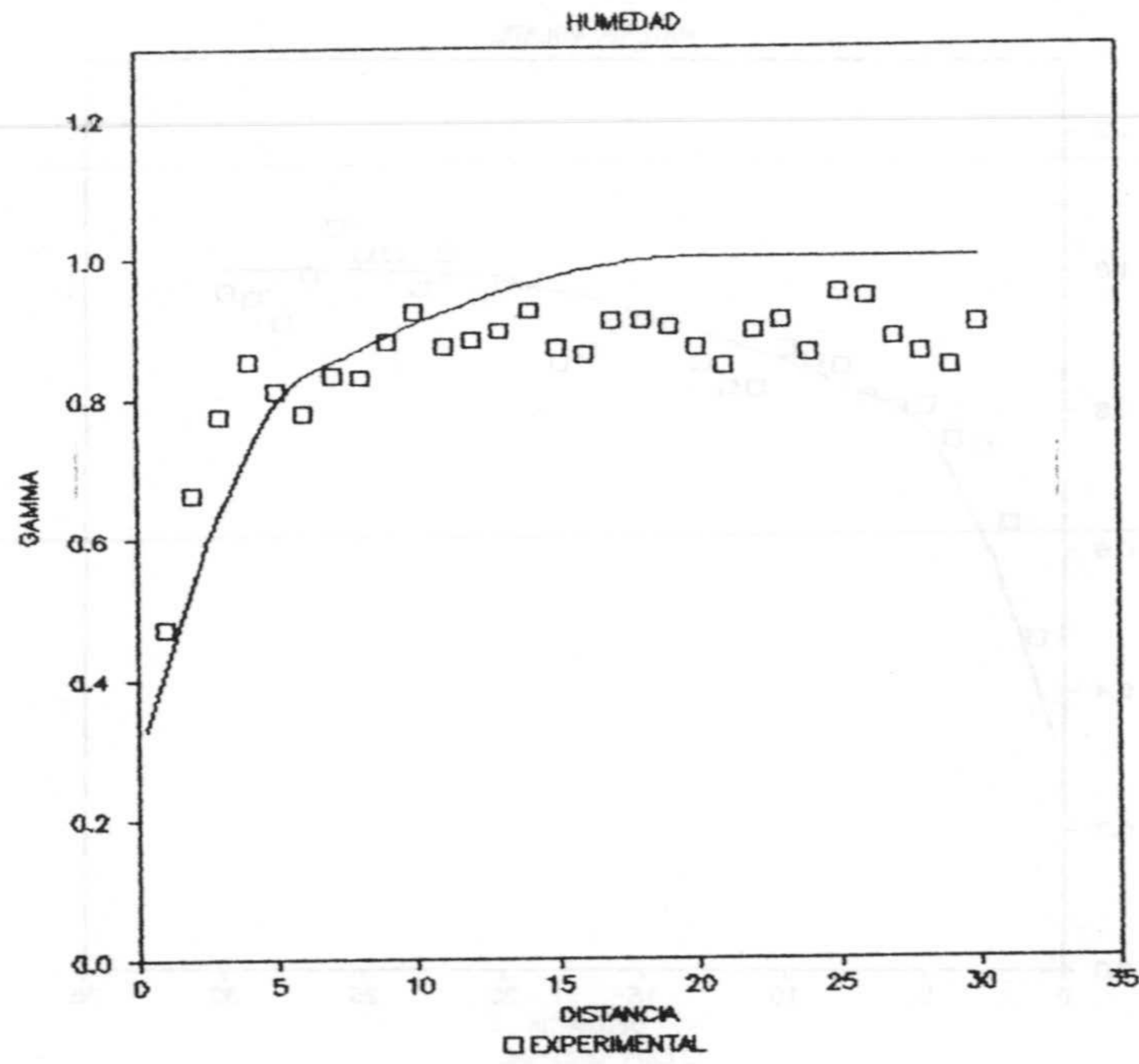


Figura 4.31a. Variograma experimental y modelo teórico para la variable humedad.

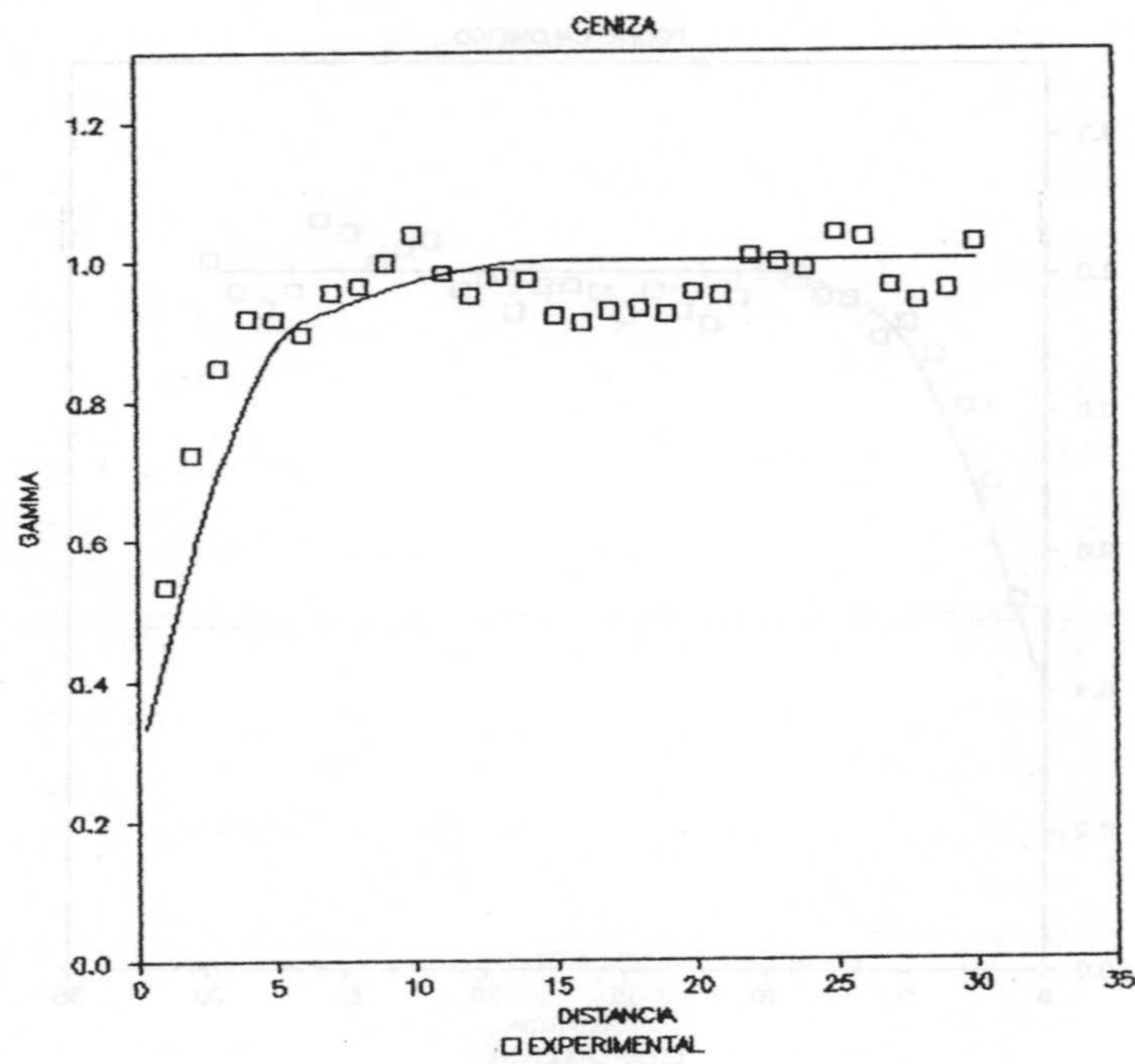


Figura 4.31b. Variograma experimental y modelo teórico para la variable ceniza.



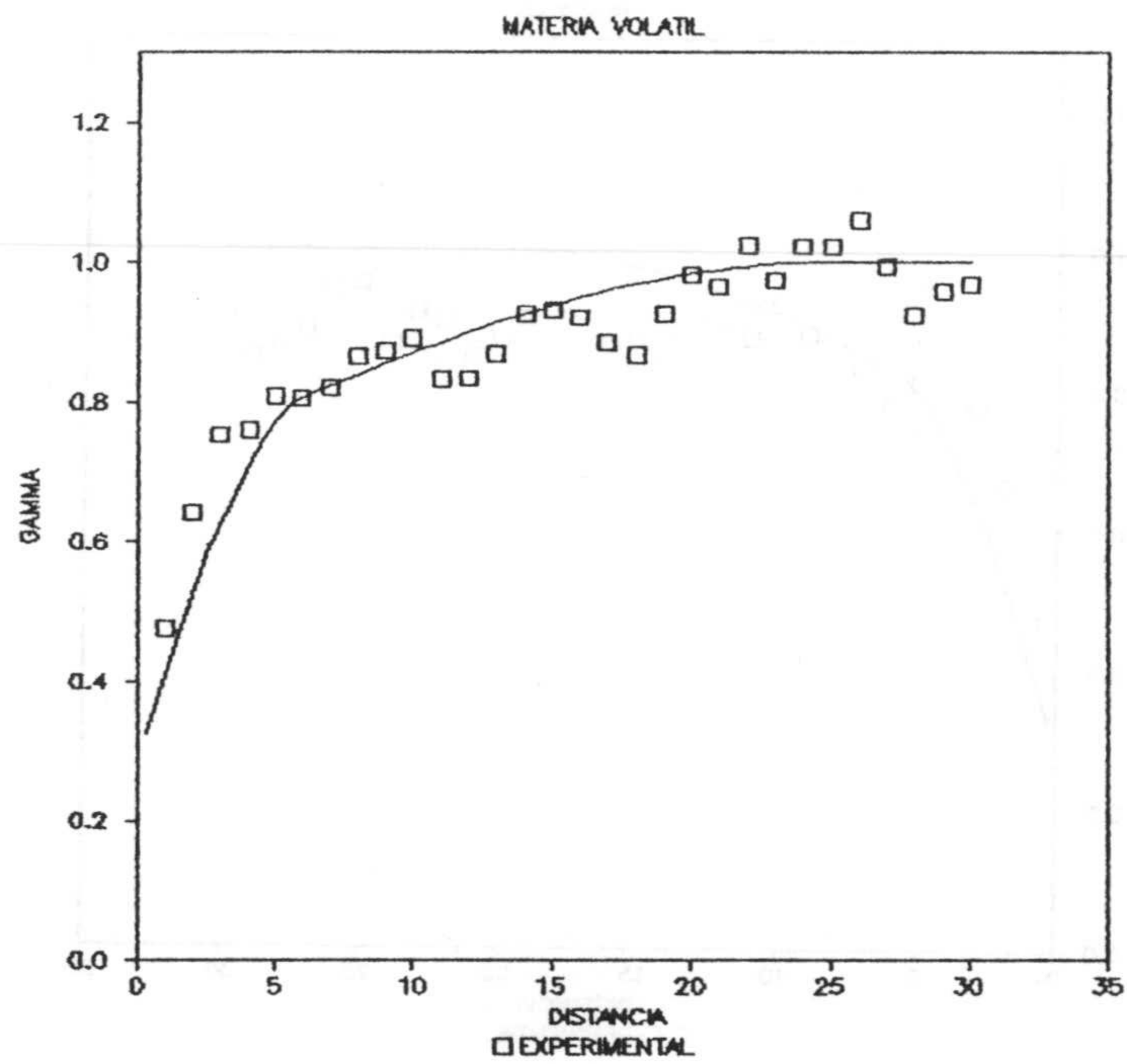


Figura 4.31c. Variograma experimental y modelo teórico para la variable materia volátil.

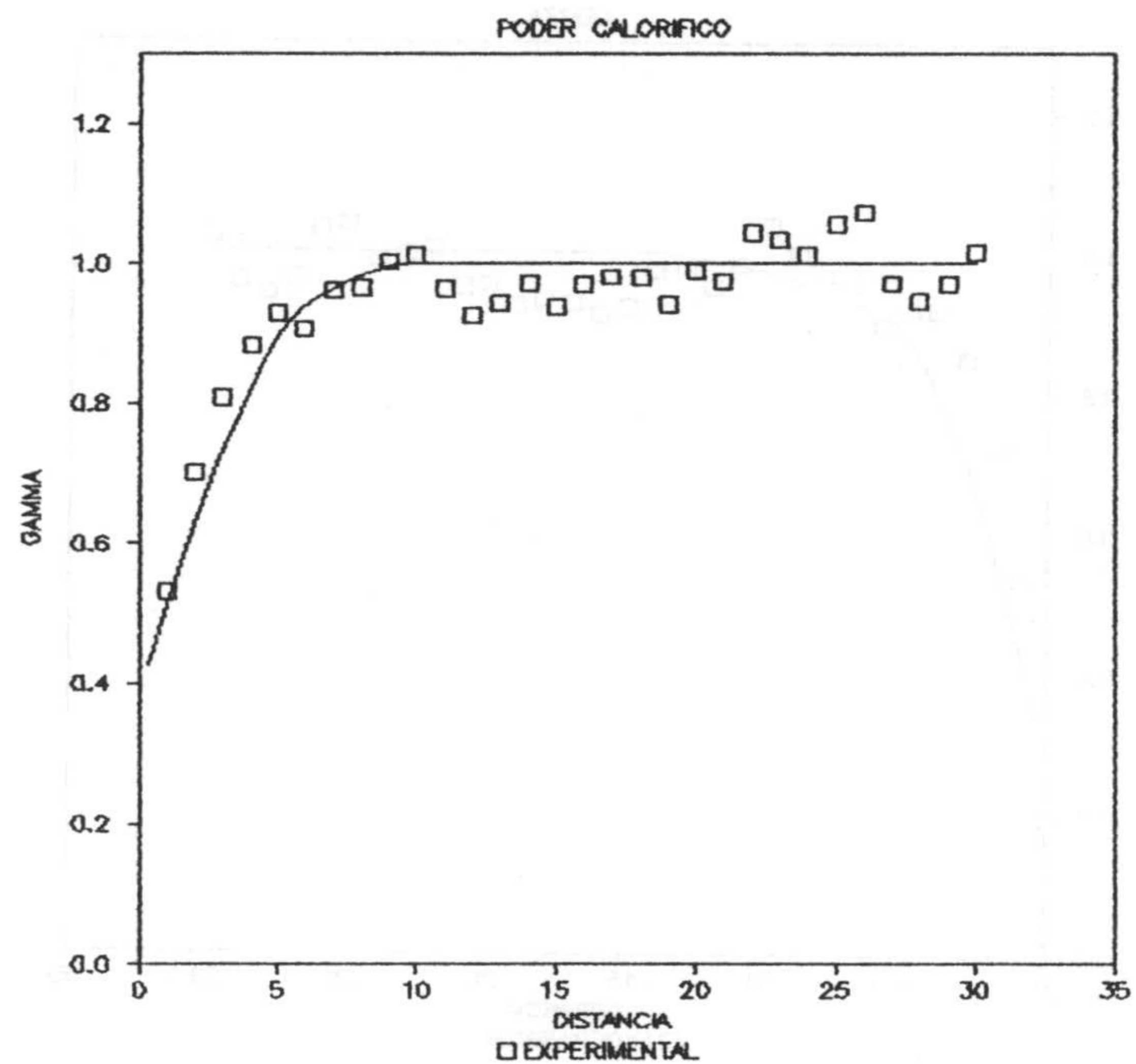


Figura 4.31d. Variograma experimental y modelo teórico para la variable poder calorífico.

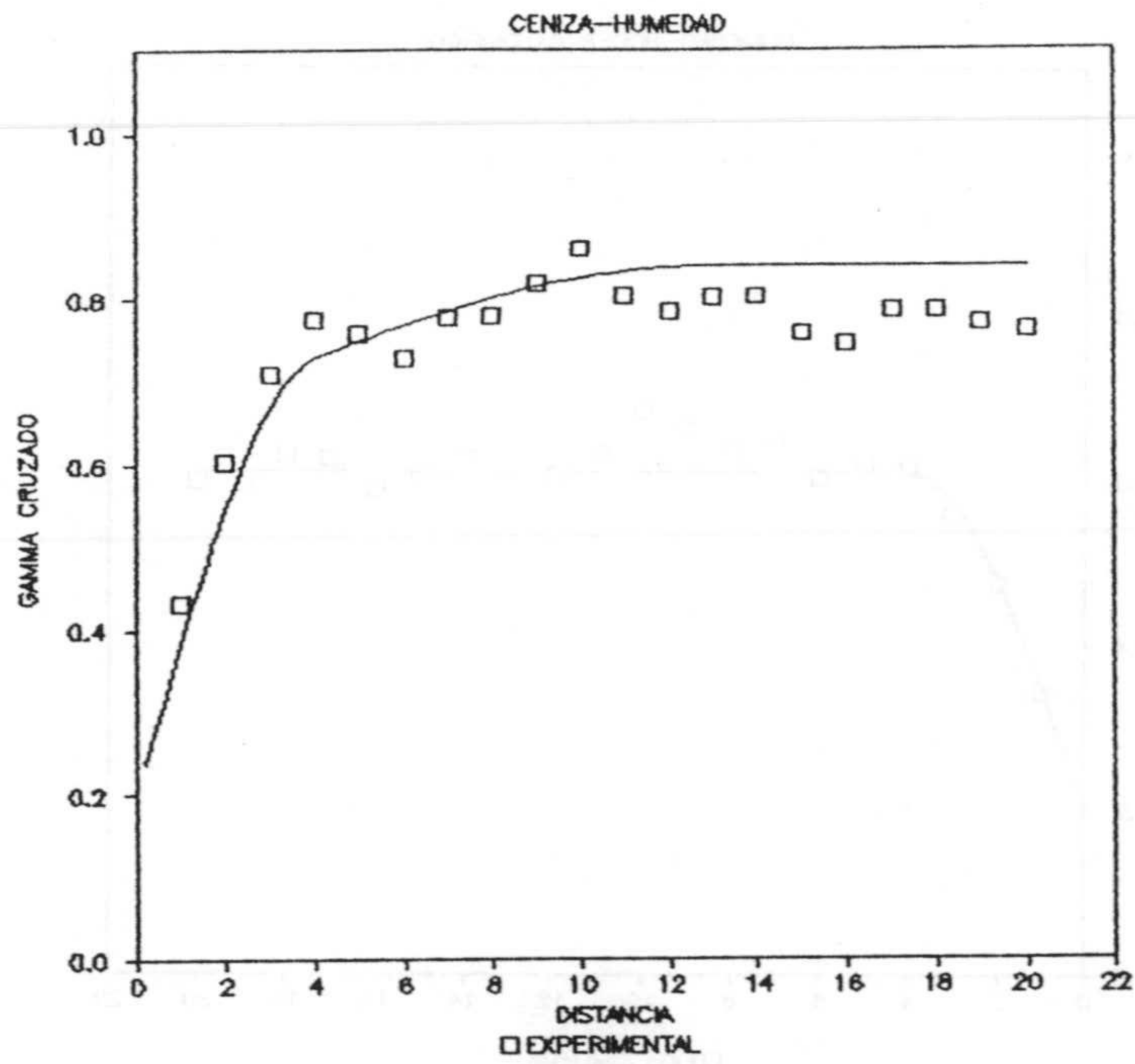


Figura 4.31e. Variograma cruzado humedad-ceniza. Valores experimentales y modelo teórico.

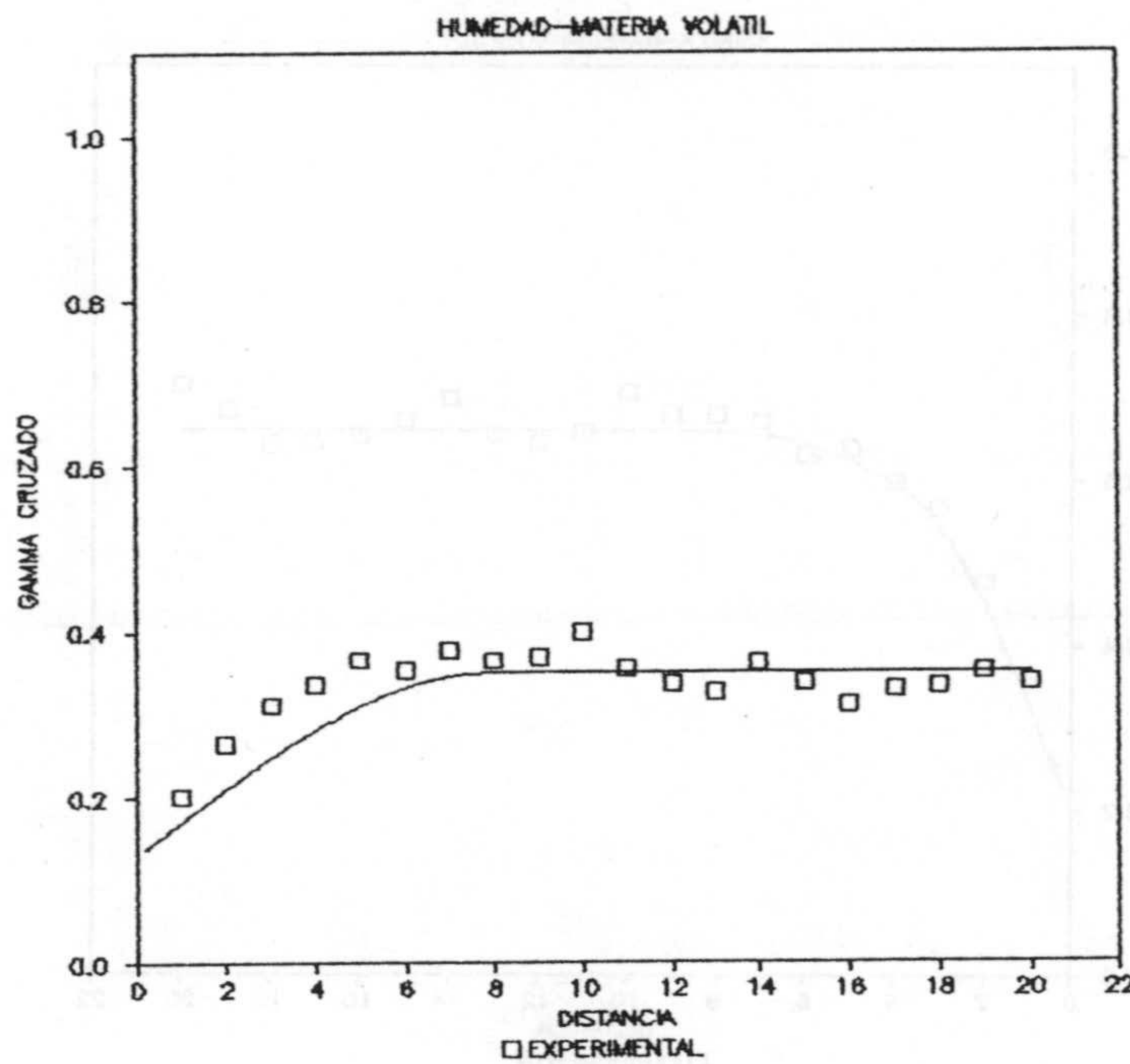


Figura 4.31f Variograma cruzado humedad-poder calorífico. Valores experimentales y modelo teórico.



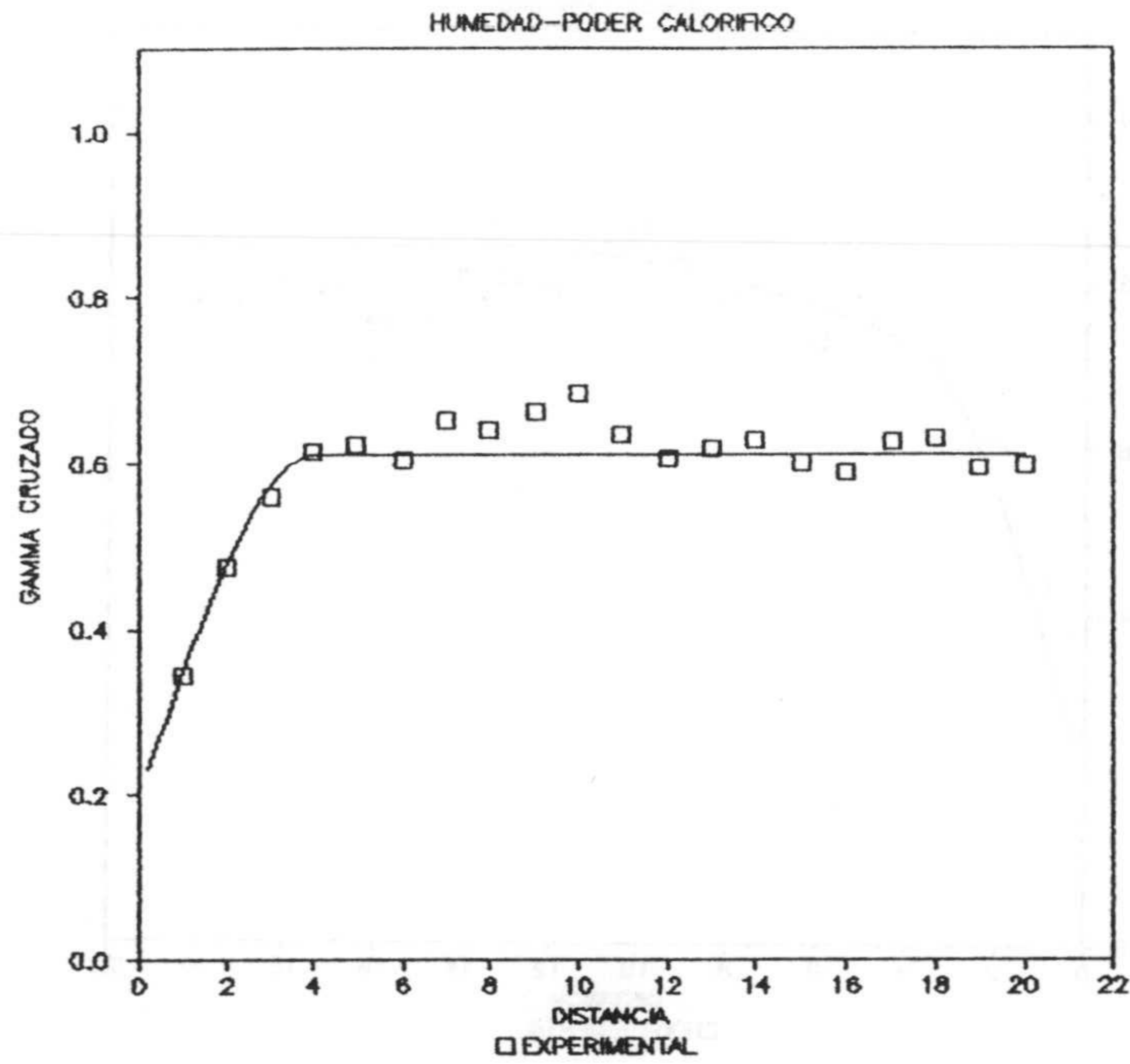


Figura 4.31g Variograma cruzado humedad-materia volatil  
Valores experimentales y modelo teórico.

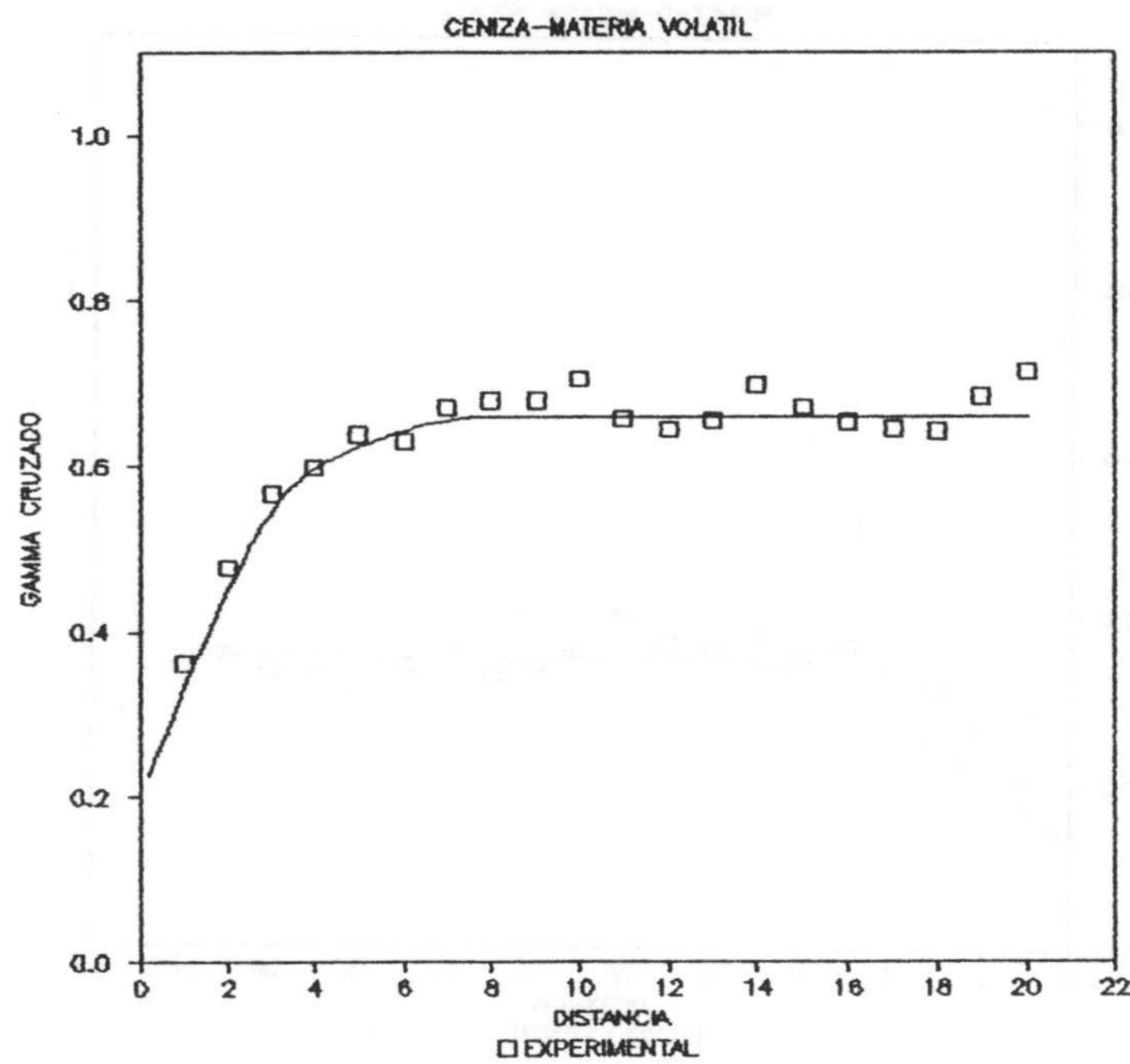


Figura 4.31h. Variograma cruzado ceniza-materia volatil.  
Valores experimentales y modelo teórico.

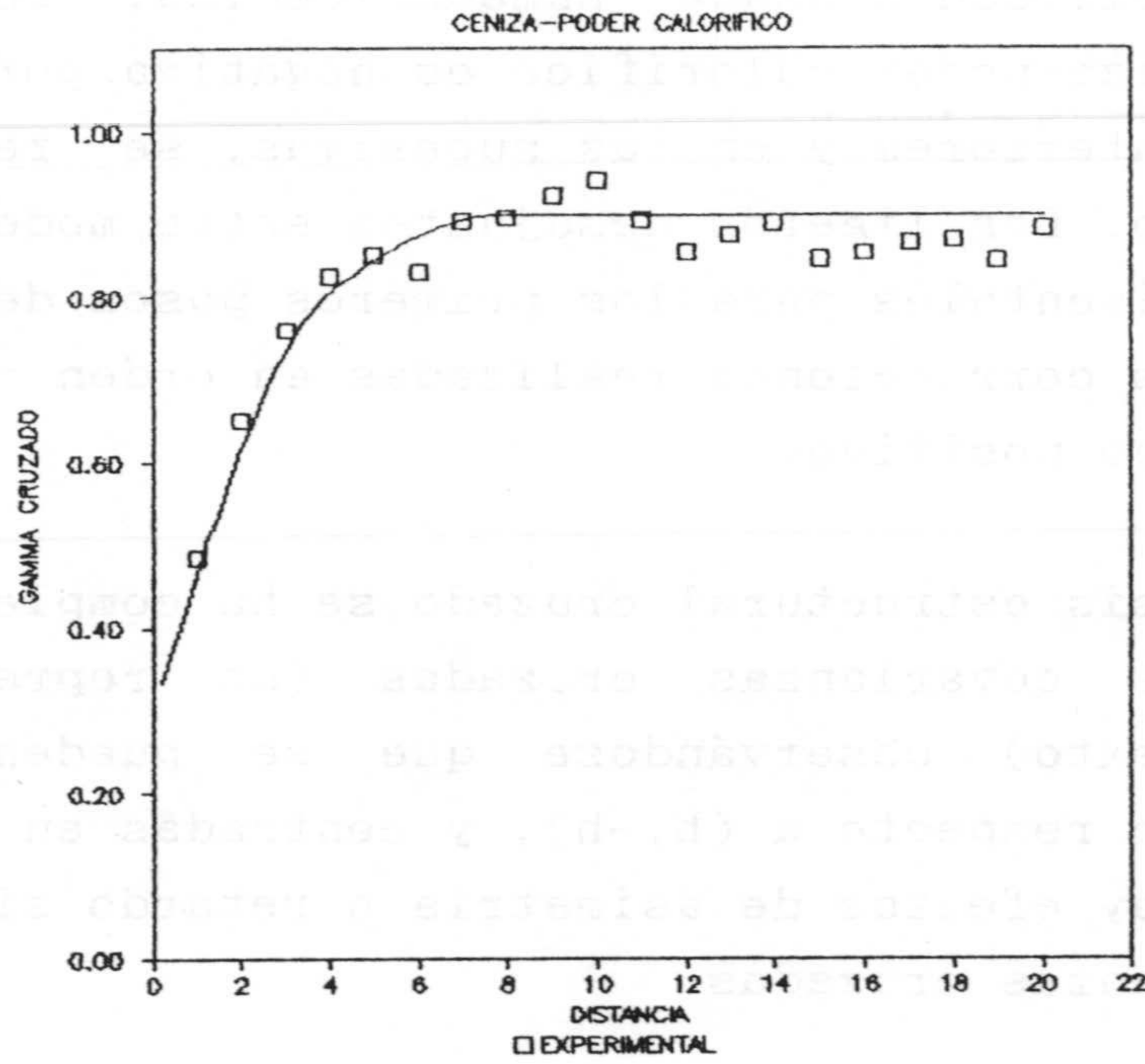


Figura 4.31i Variograma cruzado ceniza-poder calorífico. Valores experimentales y modelo teórico.

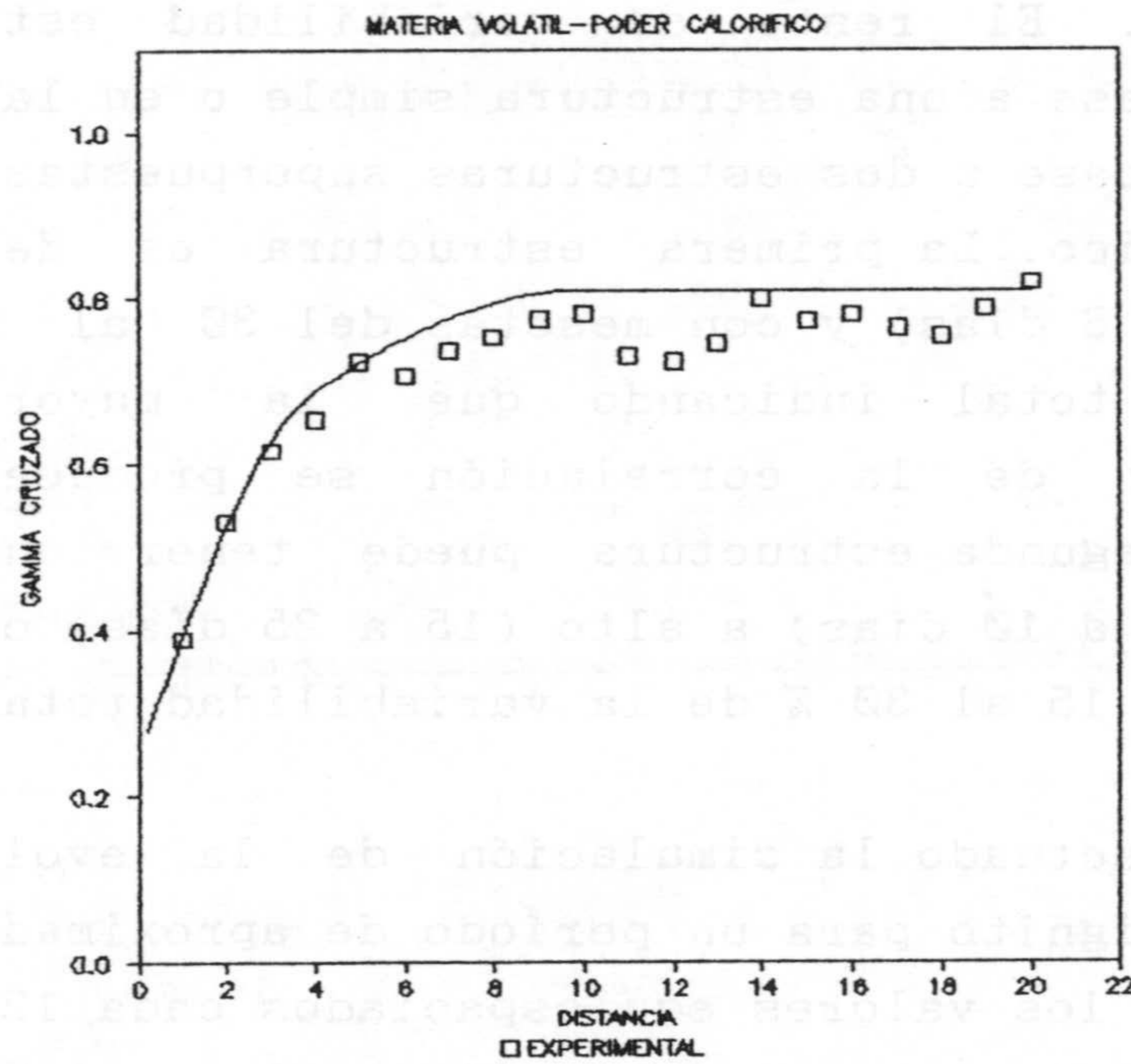


Figura 4.31j. Variograma cruzado materia volátil-poder calorífico. Valores experimentales y modelo teórico.



La variabilidad cruzada humedad-ceniza, ceniza-materia volátil y ceniza-poder calorífico es negativa por lo que en las figuras anteriores y en las sucesivas, se representa el valor absoluto. Los ligeros desajustes entre modelo teórico y valores experimentales para los primeros pasos del variograma se deben a las correcciones realizadas en orden a obtener un modelo definido positivo.

El análisis estructural cruzado se ha completado con el cálculo de las covarianzas cruzadas (no representadas en figuras del texto) observándose que se pueden considerar simétricas con respecto a  $(h, -h)$ , y centradas en el origen, es decir no hay efectos de asimetría o retardo significativos en las covarianzas cruzadas.

En los variogramas cruzados se observa como el efecto de pepita oscila entre un 20 y un 40 % de la variabilidad total de una estructura particular, es decir, ese es el porcentaje de variabilidad no estructurada y que se comporta como un ruido blanco. El resto de variabilidad estructurada se modeliza en base a una estructura simple o en la mayoría de los casos en base a dos estructuras superpuestas, todas ellas de tipo esférico. La primera estructura es de un alcance corto (de 4 a 6 días) y con mesetas del 30 al 60 % de la variabilidad total indicando que la mayor parte de estructuración de la correlación se produce para este alcance. La segunda estructura puede tener un alcance de intermedio (8 a 10 días) a alto (15 a 25 días) con una meseta del orden del 15 al 30 % de la variabilidad total.

Se ha efectuado la simulación de la evolución de la calidad del lignito para un período de aproximadamente un año y medio y con los valores equiespaciados cada 12 horas. Se ha utilizado el método de simulación multivariable espectral expuesto anteriormente y los resultados obtenidos para una única realización se expresan gráficamente en las figuras siguientes de la 5.32a a la 5.32j. La tabla V.10a registra la media y varianza de una realización al azar, para las cuatro



variables. La varianza es, en todos los casos, ligeramente superior a uno, debido a la ligera modificación de la matriz de densidad espectral. Se debe recordar que el área que queda por debajo de la función de densidad es igual a la varianza del proceso, y cualquier modificación de dicha curva modifica la varianza teórica. No obstante esas modificaciones son ligeras como para afectar seriamente la estructura de la matriz de densidad espectral que impone la matriz de covarianza del proceso. Por ello las realizaciones se han standarizado y los coeficientes de correlación obtenidos se registran en la tabla V.10b que pueden compararse con los experimentales de la tabla V.9, observándose una buena correspondencia.

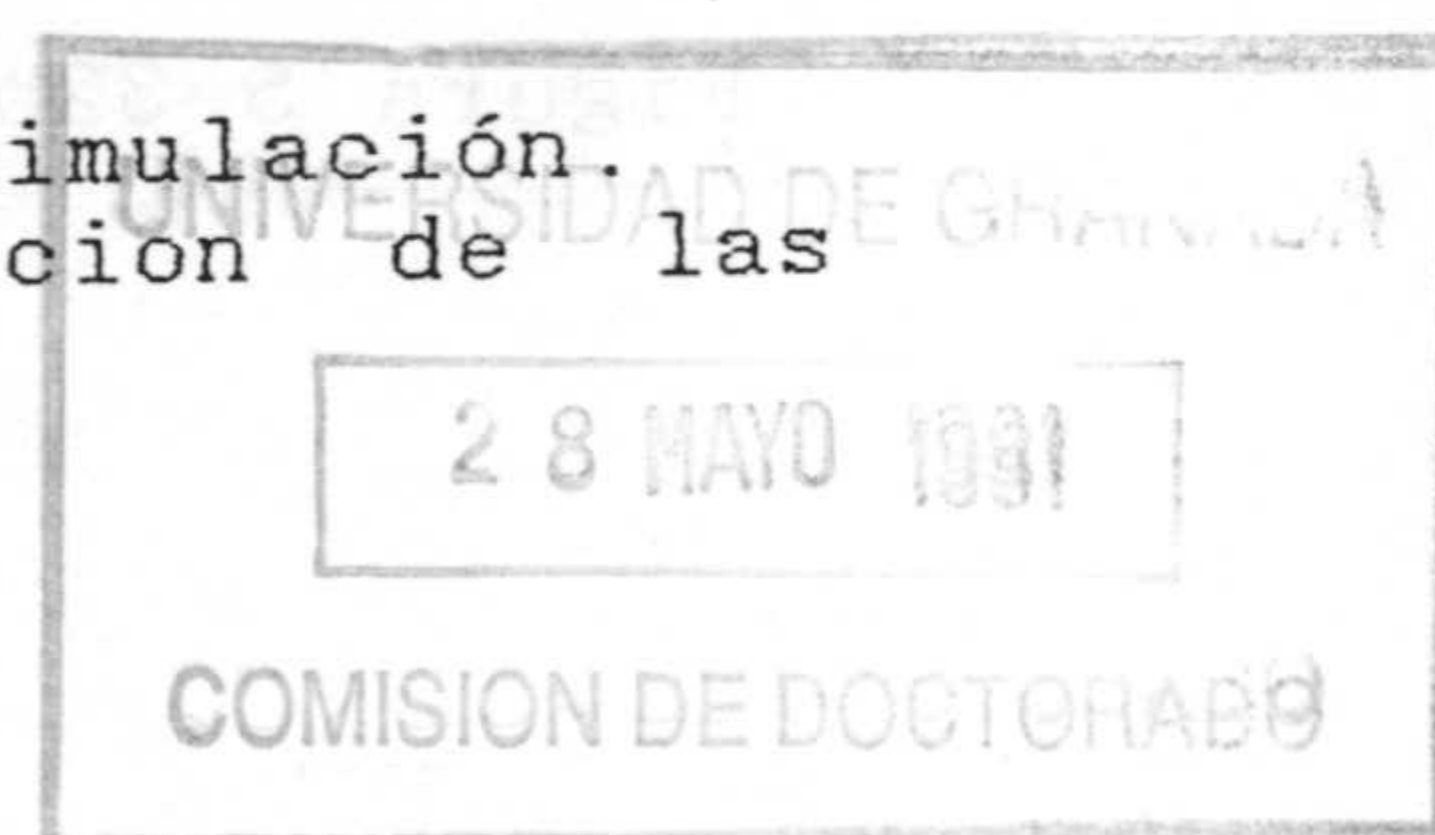
	MEDIA	VARIANZA
<i>Humedad</i>	.112	1.017
<i>Ceniza</i>	.009	1.076
<i>Mat. vol.</i>	.017	1.076
<i>Pod. cal.</i>	.020	1.093

a

	<i>Humedad</i>	<i>Ceniza</i>	<i>Mat. vol.</i>	<i>Pod. cal.</i>
<i>Humedad</i>	1.00			
<i>Ceniza</i>	-.81	1.00		
<i>Mat. vol.</i>	.28	-.58	1.00	
<i>Pod. cal.</i>	.65	-.87	.80	1.00

b

Tabla V.10a. Media y varianza de la simulación.  
 b. Coeficientes de correlación de las series simuladas.





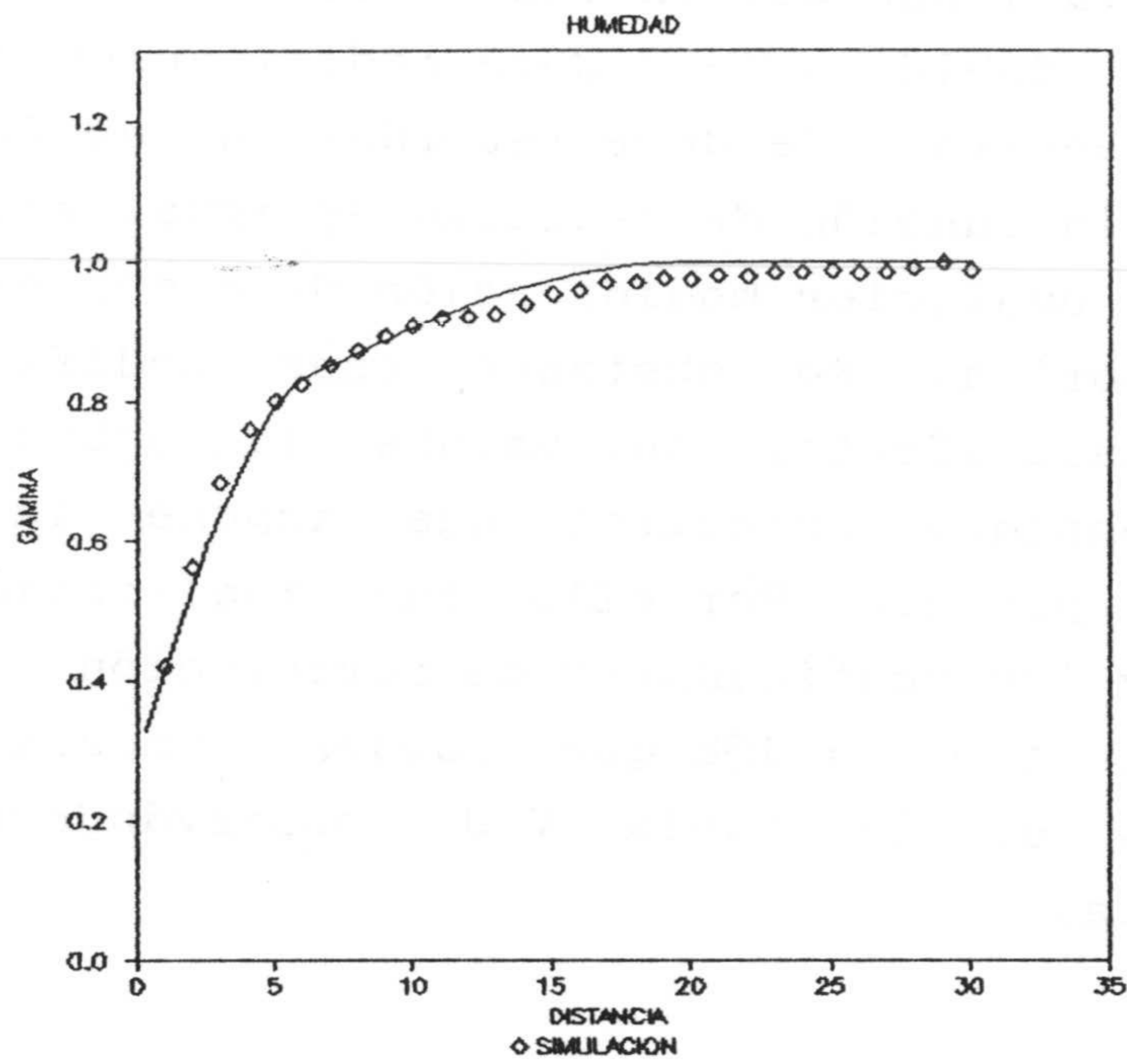


Figura 5.32a. Modelo teórico y variograma simulado para la variable humedad.

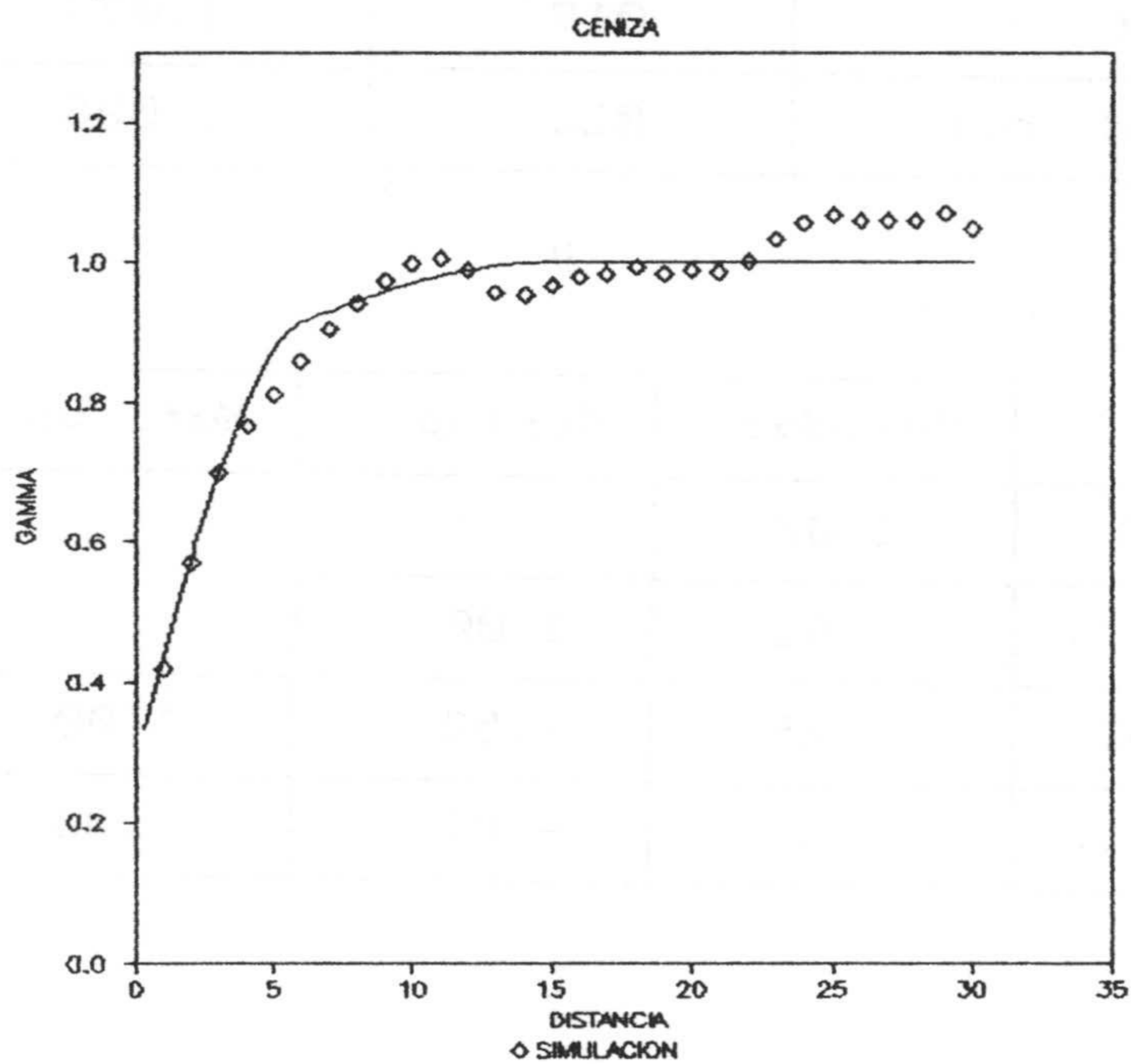


Figura 5.32b. Modelo teórico y variograma simulado para la variable ceniza.

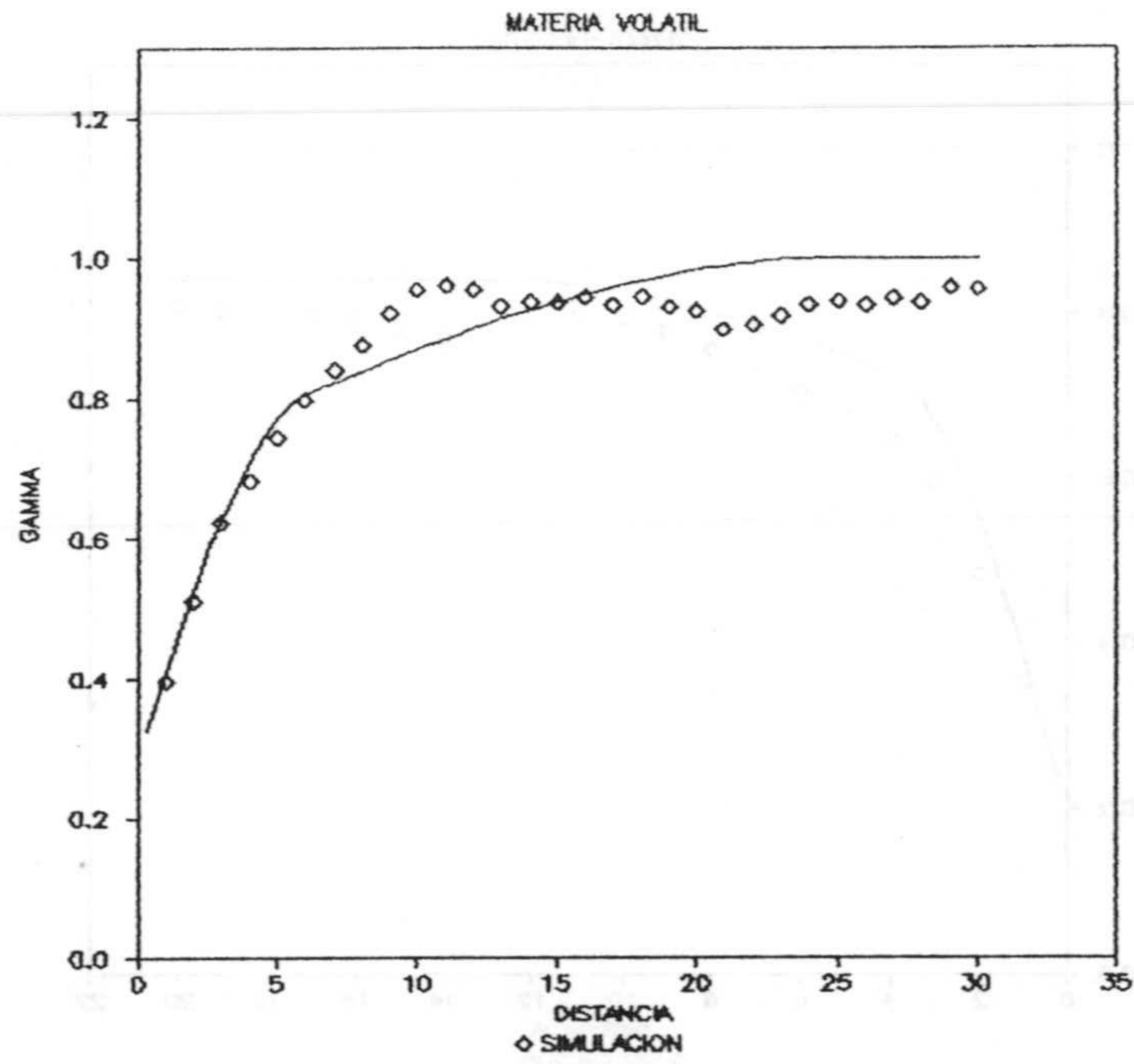


Figura 5.32c. Modelo teórico y variograma simulado para la variable materia volátil.

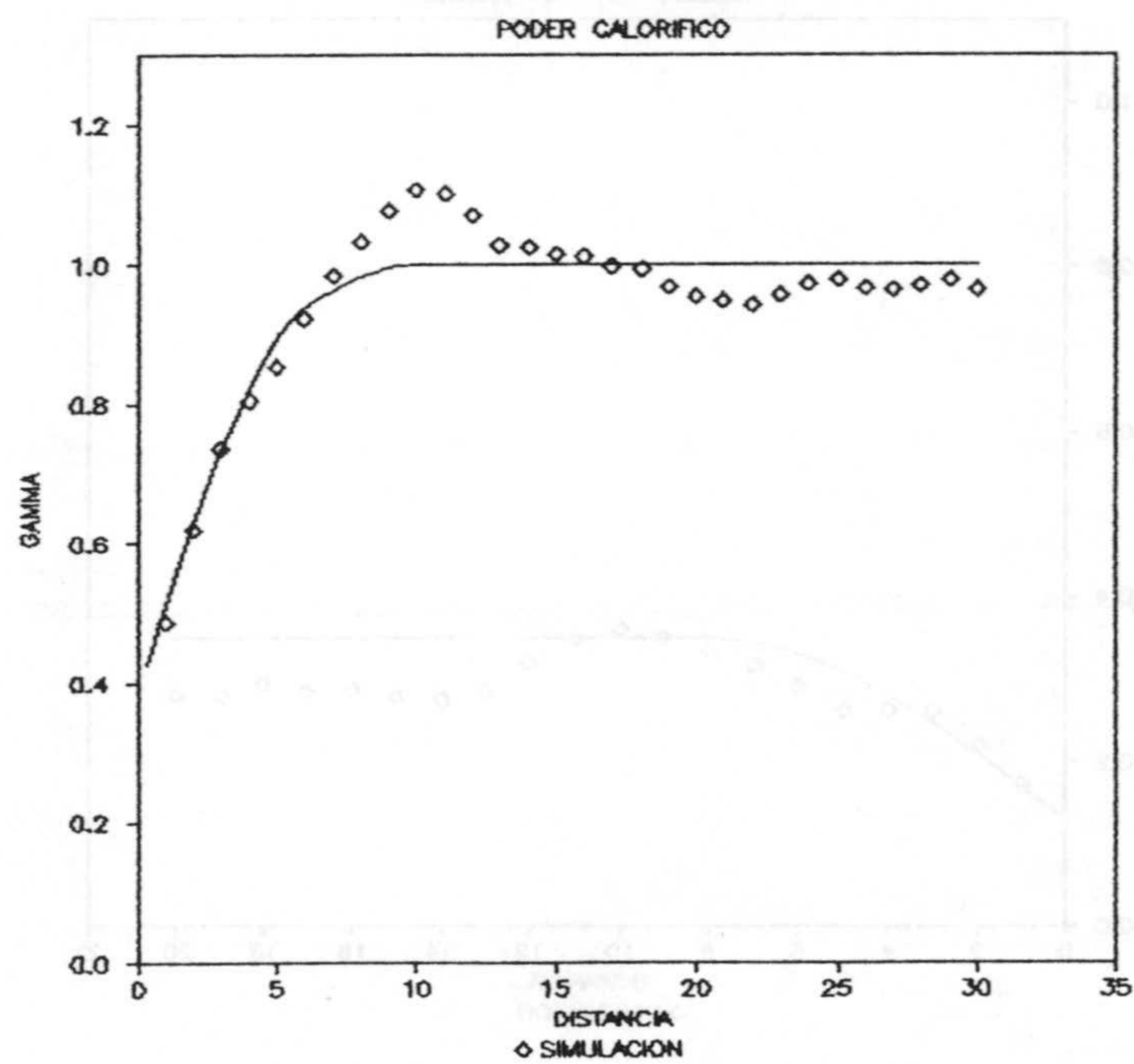


Figura 5.32d. Modelo teórico y variograma simulado para la variable poder calorífico.



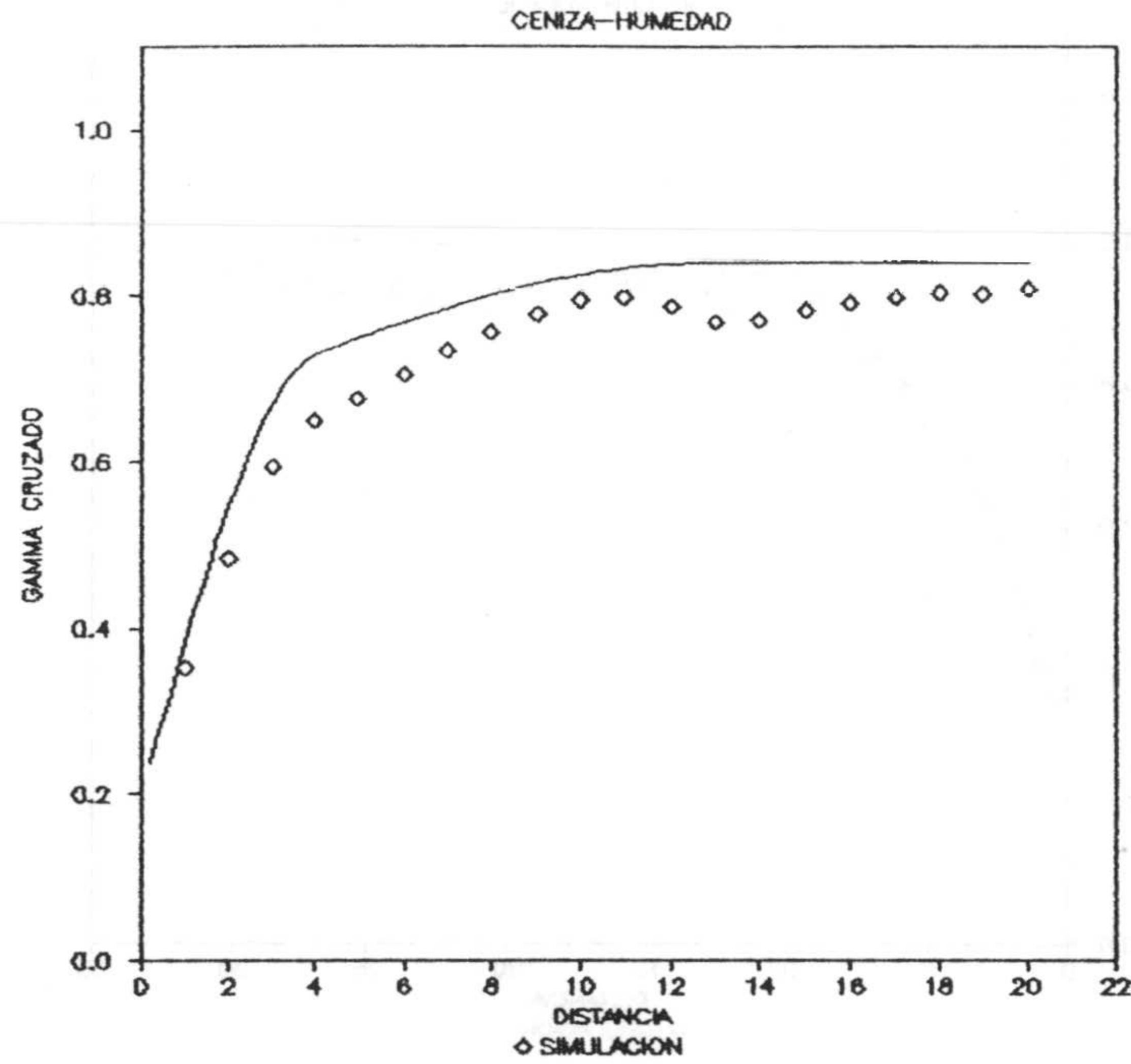


Figura 5.32e. Modelo teórico y variograma cruzado simulado para las variables humedad y ceniza.

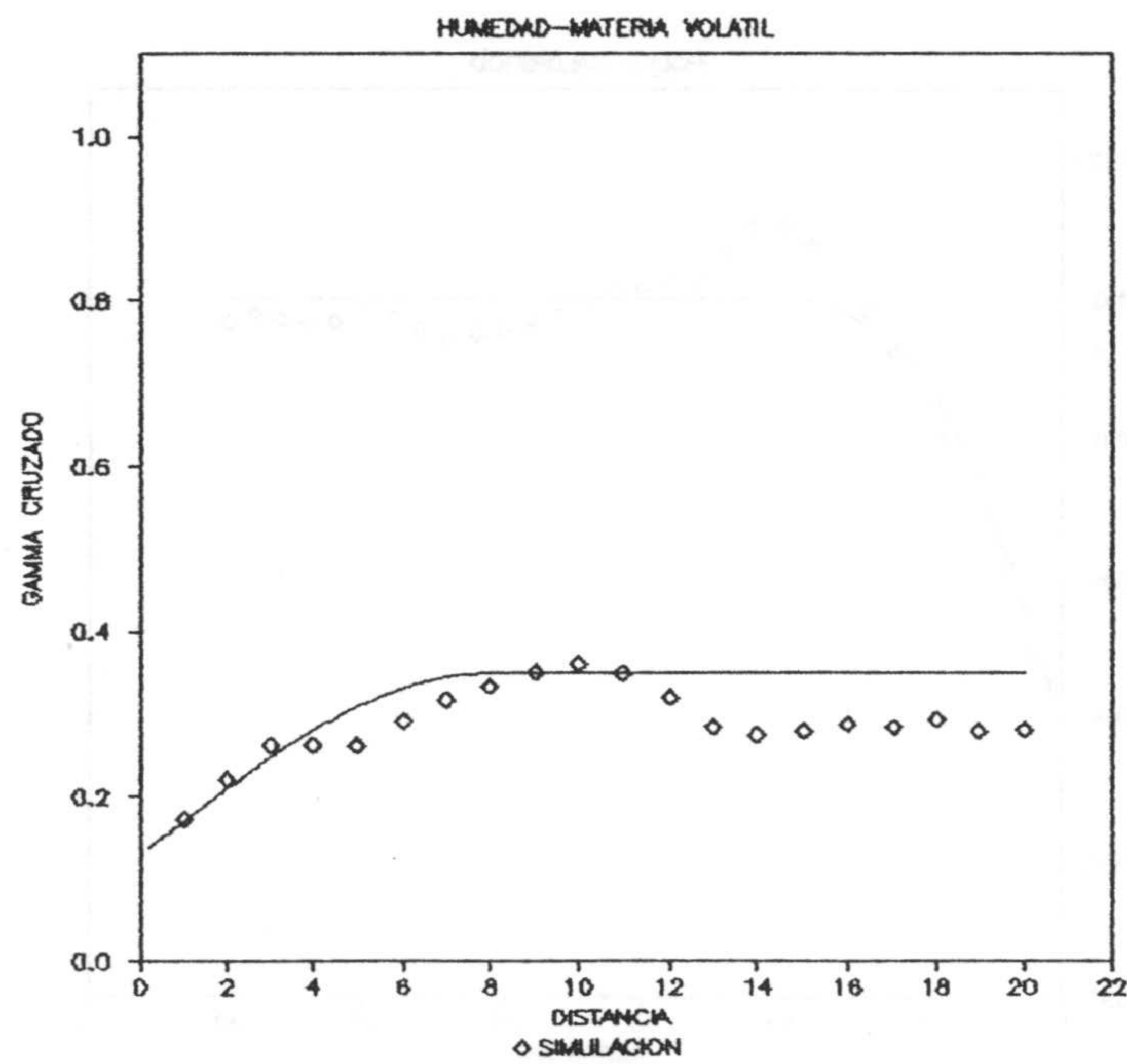


Figura 5.32f. Modelo teórico y variograma cruzado simulado para las variables humedad y materia volátil.

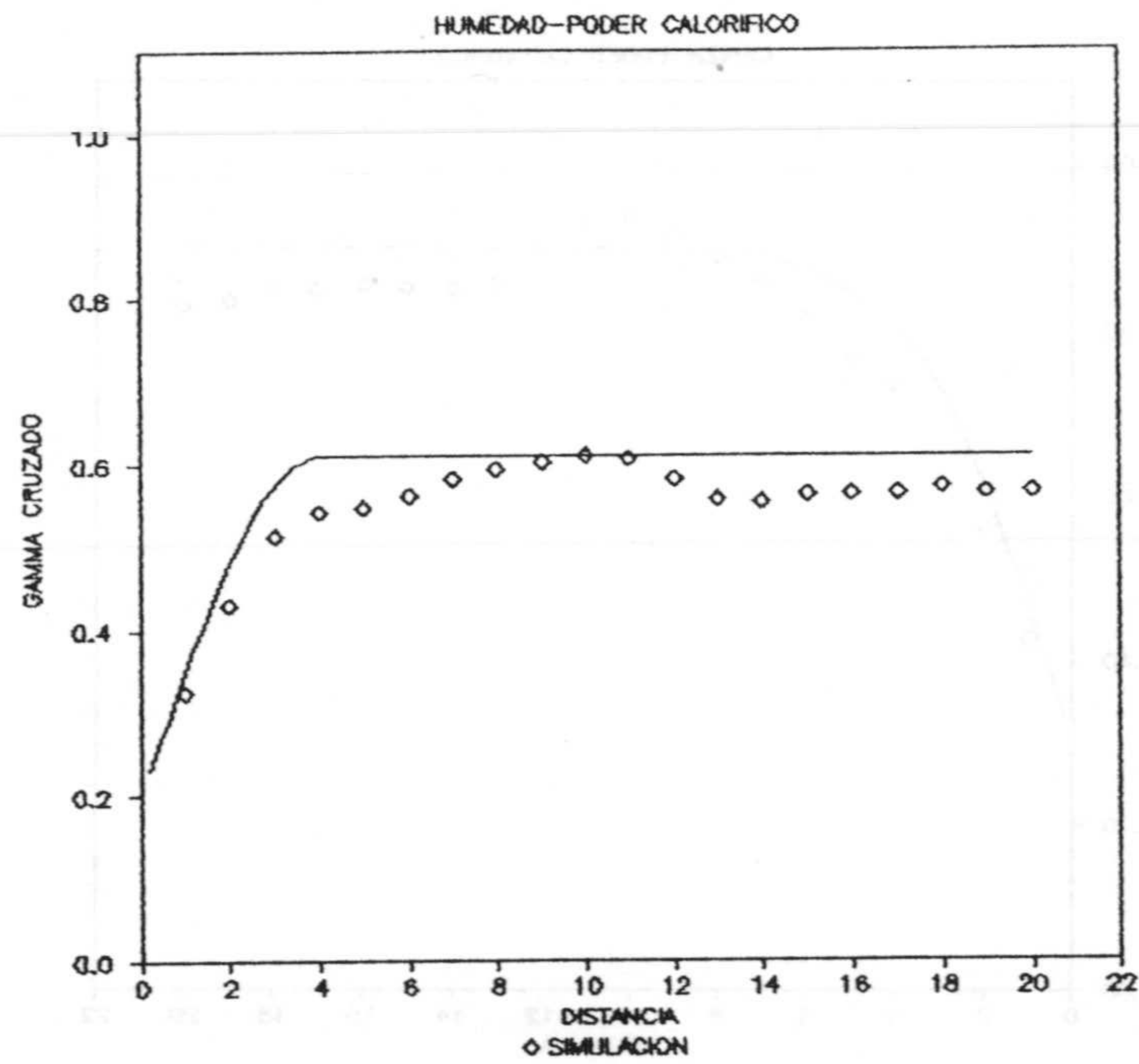


Figura 5.32g. Modelo teórico y variograma cruzado simulado para las variables humedad y poder calorífico.

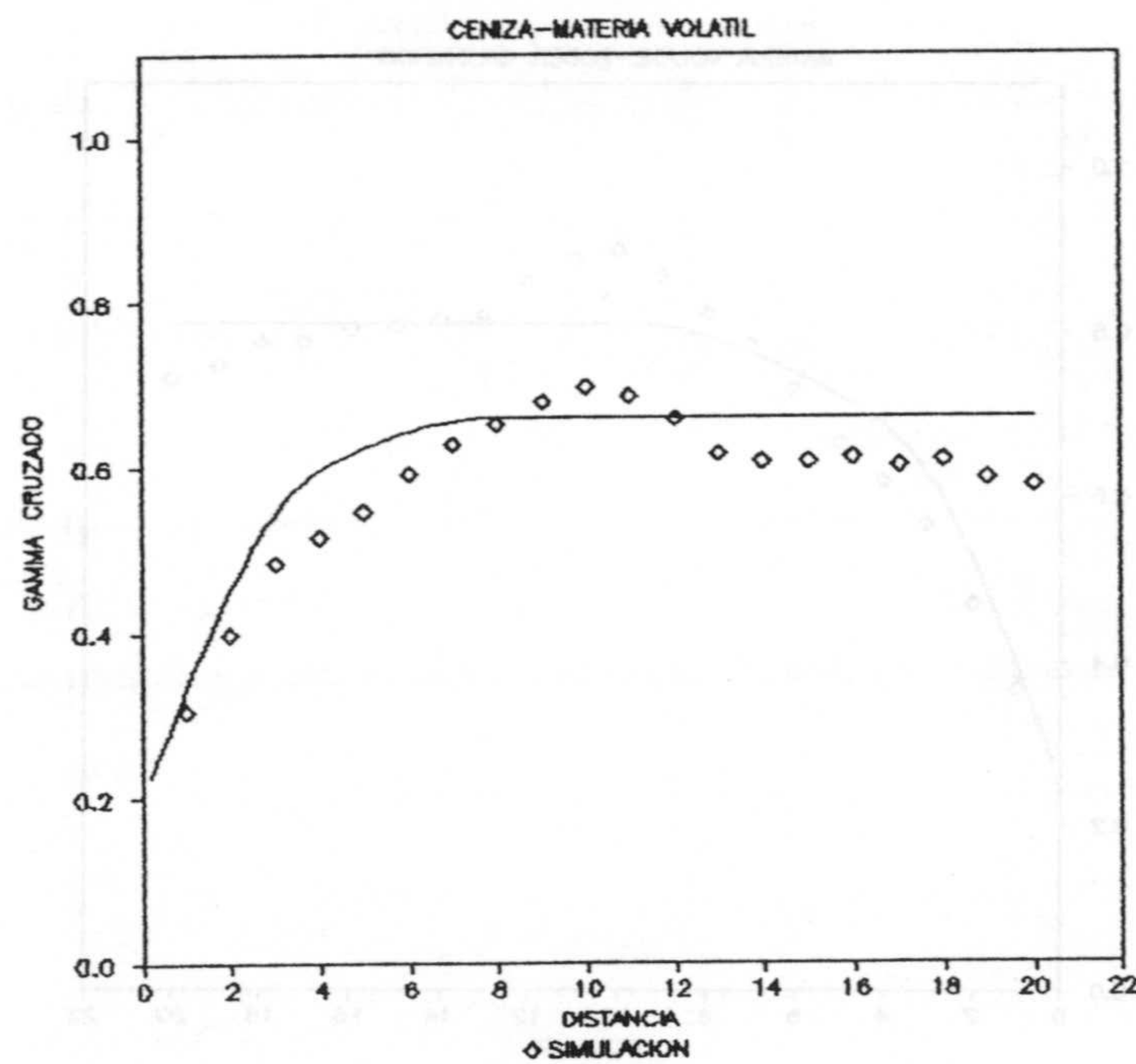


Figura V.32h. Modelo teórico y variograma cruzado simulado para las variables ceniza y materia volátil.



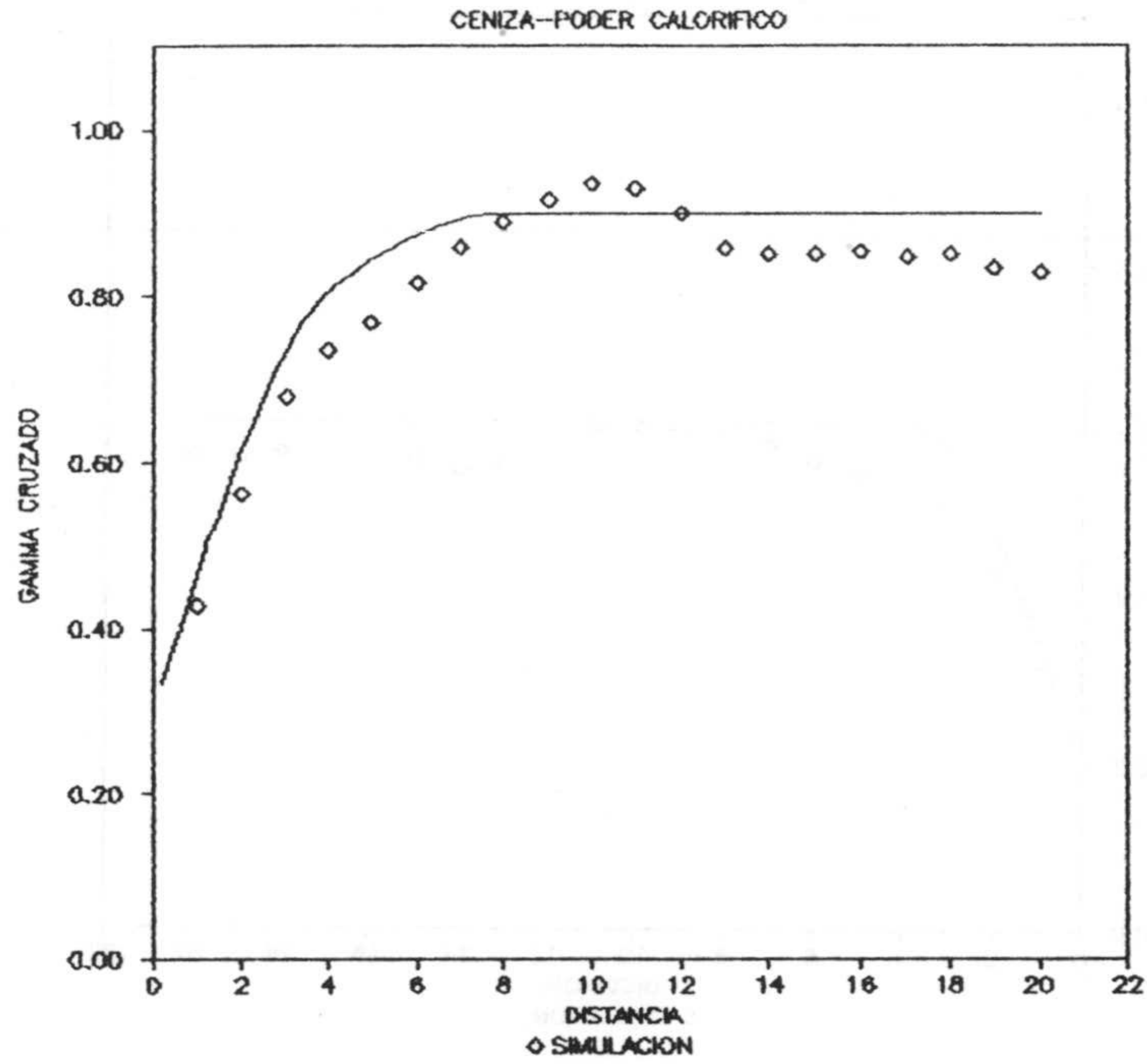


Figura 5.32i. Modelo teórico y variogram cruzado simulado para las variables ceniza y poder calorífico.

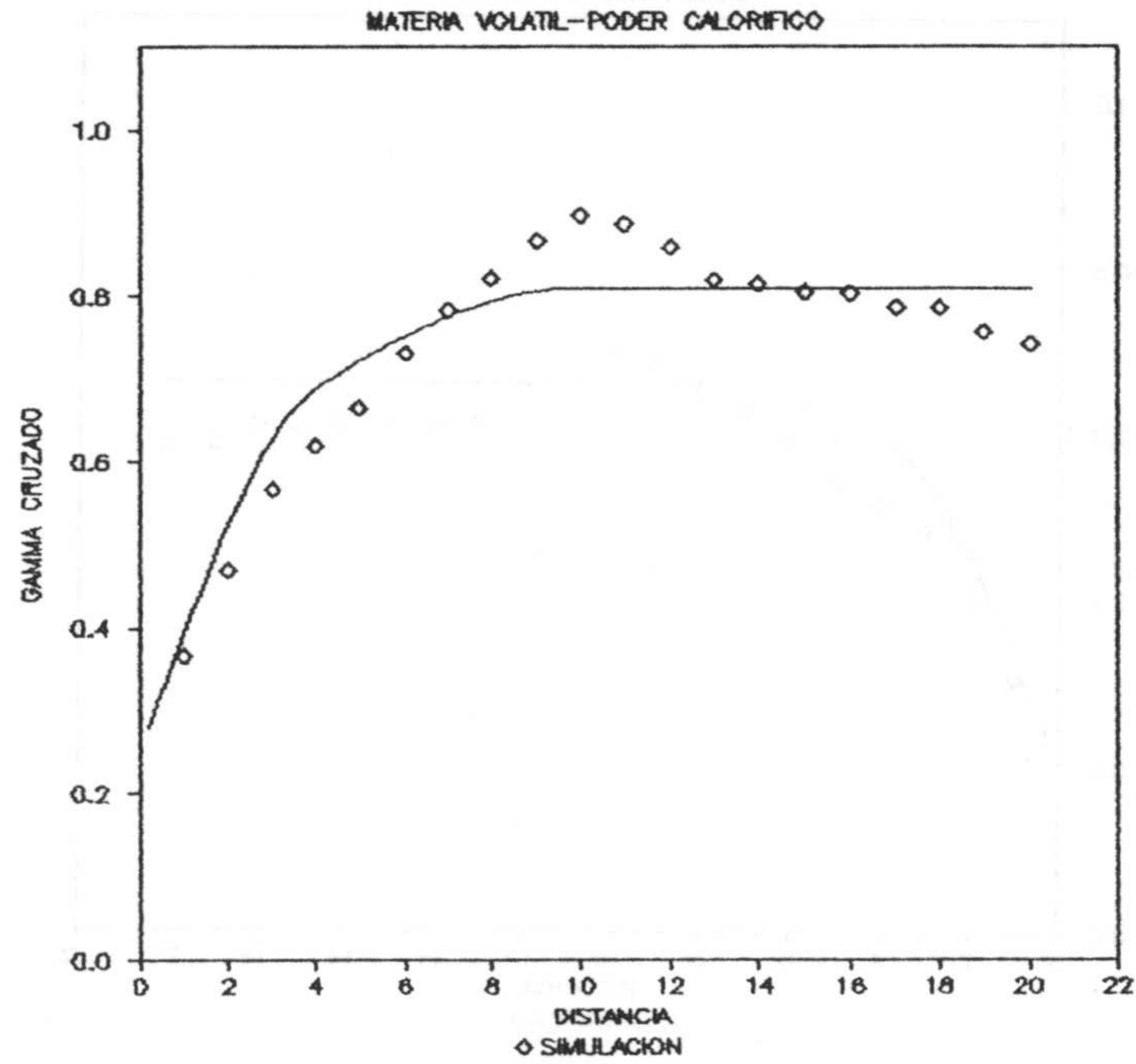


Figura 5.32j. Modelo teórico y variograma cruzado simulado para las variables materia volátil y poder calorífico.

En base al modelo lineal de correogionalización clásico los pasos a seguir deberían de ser los siguientes:

1). Calculo de la variografía experimental directa y cruzada para todas la variables.

2). Se ajustan modelos teóricos a los variogramas directos identificando las estructuras básicas del modelo de correogionalización. Los variogramas cruzados se modelizan empleando sóloamente las estructuras empleadas en la modelización de los variogramas directos y de tal modo que cada estructura identificada en el variograma cruzado se ha de identificar en los dos variogramas directos correspondientes (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978).

3). Se construye el modelo de correogionalización

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{u=1}^n b_{ij}^u K_u(h)$$

cada variograma se puede expresar como una combinación lineal de  $n$  estructuras elementales  $K(h)$  donde la suma de coeficientes:

$$\sum_u b_{ij}^u$$

corresponde a la varianza (si  $i = j$ ) o coeficiente de correlación (si  $i \neq j$ ).

En el ejemplo anterior de análisis variográfico de las características de calidad del lignito, las estructuras (de diferente alcance) se podrían haber reducido a cuatro; el efecto de pepita, una estructura de alcance corto (4 días),



una estructura de alcance medio (10 días) y una estructura de alcance largo (20 días). En un mismo variograma se han identificado como máximo tres estructuras.

4). Comprobar que las matrices de coeficientes  $b_{ij}^u$  son definidas positivas; si no lo son es preciso modificar el modelo a fin de cumplir con dicha especificación.

5). Calcular los coeficientes  $a_{ip}^u$  resolviendo los diferentes sistemas:

$$b_{ij}^u = \sum_{p=1}^m a_{ip}^u a_{jp}^u$$

para cada uno de los, en el caso anterior, 10 modelos de variograma; con m igual al número de variables geológicas a simular y para cada estructura (u) identificada.

6). Simular un número de funciones aleatorias independientes igual al número de estructuras identificadas.

7). Efectuar la composición final:

$$Z_j(x) = \sum_{u=1}^n \sum_{p=1}^m a_{jp}^u Y_p^u(x)$$

El conjunto de funciones aleatorias  $\{Z_j(x); j = 1, \dots, m\}$  reproducirá la matriz de covarianza impuesta.

Frente al método de simulación en base al modelo lineal,



como características importantes de la simulación espectral multivariable cabe reseñar:

1). No es necesario identificar las mismas estructuras en todos los variogramas, directos y cruzados. La única condición restrictiva del modelo de correogionalización es que la matriz de covarianza sea definida positiva.

2). El número de funciones aleatorias elementales a simular es sólo función del número de variables con correlación cruzada con el resto, siendo independiente del número de estructuras superpuestas y de si existe o no efecto de pepita. La función de densidad espectral se calcula mediante los algoritmos de la transformada rápida de Fourier aplicados sobre la función de covarianza convenientemente muestreada e incluye el efecto de pepita y cualquier modelo de covarianza lícito con independencia del número de estructuras imbricadas.

3). La extensión del método a la simulación multivariante de valores medios o valores integrados es directa. Para ello sólo es necesario sustituir la matriz de densidad espectral puntual  $[S(\omega)]$  por la matriz de densidad espectral de procesos medios  $[G(\omega)]$ :

$$[G(\omega)] = \begin{bmatrix} G_{11}(\omega) & G_{12}(\omega) & \dots & G_{1m}(\omega) \\ G_{21}(\omega) & G_{22}(\omega) & \dots & G_{2m}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m1}(\omega) & G_{m2}(\omega) & \dots & G_{mm}(\omega) \end{bmatrix}$$



Con la relación conocida:

$$G_{ii}(\omega) = S_{ii}(\omega) |H_{ii}(\omega)|^2 \quad \forall i = j$$

y en el caso  $i \neq j$  se puede deducir la relación utilizando el repetido teorema de la transformada de Fourier de la correlación espectral cruzada y la relación anterior.

De la relación anterior se tiene (con  $G_{ii}(\omega) = G_i(\omega)$ , por comodidad y coherencia con la notación utilizada en el caso univariable, se utilizan para covarianzas directas y densidades espectrales directas, dos subíndices o uno indistintamente):

$$|Z_{iA}(\omega)| = |Z_i(\omega)| |H_i(\omega)|$$

$$|Z_{jA}(\omega)| = |Z_j(\omega)| |H_j(\omega)|$$

Donde  $|Z_{iA}(\omega)|$  es el espectro de amplitud del proceso integrado  $i$  en el soporte  $A$  y  $|Z_i(\omega)|$  es el espectro de amplitud del proceso puntual  $i$ .

Por el teorema de la transformada de Fourier de la correlación cruzada y considerando covarianzas simétricas y por consiguiente con función de densidad espectral real y simétrica, se tiene, según se ha desarrollado con anterioridad:

$$G_{ij}(\omega) = |Z_{iA}(\omega)| |Z_{jA}(\omega)| = |Z_i(\omega)| |Z_j(\omega)| |H_i(\omega)| |H_j(\omega)|$$

El caso práctico más frecuente es que interese simular varias variables sobre el mismo soporte A, aunque el método como se puede apreciar permite simular cada variable en un soporte diferente si se desea, y por tanto como la función de transferencia  $|H(\omega)|$  sólo es función de la geometría y dimensiones del soporte se tiene que vale igual para todas las funciones aleatorias con lo cual:

$$G_{ij}(\omega) = |Z_i(\omega)| |Z_j(\omega)| |H(\omega)|^2$$

Por consiguiente he obtenido finalmente el sencillo resultado siguiente:

$$[G(\omega)] = \lambda [S(\omega)]$$

con:

$$\lambda = |H(\omega)|^2$$

para cada frecuencia  $\omega$ , la matriz de densidad espectral del proceso integrado es simplemente la matriz de densidad espectral del proceso puntual multiplicada por una constante igual al cuadrado del módulo de la función de transferencia para dicha frecuencia, que es función de la geometría y



dimensiones del soporte, tal y como se vió en el apartado de simulación de procesos integrados.

En particular, para el caso bivariado, es posible la simulación conjunta sobre soporte puntual y bloque, considerando que una de las variables representa la función aleatoria sobre soporte puntual y la otra representa la función aleatoria de valores medios de la misma característica que la primera pero sobre un soporte no puntual.

Como chequeo de la metodología propuesta, para el caso multivariado multidimensional, se trata seguidamente la simulación de las características de una capa de carbón. A diferencia del caso unidimensional anteriormente presentado donde se modelizaba la variabilidad temporal del lignito a la entrada de una central térmica, en esta ocasión se desea modelizar la variabilidad espacial bidimensional de las características de una capa de lignito in situ, esto es, del yacimiento.

Las variables consideradas son tres, a saber, potencia de la capa, poder calorífico sobre seco y contenido en ceniza; la primera variable se mide en sondeos de investigación y las restantes se obtienen en el laboratorio a partir de las muestras obtenidas en dichos sondeos. La potencia está expresada en metros, el poder calorífico en kilocalorías por kilogramo y la ceniza en porcentaje.

La tabla IV.11 registra los estadísticos elementales de la variable bruta y en la tabla IV.12 se representan los coeficientes de correlación entre las variables.



	<i>potencia</i>	<i>pod. cal.</i>	<i>ceniza</i>
MEDIA	12.08	1426.6	52.09
VARIANZA	23.96	27144.7	21.36
% C.V.	40.52	11.54	8.88
MINIMO	1.44	984.	42.90
MAXIMO	26.22	1765.	64.50

Tabla IV.11. Estadísticos univariantes elementales.

	<i>potencia</i>	<i>pod. cal.</i>	<i>ceniza</i>
<i>potencia</i>	1.00		
<i>pod. cal.</i>	.41	1.00	
<i>ceniza</i>	-.33	-.82	1.00

Figura IV.12. Coeficientes de correlación.

La alta correlación negativa que se observa entre el poder calorífico y el contenido en ceniza confirma el hecho bien conocido de que el incremento en el contenido en ceniza hace disminuir el rendimiento energético del carbón.

La correlación entre la potencia y el poder calorífico es, aunque baja, significativa; estando la covarianza entre la potencia y el poder calorífico bien estructurada y con un comportamiento muy continuo para distancias inferiores a los 1000 m. Lo mismo puede decirse para la relación entre la



potencia y la ceniza aunque con una correlación menos significativa.

Los variogramas experimentales, calculados sobre los valores experimentales gaussianos, y los correspondientes modelos teóricos ajustados se representan en las figuras 4.33a a 4.33f. Los modelos teóricos responden a las siguientes expresiones analíticas:

$$\gamma_1(h) = .1 + \text{Sph}(.9)_{3500}$$

$$\gamma_2(h) = .4 + \text{Sph}(.6)_{2500}$$

$$\gamma_3(h) = .2 + \text{Sph}(.4)_{1500} + \text{Sph}(.4)_{3000}$$

$$\gamma_{12}(h) = .0 + \text{Gau}(.41)_{1500}$$

$$\gamma_{13}(h) = .33$$

$$\gamma_{23}(h) = .25 + \text{Sph}(.58)_{2500}$$

1 : potencia; 2 : poder calorífico; 3 : ceniza.

$\text{Sph}(a)_b$  : variograma de tipo esférico de meseta a y alcance b.

$\text{Gau}(a)_b$  : el mismo significado precedente pero el variograma de tipo gaussiano.

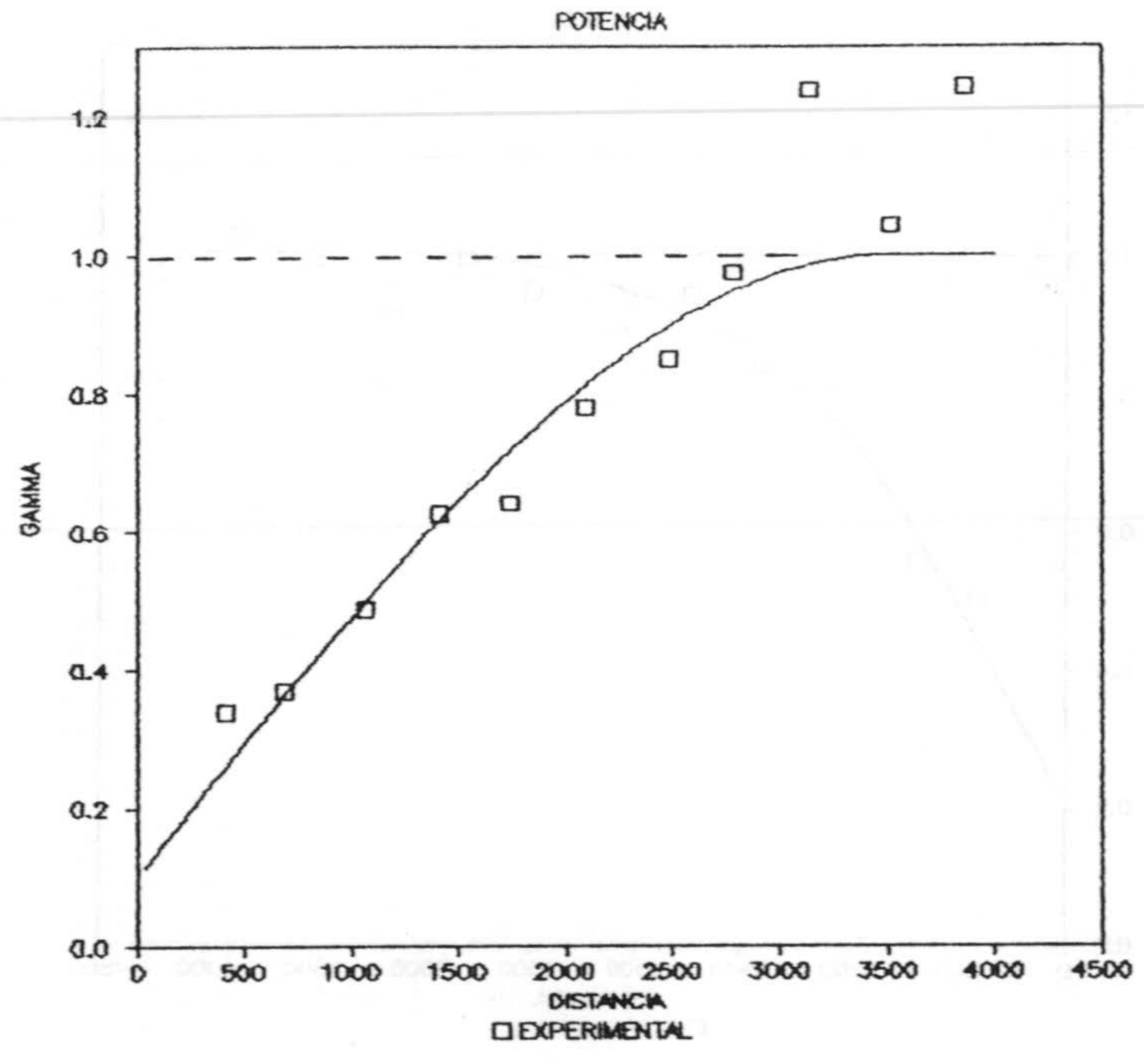


Figura 4.33a. Variograma experimental y modelo teórico ajustado para la variable potencia.

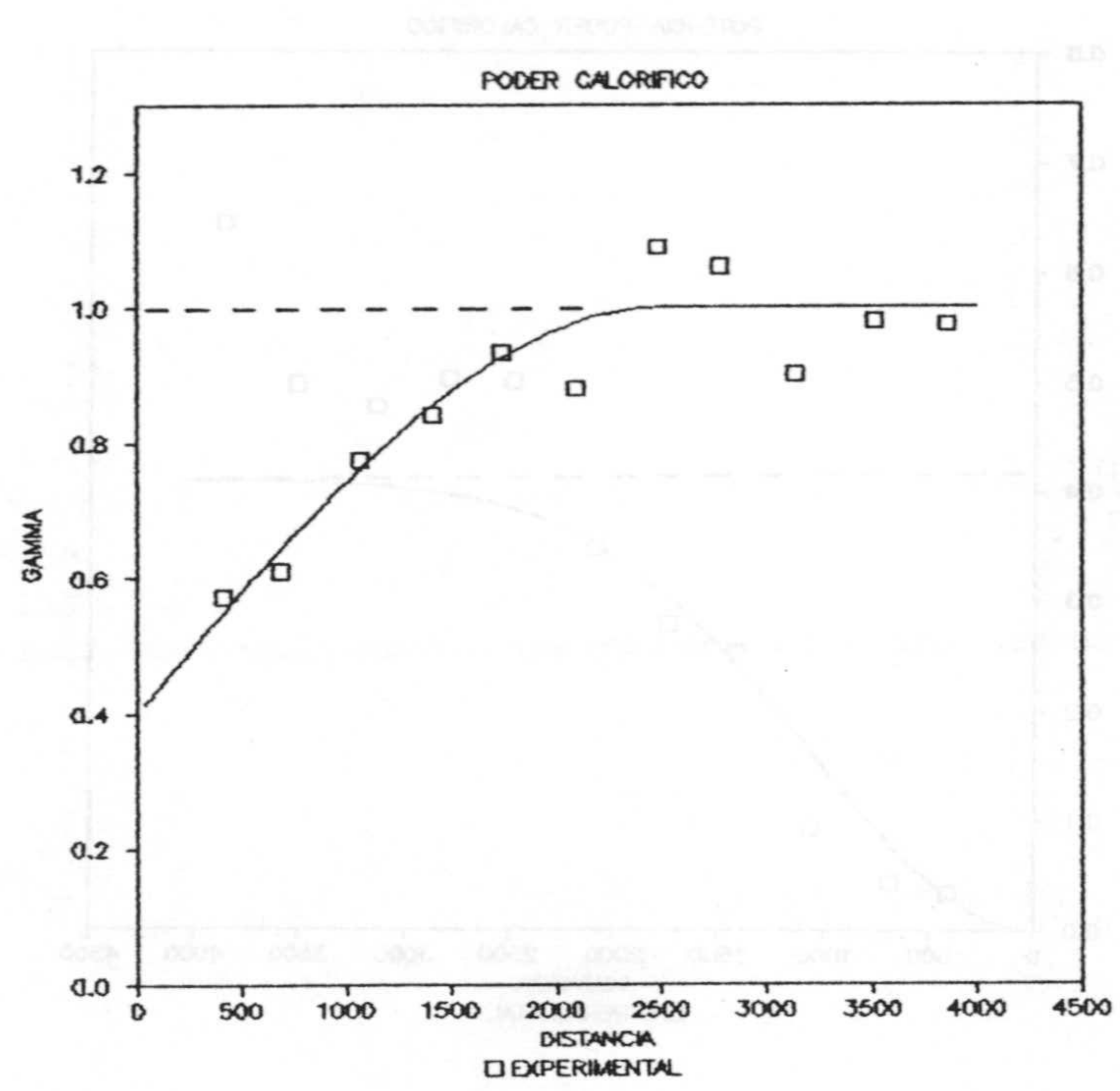


Figura 4.33b. Variograma experimental y modelo teórico ajustado para la variable poder calorífico.



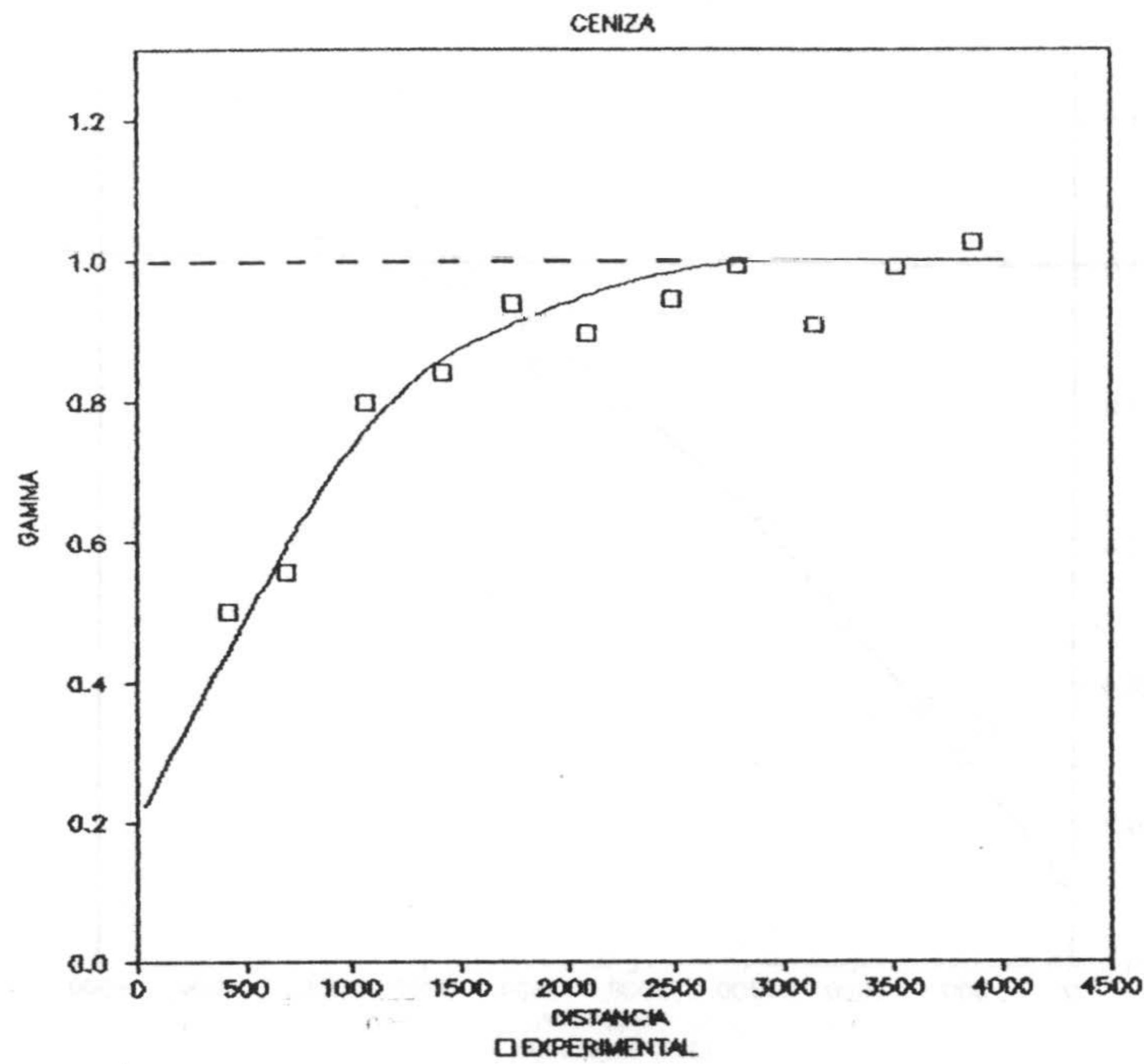


Figura 4.33c. Variograma experimental y modelo teórico ajustado para la variable ceniza.

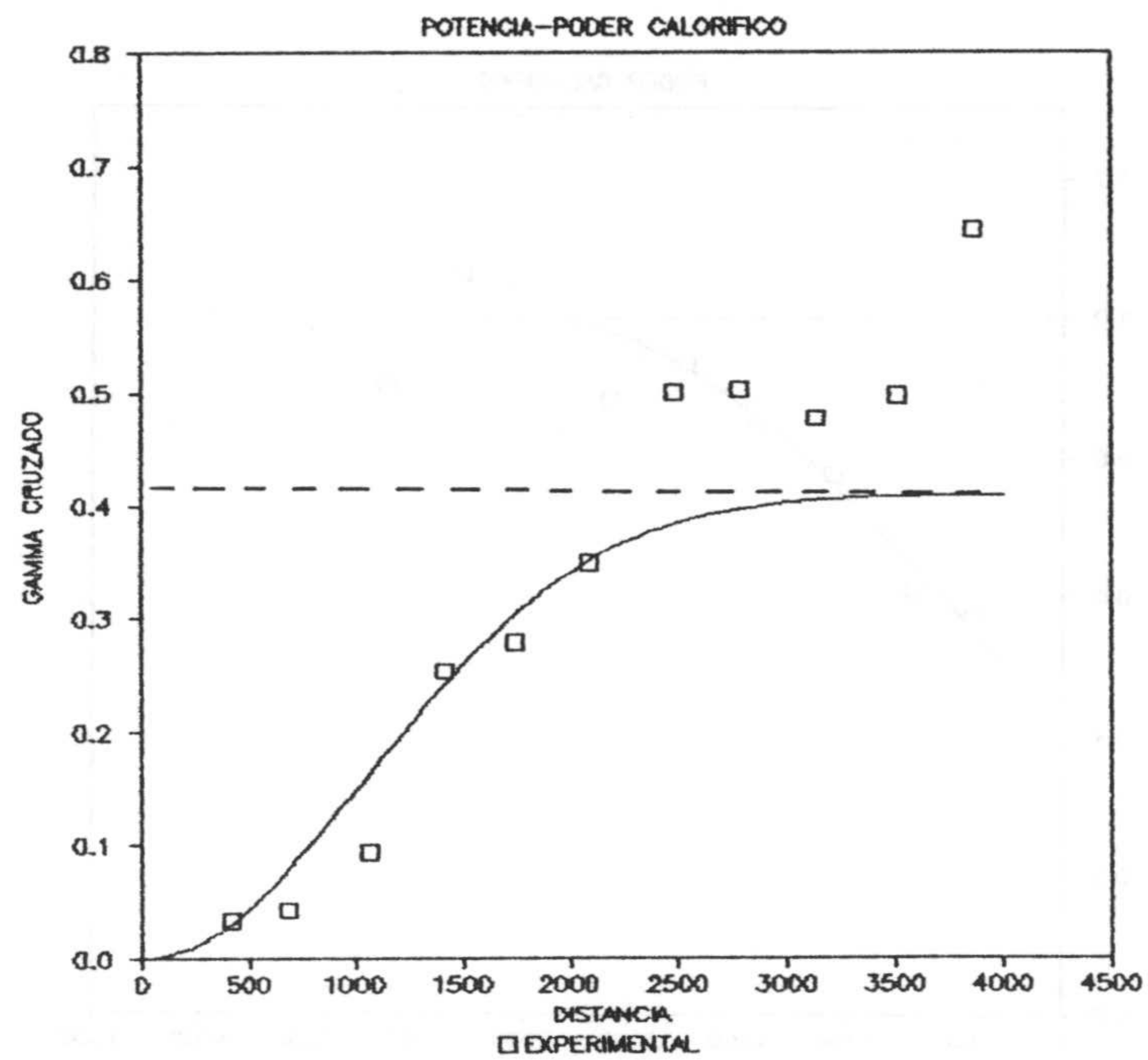


Figura 4.33d. Variograma experimental cruzado y modelo teórico ajustado para las variables potencia y poder calorífico.

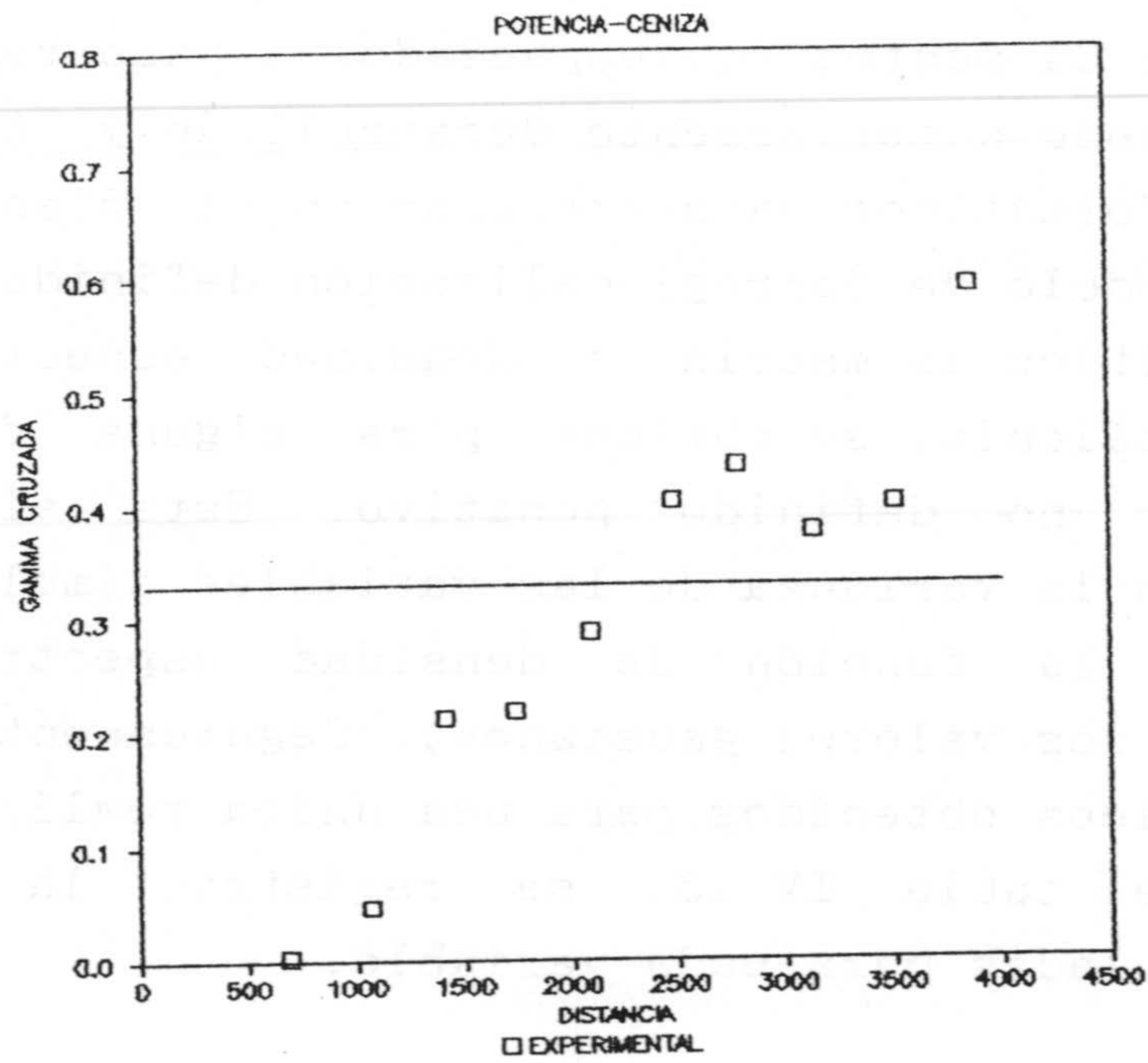


Figura 4.33e. Variograma experimental cruzado y modelo teórico ajustado para las variables potencia y ceniza.

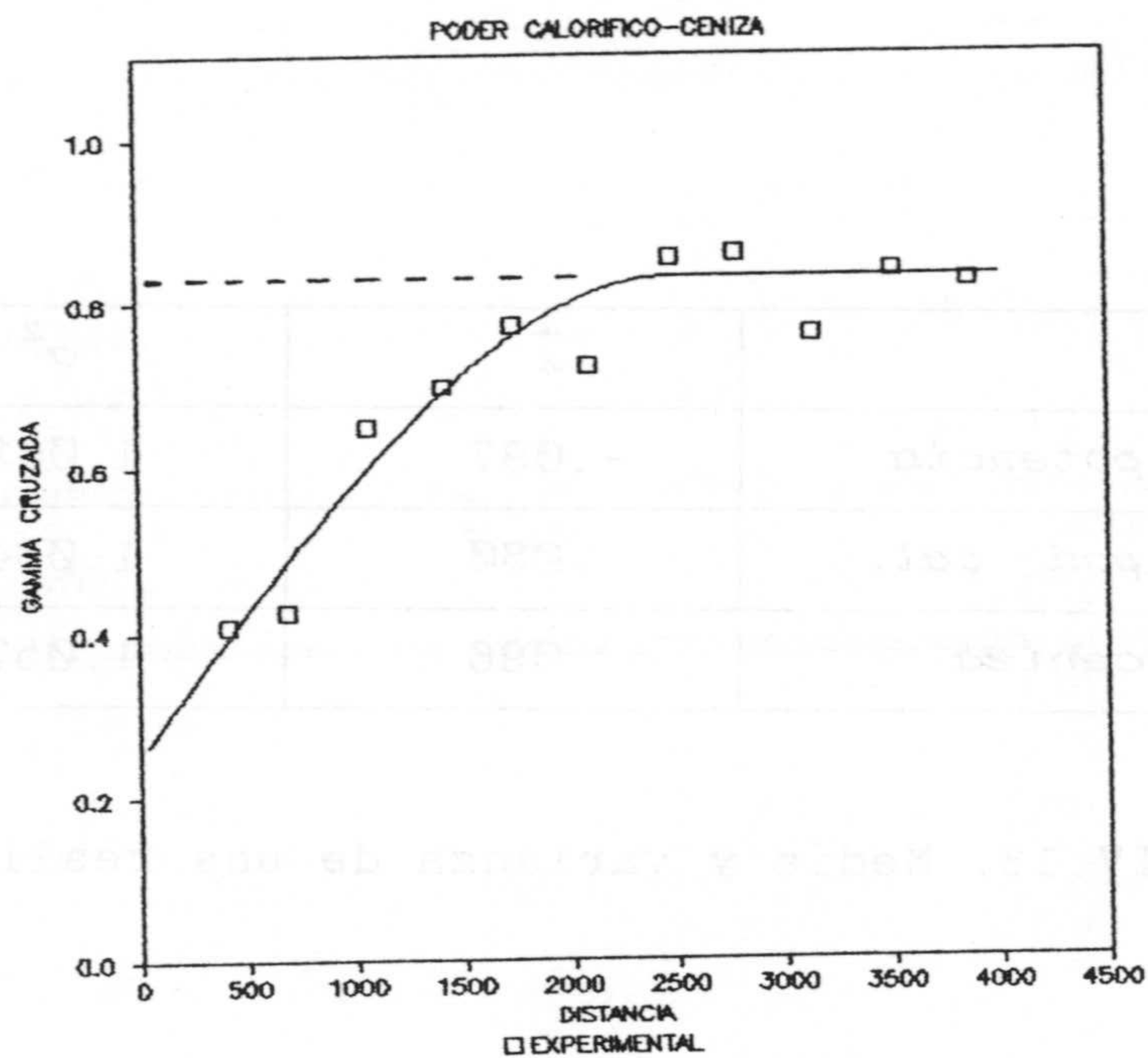


Figura 4.33f. Variograma experimental cruzado y modelo teórico ajustado para las variables poder calorífico y ceniza.



Se ha efectuado una simulación multivariable de una malla de 64 x 64 puntos equiespaciados a paso regular de 250 m, por el método anteriormente desarrollado y adaptando los programas informáticos para trabajar en el plano. Sobre la base de un modelo de correogionalización definido positivo el programa modifica la matriz de densidad espectral si, por efectos del cálculo, se obtiene para alguna frecuencia la condición de no definido positivo. Esta alteración se manifiesta en la varianza de las variables simuladas, ya que el área bajo la función de densidad espectral vale uno (varianza de los valores gaussianos). Seguidamente se muestran los estadísticos obtenidos para una única realización tomada al azar. En la tabla IV.13. se registran la media y la varianza simuladas para cada variable.

Como se aprecia la media experimental simulada es próxima a cero y la varianza sobrepasa ligeramente el valor teórico unidad por lo que los valores simulados se han normalizado.

	$\bar{x}$	$\sigma^2$
<i>potencia</i>	-.097	1.043
<i>pod. cal.</i>	.030	1.034
<i>ceniza</i>	.096	1.057

Tabla IV.13. Media y varianza de una realización.

En la tabla IV.14 se ha reflejado los coeficientes de correlación simulados obtenidos sobre las realizaciones normalizadas.



	<i>potencia</i>	<i>pod. cal.</i>	<i>ceniza</i>
<i>potencia</i>	1.00		
<i>pod. cal.</i>	.43	1.00	
<i>ceniza</i>	-.29	-.71	1.00

Tabla. IV.14. Coeficientes de correlación simulados.

Comparando la tabla anterior con la tabla correspondiente de coeficientes de correlación experimentales (tabla IV.12) se aprecia unos resultados aceptables existiendo las mayores diferencias para el coeficiente de correlación entre ceniza y poder calorífico, si bien, seguidamente se podrá apreciar como se reproduce bien el variograma cruzado.

Las figuras 4.34a a 4.34f representan los diferentes variogramas teóricos y los correspondientes variogramas simulados, calculados para cuatro direcciones (NS, EW, NE-SW y NW-SE). Se puede observar una buena concordancia entre valores teóricos y simulados tanto para los variogramas directos como para los variogramas cruzados.

El variograma cruzado entre la potencia y la ceniza lo he modelizado como un efecto de petita puro y de valor igual al coeficiente de correlación entre ambas variables con el fin de reproducir exclusivamente dicho coeficiente de correlación sin importar la estructura.

Otra observación interesante es que aunque el método modifica ligeramente la función de densidad espectral con el fin de poder salvar las condiciones de no definido positivo (siempre en base a un modelo de coregionalización definido positivo) dicha alteración del espectro de amplitud de los distintos componentes no altera sustancialmente la estructura de variabilidad o correlación tanto directa como cruzada.



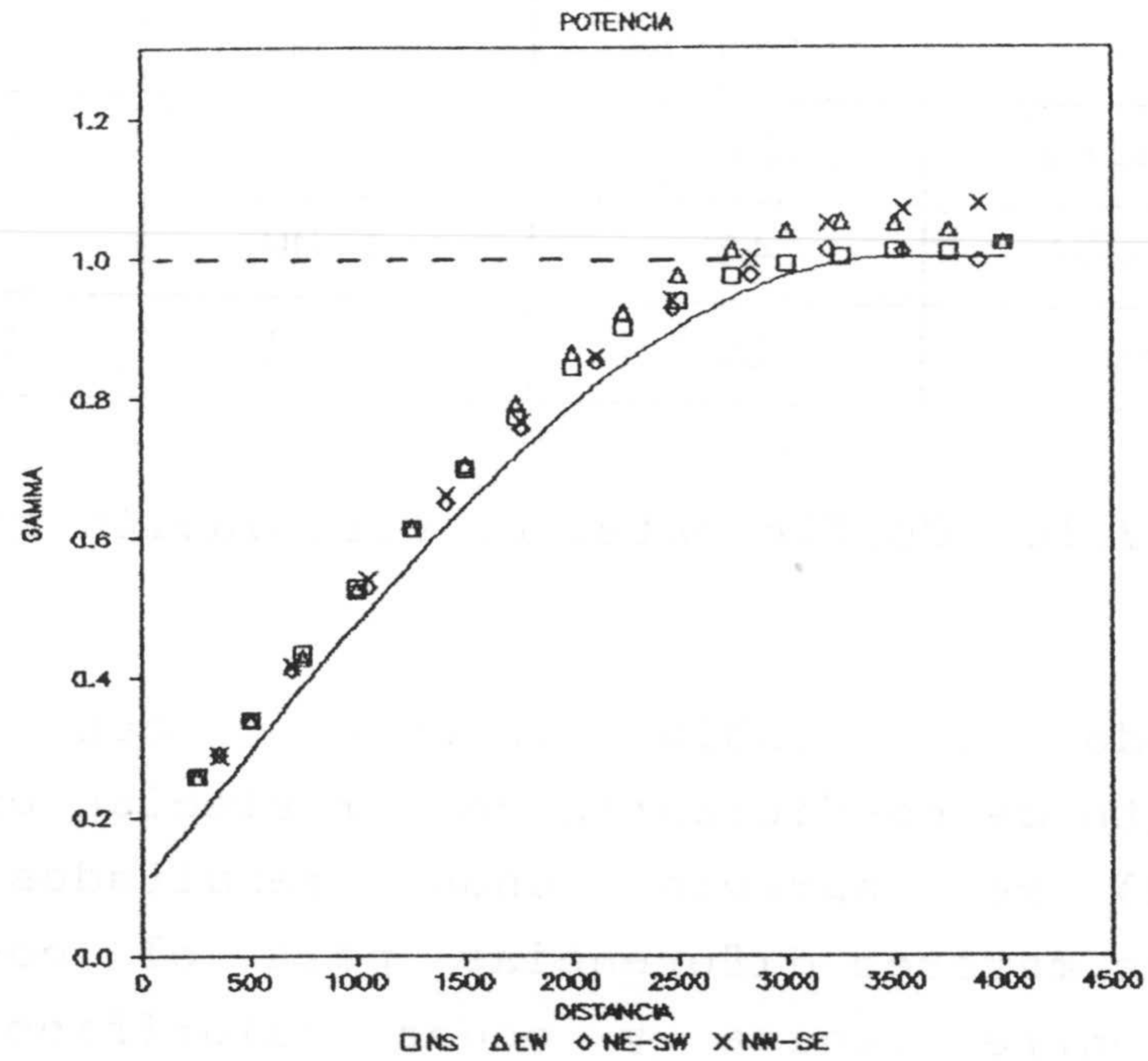


Figura 4.34a. Variograma teórico y simulación para la variable potencia.

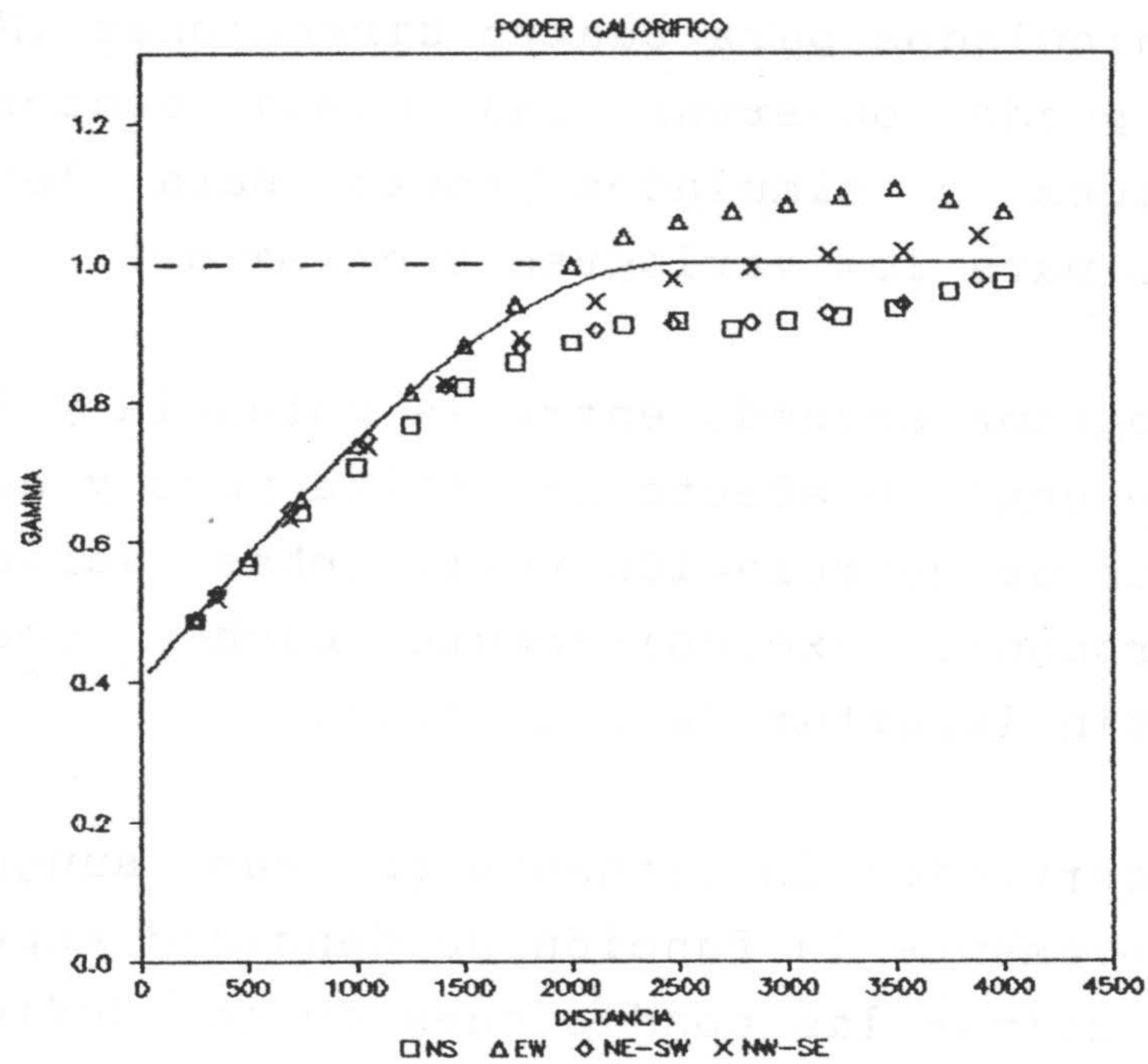


Figura 4.34b. Variograma teórico y simulación para la variable poder calorífico.

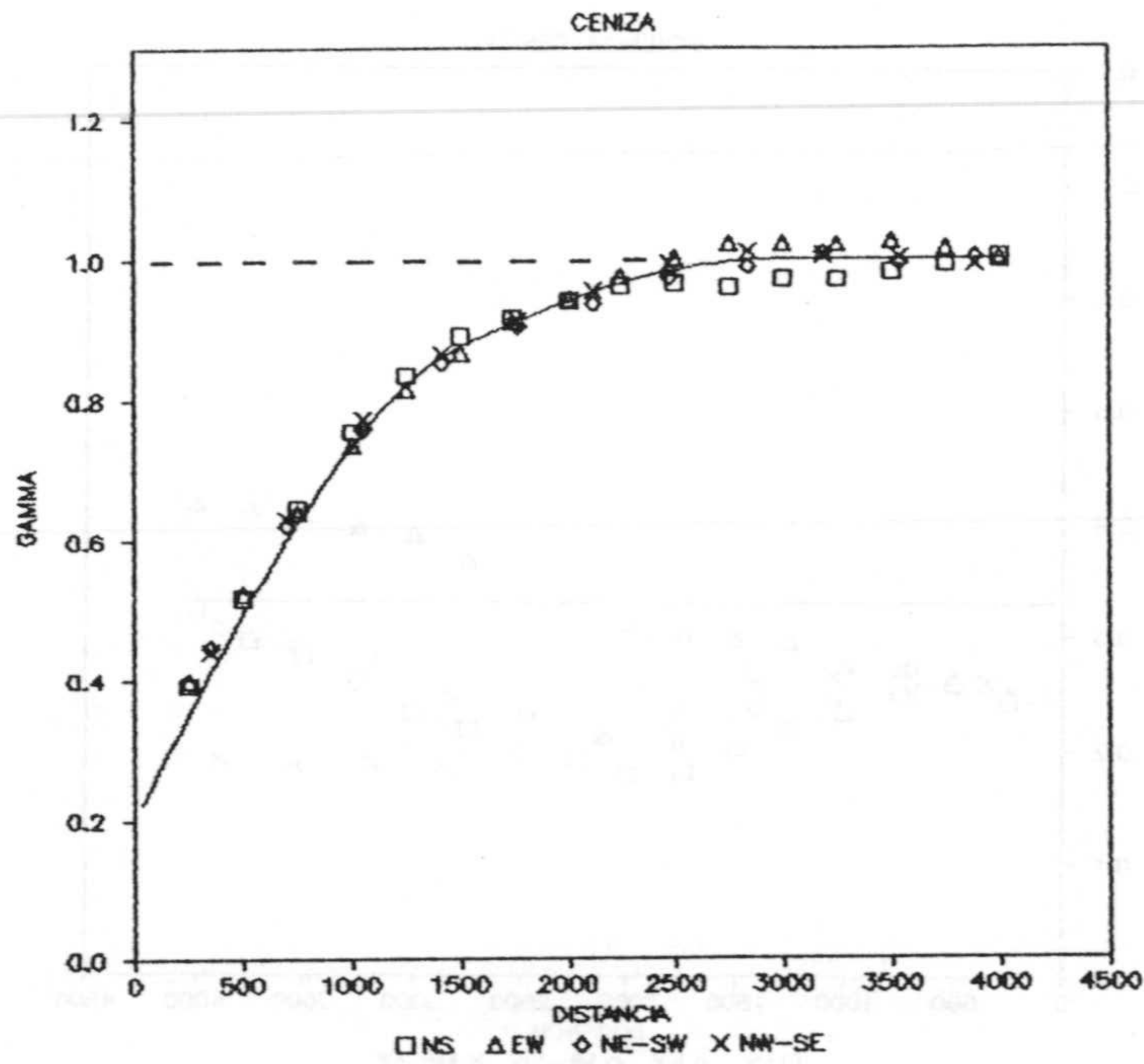


Figura 4.34c. Variograma teórico y simulación para la variable ceniza.

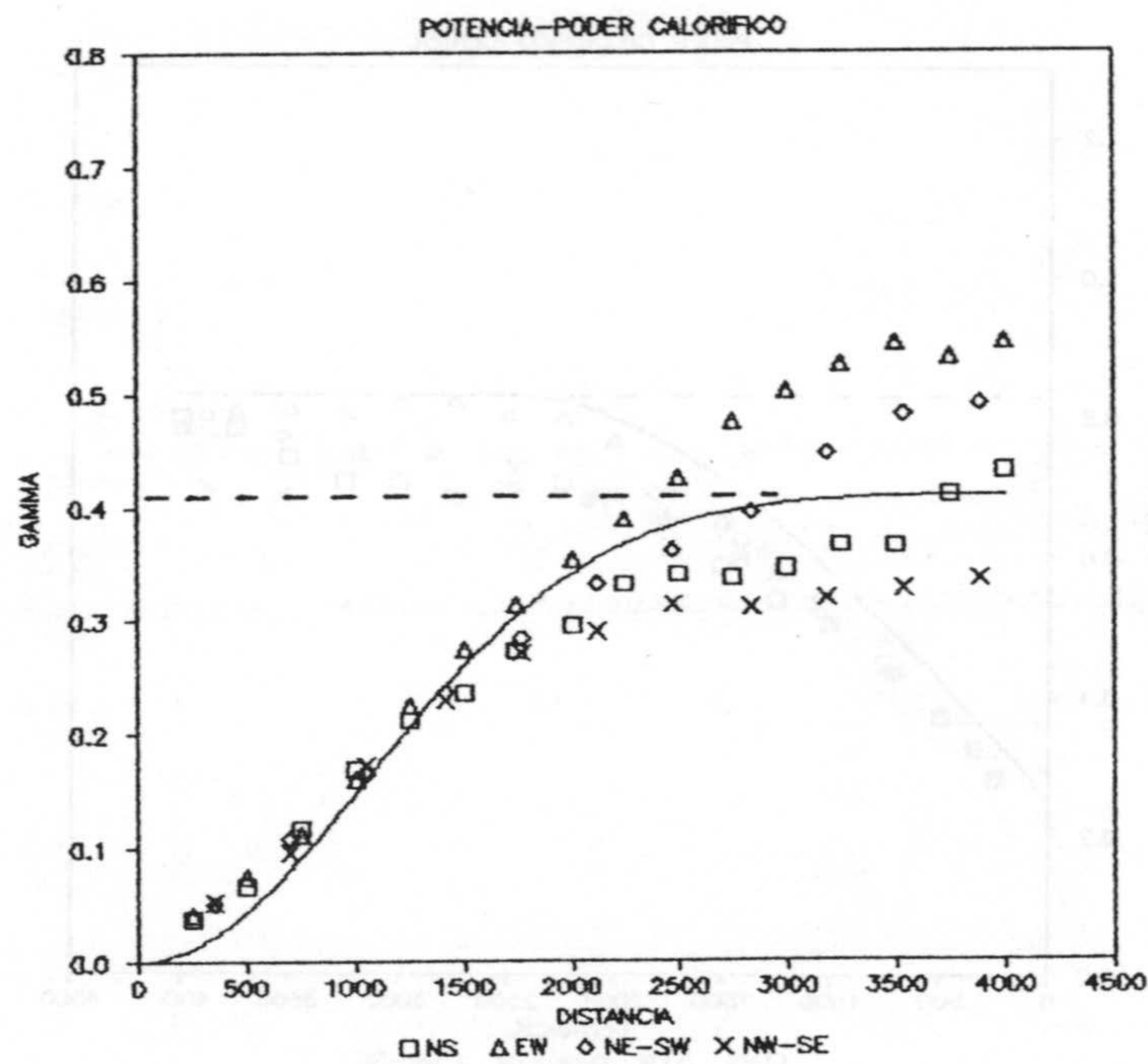


Figura 4.34d. Variograma cruzado teórico y simulación para la potencia y poder calorífico.



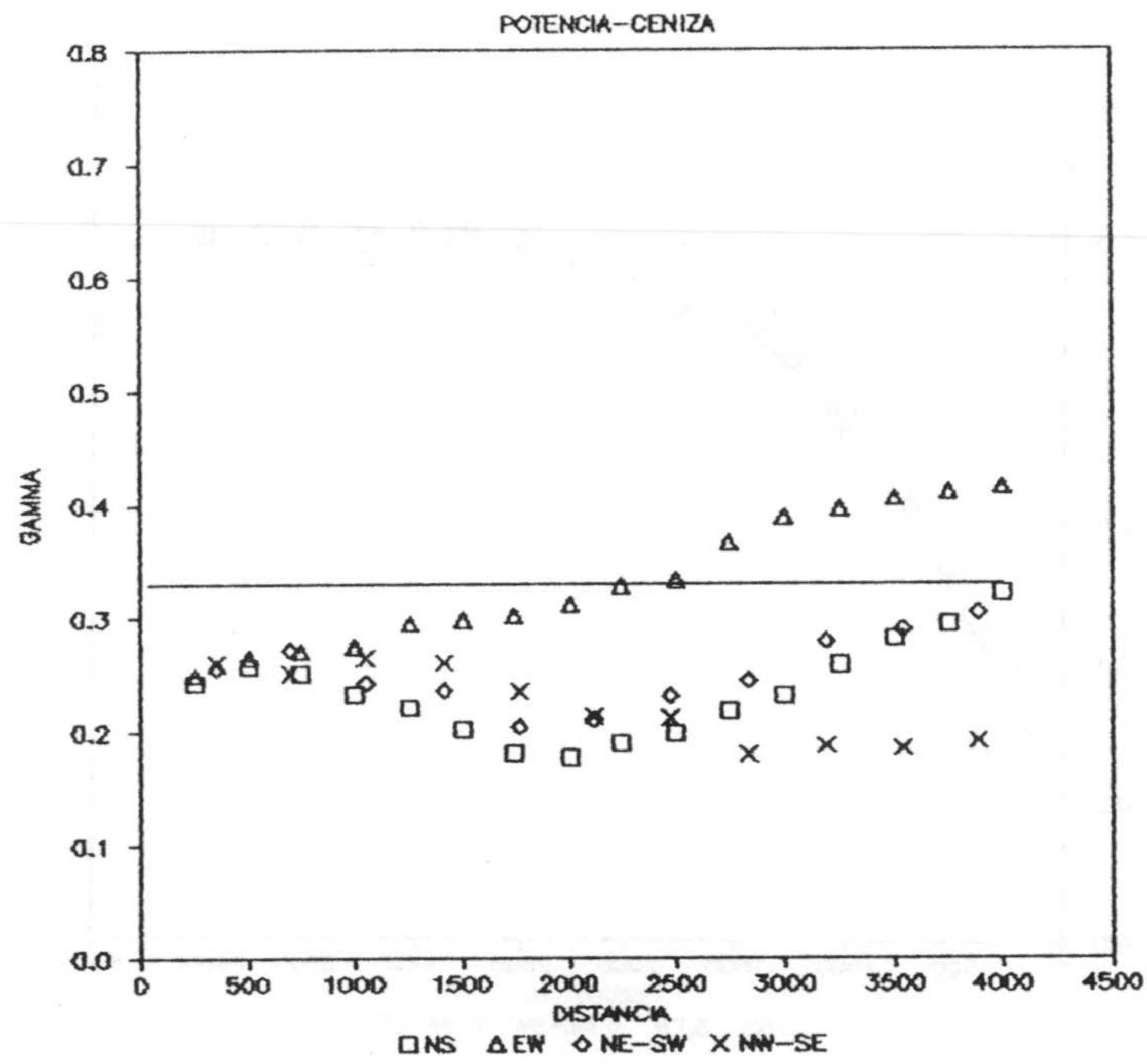


Figura 4.34e. Variograma cruzado teórico y simulación para la potencia y ceniza.

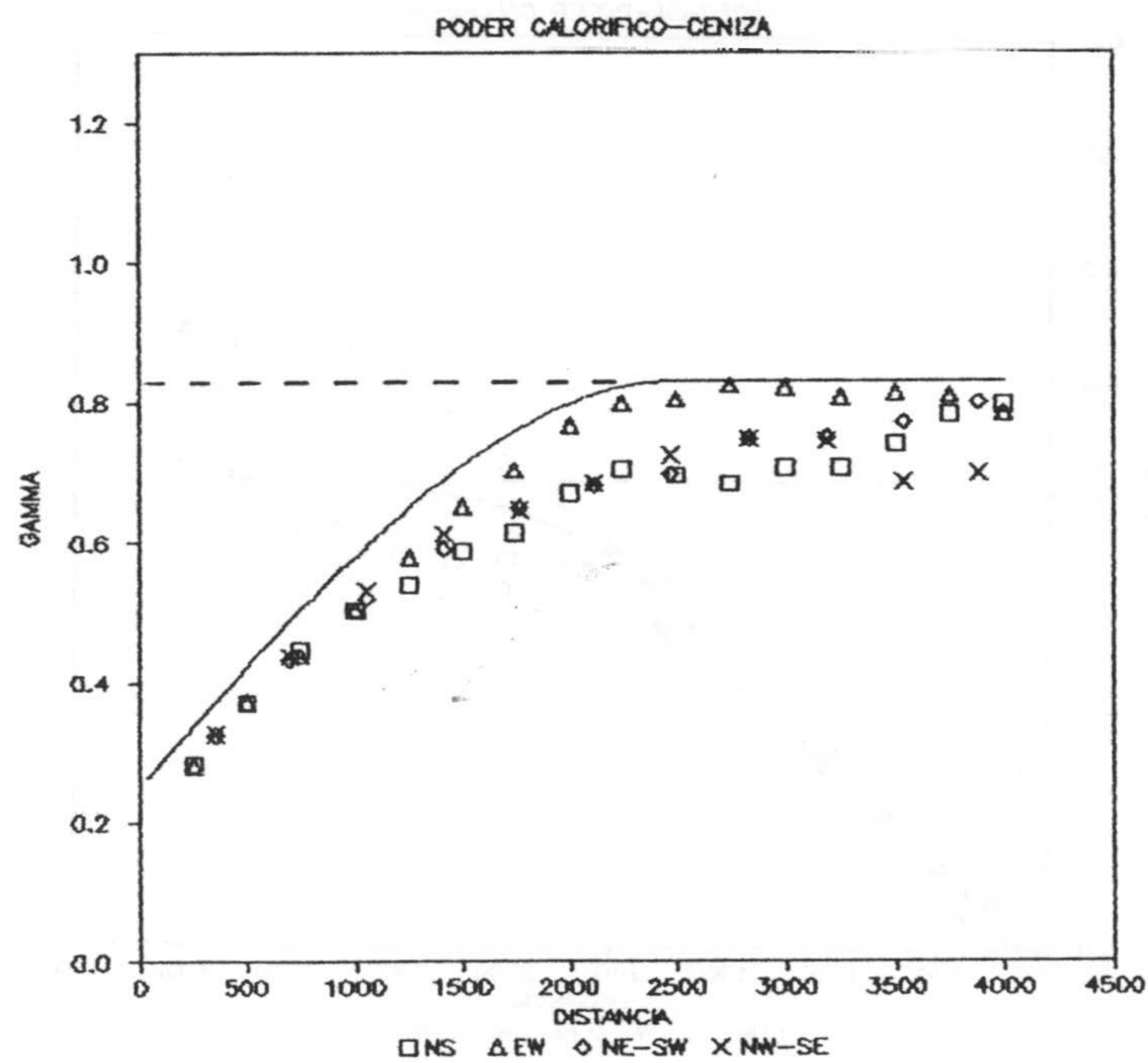


Figura 4.34f. Variograma cruzado teórico y simulación para el poder calorífico y ceniza.

Como se ha expuesto anteriormente la metodología que he desarrollado permite la simulación multivariable multidimensional de valores medios o valores integrados; pudiendo elegir para cada variable el soporte que más interese en la práctica. El caso más general consiste en la simulación de diferentes variables sobre el mismo soporte no puntual.

Como ejemplo, para mostrar la operatividad de la metodología se considerará la simulación de las variables ceniza y poder calorífico sobre soportes areales consistentes en un área cuadrada de 250 x 250 m<sup>2</sup>. En este caso particular la función de transferencia vale:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{4.096 \cdot 10^{-9}}{\omega_1^2 \omega_2^2} \text{sen}^2(125 \omega_1) \text{sen}^2(125 \omega_2)$$

En base a la función de transferencia es posible calcular la matriz de densidad espectral del proceso de valores medios, del modo anteriormente indicado, y utilizar el mismo procedimiento de simulación que en la simulación de valores puntuales. La tabla IV.15 muestra los estadísticos de una única realización tomada al azar.

	MEDIA	VARIANZA	COEF. CORREL.
<i>pod. cal.</i>	.096	.528	-.830
<i>ceniza</i>	.121	.709	

Tabla IV.15. Estadísticos de una realización.

Las figuras 4.35a a 4.35c muestran los modelos teóricos obtenidos por regularización y los variogramas experimentales de la simulación para diferentes direcciones espaciales.



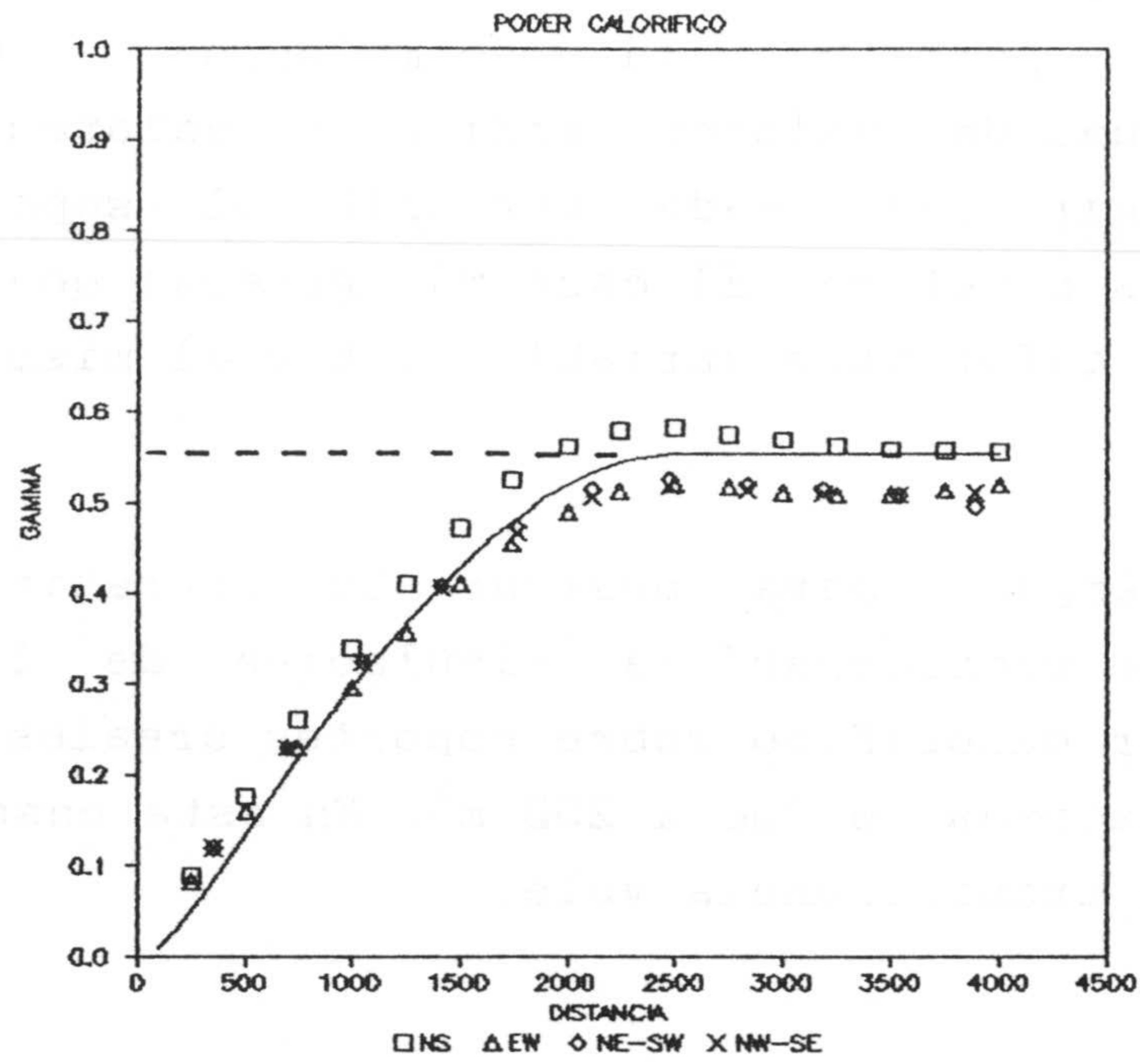


Figura 4.35a. Variograma teórico y simulado para valores medios de poder calorífico.

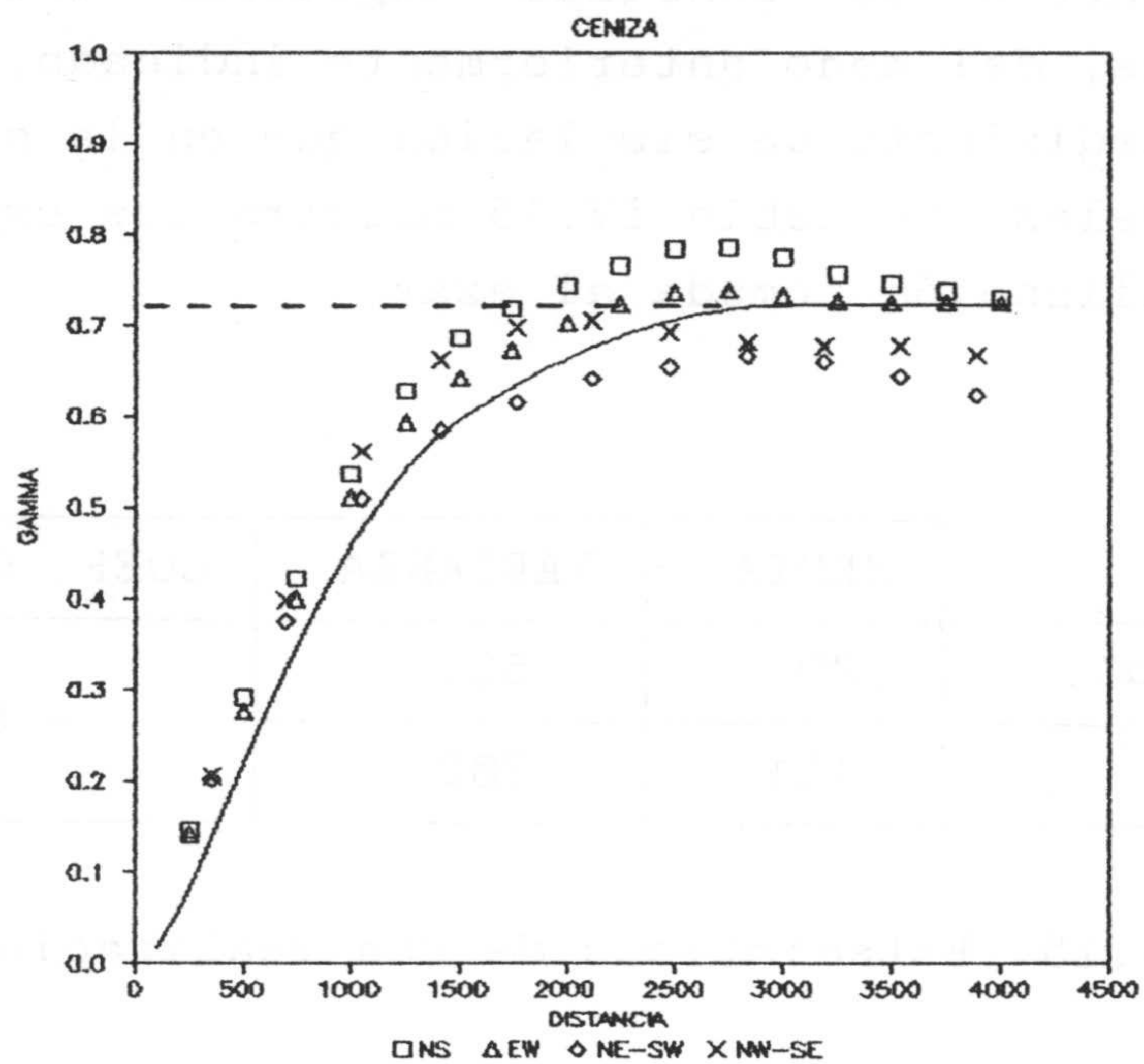


Figura 4.35b. Variograma teórico y simulado para valores medios de ceniza.

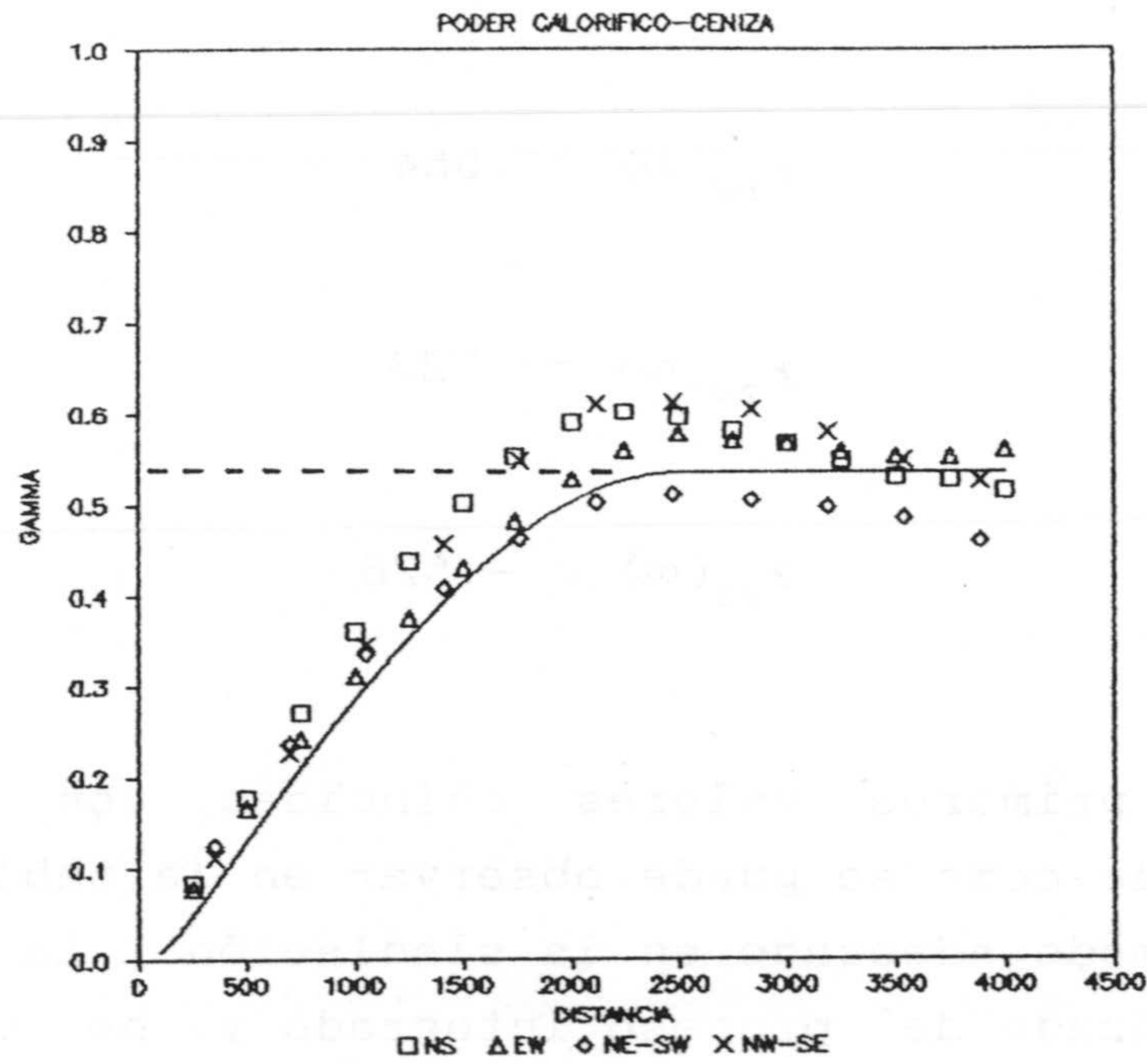


Figura 4.35c. Variograma cruzado simulado y modelo obtenido por regularización del modelo cruzado experimental puntual.

Por regularización se tiene que:

$$\gamma_1(v,v) = .446$$

$$\gamma_2(v,v) = .277$$

$$\gamma_{12}(v,v) = .294$$

con : 1 : poder calorífico; 2 : ceniza.

Con lo que las mesetas de los variogramas cruzados valen:



$$\gamma_{1v}(\infty) = .554$$

$$\gamma_{2v}(\infty) = .723$$

$$\gamma_{12}(\infty) = -.526$$

Los dos primeros valores coinciden con la varianza experimental que como se puede observar en la tabla IV.15 se reproduce de modo adecuado en la simulación. La meseta del variograma cruzado del proceso integrado ya no coincide con el coeficiente de correlación entre ambas variables ya que las realizaciones no están normalizadas a varianza unidad.

El coeficiente de correlación teórico vale:

$$r_{ij} = \frac{C_{ijv}(\emptyset)}{\sqrt{C_{iv}(\emptyset) C_{jv}(\emptyset)}} = \frac{C_{ij}(\emptyset) - \gamma_{ij}(v,v)}{\sqrt{[C_i(\emptyset) - \gamma_i(v,v)] [C_j(\emptyset) - \gamma_j(v,v)]}}$$

que para el ejemplo presentado vale  $-0.837$  y el simulado registrado en la tabla V.9 tiene un valor de  $-0.830$ , por tanto muy próximo al valor teórico.



## 6. SIMULACION DE LA FUNCION INDICATRIZ

### 6.1. Introducción

El método de Simulación Geoestadística comentado con anterioridad, está diseñado para simular variables geológicas más o menos continuas que presentan una ley de distribución de probabilidad espacial próxima a la gaussiana. Este modelo numérico no es adecuado para representar una variable geológica que no tiene la continuidad de la distribución gaussiana. Piénsese por ejemplo en un acuífero donde el flujo está condicionado por la presencia de lentejones arenosos de alta permeabilidad dentro de una formación margosa impermeable. La simulación de ambas facies como una única variable geológica, da lugar a la aparición de toda una amplia gama de facies con permeabilidades intermedias entre la alta de la arena y la baja de la marga, lo cual no es un buen reflejo de la realidad geológica.

Si se estudia cada facies por separado, es posible que tengan una ley de probabilidad espacial continua y, si el número de datos experimentales es suficiente, el estudio de la variabilidad espacial de cada facies por separado se traducirá en una mejor inferencia de correlación espacial. El enfoque geoestadístico de este problema consiste en la caracterización probabilística del tránsito espacial de una facies a otra a través del estudio de la función indicatriz, *MATHERON (1974), JOURNAL (1983), JOURNAL e ISAAKS (1984), CHICA-OLMO (1987)*.

Se define la función indicatriz como una función aleatoria  $I(x)$  tal que:



$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } z(\mathbf{x}) \geq z_c \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir, dada una variable geológica que se interpreta como una función aleatoria  $Z(\mathbf{x})$  y dado un valor de corte  $z_c$  se obtiene una nueva función aleatoria, llamada función indicatriz  $I(\mathbf{x})$ , del modo ya indicado.

Como características generales de la función indicatriz cabe destacar:

1). La función indicatriz sólo puede tomar dos valores discretos, que son el  $\emptyset$  y el 1.

2). Como variable regionalizada que es, está dotada de su propio variograma.

3). Si se hace variar el corte  $z_c$  se pueden definir diferentes funciones indicatriz para una misma función aleatoria  $Z(\mathbf{x})$ .

La utilidad más difundida de la función indicatriz en problemas de simulación de variables geológicas se expone a continuación. Se plantea la simulación de una función aleatoria  $Z(\mathbf{x})$  cuyos valores numéricos están por encima de un cierto valor de corte, esto es:

$$\{Z(\mathbf{x}) \mid Z(\mathbf{x}) \geq z_c\}$$

Dicha variable regionalizada tiene una repartición geométrica espacial que se puede caracterizar por el estudio de la función indicatriz asociada.

La simulación de la función indicatriz permite generar un modelo geométrico de yacimiento donde las transiciones 0-1, esto es, las transiciones de  $z(x) < z_c$  y  $z(x) > z_c$  están caracterizadas estadísticamente por media, varianza y variograma de la función indicatriz.

Posteriormente es necesario simular, en los punto donde la función indicatriz toma el valor de 1, un valor de la variable  $Z(x) > z_c$  caracterizada por su propia media, varianza, histograma y variograma, en base a la metodología clásica de simulación.

## 6.2. Metodología para la simulación de $I(x,z)$ .

Como  $Z(x)$  se asume que es una función aleatoria estacionaria de segundo orden, la función indicatriz  $I(x)$  es asimismo una función aleatoria estacionaria de segundo orden que tiene un función de distribución de probabilidad de Bernouilli, con los siguientes estadísticos:

Espereranza matemática

$$E\{I(x)\} = m_I$$

Varianza

$$\text{Var}\{I(x)\} = m_I (1 - m_I)$$



## Variograma

$$\frac{1}{2} E\{[I(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - I(\mathbf{x})]^2\} = \gamma_I(\mathbf{h})$$

Por otra parte, puede escribirse:

$$E\{I(\mathbf{x})\} = P\{Z(\mathbf{x}) > z_c\} = 1 - F(z_c)$$

$$P\{Z(\mathbf{x}) \leq z_c\} = 1 - m_I = F(z_c)$$

Los métodos de simulación de funciones aleatorias estacionarias de segundo orden, generan realizaciones que siguen una función de distribución gaussiana. Es por ello que el modelo gaussiano de simulación de la función indicatriz sea uno de los más difundidos. El modelo ha sido desarrollado por *MATHERON (1974)*.

La simulación de la función indicatriz en base al modelo gaussiano consiste en simular una función aleatoria gaussiana estacionaria de segundo orden  $Y(\mathbf{x})$  de tal modo que al calcular la función indicatriz  $I(\mathbf{x}; y_c)$  sobre dicha función, se obtenga una realización de la función indicatriz isomorfa a la función indicatriz experimental  $I(\mathbf{x}; z_c)$ , en el sentido de misma media:

$$m_{I_g} = m_I$$

por consiguiente misma varianza:

$$\sigma_{I_g}^2 = \sigma_I = m_I (1 - m_I)$$

y el mismo variograma:

$$\gamma_{I_g}(h) = \gamma_I(h)$$

Bajo esta planteamiento resulta necesario calcular dos parámetros:

- 1). Valor de corte  $y_c$  sobre la variable gaussiana.
- 2). Variograma  $\gamma_Y(h)$  que se ha de imponer a la función gaussiana  $Y(x)$ .

MATHERON (1974) expresa en términos de polinomios de Hermite la relación entre la función de covarianza de la función indicatriz y el correlograma de la variable gaussiana:

$$C_I(h) = \left[ g(y_c) \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ H_{n-1}(y_c) \right]^2}{n!} \rho^n(h)$$

donde:

$g(.)$  : función de densidad gaussiana.

A un resultado equivalente se puede llegar considerando una característica básica de la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  como lo es el hecho de tratarse de una función aleatoria



estacionaria gaussiana bivariante normalizada, *JOURNAL e ISAAKS (1984)*.

Por el hecho de estar normalizada se tiene que:

$$E\{Y(x)\} = 0$$

$$\text{Var}\{Y(x)\} = 1$$

Por el hecho de ser gaussiana bivariante, las funciones de distribución de probabilidad son las relaciones clásicas:

$$G(y) = P\{Y(x) \leq y\}$$

$$L\{-y, -y'; \rho_Y(h)\} = P\{Y(x+h) \leq y; Y(x) \leq y'\}$$

donde  $\rho_Y(h)$  es el correlograma de  $Y(x)$ :

$$\rho_Y(h) = \frac{C(h)}{C(0)}$$

Por consiguiente, la distribución bivariante de la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  está completamente determinada por su covarianza  $C(h)$  o equivalentemente por su variograma:

$$\gamma_Y(h) = \frac{1}{2} E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\}$$

Si se define una función aleatoria indicatriz  $I(x,y)$  en base a la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  de modo que:

$$Y(x;y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) > y \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función aleatoria  $I(x;y)$  tiene una distribución de probabilidad de Bernouilli con los siguientes parámetros, *JOURNAL e ISAAKS (1984)*:

Eperanza matemática

$$E\{I(x;y)\} = 1 - G(y)$$

Varianza

$$\text{Var}\{I(x;y)\} = G(y) [1 - G(y)]$$

Variograma

$$\gamma_I(h) = 1 - G(y) - L\{y,y; 1 - \gamma_Y(h)\}$$

Es decir, el variograma de la función indicatriz está completamente determinado por el variograma de la función aleatoria gaussiana pudiéndose establecer la relación inversa:



$$\gamma_Y(h) = 1 - L^{-1}\{y, y; 1 - G(y) - \gamma_I(h; y)\}$$

En resumen, si se desea simular la función indicatriz  $I(x; z)$  con media  $m_I$  y variograma  $\gamma_I(h)$  es equivalente el simular una función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  con variograma:

$$\gamma_Y(h) = 1 - L^{-1}\{y, y; m_I - \gamma_I(h)\}$$

y aplicar a la función indicatriz el corte:

$$y = G^{-1}(1 - m_I)$$

Frente a la ventaja que presenta el modelo gaussiano de estar completamente determinado con la covarianza  $C(h)$ , el principal inconveniente es que el modelo gaussiano impone a las realizaciones un carácter de máxima entropía, esto es, maximiza el desorden espacial (JOURNAL, 1990). Es así que, conforme el valor del corte se hace extremo (al alejarse de la mediana) los valores indicadores  $I(x)$ ,  $I(x+h)$  tienden a hacerse independientes, la probabilidad bivalente tiende a un valor constante.

Como ejemplo de aplicación se considera la variable potencia de un yacimiento de carbón, cuyos datos experimentales corresponden a valores medidos en sondeos de investigación.

En primer lugar he realizado un estudio variográfico exhaustivo de la función aleatoria indicatriz definiendo diferentes valores de corte. La tabla IV.16 recoge la media y



varianza experimentales de la función indicatriz en función del valor de corte. Como era de esperar el valor máximo de varianza (0.25) se obtiene para un corte de 12 m, valor que corresponde a la mediana de los valores experimentales. Para valores superiores o inferiores a la mediana, la varianza disminuye tendiendo a cero conforme el corte es más extremo.

En las figuras 4.36a y 4.36b se representan los variogramas medios de la función indicatriz para diferentes valores de corte. La figura 4.36a recoge los variogramas medios para los cortes inferiores a la mediana y el correspondiente a la propia mediana. En la figura siguiente 4.36b están representados los variogramas medios para cortes superiores a la mediana y como referencia también se ha dibujado el correspondiente a la mediana.

Se constata experimentalmente la robustez del variograma de la indicatriz para valores de corte en torno a la mediana. Switzer (1977) muestra como el variograma de la indicatriz no es sensible al valor del corte dentro del rango intercuartílico, que para una variable gaussiana estandarizada vale (-.67,.67). Para la variable potencia el rango intercuartílico experimental es el comprendido entre los valores 8.65 m que corresponde al primer cuartil y 15.78 que es el valor experimental de tercer cuartil.

Para cortes inferiores a la mediana e inferiores al primer cuartil, se observa como el variograma mantiene la misma estructura disminuyendo el valor de la meseta, a modo de efecto proporcional del variograma clásico.

Por el contrario para cortes superiores a la mediana y superiores al tercer cuartil, hay una desestructuración manifiesta conforme el corte se incrementa. Así, para un corte de 18 m el variograma responde a un modelo de efecto de pepita puro.



Esto significa que los valores superiores a 18 m no presentan ningún tipo de continuidad espacial. Para variables geológicas este efecto es debido a la localización y disposición espacial de los valores; así para el corte de 6 m que corresponde al valor simétrico a 18 m con respecto a la mediana (6 m corresponde al percentil número 10 experimental y 18 m es el percentil 89 experimental) presenta una buena estructura porque espacialmente están conectados. Los valores menores a 6 m están situados en el borde del yacimiento definiendo aproximadamente sus límites; los valores mayores a 18 m corresponden a máximos que se localizan de modo aleatorio en la zona de yacimiento con mayor espesor de capa.

CORTE $z_c$	MEDIA $m_I$	VARIANZA $\sigma_I^2$
6	.900	.090
8	.837	.136
9	.687	.215
10	.550	.247
11	.538	.249
12	.500	.250
13	.450	.247
14	.387	.237
15	.362	.231
16	.237	.181
18	.112	.099

Tabla IV.16. Media y varianza de la función indicatriz para la variable potencia.

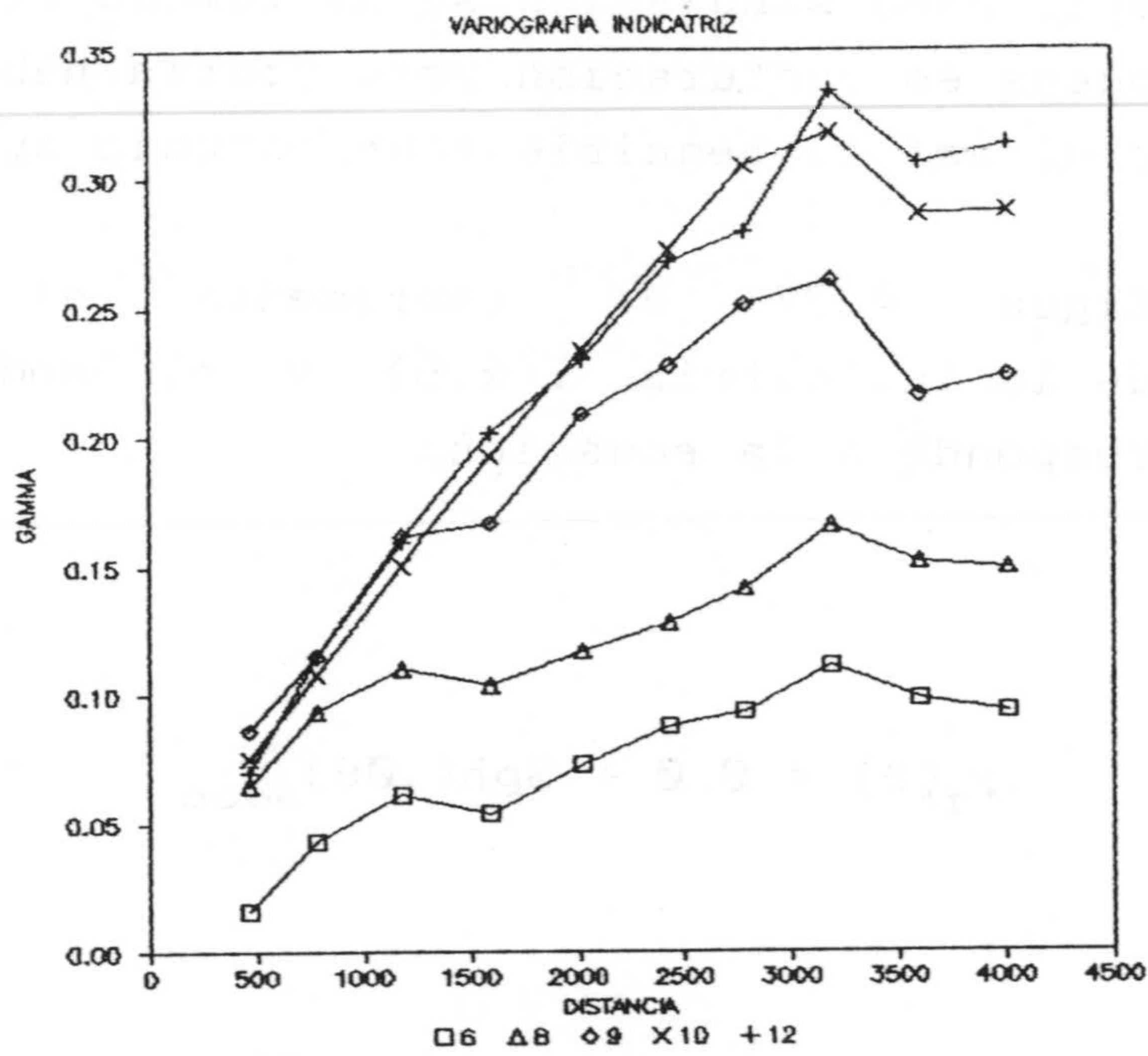


Figura 4.36a. Variografía de la función indicatriz para cortes inferiores o igual a la mediana.

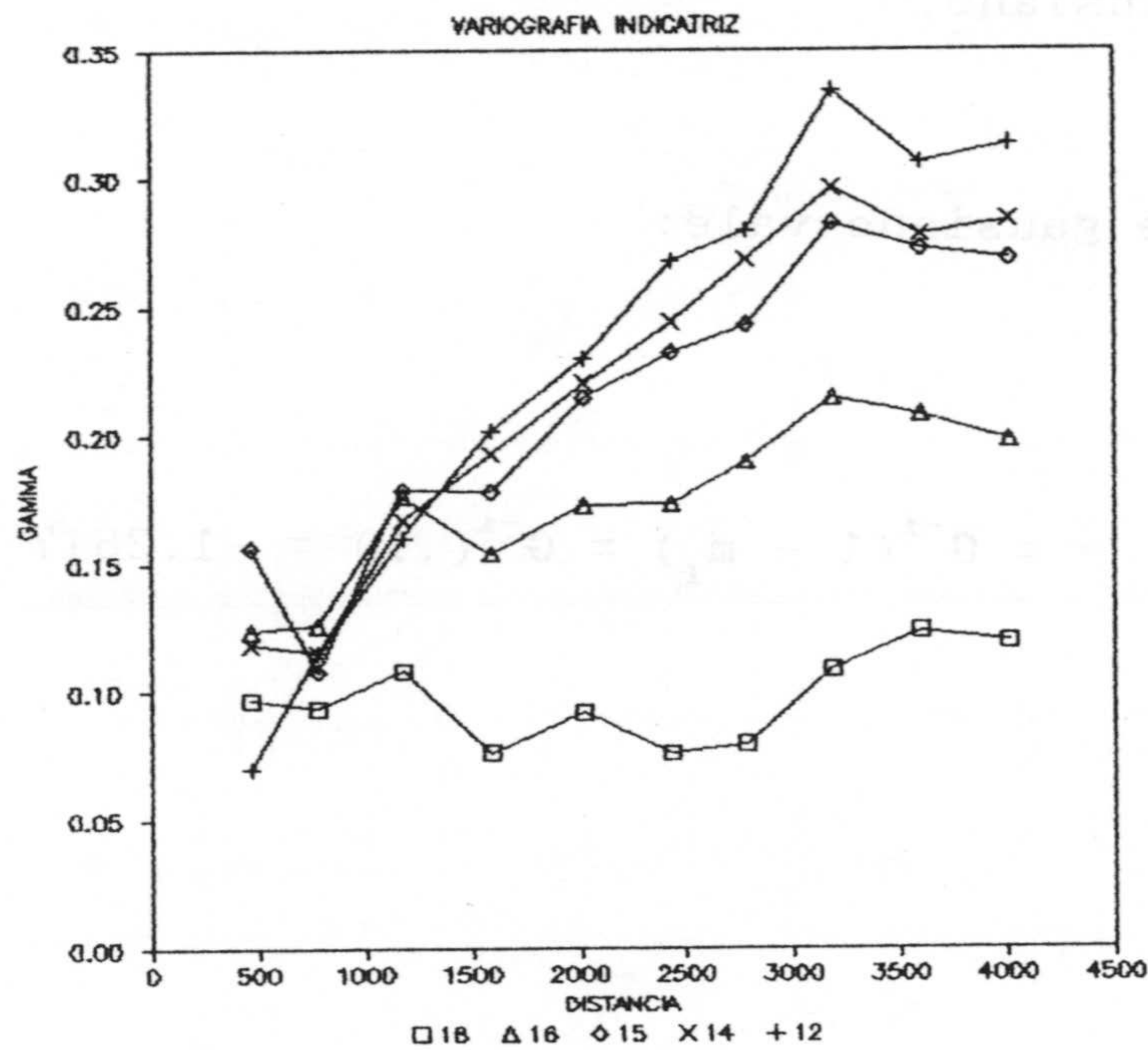


Figura 4.36b. Variografía de la función indicatriz para cortes superiores o igual a la mediana.



Como ejemplo para simulación se ha tomado el corte igual a 6 m por su buena estructuración pero podría haberse tomado cualquier otro si así lo requiriese un estudio aplicado.

En la figura 4.37 se representa el variograma experimental de la indicatriz  $I(x,6)$  y el modelo teórico ajustado que responde a la ecuación:

$$\gamma_I(h) = 0.0 + \text{Sph}(.09)_{3000}$$

esto es, un modelo esférico de meseta .09 con alcance igual a 3000 m y efecto de pepita nulo.

En base al modelo gaussiano de simulación los dos parámetros que hay que calcular son el corte gaussiano y el variograma gaussiano.

El corte gaussiano vale:

$$y = G^{-1}(1 - m_I) = G^{-1}(.1) = -1.2817$$

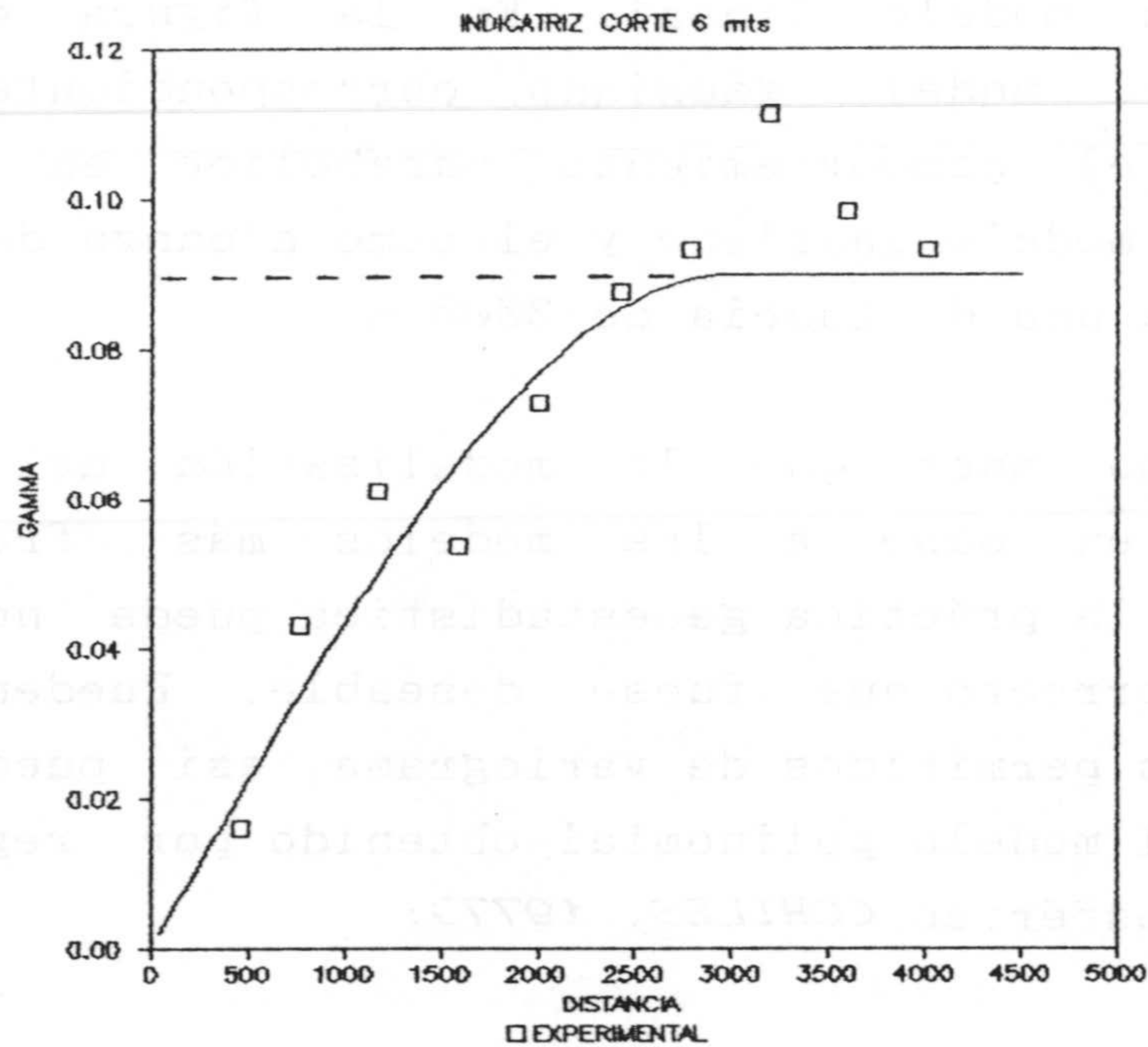


Figura 4.37. Variograma experimental y modelo teórico ajustado para  $I(x,6)$ .

El variograma gaussiano se obtiene de la relación oportunamente citada:

$$\gamma_Y(h) = 1. - L^{-1}\{-1.28, -1.28; 0.9 - \gamma_I(h)\}$$

Experimentalmente se comprueba que este variograma gaussiano mantiene los rasgos principales del variograma de la indicatriz, efecto de pepita si el variograma de la indicatriz tiene efecto de pepita y mantiene el alcance, con una meseta siempre de 1 por corresponder a un modelo gaussiano normalizado. No obstante el carácter más distintivo del modelo gaussiano deducido por la ecuación anterior es el comportamiento cerca del origen que tiende a ser muy continuo (parábólico) incluso aunque el variograma de la indicatriz



presentase un modelo lineal. En la figura 4.38 se ha representado el modelo gaussiano correspondiente a  $I(x,6)$  observándose el comportamiento parabolico en el origen parecido a un modelo gaussiano y el como alcanza de modo neto la meseta para una distancia de 3000 m.

Este hecho hace que la modelización del variograma experimental en base a los modelos más frecuentemente utilizados en la práctica geoestadística puede no llegar a ser todo lo correcto que fuese deseable. Pueden interesar nuevos modelos permitidos de variograma, así puede resultar interesante el modelo polinomial obtenido por regularización de un modelo esférico (CHILES, 1977):

$$r(h) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 7 \left( \frac{h}{a} \right)^2 - \frac{35}{4} \left( \frac{h}{a} \right)^3 + \frac{7}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^5 - \frac{3}{4} \left( \frac{h}{a} \right)^7 \right\}; & h \leq a \\ \sigma^2 & h > a \end{cases}$$

Operando del modo clásico en el ajuste de un modelo teórico al variograma experimental, se han encontrado dos modelos que tienden a ajustarse al variograma gaussiano, estos modelos son el modelo polinomial anterior con alcance de 4000 m y meseta unidad y el segundo es un modelo gaussiano de alcance 1700 m y meseta también unidad. Ambos modelos se muestran en la figura 4.38 junto al variograma gaussiano obtenido a través de la relación repetidamente citada.

Ambos modelos vienen a tener un comportamiento parecido y ambas mantienen diferencias con respecto a los valores a modelizar. Si se ajusta bien el comportamiento en el origen se produce un ajuste malo para distancias en torno al alcance y viceversa.



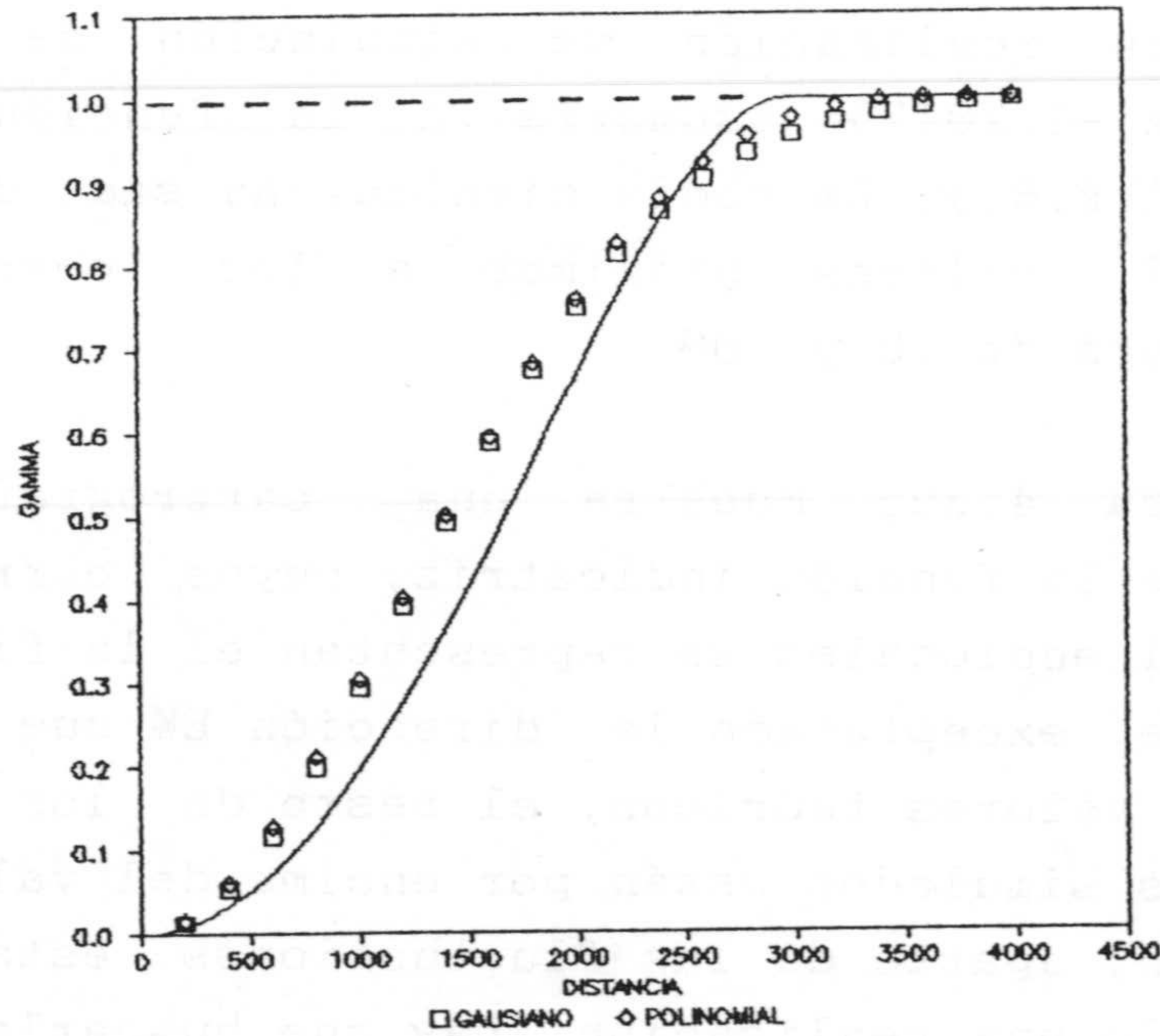
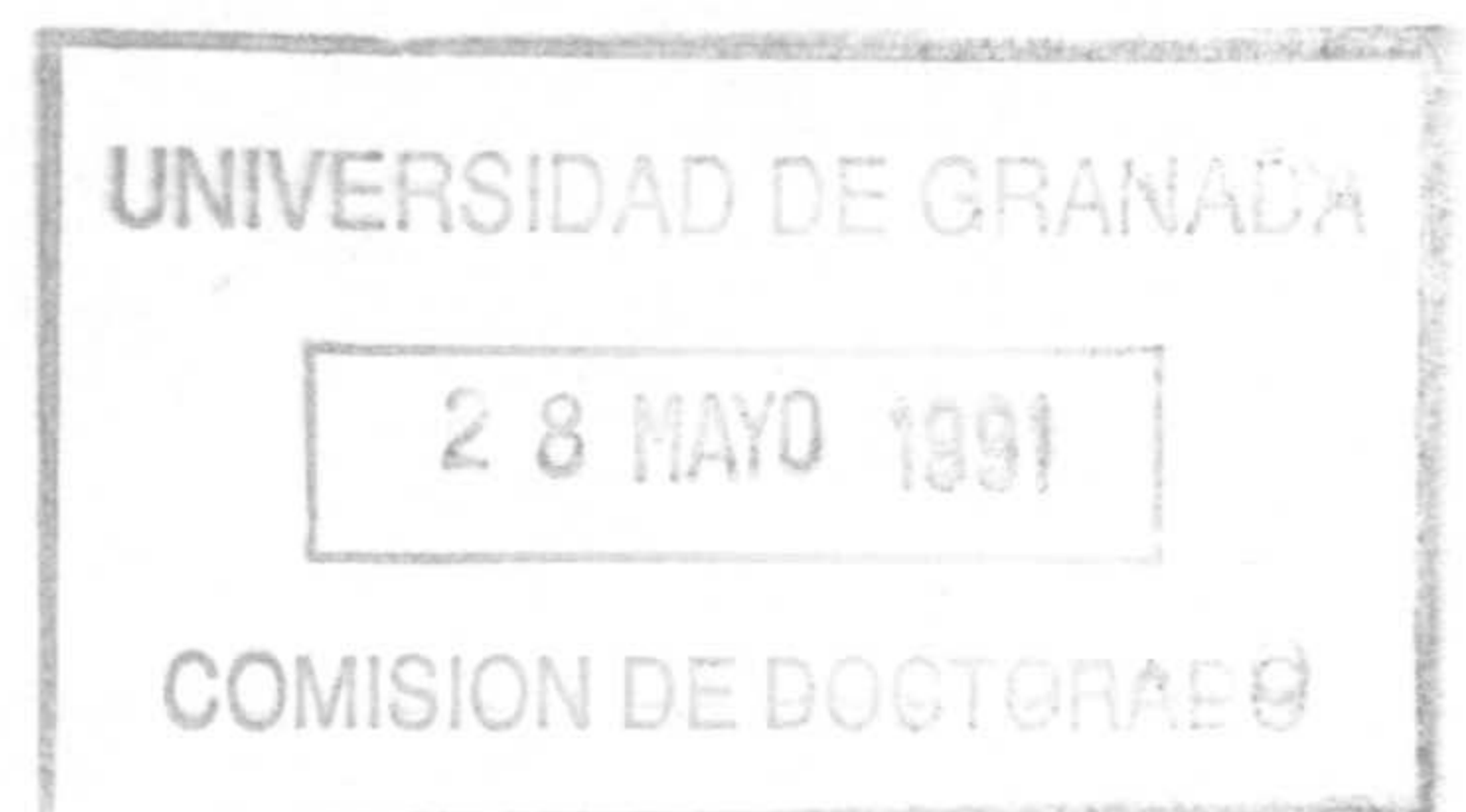


Figura 4.38. Variogram gaussiano y modelos teórico polinomial y gaussiano.

He realizado la simulación de 64 x 64 valores gaussianos dispuestos en una malla regular de 250 m x 250 m imponiendo el variograma gaussiano:

$$\gamma_Y(h) = \text{Gau}(1.0)_{1700}.$$

La media de una realización al azar ha sido de  $-0.114$  y la varianza de  $0.963$ . La figura 4.39a representa una cartografía de isovalores de la realización gaussiana y la figura 4.39b registra el modelo teórico de variograma y los correspondientes variogramas direccionales simulados. Se observa una buena concordancia entre valores teóricos y simulados.





Aplicando a la realización gaussiana el corte  $y = -1.2817$  se obtiene una realización de simulación de la función indicatriz  $I(x, -1.2817)$  isomorfa a la función indicatriz experimental  $I(x, 6.)$ . La media simulada ha sido de .891 y la varianza .097, valores próximos a los correspondientes valores teóricos de .9 y .09.

La figura 4.39c muestra una cartografía de la realización de la función indicatriz, cuyos correspondientes variogramas direccionales se representan en la figura 4.39d. Se observa que, exceptuando la dirección EW que reproduce fielmente los valores teóricos, el resto de los variogramas experimentales simulados están por encima del valor teórico. La explicación, aparte de las fluctuaciones estadísticas al considerar sólo una realización, hay que buscarla en el hecho de la falta de concordancia absoluta entre el modelo gaussiano simulado y el variograma gaussiano teórico obtenido de la relación conocida.

$$\gamma_Y(h) = 1. - L^{-1}\{-1.281, -1.281; 0.9 - \gamma_I(h)\}$$

como ya quedo dicho y reflejado en la figura 4.38.

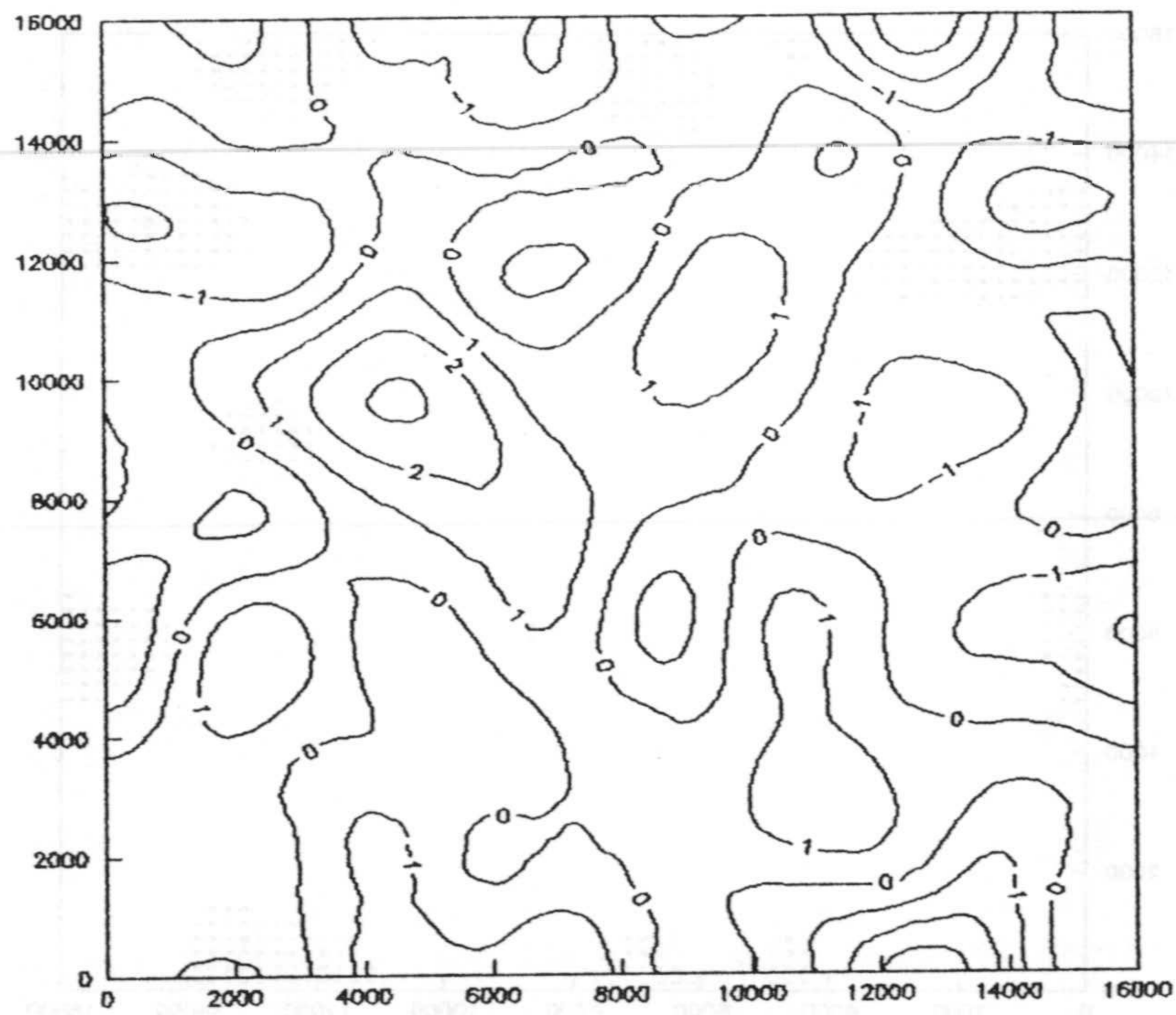


Figura 4.39a. Ejemplo de una realización gaussiana en simulación de la función indicatriz.

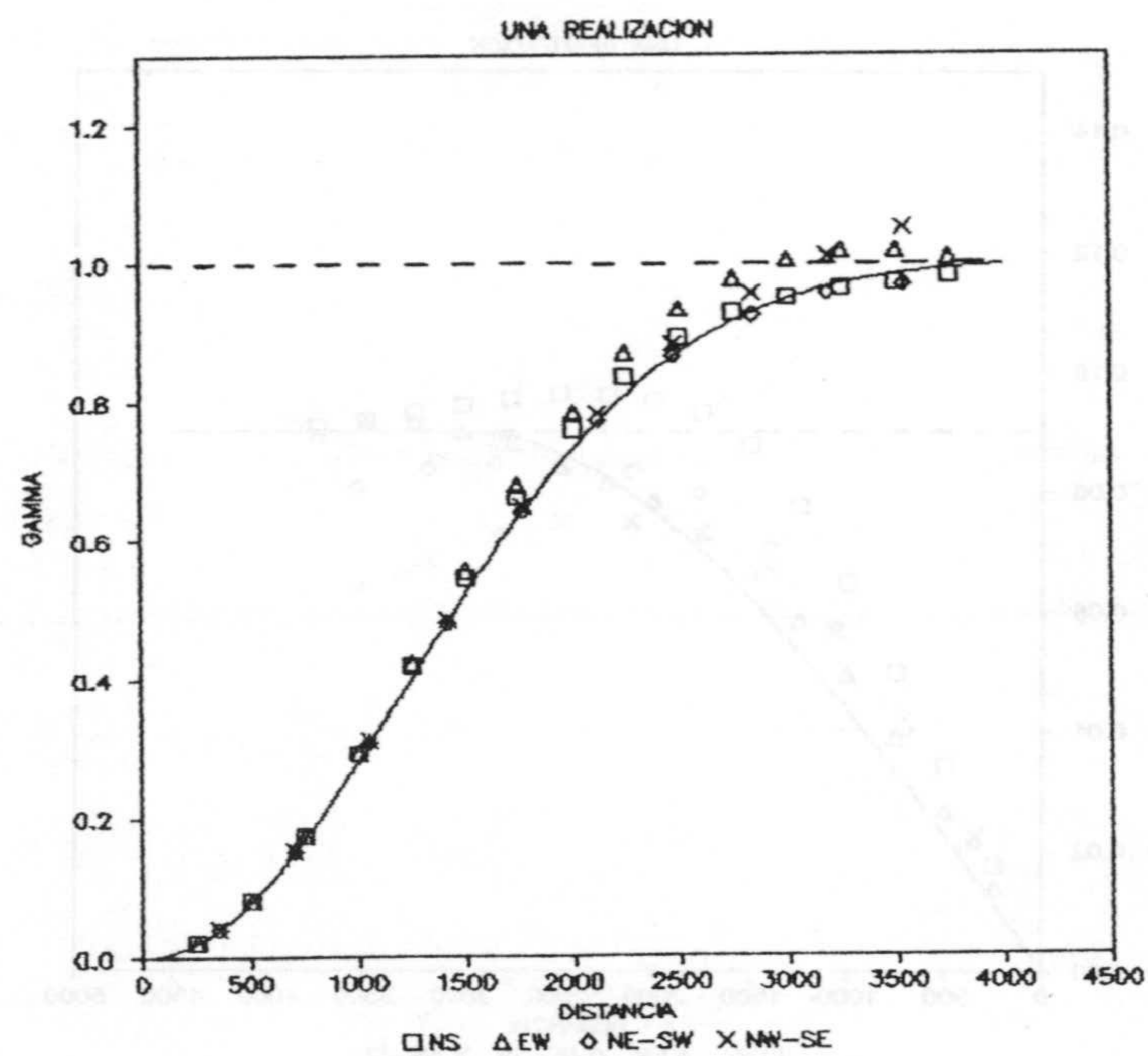


Figura 4.39b. Variograma teórico y variogramas experimentales de la realización gaussiana.



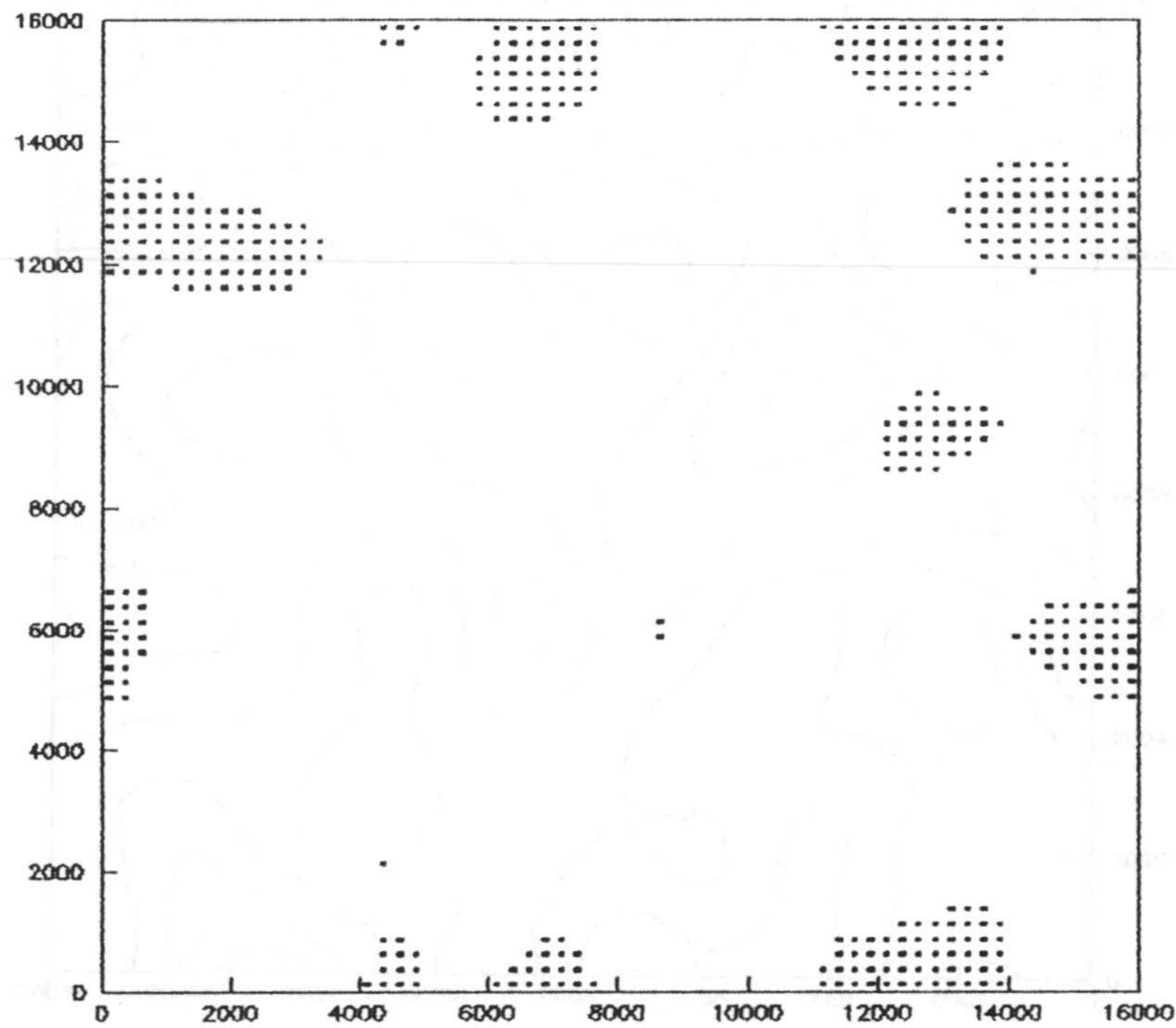


Figura 4.39c. Cartografía de la función indicatriz simulada  $I(x, -1.281)$  o su isomorfa  $I(x, 6.)$ .

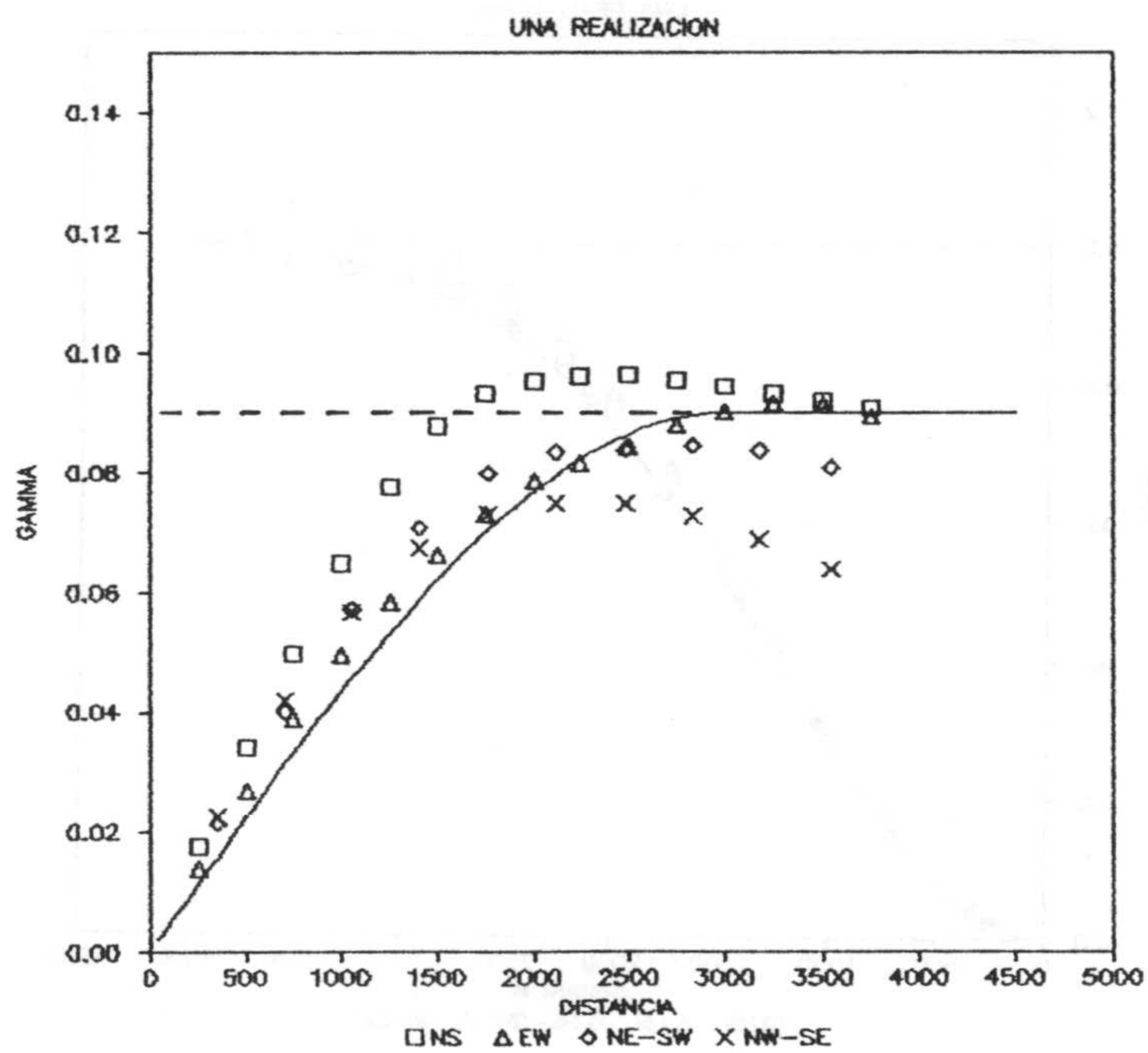


Figura 4.39d. Variograma teórico y variogramas simulados para la función indicatriz.

A continuación se presenta la metodología que he desarrollado para tratar dos cuestiones interesantes desde un punto de vista aplicado. La primera trata de la simulación de la función indicatriz sobre soporte no puntual y la segunda hace referencia a la simulación de la función indicatriz con dos cortes, esto es, con tres valores posibles.

En cuanto a la simulación de la función indicatriz sobre soporte no puntual, se define la función aleatoria indicatriz sobre un soporte  $v$  del siguiente modo:

$$I_v(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_v(x) > z \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Donde:

$$z_v(x) = \frac{1}{v} \int_{v(x)} z(u) du$$

es el valor medio de una realización de la función aleatoria puntual  $Z(x)$  en el soporte  $v$ .

Lo más usual en la práctica geoestadística es que no se disponga de información experimental sobre el soporte  $v$ , por consiguiente no es posible conocer de modo experimental la función indicatriz sobre soporte  $v$  ni, por consiguiente, su variograma sobre dicho soporte.

Por otra parte la función indicatriz sobre soporte  $v$  no es igual a la regularización en el soporte  $v$  de la función indicatriz puntual:



$$I_{\nu}(x, z) = \frac{1}{\nu} \int_{\nu} I(u, z) du$$

Para poder inferir la función de distribución de probabilidad sobre el soporte  $\nu$  es necesario conocer la función de distribución multivariante de la función aleatoria  $Z(x)$  de soporte puntual. Esta ley de distribución de probabilidad no es accesible empíricamente cuando, usualmente, sólo se dispone de un número finito de valores experimentales de una única realización de la función aleatoria  $Z(x)$ .

Como es bien conocido, al abordar problemas de cambio de soporte se debe adoptar un modelo que relacione la función de distribución sobre soporte puntual y la función de distribución de probabilidad sobre soporte bloque.

Uno de dichos modelos es el gaussiano discreto (MATHERON, 1975) que ya se comentó en el apartado correspondiente.

Por su simplicidad y aplicabilidad, se va a adoptar un modelo de corrección afín (JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978; DAVID, 1977) en base al cual se plantea la metodología para la simulación de la función indicatriz sobre el soporte  $\nu$ .

Cualquiera que sea el modelo que se acepte, los resultados obtenidos sólo se pueden refutar si se conocen experimentalmente los valores sobre el soporte  $\nu$ . En la práctica se ha comprobado que la corrección afín se cumple para la distribución lognormal (DAVID, 1987).

Es conocido que si la función aleatoria puntual  $Z(x)$  es estacionaria de segundo orden, se cumple que la función aleatoria sobre soporte  $\nu$ ,  $Z_{\nu}(x)$  es asimismo estacionaria de



segundo orden con la misma media:

$$E\{Z(x)\} = E\{Z_v(x)\}$$

y una varianza menor a la puntual:

$$\text{Var}\{Z(x)\} > \text{Var}\{Z_v(x)\}$$

Dicha varianza se puede calcular a partir del variograma puntual (DAVID, 1977, 1987):

$$\sigma_v^2 = \sigma^2 - \bar{\gamma}(v, v)$$

El modelo de corrección se basa en la hipótesis de que las funciones de distribución de probabilidad de las funciones aleatoria puntual y sobre soporte  $v$  tienen la misma forma. Por consiguiente si se estandarizan, las funciones de distribución de  $(z-m)/\sigma$  y  $(z_v-m)/\sigma_v$  serán idénticas. Por lo que la función de distribución de probabilidad sobre soporte de bloque  $F_v(z)$  se puede expresar en base a la función de distribución puntual de siguiente modo (JOURNAL y HUIJBREGTS, 1978):

$$F_v(z) = F\left(m + (z-m)\frac{\sigma_v}{\sigma}\right)$$



Como la simulación de la función aleatoria indicatriz requiere conocer la función de distribución bivariante  $F(z,z)$ , el método que he diseñado necesita asumir la hipótesis de permanencia de la ley de la función de distribución bivariante; las funciones de distribución bivariantes de las funciones aleatorias puntual y sobre soporte bloque tienen la misma forma y por consiguiente, si se normalizan también serán idénticas:

$$F_v(z,z) = F(m + (z-m)\sigma_v/\sigma, m + (z-m)\sigma_v/\sigma)$$

Bajo la hipótesis de que se preserva la ley univariante, la conservación de la ley bivariante no resulta ser una hipótesis excesivamente restrictiva.

La esperanza matemática de la función indicatriz sobre soporte de bloque vale:

$$E\{I_v(x,z)\} = m_{Iv} = 1 - F_v(z)$$

La función aleatoria indicatriz sobre soporte  $v$  sigue una ley de distribución de Bernouilli con varianza:

$$\text{Var}\{I_v(x,z)\} = \sigma_{Iv}^2 = m_{Iv} (1 - m_{Iv})$$

Sólo queda por conocer el variograma de la función

indicatriz  $I_v(x,z)$ , lo cual se puede realizar en base a la relación entre el variograma de la función indicatriz puntual  $\gamma_I(h)$  y la función de distribución de probabilidad bivalente  $F(z,z)$ . Conocida  $F(z,z)$  se puede calcular la función de distribución bivalente  $F_v(z,z)$  y a partir de ella el variograma objetivo  $\gamma_{Iv}(h)$  para la simulación.

La función de distribución de probabilidad bivalente de la función aleatoria puntual y el variograma indicatriz puntual están relacionados del siguiente modo (figura 6.9):

$$E\{I(x) I(x+h)\} = P\{z(x) > z, z(x+h) > z\} = 1 - 2F(z) + F(z,z)$$

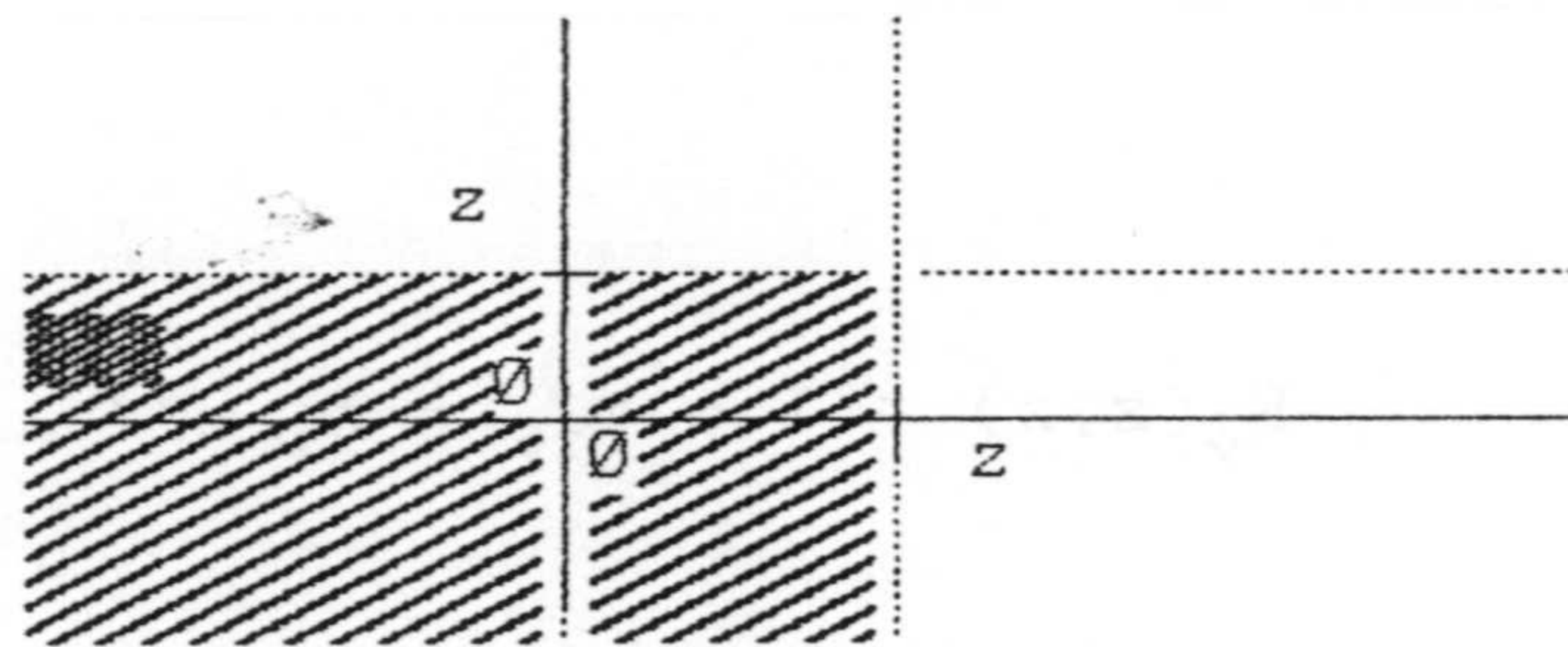


Figura 4.40. Función de distribución de probabilidad bivalente.  $\text{///}$  :  $F(z,z)$ .

Por otra parte bajo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden se tiene que:

$$C_I(h) = E\{I(x) I(x+h)\} - m_I^2 = m_I (1 - m_I) - \gamma_I(h)$$

De donde:



$$E\{I(x) I(x+h)\} = m_I - \gamma_I(h)$$

Comparando la primera y esta última expresión y considerando que  $F(z) = 1 - m_I$  se llega a:

$$F(z, z) = 1 - m_I - \gamma_I(h)$$

Por el mismo razonamiento, esta misma relación existe entre la función de distribución sobre soporte  $v$  y el variograma correspondiente sobre dicho soporte:

$$F_v(z, z) = 1 - m_{Iv} - \gamma_{Iv}(h)$$

Y por último utilizando la corrección afín en base a la permanencia de la ley bivalente se tiene:

$$\gamma_{Iv}(h) = \gamma_I^*(h)$$

Donde  $\gamma_I^*(h)$  es el variograma de la función indicatriz puntual calculado utilizando el corte  $z^*$ :

variograma de la función aleatoria indicatriz sobre paneles de 500 x 500 metros y para un corte de 6 m. El modelo ajustado responde a la ecuación:

$$\gamma_{IV}(h) = .01 + \text{Sph}(.09)_{2800}$$

En base al modelo gaussiano se calcula el variograma teórico gaussiano que se ha de imponer a la realización de  $Y(x)$  según la relación conocida:

$$\gamma_Y(h) = 1 - L^{-1}\{y, y; m_I - \gamma_{IV}(h)\}$$

donde el corte gaussiano  $y$  vale  $-1.2109$ . En la figura 4.41b se ha representado el variograma teórico gaussiano y el modelo ajustado que responde a la ecuación:

$$\gamma_Y(h) = \text{Gau}(1.)_{1500}$$

es decir, un modelo gaussiano de meseta unidad y alcance 1500 m, sin efecto de pepita.

Se ha simulado una realización al azar de la función aleatoria  $Y(x)$  con puntos que representan una malla de 32 x 32 paneles de 500 m de lado. En la figura 4.41c se ha representado el modelo teórico y el variograma simulado para diferentes direcciones.

A partir de dicha realización se calcula la función aleatoria indicatriz  $I(x, -1.2109)$  cuyos estadísticos son:



Media simulada  $m_{Iv} = .902$

Varianza simulada  $\sigma_{Iv}^2 = .088$

La figura 4.41d refleja una cartografía de la realización simulada representado en sombreado los bloques simulados por debajo del corte 6 m. Esta realización de la función aleatoria indicatriz sobre soporte bloque no es relacionable con la simulación presentada anteriormente para la misma función aleatoria sobre soporte puntual ya que ambas realizaciones son independientes. En la figura 4.41e se representan el modelo teórico de variograma de la indicatriz y los correspondientes variogramas indicadores direccionales. Se observa una correspondencia aceptable entre valores experimentales de la simulación y valores teóricos impuestos.

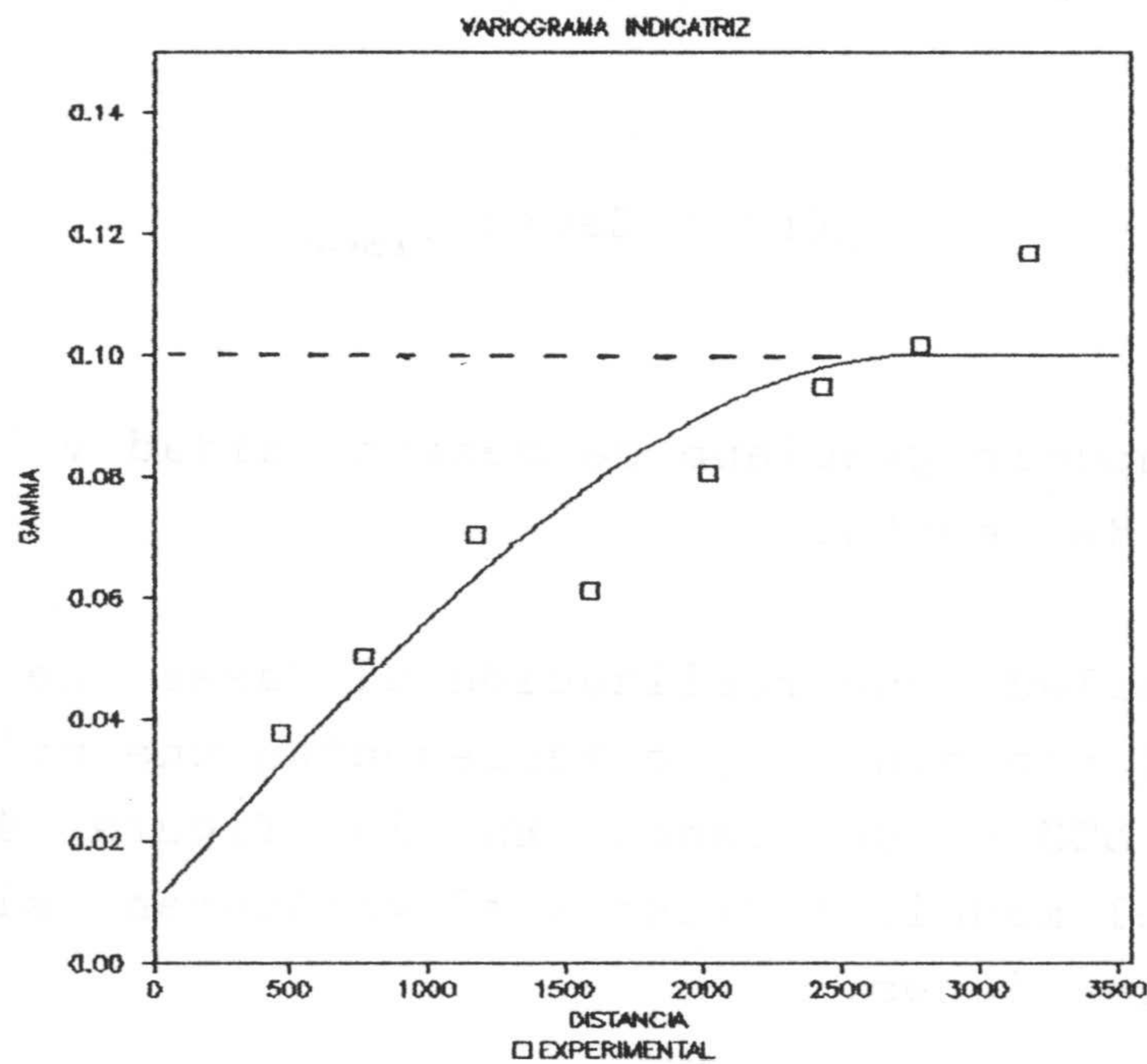


Figura 4.41a Variograma experimental y modelo teórico de la función aleatoria indicatriz  $Iv(x,6)$ .

variograma de la función aleatoria indicatriz sobre paneles de 500 x 500 metros y para un corte de 6 m. El modelo ajustado responde a la ecuación:

$$\gamma_{IV}(h) = .01 + \text{Sph}(.09)_{2800}$$

En base al modelo gaussiano se calcula el variograma teórico gaussiano que se ha de imponer a la realización de  $Y(x)$  según la relación conocida:

$$\gamma_Y(h) = 1 - L^{-1}\{y, y; m_I - \gamma_{IV}(h)\}$$

donde el corte gaussiano y vale  $-1.2109$ . En la figura 4.41b se ha representado el variograma teórico gaussiano y el modelo ajustado que responde a la ecuación:

$$\gamma_Y(h) = \text{Gau}(1.)_{1500}$$

es decir, un modelo gaussiano de meseta unidad y alcance 1500 m, sin efecto de pepita.

Se ha simulado una realización al azar de la función aleatoria  $Y(x)$  con puntos que representan una malla de 32 x 32 paneles de 500 m de lado. En la figura 4.41c se ha representado el modelo teórico y el variograma simulado para diferentes direcciones.

A partir de dicha realización se calcula la función aleatoria indicatriz  $I(x, -1.2109)$  cuyos estadísticos son:



Media simulada  $m_{Iv} = .902$

Varianza simulada  $\sigma_{Iv}^2 = .088$

La figura 4.41d refleja una cartografía de la realización simulada representado en sombreado los bloques simulados por debajo del corte 6 m. Esta realización de la función aleatoria indicatriz sobre soporte bloque no es relacionable con la simulación presentada anteriormente para la misma función aleatoria sobre soporte puntual ya que ambas realizaciones son independientes. En la figura 4.41e se representan el modelo teórico de variograma de la indicatriz y los correspondientes variogramas indicadores direccionales. Se observa una correspondencia aceptable entre valores experimentales de la simulación y valores teóricos impuestos.

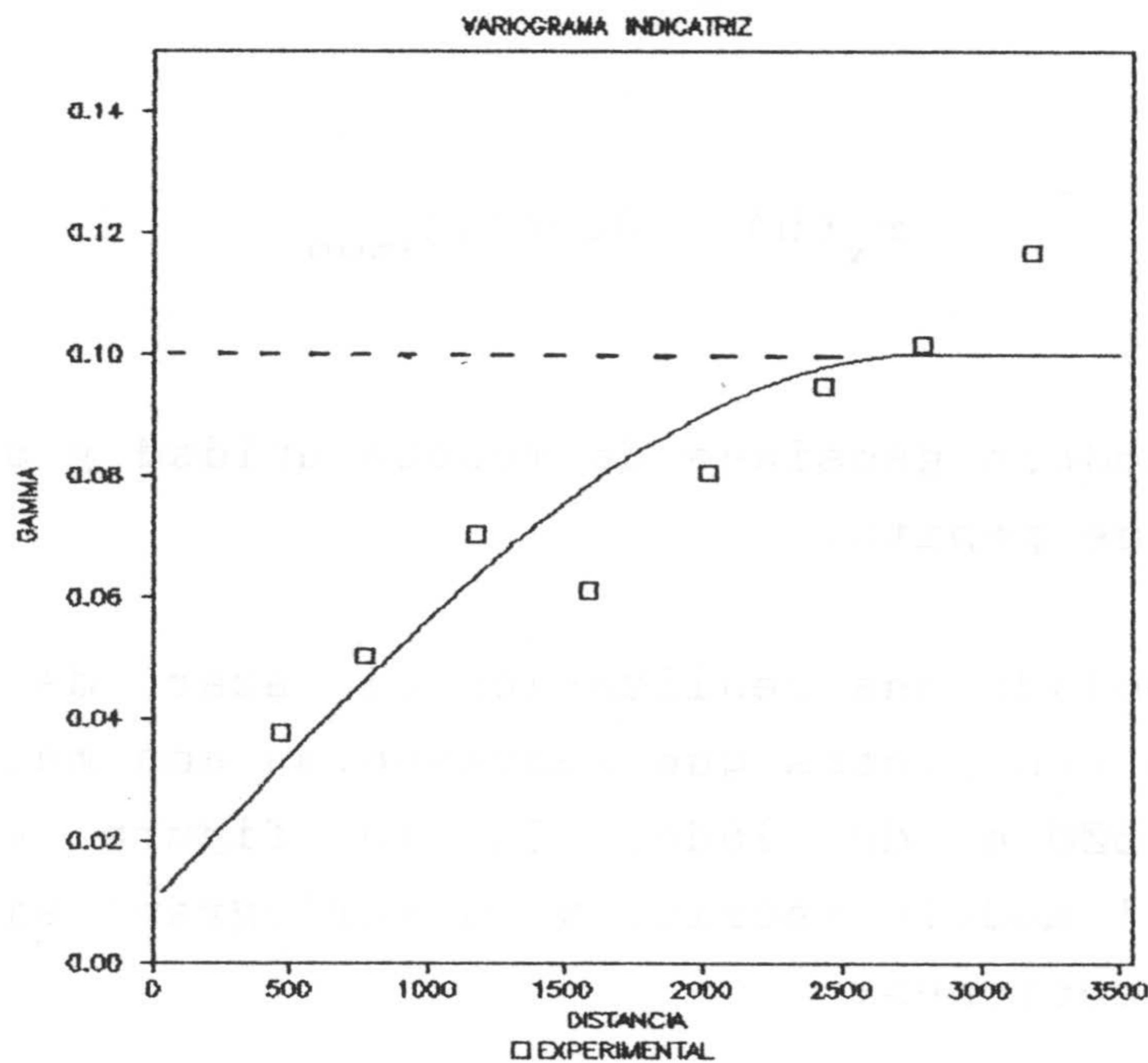


Figura 4.41a Variograma experimental y modelo teórico de la función aleatoria indicatriz  $Iv(x,6)$ .

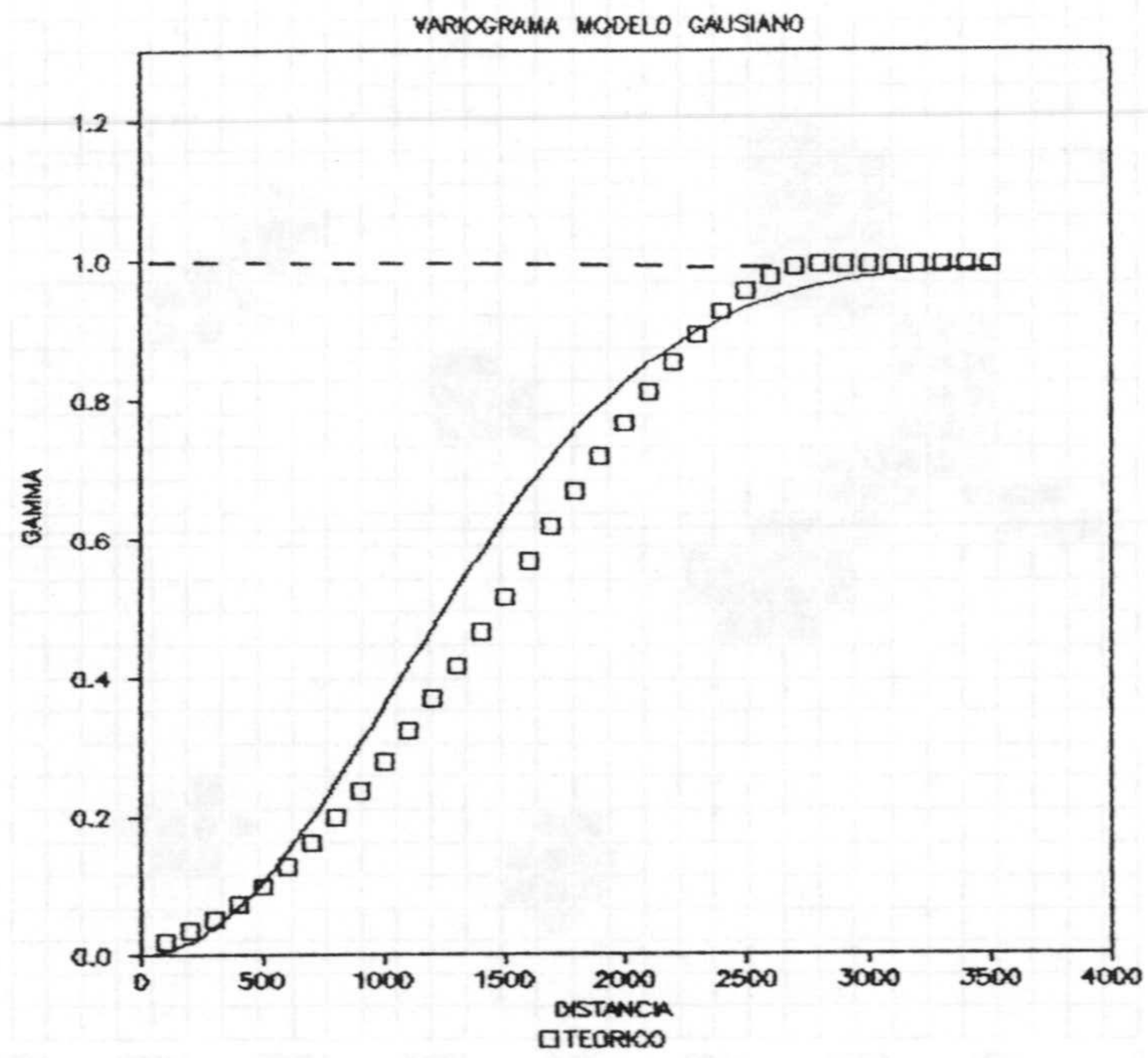


Figura 4.41b. Variograma teórico y modelo ajustado en base al modelo gaussiano.

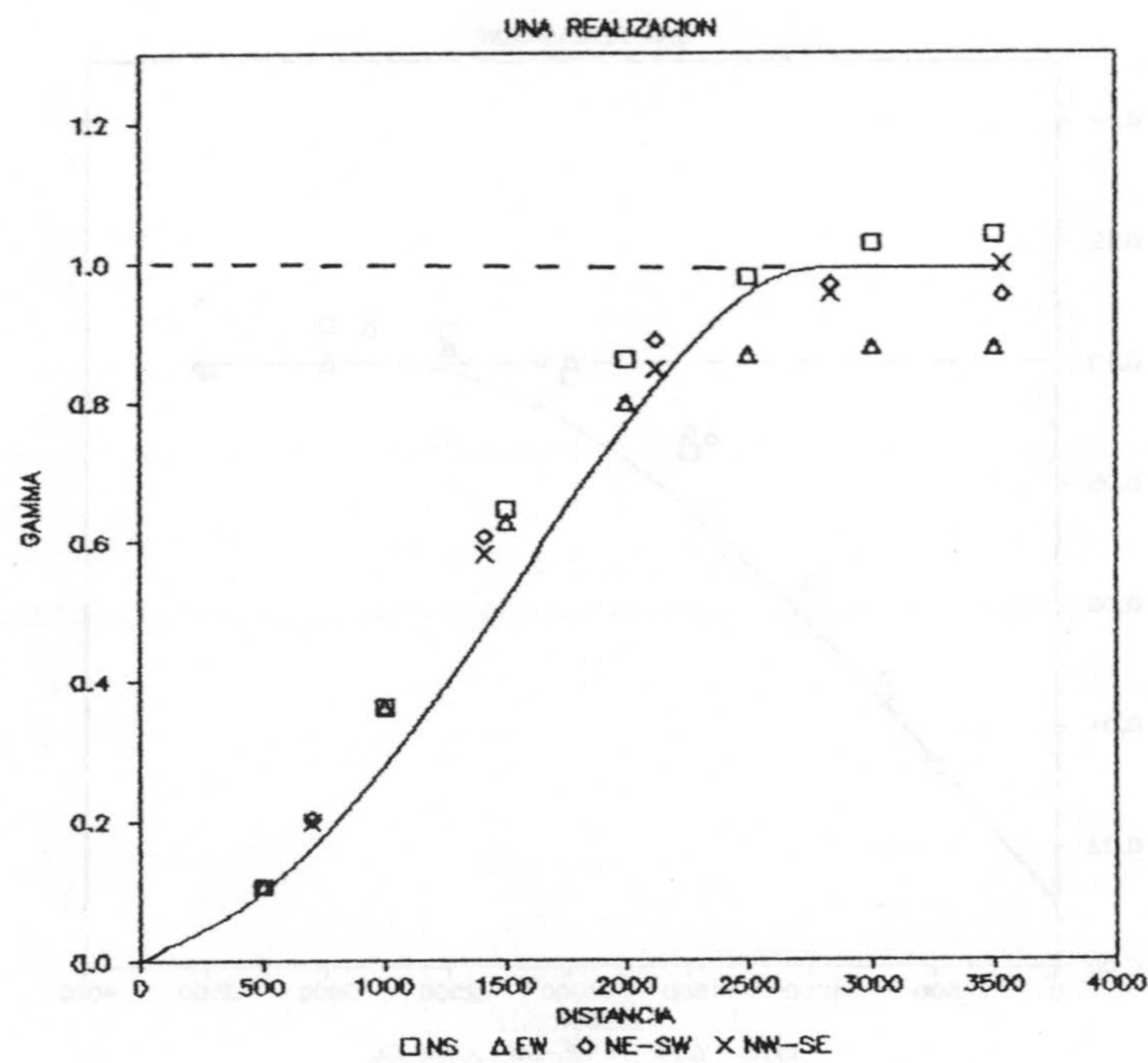


Figura 4.41c. Modelo teórico de variograma gaussiano y variogramas direccionales de la simulación.



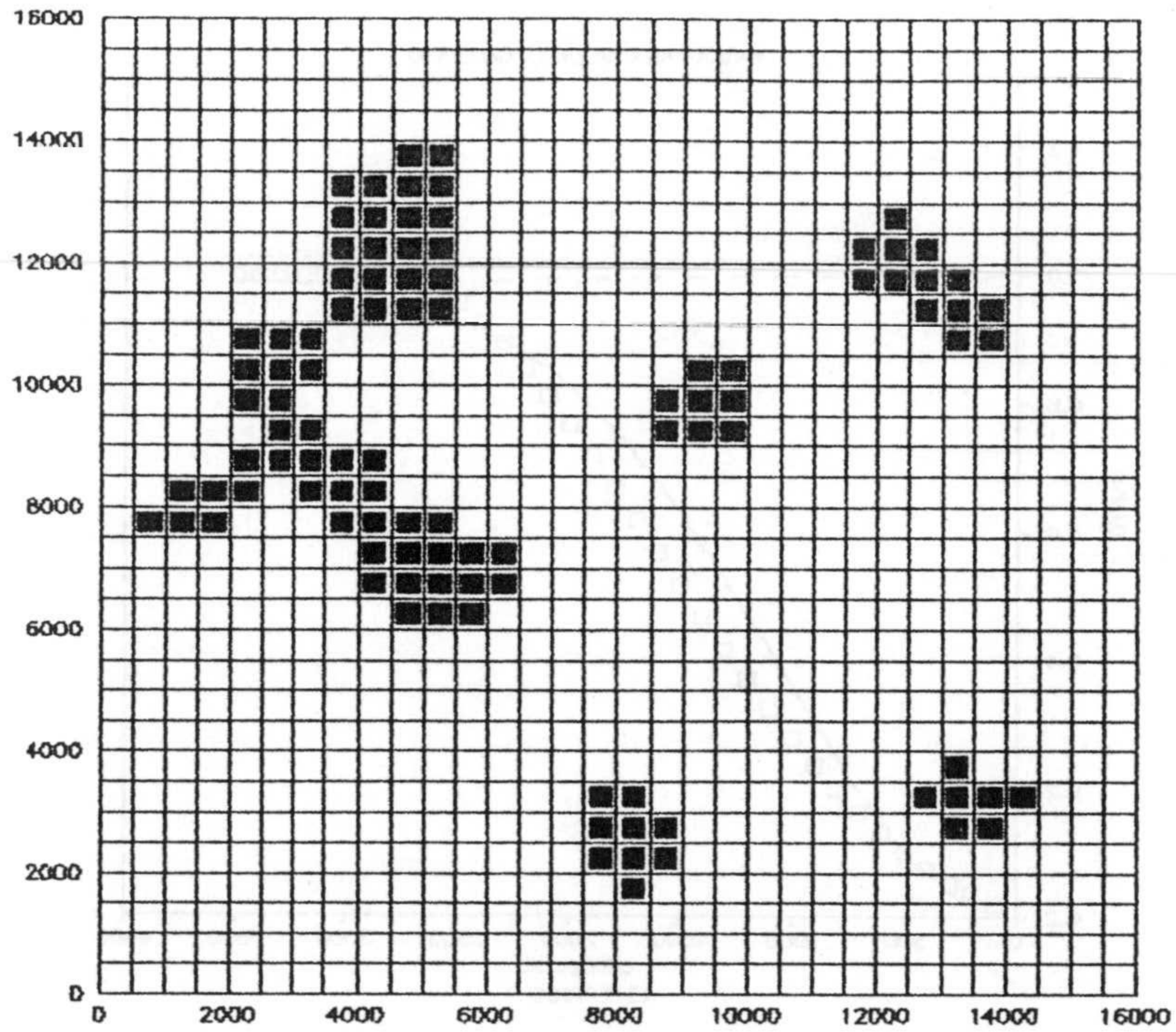


Figura 4.41d. Ejemplo de una realización al azar de la función indicatriz sobre soporte bloque.  
 ■ < 6 m.

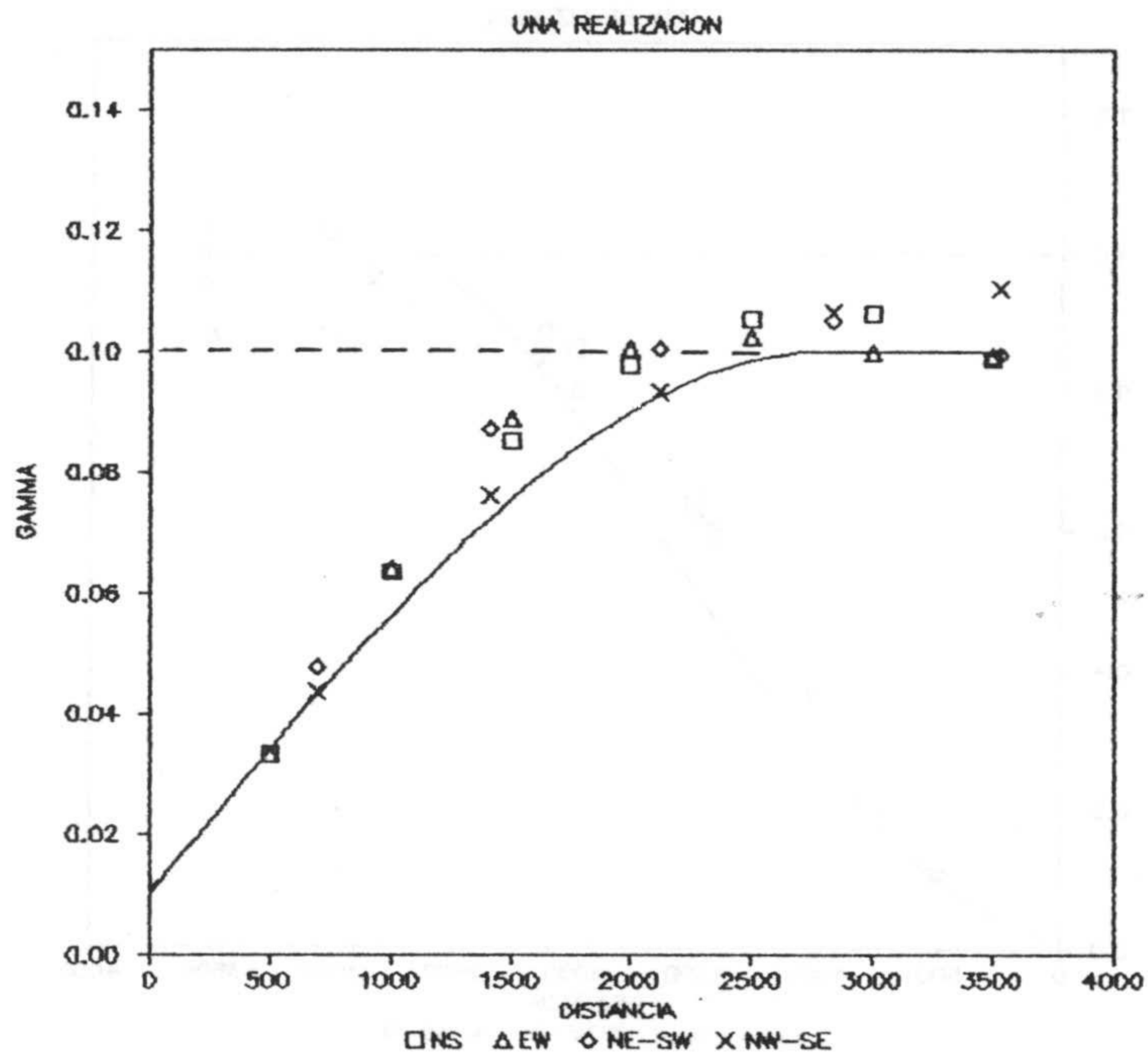


Figura 4.41e. Modelo teórico y variogramas direccionales simulados de la función aleatoria indicatriz.



El segundo aspecto desarrollado ha sido la metodología para simular una función aleatoria indicadora que admite dos cortes, esto es, que diferencia tres clases de valores experimentales con los códigos 0, 1 y 2, según sean menores o mayores a un determinado corte. Más claramente, sea la función  $I(x, z_1, z_2)$  definida del siguiente modo:

$$I(x, z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < z_1 \\ 1 & \text{si } z_1 < z < z_2 \\ 2 & \text{si } z > z_2 \end{cases}$$

Experimentalmente aplicando los dos cortes sobre los valores experimentales se puede calcular para dicha función indicadora la media  $m_I$ , la varianza  $\sigma_I^2$  y el variograma  $\gamma_I(h)$ .

Como se han desarrollado métodos eficientes de simulación de funciones aleatorias gaussianas  $Y(x)$  es preferible continuar en el marco del modelo gaussiano, esto es, encontrar las relaciones que permitan obtener a partir de la simulación de una función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  la realización de la función indicadora con las especificaciones deseadas de misma media, varianza y variograma.

Considerando que tal función existe se tiene que:

$$P\{I(x, y_1, y_2) = 0\} = P\{Y(x) < y_1\} = G(y_1)$$

$$P\{I(x, y_1, y_2) = 1\} = P\{Y(x) > y_1\} - P\{Y(x) < y_2\} =$$

$$G(y_2) - G(y_1)$$



$$P\{I(x, y_1, y_2) = 2\} = P\{Y(x) > y_2\} = 1 - G(y_2)$$

Donde  $G(\cdot)$  es la función de distribución de probabilidad de una variable gaussiana standarizada  $N(0,1)$ .

Por consiguiente se puede calcular la esperanza matemática que he calculado y vale:

$$E\{I(x, y_1, y_2)\} = (1 - G(y_1)) + (1 - G(y_2))$$

Notando

$$p = 1 - G(y_1)$$

$$q = 1 - G(y_2)$$

Se puede expresar:

$$E\{I(x, y_1, y_2)\} = p + q$$

La varianza se calcula:

$$\text{Var}\{I(x, y_1, y_2)\} = E\{[I(x, y_1, y_2)]^2\} - [E\{I(x, y_1, y_2)\}]^2 =$$

$$(1 - G(y_1)) + 3(1 - G(y_2)) -$$

$$(1 - G(y_1))^2 - (1 - G(y_2))^2 - 2(1 - G(y_1))(1 - G(y_2))$$

O en anotación abreviada:

$$\text{Var}\{I(x, y_1, y_2)\} = p(1 - p) + q(3 - q) - 2pq$$

Los cortes  $y_1$  e  $y_2$  se pueden determinar a partir de la media y varianza experimentales del siguiente modo en base a las relaciones calculadas anteriormente:

$$p = m_I - q$$

$$q = \left[ \sigma_I^2 - m_I(1 - m_I) \right] / 2.$$

Con lo que:

$$y_1 = G^{-1}(1-p)$$

$$y_2 = G^{-1}(1-q)$$

Una vez determinados los cortes falta por determinar la relación entre el variograma de la función indicatriz y el variograma de la función gaussiana  $Y(x)$ . Esta relación la he calculado del siguiente modo:



$$C_I(h) = E\{I(x+h, y_1, y_2) I(x, y_1, y_2)\} - E\{I(x, y_1, y_2)\} E\{I(x+h, y_1, y_2)\}$$

Se tiene que (figura 4.42):

$$E\{I(x+h, y_1, y_2) I(x, y_1, y_2)\} = 2 L\{y_1, y_2; \rho_Y(h)\} + L\{y_2, y_2; \rho_Y(h)\} + L\{y_1, y_1; \rho_Y(h)\}$$

Con

$L\{-y_1, -y_2; \rho_Y(h)\}$ : función de distribución bivariante gaussiana standarizada.

$$\rho_Y(h) = \frac{C_Y(h)}{C_Y(0)} : \text{correlograma gaussiano de } Y(x)$$

Como  $Y(x)$  es una función aleatoria estacionaria de segundo orden la función indicatriz es asimismo una función aleatoria estacionaria de segundo orden con lo que:

$$E\{I(x+h, y_1, y_2)\} E\{I(x, y_1, y_2)\} =$$

$$[E\{I(x, y_1, y_2)\}]^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

Con lo que:

$$\gamma_I(h) = \text{Var}\{I(x, y_1, y_2)\} - C_I(h) =$$

$$p + 3q - 2L\{y_1, y_2; 1 - \gamma_Y(h)\} - L\{y_1, y_2; 1 - \gamma_Y(h)\} - L\{y_1, y_2; 1 - \gamma_Y(h)\}$$

ya que al ser  $Y(x)$  una función  $N(0,1)$  se tiene que:

$$C_Y(0) = 1.0$$

$$\rho_Y(h) = C_Y(h) = 1 - \gamma_Y(h)$$

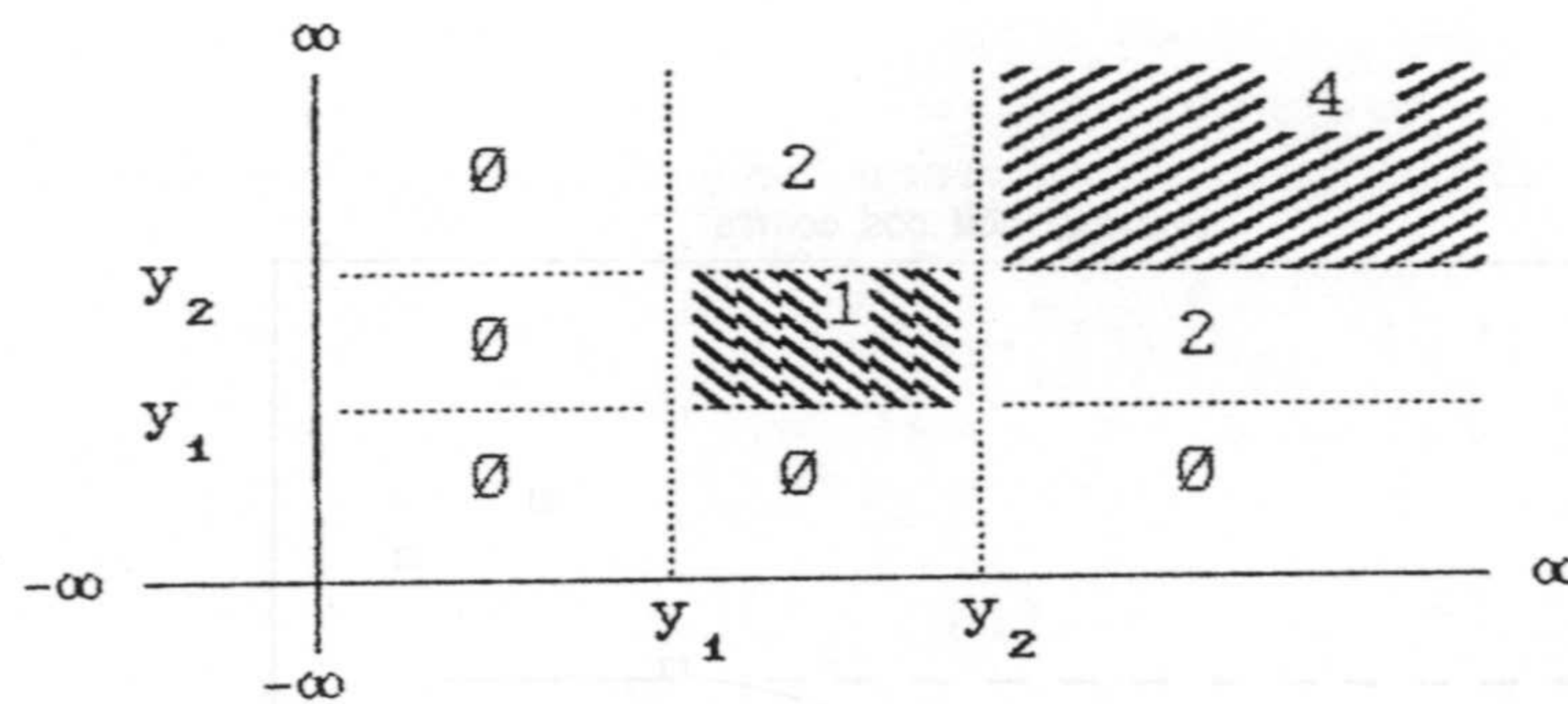


Figura 4.42 Función distribución de probabilidad bivalente. En cada cuadrante se ha representado el valor  $[I(x+h) I(x)]$ .

El cálculo de  $\gamma_Y(h)$  ha partir de  $\gamma_I(h)$  según la relación última se realiza simple y rápidamente gracias a la informática mediante los algoritmos adecuados.

Continuando con el ejemplo de la capa de carbón se desea simular la función aleatoria indicadora  $I(x,6,16)$  donde los



cortes de 6 m y 16 m dividen el yacimiento en tres zonas; la primera la zona donde la capa de carbón tiene una potencia inferior a 6 m, la segunda donde la potencia esta comprendida entre 6 y 16 m y la tercera la zona más rica donde la potencia de la capa supera los 16 m.

En cada localización experimental se ha sustituido su valor numérico continuo por el valor indicador discreto 0,1 o 2 de acuerdo al criterio citado:

$$I(x,6,16) = \begin{cases} 0 & \text{si } z(x) < 6 \text{ m} \\ 1 & \text{si } 6 \text{ m} < z(x) < 16 \text{ m} \\ 2 & \text{si } z(x) > 16 \text{ m} \end{cases}$$

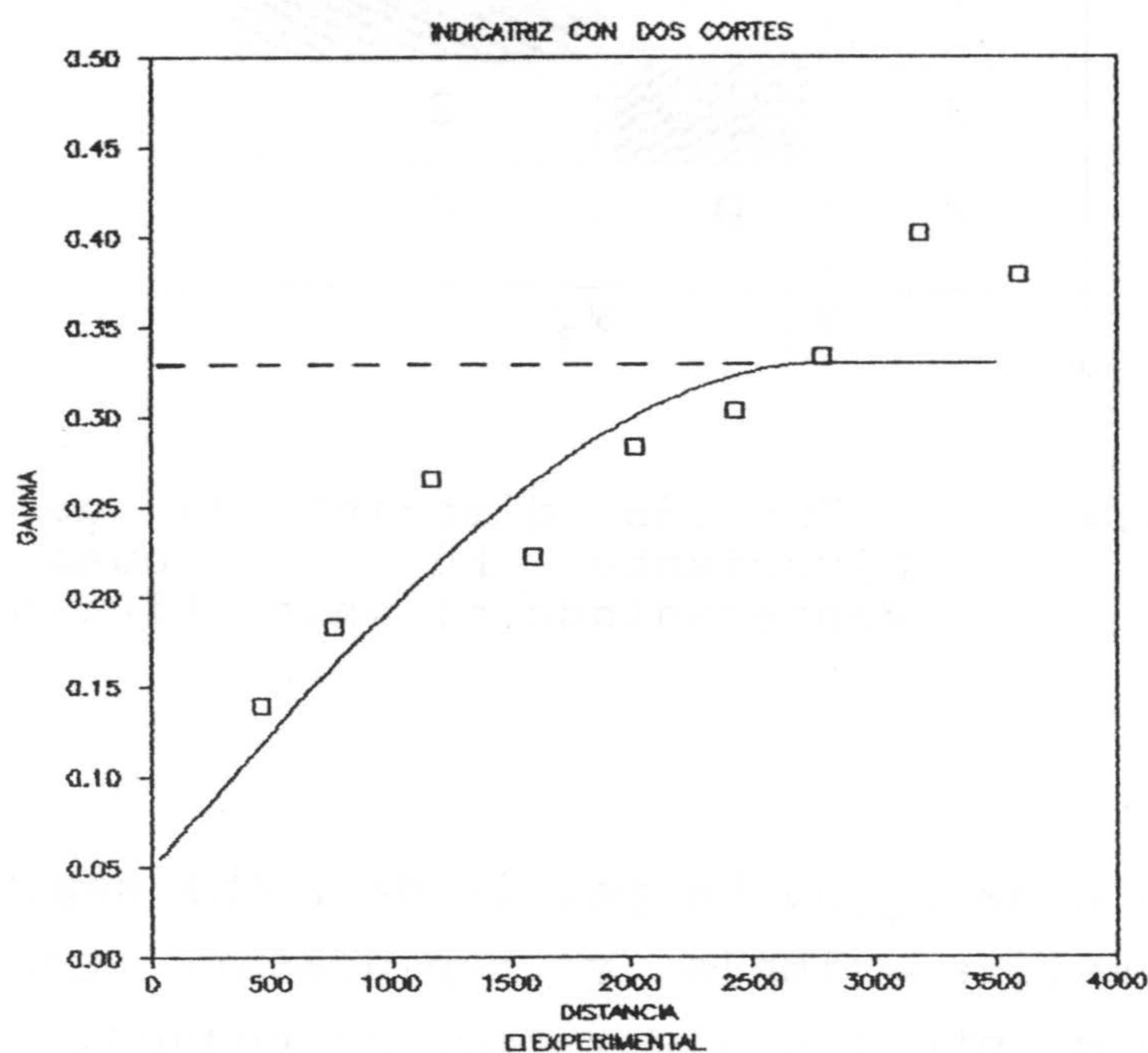


Figura 4.43. Variograma indicador experimental y modelo teórico ajustado.

Los valores experimentales obtenidos han sido:

Media

$$m_I = 1.137$$

Varianza

$$\sigma_I^2 = .318$$

A partir de estos valores, por las relaciones desarrolladas anteriormente se obtienen los parámetros  $p$  y  $q$ :

$$p = 0.9$$

$$q = 0.2374$$

a partir de los cuales se calculan los cortes gaussianos:

$$y_1 = -1.2817$$

$$y_2 = .7144$$

En la figura 6.43 se ha representado el variograma experimental de la función y el modelo teórico ajustado, el cual responde a la ecuación:

$$\gamma_I(h) = .05 + \text{Sph}(.27)_{2800}$$

El variograma gaussiano que hay que imponer a la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  se obtiene a través de la relación que he desarrollado anteriormente y que, para el ejemplo



propuesto, se ha representado en la figura 4.44. En dicha figura aparece el variograma teórico y el modelo ajustado que se define como:

$$\gamma_Y(h) = 0.1 + \text{Gau}(.9)_{1400}$$

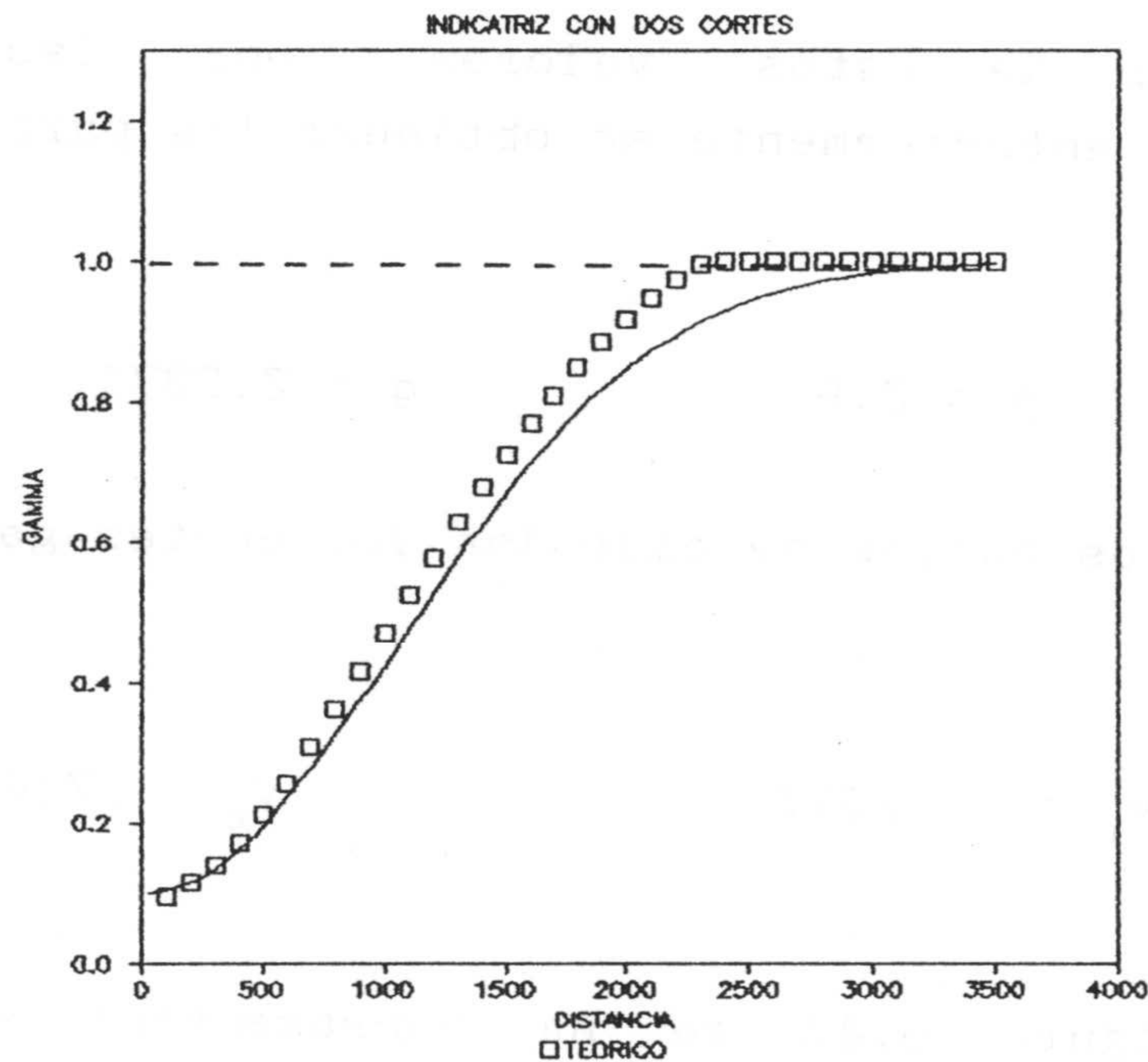


Figura 4.44. Variograma gaussiano teórico y modelo ajustado.

Se ha generado una realización de la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$ ,  $N(0,1)$ , imponiendo el modelo de variograma anterior. Se ha simulado una malla de 64 x 64 puntos dispuestos a paso regular de 250 m. La media de la simulación ha sido de .157 y la varianza de .975.

Los valores experimentales obtenidos han sido:

Media

$$m_I = 1.137$$

Varianza

$$\sigma_I^2 = .318$$

A partir de estos valores, por las relaciones desarrolladas anteriormente se obtienen los parámetros  $p$  y  $q$ :

$$p = 0.9$$

$$q = 0.2374$$

a partir de los cuales se calculan los cortes gaussianos:

$$y_1 = -1.2817$$

$$y_2 = .7144$$

En la figura 6.43 se ha representado el variograma experimental de la función y el modelo teórico ajustado, el cual responde a la ecuación:

$$\gamma_I(h) = .05 + \text{Sph}(.27)_{2800}$$

El variograma gaussiano que hay que imponer a la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$  se obtiene a través de la relación que he desarrollado anteriormente y que, para el ejemplo



propuesto, se ha representado en la figura 4.44. En dicha figura aparece el variograma teórico y el modelo ajustado que se define como:

$$\gamma_Y(h) = 0.1 + \text{Gau}(.9)_{1400}$$

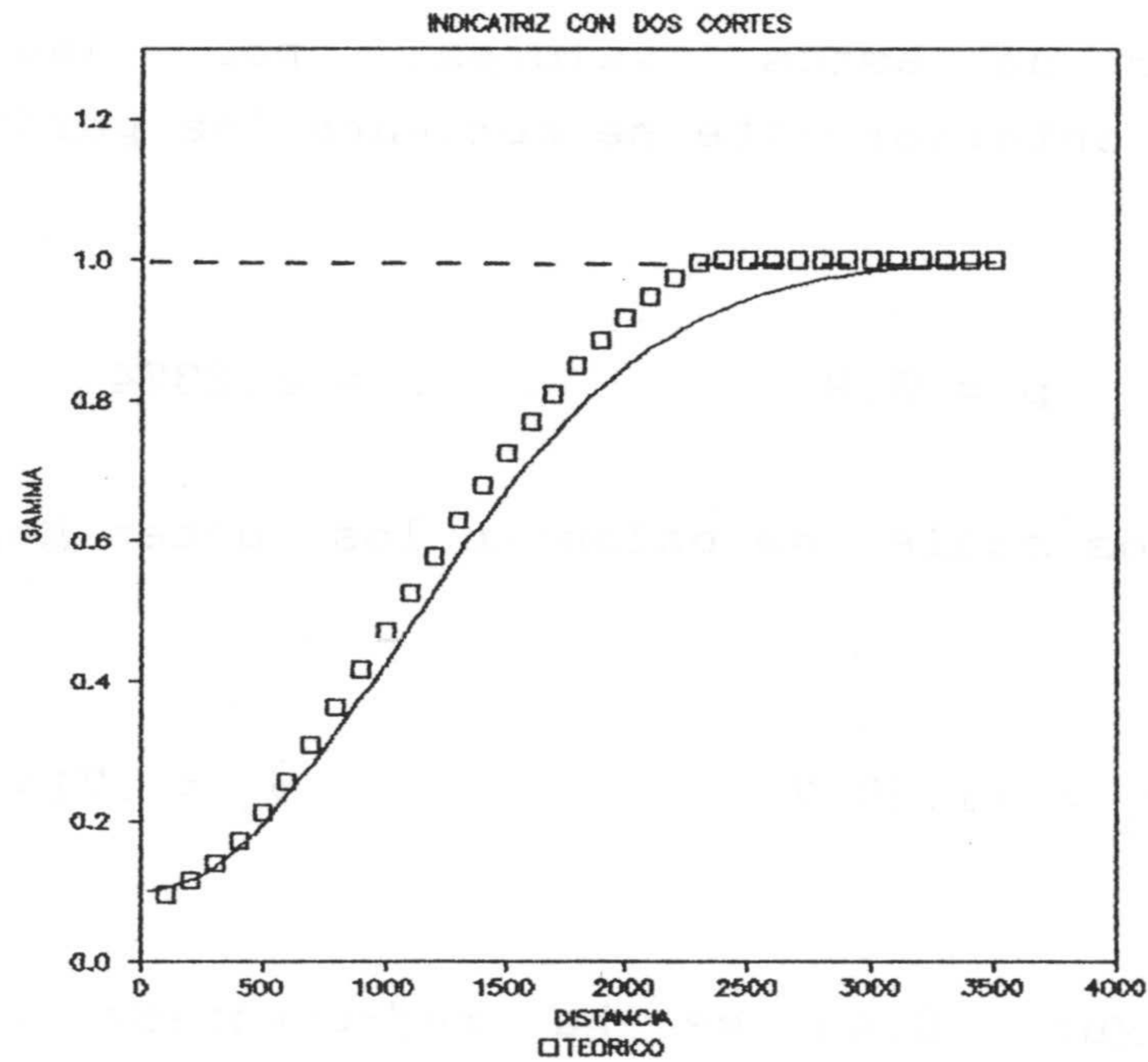


Figura 4.44. Variograma gaussiano teórico y modelo ajustado.

Se ha generado una realización de la función aleatoria gaussiana  $Y(x)$ ,  $N(0,1)$ , imponiendo el modelo de variograma anterior. Se ha simulado una malla de 64 x 64 puntos dispuestos a paso regular de 250 m. La media de la simulación ha sido de .157 y la varianza de .975.

Aplicando sobre la realización gaussiana los cortes gaussianos previamente calculados se obtiene una realización de la función aleatoria indicadora con los siguientes estadísticos:

Media

$$m_I = 1.210$$

Varianza

$$\sigma_I^2 = .305$$

Valores próximos a sus correspondientes valores teóricos. Estas ligeras diferencias eran de esperar por la mera fluctuación estadística y porque la función indicadora se calculó sobre la realización  $N(.157, .975)$ , esto es, sin normalizar a  $N(0, 1)$ . La diferencia entre la varianza gaussiana teórica y simulada es de un 2.5 %, mientras la diferencia entre la varianza de la indicatriz experimental y simulada es de un 4.4 %, por lo que ambas son aceptables.

La figura 4.45a muestra un ejemplo de la cartografía de la realización donde la ausencia de símbolo indica valores inferiores a 6 m, el cuadrado blanco  $\square$  denota valores comprendidos entre los 6 y los 16 m, y el cuadrado negro  $\blacksquare$  representa los valores mayores a 16 m.

La figura 4.45b recoge el modelo de variograma teórico de la función indicatriz y los diferentes variogramas direccionales de la realización simulada. La correspondencia entre valores teóricos y simulados es aceptable.



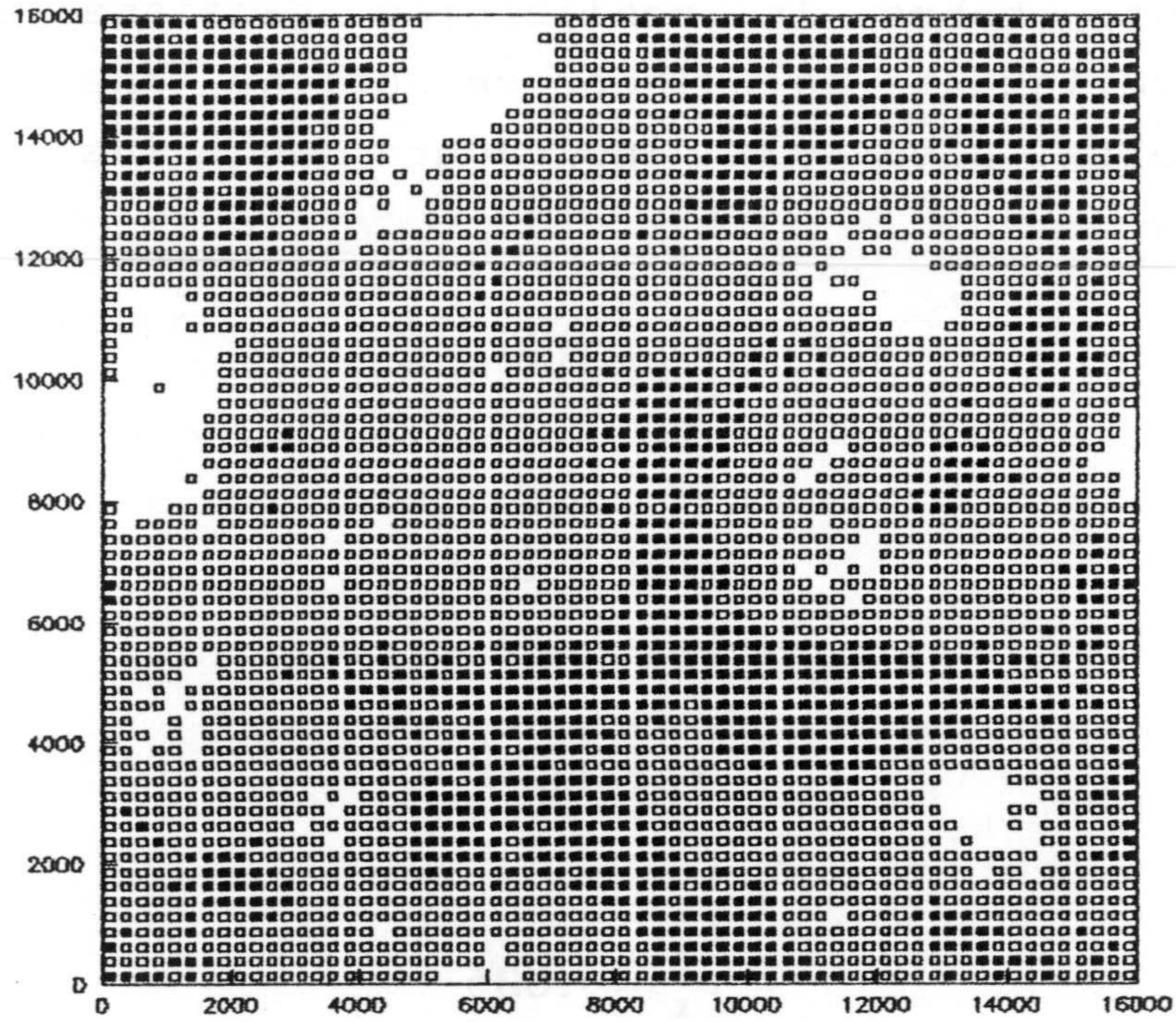


Figura 4.45a Ejemplo de una realización de la indicatriz de tres valores.

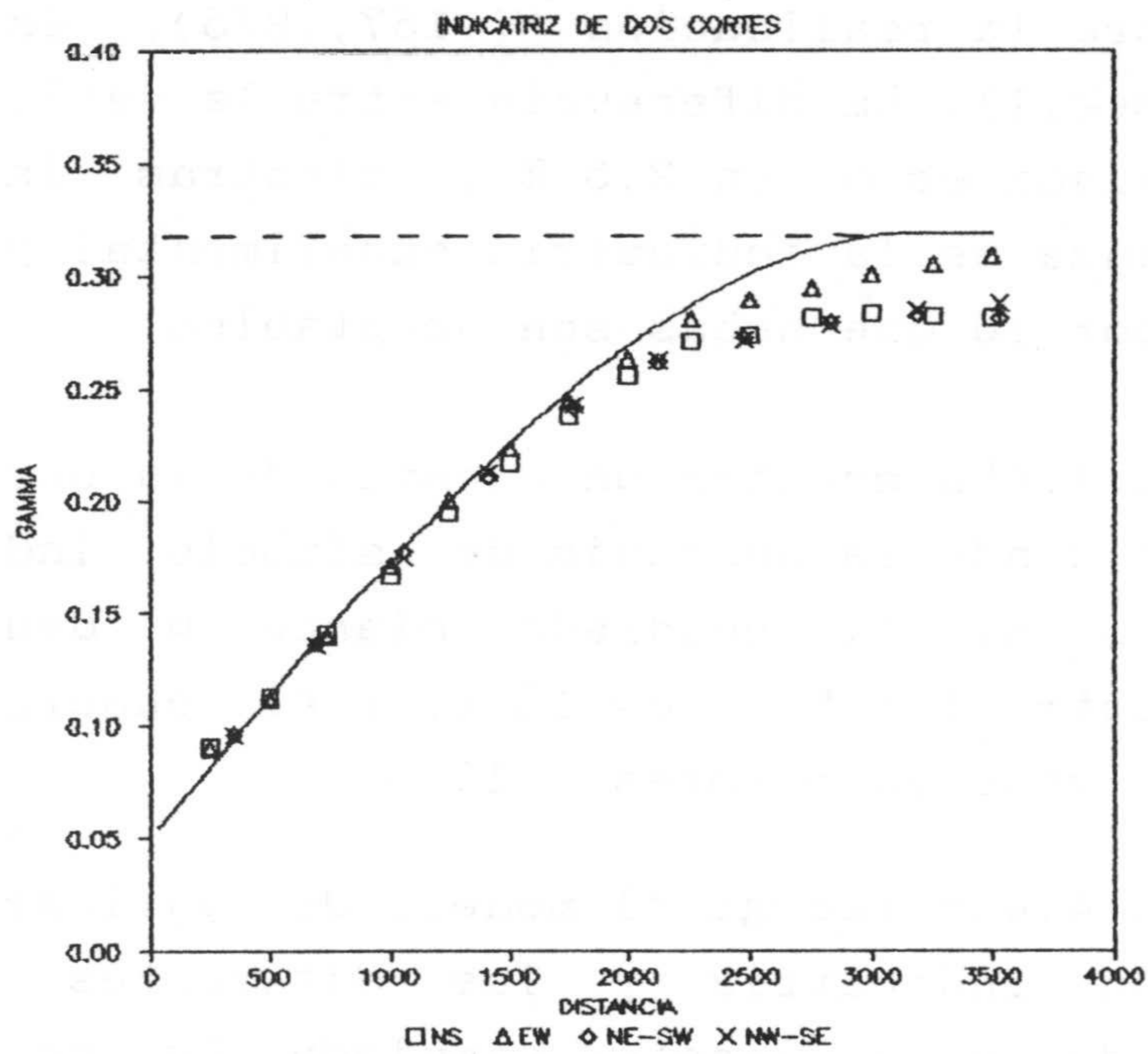


Figura 4.45b. Modelo teórico de variograma de la función indicatriz y variogramas simulados.



CAPITULO V  
CONDICIONAMIENTO Y RESTITUCION  
DE LOS VALORES SIMULADOS

1. CONDICIONAMIENTO DEL MODELO

1.1. Introducción

El número de realizaciones posibles  $\{z(x)\}$  "simulaciones" de una función aleatoria  $Z(x)$  que cumplen la condición de ser isomorfas (igual media, varianza y variograma) a la realización experimental, es infinito.

En el proceso de condicionamiento lo que se pretende es escoger entre todas ellas, aquellas que "pasan" por los puntos experimentales. El paso de la simulación no condicional a la simulación condicional, consiste en efectuar una serie de operaciones sobre el modelo no condicional con el fin de conseguir que, en los puntos experimentales, el valor simulado coincida con el valor experimental; de este modo el modelo en los puntos experimentales cumple:

$$y_{sc}(x_i) = y(x_i) \quad \forall x_i \in \text{Información}$$

Con ello, de las infinitas realizaciones de la función aleatoria  $Z(x)$  sólo interesan aquellas que pasan por los puntos experimentales.

El condicionamiento dota de mayor robustez al modelo



numérico de una variable geológica con respecto a especificaciones que no están explícitamente modeladas en la función aleatoria  $Z(x)$ , como pueden ser:

1) Se puede conseguir calar una deriva local a pesar de trabajar en base a un modelo estacionario.

2) Asimismo se pueden reflejar clusters de zonas ricas y pobres.

### 1.2. Condicionamiento por kriging

El método de estimación de kriging proporciona un procedimiento sencillo y eficiente para llevar a cabo el proceso de condicionamiento.

Se parte de la relación trivial:

$$Y(x) = Y^*(x) + [Y(x) - Y^*(x)]$$

$$\text{Realidad} = \text{Estimación} + \text{Error}$$

donde:

$Y(x)$  : realidad (desconocida).

$Y^*(x)$  : estimación por kriging.

$[Y(x) - Y^*(x)] = \varepsilon(x)$  error de kriging (desconocido).

Como propiedad característica del kriging se tiene que el error de kriging  $\varepsilon(x)$  es ortogonal al valor estimado (JOURNAL y HUIJBREGTS, 1978):

$$E\{Y^*(x) \varepsilon(x)\} = 0$$

y a los valores experimentales (PAPOULIS, 1984):

$$E\{Y(x) \varepsilon(x)\} = 0$$

Para obtener una simulación condicional de la función aleatoria  $Y(x)$  es suficiente con añadir a la estimación por krigeaje  $Y^*(x)$  una realización cualquiera del error  $\varepsilon_s(x)$  independiente de  $Y^*(x)$  e isomorfo al error verdadero  $\varepsilon(x)$ .

En particular puede expresarse:

$$\varepsilon_s(x) = [Y_s(x) - Y_s^*(x)]$$

donde:

$Y_s(x)$  : función aleatoria obtenida por simulación no condicional isomorfa a  $Y(x)$ .

$Y_s^*(x)$  : estimación por krigeaje de la función aleatoria simulada.

Los errores  $\varepsilon(x)$  y  $\varepsilon_s(x)$  son isomorfos ya que al ser el krigeaje un método de estimación insesgado se tiene que:

$$E\{\varepsilon(x)\} = E\{\varepsilon_s(x)\} = 0$$

Por otra parte, como el error de krigeaje es función de la estructura de variabilidad de la función aleatoria, la cual es la misma para  $Y(x)$  e  $Y_s(x)$  se cumple que:



$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon_s}^2$$

las varianzas del error de estimación son coincidentes.

Además los errores de krigeaje no están correlacionados:

$$\text{Cov}(\varepsilon(x+h), \varepsilon(x)) = E\{\varepsilon(x+h) \varepsilon(x)\} - E\{\varepsilon(x+h)\} E\{\varepsilon(x)\} =$$

$$E\{[Y(x+h) - Y^*(x)]\varepsilon(x)\} = E\{Y(x+h)\varepsilon(x)\} - E\{Y^*(x+h)\varepsilon(x)\} = 0$$

Tampoco está correlacionado el error de estimación para la función aleatoria simulada.

Por consiguiente se llega a (JOURNAL y HUIJBREGTS, 1978):

$$Y_{sc}(x) = Y^*(x) + [Y_s(x) - Y_s^*(x)]$$

$$Y_{sc}(x) = Y_s(x) + [Y^*(x) - Y_s^*(x)]$$

Ya que las dos estimaciones se basan en la misma configuración de puntos y en el mismo modelo de variabilidad, los ponderadores son los mismos en ambos casos y puede por consiguiente escribirse:

$$y_{sc}(x) = y_s(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i [y(x_i) - y_s(x_i)]$$

$y_{sc}(x)$  : realización condicional.

$y_s(x)$  : valor simulado no condicional.

$\lambda_i$  : ponderadores de krigeaje.

$y(x_i)$  : valores experimentales.

$y_s(x_i)$  : valores simulados no condicionales en las localizaciones experimentales.

De modo que la simulación condicional se obtiene añadiendo a la simulación no condicional los valores obtenidos por krigeaje de las diferencias entre valores reales y simulados en las localizaciones experimentales.

Por consiguiente por ser el krigeaje un método de estimación exacto se tiene que, en los puntos experimentales  $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$  se cumple que:

$$y^*(x_i) = y(x_i)$$

$$y_s^*(x_i) = y_s(x_i)$$

Y, por consiguiente:

$$y_{sc}(x_i) = y_s(x_i) + [y(x_i) - y_s(x_i)] = y(x_i)$$



En los puntos experimentales el valor simulado coincide con el valor experimental, esto es, el modelo numérico simulado pasa por los puntos experimentales.

En el proceso de estimación por krigeaje intervienen cuatro aspectos principales:

- 1). Tipo de krigeaje que se utiliza: simple, ordinario, universal, FAIK, cokrigeaje, ...
- 2). Elección de los puntos de apoyo en la estimación; pudiéndose distinguir el enfoque global del enfoque local.
- 3). Modelo de variabilidad o correlación que se utiliza.
- 4). Soporte de la información experimental y soporte de la simulación.

El tercer punto no presenta opción al análisis ya que el modelo de variabilidad que se utiliza para el krigeaje de la función aleatoria simulada  $Y_s^*(x)$  es el modelo impuesto en la generación de  $Y_s(x)$ , que es el mismo que se utiliza en el krigeaje de la función aleatoria  $Y^*(x)$ . La única diferencia se puede encontrar en el condicionamiento en el marco de la simulación de la función indicatriz como se analizará posteriormente.

Por otra parte, independientemente de la modalidad de krigeaje empleada, de si se hace uso del enfoque global o local del condicionamiento, del modelo de correlación espacial, y siempre y cuando el soporte de la información experimental sea el mismo al soporte de los valores simulados, se cumple que, en los puntos experimentales, valor experimental y valor simulado son coincidentes.

Es por ello que el análisis de los factores anteriores



influyen primordialmente en la continuidad de la realización condicionada. Desde un punto de vista estadístico si se producen discontinuidades se reflejan en la estructura de variabilidad espacial del modelo condicional. Se ha de verificar que el variograma de la realización condicionada reproduce el variograma que se impuso a la realización.

En primer lugar voy analizar el efecto del condicionamiento en función de la modalidad de krigeaje que se emplee.

Para el caso general de una función aleatoria estacionaria de segundo orden, los dos tipos de krigeaje más frecuentemente utilizados son el Krigeaje Simple y el Krigeaje Ordinario, MATHERON (1970), JOURNAL y HUIJBREGTS, 1978.

En el formalismo del krigeaje simple se considera que la esperanza matemática de la función aleatoria es nula o conocida y constante en todo el campo, siendo  $C(h)$  la función de covarianza.

$$\text{Esperanza nula } E\{Y(x)\} = 0$$

Las ecuaciones de krigeaje quedan, JOURNAL y HUIJBREGTS, 1978:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) = C(x_i, x_0) \quad ; \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

con el error de estimación:



$$\sigma_k^2 = C(x_0, x_0) - \sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_0)$$

Si la esperanza matemática no es nula pero si conocida:

$$E\{Y(x)\} = m$$

Se llega a las mismas ecuaciones anteriores formándose el estimador óptimo:

$$y^*(x) = m + \sum_{i=1}^N \lambda_i [y(x_i) - m]$$

En la opción de kriging ordinario se supone que la esperanza de la función aleatoria estacionaria es desconocida.

El sistema de ecuaciones de kriging queda:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) = C(x_i, x_0) + \mu \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$$

Con el error de estimación:

$$\sigma_k^2 = C(x_o, x_o) - \sum_{i=1}^N \lambda_i C(x_i, x_o) + \mu$$

Frecuentemente, en la práctica, la hipótesis de media conocida y constante en todo el campo es demasiado fuerte, por lo que es preferible el kriging ordinario bajo la hipótesis de estacionaridad local en las vecindades de kriging, lo cual permite desvíos de la estacionaridad global de la media.

El condicionamiento se efectúa sobre una función aleatoria gaussiana  $Y_s(x)$  utilizando como puntos de apoyo valores experimentales gaussianos  $\{y(x_i), i = 1, \dots, N\}$  por consiguiente de media conocida y nula:

$$E\{Y(x)\} = E\{Y_s(x)\} = 0$$

Por consiguiente también puede ocurrir que, si bien la función aleatoria es estacionaria a escala global, no se cumpla la hipótesis de estacionaridad local si los puntos de apoyo del condicionamiento pertenecen, por ejemplo, a un cluster de valores superiores o inferiores a la media.

Por tanto el análisis del efecto del método de kriging se ha de analizar conjuntamente al modo en que se toman los puntos condicionantes, lo que entronca directamente con el enfoque global y local del condicionamiento.

El enfoque global tiene la particularidad de que en el condicionamiento de cada valor simulado intervienen todos los puntos experimentales.



En el enfoque local se toma una vecindad de puntos condicionantes que se puede determinar de dos maneras:

1). Considerar un número de puntos condicionantes fijo  $n$ . Se toman los  $n$  puntos experimentales más próximos al punto a ser condicionado, independientemente de su disposición espacial.

2). Tomar como puntos condicionantes los  $m$  puntos que se encuentran en el interior de un área alrededor del punto a condicionar. En dos dimensiones, el área de búsqueda tiene forma elíptica o circular dependiendo de la existencia o no de anisotropías geométricas en la variable.

Si la disposición de los puntos experimentales es regular, tomando convenientemente el número de puntos del primer método o el área en el segundo, se consiguen configuraciones de kriging similares.

Si por contra, la disposición de los puntos experimentales es irregular, es preferible fijar una vecindad de búsqueda con restricciones tales como número de puntos mínimo y máximo admitido, dividir el área en cuadrantes, etc.

Resulta particularmente aconsejable al condicionar puntos simulados adyacentes, que se solapen las vecindades de búsqueda, es decir han de tener valores condicionantes comunes, ello en orden a que no se produzcan discontinuidades.

Es difícil dar directrices específicas sobre el modo de proceder, cada caso práctico particular requiere un plan de kriging determinado en función de la información experimental y de la malla simulada.

A fin de trazar directrices generales que se pueden obtener de resultados empíricos, voy a mostrar seguidamente un ejemplo de condicionamiento unidimensional. La información



experimental está constituida por 50 valores experimentales que constituyen 50 medidas puntuales del nivel piezométrico con un intervalo de muestreo de una semana durante un período de una año (faltan los datos de las semanas quinta y sexta).

Se trabaja con los valores gaussianos equivalentes a los valores reales, calculando el variograma experimental y ajustando un modelo que se expresa por la ecuación (figura 5.1):

$$\gamma(h) = Sph(1.)_{36}$$

modelo esférico de meseta unidad y alcance 36 días.

Se ha efectuado la simulación puntual de 365 valores que representan 365 valores puntuales espaciados por un intervalo de tiempo de 24 horas. El variograma de la simulación de recoge asimismo en la figura 5.1. La tabla V.1 registra los estadísticos experimentales gaussianos y de la realización aleatoria generada por el método de la transformada de Fourier unidimensional.

Se efectua el condicionamiento de la simulación no condicional con respecto a los valores experimentales considerando diferentes estrategias de krigeaje. En particular se varía el número de puntos de la vecindad, que en el enfoque local es de 2 ó 10 y en el enfoque global los 50 valores experimentales; asimismo, se repite el condicionamiento utilizando krigeaje simple y ordinario. En la tabla V.2 aparecen resumidos los estadísticos de la simulación condicional.



		Experimental	Simulación
MEDIA	$\bar{x}$	.0032	.1295
VARIANZA	$\sigma^2$	.8731	.8754
MINIMO	$m$	-2.062	-1.547
MAXIMO	$M$	2.062	3.572

Tabla V.1. Estadísticos elementales gaussianos y simulación.

	K.S.2	K.S.10	K.S.50	K.O.2	K.O.10	K.O.50
$\bar{x}$	.0035	.0114	.0097	.0097	.0059	.0093
$\sigma^2$	.9611	.9696	.9673	.9666	.9840	.9672
$m$	-2.239	-2.243	-2.246	-2.240	-2.249	-2.246
$M$	2.189	2.190	2.182	2.191	2.201	2.182

Tabla V.2. Estadísticos de la realización condicionada.

K.S. : krigeaje simple.

K.O. : Krigeaje ordinario.

2 : enfoque local con 2 puntos de apoyo.

10 : " " " 10 " " "

50 : " global.

$\bar{x}$  : media.

$\sigma^2$  : varianza.

$m$  : mínimo.

$M$  : máximo.

Las consideraciones que a continuación se detallan se refieren a este caso particular y no pueden generalizarse a

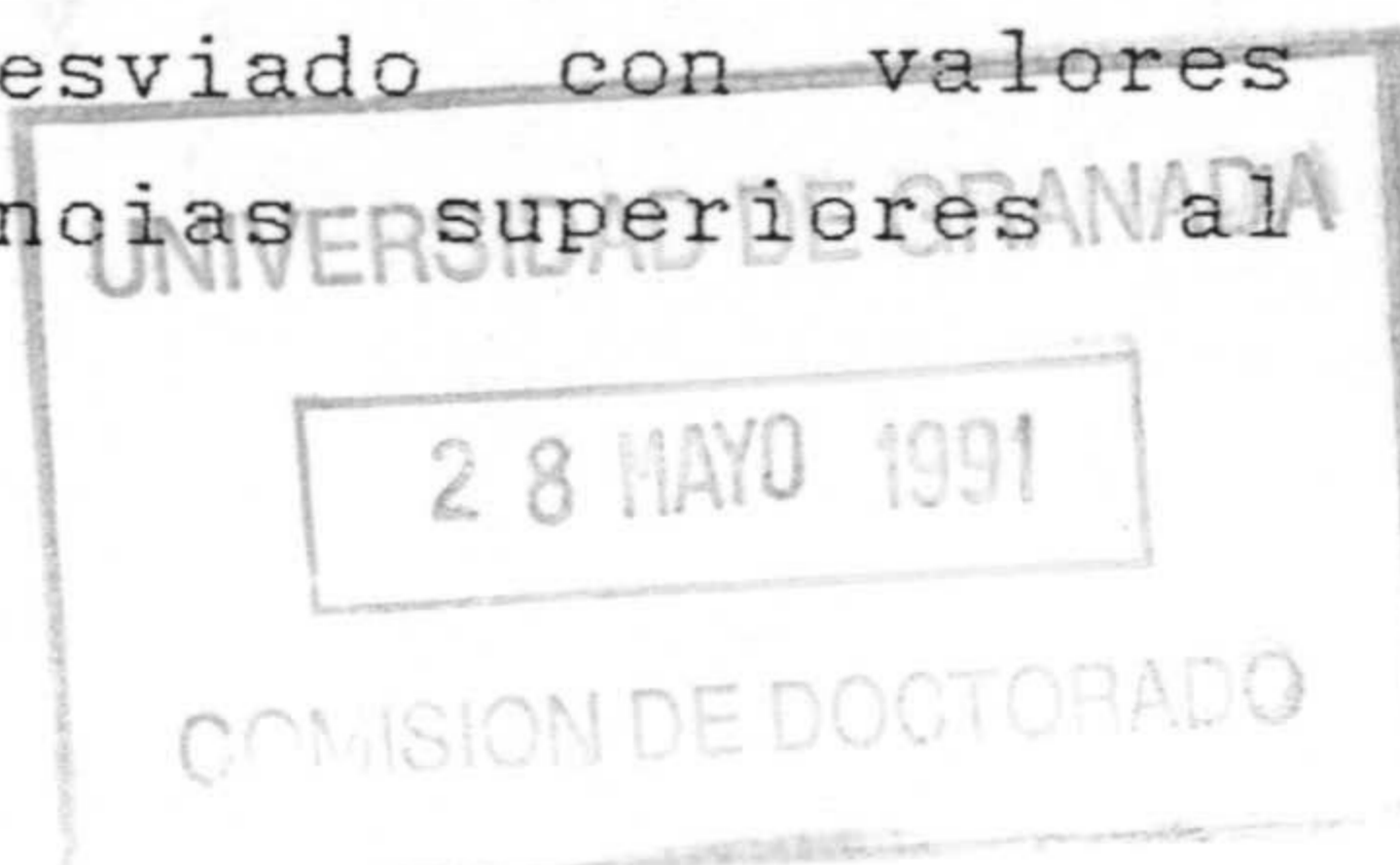


otros casos, aunque si se desprenden algunas generalidades interesantes. Par ello se va a analizar el efecto que el condicionamiento tiene sobre la función de distribución de los valores simulados y en segundo lugar los efectos del condicionamiento sobre la estructura de variabilidad de la simulación.

1). Efectos sobre la distribución. Observando los estadísticos de la tabla V.2 y comparándolos con los de la tabla V.1 se observa como el condicionamiento tiende a simetrizar y a centrar la distribución gaussiana, siendo válido para todos los planes de krigeaje examinados. La media pasa de un valor de .1295 a un valor más próximo a cero y la varianza aumenta de .8754 hasta un valor superior a .96, más próximo al valor teórico unidad. El máximo de la simulación no condicional es de 3.57 y el mínimo de -1.54 indicando un ligero sesgo positivo; posteriormente al condicionamiento la distribución es más simétrica tendiendo a ser coincidentes, en valor absoluto, máximo y mínimo en torno a 2.2 y -2.2.

2). Efectos sobre la estructura de variabilidad. En la figura V.1 se ha representado el variograma experimental gaussiano, modelo teórico ajustado, variograma de la realización no condicionada y variograma para la realización condicionada en dos casos, krigeaje ordinario con enfoque local y dos puntos de apoyo, y krigeaje simple con enfoque global.

Se observa como los dos últimos variogramas son coincidentes y lo mismo ocurre con los variogramas de las cuatro estrategias restantes (K.S.2, K.S.10, K.O.10, K.O.50). Por consiguiente, en este caso particular, la estrategia de krigeaje no afecta a los resultados obtenidos como se deduce de la figura 5.1. Comparando el variograma de la simulación no condicional con el modelo teórico objetivo puede observarse como para distancias inferiores al alcance el variograma simulado va ligeramente desviado con valores inferiores a los teóricos. Para distancias superiores al





alcance fluctua en torno a la meseta. El variograma obtenido posteriormente al condicionamiento se ajusta perfectamente al modelo teórico para distancias inferiores al alcance; y para distancias mayores al alcance, va ligeramente por encima de los correspondientes teóricos.

La normalización y simetrización de la distribución se refleja en obtener una variable más continua que sigue el modelo de variabilidad para distancias inferiores al alcance.

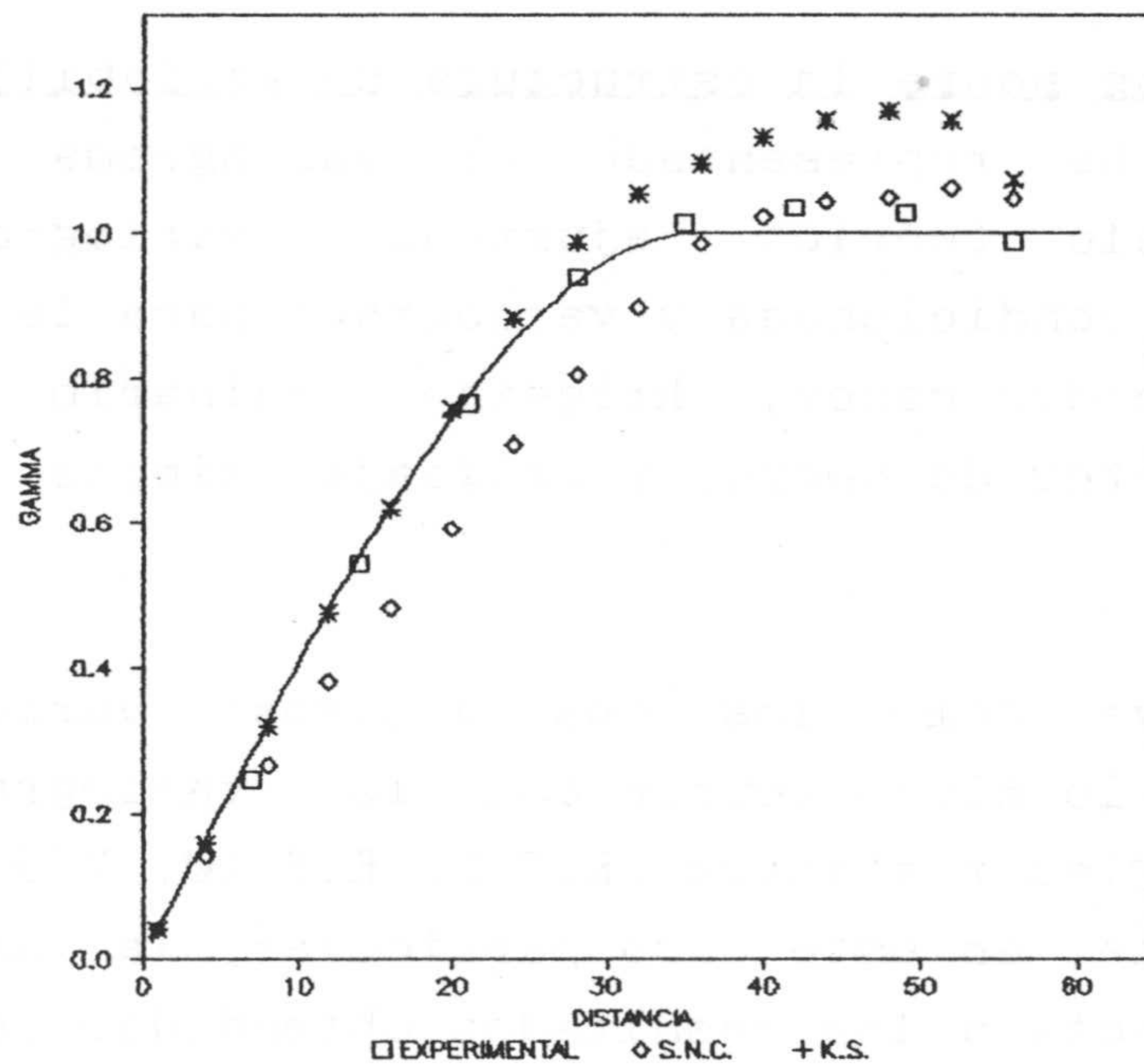


Figura 5.1. Variograma experimental, modelo teórico, variograma de la simulación no condicional y variogramas después del condicionamiento.

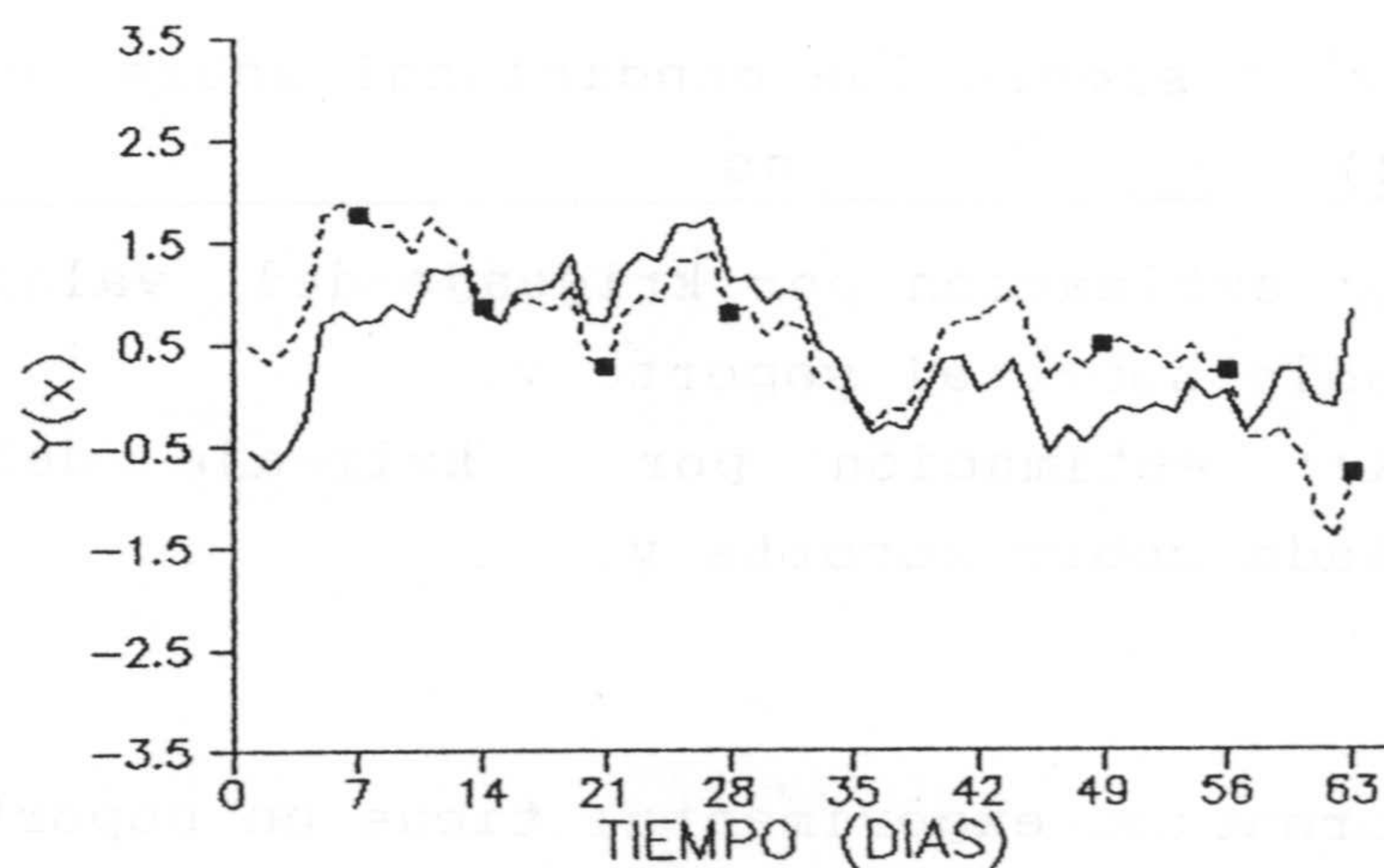


Figura 5.2. Valores experimentales (■), simulación no condicional (—) y simulación condicional (-----).

El proceso de condicionamiento que se ha venido considerando en los apartados anteriores es válido cuando el soporte de los puntos simulados y el soporte de la información experimental es el mismo, en el caso más general el soporte puntual.

Cuando el soporte de los valores simulados es diferente al de la información experimental, se han de efectuar unas consideraciones adicionales. El caso más frecuente en la práctica es que el soporte de la información experimental sea puntual y el soporte de los valores simulados sea un bloque v.

El condicionamiento toma la expresión:



$$y_{scv}(x) = y_{sv}(x) + [y_v^*(x) - y_{sv}^*(x)]$$

donde:

- $y_{scv}(x)$  : simulación condicional sobre soporte v.  
 $y_{sv}(x)$  : " " " " " v.  
 $y_v^*(x)$ : estimación por krigeaje del valor de la variable sobre el soporte v.  
 $y_{sv}^*(x)$ : estimación por krigeaje del valor simulado sobre soporte v.

Si la información experimental tiene un soporte puntual, los valores estimados se pueden calcular a partir de dicha información como:

$$y_v^*(x) = \sum_i \lambda_i y(x_i)$$

$$y_{sv}^*(x) = \sum_i \lambda_i y_s(x_i)$$

que no es sino la estimación sobre soporte bloque a partir de información puntual.

Los valores  $\{y_s(x_i); i = 1, \dots, N\}$  correspondientes a la simulación puntual en las localizaciones experimentales no pueden ser independientes de los valores simulados sobre soporte de bloque  $y_{sv}(x)$ , ambas realizaciones han de ser coherentes.



Para obviar este problema JOURNAL y HUIJBREGTS (1978) proponen una solución aproximada consistente en considerar la simulación sobre soporte bloque no a los valores experimentales sobre soporte puntual sino a unos nuevos valores contruidos sobre el soporte bloque y localizados en los mismos puntos a los valores experimentales.

En la referencia citada se propone construir esos nuevos valores como:

$$y'_v(x_i) = y_v^* + e_v$$

el valor estimado por krigeaje más un error que compense el suavizado de la estimación.

Esta aproximación sólo es válida si el tamaño del bloque es muy pequeño con respecto al espaciado entre puntos condicionantes; además altera la variabilidad espacial de los valores verdaderos sobre bloque  $v$ .

Existen otros modos de resolver este problema, en parte ya comentados al considerar la simulación de una función aleatoria sobre soporte no puntual. Los métodos espectrales que he propuesto proporcionan una metodología eficiente para la simulación conjunta de dos funciones aleatorias sobre diferente soporte, de modo que ambas sean coherentes, es decir, no independientes sino con la covarianza entre la función aleatoria puntual y la función aleatoria sobre soporte bloque.

Se ha podido apreciar que para efectuar el condicionamiento es necesario generar una realización no condicional del valor de la variable en los puntos experimentales coherente con la simulación no condicional en una malla regular, no teniendo porqué coincidir las



localizaciones experimentales con las localizaciones de simulación (figura 5.3).

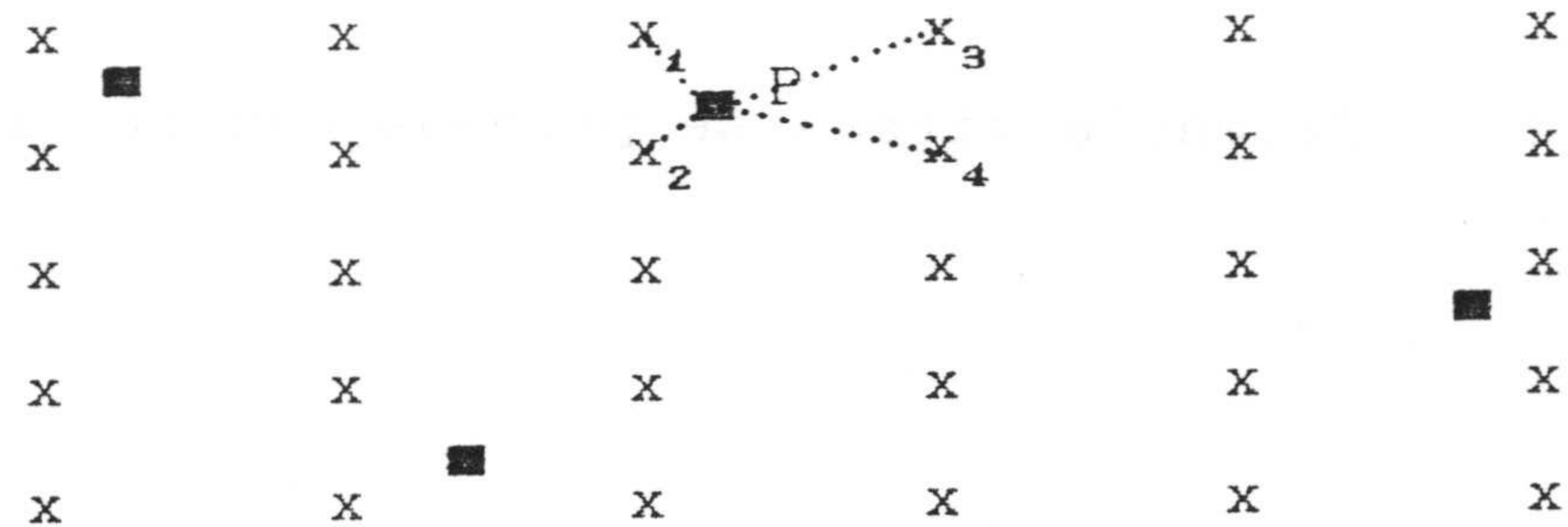


Figura 5.3. Valores experimentales (■) y valores simulados (x).

Métodos de simulación como el de las bandas rotantes permiten realizar esta operación de modo sencillo pues basta proyectar cada punto sobre las rectas para obtener la realización en dicho punto.

Determinados métodos espectrales como el de RICE(1954) también tienen esta facultad ya que se puede simular en puntos cualesquiera sin necesidad de estar localizados en una disposición regular.

Sin embargo, a diferencia de los métodos anteriores, el método de la integral de Fourier genera puntos dispuestos en una malla regular y sólo si los valores experimentales están dispuestos regularmente y con una interdistancia múltiplo de la interdistancia de simulación, o el azar, harán coincidir localizaciones experimentales y de simulación.

Por ello he propuesto un método muy sencillo que permite la generación de valores simulados en los puntos

experimentales coherentes con la simulación no condicional en una malla regular.

Para ello considerese un punto experimental P dispuesto entre el entramado de la malla de simulación pero no coincidente con ningún punto simulado (figura 5.3). Considerese asimismo los puntos simulados más próximos a P y que no son sino los cuatro puntos dispuestos en los vértices de la celdilla que contiene a P y que son  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ .

En base a la hipótesis intrínseca se cumple que:

$$E\{Z(x+h) - Z(x)\} = 0$$

$$\text{Var}\{Z(x+h) - Z(x)\} = 2\gamma(h)$$

Para P y los puntos de la celdilla suficientemente próximos a él se cumple que:

$$h_1 < h_2 < h_3 < h_4$$

$$\gamma(h_1) < \gamma(h_2) < \gamma(h_3) < \gamma(h_4)$$

$$\text{Var}\{y_s(x_1) - y_P\} = 2\gamma(h_1)$$

$$\text{Var}\{y_s(x_2) - y_P\} = 2\gamma(h_2)$$

$$\text{Var}\{y_s(x_3) - y_P\} = 2\gamma(h_3)$$



$$\text{Var}\{y_s(x_4) - y_P\} = 2\gamma(h_4)$$

Similares condiciones podría establecerse entre el valor simulado en P y los valores simulados en la malla experimental.

Es obvio que la condición más restrictiva en cuanto a la varianza de los incrementos es la referente al punto más cercano  $x_1$ .

Se va a simular el valor en el punto P como el valor del punto más cercano más una realización de una variable aleatoria  $\epsilon$ , de modo que se cumpla la especificación señalada para la varianza del incremento.

$$y_P = y(x_1) + \epsilon$$

$$\text{Var}\{y(x_1) - y_P\} = \text{Var}\{\epsilon\}$$

$$\text{Var}\{\epsilon\} = 2\gamma(h_1)$$

$$E\{\epsilon\} = 0$$

Una variable aleatoria uniforme en el intervalo  $[a,b]$  tiene por varianza:

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Si se impone  $a = -b$  para que su esperanza matemática sea nula y se hace la varianza igual a el variograma (varianza del incremento) se tiene que el valor de  $b$  ha de ser:

$$b = \sqrt{6 \gamma(h_1)}$$

Por consiguiente, una realización al azar del incremento  $\varepsilon$  acorde con la hipótesis intrínseca para el punto más cercano se generar en dos pasos:

1) Generar una realización  $u$  de la variable aleatoria uniforme  $U$  en el intervalo  $(0,1)$ .

2) Calcular el incremento como:

$$\varepsilon = (2u - 1) b$$

Es obvio que cuando un punto experimental coincide con una localización de simulación se tiene que  $h = 0$ ,  $\gamma(h) = 0$  y por consiguiente  $\varepsilon = 0$ .

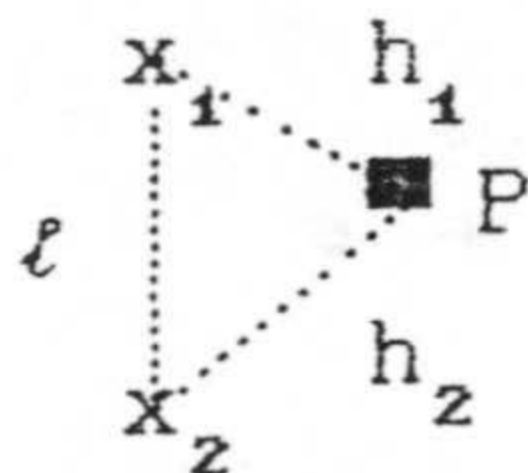


Figura 5.4. Relación del valor simulado y los puntos de la malla.



Relación de  $y_p$  con respecto a otro valor simulado en la malla regular (figura 5.4).

Por construcción:

$$E\{y(x_2) - y(x_1)\} = 0$$

Además:

$$E\{y(x_2) - y_p\} = E\{y(x_2) - y(x_1) - \varepsilon\} = 0$$

$$\text{Var}\{y(x_2) - y_p\} = \text{Var}\{y(x_2) - y(x_1)\} - \text{Var}\{\varepsilon\} =$$

$$2[\gamma(\ell) - \gamma(h_1)]$$

Que será una buena aproximación en tanto en cuanto:

$$\gamma(h_2) \cong \gamma(\ell) - \gamma(h_1)$$

En cuanto a la relación entre  $y_p$  con respecto a otro valor simulado por el mismo método en otra localización experimental (figura 5.5) se tiene que:

$$y_p = y(x_1) + \varepsilon$$

$$y_q = y(x_j) + \varepsilon_j$$

Se tiene que:

$$E\{y_p - y_q\} = E\{y(x_1) - y(x_j)\} + E\{\varepsilon\} - E\{\varepsilon_j\} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{y_p - y_q\} &= \text{Var}\{y(x_1) - y(x_j)\} + \text{Var}\{\varepsilon\} - \text{Var}\{\varepsilon_j\} = \\ &2 [\gamma(\ell) + \gamma(h_1) - \gamma(h_j)] \end{aligned}$$

lo cual será una buena aproximación en tanto en cuanto:

$$\gamma(h') \cong \gamma(\ell) + \gamma(h_1) - \gamma(h_j)$$

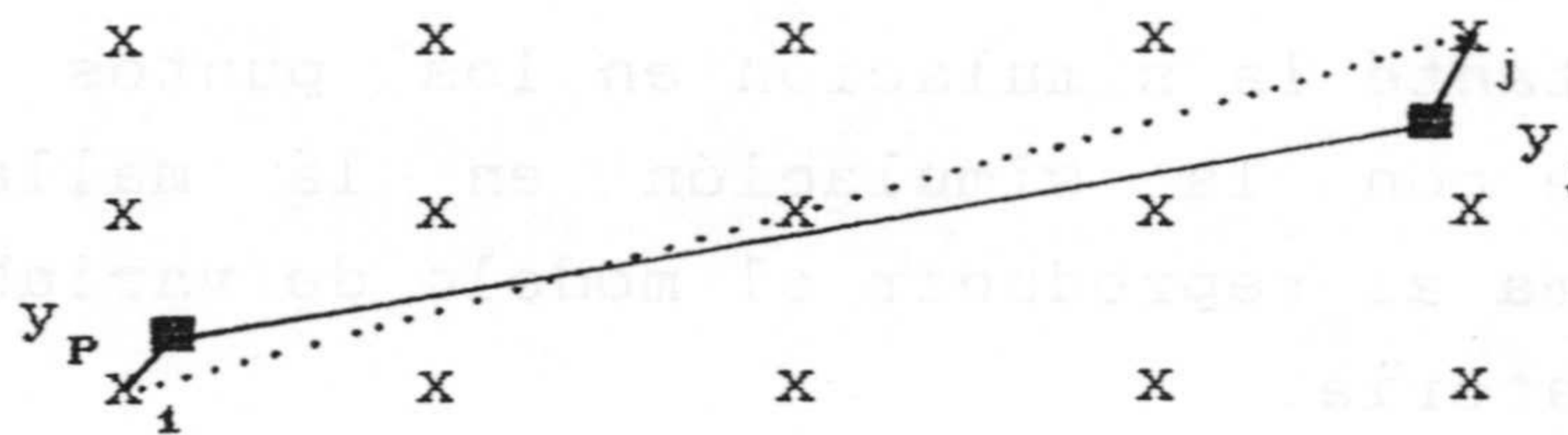


Figura 5.5. Relación entre valores simulados por el método propuesto.

En la práctica las situaciones más favorables para obtener resultados aceptables con el presente método son el aumento de la densidad de la malla de simulación con respecto al espaciado entre los valores experimentales.

Como ejemplo de aplicación se ha generado una



realización al azar de una función aleatoria con una función de variograma esférico de alcance 10 unidades y meseta unidad. Se ha simulado una malla de 32 x 32 puntos equiespaciados a distancia unidad.

Se implantan 100 localizaciones experimentales según una estrategia de muestreo aleatorio puro según se muestra en la figura 5.6. Dichos puntos con localización aleatoria hacen las veces de valores experimentales y en cada uno de ellos se va a simular un valor de acuerdo al método previamente propuesto de la variabilidad del punto más cercano.

En la figura 5.7 se muestran los resultados obtenidos. Se ha representado el modelo teórico de variograma, el variograma medio de la simulación en la malla regular, que se ajusta bien al modelo teórico, y el variograma medio de las localizaciones experimentales. Para el variograma medio en las localizaciones experimentales se observa un comportamiento típico en dientes de sierra fruto del número limitado de datos para realizar la inferencia y de su disposición irregular con clusters y zonas submuestreadas.

No obstante la simulación en los puntos experimentales es coherente con la simulación en la malla y coherente consigo misma al reproducir el modelo de variabilidad de la función aleatoria.

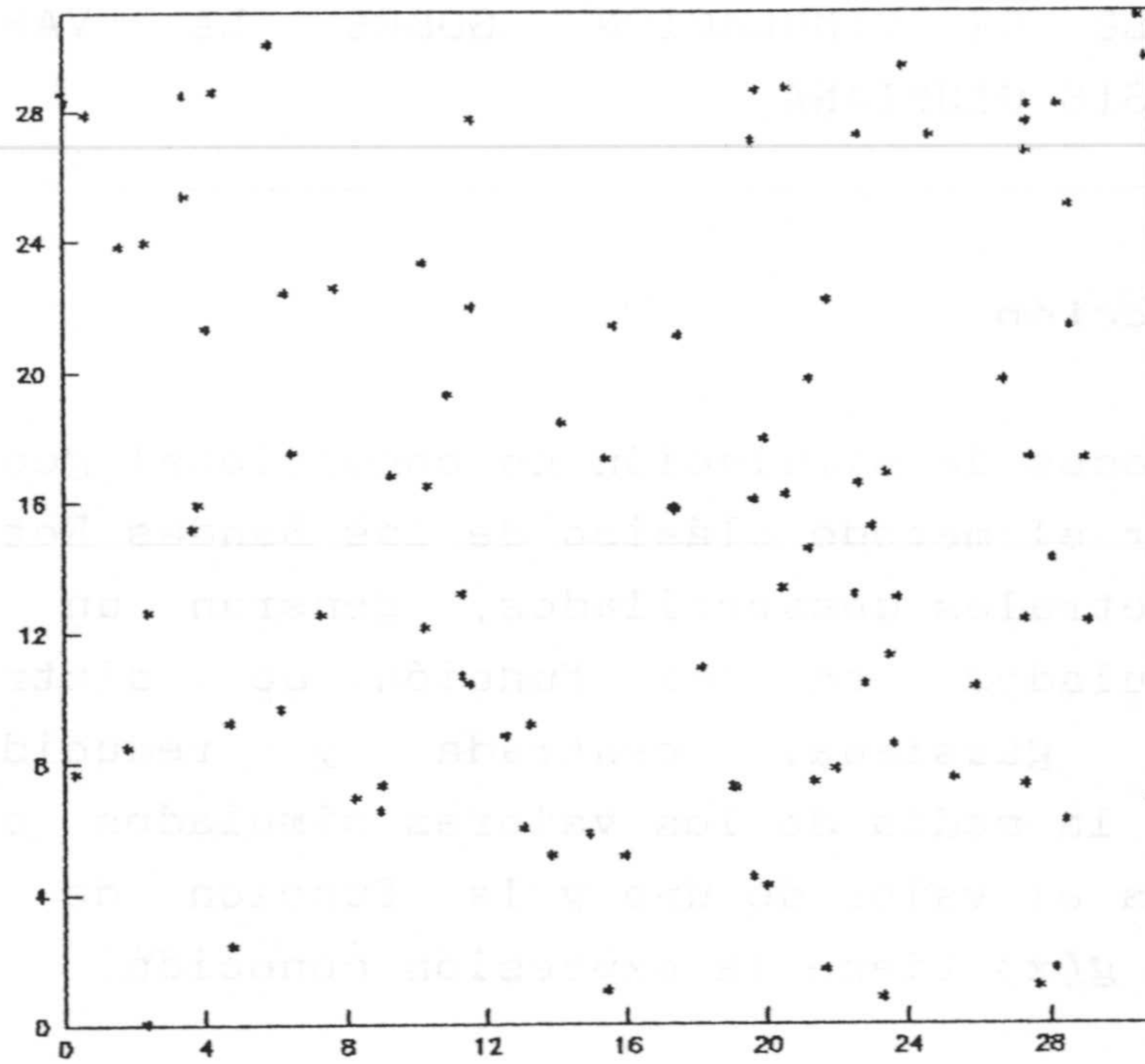


Figura 5.6. Localización de los valores experimentales según un muestreo aleatorio puro.

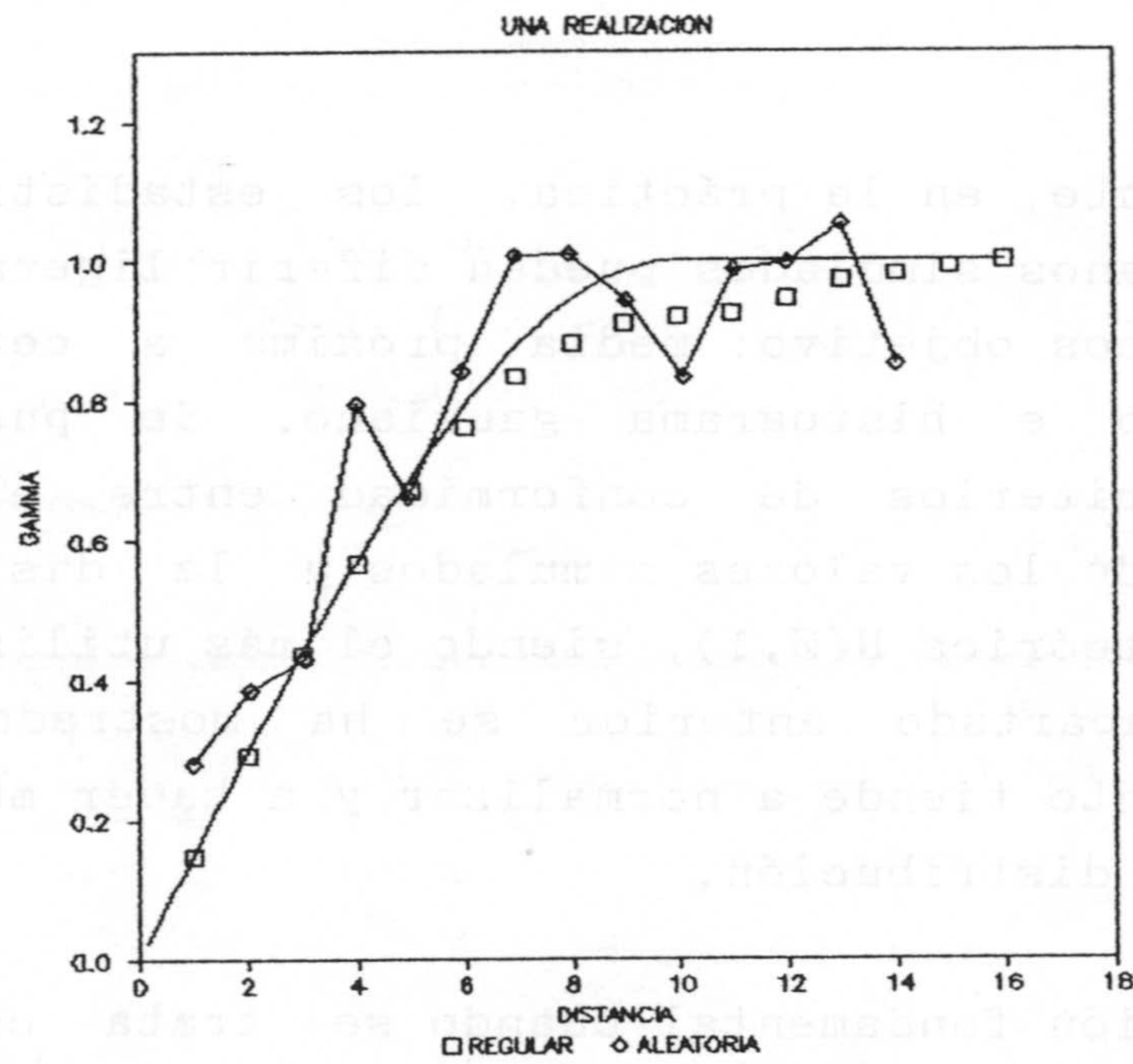


Figura 5.7. Variograma teórico, variograma simulado en la malla regular y variograma simulado en los puntos experimentales.



## 2. EL MODELO DE SIMULACION SOBRE LA VARIABLE REAL ANAMORFOSIS GAUSIANA

### 2.1. Introducción

Los métodos de simulación no condicional geoestadística, en particular el método clásico de las Bandas Rotantes o los métodos espectrales desarrollados, generan un conjunto de valores simulados con una función de distribución de probabilidad gaussiana, centrada y reducida  $N(0,1)$ . Teóricamente la media de los valores simulados es cero, la varianza toma el valor de uno y la función de densidad de probabilidad  $g(x)$  tiene la expresión conocida:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

No obstante, en la práctica, los estadísticos de los valores gaussianos simulados pueden diferir ligeramente de los valores teóricos objetivo; media próxima a cero, varianza cercana a uno e histograma gaussiano. Se pueden aplicar diferentes criterios de conformidad entre el variograma experimental de los valores simulados y la distribución de probabilidad teórica  $N(0,1)$ , siendo el más utilizado el test  $\chi^2$ . En el apartado anterior se ha mostrado como el condicionamiento tiende a normalizar y a hacer más simétrica la función de distribución.

La cuestión fundamental cuando se trata con variables geológicas reales, como leyes de mineral, potencia de una capa de carbón, contenidos geoquímicos, etc ... es que se desconoce su función de distribución de probabilidad teórica; ello debido a que, en general, no pueden determinarse



relaciones de tipo causa-efecto que impliquen que una determinada variable se distribuya de acuerdo a tal o cual distribución teórica. La experiencia en un elevado número de aplicaciones ha mostrado como determinadas variables parecen regirse por funciones de distribución concretas. Así por ejemplo, para variables geoquímicas y para leyes de metales preciosos como el oro, se suele adoptar una función de distribución de probabilidad lognormal.

Por otra parte, mientras que en una distribución gaussiana estandar, el 50 % de los valores son negativos y el 95 % de los valores está comprendido en el intervalo  $[-1.96, 1.96]$ , ocurre que para variables geológicas, en una gran mayoría de los casos, los valores negativos carecen de sentido y el rango de variación de los valores experimentales es completamente diferente.

Por todo ello se plantea el objetivo de transformar los datos simulados, con distribución gaussiana centrada reducida, en unidades reales y con el mismo histograma que la variable regionalizada; la función que establece dicha relación se conoce con el nombre de función de anamorfosis, *JOURNAL (1974,b), MARECHAL (1975,1978), JOURNAL y HUIJBREGTS (1978), CHICA-OLMO (1987)*.

$$G(y) \xrightarrow{\varphi(y)} F(z) \\ \xleftarrow{\varphi^{-1}(z)}$$

donde:

$G(y)$  : función de distribución  $N(0,1)$

$F(z)$  : " " " " experimental.

$\varphi(y)$  : función de anamorfosis directa.



La función de anamorfosis directa,  $\varphi(y)$ , asigna a cada valor con distribución  $N(0,1)$  un valor  $z$  con distribución experimental:

$$z = \varphi(y)$$

Y la función de anamorfosis inversa  $\varphi^{-1}(z)$ , hace corresponder a cada valor experimental un valor  $N(0,1)$ :

$$y = \varphi^{-1}(z)$$

En la práctica geoestadística se aplican dos tipos principales de función de anamorfosis, a saber, la anamorfosis gráfica y la anamorfosis hermitiana. Ambos tipos de anamorfosis se analizan en el presente capítulo. Previamente se estudiará la función de distribución de probabilidad experimental, imprescindible para modelar la función de anamorfosis.

## 2.2. Función de distribución de probabilidad experimental.

Como es conocido, el histograma de los valores experimentales es un estimador de la función de densidad de probabilidad de la variable; al igual que el histograma acumulado es una aproximación experimental a la función de distribución de probabilidad verdadera. En la práctica geoestadística, donde usualmente sólo se dispone de una realización de la función aleatoria de la cual sólo se conoce una información discreta, el histograma experimental se considera suficientemente representativo de la distribución espacial de la variable, sin necesidad de adoptar ninguna función de distribución teórica determinada.



Caso de adoptarse una distribución teórica, sería necesario estimar los parámetros de la función y efectuar diferentes tests de bondad de ajuste sobre el modelo de función de distribución y sobre los parámetros del modelo.

Para el cálculo del histograma relativo acumulado que se va a considerar como función de distribución experimental, no es conveniente agrupar los datos en clases ya que, si el número de datos es pequeño, lo cual ocurre con extrema frecuencia en la práctica, muchas de las clases estarían vacías.

El modo de proceder en estos casos es considerar los datos experimentales individualmente, ordenándolos, por ejemplo en orden creciente y asignándole a cada valor experimental  $z$  su función de distribución de probabilidad de acuerdo a la expresión:

$$F(z) = P\{Z < z\} = \frac{m}{N + 1}$$

donde:

$m$  : posición de  $z$  en la secuencia de valores ordenados.

$N$  : número total de valores experimentales.

$F(z)$  : valores de la función de distribución de probabilidad experimental.

Este método es independiente de los valores numéricos de los datos experimentales, dependiendo sólo del número de puntos experimentales  $N$ . En particular, si existen datos repetidos la fórmula anterior les asigna diferente



probabilidad cuando en realidad su probabilidad es la misma y, por el hecho de tener mayor frecuencia, dicha probabilidad es superior a la del resto de los valores. Esto no es óbice, sin embargo, para que sea el método más utilizado en la práctica.

*JOURNEL e ISAAKS (1984)* proponen que, cuando existen datos iguales, se ordenen de acuerdo al valor medio de los datos encontrados en la vecindad y centrado en la localización del dato que está siendo ordenado.

### 2.3. Anamorfosis gráfica

El fundamento de la anamorfosis gráfica se observa en la figura 5.8 (*JOURNEL, 1974 b, MARECHAL, 1975; CHICA-OLMO, 1987*).

El valor gaussiano  $y_k$  correspondiente al valor experimental  $z_k$  se calcula del siguiente modo:

1). Calcular  $F_z$ , valor experimental de la función de distribución de probabilidad  $z_k$  del modo comentado en el apartado anterior.

2). Conocido  $F_z$  el valor gaussiano que le corresponde se calcula por la función de Gauss inversa. Esta función ampliamente difundida utiliza la siguiente aproximación (*ABRAMOWITZ y STEGUN, 1965*):

$$y_k = G^{-1}(F_z) \quad ; \text{ con } F_z \leq 0.5$$

$$\text{Si } F_z > 0.5 \Rightarrow F_z = 1. - F_z$$

$$y_k = t - \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3}$$

$$a_0 = 2.51557$$

$$b_0 = 1.432788$$

$$a_1 = 0.802853$$

$$b_1 = 0.189269$$

$$a_2 = 0.010328$$

$$b_2 = 0.001308$$

3). Una vez obtenida la correspondencia entre valores experimentales  $\{z(x_i); i = 1, \dots, N\}$  y los valores gaussianos correspondientes  $\{y(x_i); i = 1, 2, \dots, N\}$  ya es posible efectuar la restitución de cualquier valor gaussiano a unidades reales por una simple interpolación lineal entre los valores inmediatos superior e inferior, esto es:

$$y_k < y_s < y_{k+1} \quad \Rightarrow \quad z_k < z_s < z_{k+1}$$

$$z_s = z_k + \frac{z_{k+1} - z_k}{y_{k+1} - y_k} (y_s - y_k)$$

$$y_s = y_i \quad \Rightarrow \quad z_s = z_i$$



La función de anamorfosis gráfica es no decreciente y se conoce de modo discretizado en un número finito de puntos que corresponden a los límites de clase del histograma experimental y, ya que dicho histograma se construye con un dato por clase, el número de puntos de discretización es igual al número de puntos experimentales.

Fuera del rango de valores experimentales no se conoce la función de anamorfosis por lo que es preciso modelizarla teóricamente.

El método que propongo lo denomino modelización gaussiana de las colas de la distribución y su fundamento es el que se expone a continuación.

Cuando la función de distribución de probabilidad de una función aleatoria es gaussiana, la función de anamorfosis es una línea recta con pendiente igual a la desviación típica  $\sigma$  y de intersección con el eje de ordenadas en la media  $m$ :

$$z = \varphi(y) = \sigma y + m$$

Considerando que:

$$P(y < -4.) = P(y > 4.) = 3.20 \cdot 10^{-5}$$

esto es que, desde un punto de vista estadístico, de cada 100000 valores simulados aproximadamente tres valores estarán fuera del rango gaussiano  $[-4.,4.]$  se puede considerar que:

$$z_{\text{mín}} = -4 \sigma + m$$

$$z_{\text{máx}} = 4 \sigma + m$$

Los modelos de cola son líneas rectas conectando el punto  $(-4, z_{\text{mín}})$  con  $(y_1, z_1)$  en la cola izquierda y el punto  $(4, z_{\text{máx}})$  con  $(y_n, z_n)$  en la cola derecha. De este modo se evita cualquier tipo de densidad artificial en las colas (figura 5.9).

Donde:

$z_1$  : mínimo experimental.

$z_2$  : máximo experimental.

$z_{\text{mín}}$  : mínimo teórico.

$z_{\text{máx}}$  : máximo teórico.

$y_1 = G^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$  : mínimo gaussiano experimental.

$y_n = G^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)$  : máximo gaussiano experimental.

-4. : mínimo gaussiano teórico.

4. : máximo gaussiano teórico.

En función del número de puntos simulados puede modificarse los límites gaussianos  $[-4,4]$ , ampliando los límites si se simulan más de 100000 valores o reduciendo si el número de puntos simulados es más pequeño.

Asimismo pudiera ocurrir que el valor:

$$z_{\text{mín}} = -a \sigma + m$$



(donde  $a$  es el valor gaussiano adoptado según el criterio anteriormente referido) tomase un valor no significativo, por ejemplo un valor negativo cuando la variable geológica en estudio sólo toma valores positivos, en este caso se adoptaría  $z_{\text{mín}} = 0.0$ .

Lo mismo puede decirse para el límite superior  $z_{\text{máx}}$ ; el valor del modelo puede suministrar un valor no realista para la variable tratada si por criterios geológicos se establece un límite superior, se adoptará  $z_{\text{máx}}$  como dicho límite.

Por ejemplo para la variable ley en plomo, parece lógico que  $z_{\text{máx}}$  no pueda ser mayor a 68 %, porcentaje en Pb de la galena pura, principal mena de dicho metal.

En la práctica cada caso es particular y se decidirá a partir de la inspección de los valores experimentales y del conocimiento geológico del problema.

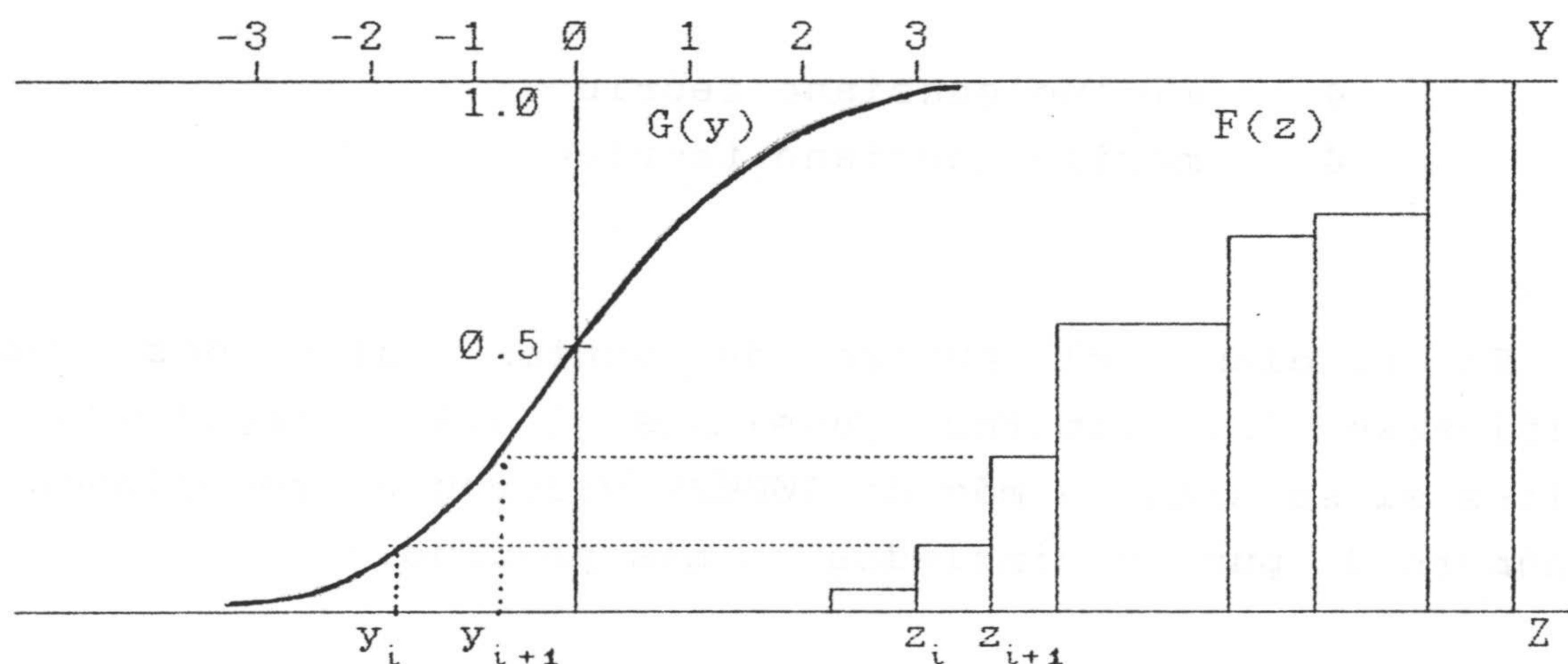


Figura 5.8. Función de anamorfosis gráfica.

#### 2.4. Función de anamorfosis hermitiana

La anamorfosis hermitiana consiste en la aproximación de la función de anamorfosis por mínimos cuadrados discreta ponderada mediante el uso de polinomios ortogonales de Hermite.

Los polinomios de Hermite se definen como derivadas de la densidad gaussiana, *JOURNEL y HUIJBREGTS (1978)*:

$$H_i(x) = \exp(x^2/2) \frac{d^i}{dx^i} \exp(-x^2/2)$$

presentando la particularidad de que son ortogonales a dicha función de densidad gaussiana  $g(x)$ , *CRAMER (1954)*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x) H_j(x) g(x) dx = i! \delta_{ij}$$

donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Se puede definir una base ortogonal considerando los polinomios de hermite estandarizados:

$$\eta_{ij}(x) = \frac{H_i(x)}{\sqrt{i!}}$$



para los cuales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_i \eta_j g(x) dx = \delta_{ij}$$

Si se cumple que:

$$E\{Z^2\} = E\{\varphi^2(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(y) g(y) dy < \infty$$

lo cual es cierto para cualquier variable geológica  $Z$  con varianza finita, la función  $\varphi(y)$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base hermitiana JOURNAL y HUIJBREGTS (1978):

$$\varphi(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i}{i!} H_i(y)$$

Para la media y la varianza de  $Z$  son válidas las relaciones:

$$E\{Z\} = m = \psi_0$$

$$\text{Var}\{Z\} = \sigma^2 z^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{i!}$$

Los coeficientes  $\psi$  están dados por la expresión:

$$\psi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) H_i(y) g(y) dy$$

para cuyo cálculo he utilizado el método de integración numérica de Hermite (ABRAMOWITZ y STEGUN, 1965):

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^J \varphi(v_j) w_j H_i(v_j) \exp(-v_j^2/2)$$

donde  $v_j$  y  $w_j$  son respectivamente las abscisas y los pesos utilizados en este método de integración numérica.

La función de anamorfosis hermitiana es continua y, en general, no decreciente, si bien en los extremos de la distribución puede presentar fuertes oscilaciones.

Aunque teóricamente la serie numérica que define la función de anamorfosis tiene infinitos términos, se toma un número términos  $n$  para el cual:



$$\sum_{i=1}^n \frac{\psi_i^2}{i!} = \sigma^2$$

es suficientemente próximo a la varianza requerida  $\sigma_z^2$ . La contribución de términos más altos ( $i > n$ ) tiende rápidamente a cero.

La anamorfosis gráfica presenta las ventajas de su simplicidad, restitución exacta de los valores experimentales y fácil adecuación, mediante corrección afín, a la restitución de valores gaussianos de la función aleatoria de valores medios sobre soporte no puntual.

La función de anamorfosis hermitiana es imprescindible para diferentes modelos geoestadísticos como el modelo gaussiano discreto (MATHERON, 1975) para determinar el coeficiente de cambio de soporte, la covarianza gaussiana sobre soporte bloque y la función de anamorfosis de bloque. El principal inconveniente son las fuertes oscilaciones de dicha función en las colas de la distribución y el hecho de que la restitución de los valores experimentales no es exacta (figura 5.10).

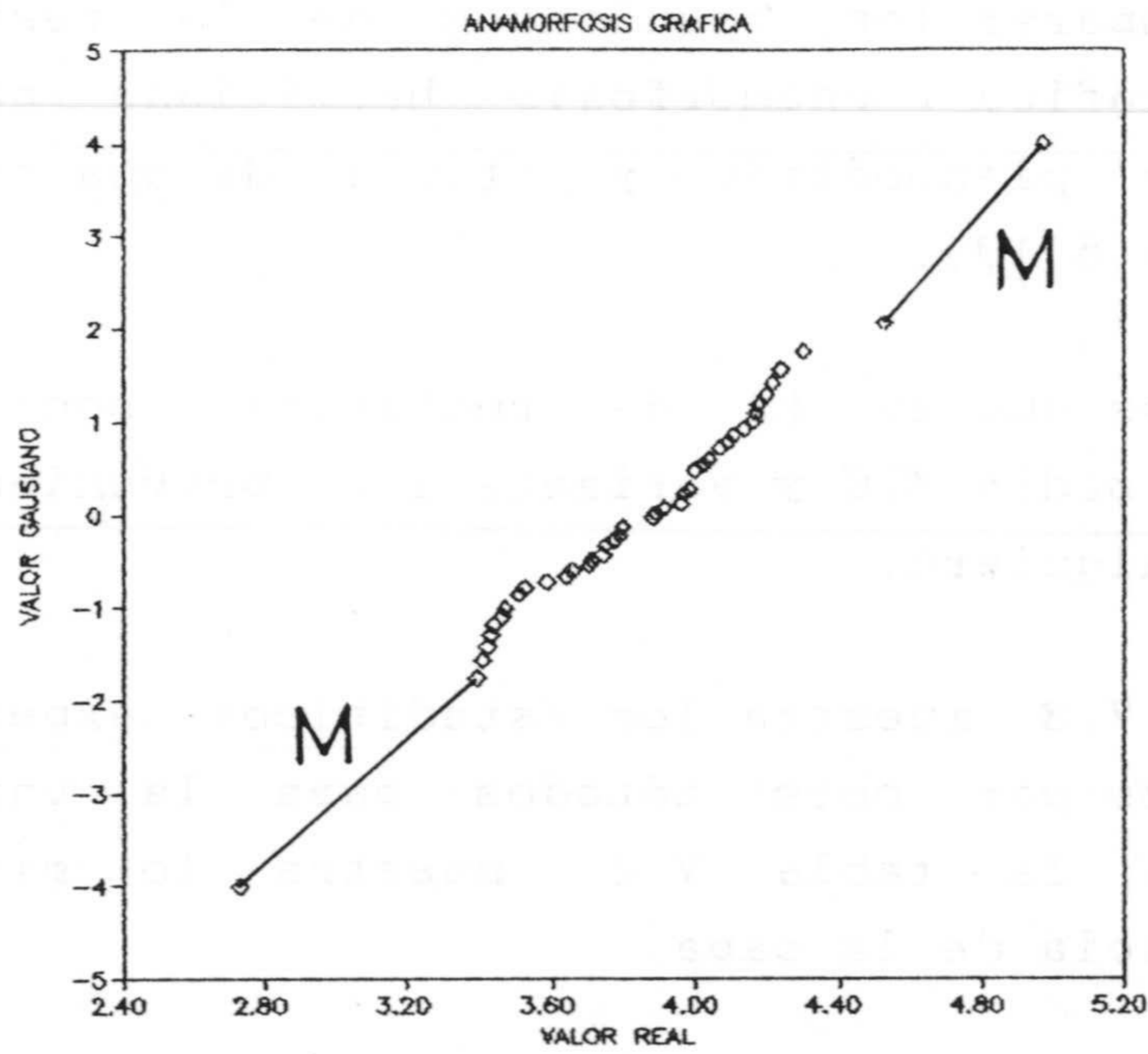


Figura 5.9. Anamorfosis gráfica para la variable nivel piezométrico, con modelos de colas gaussianas.

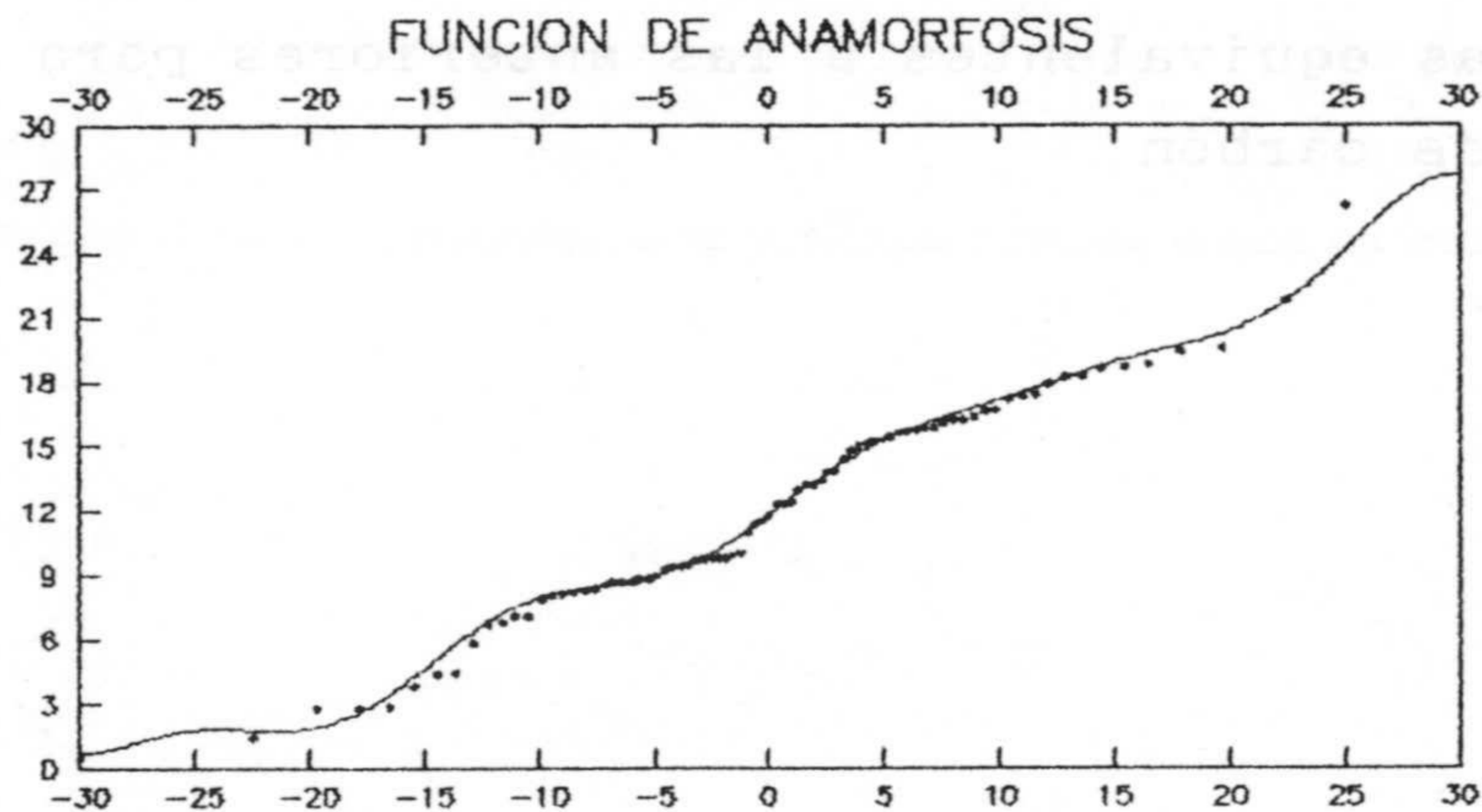


Figura 5.10. Comparación entre anamorfosis gráfica y hermitiana para la variable potencia.



Voy a comparar los resultados de la restitución por anamorfosis gráfica y anamorfosis hermitiana para los dos ejemplos: nivel piezométrico y potencia de una capa de carbón (figuras 5.9 y 5.10).

Los puntos que se ha de restituir son 500 valores gaussianos con media 0.0 y varianza 1.0 provenientes de una simulación cualquiera.

La tabla V.3. muestra los estadísticos experimentales y los restituidos por ambos métodos para la variable nivel piezométrico y la tabla V.4. muestra lo mismo para la variable potencia de la capa.

Para la restitución por anamorfosis hermitiana se han utilizado 30 polinomios, pudiéndose comprobar como cuando el número de polinomios era muy pequeño (3 polinomios) aunque los estadísticos son muy parecidos a los obtenidos con 30, el histograma tiende a uno gaussiano con una única moda en torno a la media.

Las figuras 2.11a a 2.11c. muestran respectivamente histograma experimental, histograma restituido por anamorfosis gráfica e histograma restituido por anamorfosis hermitiana para el nivel piezométrico. Las figuras 2.12a. a 2.12c son las equivalentes a las anteriores para la potencia de la capa de carbón.



	EXPERIMENTAL	R. GRAFICA	HERMITIANA
Media	3.853	3.846	3.853
Varianza	.080	.092	.087
C.V.	7.350	7.895	7.650
Asimetría	-.036	.085	.071
Aplastamiento	2.204	2.463	2.123
Mínimo	3.390	3.147	3.383
Cuartil 1	3.615	3.569	3.569
Mediana	3.885	3.882	3.885
Cuartil 2	4.055	4.067	4.079
Máximo	4.530	4.709	4.598

Tabla V.3. Estadísticos experimentales y restituidos para la variable nivel piezométrico.

	EXPERIMENTAL	R. GRAFICA	HERMITIANA
Media	12.078	12.078	12.103
Varianza	24.264	26.283	23.426
C.V.	40.783	42.416	39.992
Asimetría	.082	.272	-.129
Aplastamiento	2.694	2.880	2.314
Mínimo	1.440	1.160	.939
Cuartil 1	8.650	8.466	8.490
Mediana	12.030	11.746	11.953
Cuartil 3	15.780	15.884	16.271
Máximo	26.220	28.074	25.127

Tabla V.4. Estadísticos experimentales y restituidos para la variable potencia.



Examinando los resultados de las tablas V.3. y V.4 que muestran los estadísticos experimentales y los estadísticos de los datos restituidos por dos métodos diferentes, anamorfosis gráfica y anamorfosis hermitiana, para dos casos particulares, nivel piezométrico y potencia de una capa, pueden llegarse a una serie de conclusiones que comento en los párrafos siguientes.

La restitución de la media es perfecta por ambos tipos de anamorfosis con errores relativos máximos del 0.20 % en la restitución hermitiana de la variable potencia.

La restitución de la varianza varía de un error relativo del 3.45 % en la restitución hermitiana de la variable potencia hasta un error relativo máximo del 15 % en la restitución gráfica para la variable nivel piezométrico. En ambos ejemplos el error relativo es menor en la restitución hermitiana.

En el caso de la anamorfosis gráfica la calidad de la restitución de la varianza es función directa del número de puntos experimentales. En el caso del nivel piezométrico se dispone de 50 valores experimentales y de 80 para la variable potencia. Este número de valores experimentales escaso hace que el rango gaussiano de los valores experimentales sea más restringido que el rango gaussiano que cabe esperar cuando se simula un número elevado de puntos. Hay valores que se sitúan en las colas, modelizadas del modo indicado anteriormente, y ello hace que la varianza aumente ligeramente con respecto a la experimental.

El coeficiente de variación (C.V.) es función de la varianza y de la media, tiende a reproducirse bien estando el de la restitución gráfica ligeramente superior al experimental, como es lógico por lo comentado anteriormente.

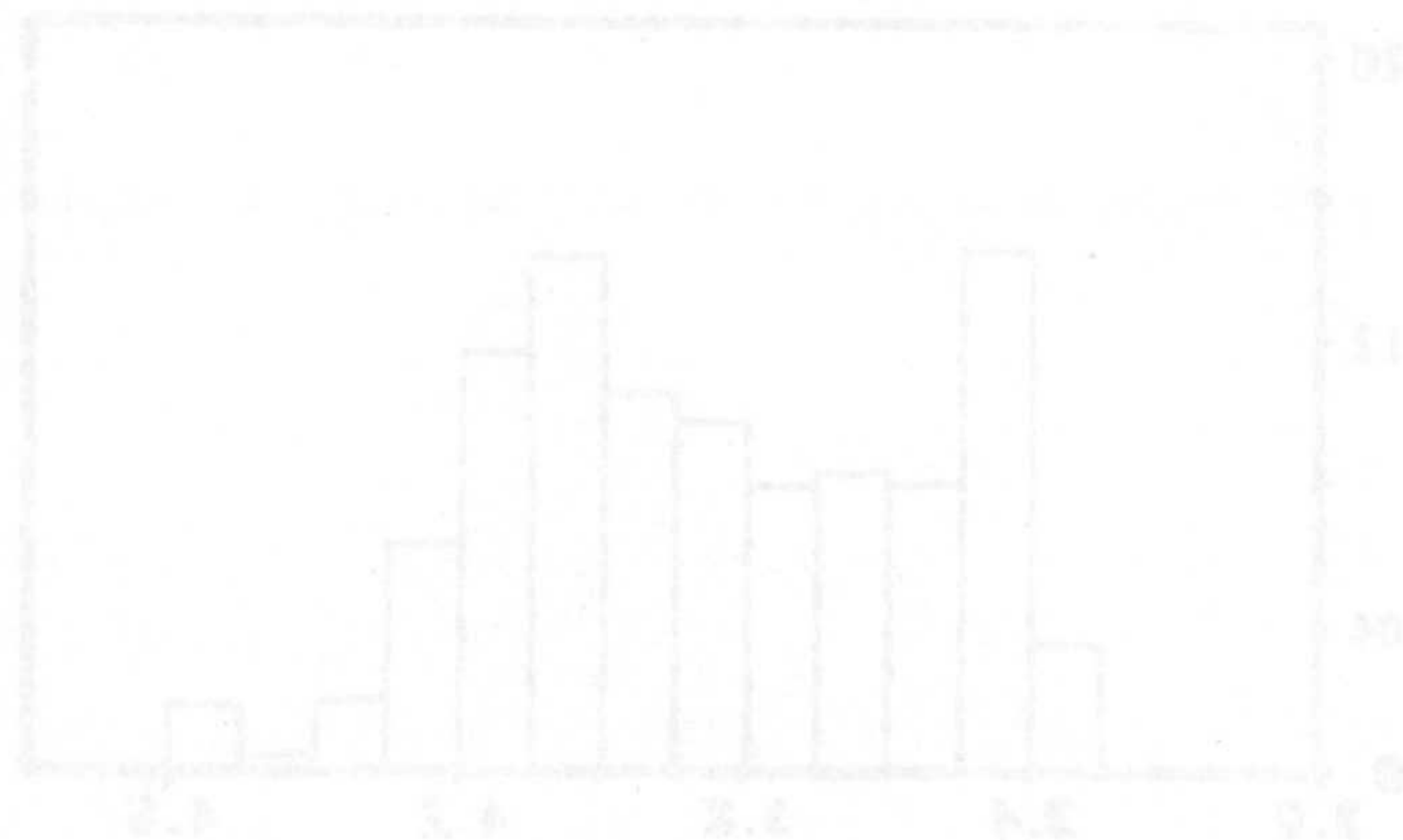
La asimetría y el aplastamiento de los datos restituidos tienen valores muy parecidos a los experimentales.



Para la anamorfosis gráfica el mínimo restituido siempre se menor al experimental y el correspondiente máximo es superior al máximo experimental lo cual es consecuente con la modelización de las colas de la distribución. Para la anamorfosis hermitiana los resultados son variables; en general el mínimo y máximo suelen estar más próximos a los respectivos experimentales y para la variable potencia, se obseva como el máximo de la restitución es ligeramente inferior al máximo experimental.

La mediana y los cuartiles experimentales y de la restitución por cualquiera de los dos métodos son muy parecidos significando que las distribuciones de los valores retituidos son coherentes con las distribuciones experimentales.

Las tablas V.3 y V.4 no son sino un resumen de las características estadísticas elementales que se pueden extraer de los histogramas respectivos. La variable potencia presenta un histograma claramente bimodal, muy bien reproducido por la anamorfosis gráfica, manteniendo las relaciones entre las diferentes clases excepto para la clase tercera. Los resultados tambien son satisfactorios en la restitución hermitiana si bien existe una mayor alteración en las relaciones entre clases.





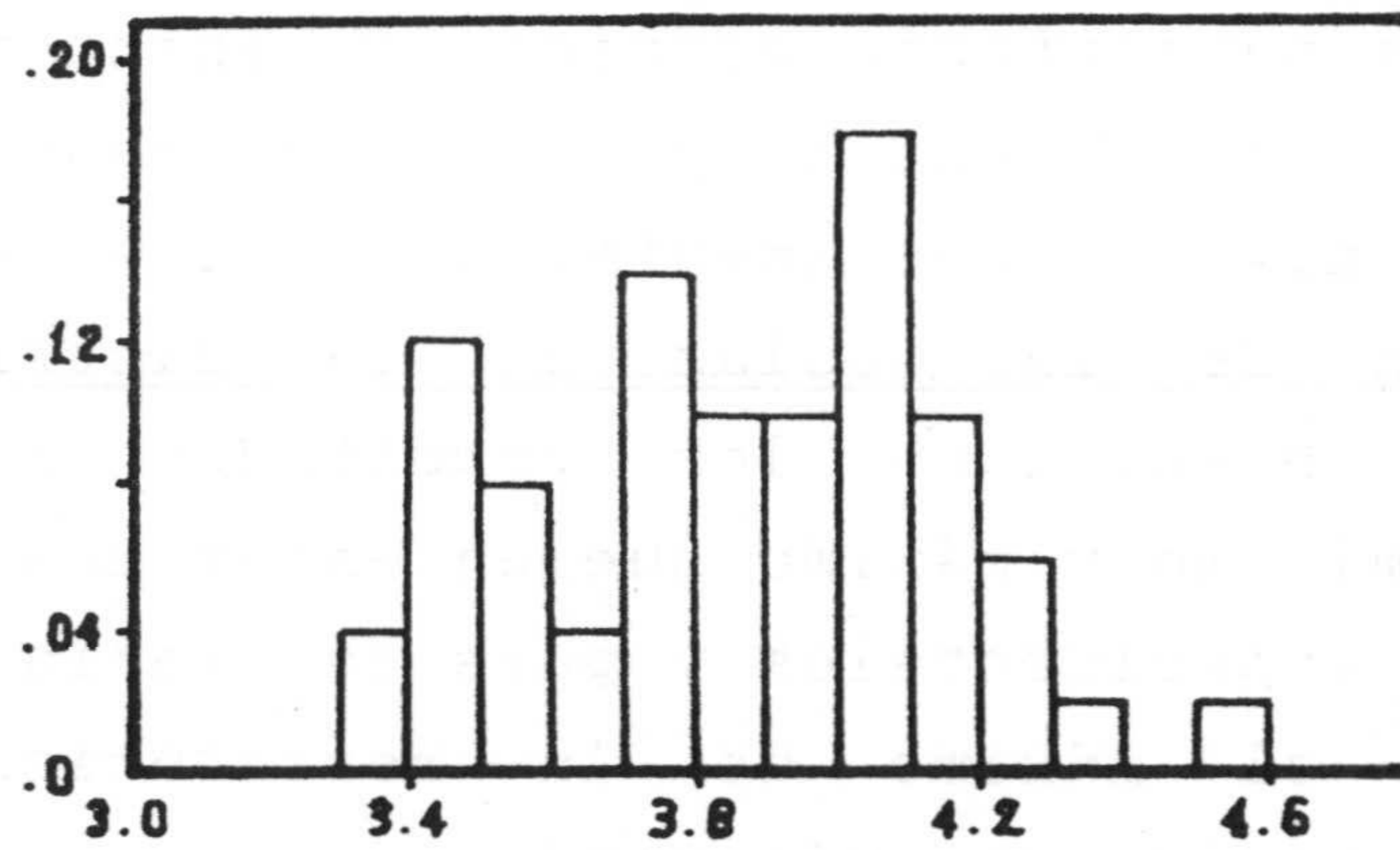


Figura 5.11a. Histograma experimental del nivel piezométrico.

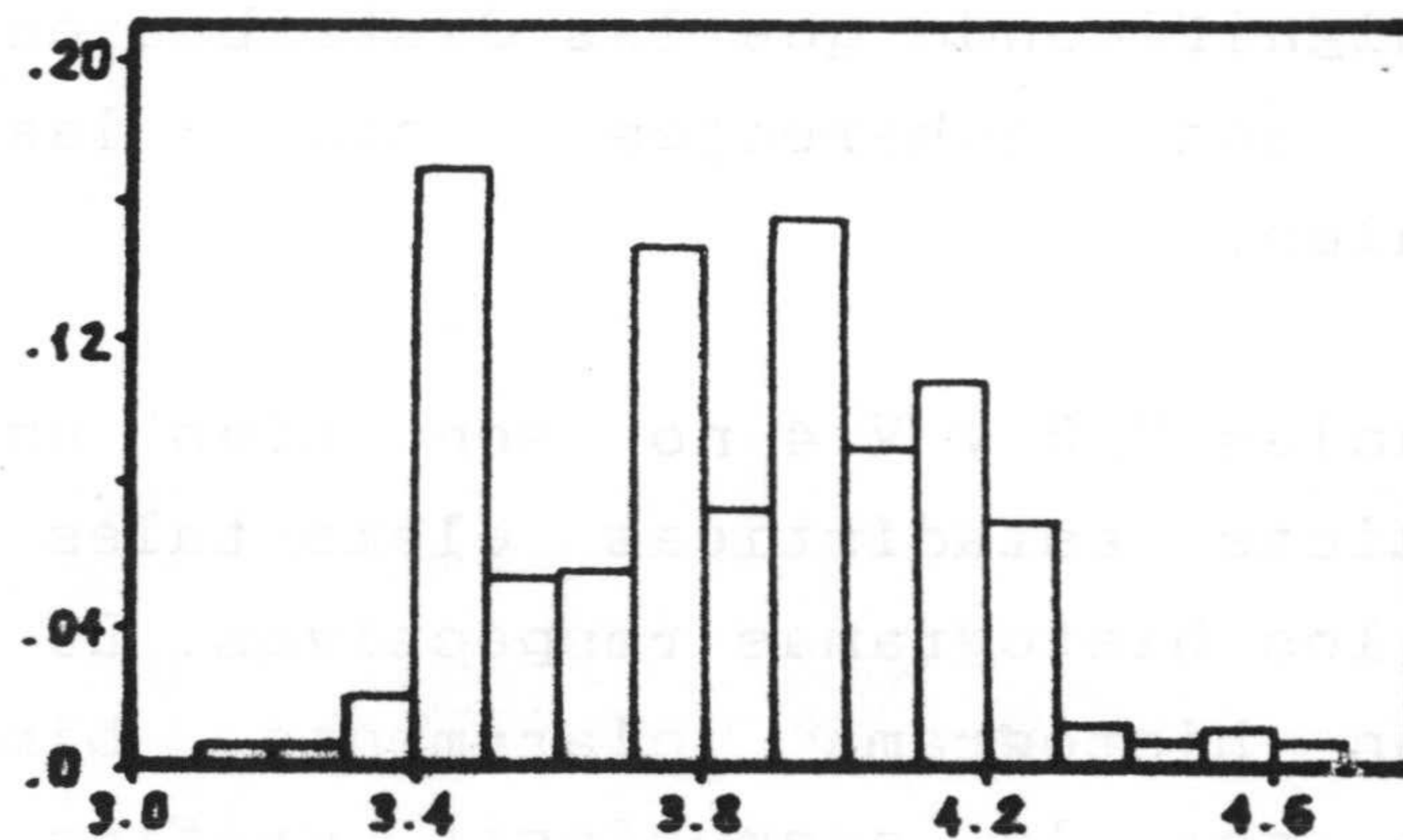


Figura 5.11b. Histograma restituído por anamorfosis gráfica para el nivel piezométrico.

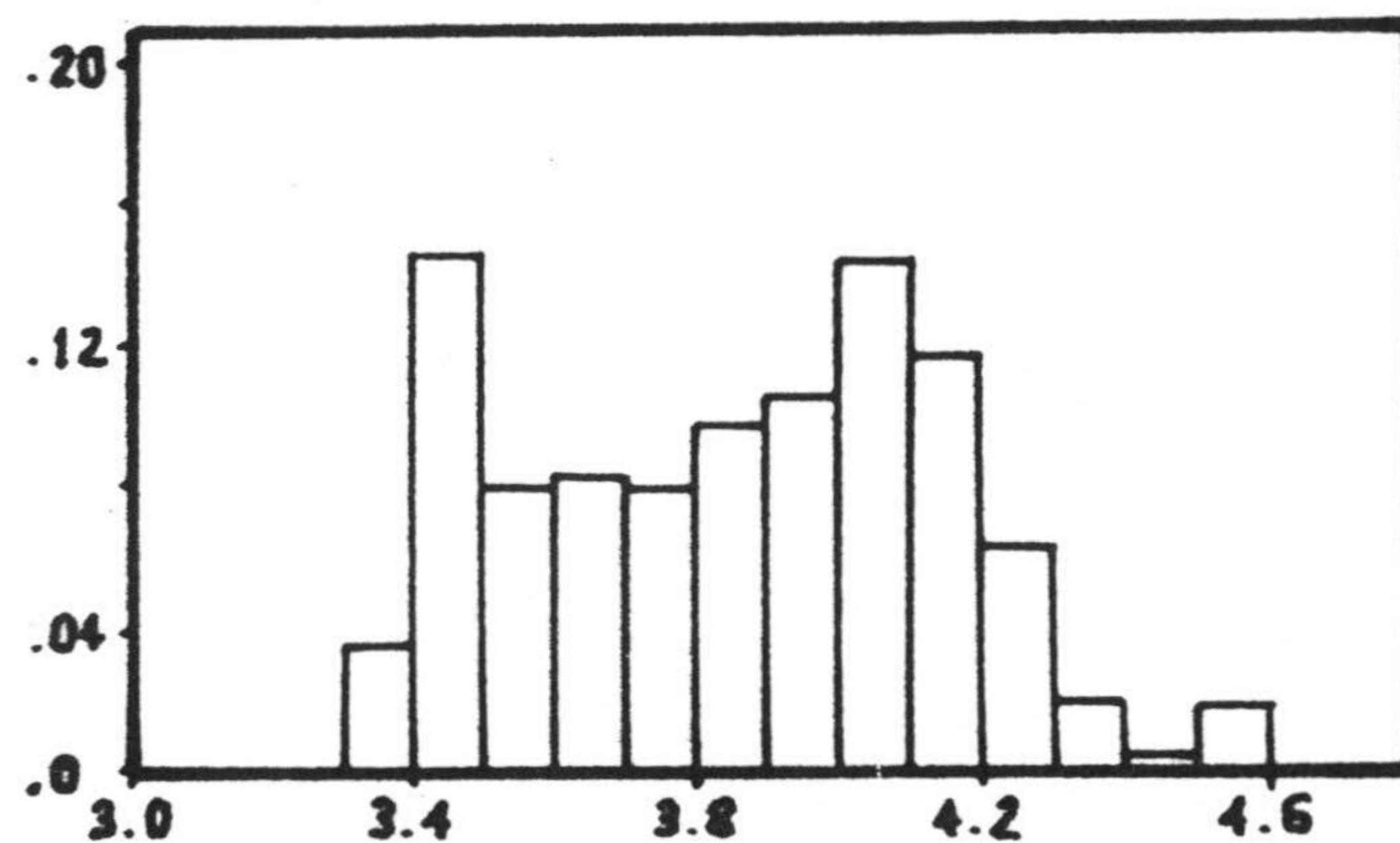


Figura 5.11c. Histograma restituído por anamorfosis hermiteiana para el nivel piezométrico.

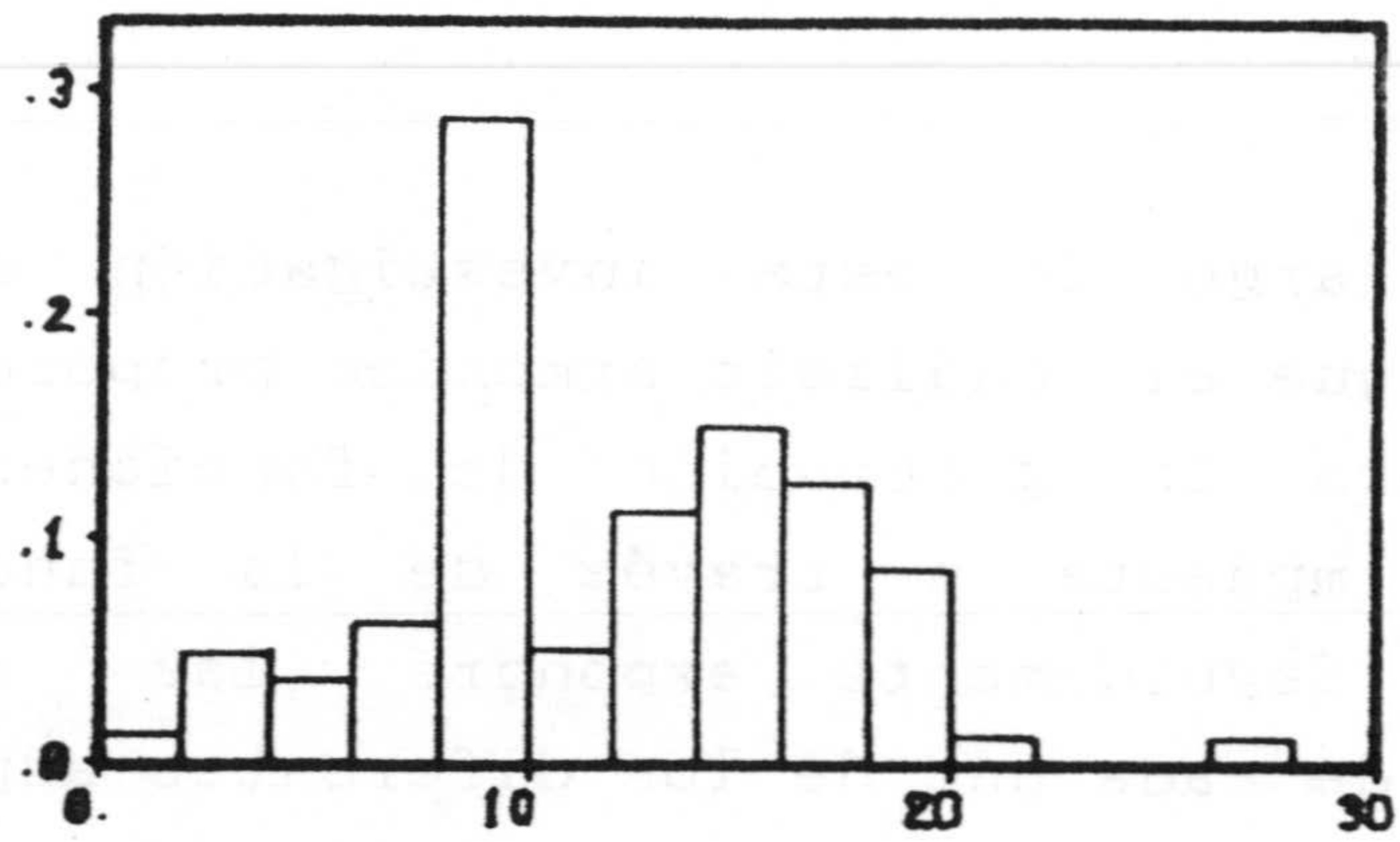


Figura 5.12a. Histograma experimental de la potencia.

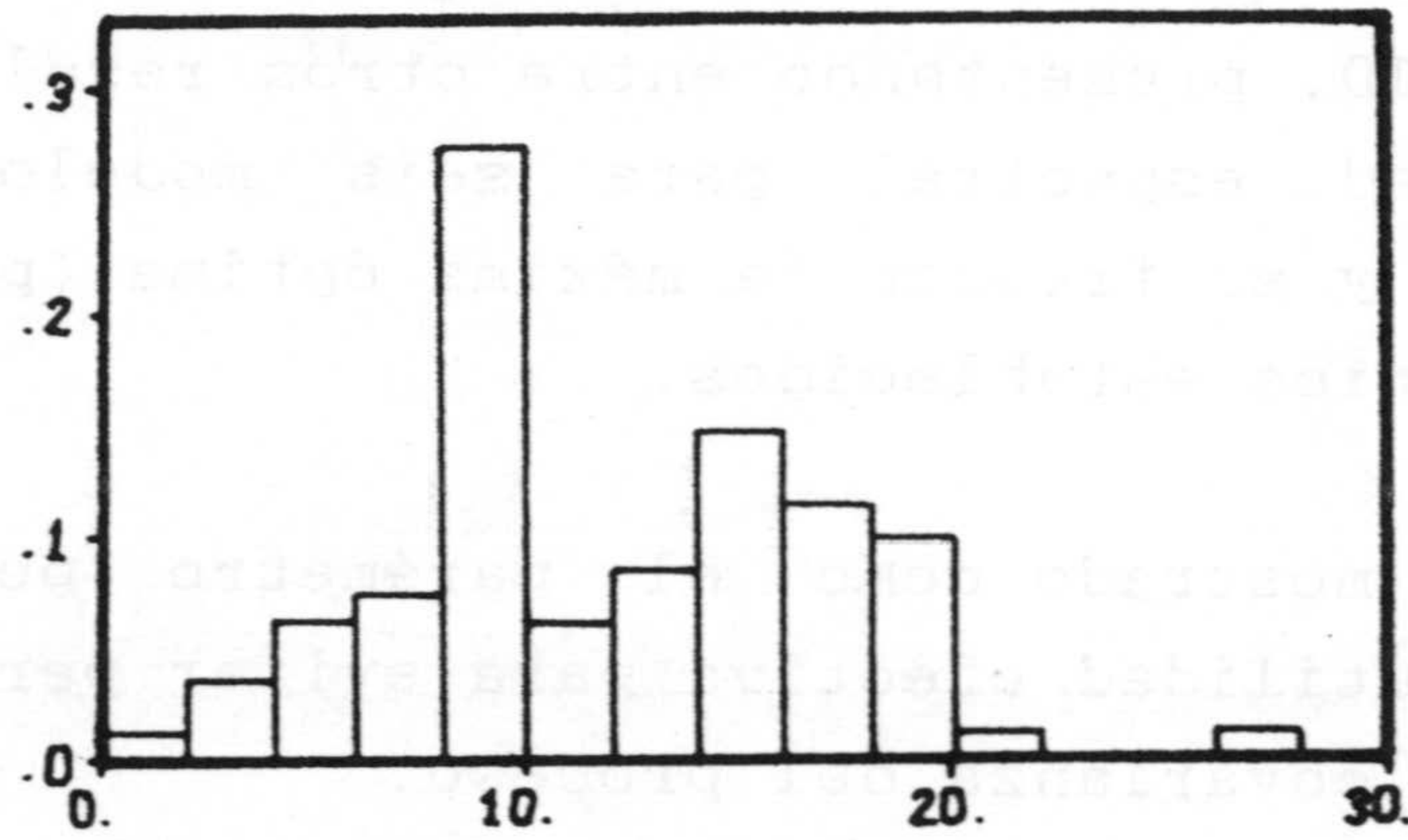


Figura 5.12b. Histograma restituído por anamorfosis gráfica para la potencia.

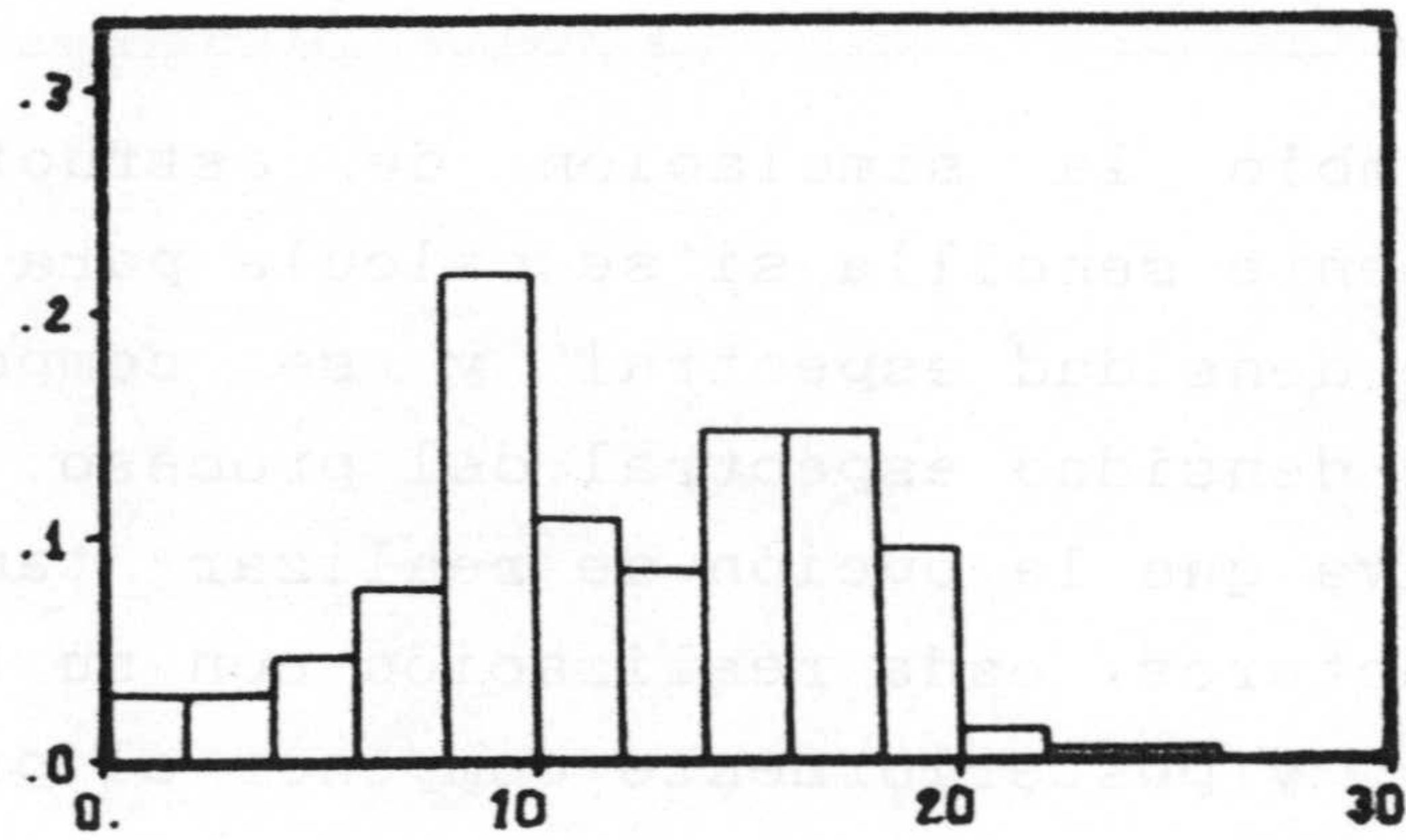


Figura 5.12c. Histograma restituído por anamorfosis hermitiana para la potencia.



## RESUMEN Y CONCLUSIONES

A lo largo de esta investigación se ha puesto de manifiesto que el análisis armónico proporciona una teoría general para la generación de funciones aleatorias con covarianza impuesta a través de la función de densidad espectral. Seguidamente expondré las conclusiones más relevantes de cada uno de los diferentes aspectos tratados.

### 1. Simulación no condicional.

He efectuado un análisis detallado del método de RICE (1954) en 1D, presentando entre otros resultados, la función de densidad espectral para seis modelos de covarianza diferentes y su frecuencia máxima óptima (parámetro  $\Omega$ ) según unos criterios establecidos.

Se ha mostrado como el parámetro perturbador  $\delta\omega$ , no tiene una utilidad efectiva para evitar periodicidades de la función de covarianza del proceso.

Aunque es posible la simulación del efecto de pepita, resulta una técnica excesivamente barroca y requiere una ordenación especial de los armónicos del proceso, lo que resulta más laborioso que simular el efecto de pepita como un simple ruido blanco.

En cambio la simulación de estructuras anidadas es extremadamente sencilla si se calcula para cada estructura su función de densidad espectral y se componen para dar la función de densidad espectral del proceso. Esta técnica es más efectiva que la opción de realizar tantas realizaciones como estructuras, cada realización con su tipo de estructura particular, y posteriormente componer el proceso sumando las realizaciones.



El método de RICE (1954) muestra ciertas ventajas sobre el de SHINOZUKA y JAN (1970). Para un nivel de precisión dado, hace uso de un menor número de armónicos lo que repercute en menor tiempo de cálculo. Además el variograma medio de un número elevado de realizaciones presenta un coeficiente de variación menor lo que implica que cada realización individual reproduce más fielmente el variograma. Su principal inconveniente es que el variograma simulado para distancia largas es periódico.

Para evitar las periodicidades se puede emplear el método de MUÑOZ-PARDO (1987), si bien, éste no produce una ganancia en precisión. Los métodos desarrollados son más eficientes en este sentido, ya que evitan la periodicidad de la función y mantienen una precisión aceptable.

El primero de ellos es el método de la integral de Fourier, cuyo fundamento es el mismo al empleado por FOX (1987) para generar realizaciones imponiendo la dimensión fractal del proceso.

Las particularidades que presento son, el método está adaptado para simular realizaciones con cualquier tipo de función de covarianza, sin importar su complejidad ya que la función de densidad espectral se calcula por FFT a partir de un muestreo adecuado de la función de covarianza.

Aunque el número de puntos a simular ha de ser múltiplo de dos, es posible generar una realización muy larga y tomar la longitud que interese.

Se ha mostrado como el variograma de la simulación no presenta periodicidad para largas distancias lo que supone una gran ventaja sobre los métodos anteriores.

El coeficiente de variación del método se mantiene dentro de límites aceptables por lo que el variograma simulado en una única realización es adecuado.



El método sólo permite la simulación de puntos equidistantes, por lo que plantea un problema en cuanto a la simulación en los puntos experimentales, cuando estos puntos no coinciden con los de la malla de simulación. Este aspecto es resuelto por el método que he diseñado para tal fin y que se ha presentado en el capítulo de condicionamiento.

El otro método desarrollado ha sido el del filtrado de un ruido blanco. La técnica presentada se ha englobado en el apartado de métodos espectrales ya que he hecho uso de la función de densidad espectral para calcular la función de transferencia del filtro y por consiguiente la función ponderadora del proceso de medias móviles.

Los resultados, aún siendo buenos, no son superiores a los del método precedente que se puede considerar como el más eficiente, por sus características ya reseñadas.

Esta efectividad del método de la integral de Fourier en 1D me ha motivado a extenderlo para operar en dos y tres dimensiones.

La metodología que he desarrollado presenta características importantes, como son la generalidad del método para simular cualquier tipo de covarianza, capacidad para simular el efecto de pepita y estructuras anidadas. Permite asimismo generar realizaciones con función de covarianza anisótropa, otra particularidad es que la extensión para simular funciones aleatorias de valores medios es inmediata y adicionalmente lo he adaptado para simulación multivariante.

Del análisis del Método de las Bandas Rotantes en el plano con tres generadores unidimensionales de tipo espectral diferentes, a saber, método de la integral de Fourier, filtrado de un ruido blanco y técnica de RICE(1954), se concluye que al comparar los estadísticos medios de 100 realizaciones, las tres opciones presentan resultados



parecidos.

La media y varianza se reproducen ligeramente mejor cuando se emplea la tercera de las opciones, si bien el variograma medio de conjunto tiende a superar ligeramente al modelo teórico.

En cuanto al coeficiente de variación del variograma medio es el mismo con cualquiera de las tres posibilidades.

Comparando la dos metodologías en 2D, MBR y MED, se concluye que, presentando la misma simplicidad metodológica y obteniéndose en ambos casos buenos resultados, tienen su diferencia fundamental en el coeficiente de variación del variograma medio. El correspondiente al MED es aproximadamente 15 veces inferior al homólogo del MBR. La consecuencia más inmediata es que al considerar un única realización, la generada por el MED tenderá a reproducir mejor, en media los valores teóricos del variograma.

Otra ventaja del MED es que la simulación del efecto de pepita y de estructuras anidadas se reproducen con una única realización del proceso, al estar integradas en la correspondiente densidad espectral bidimensional.

El tiempo que emplea el MED es ligeramente superior, en torno al 17 %, al empleado por el MBR, siendo en la práctica irrelevante.

Al igual que ocurre en el caso unidimensional, el MED sólo genera puntos dispuestos en una malla regular.

Para el caso tridimensional, 3D, son válidas todas las consideraciones establecidas para 2D.

Para utilizar la técnica en 3D es fundamental tener en cuenta la disposición simétrica de coeficientes de Fourier que he presentado en la memoria. Destacar nuevamente su



generalidad para simular cualquier tipo de función de covarianza siempre que sea un modelo lícito, y lo que resulta fundamental, el coeficiente de variación del variograma medio de conjunto es del orden de 50 veces inferior al MBR. Es en consecuencia un método más preciso al reproducir mejor la función variograma objetivo, tanto si se considera un número alto de realizaciones como si se considera un única realización.

La principal limitación del MED en 3D son los requerimientos de memoria para utilizar la técnica, debido a que al trabajar con números complejos cada valor experimental requiere dos posiciones de memoria.

## 2) Simulación de funciones aleatorias anisótropas.

Si bien la simulación de una función aleatoria con anisotropía geométrica en su función variograma se puede efectuar por transformación de coordenadas, se ha mostrado como el MED permite la generación directa de funciones aleatorias anisótropas. Esto constituye, como se ha dicho anteriormente, otra posibilidad del MED que proviene del hecho de muestrear la función de covarianza bidimensional que se debe imponer a la realización, por lo que es una técnica más simple y efectiva a la propuesta por MANTOGLOU y WILSON (1981), la cual requiere conocer la expresión analítica de la función de densidad espectral bidimensional.

## 3) Simulación de valores medios sobre un soporte no puntual.

En primer lugar se ha mostrado como el variograma de la función aleatoria de valores medios en 2D o 3D es anisótropa; si bien en la práctica sólo es apreciable, y significativa de ser tratada, cuando la dimensión mayor del soporte es como mínimo la mitad del alcance.



Por otra parte conforme la anisotropía es más acentuada, el comportamiento del variograma en el origen se torna más continuo y aumenta el alcance según la dirección del bloque cuya dimensión es mayor.

Las proporciones relativas entre las dimensiones del bloque no son significativas si, como se ha dicho, la dimensión mayor del soporte no es al menos tan grande como la mitad del alcance.

La metodología propuesta permite generar realizaciones de funciones aleatorias de valores medios en 1D, 2D y 3D, cualquiera que sea la expresión de la función de covarianza puntual.

La eficacia del MED estriba en que conocida la función de covarianza de la función aleatoria puntual, es posible conocer la función de densidad espectral del proceso integrado y por consiguiente es posible generar el proceso por el mismo procedimiento de MED.

#### 4) *Simulación de funciones aleatorias no estacionarias.*

Es un hecho constatable en la práctica la existencia de variables geológicas que presentan un comportamiento no estacionario.

He planteado los tres enfoques más frecuentemente utilizados por la comunidad geoestadística para modelizar dichas variables no estacionarias y he presentado la simulación condicional en el marco de cada metodología.

En el marco del Krigeaje Universal sólo son posibles simulaciones condicionales. Estas se obtienen por condicionamiento, utilizando krigeaje universal, de una realización de la función aleatoria con el variograma



subyacente impuesto, con respecto a los valores experimentales. Se ha mostrado un ejemplo con resultados aceptables.

Si se aplica la teoría FAIK, he mostrado la metodología clásica para generar realizaciones de un función aleatoria intrínseca de orden  $k$ , con un modelo impuesto de covarianza generalizada.

En el tercer enfoque, el del krigeaje residual, he mostrado como se pueden generar simulación no condicionales y simulaciones condicionales.

La simulación no condicional consiste en la deriva estimada más una realización aleatoria del residuo.

La realización condicionada consta de la estimación de la deriva más un residuo condicionado al residuo en los valores experimentales.

##### 5) *Simulación multivariante*

El método propuesto de simulación multivariante es más flexible que el modelo lineal de correogionalización, en el sentido de poder simular modelos de correogionalización que pueden no responder al modelo lineal si bien han de ser modelos permitidos.

Ello posibilita un análisis variográfico más flexible, donde los modelo siguen más fielmente los datos experimentales.

La metodología ha sido desarrollada en el dominio de la frecuencia, trabajando con funciones de densidad espectral directas y cruzadas. Se han presentado ejemplos de aplicación en una y dos dimensiones, pudiéndose extender fácilmente al caso 3D.



Asimismo, he mostrado como dicha metodología se adapta de modo inmediato a la simulación multivariable de funciones aleatorias sobre soporte arbitrario, esto es, cada función aleatoria puede estar definida sobre el soporte que se desee, puntual o no. De este modo es posible la simulación multivariable sobre soporte bloque y también permite otra posibilidad de simulación conjunta punto-bloque.

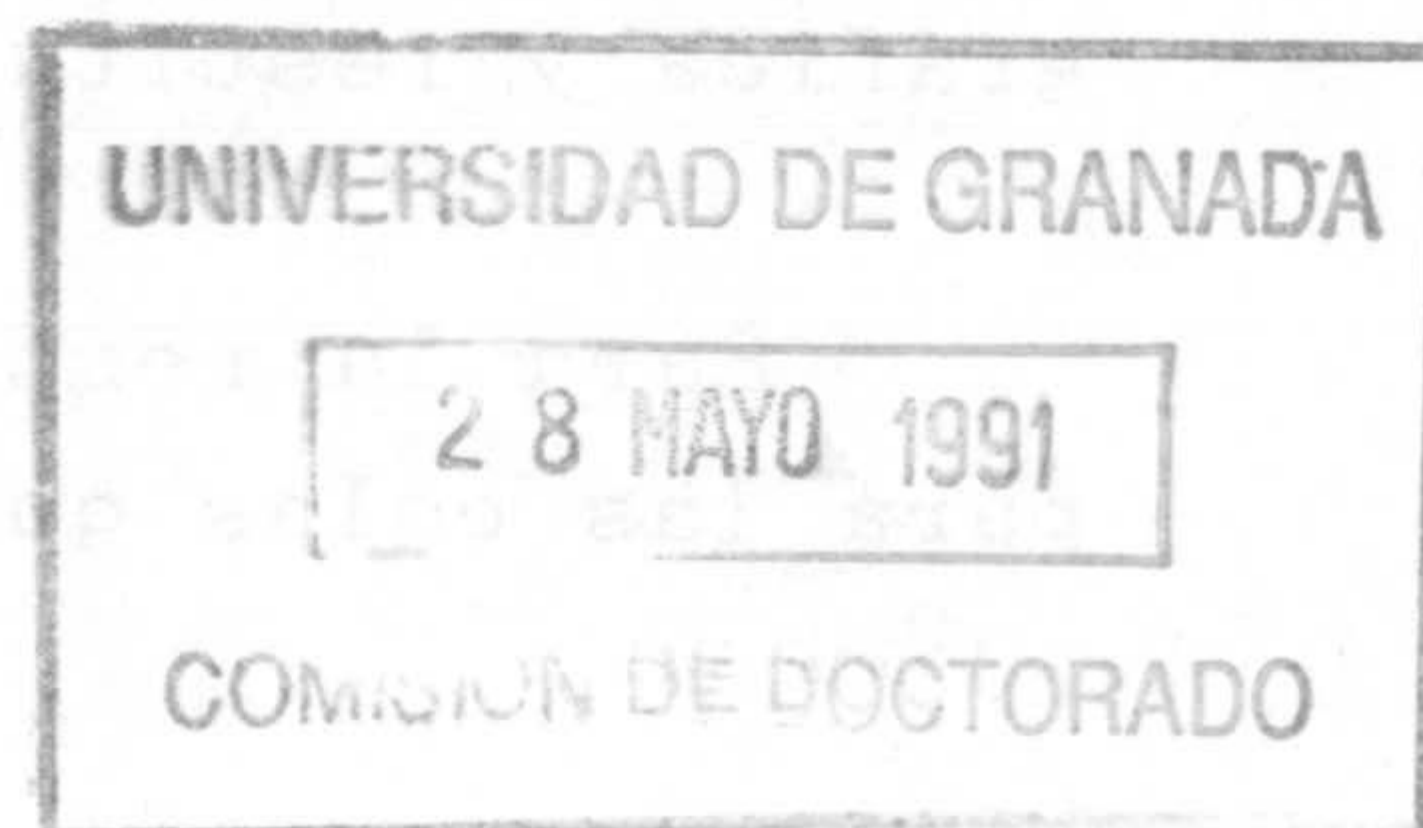
#### 6) Simulación de la función indicatriz.

En la simulación de la función indicatriz he utilizado el modelo gaussiano de MATHERON (1974), JOURNEL e ISAAKS (1984).

Además de presentar la metodología clásica, en base al modelo gaussiano he desarrollado la simulación de la función indicatriz sobre soporte de bloque bajo la asunción de permanencia de la ley normal bivalente en el cambio del soporte. Por consiguiente esta metodología se aplica en el marco de la corrección afín. Dicha asunción de modelo de distribución es necesaria ya que, como es conocido, la geoestadística sobre soporte bloque, cuando no se dispone de valores experimentales sobre dicho soporte, marca la frontera entre la geoestadística independiente de la función de distribución y la geoestadística donde se asume un modelo de función de distribución.

También en base al modelo gaussiano he obtenido la metodología a seguir para simular de modo eficiente la función indicatriz con dos cortes. Esta posibilidad cubre un gran espectro de casos prácticos donde es necesario simular tres facies geológicas o tres rangos de la variable, alto, medio y bajo.

#### 7) Condicionamiento.





Las conclusiones generales sobre el condicionamiento se han obtenido empíricamente sobre un caso práctico que se muestra en la memoria.

El condicionamiento además de imponer que el modelo pase por los puntos experimentales, tiene un efecto positivo en el hecho de simetrizar y centrar la distribución, no hay que olvidar que el condicionamiento se realiza sobre la simulación no condicional gaussiana y con respecto a los valores experimentales gaussianos.

Fuera del marco general del condicionamiento, como se ha visto en la simulación de funciones aleatoria no estacionarias en el marco del krigeaje universal, se ha mostrado como el condicionamiento tiende a imponer la distribución de los valores condicionantes.

Es fundamental en el proceso de condicionamiento que, al condicionar puntos simulados adyacentes, ambos tengan las mismas vecindades de krigeaje o vecindades solapadas, ello en orden a no introducir discontinuidades en el modelo condicional. Este efecto es fundamental y, si se respeta, minimiza el resultado de otros factores como el enfoque local o global y el tipo de krigeaje empleado, simple u ordinario.

#### 8) *Restitución.*

La restitución del variograma experimental es una imposición que hace más robusto el modelo numérico de la variable geológica.

Se han mostrado las dos opciones clásicas de restitución gráfica y restitución hermitiana.

Para la restitución gráfica, presento un modelo gaussiano para las colas que resulta operativo, coherente y práctico al



evitar que se produzcan densidades artificiales anómalas en los extremos de la distribución.

He mostrado ejemplos de restitución de dos variables diferentes, obteniéndose buenos resultados en ambos casos y para los dos tipos de restitución mencionadas.

La principal característica de la anamorfosis gráfica es su simplicidad no dejando por ello de ser altamente operativa.

No obstante la anamorfosis hermitiana, es necesaria para trabajar con determinados modelos geoestadísticos como el Modelo Gausiano Discreto de MATHERON (1975).

#### *Conclusión final*

La conclusión final, a la vista de la metodología presentada y de los resultados obtenidos, lo constituye la misma afirmación tomada como tesis de la presente investigación: el análisis armónico o espectral es altamente operativo para la construcción de modelos numéricos que reproduzcan la correlación espacial de variables geológicas; modelización que se basa en la técnica geoestadística de simulación condicional.

Dicho modelo numérico permite tratar las variables geológicas desde un punto de vista cuantitativo con la gran trascendencia que ello conlleva para numerosos ámbitos técnicos en las Ciencias de la Tierra.

Aunque ya se han encontrada muchas aplicaciones para el modelo numérico simulado, corresponde en un futuro a geólogos e ingenieros, no necesariamente geoestadísticos, que trabajen con problemas reales, mostrar la aplicabilidad del modelo



geoestadístico de variable simulado, para todos ellos me he  
congratulado de poner a su disposición la presente  
metodología que está apoyada por el gran soporte de programas  
informaticos que he realizado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I.A. (1964). Handbook of Mathematical Functions. Appl. Math. Ser. 55, National Bureau of Standards, Washington, 1046 pp.

AGTERBERG, F. P. (1967). Computer techniques in geology. Earth-Sci. Rev., 3, pp. 47-77.

ALABERT, F. (1987). The practice of Fast Conditional Simulations through the LU decomposition of the Covariance Matrix. Math. Geol., Vol. 19, No. 5, pp. 369-386.

ARMSTRONG, M. (1984). Problems with Universal Kriging. Math. Geol., Vol. 16, No. 1, pp. 101-108

BARIGOV, B. A. (1989). Mathematical methods revealing geological heterogeneity. Math. Geol., Vol. 21, No. 6, pp. 639-647.

BLACK, T. C. y FREYBERG, D. L. (1990). Simulation of one-dimensional correlated fields using a matrix-factorization moving average approach. Math. Geol., Vol. 22, No. 1, pp. 39-62.

BORGMAN, L., TAHERI, M. y HAGAN, R. (1984). Three dimensional, frequency-domain simulations of Geological Variables. Proc. NATO ASI, Lake Tahoe, Sept. 1983, pp. 517-541.

BOX, G. E. y JENKINS, G. M. (1976). Time series analysis: forecasting and control. San Francisco. Holden Day.

BRACEWELL, R. N. (1986). The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill International Editions. 474 pp.

BRAS, R. L. y RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1976). Rainfall generation: a nonstationary time-varying multidimensional model. Water Resources Research, Vol 12, No. 3, pp. 450-456.

BRAS, R. L. y RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1984). Random functions and Hydrology. Addison Wesley. 559 pp.



BROOKER, P. I. (1985). Two-dimensional simulation by turning bands. *Math. Geol.*, Vol. 17, No. 1, pp. 81-90.

CASTRO, A. (1987). Aplicación de las FAI-k a la estimación de variables geológicas: estudio de un yacimiento de carbón. Tesis de Licenciatura. Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. 114 pp.

CHICA-OLMO, M. (1981). Aplicaciones de la Geoestadística a la Hidrogeología. Tesis de Licenciatura. Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. 151 pp.

CHICA-OLMO, M. (1987). Análisis geoestadístico en el estudio de la explotación de los recursos minerales. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 387 pp.

CHILES, J.P. (1977). Géostatistique des Phénomènes non Stationnaires. Thèse Docteur-Ingénieur. Univ. de Nancy. 152 pp.

CHRISTAKOS, G. (1987). Stochastic simulation of spatially correlated geo-processes. *Math. Geol.*, Vol. 19, No.8, pp. 807-831.

CHUA, S. y BRAS, R. L. (1982). Optimal estimators of mean areal precipitation in regions of orographic influence. *Journal of Hydrology*, Vol. 57, pp. 23-48.

CRESSIE, N. y HAWKINKS D. M. (1980). Robust estimation of the variogram: I. *Math. Geol.*, Vol. 12, No. 2, pp. 115-125.

DAVID, M. (1977). Geostatistical ore reserve estimation. *Developements in Geomathematics 2*. Ed. Elsevier. 264 pp.

DAVID, M. (1988). Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation. *Developements in Geomathematics 6*. Ed. Elsevier. 216 pp.

DAVIS, M. W. (1983). Production of Conditional Simulations via the LU Decomposition of the Covariance Matrix. *Math. Geol.*, Vol. 19, No. 2, pp. 91-98.

DELFINER, P. (1976). Linear estimation of non stationary spatial phenomena. *Proc. NATO ASI, Roma, Oct. 1975*, pp. 49-68.



DELFINER, P. (1982). The intrinsic model of order  $k$ . Ed. CGMM, ENSMP, N-97, 138 pp.

DELHOMME, J. P. (1979). Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters: a geostatistical approach. Water Resources Research, Vol. 15, No. 2, pp. 269-280.

DEUTSCH, C. (1989). Declus: a Fortran 77 program for determining optimum spatial declustering weights. Computers & Geosciences, Vol. 15, No. 3, pp. 325-332.

DOWD, P. A. (1985). Generalized covariances and structural analysis a comparison. Sci. de la Terre, Sér. Inf., No. 24, pp. 95-128

FOX, G. C. (1987). An inverse Fourier transform algorithm for generating random signals of a specified spectral form. Computers & Geosciences. Vol. 13, No. 4., pp. 369-374.

GASCA, M. (1986). Cálculo numérico I. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid. 555 pp.

GRADSHTEYN I. S. y RYZHIK I. M. (1965). Table of integrals, series and products. New York, 1160 pp.

HALLIWELL, D. I. (1988). Conditional and Co-conditional simulation applied to a complex stratigraphic silver/lead/zinc deposit. A thesis for the Degree of Master of Science. Department of Mining and Mineral Engineering. University of Leeds. 100 pp.

HSU, P. y MEHRA, R. (1973). Análisis de Fourier. McGraw-Hill. 274 pp.

JOURNEL, A. (1974,a). Geostatistics for conditional simulation of ore bodies. Economic Geology, Vol. 69, pp. 673-687.

JOURNEL, A. (1974,b). Simulations conditionnelles, théorie et pratique. Thèse Docteur-Ingénieur. Univ. de Nancy I. 110 pp.

JOURNEL, A. y HUIJBREGTS, Ch. (1978). Mining Geostatistics. Ed. Academic Press, New York, 600 pp.

JOURNEL, A. (1983). Non parametric estimation of spatial



distributions. Math. Geol., Vol. 15, No. 3, pp. 445-468.

JOURNEL, A. e ISAACS, E. H. (1984). Conditional indicator simulation: application to a Saskatchewan uranium deposit. Math. Geol., Vol. 16, No. 7, pp. 685-718.

JOURNEL, A. (1990). Fundamentals of Geostatistics in five lessons. Applied Earth Sciences Department. Stanford University.

KANASEWISCH, E. R. (1981). Time sequence analysis in Geophysics. University of Alberta Press.

KITANIDIS, P. K. (1983). Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications. Water Resources Research. Vol. 19, pp. 909-921.

KOCH, S. C. y LINK, F. R. (1971). Statistical analysis of geological data. Vol. I y II. Dover Publications. 813 pp.

KRIGE, D. G. y MAGRI, E. J. (1982). Studies of the effects of outliers and data transformation on variogram estimates for a base metal and a gold ore body. Math. Geol., Vol. 14, No. 6, pp. 557-564.

LAW, A. y KELTON D. (1985) Simulation modelling and analysis. Ed. Mc Graw-Hill, 400 pp.

MANTOGLU, A. y WILSON, J.L. (1981). Simulation of random fields with the Turning Bands Method. Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology. Report. No. 264. 199 pp.

MANTOGLU, A. y WILSON, J.L. (1982). The Turning Bands Method for simulation of random fields using line generation by a spectral method. Water Resour. Res., Vol. 18, pp. 1379-1394.

MARECHAL, A. (1975). Analyse numérique des anamorphoses gaussiennes. Ed. CGMM, ENSMP, N-418, 61 pp.

MARECHAL, A. (1978). Gaussian anamorphosis models. Ed. CGMM, ENSMP, C-72, 28pp.

MARIN SUAREZ, A. (1978) Méthodologie de l'estimation et simulation multivariable des grands gisements



tridimensionnels. Thèse Docteur-Ingénieur. ENSMP, 72 pp.

MATHERON, G. (1965). Les Variables Régionalisées et leur estimation. Ed. Masson et Cie, Paris, 212 pp.

MATHERON, G. (1969). Le Krigeage Universel. CGMM, ENSMP, Fasc. No. 1, 82 pp.

MATHERON, G. (1970). La théorie des Variables Régionalisées et ses applications. CGMM, ENSMP, Fasc. No. 5, 212 pp.

MATHERON, G. (1971). La théorie des fonctions aléatoires intrinsèques généralisées. Ed. CGMM, ENSMP, N-252.

MATHERON, G. (1972). The Turning Bands a method for simulating random functions in  $R^n$ . Ed. CGMM, ENSMP, N-303.

MATHERON, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. Advances in Applied Probability, No. 5, pp. 439-468.

MATHERON, G. (1974). Les fonctions de transfert de petits panneaux. Ed. CGMM, ENSMP, N-395, 73 pp.

MATHERON, G. (1975). The transfer functions and their estimations. Ed. CGMM, ENSMP, N-423.

MATHERON, G. (1982). Pour une analyse krigeante des données régionalisées. Ed. CGMM, ENSMP, N-732

MEJIA, J. M. y RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1974). On the synthesis of random field sampling from the spectrum: an application to the generation of Hydrologic Spatial Processes. Water Resources Research, Vol. 10, No. 4, pp. 705-711.

MUÑOZ-PARDO, J. F. (1987). Approche géostatistique de la variabilité spatiale de milieux géophysiques. Thèse Docteur-Ingénieur. Université de Grenoble. 254 pp.

MYERS, D. E. (1989). To be or not to be ... stationary ? That is the question. Math. Geol., Vol. 21, No. 3, pp. 347-362.

NEUMAN, S. P. y JACOBSON, E. A. (1984). Analysis of



nonintrinsic spatial variability by residual kriging with application to regional groundwater levels. Math. Geol., Vol. 16, No. 5, pp. 499-521.

ORFEUIL, J. P. (1972). Simulation of Wiener-Lévy et de ses intégrales. N-290. CGMM, ENSMP.

PAPOULIS, A. (1984). Probability, random variables, and stochastic processes. McGraw-Hill International Editions. 576 PP.

PARDO, E. (1989). Simulación condicional geoestadística de parámetros geomíneros en una y dos dimensiones. Tesis de Licenciatura. Departamento de Geodinámica. Universidad de Granada. 181 pp.

PRESS, H. W., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. y VETTERLING, W. T. (1989). Numerical recipes in C. Cambridge University Press. 735 pp.

PARZEN, E. (1972) Procesos estocásticos. Ed Paraninfo. Madrid. 370 pp.

PRIESTLEY, M.B. (1981). Spectral analysis and time series. Vol. 2., Academic Press. 237 pp.

PUGACHEV, V. S. (1973). Introducción a la Teoría de Probabilidades. Ed. Mir. Moscú. 323. pp.

RICE, S. O. (1954). Mathematical analysis of random noise. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes. Editor N. Wax. Dover Publications, Inc., New York, pp. 180-181.

SABOURIN, R. (1976). Application of two methods for the interpretation of the underlying variogram. NATO ASI Series C, Vol. 24, D. Reidel Dordrecht, Holland, pp. 101-109.

SCHRAGE, L. (1979). A more portable Fortran random number generator. ACM Transactions on Mathematical Software. Vol. 5, No. 2, pp. 132-138.

SEN, Z. (1990). Spatial simulation of geologic variables. Math. Geol., Vol. 22, No. 2, pp. 175-188.

SHARP, W.E. (1982). Stochastic simulation of semivariograms.



Math. Geol., Vol. 14, No. 5, pp. 445-456.

SHARP, W. E. y AROIAN, L. A. (1985). The generation of multidimensional autorregressive series by the Herringbone Method. Math. Geol., Vol. 17, No. 1, pp. 67-79.

SHINOZUKA, M. (1970). Simulation of multivariate and multidimensional random processes. J. Acoust. Soc. of Amer., Vol. 49, No. 1, pp. 357-367.

SHINOZUKA, M. y JAN, C. M. (1972). Digital simulation of random processes and its applications. Journal of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 1, pp. 111-128.

SRIVASTAVA, R. M. y PARKER, M.P. (1988). Robust measures of spatial continuity. Geostatistics, Vol. 1, Kluwer Acad. Pub., pp. 295-308.

STARKS, T. H. y FANG, J. H. (1982) The effect of drift on the experimental semivariogram. Math. Geol., Vol. 14, No. 4, pp. 309-319.

SWITZER, P. (1977). Estimation of distribution functions from correlated data. Bull. Inter. Stat. Inst. Vol. XLVII, No. 2, pp. 123-137.

VENTSEL, H. (1973). Théorie des Probabilités. Ed. Mir, Moscú, 563 pp.

WACKERNAGEL (1985). L'inférence d'un modèle linéaire en géostatistique multivariable. Thèse Docteur de 3e. Cycle. ENSMP, 100 pp.

WEAVER, H. J. (1983). Applications of discrete and continuous Fourier Analysis. John Wiley & Sons. 304 pp.

WEAVER, H. J. (1989). Theory of discrete and continuous Fourier analysis. John Wiley & Sons. 307 pp.

WHITTEN, E. H. (1963). Application of quantitative methods in the geochemical study of granitic massifs. Roy. Soc. Can., Spec. Publ., 6, pp. 76-123.

YEVJEVICH, V. (1972). Stochastic processes in Hydrology. Waters Resources Publications. 276 pp.





## APENDICE I

### CHEQUEO DE LOS NUMEROS ALEATORIOS

La simulación por el método de Monte Carlo es una técnica que emplea números aleatorios para resolver problemas estocásticos o determinísticos.

La Simulación Condicional Geostatística constituye, en este sentido, un método de simulación de Monte Carlo con particularidades específicas.

Es por ello que resulta de gran interés la generación de valores numéricos que intenten reproducir los valores que puede tomar una variable aleatoria de acuerdo a una determinada función de distribución de probabilidad.

En la práctica se generan números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1,  $U(0,1)$ , y por una serie de transformaciones es posible generar números aleatorios con cualquier otro tipo de distribución.

En la presente investigación, los valores aleatorios  $U(0,1)$  los he obtenido mediante la subrutina RAND de *SCHRAGE* (1979).

Algunos autores debido a que los valores generados no son "verdaderos" números aleatorios, se refieren a ellos como números pseudoaleatorios.

El generador de *SCHRAGE* (1979) es completamente determinístico. Resulta interesante comprobar que los números generados por la subrutina se aproximan a una función de distribución de probabilidad verdadera  $U(0,1)$ .

Para ello he realizado diferentes tests de tipo empírico, consistentes en generar valores y examinar, desde



un punto de vista estadístico, como se parecen a una función de distribución  $U(0,1)$ .

Estos tests están diseñados para chequear si los valores  $u_i$  (generados por la subrutina RAND) están uniformemente distribuidos entre 0 y 1, y si son independientes, esto es, no correlacionados.

Una descripción detallada de los tests se puede encontrar en *KNUTH (1969)* y *LAW y KELTON (1985)*.

### 1). Test chi-cuadrado $\chi^2$

Se trata de chequear si los valores  $u_i$  están uniformemente distribuidos entre 0 y 1.

Se divide el subintervalo  $[0,1]$  en  $K$  subintervalos de igual longitud y se generan  $n$  valores aleatorios  $\{u_i; i = 1, \dots, n\}$ .

Para cada subintervalo  $\{k_j; j = 1, \dots, K\}$  sea  $f_j$  el número de valores  $u_i$  que caen en el  $j$ -ésimo intervalo y se calcula el estadístico:

$$\chi^2 = \frac{K}{n} \sum_{j=1}^K \left( f_j - \frac{n}{K} \right)^2$$

Para un número de valores aleatorios  $n$  grande, el estadístico  $\chi^2$  tiene aproximadamente una distribución  $\chi^2$  con  $K-1$  grados de libertad, bajo la hipótesis nula de que los valores  $u_i$  siguen una distribución  $U(0,1)$ . Se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación  $\alpha$  si  $\chi^2 > \chi_{K-1, 1-\alpha}^2$  donde  $\chi_{K-1, 1-\alpha}^2$  es el punto crítico superior  $1-\alpha$  de la



distribución  $\chi^2$  con k-1 grados de libertad.

He aplicado este test para diferente longitud de valores aleatorios y diferente número de clases, utilizando siempre la semilla o valor inicial del argumento de RAND que ha sido 15121963. Para un nivel de significación del 10 % he obtenido los resultados que se presentan en la tabla A.1.

N	K	$\chi^2_{K-1, .90}$	$\chi^2$
100	20	27.1	17.6
500	50	62.0	37.4
500	100	117.4	97.6
1000	100	117.4	98.4
5000	500	539.8	449.2
10000	1000	1052.0	965.8
25000	2500	2590.0	2563.4
50000	5000	5127.5	5180.2
50000	4000	4114.0	4069.3

Tabla A.1. Test de uniformidad  $\chi^2$ .

De las diferentes experiencias realizadas sólo en un caso, 50000 valores y 5000 clases, se rechazaría la hipótesis nula de que los valores generados son uniformes  $U(0,1)$  con un nivel de significación del 10 %

## 2). Test de independencia de series.

Este test es una generalización del test  $\chi^2$  a dimensiones mayores.

Si los valores  $u_i$  son independientes e idénticamente



distribuidos  $U(0,1)$ , las d-tuplas no solapantes:

$$\Psi_1 = (u_1, u_2, \dots, u_d)$$

$$\Psi_2 = (u_{d+1}, u_{d+2}, \dots, u_{2d})$$

.....

serán vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos en el hipercubo unitario d-dimensional  $[0,1]^d$ .

Se divide el intervalo  $[0,1]$  en  $K$  subintervalos de igual tamaño. Se generan vectores  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ . Sea  $f_{j_1, j_2, \dots, j_d}$  el número de vectores con la primera componente en el subintervalo  $j_1$  y la segunda componente en el subintervalo  $j_2$ , etc.

Se define el estadístico:

$$\chi^2(d) = \frac{K^d}{n} \sum_{j_1=1}^K \sum_{j_2=1}^K \dots \sum_{j_d=1}^K \left[ f_{j_1, j_2, \dots, j_d} - \frac{n}{K^d} \right]^2$$

que bajo la hipótesis nula de que los vectores  $\Psi_i$  son independientes e idénticamente distribuidos, tendrá aproximadamente una distribución chi-cuadrado con  $K^d - 1$  grados de libertad.

Si los valores  $u_i$  están correlacionados, la distribución de los d-vectores  $\Psi_i$  se desviará de la uniformidad d-dimensional, así este test proporciona de modo indirecto un chequeo de la asunción de independencia de los valores aleatorios  $u_i$ .

El test necesita gran disponibilidad de memoria informática para  $d > 3$ , por lo que lo he aplicado para chequear la uniformidad bidimensional ( $d=2$ ). En la siguiente tabla se recogen los resultados donde  $\chi^2(d)$  teórico es el punto crítico del 90 % para una distribución  $\chi^2$  con  $k^2-1$  grados de libertad. En vista de los resultados no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 10 %.

Parejas $\psi_i$	K	Teórico $\chi^2(d)$	Experimental $\chi^2(2)$
125	5	33.1	14.4
500	10	117.4	100.8
1000	10	117.4	95.4
5000	30	953.7	889.9
10000	35	1287.8	1197.2
25000	50	2590.0	2433.6
50000	70	5026.2	4785.7

Tabla A.2. Test  $\chi^2$  en dos dimensiones.

La figura A.1 representa la repartición de 500 parejas  $\psi_i$  generadas por la subrutina RAND.

### 3). Test de series monótonas crecientes.

Este es un test más directo de la asunción de independencia. Se examina la secuencia de  $u_i$  para detectar subsecuencias en las cuales los  $u_i$  van tomando un valor monótono creciente, tal subsecuencia se denomina serie monótona creciente.



Para una secuencia de  $n$  valores  $u_i$  se contabilizan el número de series monótonas crecientes de logitud 1, 2, 3, 4, 5 y mayor o igual a 6, este parámetro se denota con  $r_i$ .

Se forma el estadístico.

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - n b_i) (r_j - n b_j)$$

donde  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  son constantes que se pueden encontrar en las referencias citadas.

El estadístico  $R$ , bajo la hipótesis nula de que los  $u_i$  son valores independientes e idénticamente distribuidos  $U(0,1)$ , se aproximará a una distribución chi-cuadrado con 6 grados de libertad.

En la tabla A.3 se observan los resultados obtenidos empíricamente.

N	R
100	46.69
300	18.52
400	13.67
450	9.92
500	8.29
1000	4.97
5000	6.82
10000	1.36
25000	7.56
50000	9.23
65536	8.82

Tabla A.3. Test de independencia.

Teniendo en cuenta que  $\chi_{0,0}^2 = 10.6$ , se puede observar como el test, al nivel de significación del 10 %, se cumple sólo si el número de datos es superior 450.

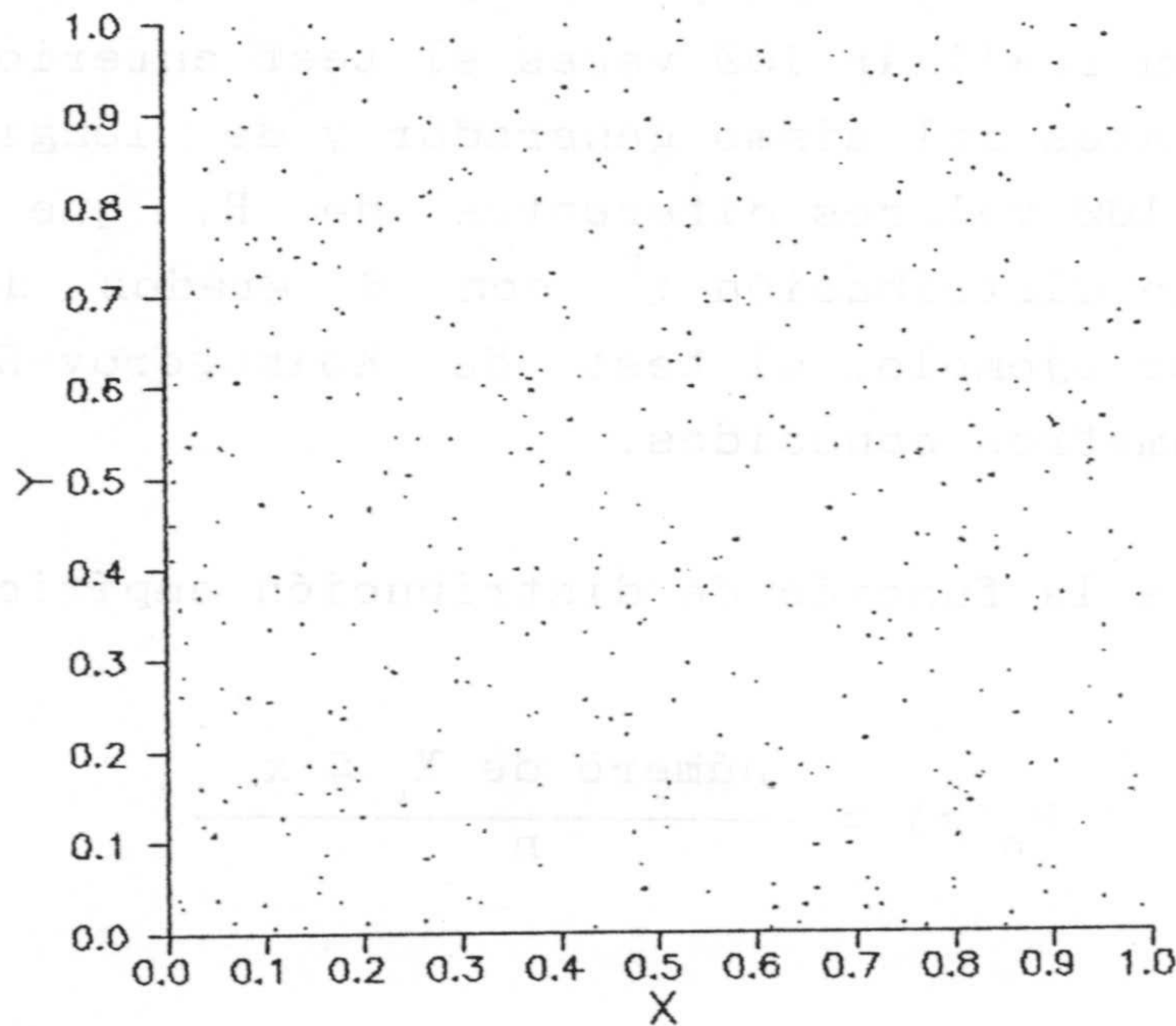


Figura A.1. 500 parejas de valores aleatorios.

Estos test tienen la desventaja de que son locales, esto es, examinan un segmento de los valores aleatorios  $u_i$ , sin poder decir nada sobre el generador en otros segmentos del ciclo.

Como ventaja es que se puede examinar los valores que se utilizarán en una simulación determinada.



4). Test empírico global.

Se realiza un mismo test un número elevado de veces y se compara, desde un punto de vista estadístico, la distribución experimental del estadístico y la distribución teórica bajo la hipótesis nula.

Por ejemplo el test propuesto por LAW y KELTON (1985) que consiste en realizar 100 veces el test anterior sobre 100 cadenas diferentes del mismo generador y de longitud 65536. Se obtendrían 100 valores diferentes de R, que se podría comparar con la distribución  $\chi^2$  con 6 grados de libertad utilizando, por ejemplo, el test de Kolmogorov-Smirnov con todos los parámetros conocidos.

Se calcula la función de distribución empírica como:

$$F_n(x) = \frac{\text{número de } X_i \leq x}{n}$$

y el estadístico de Kolmogorov-Smirnov  $D_n$  es simplemente la distancia vertical más grande entre las funciones de distribución experimental y teórica (figura A.2).

Se rechaza la hipótesis nula si

$$\left[ \sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right] D_n > 1.224$$

para un nivel de significación del 10 %.

En la experiencia realizada  $n = 100$  y se obtiene  $D_n = .0126$ . con lo que se obtiene:

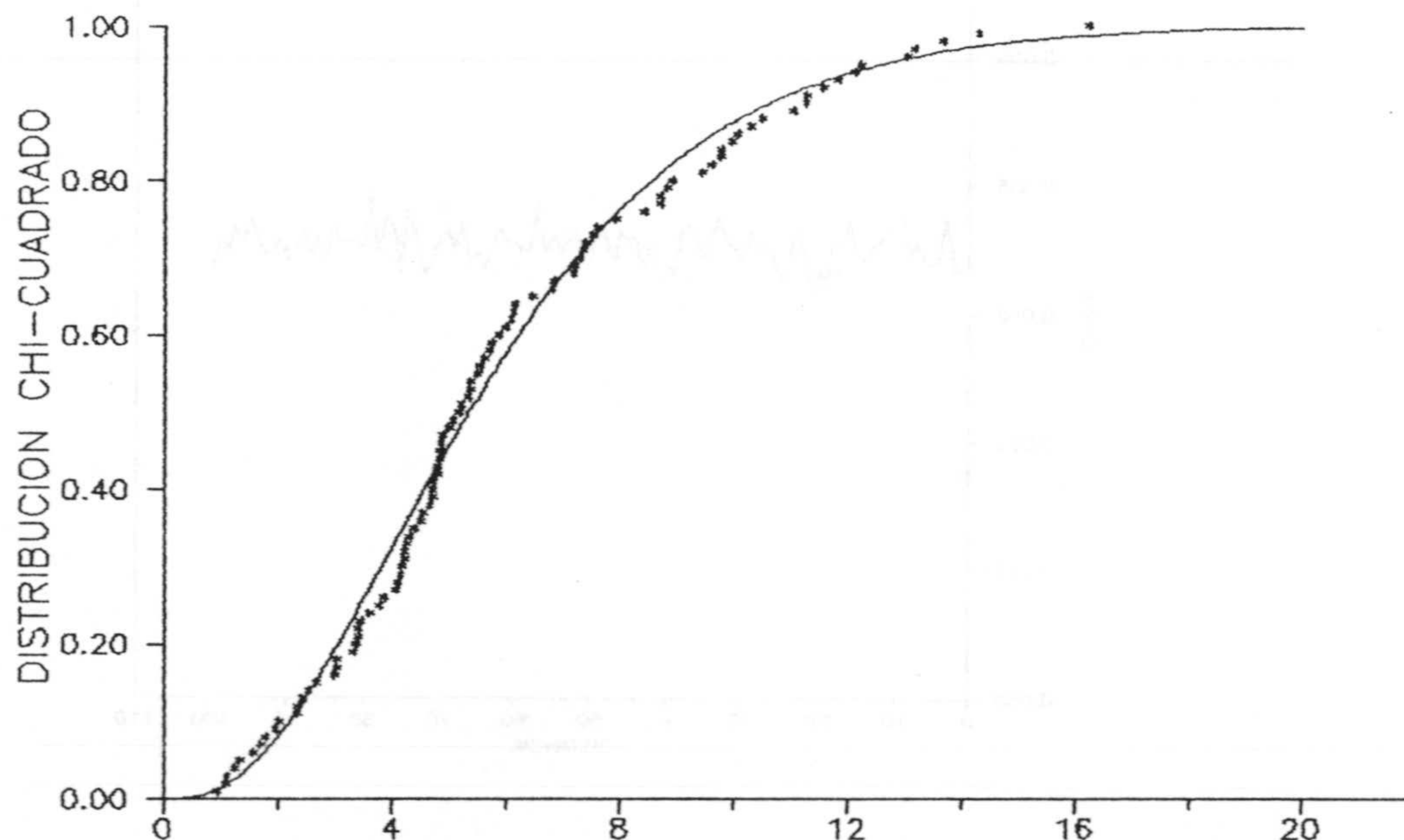


Figura A.2. Distribución  $\chi^2$  teórica con 6 grados de libertad y distribución experimental de R.

#### 4). Variograma experimental.

El variograma experimental de una serie suficientemente larga se ha de aproximar al de un ruido blanco o, en terminos geoestadísticos al variograma de un efecto de pepita puro, cuya expresión gráfica es una línea recta de valor igual a la varianza teórica de  $1/12$ .

El variograma de una serie de 10000 valores se muestra, para una distancia máxima de 100 pasos, en la figura A.3. Es



evidente que los valores generados no están correlacionados.

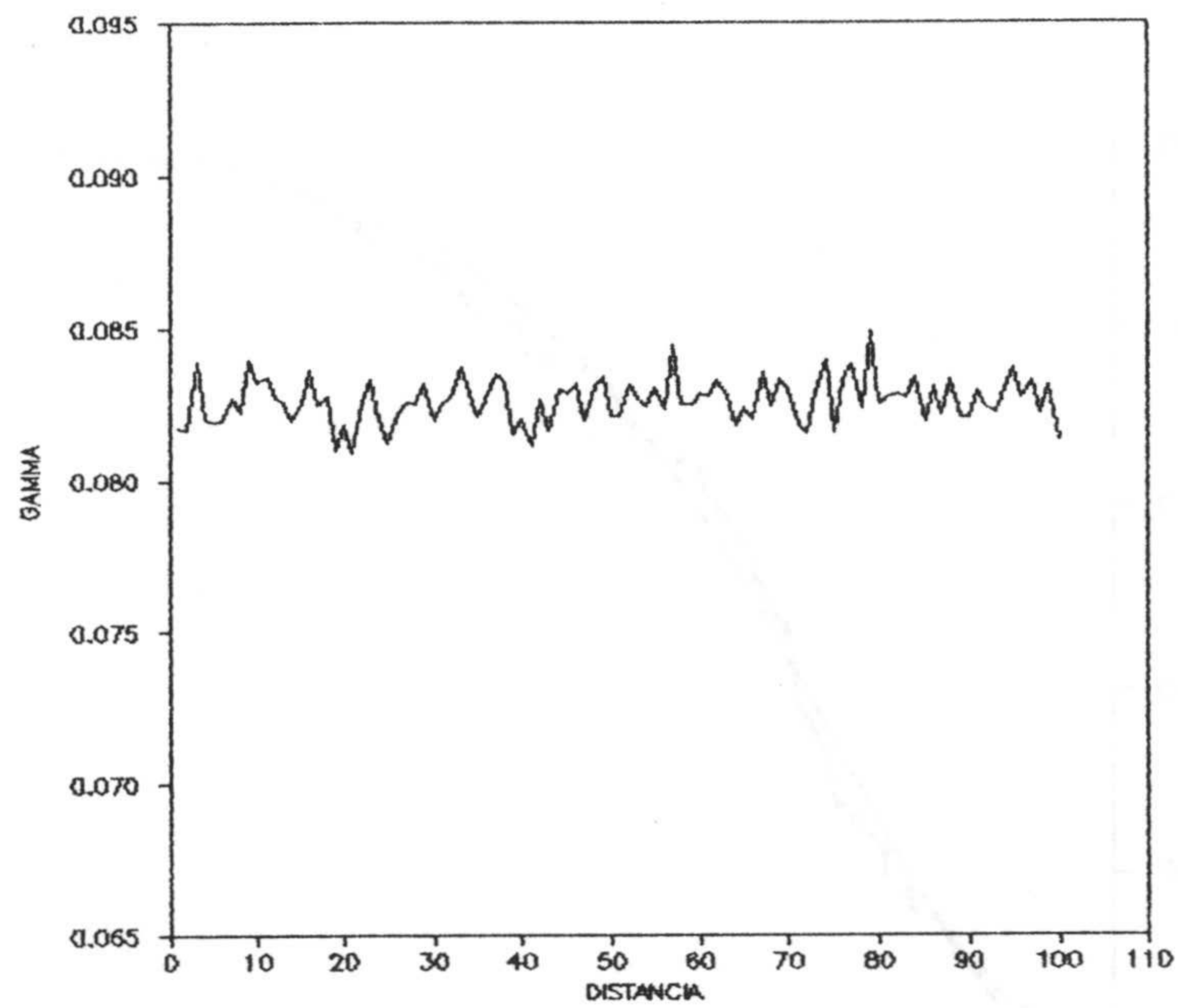


Figura A.3. Variograma experimental y teórico.